GAZİ ÜNİVERSİTESİ

Gazi

1926

DUAL UZAYDA $\bar{M}$- İNTEGRAL EĞRİSİ VE $\bar{M}$- JEODEZİK SPRAY

Yağmur AKBABA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMMUZ 2019

Yağmur AKBABA tarafından hazırlanan "DUAL UZAYDA $\bar{M}$- JEODEZİK SPRAY VE $\bar{M}$-İNTEGRAL EĞRİSİ " adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi MATEMATİK Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ..………………….

Başkan: Prof. Dr. Aysel VANLI

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. …………………...

Üye: Prof. Dr. F. Nejat EKMEKÇİ

Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. …………………...

Tez Savunma Tarihi: 26/07/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

…………………….…….

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Yağmur AKBABA

26/07/2019

DUAL UZAYDA $\bar{M}$- İNTEGRAL EĞRİSİ VE $\bar{M}$- JEODEZİK SPRAY

(Yüksek Lisans Tezi)

Yağmur AKBABA

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2019

ÖZET

Bu tezde ilk olarak Öklid uzayı ve dual uzayla ilgili temel kavramlar verildi. Öklid uzayında jeodezik spray, integral eğrisi, $\bar{M}$- jeodezik spray, $\bar{M}$- integral eğrisi kavramları üzerinde duruldu. Daha sonra bu kavramlar dual uzayda verildi. Son olarak "Bir α eğrisinin $\bar{\alpha}$ tabii liftinin, Z $\bar{M}$- jeodezik sprayı için bir $\bar{M}$- integral eğrisi olabilmesi için gerek ve yeter şart α nın M üzerinde bir $\bar{M}$- jeodezik olmasıdır." teoremi dual uzayda ispatlandı.

Bilim Kodu	:	20402
Anahtar Kelimeler	:	Jeodezik spray, İntegral eğrisi
Sayfa Adedi	:	41
Danışman	:	Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN

$\bar{M}$- INTEGRAL CURVE AND $\bar{M}$- GEODESIC SPRAY ON THE DUAL SPACE

(M. Sc. Thesis)

Yağmur AKBABA

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2019

ABSTRACT

In this thesis, the basic concepts of Euclidean space and dual space were first given. Geodesic spray, integral curve, $\bar{M}$- geodesic spray and $\bar{M}$- integral curve were given in Euclidean space. Then these concepts were given in dual space. And, "The natural lift $\bar{\alpha}$ of the curve α is an $\bar{M}$- integral curve of $\bar{M}$- geodesic spray Z if and only if α is an $\bar{M}$- geodesic on M." is proved in Dual space.

Science Code : 20402

Key Words : Geodesic spray, Integral curve

Page Number : 41

Supervisor : Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, engin bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN’ a teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca tüm hayatım boyunca maddi manevi destekleriyle yanımda olan kıymetli aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\mathbf{E^n}$	n- boyutlu Öklid uzayı
D	Levi- Civita konneksiyon
S	Şekil operatörü
(T)	Eğrinin teğetler göstergesi
(N)	Eğrinin aslinormaller göstergesi
(B)	Eğrinin binormaller göstergesi
$\bar{\mathbf{D}}$	Gauss anlamında türev operatörü

1.GİRİŞ

Bu çalışmanın çıkış noktası Thorpe (1979) tarafından ispatlanan " Bir α eğrisinin $\bar{\alpha}$ tabii liftinin, X jeodezik sprayı için bir integral eğrisi olabilmesi için gerek ve yeter şart α nın M üzerinde bir jeodezik olmasıdır. " teoremidir.

Çalışkan ve Sivridağ (1991) $\bar{M}$- jeodezik spray ve $\bar{M}$- integral eğrisi kavramlarını tanımlayarak " Bir α eğrisinin $\bar{\alpha}$ tabii liftinin, Z $\bar{M}$ jeodezik sprayı için bir $\bar{M}$- integral eğrisi olabilmesi için gerek ve yeter şart α nın M üzerinde bir $\bar{M}$- jeodezik olmasıdır. " teoremini ispatlamışlardır.

Daha sonra Çalışkan ve Karaca (2014) Thorpe tarafından verilen yukarıdaki teoremin dual uzayda ispatını vermişlerdir.

Bu tez çalışmasında ilk olarak dual uzayda $\bar{M}$- vektör alanı, $\bar{M}$- integral eğrisi ve $\bar{M}$- jeodezik spray kavramları verilmiştir. Daha sonra Çalışkan ve Sivridağ (1991) tarafından ispatlanan " Bir α eğrisinin $\bar{\alpha}$ tabii liftinin, Z $\bar{M}$ jeodezik spray için bir $\bar{M}$- integral eğrisi olabilmesi için gerek ve yeter şart α nın M üzerinde bir $\bar{M}$- jeodezik olmasıdır. " teoremi dual uzayda ispatlanmıştır.

2.TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde Öklid uzayına ve dual uzaya ait temel kavramlara yer verilmiştir.

2.1. Öklid Uzayı

2.1.Tanım

A bir reel afin uzay ve V de A ile birleşen vektör uzayı olsun.

$$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, (x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n))$$
$$(x,y) \to \langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Öklid iç çarpımı V de bir iç çarpım işlemi olarak tanımlanırsa A da açı ve uzaklık gibi metrik kavramlar bu işlem yardımı ile tanımlanabilir. A afin uzayı da böylece Öklid uzayı adını alır [1].

2.2.Tanım

$$d : E^n \times E^n \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) = d(x,y) = \|\vec{xy}\|$$

biçimindeki d fonksiyonu E^n de Öklid metriği adını alır [1].

Burada E^n yerine $\mathbb{R}^n$ de alınabilir. Buna göre öklid iç çarpımının $\mathbb{R}^n$ de bir başka ifadesi, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \|\alpha\|.\|\beta\|.\cos\theta$$

şeklindedir. Buradaki θ açısı α, β vektörlerinin arasındaki açıdır ve pozitif yönde ölçülür. Buradan da

$\cos\theta = \frac{\langle \alpha,\beta \rangle}{\|\alpha\|.\|\beta\|}$ dır.

2.3.Tanım

$\{P_0, P_1, ..., P_n\}$ E^n de sıralı bir nokta $(n+1)$- lisi ve $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, ..., \overrightarrow{P_0P_n}\}$ de $\mathbb{R}^n$ de buna karşılık gelen vektör n- lisi olmak üzere $\mathbb{R}^n$ için $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, ..., \overrightarrow{P_0P_n}\}$ bir ortonormal baz ise $\{P_0, P_1, ..., P_n\}$ sistemine E^n in bir dik çatısı yada Öklid çatısı denir [1].

2.2. Topolojik Manifoldlar

2.4.Tanım

Boşdan farklı bir cümle X olmak üzere τ, X in alt kümelerinin koleksiyonu olsun.Verilen bu τ koleksiyonu

$T1) X, \varnothing \in \tau,$

$T2) \forall A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau,$

$T3) A_i \in \tau, i \in I, \bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \tau$

önermelerini doğrularsa τ ya X üzerinde bir topoloji denir.

2.5.Tanım

X bir cümle ve τ da X üzerinde bir topoloji olmak üzere (X, τ) ikilisi bir topolojik uzay adını alır [1].

2.6.Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay ve Y de X in bir alt cümlesi olsun. $Y \cap A_i$ cümlesi $\forall A_i \in \tau$ için Y de açık cümle olarak tanımlanıyor. Y de tanımlanan bu topoloji, X den indirgenmiş relatif topoloji adını alır [1].

2.7. Tanım

X, Y birer topolojik uzay olmak üzere

$f : X \to Y$

şeklinde verilen foksiyon sürekli ise ve ayrıca f^{-1} mevcut ve f^{-1} de sürekli ise f fonksiyonu X den Y ye bir homeomorfizm adını alır. f fonksiyonu bir homeomorfizm olduğu zaman X ile Y uzaylarına da topolojik olarak denktirler veya kısaca homeomorfturlar denir [1].

2.3. Tanjant Vektörler ve Tanjant Uzaylar

2.8. Tanım

V vektör uzayı olmak üzere A da bu vektör uzayıyla birleşen afin uzay olsun. A da bir P noktası V de de bir $\vec{v}$ vektörü için $(P,\vec{v})$ sıralı iklisine A afin uzayının P noktasındaki bir tanjant vektörü denir [1].

$T_P(A)$ ifadesi A afin uzayının, $P \in A$ noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi olmak üzere,
$T_P(A) = \{(P,\vec{v}) : \vec{v} \in V\}$ yada $T_P(A) = \{P\} \times V$
dir. $(P,\vec{v}) \in T_P(A)$ tanjant vektörü kısaca $\vec{v}_P$ ile gösterilir.

2.9. Tanım

$T_P(A)$ da toplama işlemi ve skaler ile çarpma işlemi, sırasıyla,

$$\oplus : T_P(A) \times T_P(A) \to T_P(A)$$
$$((P,\vec{v}),(P,\vec{u})) \to (P,\vec{v}) \oplus (P,\vec{u}) = (P,\vec{v}+\vec{u})$$

yada
$$(\vec{v}_P,\vec{u}_P) \to \vec{v}_P \oplus \vec{u}_P = (\vec{v}+\vec{u})_P$$

ve

$\odot : \mathbb{R} \times T_P(A) \to T_P(A)$

$(\lambda, (P, \vec{v})) \to \lambda \odot (P, \vec{v}) = (P, \lambda \vec{v})$

veya

$(\lambda, \vec{v}_P) \to \lambda \odot \vec{v}_P = (\lambda \vec{v})_P$

şeklinde tanımlanır. $\{T_P(A), \oplus, \mathbb{R}, +, ., \odot\}$ altılısı öyleyse bir vektör uzayı olur.

2.10.Tanım

A afin uzay, P $\in$ A olmak üzere $\{T_P(A), \oplus, \mathbb{R}, +, ., \odot\}$ vektör uzayına bu afin uzayın verilen P noktasındaki tanjant uzayı denir. Kısaca $T_P(A)$ ile gösterilir [1].

M bir manifold ve V, M de herhangi bir komşuluk olsun. $T_P(V)$, $P \in V$ noktasındaki tanjant uzay olsun. V nin bütün noktalarındaki tanjant uzaylarının birleşimi

$\bigcup_{P \in V} T_P(V)$

ile gösterilir. Bir

$\pi : \bigcup_{P \in V} T_P(V) \to V$

dönüşümü $\forall t_p \in T_P(V)$ tanjant vektörü için

$\pi(t_p) = P$

biçiminde tanımlansın. O zaman V komşuluğu üzerindeki bir vektör alanı tanımlanabilir.

2.11. Tanım

$V \subseteq M$ üzerindeki bir vektör alanı operatörü

$$X : V \to \bigcup_{P \in V} T_P(V)$$

biçiminde bir fonksiyondur, öyle ki

$$\pi \circ X = I : V \to V$$

dönüşümü bir özdeşlik fonksiyonudur.

2.4. Jeodezik Spray ve İntegral Eğrisi

2.12. Tanım

E^n , n- boyutlu Öklid uzayı olmak üzere bu uzayda

$$M = \{X \in U \subset E^n \mid f : U \to \mathbb{R}, \vec{\nabla} f|_P \neq \vec{0}, \forall P \in M\}$$

ile tanımlanan M cümlesine, E^n de (n-1)- boyutlu hiperyüzey denir [1].

2.13. Tanım

M, E^n nin bir hiperyüzeyi ve N de M nin birim normal vektör alanı olsun. E^n deki konneksiyon D olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$ için

$$S(X) = D_X N$$

biçiminde tanımlı S dönüşümüne M üzerinde şekil operatörü (veya Weingarten dönüşümü) denir [1].

2.14. Tanım

M, E^n nin bir hiperyüzeyi ve S de M nin Weingarten dönüşümü, D, E^n nin Riemann konneksiyonu olsun. $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$\bar{D}_X Y = D_X Y + \langle S(X), Y \rangle N \tag{2.1}$$

biçiminde tanımlanan $\bar{D}$ operatörüne M üzerinde Gauss anlamında türev operatörü ve yukarıdaki denkleme de M üzerinde Gauss denklemi denir [1].

2.15. Tanım

Birim hızlı bir α eğrisi $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E^3$ şeklinde verilsin. α nın yay parametresi $s \in I$ olsun. $T(s) = \dot{\alpha}(s)$ vektörü α eğrisinin birim teğet vektörü adını alır. α eğrisinin eğriliği $\kappa(s) = \|\ddot{\alpha}\|$ olarak tanımlanır. N(s), α eğrisinin asli normal vektörü ve $\kappa(s) \neq 0$ olmak üzere $\ddot{\alpha} = \kappa(s).N(s)$ dir.B(s), α eğrisinin binormal vektörü olmak üzere bu da $B(s) = T(s) \times N(s)$ ile tanımlanır. $T(s), N(s), B(s)$, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı olup Frenet Denklemleri,

$$\begin{cases} \dot{T} &= \kappa N \\ \dot{N} &= -\kappa T + \tau B \\ \dot{B} &= -\tau N \end{cases}$$

şeklindedir[3].

2.16. Tanım

E^n de bir yüzey M ve α da M üzerinde bir eğri olsun. T α eğrisinin birim teğet vektörü olmak üzere,

$$D_T T = 0 \tag{2.2}$$

ise α, E^n de bir jeodezik eğri olarak adlandırılır. Eğer,

$$\bar{D}_T T = 0 \tag{2.3}$$

ise α M üzerinde bir jeodezik eğri olarak adlandırılır [1].

2.17. Tanım

$\mathbb{R}^n$ de bir açık alt küme U olsun.

$$U \times \mathbb{R}^n = \bigcup_{p \in U} \mathbb{R}^n_p$$

ile tanımlanan kümeye $\mathbb{R}^n$ de U nun Tanjant Bundle' ı denir ve T(U) ile gösterilir [2].

2.18. Tanım

E^{n+1} de M bir hiperyüzey ve M üzerinde α da bir parametrik eğri olsun. M üzerinde X bir diferensiyellenebilir vektör alanı olmak üzere, eğer

$$\dot{\alpha}(t) = X(\alpha(t)), \forall t \in I \tag{2.4}$$

ise α eğrisine X in bir integral eğrisi denir [1].

$T_pM; p \in M$ deki tanjant uzayı ifade etmek üzere,

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM = \chi(M)$$

dir. Burada M nin vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ dir.

2.19. Tanım

$\alpha : I \to M$ herhangi bir parametrik eğri olmak üzere

$$\bar{\alpha}(t) = (\alpha(t), \dot{\alpha}(t)) = \dot{\alpha}(t)_{\alpha(t)} \qquad (2.5)$$

şeklinde verilen $\bar{\alpha} : I \to TM$ parametrik eğrisine α nın TM deki tabii lifti denir [1].

Öyleyse D, E^{n+1} deki konneksiyon olmak üzere,

$$\frac{d\bar{\alpha}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{\alpha(t)}_{\alpha(t)}) = D_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha}(t) \qquad (2.6)$$

ifadesini yazabiliriz.

2.20. Tanım

$V \in TM$ için,

$$X(V) = -\langle V, S(V)\rangle N_p \qquad (2.7)$$

biçiminde tanımlanan $X \in \chi(TM)$ diferensiyellennebilir vektör alanına TM manifoldu üzerinde bir jeodezik spray denir. Burada M nin birim normal vektör alanı N dir [2].

2.21. Teorem

α eğrisinin $\bar{\alpha}$ tabii liftinin X geodezik spray' ı için bir integral eğrisi olması için gerek ve yeter şart α nın M üzerinde bir jeodezik olmasıdır [2].

İspat

($\Rightarrow$): X jeodezik spray' ı için$\bar{\alpha}$ bir integral eğrisi olsun. Bu durumda 2.4 denkleminden ,

$$X(\bar{\alpha}(t)) = \frac{d}{dt}(\bar{\alpha}(t)_{\alpha(t)}) \qquad (2.8)$$

yazılabilir. X ayrıca TM üzerinde bir jeodezik spray olduğu için ,

$$X(\bar{\alpha}(t)) = -\langle \bar{\alpha}(t), S(\bar{\alpha}(t)) \rangle N_{\alpha(t)} \tag{2.9}$$

elde edilir. 2.5, 2.8, 2.9 denklemlerinin birleştirilmesiyle,

$$\frac{d}{dt}(\dot{\alpha}(t)_{\alpha(t)}) = -\langle \dot{\alpha}(t)_{\alpha(t)}, S(\dot{\alpha}(t)_{\alpha(t)}) \rangle N_{\alpha(t)}$$

ve bu son eşitlik bütün $\alpha(t)$ ler için doğru olduğundan 2.6 bağıntısını kullanarak,

$$D_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha}(t) = -\langle \dot{\alpha}(t), S(\dot{\alpha}(t)) \rangle N$$

elde edilir. Bu son eşitlik ve Gauss denkleminden,

$\bar{D}_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha}(t) = D_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha}(t) + \langle \dot{\alpha}(t), S(\dot{\alpha}(t)) \rangle N = 0$ bulunur. Burada $\bar{D}$, M üzerinde Gauss konneksiyonudur. Böylece α nın M de bir jeodezik olduğu görülür.

($\Leftarrow$): α nın M de bir jeodezik olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha}(t) = 0$$

dır. Gauss denkleminden,

$$D_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha}(t) + \langle \dot{\alpha}(t), S(\dot{\alpha}(t)) \rangle N_{\alpha(t)} = 0$$

yazılabilir. 2.6 ve 2.7 denklemleri kullanılarak,

$$\frac{d}{dt}(\dot{\alpha}(t)_{\alpha(t)}) - X(\dot{\alpha}(t)_{\alpha(t)}) = 0$$

ve buradan da

$$\frac{d}{dt}(\dot{\alpha}(t)_{\alpha(t)}) = X(\dot{\alpha}(t)_{\alpha(t)})$$

elde edilir. 2.5 denkleminden

$\frac{d}{dt}(\bar{\alpha}(t)) = X(\bar{\alpha}(t))$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

2.5. Dual Uzay

2.22.Tanım

$\oplus : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$
$A = (a, a^*)$ ve $B = (b, b^*)$ olmak üzere bu iç işlem

$A \oplus B = (a, a^*) \oplus (b, b^*) = (a + b, a^* + b^*)$

biçiminde tanımlanır ve $\mathbb{D}$ deki toplama olarak isimlendirilir [3].

2.23.Tanım

$\odot : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$
$A = (a, a^*)$ ve $B = (b, b^*)$ olmak üzere bu iç işlem

$A \odot B = (a, a^*) \odot (b, b^*) = (ab, ab^* + a^*b)$

biçiminde tanımlanır ve $\mathbb{D}$ deki çarpma olarak isimlendirilir [3].

2.24.Tanım

H birimi 1 olan değişmeli bir halka, a, b $\in$ H ve α, $\beta \in$ S olmak üzere S abel grubu ile S üzerinde

M1) a(α + β)= aα + aβ ,

M2) (a + b) α= aα + bα ,

M3) (ab)α= a(bα) ,

M4) 1 . $\alpha = \alpha$

özelliklerine sahip bir

$H \times S \to S$

$(a, \alpha) \to a\alpha$

dış işlemi H üzerinde bir modül olarak adlandırılır [3].

2.25. Teorem

$(\mathbb{D}^3, +)$ bir abel grubudur.

2.26. Tanım

$\mathbb{D}^3 = \mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ olmak üzere $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası üzerinde

$(\mathbb{D}^3, +, .)$

sistemi bir modüldür. Bu modül $\mathbb{D}$- Modül olarak adlandırılır [3]. $\mathbb{D}$- Modülün her bir elemanına bir dual vektör denir.

2.27. Teorem

$\mathbb{D}$- Modülde her bir $\vec{A}$ dual vektörü $\vec{a}, \vec{a}^* \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere

$\vec{A} = (\vec{a}, \vec{a}^*) = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*, \varepsilon = (0, 1) \in D$

biçiminde yazılabilir.

2.28. Tanım

$\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\vec{a}^*$ şeklindeki bir A vektörünün normu

$$\begin{aligned}\|\vec{A}\| &= (\langle\vec{A},\vec{A}\rangle)^{\frac{1}{2}}\\ &= \left(\|\vec{a}\|,\varepsilon\frac{\langle\vec{a},\vec{a}^*\rangle}{\|\vec{a}\|}\right),\vec{a}\neq 0\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır [3].

2.29. Teorem

$\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\vec{a}^*$ dual vektörü birim dual vektör ise $\|\vec{a}\|=1$ ve $\langle\vec{a},\vec{a}^*\rangle=0$ dır.

2.30. Tanım

$\{\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\vec{a}^*:\|\vec{A}\|=(1,0);\vec{a},\vec{a}^*\in\mathbb{R}^3\}$
cümlesi $\mathbb{D}$- Modül' de birim dual küre adını alır [3].

Dolayısı ile birim dual kürenin elemanları olan vektörler birim dual vektörlerdir.

2.31. Tanım

Dual uzayda verilen bir α eğrisi için $\vec{T},\vec{N},\vec{B}$ dual Frenet vektörleri, $\vec{W}$ dual Darboux vektörü, κ dual eğrilik ve τ dual torsiyon olmak üzere bu α eğrisinin teğet, asli, binormal vektörleri sırasıyla

$$\vec{T}=\vec{t}+\varepsilon\vec{t}^*,$$
$$\vec{N}=\vec{n}+\varepsilon\vec{n}^*,$$
$$\vec{B}=\vec{b}+\varepsilon\vec{b}^*$$

biçiminde tanımlıdır. Ayrıca dual torsiyon ile dual eğrilik de

$$\kappa = k_1 + \varepsilon k_1^*,$$
$$\tau = k_2 + \varepsilon k_2^*$$

biçimindedir. Buradan

$$\begin{cases} \dot{\vec{t}} & = k_1.\vec{n}, \\ \dot{\vec{n}} & = -k_1.\vec{t} + k_2.\vec{b}, \\ \dot{\vec{b}} & = -k_2.\vec{n} \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} \dot{t^*} & = k_1.n^*, \\ \dot{n^*} & = b - k_1.t^* + k_2.b^*, \\ \dot{b^*} & = -n - k_2.n^* \end{cases}$$

elde edilir.

3. $\bar{M}$- İNTEGRAL EĞRİLERİ VE $\bar{M}$- JEODEZİK SPRAYLAR

3.1. Tanım

Z, $\bar{M}$ de bir vektör alanı olsun. Eğer,

$$\begin{aligned} Z &: M \to T_p\bar{M} \\ &\quad p \to Z_p \end{aligned}$$

$Z_p \in T_p\bar{M}$ ise Z vektör alanına M üzerinde $\bar{M}$- vektör alanı adı verilir [4].

Z herhangi bir $\bar{M}$- vektör alanı olmak üzere,

$$Z = Z_t + Z_n$$

biçiminde tanjant ve normal bileşenleri cinsinden yazılabilir. Buradaki Z_n; M üzerinde tanımlı ve ayrıca her noktasında M ye normal olan bir $\bar{M}$- vektör alanı ve Z_t de M üzerinde herhangi bir vektör alanıdır.

$\lambda \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} Z &= Z_t + Z_n \\ &= Z_t + \lambda N \end{aligned}$$

dir.

α, M üzerindeki herhangi bir P noktasından geçen eğri, T ise M üzerindeki α eğrisinin teğet vektör alanı olsun. Z nin T yönündeki kovaryant türevi

$$\begin{aligned} \bar{D}_T Z &= \bar{D}_T Z_t + \bar{D}_T Z_n \\ &= D_T Z_t + \lambda S(T) + \left(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(T), Z_t \rangle\right) N \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\bar{D}_T Z = tan\bar{D}_T Z + nor\bar{D}_T Z$$

ve

$$tan\bar{D}_T Z = D_T Z_t + \lambda S(T),$$
$$nor\bar{D}_T Z = \left(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(T), Z_t\rangle\right) N.$$

3.2. Tanım

$\bar{D}_T Z$, $tan\bar{D}_T Z$, $nor\bar{D}_T Z$ vektörleri Z $\bar{M}$- vektör alanının α eğrisine göre, sırası ile, mutlak eğrilik, geodezik eğrilik , normal eğrilik vektörleri olarak adlandırılır ve $\|\bar{D}_T Z\|$, $\|tan\bar{D}_T Z\|$, $\|nor\bar{D}_T Z\|$ değerlerine ise, sırası ile, mutlak eğrilik, geodezik eğrilik ve normal eğrilik denir [4].

Buradan, $\bar{M}$ üzerinde birim vektör alanı $\bar{N}_A$ olmak üzere

$$\bar{K}_{ZA} = \|\bar{D}_T Z\| \iff \bar{D}_T Z = \bar{K}_{ZA}\bar{N}_A$$

dır ve M üzerinde birim vektör alanı X olmak üzere

$$K_{ZG} = \|tan\bar{D}_T Z\| \iff tan\bar{D}_T Z = \bar{K}_{ZG} X$$

$$K_{ZN} = \|nor\bar{D}_T Z\| \iff nor\bar{D}_T Z = \bar{K}_{ZN} N$$

dır. Burada $\bar{K}_{ZA}$, K_{ZG} ve K_{ZN}, sırası ile, mutlak eğrilik, geodezik eğrilik, normal eğriliktir. Böylece

$$(\bar{K}_{ZA})^2 = (K_{ZG})^2 + (K_{ZN})^2,$$

$$K_{ZN} = \bar{K}_{ZA} cos\theta, cos\theta = \langle \bar{N}_A, N\rangle$$

bağıntılarını yazabiliriz.

3.3. Tanım

X $\in T_pM$ vektörü için,

$$\left(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(X), Z_t \rangle\right)\left(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(X), Z_t \rangle\right) = 0$$

eşitliği sağlanıyor ise, X $\in T_pM$ vektörü Z nin bir asimptotik vektörü adını alır [4].

Eğer α nın teğet vektör alanı olan T, Z nin bir asimptotik vektör alanıysa α eğrisine M de Z nin asimptotik eğrisi denir ve

$$\left(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(T), Z_t \rangle\right)\left(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(T), Z_t \rangle\right) = 0$$

dir, burada $T = \frac{d\alpha}{dt}$ dir.

3.4. Tanım

X, Y $\in T_pM$ için,

$$\left(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(X), Z_t \rangle\right)\left(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(Y), Z_t \rangle\right) = 0$$

eşitliği sağlanıyor ise, X, Y $\in T_pM$ vektörlerine Z nin eşlenik vektörleri denir.

$$\left(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(X), Z_t \rangle\right)\left(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(X), Z_t \rangle\right) = 0$$

eşitliği sağlanıyor ise, X $\in T_pM$ vektörüne Z nin self- adjoint vektörü denir [5].

Tanım 3.3 ve Tanım 3.4 daki eşitliklerden faydalanarak aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

Sonuç

Z nin her asimptotik eğrisinin teğet vektör alanı, Z nin bir self adjoint vektör alanıdır [5].

Sonuç

Eğer X$\in T_pM$, Z nin bir asimptotik vektör alanıysa her λ değeri için

$\lambda = \int \langle S(T), Z_t \rangle dt$

dir [5].

3.5.Tanım

$Z = Z_t + Z_n$ bir $\bar{M}$- vektör olmak üzere,

$$Z_t(\alpha(t)) = \frac{d\alpha}{dt}|_{\alpha(t)} \quad (3.1)$$

eşitliği sağlanıyor ise, $\alpha \subset M$ ya Z nin bir $\bar{M}$ - integral eğrisi denir[5].

3.6.Tanım

$\alpha \subset M$ de herhangi bir eğri olsun.

$\bar{\alpha} : I \to TM$

$t \to \bar{\alpha}(t) = (\alpha(t), \dot{\alpha}(t)) = \dot{\alpha}(t)|_{\alpha(t)}$

şeklinde tanımlanan $\bar{\alpha}$ eğrisine α eğrisinin TM üzerindeki tabii lifti denir [2].

3.7. Tanım

V $\in$ TM vektör alanı için,

$$Z_t(V) = \left(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(V), Z_t \rangle\right) N \tag{3.2}$$

eşitliği sağlanıyor ise, Z, $\bar{M}$ - vektör alanına TM üzerinde $\bar{M}$ - jeodezik spray denir. $\lambda = 0$ için $Z_t(V) = \langle S(V), Z_t \rangle) N$ olacağı için bu tanım TM üzerindeki jeodezik sprayın genelleştirilmiş halidir[5].

3.8. Teorem

α eğrisinin $\bar{\alpha}$ tabii liftinin Z, $\bar{M}$ - jeodezik spray' ı için bir $\bar{M}$ - integral eğrisi olması için gerek ve yeter koşul α nın M üzerinde bir $\bar{M}$ - jeodezik olmasıdır[5].

İspat

($\Rightarrow$): α nın $\bar{\alpha}$ tabii lifti, Z $\bar{M}$ - jeodezik spray için bir $\bar{M}$ - integral eğrisi olsun. Böylece 3.1 denkleminden

$$Z_t(\bar{\alpha}) = \frac{d\bar{\alpha}}{dt} \tag{3.3}$$

dir. Ayrıca Z, TM üzerinde $\bar{M}$ - jeodezik spray olduğu için 3.2 denkleminden

$$Z_t(\bar{\alpha}) = \left(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(\bar{\alpha}), \bar{\alpha} \rangle\right) N \tag{3.4}$$

dir. Buradan da

$$Z_t(\dot{\alpha}) = \left(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(\dot{\alpha}), \dot{\alpha} \rangle\right) N$$
$$\frac{d\bar{\alpha}}{dt} = \left(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(\dot{\alpha}), \dot{\alpha} \rangle\right) N$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$\frac{d\bar{\alpha}}{dt} = \frac{d\dot{\alpha}}{dt} = \bar{D}_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha}$

olduğundan dolayı ve Gauss denkleminden,

$D_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} + \lambda S(\dot{\alpha}) = 0$

elde edilir. Öyleyse α M üzerinde bir $\bar{M}$ - jeodeziktir.

($\Leftarrow$): α M üzerinde bir $\bar{M}$ - jeodezik olsun. O halde,

$D_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} + \lambda S(\dot{\alpha}) = 0$

dir.

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} = \left(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(\dot{\alpha}), \dot{\alpha}\rangle\right) N$$
$$\frac{d\bar{\alpha}}{dt} = \left(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(\dot{\alpha}), \dot{\alpha}\rangle\right) N$$
$$Z_t(\bar{\alpha}) = \left(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(\bar{\alpha}), \bar{\alpha}\rangle\right) N$$

dir. O halde α nın $\bar{\alpha}$ tabii lifti, Z $\bar{M}$ - jeodezik spray için bir $\bar{M}$ - integral eğrisidir.

4. DUAL UZAYDA JEODEZİK SPRAY VE İNTEGRAL EĞRİSİ

4.1. Tanım

M, $\mathbb{D}^n$ dual uzayında bir hiperyüzey ve $N = n+\varepsilon n^*$, M nin birim normal vektör alanı olsun. $\mathbb{D}^n$ deki konneksiyon D olmak üzere, $\forall X = x+\varepsilon x^* \in \chi(M)$ için

$$S(X) = D_X N$$

biçiminde tanımlanan S dönüşümüne M üzerinde şekil operatörü (veya Weingarten dönüşümü) denir. Burada X yerine $x+\varepsilon x^*$, N yerine de $n+\varepsilon n^*$ yazarsak;

$$S(x+\varepsilon x^*) = D_{(x+\varepsilon x^*)}(n+\varepsilon n^*) \tag{4.1}$$

$$S(x)+\varepsilon S(x^*) = D_x n+\varepsilon(D_{x^*}n+D_x n^*) \tag{4.2}$$

olur.

Bu son eşitlikten

$$S(x) = D_x n$$
$$S(x^*) = D_{x^*}n+D_x n^*$$

diyebiliriz.

4.2. Tanım

M, $\mathbb{D}^n$ nin bir hiperyüzeyi ve S de M nin şekil operatörü olsun. D, $\mathbb{D}^n$ nin Riemann konneksiyonu olmak üzere, $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$\bar{D}_X Y = D_X Y + \langle S(X),Y\rangle N$$
$$\bar{D}_x y+\varepsilon(\bar{D}_x y^* + \bar{D}_{x^*}y) = D_x y+\langle S(x),y\rangle n$$
$$+\varepsilon[D_x y^* + D_{x^*}y+\langle S(x),y\rangle n^* + \langle S(x^*),y\rangle n+\langle S(x),y^*\rangle n]$$

biçiminde tanımlanan $\bar{D}$ operatörüne M üzerinde Gauss anlamında türev operatörü denir. Yukarıdaki denkleme de M üzerinde Gauss denklemi denir. Gauss denkleminden

$$\bar{D}_x y = D_x y + \langle S(x), y \rangle n$$
$$\bar{D}_x y^* + \bar{D}_{x^*} y = D_x y^* + D_{x^*} y + \langle S(x), y \rangle n^* + \langle S(x^*), y \rangle n + \langle S(x), y^* \rangle n$$

elde edilir.

4.3. Tanım

M, $\mathbb{D}^n$ de bir yüzey ve $\alpha = \alpha_1 + \varepsilon \alpha_1{}^*$ da M üzerinde bir eğri olsun. α nın birim teğet vektörü $T = t + \varepsilon t^*$ olmak üzere,

$$D_T T = 0 \tag{4.3}$$
$$D_t t + \varepsilon (D_{t^*} t + D_t t^*) = 0 \tag{4.4}$$

ise α ya $\mathbb{D}^n$ de bir jeodezik eğri denir. Eğer,

$$\bar{D}_T T = 0 \tag{4.5}$$
$$\bar{D}_t t + \varepsilon (\bar{D}_t t^* + \bar{D}_{t^*} t) = 0 \tag{4.6}$$

ise α ya M üzerinde bir jeodezik eğri denir.

4.4. Tanım

M, $\mathbb{D}^{n+1}$ de bir hiperyüzey ve $\alpha = \alpha_1 + \varepsilon \alpha_1{}^*$ da M üzerinde herhangi bir eğri olsun. M üzerinde diferensiyellenebilir vektör alanı $X = x + \varepsilon x^*$ olmak üzere, eğer,

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = X(\alpha(t)) \tag{4.7}$$
$$\frac{d}{dt}\alpha_1(t) + \varepsilon \frac{d}{dt}\alpha_1^*(t) = x(\alpha_1(t)) + \varepsilon [x(\alpha_1^*(t)) + x^*(\alpha_1(t))] \tag{4.8}$$

ise α eğrisine X in bir integral eğrisi denir. Buradan

$$\frac{d}{dt}\alpha_1(t) = x(\alpha_1(t))$$
$$\frac{d}{dt}\alpha_1^*(t) = x(\alpha_1^*(t)) + x^*(\alpha_1(t))$$

elde edilir.

$T_pM; p \in M$ deki tanjant uzayı ifade etmekte olup,

$$TM = \bigcup_{p\in M} T_pM = \chi(M)$$

dir. Burada M nin vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ dir.

4.5. Tanım

$\alpha : I \to M$ herhangi bir parametrik eğri olmak üzere

$$\bar{\alpha}(t) = (\alpha(t), \dot{\alpha}(t) = \dot{\alpha}(t)_{\alpha(t)} \tag{4.9}$$
$$\bar{\alpha}_1(t) + \varepsilon(\bar{\alpha}_1^*(t)) = (\alpha_1(t), \dot{\alpha}_1(t)) + \varepsilon[(\alpha_1(t), \dot{\alpha}_1^*(t)) + (\alpha_1^*(t), \dot{\alpha}_1(t))] \tag{4.10}$$

ile verilen $\alpha : I \to TM$ parametrik eğrisine α eğrisinin TM deki tabii lifti denir. Böylece D, E^{n+1} deki konneksiyon olmak üzere,

$$\frac{d\bar{\alpha}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{\alpha}(t)_{\alpha(t)}) = D_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha}(t) \tag{4.11}$$
$$\frac{d\bar{\alpha}_1}{dt} + \varepsilon\left(\frac{d\bar{\alpha}_1^*}{dt}\right) = D_{\dot{\alpha}_1(t)}\dot{\alpha}_1(t) + \varepsilon[D_{\dot{\alpha}_1^*(t)}\dot{\alpha}_1(t) + D_{\dot{\alpha}_1(t)}\dot{\alpha}_1^*(t)] \tag{4.12}$$

yazabiliriz.

4.6. Tanım

$V = v + \varepsilon v^* \in TM$ için,

$$X(V) = -\langle V, S(V)\rangle N \tag{4.13}$$

$$x(v) + \varepsilon(x(v^*) + x^*(v)) = -\langle v, S(v)\rangle n + \varepsilon[-\langle v, S(v)\rangle n^* - \langle v, S(v^*)\rangle n - \langle v^*, S(v)\rangle n] \tag{4.14}$$

olacak biçimde tanımlanan $X = x + \varepsilon x^* \in \chi(TM)$ diferensiyellennebilir vektör alanına TM manifoldu üzerinde bir geodezik spray adı verilir. Burada M nin birim normal vektör alanı $N = n + \varepsilon n^*$ dır. 4.14 denkleminden

$$x(v) = -\langle v, S(v)\rangle n$$
$$x(v^*) + x^*(v) = -\langle v, S(v)\rangle n^* - \langle v, S(v^*)\rangle n - \langle v^*, S(v)\rangle n$$

eşitlikleri elde edilir.

4.7. Teorem

$\alpha = \alpha_1 + \varepsilon\alpha_1^*$ eğrisinin $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_1^*$ tabii liftinin $X = x + \varepsilon x^*$ jeodezik spray' ı için bir integral eğrisi olması için gerek ve yeter koşul $\alpha = \alpha_1 + \varepsilon\alpha_1^*$ nın M üzerinde bir jeodezik olmasıdır.

İspat

$(\Rightarrow)$: $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_1 + \varepsilon\bar{\alpha}_1^*$, $X = x + \varepsilon x^*$ için bir integral eğrisi olsun. Öyleyse 4.8 denkleminden

$$x(\bar{\alpha}_1(t)) + \varepsilon[x(\bar{\alpha}_1^*(t)) + x^*(\bar{\alpha}_1(t))] = \frac{d}{dt}\bar{\alpha}_1(t)|_{\alpha(t)} + \varepsilon\frac{d}{dt}\bar{\alpha}_1^*(t)|_{\alpha(t)} \tag{4.15}$$

dır. Ayrıca X jeodezik spray olduğu için 4.14 denkleminden

$$
\begin{aligned}
x(\bar{\alpha}_1(t))+\varepsilon(x(\bar{\alpha}_1^*(t))+x^*(\bar{\alpha}_1(t))) = & -\langle\bar{\alpha}_1(t),S(\bar{\alpha}_1(t))\rangle n|_{\alpha(t)} \\
& +\varepsilon[-\langle\bar{\alpha}_1(t),S(\bar{\alpha}_1(t))\rangle n^*|_{\alpha(t)}-\langle\bar{\alpha}_1(t),S(\bar{\alpha}_1^*(t))\rangle n|_{\alpha(t)} \\
& -\langle\bar{\alpha}_1^*(t),S(\bar{\alpha}_1(t))\rangle n|_{\alpha(t)}]
\end{aligned}
$$

olur. Bu son denklem ve 4.15 denkleminden

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\bar{\alpha}_1(t)|_{\alpha(t)}+\varepsilon\frac{d}{dt}\bar{\alpha}_1^*(t)|_{\alpha(t)} = & -\langle\bar{\alpha}_1(t),S(\bar{\alpha}_1(t))\rangle n|_{\alpha(t)} \\
& +\varepsilon[-\langle\bar{\alpha}_1(t),S(\bar{\alpha}_1(t))\rangle n^*|_{\alpha(t)}-\langle\bar{\alpha}_1(t),S(\bar{\alpha}_1^*(t))\rangle n|_{\alpha(t)} \\
& -\langle\bar{\alpha}_1^*(t),S(\bar{\alpha}_1(t))\rangle n|_{\alpha(t)}]
\end{aligned}
$$

olur. Buradan da $\bar{\alpha}(t)=\dot{\alpha}(t)|_{\alpha(t)}$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\bar{\alpha}_1(t)|_{\alpha(t)}+\varepsilon\frac{d}{dt}\bar{\alpha}_1^*(t)|_{\alpha(t)} = & -\langle\dot{\alpha}_1(t)|_{\alpha(t)},S(\dot{\alpha}_1(t)|_{\alpha(t)})\rangle n|_{\alpha(t)} \\
& +\varepsilon[-\langle\dot{\alpha}_1(t)|_{\alpha(t)},S(\dot{\alpha}_1(t)|_{\alpha(t)})\rangle n^*|_{\alpha(t)}-\langle\dot{\alpha}_1^*(t)|_{\alpha(t)},S(\dot{\alpha}_1(t)|_{\alpha(t)})\rangle n|_{\alpha(t)} \\
& -\langle\dot{\alpha}_1(t)|_{\alpha(t)},S(\dot{\alpha}_1^*(t)|_{\alpha(t)})\rangle n|_{\alpha(t)}]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu ifade de tüm $\alpha(t)$ ler için sağladığı için ve 4.12 denkleminden

$$
\begin{aligned}
D_{\dot{\alpha}_1(t)}\dot{\alpha}_1(t)+\varepsilon[D_{\dot{\alpha}_1^*(t)}\dot{\alpha}_1(t)+D_{\dot{\alpha}_1(t)}\dot{\alpha}_1^*(t)] = & -\langle\dot{\alpha}_1(t),S(\dot{\alpha}_1(t))\rangle n \\
& +\varepsilon[-\langle\dot{\alpha}_1(t),S(\dot{\alpha}_1(t))\rangle n^*-\langle\dot{\alpha}_1^*(t),S(\dot{\alpha}_1(t))\rangle n \\
& -\langle\dot{\alpha}_1(t),S(\dot{\alpha}_1^*(t))\rangle n]
\end{aligned}
$$

olup,

$$
\bar{D}_{\dot{\alpha}_1(t)}\dot{\alpha}_1(t)+\varepsilon[\bar{D}_{\dot{\alpha}_1^*(t)}\dot{\alpha}_1(t)+\bar{D}_{\dot{\alpha}_1(t)}\dot{\alpha}_1^*(t)]=0
$$

olur. Öyleyse α M üzerinde jeodeziktir.

$(\Leftarrow)$:

α, M üzerinde bir jeodezik olsun. Öyleyse

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}_1(t)}\dot{\alpha}_1(t)+\varepsilon[\bar{D}_{\dot{\alpha}_1^*(t)}\dot{\alpha}_1(t)+\bar{D}_{\dot{\alpha}_1(t)}\dot{\alpha}_1^*(t)]=0$$

dir. Buradan

$$\frac{d}{dt}\bar{\alpha}_1(t)+\varepsilon\frac{d}{dt}\bar{\alpha}_1^*(t)=x(\bar{\alpha}_1(t))+\varepsilon(x(\bar{\alpha}_1^*(t))+x^*(\bar{\alpha}_1(t)))$$

5. DUAL UZAYDA $\bar{M}$- İNTEGRAL EĞRİLERİ VE $\bar{M}$- jEODEZİK SPRAYLAR

$\bar{M}$, bir Riemann manifoldu ve $\bar{M}$ nin bir hiperyüzeyi M, $\bar{M}$ üzerindeki Riemann konneksiyonu $\bar{D}$ olsun. M nin birim vektör alanı olan $N = n + \varepsilon n^*$ den elde edilen şekil operatörü S olsun. $\forall X = x + \varepsilon x^*, Y = y + \varepsilon y^* \in \chi(M)$ için,

$$\bar{D}_X Y = D_X Y - \langle S(X), Y \rangle N$$
$$\bar{D}_x y + \varepsilon(\bar{D}_x^* y + \bar{D}_x y^*) = D_x y - \langle S(x), y \rangle n$$
$$+\varepsilon[D_x^* y + D_x y^* - \langle S(x), y \rangle n^* - \langle S(x^*), y \rangle n - \langle S(x), y^* \rangle n]$$

biçiminde tanımlanan D operatörüne M üzerinde Gauss anlamında türav operatörü ve ayrıca bu denkleme de M üzerinde Gauss Denklemi adı verilir.

5.1.Tanım

$Z = z + \varepsilon z^*$, $\bar{M}$ de bir vektör alanı olsun. Eğer,

$$Z : M \to T_p\bar{M}$$
$$p \to Z_p$$

$Z_p \in T_p\bar{M}$ ise Z vektör alanına M üzerinde $\bar{M}$- vektör alanı denir.

Z herhangi bir $\bar{M}$- vektör alanı olmak üzere

$$Z = Z_t + Z_n$$

biçiminde tanjant ve normal bileşenleri cinsinden yazılabilir. Buradaki Z_n; M üzerinde tanımlı ve ayrıca her noktasında M ye normal olan bir $\bar{M}$- vektör alanı ve Z_t de M üzerinde herhangi bir vektör alanıdır.

$\lambda \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ olmak üzere,

$$Z = Z_t + Z_n$$
$$= Z_t + \lambda N$$
$$z + \varepsilon z^{*} = (z_t + \varepsilon z_t^{*}) + \lambda (n + \varepsilon n^{*})$$

dir.

$\alpha = \alpha_1 + \varepsilon \alpha_1^{*}$, $\mathbb{D}^3$ üzerinde herhangi bir P noktasından geçen eğri ve $T = t_1 + \varepsilon t_1^{*}$ olsun. Z nin T yönündeki kovaryant türevi

$$\begin{aligned}
\bar{D}_T Z &= \bar{D}_T Z_t + \bar{D}_T \lambda N \\
&= D_T Z_t - \langle S(T), Z_t \rangle N + D_T \lambda N - \langle S(T), \lambda N \rangle N \\
&= D_T Z_t + \lambda S(T) + (\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(T), Z_t \rangle) N.
\end{aligned}$$

Buradan

$$tan \bar{D}_T Z = D_T Z_t + \lambda S(T)$$
$$tan \bar{D}_{t_1} z + \varepsilon [tan(\bar{D}_{t_1^{*}} z + \bar{D}_{t_1} z^{*})] = D_{t_1} z_t + \lambda S(t_1) + \varepsilon [D_{t_1^{*}} z_t + D_{t_1} z_t^{*} + \lambda S(t_1^{*})]$$

ve

$$nor \bar{D}_T Z = \left(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(T), Z_t \rangle \right) N$$
$$nor \bar{D}_{t_1} z + \varepsilon [nor(\bar{D}_{t_1^{*}} z + \bar{D}_{t_1} z^{*})] = \left(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(t_1), z_t \rangle \right) n$$
$$+ \varepsilon \left[\left(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(t_1), z_t \rangle \right) n^{*} - \langle S(t_1^{*}), z_t \rangle n - \langle S(t_1), z_t^{*} \rangle n \right]$$

olur. Elde edilen bu tanjant ve normal denklemlerinden de aşağıdaki eşitlikleri verebiliriz.

$$tan\bar{D}_{t_1}z = D_{t_1}z_t + \lambda S(t_1)$$
$$tan(\bar{D}_{t_1^*}z + \bar{D}_{t_1}z^*) = D_{t_1^*}z_t + D_{t_1}z_t^* + \lambda S(t_1^*)$$
$$nor\bar{D}_{t_1}z = \left(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(t_1), z_t\rangle\right)n$$
$$nor(\bar{D}_{t_1^*}z + \bar{D}_{t_1}z^*) = \left(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(t_1), z_t\rangle\right)n^* - \langle S(t_1^*), z_t\rangle n - \langle S(t_1), z_t^*\rangle n$$

5.2.Tanım

$X = x + \varepsilon x^* \in T_pM$ vektörü için

$$(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(X), Z_t\rangle).(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(X), Z_t\rangle) = 0$$
$$[\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(x), z_t\rangle + \varepsilon(-\langle S(x^*), z_t\rangle - \langle S(x), z_t^*\rangle)].[\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(x), z_t\rangle + \varepsilon(-\langle S(x^*), z_t\rangle - \langle S(x), z_t^*\rangle)] = 0$$
$$[\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(x), z_t\rangle].[\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(x), z_t\rangle] + \varepsilon 2[(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(x), z_t\rangle).(-\langle S(x^*), z_t\rangle - \langle S(x), z_t^*\rangle)] = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa $X = x + \varepsilon x^* \in T_pM$ vektörüne Z nin bir asimptotik vektörü adı verilir.

Eğer α eğrisinin teğet vektör alanı olan T, Z nin bir asimptotik vektör alanıysa α ya M de Z nin bir asimptotik eğrisi adı verilir ve

$$(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(T), Z_t\rangle).(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(T), Z_t\rangle) = 0$$
$$[\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(t), z_t\rangle + \varepsilon(-\langle S(t^*), z_t\rangle - \langle S(t), z_t^*\rangle)].[\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(t), z_t\rangle + \varepsilon(-\langle S(t^*), z_t\rangle - \langle S(t), z_t^*\rangle)] = 0$$
$$[\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(t), z_t\rangle].[\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(t), z_t\rangle] + \varepsilon 2[(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(t), z_t\rangle).(-\langle S(t^*), z_t\rangle - \langle S(t), z_t^*\rangle)] = 0$$

dir. Burada $T = \frac{d\alpha}{dt}$ dir.

5.3. Tanım

$X = x + \varepsilon x^*, Y = y + \varepsilon y^* \in T_pM$ vektörleri için

$$(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(X), Z_t\rangle).(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(Y), Z_t\rangle) = 0$$
$$[\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(x), z_t\rangle + \varepsilon(-\langle S(x^*), z_t\rangle - \langle S(x), z_t^*\rangle)].[\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(y), z_t\rangle + \varepsilon(-\langle S(y^*), z_t\rangle - \langle S(y), z_t^*\rangle)] = 0$$
$$[\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(x), z_t\rangle].[\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(y), z_t\rangle] + \varepsilon[(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(y), z_t\rangle).(-\langle S(x^*), z_t\rangle - \langle S(x), z_t^*\rangle)$$
$$+(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(x), z_t\rangle).(-\langle S(y^*), z_t\rangle - \langle S(y), z_t^*\rangle)] = 0$$

eşitliği sağlanıyor ise $X = x + \varepsilon x^*, Y = y + \varepsilon y^* \in T_pM$ vektörlerine Z nin eşlenik vektörleri denir.

$$(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(X), Z_t\rangle).(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(X), Z_t\rangle) = 0$$
$$[\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(x), z_t\rangle + \varepsilon(-\langle S(x^*), z_t\rangle - \langle S(x), z_t^*\rangle)].[\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(x), z_t\rangle + \varepsilon(-\langle S(x^*), z_t\rangle - \langle S(x), z_t^*\rangle)] = 0$$
$$[\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(x), z_t\rangle].[\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(x), z_t\rangle] + \varepsilon 2[(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(x), z_t\rangle).(-\langle S(x^*), z_t\rangle - \langle S(x), z_t^*\rangle)] = 0$$

eşitliği sağlanıyor ise $X = x + \varepsilon x^* \in T_pM$ vektörüne Z nin bir self adjoint vektörü adı verilir.

Öyleyse Tanım 5.2 ve Tanım 5.3 deki eşitliklerden faydalanarak aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

Sonuç

Z nin her asimptotik eğrisinin teğet vektör alanı, Z nin bir self adjoint vektör alanıdır.

Sonuç

Eğer X, Z nin bir asimptotik vektör alanı ise her λ değeri için

$$\lambda = \int \langle S(T), Z_t \rangle dt$$

dir.

5.4. Tanım

$Z = z + \varepsilon z^*$, $Z_t = z_t + \varepsilon z_t^*$, $Z_n = z_n + \varepsilon z_n^*$, olmak üzere $Z = Z_t + Z_n$, $\bar{M}$ vektör alanı için

$$Z_t(\alpha(t)) = \frac{d\alpha}{dt}|_{\alpha(t)},$$
$$(z_t + \varepsilon z_t^*)(\alpha_1 + \varepsilon \alpha_1^*) = \frac{d\alpha_1}{dt} + \varepsilon \frac{d\alpha_1^*}{dt},$$
$$z_t(\alpha_1) + \varepsilon[z_t^*(\alpha_1) + z_t(\alpha_1^*)] = \frac{d\alpha_1}{dt} + \varepsilon \frac{d\alpha_1^*}{dt}$$

eşitliği sağlanıyorsa $\alpha = \alpha_1 + \varepsilon \alpha_1^* \subset M$ eğrisine Z nin bir $\bar{M}$- integral eğrisi denir. Buradan da

$$z_t(\alpha_1) = \frac{d\alpha_1}{dt}$$
$$z_t^*(\alpha_1) + z_t(\alpha_1^*) = \frac{d\alpha_1^*}{dt}$$

eşitlikleri elde edilir.

5.5. Tanım

$\alpha = \alpha_1 + \varepsilon \alpha_1^* \subset M$ de bir eğri olmak üzere

$$\bar{\alpha} : I \to TM$$
$$t \to \bar{\alpha}(t) = (\alpha(t), \dot{\alpha}(t)) = \dot{\alpha}(t)|_{\alpha(t)}$$

$$(\bar{\alpha}_1+\varepsilon\bar{\alpha}_1^*)(t)=[(\dot{\alpha}_1+\varepsilon\dot{\alpha}_1^*)(t)]|_{\alpha(t)},$$
$$\bar{\alpha}_1(t)+\varepsilon\bar{\alpha}_1^*(t)=[\dot{\alpha}_1(t)]|_{\alpha(t)}+\varepsilon[\dot{\alpha}_1^*(t)]|_{\alpha(t)}$$

şeklinde tanımlı $\bar{\alpha}$ eğrisine α nın TM üzerindeki tabii lift eğrisi denir.

5.6. Tanım

$V=v+\varepsilon v^*\in TM$ için

$$Z_t(V)=(\frac{d\lambda}{dt}-\langle S(V),V\rangle)N$$
$$z_t(v)+\varepsilon[z_t^*(v)+z_t(v^*)]=(\frac{d\lambda}{dt}-\langle S(v),v\rangle)n$$
$$+\varepsilon[(\frac{d\lambda}{dt}-\langle S(v),v\rangle)n^*-\langle S(v^*),v\rangle n-\langle S(v),v^*\rangle n]$$

eşitliği sağlanıyorsa, Z, $\bar{M}$- vektör alanına TM- manifoldu üzerinde $\bar{M}$- jeodezik spray denir. Son eşitlikten

$$z_t(v)=(\frac{d\lambda}{dt}-\langle S(v),v\rangle)n$$
$$z_t^*(v)+z_t(v^*)=(\frac{d\lambda}{dt}-\langle S(v),v\rangle)n^*-\langle S(v^*),v\rangle n-\langle S(v),v^*\rangle n$$

elde edilir.

5.7. Teorem

$\alpha=\alpha_1+\varepsilon\alpha_1^*$ eğrisinin $\bar{\alpha}=\bar{\alpha}_1+\bar{\alpha}_1^*$ tabii liftinin $Z=z+\varepsilon z^*$ $\bar{M}$- jeodezik spray' ı için bir integral eğrisi olması için gerek ve yeter şart $\alpha=\alpha_1+\varepsilon\alpha_1^*$ nın M üzerinde bir $\bar{M}$- jeodezik olmasıdır.

İspat

($\Rightarrow$): $\bar{\alpha}$, Z $\bar{M}$- jeodezik spray' ı için bir $\bar{M}$- integral eğrisi olsun. Bu durumda

$$Z_t(\bar{\alpha}) = \frac{d\bar{\alpha}}{dt}$$
$$z_t(\bar{\alpha}_1) + \varepsilon[z_t^*(\bar{\alpha}_1) + z_t(\bar{\alpha}_1^*)] = \frac{d\bar{\alpha}_1}{dt} + \varepsilon\frac{d\bar{\alpha}_1^*}{dt}$$

olur. Ayrıca Z, $\bar{M}$- jeodezik spray olduğundan

$$Z_t(\bar{\alpha}) = (\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(\bar{\alpha}), \bar{\alpha}\rangle)N$$
$$z_t(\bar{\alpha}_1) + \varepsilon[z_t^*(\bar{\alpha}_1) + z_t(\bar{\alpha}_1^*)] = (\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(\bar{\alpha}_1), \bar{\alpha}_1\rangle)n$$
$$+\varepsilon[(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(\bar{\alpha}_1), \bar{\alpha}_1\rangle)n^* - \langle S(\bar{\alpha}_1^*), \bar{\alpha}_1\rangle n - \langle S(\bar{\alpha}_1), \bar{\alpha}_1^*\rangle n]$$

olur. Buradan da

$$\frac{d\bar{\alpha}_1}{dt} + \varepsilon\frac{d\bar{\alpha}_1^*}{dt} = (\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(\bar{\alpha}_1), \bar{\alpha}_1\rangle)n + \varepsilon[(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(\bar{\alpha}_1), \bar{\alpha}_1\rangle)n^* - \langle S(\bar{\alpha}_1^*), \bar{\alpha}_1\rangle n - \langle S(\bar{\alpha}_1), \bar{\alpha}_1^*\rangle n]$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} = (\tfrac{d\lambda}{dt} - \langle S(\dot{\alpha}_1), \dot{\alpha}_1\rangle)n + \varepsilon[(\tfrac{d\lambda}{dt} - \langle S(\dot{\alpha}_1), \dot{\alpha}_1\rangle)n^* - \langle S(\dot{\alpha}_1^*), \dot{\alpha}_1\rangle n - \langle S(\dot{\alpha}_1), \dot{\alpha}_1^*\rangle n]$$

olup

$$tan\bar{D}_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} = 0$$
$$D_{\dot{\alpha}_1}\dot{\alpha}_1 + \lambda S(\dot{\alpha}_1) + \varepsilon[D_{\dot{\alpha}_1^*}\dot{\alpha}_1 + D_{\dot{\alpha}_1}\dot{\alpha}_1^* + \lambda S(\dot{\alpha}_1^*)] = 0$$

elde edilir. O halde α eğrisi M üzerinde bir $\bar{M}$- jeodeziktir.

($\Leftarrow$): α, M üzerinde $\bar{M}$- jeodezik olsun. Bu durumda

$$tan\bar{D}_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} = 0$$

olup buradan

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} = nor\bar{D}_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha}$$
$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} = (\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(\dot{\alpha}_1), \dot{\alpha}_1\rangle)n + \varepsilon[(\frac{d\lambda}{dt} - \langle S(\dot{\alpha}_1), \dot{\alpha}_1\rangle)n^* - \langle S(\dot{\alpha}_1^*), \dot{\alpha}_1\rangle)n - \langle S(\dot{\alpha}_1), \dot{\alpha}_1^*\rangle)n]$$
$$\frac{d\bar{\alpha}_1}{dt} + \varepsilon\frac{d\bar{\alpha}_1^*}{dt} = z_t(\bar{\alpha}_1) + \varepsilon[z_t^*(\bar{\alpha}_1) + z_t(\bar{\alpha}_1^*)]$$

elde edilir. Öyleyse $\bar{\alpha}$, Z $\bar{M}$- jeodezik sprayı için $\bar{M}$- integral eğrisidir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde ilk olarak Öklid uzayında ve dual uzayda jeodezik spray, integral eğrisi ve bunlarla ilgili bazı temel kavram ve teoremler verildi. Dual uzayda $\bar{M}$- vektör alanı, $\bar{M}$- jeodezik spray ve $\bar{M}$- integral eğrisi kavramları incelendi. Daha sonra Çalışkan ve Sivridağ (1991) tarafından ispatlanan " Bir α eğrisinin $\bar{\alpha}$ tabii liftinin, Z $\bar{M}$ jeodezik sprayı için bir $\bar{M}$- integral eğrisi olabilmesi için gerek ve yeter şart α nın M üzerinde bir $\bar{M}$- jeodezik olmasıdır. " teoremi dual uzayda ispatlandı. Bu kavramlar ve teorem üzerine dual Lorentz uzayda da bir çalışma yapılabilir.

KAYNAKLAR

1. Hacısalihoğlu, H., H. (1983). *Diferensiyel Geometri*. Malatya: İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, 1- 50.

2. Thorpe, J. A. (1994). *Elementary Topics In Differential Geometry*. New York, Heidelberg Berlin: Springer- Verlag, 254.

3. Hacısalihoğlu, H., H. (1983). *Hareket Geometri ve Kuaterniyonlar Teorisi*. Ankara: Gazi Üniversitesi Fen- Edebiyat Fakültesi Yayınları, 1- 30.

4. Agashe, N. S. (1974). Curve Assoicated With an $\bar{M}$- Vector Field on a Hypercurface M of a Riemannian Manifold $\bar{M}$. *Tensor*, 177-122.

5. Sivridağ, A. İ., Çalışkan, M. (1991). On The $\bar{M}$- Integral Curves and $\bar{M}$- Geodesic Sprays. *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 7(2), 1283- 1287.

6. Çalışkan, M., Karaca, E. (2014). Some Characterizations For Geodesic Sprays In Dual Space. *International Journal of Engineering and Applied Sciences*. 4(10), 59-63.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: AKBABA, Yağmur
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 25.02.1991, Ankara
Medeni hali	: Bekâr
Telefon	: 0 (554) 662 55 48
e-mail	: yagmurakbb91@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik	Devam ediyor
Lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik	2014
Lise	Farabi Lisesi	2009

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2017-2018	Şehit Enis Kırımlı Ortaokulu	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1) Akbaba, Y., Çalışkan, M. (2018). $\bar{M}$- Geodesic Spray and $\bar{M}$- Integral Curve in the Dual Space, **16th International Geometry Symposium, Celal Bayar Üniversitesi**.

Hobiler

Kitap okumak, Seyahat etmek, Fotoğraf çekmek.

GAZİ GELECEKTİR...