



**MODİFİYE SZASZ-MİRAKYAN OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM
ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ**

Esra ERDALOĞLU

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

TEMMUZ 2019

Esra ERDALOĞLU tarafından hazırlanan “MODİFİYE SZASZ-MİRAKYAN OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi MATEMATİK Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Mediha ÖRKÇÜ

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Başkan: Prof. Dr. Ogün DOĞRU

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Özge DALMANOĞLU

Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı, Başkent Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 11/07/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Esra ERDALOĞLU

11/07/2019

MODİFİYE SZASZ-MİRAKYAN OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM
ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Esra ERDALOĞLU

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2019

ÖZET

Yaklaşım teorisinin önemli bir çalışma alanı lineer pozitif operatörlerle yaklaşımdır. Bu yüzden klasik olarak adlandırabileceğimiz birçok lineer pozitif operatör tanımlanmıştır. Son çalışmalarda ise farklı operatörleri harmanlayarak oluşturulmuş yeni lineer pozitif operatörlerin yaklaşım özelliklerinin incelenmesini görmekteyiz. Bu çalışmada, Goyal ve Kajla tarafından tanımlanan tek değişkenli Blending Tip Lupaş operatörleri için Grüss-Voronovskaya teoremi verilmiştir. Bu genellemenin iki değişkenli fonksiyonlar için tensor çarpımı yardımıyla modifikasyonu verilmiştir. Böylelikle elde edilen operatör dizilerinin noktasal ve global yaklaşım özellikleri verilmiştir. Son olarak ise tek değişkenli Blending Tip Lupaş operatörlerinin q -genellemesi tanımlanmış ve düzgün yakınsaklığı hakkında bilgi verilmiştir.

Bilim Kodu : 20406
Anahtar Kelimeler : Szasz-Mirakyan Operatörleri, Lupaş Operatörleri, q -analiz, Süreklilik Modülü, Ağırlıklı Uzaylar
Sayfa Adedi : 51
Danışman : Doç. Dr. Mediha ÖRKÜ

INVESTIGATION OF THE APPROXIMATION PROPERTIES OF MODIFIED
SZASZ- MIRAKYAN OPERATORS

(M. Sc. Thesis)

Esra ERDALOĞLU

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2019

ABSTRACT

An important area of study of approximation theory is the approach to linear positive operators. For this reason, many linear positive operators can be defined as classical. In recent research, we examined the approximation properties of new linear positive operators that were formed by blending different operators. In this study, the Grüss- Voronovskaya theorem was given for one-variable Blending Type Lupaş operators defined by Goyal and Kajla. Modification of this generalization by using tensor product for two variable functions is given. Thus, the point and global approximation properties of the operator sequences are given. Finally, q -generalization of the univariate Blending Type Lupaş operators was described and information was given about the uniform convergence.

Science Code : 20406

Key Words : Szasz-Mirakyan Operators, Lupaş Operators, q -analysis, Modulus of Continuity, Weighted Spaces

Page Number : 51

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Mediha ÖRKÇÜ

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında bilgi ve tecrübelerini cömertçe sunan, desteğini hiç esirgemeyen, beni cesaretlendiren çok değerli hocam Doç. Dr. Mediha ÖRKÜ' ye sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum. Ayrıca tüm eğitim hayatım boyunca bana maddi manevi destek olan, her zaman inanan başta annem olmak üzere sevgili aileme ve arkadaşlarıma en içten teşekkürlerimi sunuyorum.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	5
2.1. Lineer Pozitif Operatörler	5
2.2. Blending tip Lupaş Operatörlerinin Genellemesi.....	8
2.3. Grüss-Voronovskaja Tip Teorem.....	11
3. BLENDİNG TİP LUPAŞ OPERATÖRLERİN İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYON İÇEREN GENELLEMESİ	13
3.1. $G_{n,m}^{\alpha}(f; x, y)$ Operatörünün Yaklaşım Özellikleri	21
3.2. $G_{n,m}^{\alpha}(f; x, y)$ İçin Yaklaşım Derecesi	21
3.3. Ağırlıklı Uzayda $G_{n,m}^{\alpha}(f; x, y)$ Operatörleri İçin Yaklaşım	24
4. BLENDİNG TİP LUPAŞ OPERATÖRLERİN q -GENELLEMESİ.....	29
4.1. $G_n^{\alpha}(f, ., q)$ Operatörünün Yaklaşım Özellikleri	34
4.2 Ağırlıklı Uzayda Yaklaşım	35
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	45
KAYNAKLAR	47
ÖZGEÇMİŞ	51

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığında tanımlı ve sürekli tüm reel fonksiyonların uzayı
$\ f\ _{C[a,b]}$	$C[a, b]$ uzayında $\ f\ _{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} f(x) $ ile tanımlı norm
I_{ab}	$[0, a] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$ nin bir alt kümesi
$C(I_{ab})$	I_{ab} aralığında tanımlı ve sürekli tüm reel fonksiyonların uzayı
$C_B(\mathbb{R}^+)$	$[0, \infty)$ da sınırlı ve sürekli fonksiyonlar uzayı
$L_n(f; x)$	Lupaş operatörü
$A_n(f; x)$	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir operatör dizisi
$G_n^\alpha(f; x)$	$\alpha \geq 0$ ve $x \in [0, \infty)$ için Lupaş operatörünün bir genellemesi
$\rho(x)$	$\rho(x) \geq 1$ $\mathbb{R}^m$ de sürekli fonksiyon ve $\lim_{ x \rightarrow \infty} \rho(x) = \infty$
$B_\rho(\mathbb{R}^m)$	$\mathbb{R}^m$ uzayında $ f(x) \leq M_f \rho(x)$ eşitsizliğini sağlayan fonksiyonlar uzayı
$C_\rho(\mathbb{R}^m)$	$B_\rho(\mathbb{R}^m)$ uzayındaki tüm sürekli fonksiyonlar uzayı
$B_\rho(\mathbb{R}_+^2)$	$\mathbb{R}_+^2$ uzayında $ f(x, y) \leq M_f \rho(x, y)$ eşitsizliğini sağlayan fonksiyonlar uzayı
$C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$	$B_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ uzayındaki tüm sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_\rho^*(\mathbb{R}_+^2)$	$C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ uzayının alt uzayı
$\ f\ _\rho$	$B_\rho(\mathbb{R}^m)$ uzayında $\ f\ _\rho = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \frac{ f(x) }{\rho(x)}$ ile tanımlanan norm
$G_{n,m}^\alpha(f; x, y)$	$\alpha \geq 0$ ve $x, y \in [0, \infty)$ için G_n^α operatörünün iki değişkenli genellemesi
$\omega(f; \delta)$	f fonksiyonun süreklilik modülü
$\omega_\rho(f; \delta_1, \delta_2)$	Ağırlıklı süreklilik modülü
$Lip_M(\gamma)$	Lipschitz sınıfı
$\Omega(f; \delta)$	Ağırlıklı süreklilik fonksiyonu

1. GİRİŞ

1885 yılında Alman matematikçi Weierstrass tarafından sonlu aralıktaki her fonksiyona bu aralıkta yakınsayan reel katsayılı bir polinom dizisinin varlığı kanıtlanmıştır (Weierstrass, 1885) . Daha sonra, 1912 yılında Rus matematikçi Bernstein, Weierstrass tarafından varlığı bilinen polinom dizisinin $x \in [0,1]$ için

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

şeklinde olduğunu ispatlayarak Bernstein polinomlarını tanıtmıştır (Bernstein, 1912).

Bohman (1952) ve Korovkin (1953) lineer pozitif operatörlerin sonlu aralıkta sürekli fonksiyona yaklaşımına ilişkin çok önemli teoremler vermişlerdir.

1.1. Teorem (Korovkin, 1953)

$f \in C[a, b]$ ve tüm reel ekseninde sınırlı $|f(x)| < M_f$ olsun. Eğer $T_n(f; x)$ lineer pozitif operatörler dizisi $\forall x \in [a, b]$ için

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(1; x) - 1\|_{C[a,b]} = 0$$

$$ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(t; x) - x\|_{C[a,b]} = 0$$

$$iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(t^2; x) - x^2\|_{C[a,b]} = 0$$

koşullarını sağlıyorsa bu durumda $[a, b]$ aralığında

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(f; x) - f\|_{C[a,b]} = 0$$

dır.

Korovkin teoremi yardımıyla birçok lineer pozitif operatörün yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Bunlardan biri, 1950 yılında Szász tarafından tanımlanan

$$S_n(f; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad x \in [0, \infty)$$

Szász operatörüdür (Szász, 1950).

Ayrıca Lupaş lineer pozitif operatörleri,

$$L_n(f; x) = (1 - u)^{nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)_k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) u^k, \quad |u| < 1, \quad n \in \mathbb{N} \text{ ve } x \in [0, \infty)$$

olarak tanımlanmıştır (Lupaş, 1995). Agratini ise Lupaş operatörlerinde $u = \frac{1}{2}$ olarak

$$A_n(f; x) = 2^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)_k}{2^k k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

operatörünü tanımlamıştır (Agratini, 1999).

Operatörler tanımlandıktan sonra bu operatörlerin çeşitli genellemeleri ele alınmıştır. Durrmeyer tip ve Kantorovich tip genellemeler olarak bilinen integral tipli genellemeler ortaya çıkmıştır (Kantorovich, 1930; Durrmeyer, 1967; Derriennic, 1981). Lineer pozitif operatörlerin diğer bir genellemesi de q –analiz ile ilgilidir. Yaklaşımlar teorisinde q –genelleme kavramı ilk kez Lupaş (Lupaş, 1987) tarafından Bernstein polinomlarına uygulanmıştır. Phillips ise (Phillips, 1997) üzerinde daha sıklıkla çalışılan q –Bernstein polinomlarını tanımlamış ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir. q –analiz kullanılarak elde edilen operatörlerle ilgili daha birçok çalışma yapılmıştır (Phillips, 2000; Oruç ve Tuncer, 2002; Ostrovska, 2003; Doğru ve Duman, 2006; Aral ve Gupta, 2006; Agratini ve Doğru, 2010; Dalmanoğlu ve Doğru, 2010; Örkücü ve Doğru, 2012).

Lineer pozitif operatörlerinin genellemesinin oluşturulmasının yollarından biri de iki farklı operatörü harmanlamaktır. Bu yolla üretilmiş yeni operatöre Blending Tip denir. Birçok

yazar Blending Tip operatör elde etmiştir. Örneğin Mihasan (Mihasan, 1999), Baskakov operatörlerinin bir genellemesini bu yolla aşağıdaki şekilde elde etmiştir.

$$B_n^a(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x, a) f\left(\frac{k}{n}\right), \quad x \geq 0.$$

Burada

$$p_{n,k}(x, a) = \frac{e^{\frac{-\alpha x}{1+x}}}{2^{nx}} \frac{p_{n,k}(n, a)}{k!} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}},$$

ve

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x, a) = 1, \quad p_{n,k}(x, a) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (n)_i a^{k-i},$$

$$(n)_0 = 1, (n)_i = n(n+1) \dots (n+i-1), \quad i \geq 1$$

dır.

Goyal ve Kajla ise Agratini tarafından verilen Lupaş operatörünün

$$G_n^\alpha(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} U_{n,k}(x, \alpha) f\left(\frac{k}{n}\right), \quad x \geq 0, \quad \alpha \geq 0$$

$$U_{n,k}(x, \alpha) = \frac{e^{-\alpha x}}{2^{nx}} \frac{V_{k,n}^\alpha(x) x^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} U_{n,k}(x, \alpha) = 1 \text{ ve } V_{k,n}^\alpha(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{\alpha^{k-i} (nx)_i}{(2x)^i}$$

şeklinde bir genellemesini verdiler (Goyal ve Kajla, 2017).

Agrawal ve İspir (Agrawal ve İspir, 2016) Charlier polinomlarını içeren Szász operatörlerinin Chlodowsky polinomlarıyla kombinasyonunu ele almışlar ve yaklaşım özelliklerini vermişlerdir. Agrawal, Kumar ve Araci (Agrawal, Kumar ve Araci, 2017) Bernstein-Chlodowsky ve Szász-Appell-Kantorovich tip operatörünü tanımlamışlardır. Kajla ve Miclăuş (Kajla ve Miclăuş, 2018) Bernstein-Durrmeyer tipindeki GBS operatörlerinin Blending tip yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir.

Bu tezde Goyal ve Kajla tarafından tanımlanan tek değişkenli Blending Tip Lupaş operatörleri için Grüss-Voronovskaja teoremi verilmiş, bu genellemenin iki değişkenli fonksiyon için tensor çarpımı yardımıyla modifikasyonu verilmiştir. Böylece elde edilen operatör dizilerinin test fonksiyonları bulunmuş, süreklilik modülü ile, Lipschitz sınıfında ve ağırlıklı uzayda yaklaşım özellikleri verilmiştir.

Son olarak tek değişkenli Blending Tip Lupaş operatörlerinin q -genellemesi tanımlanmış ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde ise tezde ihtiyaç duyulacak olan tanım, teorem ve özelliklere yer verilmiş, Goyal ve Kajla tarafından tanımlanan tek değişkenli Blending Tip Lupaş operatörleri için Grüss-Voronovskaja teoremi verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Goyal ve Kajla tarafından tanımlanan tek değişkenli Blending Tip Lupaş operatörlerinin iki değişkenli fonksiyon için modifikasyonu tanımlanmış, bu operatör dizilerinin yaklaşım özellikleri, süreklilik modülü ile ve ağırlıklı uzayda yaklaşım özellikleri elde edilmiştir. Ayrıca Lipschitz sınıfındaki yaklaşım özellikleri de verilmiştir.

Dördüncü bölümde, tek değişkenli Blending Tip Lupaş operatörlerinin q –genellemesi tanımlanmış, test fonksiyonları ve momentleri elde edilmiştir. Böylece tanımlanan operatör dizisinin yaklaşım özellikleri ele alınmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez içerisinde kullanılacak bazı tanım, teorem ve özellikler verilecektir.

2.1. Lineer Pozitif Operatörler

2.1.1. Tanım

X ve Y iki fonksiyon uzayı olmak üzere, X' ten alınan her f fonksiyonu için Y 'de bir g fonksiyonunu karşılık getiren bir L dönüşümü varsa “ X uzayından Y uzayına bir operatör tanımlanmıştır” denir. $g \in Y$ ve x g nin tanım kümesinin bir elemanı olmak üzere $L(f; x) = g(x)$ ile gösterilir (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995).

2.1.2. Tanım

X ve Y iki fonksiyon uzayı olmak üzere,

$L: X \rightarrow Y$ bir operatör olsun.

$\forall f, g \in X$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için L operatörü

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$$

şartını sağlıyorsa L operatörüne lineer operatör denir (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995).

2.1.3. Tanım

X ve Y iki fonksiyon uzayı olmak üzere,

$L: X \rightarrow Y$ bir operatör olsun.

$\forall f \in X$ ve $f \geq 0$ için,

$Lf \geq 0$ şartını sağlıyorsa L operatörüne pozitif operatör denir.

L operatörü lineerlik ve pozitiflik özelliklerini aynı anda sağlıyor ise lineer pozitif operatör denir.

2.1.4. Tanım

$A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere (f_n) A üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyon dizisi olsun.

$\forall \varepsilon > 0$ ve her bir $x \in A$ noktasına karşılık öyle bir $n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ var ise $\forall n > n_0$ olduğunda $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ise (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır denir.

2.1.5. Tanım

$\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa öyle ki $\forall n > n_0$ ve $\forall x \in A$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ise (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir.

$(X, \|\cdot\|)$ bir fonksiyon uzayı ve $(f_n) \subset X$ ve $f \in X$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ var öyle ki $\forall n > n_0$ için $\|f_n - f\|_X < \varepsilon$ ise (f_n) fonksiyon dizisi X deki norma göre f fonksiyonuna yakınsaktır denir.

$(f_n) \subset C[a, b]$ dizisinin $C[a, b]$ deki

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

norma göre f fonksiyonuna yakınsaklığı, f fonksiyonuna düzgün yakınsaklığına denktir.

2.1.6. Tanım

$\rho(x) \geq 1$ tüm $\mathbb{R}^m$ uzayında sürekli bir fonksiyon ve $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \rho(x) = \infty$ olsun. Bu durumda $\mathbb{R}^m$ uzayında $|f(x)| \leq M_f \rho(x)$ eşitsizliğini sağlayan fonksiyonlar kümesi $B_\rho(\mathbb{R}^m)$ ile $B_\rho(\mathbb{R}^m)$ uzayındaki tüm sürekli fonksiyonlar kümesi de $C_\rho(\mathbb{R}^m)$ ile gösterilir. Burada M_f, f fonksiyonuna bağlı sabit bir sayıdır.

$$\|f\|_\rho = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \frac{|f(x)|}{\rho(x)}$$

normu ile $B_\rho(\mathbb{R}^m)$ ve $C_\rho(\mathbb{R}^m)$ lineer normlu uzaylardır. Burada ρ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu, C_ρ , B_ρ uzaylarına da ağırlıklı uzaylar denir. Özel durumda $\varphi(x)$ tüm reel ekseninde monoton artan bir fonksiyon olmak üzere $m = 1$ olması halinde

$\rho(x) = 1 + \varphi^2(x)$ şeklinde göz önüne alabiliriz.

$$C_\rho^k(\mathbb{R}^m),$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = K_f < \infty$$

limiti ile $C_\rho(\mathbb{R}^m)$ uzayının bir alt uzayıdır. Özel olarak $K_f = 0$ olduğunda C_ρ^0 alt uzayı elde edilir. Bu uzayın elemanları için

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} = 0 \text{ olur (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995).}$$

2.1.7. Tanım

$f \in C_B(I)$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ de sürekli ve sınırlı fonksiyonlar uzayı) $x \geq 0$ ve $\delta > 0$ olmak üzere,

$$\omega(f; \delta) = \sup_{\substack{|t-x| \leq \delta \\ t, x \in I}} |f(t) - f(x)|$$

olarak tanımlanan $\omega(f; \delta)$ ya f fonksiyonunun süreklilik modülü denir. Süreklilik modülü;

i) $\omega(f; \delta) \geq 0$

ii) $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$

iii) $k \in \mathbb{N}$ için $\omega(f; k\delta) \leq k\omega(f; \delta)$

iv) $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(f; \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(f; \delta)$

v) $|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|)$

vi) $|f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1\right) \omega(f; \delta)$

vii) $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta) = 0 \Leftrightarrow f$ fonksiyonu I aralığında düzgün süreklidir.

özelliklerine sahiptir.

2.2. Blending Tip Lupaş Operatörlerinin Genellemesi

$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için Lupaş (Lupaş, 1995) lineer pozitif operatörleri

$$L_n(f; x) = (1 - u)^{nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)_k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) u^k \quad |u| < 1, n \in \mathbb{N} \text{ ve } x \in [0, \infty), \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlamıştır.

Burada

$$\frac{1}{(1 - u)^{nx}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)_k}{k!} u^k$$

ve $(nx)_i = (nx)(nx + 1)(nx + 2) \dots (nx + i - 1)$ olarak almıştır.

Ayrıca, Eş. 2.1 ile verilen Lupaş operatörünü Agratini (Agratini, 1999) $u = \frac{1}{2}$ olarak aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

$$A_n(f; x) = 2^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)_k}{2^k k!} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (2.2)$$

Daha sonra Goyal ve Kajla (Goyal ve Kajla, 2017) Agratini tarafından Eş. 2.2 ile verilen Lupaş operatörlerinin bir genellemesini,

$$G_n^\alpha(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} U_{n,k}(x, \alpha) f\left(\frac{k}{n}\right), \quad x \geq 0, \quad \alpha \geq 0 \quad (2.3)$$

$$U_{n,k}(x, \alpha) = \frac{e^{-\alpha x} V_{k,n}^\alpha(x) x^k}{2^{nx} k!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} U_{n,k}(x, \alpha) = 1 \text{ ve } V_{k,n}^\alpha(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{\alpha^{k-i} (nx)_i}{(2x)^i}$$

olarak tanımlamıştır. $\alpha = 0$ için G_n^α Eş. 2.2 ile verilen operatöre dönüşür. $C_\gamma[0, \infty)$ uzayı, $\gamma > 0$ için $C_\gamma[0, \infty) := \{f \in C[0, \infty); |f(t)| \leq C e^{\gamma t}, C > 0 \text{ ve } t \in [0, \infty)\}$ olarak tanımlanır.

2.2.1. Lemma

Goyal ve Kajla (Goyal ve Kajla, 2017) $G_n^\alpha(f; x)$ operatörleri için aşağıdaki eşitlikleri vermişlerdir.

$$G_n^\alpha(1; x) = 1$$

$$G_n^\alpha(t; x) = x + \frac{\alpha x}{n}$$

$$G_n^\alpha(t^2; x) = x^2 + \frac{\alpha^2 x^2}{n^2} + \frac{\alpha x}{n^2} + \frac{2x}{n} + \frac{2\alpha x^2}{n}$$

2.2.2. Lemma

$$G_n^\alpha((t - x); x) = \frac{\alpha x}{n}$$

$$G_n^\alpha((t - x)^2; x) = \frac{\alpha^2 x^2}{n^2} + \frac{\alpha x}{n^2} + \frac{2x}{n}$$

$$G_n^\alpha((t-x)^4; x) = \frac{1}{n^4}(\alpha^4 x^4 + 6\alpha^3 x^3 + 7\alpha^2 x^2 + \alpha x) \\ + \frac{1}{n^3}(12\alpha^2 x^3 + 36\alpha x^2 + 26x) + \frac{1}{n^2}(12\alpha^2 x^4 + 36\alpha x^3 + 36x^2).$$

2.2.3. Lemma (Goyal ve Kajla, 2017)

$n \rightarrow \infty$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(G_n^\alpha(t-x; x)) = \alpha x$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(G_n^\alpha((t-x)^2; x)) = 2x$$

2.2.4. Teorem

$f \in C_\gamma[0, \infty)$ olsun. Her $[c, d] \subset \mathbb{R}^+$ kümesinde $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n^\alpha(f; x) = f(x)$ limiti düzgün olarak sağlanır.

İspat

Lemma 2.2.1 göz önüne alındığında

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n^\alpha(1; x) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n^\alpha(t; x) = x$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n^\alpha(t^2; x) = x^2$$

$[c, d] \subset \mathbb{R}^+$ nın her kompakt alt kümesinde Bohman Korovkin teoreminden Teoremin ispatı tamamlanır.

2.3. Grüss-Voronovskaja Tip Teorem

Bu bölümde Eş. 2.3 ile verilen operatörlerin Grüss-Voronovskaja tip yaklaşımını inceleyeceğiz.

2.3.1. Teorem

$f \in C_\gamma[0, \infty)$ ve $x \in [0, \infty)$ için f fonksiyonu f' ve f'' ne sahip olmak üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \{ G_n^\alpha((fg); x) - G_n^\alpha(f; x) G_n^\alpha(g; x) \} = 2xf'(x)g'(x).$$

İspat

$$(fg)''(x) = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + g''(x)f(x)$$

olmak üzere, Taylor serisinden,

$$(fg)(t) = f(x)g(x) + (fg)'(x)(t-x) + \frac{(fg)''(x)}{2!}(t-x)^2$$

yazabiliriz. Burada her iki tarafa da $G_n^\alpha(f; x)$ operatörünü uygularsak

$$G_n^\alpha((fg); x) = f(x)g(x) + (fg)'(x)G_n^\alpha(t-x; x) + \frac{(fg)''(x)}{2!}G_n^\alpha((t-x)^2; x) \quad (2.4)$$

elde ederiz.

$$\begin{aligned}
& n\{G_n^\alpha((fg); x) - G_n^\alpha(f; x)G_n^\alpha(g; x)\} \\
&= n \left\{ \begin{aligned}
& G_n^\alpha((fg); x) - f(x)g(x) - (fg)'(x)G_n^\alpha(t-x; x) - \frac{(fg)''(x)}{2!}G_n^\alpha((t-x)^2; x) \\
& - g(x) \left(G_n^\alpha(f; x) - f(x) - f'(x)G_n^\alpha(t-x; x) - \frac{f''(x)}{2!}G_n^\alpha((t-x)^2; x) \right) \\
& - G_n^\alpha(f; x) \left(G_n^\alpha(g; x) - g(x) - g'(x)G_n^\alpha(t-x; x) - \frac{g''(x)}{2!}G_n^\alpha((t-x)^2; x) \right) \\
& + g'(x)G_n^\alpha(t-x; x)(f(x) - G_n^\alpha(f; x)) + 2 \frac{G_n^\alpha((t-x)^2; x)}{2!} f'(x)g'(x) \\
& + g''(x) \frac{G_n^\alpha((t-x)^2; x)}{2!} (f(x) - G_n^\alpha(f; x))
\end{aligned} \right\} \quad (2.5)
\end{aligned}$$

Eş. 2.5 de Teorem 2.2.4 ü uygularsak $x \in \mathbb{R}^+$ için $n \rightarrow \infty$ iken $G_n^\alpha(f; x) \rightarrow f(x)$ e yakınsar ve

$x \in \mathbb{R}^+$ için $f'' \in C_\gamma[0, \infty)$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(G_n^\alpha(t-x; x)) = \alpha x$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(G_n^\alpha((t-x)^2; x)) = 2x$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(G_n^\alpha(fg; x) - f(x)g(x) - (fg)'(x)G_n^\alpha(t-x; x) - \frac{(fg)''(x)}{2!}G_n^\alpha((t-x)^2; x) \right) = 0$$

yazılabileceğinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\{G_n^\alpha((fg); x) - G_n^\alpha(f; x)G_n^\alpha(g; x)\} = 2xf'(x)g'(x)$$

eşitliği sağlanır. ■

3. BLENDİNG TİP LUPAŞ OPERATÖRLERİN İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYON İÇEREN GENELLEMESİ

$f \in [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ için lineer pozitif operatörleri $n \in \mathbb{N}$ ve $x, y \in [0, \infty)$, $\alpha \geq 0$ olmak üzere $G_n^\alpha(f; x)$ operatörünün iki değişkenli genellemesini

$$G_{n,m}^\alpha(f; x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}, \frac{l}{m}\right) U_{k,l,n,m}(x, y, \alpha) \quad \alpha \geq 0, \quad x, y \geq 0 \quad (3.1)$$

olarak tanımlayalım.

Burada,

$$U_{k,l,n,m}(x, y, \alpha) = \frac{e^{-\alpha x} e^{-\alpha y} V_{k,l,n,m}^\alpha(x, y) x^k y^l}{2^{nx} 2^{my} k! l!}$$

ve

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} U_{k,l,n,m}(x, y, \alpha) = 1$$

dir.

$$V_{k,l,n,m}^\alpha(x, y) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \binom{k}{i} \binom{l}{j} \frac{(nx)_i (my)_j \alpha^{k-i} \alpha^{l-j}}{(2x)^i (2y)^j}$$

Eş. 3.1 ile verilen operatörlerin lineer ve pozitif olduğu görülmektedir. İki değişkenli fonksiyonlar için Korovkin tipli teorem Volkov (Volkov, 1957) 'de bulunabilir.

3.1. Lemma

Aşağıdaki eşitliklere $G_{n,m}^\alpha(f; x, y)$ operatöründe ihtiyaç duyacağız.

$$(i) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{V_{k,l,n,m}^\alpha(x, y) x^k y^l}{k! l!} = 2^{nx} 2^{my} e^{\alpha(x+y)}$$

İspat

$\alpha \geq 0$ ve $x, y \in [0, \infty)$ için,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{V_{k,l,n,m}^{\alpha}(x, y) x^k y^l}{k! l!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{\alpha^{k-i} (nx)_i}{(2x)^i} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{y^l}{l!} \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} \frac{\alpha^{l-j} (my)_j}{(2y)^j} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \frac{(\alpha x)^{k-i} (nx)_i}{2^i (k-i)! i!} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^l \frac{(\alpha y)^{l-j} (my)_j}{2^j (l-j)! j!} \\ &= 2^{nx} e^{\alpha x} 2^{my} e^{\alpha y} \end{aligned}$$

$$(ii) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{V_{k+1,l,n,m}^{\alpha}(x, y) x^{k+1} y^l}{k! l!} = (2^{nx} e^{\alpha x} (\alpha + n)x) 2^{my} e^{\alpha y}$$

İspat

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{V_{k+1,l,n,m}^{\alpha}(x, y) x^{k+1} y^l}{k! l!} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{\alpha^{k+1-i} (nx)_i}{(2x)^i} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k!} \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1} \frac{\alpha^{k+1-i} (nx)_i}{(2x)^i} \right) 2^{my} e^{\alpha y} \\ &= \left(\alpha x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} V_{k,n}^{\alpha}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{\alpha^{k-i} (nx)_{i+1}}{(2x)^{i+1}} \right) 2^{my} e^{\alpha y} \\ &= \left(\alpha x (2^{nx} e^{\alpha x}) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{\alpha^{k-i} (nx)(nx+1)_i}{(2x)^{i+1}} \right) 2^{my} e^{\alpha y} \\ &= \left(\alpha x (2^{nx} e^{\alpha x}) + \frac{nx 2^{nx+1} e^{\alpha x}}{2} \right) 2^{my} e^{\alpha y} \\ &= (2^{nx} e^{\alpha x} (\alpha + n)x) 2^{my} e^{\alpha y} \\ (iii) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{V_{k+2,l,n,m}^{\alpha}(x, y) x^{k+2} y^l}{k! l!} &= ((\alpha^2 x^2 + 2nx^2 \alpha + nx(nx+1)) 2^{nx} e^{\alpha x}) 2^{my} e^{\alpha y} \end{aligned}$$

İspat

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{V_{k+2,l,n,m}^{\alpha}(x,y) x^{k+2} y^l}{k! l!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{k!} \sum_{i=0}^{k+2} \binom{k+2}{i} \frac{\alpha^{k+2-i}(nx)_i}{(2x)^i} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{y^l}{l!} \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} \frac{\alpha^{l-j}(my)_j}{(2y)^j} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{k!} \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k+1}{i-1} \frac{\alpha^{k+2-i}(nx)_i}{(2x)^i} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{k!} \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \frac{\alpha^{k+2-i}(nx)_i}{(2x)^i} \right) 2^{my} e^{\alpha y} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{k!} \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \frac{\alpha^{k+1-i}(nx)_{i+1}}{(2x)^{i+1}} + \alpha x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k!} V_{k+1,n}^{\alpha}(x) \right) 2^{my} e^{\alpha y} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{\alpha^{k+1-i}(nx)_{i+1}}{(2x)^{i+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{k!} \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1} \frac{\alpha^{k+1-i}(nx)_{i+1}}{(2x)^{i+1}} \right. \\
&\quad \left. + \alpha x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k!} V_{k+1,n}^{\alpha}(x) \right) 2^{my} e^{\alpha y} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{\alpha^{k+1-i}(nx)(nx+1)_i}{(2x)^{i+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{\alpha^{k-i}(nx)_{i+2}}{(2x)^{i+2}} \right. \\
&\quad \left. + \alpha x (2^{nx} e^{\alpha x} (\alpha + n)x) \right) 2^{my} e^{\alpha y} \\
&= \left(\frac{(nx)x^2 \alpha 2^{nx+1} e^{\alpha x}}{2x} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{\alpha^{k-i}(nx)(nx+1)(nx+2)_i}{(2x)^{i+2}} \right. \\
&\quad \left. + 2^{nx} e^{\alpha x} (\alpha^2 x^2 + \alpha x^2 n) \right) 2^{my} e^{\alpha y} \\
&= \left(nx^2 \alpha (2^{nx} e^{\alpha x}) + \frac{x^2 (nx)(nx+1) 2^{nx+2} e^{\alpha x}}{(2x)^2} + 2^{nx} e^{\alpha x} (\alpha^2 x^2 + \alpha x^2 n) \right) 2^{my} e^{\alpha y} \\
&= (2^{nx} e^{\alpha x} (nx^2 \alpha + nx(nx+1) + \alpha^2 x^2 + \alpha x^2 n)) 2^{my} e^{\alpha y} \\
&= ((\alpha^2 x^2 + 2nx^2 \alpha + nx(nx+1)) 2^{nx} e^{\alpha x}) 2^{my} e^{\alpha y}.
\end{aligned}$$

3.2. Lemma

$\alpha \geq 0$ ve $x, y \in [0, \infty)$ için Lemma 3.1 den $G_{n,m}^\alpha(f; x, y)$ lineer pozitif operatörleri için aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$(i) G_{n,m}^\alpha(1; x, y) = 1 \quad (3.2)$$

İspat

$$\begin{aligned} G_{n,m}^\alpha(1; x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}, \frac{l}{m}\right) U_{k,l,n,m}(x, y, \alpha) \quad \alpha \geq 0, \quad x \geq 0 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} e^{-\alpha y}}{2^{nx} 2^{my}} \frac{V_{k,l,n,m}^\alpha(x, y) x^k y^l}{k! l!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} e^{-\alpha y}}{2^{nx} 2^{my}} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \binom{k}{i} \binom{l}{j} \frac{(nx)_i (my)_j \alpha^{k-i} \alpha^{l-j}}{(2x)^i (2y)^j} \frac{x^k y^l}{k! l!} \\ &= \frac{e^{-\alpha x} e^{-\alpha y}}{2^{nx} 2^{my}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{\alpha^{k-i} (nx)_i}{(2x)^i} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{y^l}{l!} \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} \frac{\alpha^{l-j} (my)_j}{(2y)^j} \\ &= \frac{e^{-\alpha x} e^{-\alpha y}}{2^{nx} 2^{my}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \frac{(\alpha x)^{k-i} (nx)_i}{2^i (k-i)! i!} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^l \frac{(\alpha y)^{l-j} (my)_j}{2^j (l-j)! j!} \\ &= \frac{e^{-\alpha x} e^{-\alpha y}}{2^{nx} 2^{my}} 2^{nx} e^{\alpha x} 2^{my} e^{\alpha y} \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$(ii) G_{n,m}^\alpha(t; x, y) = x + \frac{\alpha x}{n} \quad (3.3)$$

İspat

$$G_{n,m}^\alpha(t; x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} e^{-\alpha y}}{2^{nx} 2^{my}} \frac{V_{k,l,n,m}^\alpha(x, y) x^k y^l}{k! l!} \left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} e^{-\alpha y}}{2^{nx} 2^{my}} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \binom{k}{i} \binom{l}{j} \frac{(nx)_i (my)_j \alpha^{k-i} \alpha^{l-j}}{(2x)^i (2y)^j} \frac{x^k y^l}{(k-1)! l!} \left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{e^{-\alpha x} e^{-\alpha y}}{2^{nx} 2^{my}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k!} \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \frac{\alpha^{k+1-i} (nx)_i}{(2x)^i} \left(\frac{1}{n}\right) \\
&\quad \times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{y^l}{l!} \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} \frac{\alpha^{l-j} (my)_j}{(2y)^j} \\
&= \frac{e^{-\alpha x} e^{-\alpha y}}{2^{nx} 2^{my}} \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{V_{k+1,l,n,m}^{\alpha}(x,y) x^{k+1} y^l}{k! l!} \\
&= \frac{e^{-\alpha x} e^{-\alpha y}}{2^{nx} 2^{my}} \left(\frac{1}{n}\right) (2^{nx} e^{\alpha x} (\alpha + n)x) 2^{my} e^{\alpha y} \\
&= x + \frac{\alpha x}{n}
\end{aligned}$$

$$(iii) \quad G_{n,m}^{\alpha}(t^2; x, y) = x^2 + \frac{\alpha^2 x^2}{n^2} + \frac{\alpha x}{n^2} + \frac{2x}{n} + \frac{2\alpha x^2}{n} \quad (3.4)$$

İspat

$$\begin{aligned}
G_{n,m}^{\alpha}(t^2; x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} e^{-\alpha y}}{2^{nx} 2^{my}} \frac{V_{k,l,n,m}^{\alpha}(x,y) x^k y^l}{k! l!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} e^{-\alpha y}}{2^{nx} 2^{my}} \\
&\quad \times \left[\sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \binom{k}{i} \binom{l}{j} \frac{(nx)_i (my)_j \alpha^{k-i} \alpha^{l-j} x^k y^l}{(2x)^i (2y)^j k! l!} \right] \left(\frac{k(k-1) + k}{n^2} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} e^{-\alpha y}}{2^{nx} 2^{my}} \left(\sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \binom{k}{i} \binom{l}{j} \frac{(nx)_i (my)_j \alpha^{k-i} \alpha^{l-j} x^k y^l}{(2x)^i (2y)^j (k-2)! l!} \frac{1}{n^2} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \binom{k}{i} \binom{l}{j} \frac{(nx)_i (my)_j \alpha^{k-i} \alpha^{l-j} x^k y^l}{(2x)^i (2y)^j (k-1)! l!} \frac{1}{n^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{-\alpha x} e^{-\alpha y}}{2^{nx} 2^{my}} \left(\frac{1}{n^2} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{V_{k+2,l,n,m}^{\alpha}(x,y) x^{k+2} y^l}{k! l!} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{V_{k+1,l,n,m}^{\alpha}(x,y) x^{k+1} y^l}{k! l!} \right) \\
&= \frac{e^{-\alpha x} e^{-\alpha y}}{2^{nx} 2^{my}} \left(\frac{1}{n^2} \right) (2^{nx} e^{\alpha x} (\alpha^2 x^2 + 2nx^2 \alpha + nx(nx+1)) \\
&\quad + (\alpha + n)x) 2^{my} e^{\alpha y} \\
&= x^2 + \frac{\alpha^2 x^2}{n^2} + \frac{\alpha x}{n^2} + \frac{2x}{n} + \frac{2\alpha x^2}{n}
\end{aligned}$$

$$(iv) \ G_{n,m}^{\alpha}(s; x, y) = y + \frac{\alpha y}{m} \quad (3.5)$$

İspat

$\alpha \geq 0$ ve $x, y \in [0, \infty)$ için,

$$\begin{aligned}
G_{n,m}^{\alpha}(s; x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} e^{-\alpha y}}{2^{nx} 2^{my}} \frac{V_{k,l,n,m}^{\alpha}(x,y) x^k y^l}{k! l!} \left(\frac{1}{m} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} e^{-\alpha y}}{2^{nx} 2^{my}} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \binom{k}{i} \binom{l}{j} \frac{(nx)_i (my)_j \alpha^{k-i} \alpha^{l-j}}{(2x)^i (2y)^j} \frac{x^k y^l}{k! (l-1)!} \left(\frac{1}{m} \right) \\
&= \frac{e^{-\alpha x} e^{-\alpha y}}{2^{nx} 2^{my}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{\alpha^{k-i} (nx)_i}{(2x)^i} \\
&\quad \times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{y^{l+1}}{l!} \sum_{j=0}^{l+1} \binom{l+1}{j} \frac{\alpha^{l+1-j} (my)_j}{(2y)^j} \left(\frac{1}{m} \right) \\
&= \frac{e^{-\alpha x} e^{-\alpha y}}{2^{nx} 2^{my}} \left(\frac{1}{m} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{V_{k,l+1,n,m}^{\alpha}(x,y) x^k y^{l+1}}{k! l!} \\
&= \frac{e^{-\alpha x} e^{-\alpha y}}{2^{nx} 2^{my}} \left(\frac{1}{m} \right) (2^{my} e^{\alpha y} (\alpha + m)y) 2^{nx} e^{\alpha x} \\
&= \left(y + \frac{\alpha y}{m} \right)
\end{aligned}$$

$$(v) \ G_{n,m}^{\alpha}(s^2; x, y) = y^2 + \frac{\alpha^2 y^2}{m^2} + \frac{\alpha y}{m^2} + \frac{2y}{m} + \frac{2\alpha y^2}{m} \quad (3.6)$$

İspat

$$\begin{aligned}
G_{n,m}^\alpha(s^2; x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} e^{-\alpha y}}{2^{nx} 2^{my}} \frac{V_{k,l,n,m}^\alpha(x, y) x^k y^l}{k! l!} \left(\frac{l}{m}\right)^2 \\
G_{n,m}^\alpha(s^2; x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} e^{-\alpha y}}{2^{nx} 2^{my}} \\
&\quad \times \left[\sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \binom{k}{i} \binom{l}{j} \frac{(nx)_i (my)_j \alpha^{k-i} \alpha^{l-j} x^k y^l}{(2x)^i (2y)^j k! l!} \left(\frac{l(l-1)+l}{m^2}\right) \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} e^{-\alpha y}}{2^{nx} 2^{my}} \left(\sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \binom{k}{i} \binom{l}{j} \frac{(nx)_i (my)_j \alpha^{k-i} \alpha^{l-j} x^k y^l}{(2x)^i (2y)^j k! (l-2)!} \frac{1}{m^2} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \binom{k}{i} \binom{l}{j} \frac{(nx)_i (my)_j \alpha^{k-i} \alpha^{l-j} x^k y^l}{(2x)^i (2y)^j k! (l-1)!} \frac{1}{m^2} \right) \\
&= \frac{e^{-\alpha x} e^{-\alpha y}}{2^{nx} 2^{my}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{\alpha^{k-i} (nx)_i}{(2x)^i} \right) \\
&\quad \times \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{y^{l+2}}{l!} \sum_{j=0}^{l+2} \binom{l+2}{j} \frac{\alpha^{l+2-j} (my)_j}{(2y)^j} \left(\frac{1}{m^2}\right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{y^{l+1}}{l!} \sum_{j=0}^{l+1} \binom{l+1}{j} \frac{\alpha^{l+1-j} (my)_j}{(2y)^j} \left(\frac{1}{m^2}\right) \right) \\
&= \frac{e^{-\alpha x} e^{-\alpha y}}{2^{nx} 2^{my}} \left(\frac{1}{m^2}\right) \\
&\quad \times \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{V_{k,l+2,n,m}^\alpha(x, y) x^k y^{l+2}}{k! l!} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{V_{k,l+1,n,m}^\alpha(x, y) x^k y^{l+1}}{k! l!} \right) \\
&= \frac{e^{-\alpha x} e^{-\alpha y}}{2^{nx} 2^{my}} \left(\frac{1}{m^2}\right) (2^{my} e^{\alpha y} (\alpha^2 y^2 + 2my^2 \alpha + my(my+1) \\
&\quad + (\alpha + m)y)) 2^{nx} e^{\alpha x} \\
&= y^2 + \frac{\alpha^2 y^2}{m^2} + \frac{\alpha y}{m^2} + \frac{2y}{m} + \frac{2\alpha y^2}{m}
\end{aligned}$$

3.3. Lemma

$\alpha \geq 0$ ve $x, y \in [0, \infty)$ olsun. $G_{n,m}^\alpha$ operatörleri için aşağıdaki eşitlikleri verebiliriz.

$$(i) G_{n,m}^{\alpha}((t-x); x, y) = \frac{\alpha x}{n}$$

$$(ii) G_{n,m}^{\alpha}((t-x)^2; x, y) = \frac{\alpha^2 x^2}{n^2} + \frac{\alpha x}{n^2} + \frac{2x}{n}$$

$$(iii) G_{n,m}^{\alpha}((t-x)^4; x, y) = \frac{1}{n^4}(\alpha^4 x^4 + 6\alpha^3 x^3 + 7\alpha^2 x^2 + \alpha x) \\ + \frac{1}{n^3}(12\alpha^2 x^3 + 36\alpha x^2 + 26x) \\ + \frac{1}{n^2}(12\alpha^2 x^4 + 36\alpha x^3 + 36x^2)$$

$$(iv) G_{n,m}^{\alpha}((s-y); x, y) = \frac{\alpha y}{m}$$

$$(v) G_{n,m}^{\alpha}((s-y)^2; x, y) = \frac{\alpha^2 y^2}{m^2} + \frac{\alpha y}{m^2} + \frac{2y}{m}$$

$$(vi) G_{n,m}^{\alpha}((s-y)^4; x, y) = \frac{1}{m^4}(\alpha^4 y^4 + 6\alpha^3 y^3 + 7\alpha^2 y^2 + \alpha y) \\ + \frac{1}{m^3}(12\alpha^2 y^3 + 36\alpha y^2 + 26y) \\ + \frac{1}{m^2}(12\alpha^2 y^4 + 36\alpha y^3 + 36y^2)$$

3.4. Lemma

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} n \left(G_{n,m}^{\alpha}(t-x; x, y) \right) = \alpha x$$

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} n \left(G_{n,m}^{\alpha}((t-x)^2; x, y) \right) = 2x$$

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} m \left(G_{n,m}^{\alpha}(s-y; x, y) \right) = \alpha y$$

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} m \left(G_{n,m}^{\alpha}((s-y)^2; x, y) \right) = 2y$$

3.5. Teorem

$I_{ab} := [0, a] \times [0, b] \mathbb{R}_+^2$ nin bir alt kümesi olmak üzere her $f \in C(I_{ab})$ için

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} G_{n,m}^{\alpha}(f; x, y) = f(x, y)$$

limiti I_{ab} aralığında düzgün olarak sağlanır.

İspat

Lemma 3.2 göz önüne alındığında

$\mathbb{R}_+^2$ nin $[0, a] \times [0, b] = I_{ab}$ gibi kompakt alt kümesinde

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} G_{n,m}^\alpha(1; x, y) = 1$$

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} G_{n,m}^\alpha(t; x, y) = x$$

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} G_{n,m}^\alpha(t^2; x, y) = x^2$$

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} G_{n,m}^\alpha(s; x, y) = y$$

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} G_{n,m}^\alpha(s^2; x, y) = y^2$$

koşulları sağlandığında Volkov teoreminden her $f \in C(I_{ab})$ için

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} G_{n,m}^\alpha(f; x, y) = f(x, y)$$

sağlanır.

3.1. $G_{n,m}^\alpha(f; x, y)$ Operatörünün Yaklaşım Özellikleri

Bu bölümde sınırlı ve sürekli uzay üzerinde verilen operatörlerin süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

3.2. $G_{n,m}^\alpha(f; x, y)$ İçin Yaklaşım Derecesi

$I_{ab} := [0, a] \times [0, b]$ $\mathbb{R}_+^2$ nin bir alt kümesi olmak üzere, $C(I_{ab})$, I_{ab} kompakt alt aralığında reel değerli, sürekli fonksiyon uzayı olmak üzere, iki değişkenli fonksiyonlar için süreklilik modülünü aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz;

$$\omega(f; \delta_n, \delta_m) = \sup\{|f(t, s) - f(x, y)| : (t, s), (x, y) \in I_{ab}, |t - x| \leq \delta_n, |s - y| \leq \delta_m\}$$

ya da

$$\omega(f; \delta) = \sup\{|f(t, s) - f(x, y)| : (t, s), (x, y) \in I_{ab} \text{ ve } \sqrt{(t - x)^2 + (s - y)^2} \leq \delta\}$$

şeklinde tanımlanabilir.

Ayrıca x ve y ye göre süreklilik modülleri

$$\omega^1(f; \delta) = \sup\{|f(x_1, y) - f(x_2, y)| : y \in [0, b] \text{ ve } |x_1 - x_2| < \delta\}$$

$$\omega^2(f; \delta) = \sup\{|f(x, y_1) - f(x, y_2)| : x \in [0, a] \text{ ve } |y_1 - y_2| < \delta\}$$

Şeklinde tanımlanır (Anastassiou ve Gal, 2000).

3.2.1. Teorem

$f \in C_B(\mathbb{R}_+^2)$ ve her $(x, y) \geq 0$ için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

$$|G_{n,m}^\alpha(f; x, y) - f(x, y)| \leq 2\omega(f; \delta_{n,m})$$

Burada,

$$\delta_{n,m} = \left(G_{n,m}^\alpha((t-x)^2; x, y) + G_{n,m}^\alpha((s-y)^2; x, y) \right)^{1/2} \text{ olarak alınmıştır.}$$

İspat

Süreklilik modülünün tanımını kullanarak $f \in C_B(\mathbb{R}_+^2)$ ve $\delta_{n,m} > 0$ olmak üzere

$G_{n,m}^\alpha(f; x, y)$ nin lineerliğinden,

$$\begin{aligned} |G_{n,m}^\alpha(f; x, y) - f(x, y)| &\leq G_{n,m}^\alpha(|f(t, s) - f(x, y)|; x, y) \\ &\leq G_{n,m}^\alpha\left(\omega\left(f; \sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}\right); x, y\right) \\ &\leq \omega(f; \delta_{n,m}) \left(1 + \frac{1}{\delta_{n,m}} G_{n,m}^\alpha\left(\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}; x, y\right)\right) \end{aligned}$$

Cauchy Schwartz eşitsizliğini uygulayarak

$$\begin{aligned} &\leq \omega(f; \delta_{n,m}) \left[1 + \frac{1}{\delta_{n,m}} \left(G_{n,m}^\alpha((t-x)^2 + (s-y)^2; x, y)\right)^{1/2}\right] \\ &\leq \omega(f; \delta_{n,m}) \\ &\times \left[1 + \frac{1}{\delta_{n,m}} \left(G_{n,m}^\alpha((t-x)^2; x, y) + G_{n,m}^\alpha((s-y)^2; x, y)\right)^{1/2}\right] \end{aligned}$$

$$\delta_{n,m} = \left(G_{n,m}^\alpha((t-x)^2; x, y) + G_{n,m}^\alpha((s-y)^2; x, y) \right)^{1/2} \text{ olduğundan}$$

$$|G_{n,m}^\alpha(f; x, y) - f(x, y)| \leq \left\{1 + \frac{1}{\delta_{n,m}} \delta_{n,m}\right\} \omega(f; \delta_{n,m})$$

$$|G_{n,m}^\alpha(f; x, y) - f(x, y)| \leq 2\omega(f; \delta_{n,m})$$

istenilen sonuç elde edilir ■

3.2.2. Teorem

Her $(x, y) \in I_{ab}$ ve $f \in C(I_{ab})$ için

$$|G_{n,m}^\alpha(f; x, y) - f(x, y)| \leq 2(\omega^1(f, \delta_n) + \omega^2(f, \delta_m))$$

dir. Burada,

$$\delta_n = \left(G_{n,m}^\alpha((t-x)^2; x, y) \right)^{1/2}$$

ve

$$\delta_m = \left(G_{n,m}^\alpha((s-y)^2; x, y) \right)^{1/2}$$

olarak alınmıştır.

İspat

Süreklilik modülünün tanımından ve Lemma 3.3 ve Cauchy Schwarz eşitsizliğinden yararlanarak,

$$\begin{aligned} |G_{n,m}^\alpha(f; x, y) - f(x, y)| &\leq G_{n,m}^\alpha(|f(t, s) - f(x, y)|; x, y) \\ &\leq G_{n,m}^\alpha(|f(t, s) - f(x, s)|; x, y) \\ &\quad + G_{n,m}^\alpha(|f(x, s) - f(x, y)|; x, y) \\ &\leq G_{n,m}^\alpha(\omega^1(f; |t-x|); x, y) \\ &\quad + G_{n,m}^\alpha(\omega^2(f; |s-y|); x, y) \\ &\leq \omega^1(f; \delta_n) \left[1 + \frac{1}{\delta_n} G_{n,m}^\alpha(|t-x|; x, y) \right] \\ &\quad + \omega^2(f; \delta_m) \left[1 + \frac{1}{\delta_m} G_{n,m}^\alpha(|s-y|; x, y) \right] \\ &\leq \omega^1(f; \delta_n) \left[1 + \frac{1}{\delta_n} \left(G_{n,m}^\alpha((t-x)^2; x, y) \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\quad + \omega^2(f; \delta_m) \left[1 + \frac{1}{\delta_m} \left(G_{n,m}^\alpha((s-y)^2; x, y) \right)^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

Burada δ_n ve δ_m Lemma 3.3 te (ii) ve (v) seçilirse her $(x, y) \in I_{ab}$ için eşitsizlik sağlanır. ■

3.2.3. Teorem

$\gamma_1, \gamma_2 \in (0, 1]$ için $f \in Lip_M(\gamma_1, \gamma_2)$ olmak üzere,

$$|f(t, s) - f(x, y)| \leq M|t-x|^{\gamma_1}|s-y|^{\gamma_2}$$

$$\|G_{n,m}^\alpha(f) - f\| \leq M\delta_n^{\gamma_1/2}\delta_m^{\gamma_2/2}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradaki δ_n ve δ_m Teorem 3.2.2' de verilmiştir.

İspat

$f \in Lip_M(\gamma_1, \gamma_2)$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
 |G_{n,m}^\alpha(f; x, y) - f(x, y)| &\leq G_{n,m}^\alpha(|f(t, s) - f(x, y)|; x, y) \\
 &\leq G_{n,m}^\alpha(M|t - x|^{\gamma_1}|s - y|^{\gamma_2}; x, y) \\
 &\leq MG_{n,m}^\alpha(|t - x|^2; x, y)G_{n,m}^\alpha(|s - y|^2; x, y) \\
 (p_1, q_1) &= \left(\frac{2}{\gamma_1}, \frac{2}{2-\gamma_1}\right) \text{ ve } (p_2, q_2) = \left(\frac{2}{\gamma_2}, \frac{2}{2-\gamma_2}\right) \text{ olmak üzere Hölder eşitsizliği uygulanırsa,} \\
 |G_{n,m}^\alpha(f; x, y) - f(x, y)| &\leq MG_{n,m}^\alpha(|t - x|^2; x, y)^{\gamma_1/2} G_{n,m}^\alpha(1; x, y)^{2-\gamma_1/2} \\
 &\quad \times G_{n,m}^\alpha(|s - y|^2; x, y)^{\gamma_2/2} G_{n,m}^\alpha(1; x, y)^{2-\gamma_2/2} \\
 &\leq M\delta_n^{\gamma_1/2} \delta_m^{\gamma_2/2}
 \end{aligned}$$

böylece ispat tamamlanmış olur. ■

3.3. Ağırlıklı Uzayda. $G_{n,m}^\alpha(f; x, y)$ Operatörleri İçin Yaklaşım

$\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y): x \geq 0, y \geq 0\}$ olmak üzere, $\mathbb{R}_+^2$ uzayında $|f(x, y)| \leq M_f \rho(x, y)$ eşitsizliğini sağlayan fonksiyonlar kümesi $B_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ ile gösterilmektedir. Burada $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ ve M_f, f fonksiyonuna bağlı bir sabittir. $B_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ uzayının tüm sürekli fonksiyonlarının alt uzayını $C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ ile gösteririz.

$$\|f\|_\rho = \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2} \frac{|f(x, y)|}{\rho(x, y)}$$

normu ile $B_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ ve $C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ lineer normlu uzaylardır. Burada $\rho(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu, B_ρ ve C_ρ uzaylarına da ağırlıklı uzaylar denir.

$$C_\rho^*(\mathbb{R}_+^2),$$

$$\lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} \frac{f(x, y)}{\rho(x, y)} = k_f < \infty$$

limiti ile $C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ uzayının bir alt uzayıdır.

3.3.1. Teorem (Hacısalihoglu ve Hacıyev, 1995)

Keyfi $m \geq 1$ için $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2}$ olmak üzere (T_n) lineer pozitif operatörler dizisi tanımlanabilir öyle ki, $\rho(x) = 1 + |x|^2$ için $C_p(\mathbb{R}_+^m)$ den $B_p(\mathbb{R}_+^m)$ ye dönüşümü için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(1; x) - 1\|_\rho = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(t_j; x) - x_j\|_\rho = 0, j = 1, 2, \dots, m$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(|t|^2; x) - |x|^2\|_\rho = 0$$

şeklinde $(m + 2)$ şartları sağlansın. Bu durumda $C_\rho(\mathbb{R}^m)$ uzayında öyle bir f^* fonksiyonu bulunabilir ve $n \rightarrow \infty$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(f^*; x) - f^*(x)\|_\rho \geq 1$$

olur.

3.3.2. Teorem (Hacısalihoglu ve Hacıyev, 1995)

Keyfi $m \geq 1$ için öyle (T_n) lineer pozitif operatörler dizisi tanımlanabilir öyle ki, $\rho(x) = 1 + |x|^2$ için $C_p(\mathbb{R}_+^m)$ den $B_p(\mathbb{R}_+^m)$ ye dönüşümü için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(1; x) - 1\|_\rho = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(t_j; x) - x_j\|_\rho = 0, j = 1, 2, \dots, m$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(|t|^2; x) - |x|^2\|_\rho = 0$$

şeklinde $(m + 2)$ şartları sağlansın. Bu durumda her $f \in C_\rho^*(\mathbb{R}_+^m)$ olmak üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(f; x) - f\|_\rho = 0$$

olur.

3.3.3. Teorem

$(G_{n,m}^\alpha)$ lineer pozitif operatörler dizisi $\rho(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ olmak üzere $C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ den $B_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ ye dönüşümdür ve

$$\text{i) } \lim_{n,m \rightarrow \infty} \|G_{n,m}^\alpha(1; x, y) - 1\|_\rho = 0$$

$$\text{ii) } \lim_{n,m \rightarrow \infty} \|G_{n,m}^\alpha(t; x, y) - x\|_\rho = 0$$

$$\text{iii) } \lim_{n,m \rightarrow \infty} \|G_{n,m}^\alpha(s; x, y) - y\|_\rho = 0$$

$$\text{iv) } \lim_{n,m \rightarrow \infty} \|G_{n,m}^\alpha(t^2; x, y) - x^2\|_\rho = 0$$

$$\text{v) } \lim_{n,m \rightarrow \infty} \|G_{n,m}^\alpha(s^2; x, y) - y^2\|_\rho = 0$$

şartları sağlanır. Her bir $f \in C_\rho^*(\mathbb{R}_+^2)$ için,

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|G_{n,m}^\alpha(f; x, y) - f\|_\rho = 0$$

dir.

İspat

$G_{n,m}^\alpha(1 + t^2 + s^2; x, y) \leq M(1 + x^2 + y^2)$ olduğundan $(G_{n,m}^\alpha)$ lineer pozitif operatörler dizisi $C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ den $B_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ ye dönüşümdür.

$n, m \rightarrow \infty$ için

$$G_{n,m}^\alpha(1; x, y) = 1 \text{ olduğundan } \|G_{n,m}^\alpha(1; x, y) - 1\|_\rho = 0 \text{ sağlanır.}$$

Eş. 3.3 den $G_{n,m}^\alpha(t; x, y) = x + \frac{\alpha x}{n}$ olduğundan

$$\sup_{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2} \frac{|G_{n,m}^\alpha(t; x, y) - x|}{1 + x^2 + y^2} \text{ için}$$

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|G_{n,m}^\alpha(t; x, y) - x\|_\rho = 0$$

dır.

Ayrıca,

Eş. 3.4 den $G_{n,m}^\alpha(t^2; x, y) = x^2 + \frac{\alpha^2 x^2}{n^2} + \frac{\alpha x}{n^2} + \frac{2x}{n} + \frac{2\alpha x^2}{n}$ olduğundan

$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|G_{n,m}^\alpha(t^2; x, y) - x^2\|_\rho = 0$ eşitliği doğrulanır.

iii) ve v) de Eş. 3.5 ve Eş. 3.6 dan sağlanır.

Yukarıdaki koşullar sağlandığından Teorem 3.3.2' den her bir $f \in C_\rho^*(\mathbb{R}_+^2)$ için

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|G_{n,m}^\alpha(f; x, y) - f\|_\rho = 0$$

dir. Böylece ispat tamamlanır. ■

$f \in C_\rho^*(\mathbb{R}_+^2)$ için ağırlıklı süreklilik modülü

$$\omega_\rho(f; \delta_1, \delta_2) = \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2} \sup_{|h_1| \leq \delta_1, |h_2| \leq \delta_2} \frac{|f(x+h_1, y+h_2) - f(x, y)|}{\rho(x, y)\rho(h_1, h_2)}$$

şeklinde tanımlanır (Atakut ve İspir, 2002).

3.3.4. Teorem

$f \in C_\rho^*(\mathbb{R}_+^2)$ ve yeterince büyük n, m için

$$\sup_{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2} \frac{|G_{n,m}^\alpha(f; x, y) - f(x, y)|}{\rho(x, y)^3} \leq M \omega_\rho(f; \delta_1, \delta_2)$$

$\delta_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ve $\delta_m = \frac{1}{\sqrt{m}}$ olarak alınmıştır. M burada bir sabittir.

İspat:

$$|f(t, s) - f(x, y)| \leq 8(1 + x^2 + y^2) \omega_\rho(f; \delta_n, \delta_m)$$

$$\times \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta_n}\right) \left(1 + \frac{|s-y|}{\delta_m}\right) (1 + (t-x)^2)(1 + (s-y)^2).$$

$$|G_{n,m}^\alpha(f; x, y) - f(x, y)| \leq 8(1 + x^2 + y^2)\omega_\rho(f; \delta_n, \delta_m)$$

$$\begin{aligned} & \times \left[1 + G_{n,m}^\alpha((t-x)^2; x, y) + \frac{1}{\delta_n} \sqrt{G_{n,m}^\alpha((t-x)^2; x, y)} \right. \\ & \quad \times \left. \frac{1}{\delta_n} \sqrt{G_{n,m}^\alpha((t-x)^2; x, y) G_{n,m}^\alpha((t-x)^4; x, y)} \right] \\ & \times \left[1 + G_{n,m}^\alpha((s-y)^2; x, y) + \frac{1}{\delta_m} \sqrt{G_{n,m}^\alpha((s-y)^2; x, y)} \right. \\ & \quad \times \left. \frac{1}{\delta_m} \sqrt{G_{n,m}^\alpha((s-y)^2; x, y) G_{n,m}^\alpha((s-y)^4; x, y)} \right] \end{aligned}$$

$$G_{n,m}^\alpha((t-x)^2; x, y) = \frac{1}{n} M_1(x^2 + x)$$

ve

$$G_{n,m}^\alpha((t-x)^4; x, y) = \frac{1}{n} M_2(x^4 + x^3 + x^2 + x)$$

yazılabileceğinden ve $\delta_1 = \delta_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\delta_2 = \delta_m = \frac{1}{\sqrt{m}}$ alınırsa,

$$|G_{n,m}^\alpha(f; x, y) - f(x, y)| \leq 8(1 + x^2 + y^2)\omega_\rho(f; \delta_n, \delta_m)$$

$$\begin{aligned} & \times \left[1 + \frac{1}{n} M_1(x^2 + x) + \frac{1}{\delta_n} \sqrt{M_1(x^2 + x)} \right] \\ & \times \left[\frac{1}{\delta_n} \sqrt{M_1 M_2(x^2 + x)(x^4 + x^3 + x^2 + x)} \right] \\ & \times \left[1 + \frac{1}{m} M_3(y^2 + y) + \frac{1}{\delta_m} \sqrt{M_3(y^2 + y)} \right] \\ & \times \left[\frac{1}{\delta_m} \sqrt{M_3 M_4(y^2 + y)(y^4 + y^3 + y^2 + y)} \right] \end{aligned}$$

Burada $n \geq n_0$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için

$$\sup_{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2} \frac{|G_{n,m}^\alpha(f; x, y) - f(x, y)|}{(1 + x^2 + y^2)^3} \leq M\omega_\rho\left(f; \sqrt{1/n}, \sqrt{1/m}\right)$$

elde edilir. ■

4. BLENDİNG TİP LUPAŞ OPERATÖRLERİN q -GENELLEMESİ

q –analiz birçok konunun genelleşmesidir. Sayılar teorisi, ortogonal polinomlar, kombinatorik gibi matematiğin çoğu alanında kullanılmaktadır. Jackson, q –analizin en önemli isimlerinden biridir. XX. yy başlarında q – türev ve q –integral tanımlarıyla q –analizin ilerlemesine büyük ölçüde katkı sağlamıştır.

Son yıllarda klasik analizde bilinen çoğu tanım ve teoremin q –genelleşmeleri üzerine çalışılmaktadır (Gauchman 2004, Marinkovich ve ark. 2002, 2008).

q –analizin temel ifadeleri, Kac ve Cheung’un (2002) Quantum Calculus adlı kitabında, detaylar ise Andrews ve Askey’in (1999) Special Functions adlı kitabında yer alır.

$q > 0$ olmak üzere, negatif olmayan r tamsayısı için,

$$[r]_q := \begin{cases} \frac{1 - q^r}{1 - q}, & q \neq 1 \\ r, & q = 1 \end{cases}$$

ifadesine r ’nin q - tamsayısı denir.

$q > 0$ için q - faktöriyel

$$[r]_q! := \begin{cases} [1][2] \dots [r], & r = 1, 2, \dots \\ 1, & r = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

$q > 0$ ve $n \geq r \geq 0$ için

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} := \frac{[n]_q!}{[n-r]_q! [r]_q!}$$

ifadesine q -binom katsayısı denir.

$0 \leq x < \infty$ ve $\alpha \geq 0$ olmak üzere,

$$G_n^\alpha(f; x, q) = \sum_{r=0}^{\infty} U_{n,r}^\alpha(x, q) f\left(\frac{[r]_q}{[n]_q}\right) \quad (4.1)$$

dir.

Burada,

$$U_{n,r}^\alpha(x, q) = \frac{E_q(-\alpha x)}{2^{[n]_q x}} \frac{V_{r,n}^\alpha(x, q) x^r}{[r]_q!}$$

$$E_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n-1)/2} \frac{x^n}{[n]_q!},$$

$$V_{r,n}^\alpha(x, q) = \sum_{s=0}^r \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \frac{\alpha^{r-s} ([n]_q x)_s}{(2x)^s}$$

olarak tanımlanmıştır.

4.1. Lemma

$\alpha \geq 0$ için,

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{[r]_q!} V_{r,n}^\alpha(x, q) = 2^{[n]_q x} e_q(\alpha x) \quad (4.2)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+1}}{[r]_q! [n]_q} V_{r+1,n}^\alpha(x, q) \leq \left(\frac{\alpha x}{[n]_q} + x \right) 2^{[n]_q x} e_q(\alpha x) \quad (4.3)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+1}}{[r]_q! [n]_q} V_{r+1,n}^\alpha(x, q) \geq \left(\frac{q^n \alpha x}{[n]_q} + x \right) 2^{[n]_q x} e_q(\alpha x) \quad (4.4)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+2}}{[r]_q! [n]_q^2} V_{r+2,n}^\alpha(x, q) \leq \left(\frac{\alpha^2 x^2}{[n]_q^2} + \frac{[2]_q \alpha x^2}{[n]_q} + \frac{x}{[n]_q} + x^2 \right) 2^{[n]_q x} e_q(\alpha x) \quad (4.5)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+2}}{[r]_q! [n]_q^2} V_{r+2,n}^\alpha(x, q) \geq \left(\frac{q^{2n} \alpha^2 x^2}{[n]_q^2} + \frac{[2]_q q^n \alpha x^2}{[n]_q} + \frac{x}{[n]_q} + x^2 \right) 2^{[n]_q x} e_q(\alpha x) \quad (4.6)$$

İspat

$2^{[n]_q x} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{([n]_q x)_r}{2^r [r]_q!}$ ve $e_q(\alpha x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^r}{[r]_q!}$ olmak üzere bu iki seriden

$$\begin{aligned}
2^{[n]_q x} e_q(\alpha x) &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^r \frac{([n]_q x)_s}{2^s [s]_q!} \frac{(\alpha x)^{r-s}}{[r-s]_q!} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{[r]_q!} \sum_{s=0}^r [r]_s \frac{\alpha^{r-s} ([n]_q x)_s}{(2x)^s} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{[r]_q!} V_{r,n}^{\alpha}(x, q)
\end{aligned}$$

yazabiliriz.

Burada $\begin{bmatrix} r+1 \\ s \end{bmatrix} = q^s \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r \\ s-1 \end{bmatrix}$ ve $q \in (0,1)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+1}}{[r]_q! [n]_q} V_{r+1,n}^{\alpha}(x, q) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+1}}{[r]_q! [n]_q} \sum_{s=0}^{r+1} \begin{bmatrix} r+1 \\ s \end{bmatrix} \frac{\alpha^{r+1-s} ([n]_q x)_s}{(2x)^s} \\
&= \frac{\alpha x}{[n]_q} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{[r]_q!} \sum_{s=0}^r q^s \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \frac{\alpha^{r-s} ([n]_q x)_s}{(2x)^s} \\
&\quad + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+1}}{[r]_q! [n]_q} \sum_{s=1}^{r+1} \begin{bmatrix} r \\ s-1 \end{bmatrix} \frac{\alpha^{r+1-s} ([n]_q x)_s}{(2x)^s} \\
&\leq \frac{\alpha x}{[n]_q} 2^{[n]_q x} e_q(\alpha x) \\
&\quad + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+1}}{2[r]_q!} \sum_{s=0}^r \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \frac{\alpha^{r-s} ([n]_q x + 1)_s}{(2x)^s} \\
&= \left(\frac{\alpha x}{[n]_q} + x \right) 2^{[n]_q x} e_q(\alpha x)
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+1}}{[r]_q! [n]_q} V_{r+1,n}^{\alpha}(x, q) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+1}}{[r]_q! [n]_q} \sum_{s=0}^{r+1} \begin{bmatrix} r+1 \\ s \end{bmatrix} \frac{\alpha^{r+1-s} ([n]_q x)_s}{(2x)^s} \\
&= \frac{\alpha x}{[n]_q} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{[r]_q!} \sum_{s=0}^r q^s \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \frac{\alpha^{r-s} ([n]_q x)_s}{(2x)^s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+1}}{[r]_q! [n]_q} \sum_{s=1}^{r+1} \begin{bmatrix} r \\ s-1 \end{bmatrix} \frac{\alpha^{r+1-s} ([n]_q x)_s}{(2x)^s} \\
& \geq \frac{q^n \alpha x}{[n]_q} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{[r]_q!} \sum_{s=0}^r \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \frac{\alpha^{r-s} ([n]_q x)_s}{(2x)^s} \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{r+1}}{2[r]_q!} \sum_{s=0}^r \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \frac{\alpha^{r-s} ([n]_q x + 1)_s}{(2x)^s} \\
& = \left(\frac{q^n \alpha x}{[n]_q} + x \right) 2^{[n]_q x} e_q(\alpha x).
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+2}}{[r]_q! [n]_q^2} V_{r+2,n}^{\alpha}(x, q) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+2}}{[r]_q! [n]_q^2} \sum_{s=0}^{r+2} \begin{bmatrix} r+2 \\ s \end{bmatrix} \frac{\alpha^{r+2-s} ([n]_q x)_s}{(2x)^s} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+2}}{[r]_q! [n]_q^2} \sum_{s=0}^{r+1} q^s \begin{bmatrix} r+1 \\ s \end{bmatrix} \frac{\alpha^{r+2-s} ([n]_q x)_s}{(2x)^s} \\
&+ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+2}}{[r]_q! [n]_q^2} \sum_{s=1}^{r+2} \begin{bmatrix} r+1 \\ s-1 \end{bmatrix} \frac{\alpha^{r+2-s} ([n]_q x)_s}{(2x)^s} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+2}}{[r]_q! [n]_q^2} \sum_{s=0}^r q^{2s} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \frac{\alpha^{r+2-s} ([n]_q x)_s}{(2x)^s} \\
&+ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+2}}{[r]_q! [n]_q^2} \sum_{s=1}^{r+1} q^s \begin{bmatrix} r \\ s-1 \end{bmatrix} \frac{\alpha^{r+2-s} ([n]_q x)_s}{(2x)^s} \\
&+ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+2}}{[r]_q! [n]_q^2} \sum_{s=0}^{r+1} \begin{bmatrix} r+1 \\ s \end{bmatrix} \frac{\alpha^{r+1-s} ([n]_q x)_{s+1}}{(2x)^{s+1}} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+2}}{[r]_q! [n]_q^2} \sum_{s=0}^r q^{2s} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \frac{\alpha^{r+2-s} ([n]_q x)_s}{(2x)^s} \\
&+ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+2}}{[r]_q! [n]_q^2} \sum_{s=0}^r q^s (1+q) \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \frac{\alpha^{r+1-s} ([n]_q x)_{s+1}}{(2x)^{s+1}} \\
&+ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+2}}{[r]_q! [n]_q^2} \sum_{s=0}^r \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \frac{\alpha^{r-s} ([n]_q x)_{s+2}}{(2x)^{s+2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{\alpha^2 x^2}{[n]_q^2} + \frac{2\alpha x^2}{[n]_q} \right) 2^{[n]_q x} e_q(\alpha x) \\
&+ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{4[r]_q! [n]_q^2} \sum_{s=0}^r [r]_s \frac{\alpha^{r-s} [n]_q x ([n]_q x + 1) ([n]_q x + 2)_s}{(2x)^s} \\
&= \left(\frac{\alpha^2 x^2}{[n]_q^2} + \frac{[2]_q \alpha x^2}{[n]_q} + \frac{x}{[n]_q} + x^2 \right) 2^{[n]_q x} e_q(\alpha x) \\
\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+2}}{[r]_q! [n]_q^2} V_{r+2,n}^\alpha(x, q) &\geq \left(\frac{q^{2n} \alpha^2 x^2}{[n]_q^2} + \frac{[2]_q q^n \alpha^2 x^2}{[n]_q} + \frac{x}{[n]_q} + x^2 \right) 2^{[n]_q x} e_q(\alpha x)
\end{aligned}$$

elde ederiz. ■

4.2. Lemma

$0 \leq x \leq \infty$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$G_n^\alpha(1; x, q) = 1 \quad (4.7)$$

$$x \left(1 + \frac{q^n \alpha}{[n]_q} \right) \leq G_n^\alpha(t; x, q) \leq x \left(1 + \frac{\alpha}{[n]_q} \right), \quad (4.8)$$

$$G_n^\alpha(t^2; x, q) \leq qx^2 \left(1 + \frac{[2]_q \alpha}{[n]_q} + \frac{\alpha^2}{[n]_q^2} \right) + x \left(\frac{[2]_q}{[n]_q} + \frac{\alpha}{[n]_q^2} \right) \quad (4.9)$$

$$G_n^\alpha(t^2; x, q) \geq qx^2 \left(1 + \frac{q^n [2]_q \alpha}{[n]_q} + \frac{q^{2n} \alpha^2}{[n]_q^2} \right) + x \left(\frac{[2]_q}{[n]_q} + \frac{q^n \alpha}{[n]_q^2} \right). \quad (4.10)$$

İspat

E_q ve e_q üstel fonksiyonları için $E_q(-x)e_q(x) = 1$ sağlanır ve Eş. 4.2 den

$G_n^\alpha(1; x, q) = 1$ yazabiliriz. Daha sonra

$$\begin{aligned}
G_n^\alpha(t; x, q) &= \frac{E_q(-\alpha x)}{2^{[n]_q x}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r}{[n]_q [r-1]_q!} V_{r,n}^\alpha(x, q) \\
&= \frac{E_q(-\alpha x)}{2^{[n]_q x}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+1}}{[n]_q [r]_q!} V_{r+1,n}^\alpha(x, q)
\end{aligned}$$

Eş. 4.3 ve Eş. 4.4 den

$$\frac{q^n \alpha x}{[n]_q} + x \leq G_n^\alpha(t; x, q) \leq \frac{\alpha x}{[n]_q} + x$$

elde ederiz.

Ayrıca,

$[r]_q = 1 + q[r - 1]$ olduğundan,

$$\begin{aligned} G_n^\alpha(t^2; x, q) &= \frac{E_q(-\alpha x)}{2^{[n]_q x}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r [r]_q}{[n]_q^2 [r-1]_q!} V_{r,n}^\alpha(x, q) \\ &= \frac{E_q(-\alpha x)}{2^{[n]_q x}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r (1 + q[r-1]_q)}{[n]_q^2 [r-1]_q!} V_{r,n}^\alpha(x, q) \\ &= \frac{E_q(-\alpha x)}{2^{[n]_q x}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+1}}{[n]_q^2 [r]_q!} V_{r+1,n}^\alpha(x, q) \\ &\quad + \frac{E_q(-\alpha x)}{2^{[n]_q x}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{q x^{r+2}}{[n]_q^2 [r]_q!} V_{r+2,n}^\alpha(x, q). \end{aligned}$$

(4.5) ve (4.6) i uygulayarak istenilen sonucu elde ederiz. ■

4.1. $G_n^\alpha(f, \cdot, q)$ Operatörünün Yaklaşım Özellikleri

$0 < q < 1$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n]_q = \frac{1}{1-q}$$

dur. Bu yüzden $0 < q_n < 1$ olan $(q_n)_{n \geq 1}$ dizisi alalım ve $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ şartı sağlansın.

Burada $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n$ için

$$[n]_{q_n} = 1 + q_n + \cdots + q_n^{n-1} \geq 1 + q_n + \cdots + q_n^{k-1}$$

yazabiliriz.

$q_n > 0$ için $([n]_{q_n}) = (1 + q_n + \cdots + q_n^{n-1})$ artan bir dizidir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf [n]_{q_n} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + q_n + \cdots + q_n^{k-1}) = k.$$

k keyfi alındığında

$\lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{q_n} = \infty$ elde edilir.

4.1.1. Teorem

$G_n^\alpha(f; \cdot, q_n)$ operatörleri için, $0 < q < 1$ olmak üzere $(q_n)_{n \geq 1}$ bir dizi olsun.

$K = [a, b] \subset \mathbb{R}$ kompakt bir alt küme olmak üzere $f \in C_B[0, \infty)$ de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n^\alpha(f; x, q_n) = f(x)$$

$x \in K$ için düzgün yakınsar.

İspat

Eş. 4.7 den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n^\alpha(1; x, q_n) = 1$$

yazılır. Eş. 4.8 den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n^n \alpha x}{[n]_{q_n}} + x \leq \lim_{n \rightarrow \infty} G_n^\alpha(t; x, q_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha x}{[n]_{q_n}} + x$$

$0 < q_n < 1$ ve $0 < q_n^n < 1$ olduğunda $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n^n \leq 1$ dir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n^\alpha(t; x, q_n) = x$$

Benzer şekilde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n^\alpha(t^2; x, q_n) = x^2$$

yazabiliriz.

Bohman-Korovkin teoreminden, $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in K$ için $G_n^\alpha(f; \cdot, q_n)$ operatörleri f e düzgün yakınsar. ■

4.2. Ağırlıklı Uzayda Yaklaşım

4.2.1. Tanım

Ağırlık fonksiyonu ρ , $\rho \geq 1$ ve $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \rho(x) = \infty$ koşulunu sağlayan, $\mathbb{R}$ de sürekli bir fonksiyondur.

$$B_\rho(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: |f| \leq M_f \rho(x), M_f f \text{ ye bağılı sabittir}\},$$

$$\|f\|_\rho = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{\rho(x)}, \quad f \in B_\rho(\mathbb{R})$$

$$C_\rho(\mathbb{R}) = \{f \in B_\rho(\mathbb{R}): f \in C(\mathbb{R})\}$$

$$C_\rho^*(\mathbb{R}) = \left\{f \in B_\rho(\mathbb{R}): \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = k\right\}.$$

4.2.2. Teorem

$0 < q < 1$ olmak üzere $(q_n)_{n \geq 1}$ bir dizi ve $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ sağlansın. Eş. 4.1 den $G_n^\alpha(f; \cdot, q_n)$ operatörlerinin yaklaşımlarını elde edelim. $f \in C_{1+x^2}[0, \infty)$ için bir $\lambda > 0$ vardır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|G_n^\alpha(f; \cdot, q_n) - f\|_{1+x^{2+\lambda}} = 0.$$

İspat

Ağırlıklı Korovkin teoreminden $G_n^\alpha(f; \cdot, q_n)$ operatörlerinin üç yaklaşımını Eş. 4.7 den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|G_n^\alpha(1; \cdot, q_n) - 1\|_{1+x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|G_n^\alpha(1; x, q_n) - 1|}{1+x^2} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|G_n^\alpha(t; \cdot, q_n) - x\|_{1+x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|G_n^\alpha(t; x, q_n) - x|}{1+x^2}$$

Eş. 4.8 den

$$\frac{q^n \alpha}{[n]_{q_n}} \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{x}{1+x^2} \leq \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|G_n^\alpha(t; x, q_n) - x|}{1+x^2} \leq \frac{\alpha}{[n]_{q_n}} \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{x}{1+x^2}$$

yazabiliriz. Burada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|G_n^\alpha(t; \cdot, q_n) - x\|_{1+x^2} = 0$$

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|G_n^\alpha(t^2; x, q_n) - x^2|}{1 + x^2} &\leq \left(\frac{[2]_{q_n}}{[n]_{q_n}} + \frac{\alpha}{[n]_{q_n}^2} \right) \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{x}{1 + x^2} \\
&\quad + \left(1 - q_n + \frac{[2]_{q_n} \alpha}{[n]_{q_n}} + \frac{\alpha^2}{[n]_{q_n}^2} \right) \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{x^2}{1 + x^2} \\
&\leq \frac{[2]_{q_n}}{[n]_{q_n}} + \frac{\alpha}{[n]_{q_n}^2} + 1 - q_n + \frac{[2]_{q_n} \alpha}{[n]_{q_n}} + \frac{\alpha^2}{[n]_{q_n}^2}
\end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|G_n^\alpha(t; \cdot, q_n) - x\|_{1+x^2}$ alınır. Böylece ispat tamamlanır. ■

4.2.3. Tanım

Şimdi $G_n^\alpha(f; \cdot, q_n)$ lineer pozitif operatörleri için ağırlıklı süreklilik modülünü verelim. Ağırlıklı uzayda $\delta \rightarrow 0$ için ağırlıklı süreklilik modülü $\Omega(f; \delta)$ ile tanımlanmaktadır (Atakut ve İspir, 2002).

$f \in C_{1+x^2}^*[0, \infty)$ olsun. f nin ağırlıklı süreklilik modülü

$$\Omega(f; \delta) = \lim_{|h| \leq \delta, x \geq 0} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{(1+x^2)(1+h^2)},$$

ile gösterilmektedir.

$\Omega(f; \delta)$ aşağıdaki özelliklere sahiptir (İspir, 2001).

$f \in C_{1+x^2}^*[0, \infty)$ olsun;

i) $\delta \geq 0$ için, $\Omega(f; \delta)$ δ ya göre monoton artan bir fonksiyondur.

ii) Her $f \in C_{1+x^2}^*[0, \infty)$ için, $\lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega(f; \delta) = 0$

iii) Her pozitif λ için $\Omega(f; \lambda\delta) \leq 2(1+\lambda)(1+\delta^2)\Omega(f; \delta)$.

iv) Her $f \in C_{1+x^2}^*[0, \infty)$ ve $x, t \in [0, \infty)$ için,

$$|f(t) - f(x)| \leq 2 \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta} \right) (1+\delta^2)\Omega(f; \delta)(1+x^2)(1+(t-x)^2).$$

$$\Omega(f; \delta) = \lim_{|h| \leq \delta, x \geq 0} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{(1+x^2)(1+h^2)}, \delta > 0,$$

burada $f \in C_{1+x^2}^*[0, \infty)$ dur.

4.2.4. Lemma

$\alpha \geq 0$ için

$$\begin{aligned} G_n^\alpha(t^3; x, q) &= \frac{E_q(-\alpha x)}{2^{[n]_q x}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r [r]_q^2}{[n]_q^3 [r-1]_q!} V_{r,n}^\alpha(x, q) \\ &= \frac{E_q(-\alpha x)}{2^{[n]_q x}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r (1+q[r-1]_q)^2}{[n]_q^3 [r-1]_q!} V_{r,n}^\alpha(x, q) \\ &= \frac{E_q(-\alpha x)}{2^{[n]_q x}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r}{[n]_q^3 [r-1]_q!} V_{r,n}^\alpha(x, q) \\ &\quad + \frac{E_q(-\alpha x)}{2^{[n]_q x}} \sum_{r=2}^{\infty} \frac{x^r 2q}{[n]_q^3 [r-2]_q!} V_{r,n}^\alpha(x, q) \\ &\quad + \frac{E_q(-\alpha x)}{2^{[n]_q x}} \sum_{r=2}^{\infty} \frac{x^r q^2 (1+q[r-2]_q)}{[n]_q^3 [r-2]_q!} V_{r,n}^\alpha(x, q) \\ G_n^\alpha(t^4; x, q) &= \frac{E_q(-\alpha x)}{2^{[n]_q x}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r [r]_q^3}{[n]_q^4 [r-1]_q!} V_{r,n}^\alpha(x, q) \\ &= \frac{E_q(-\alpha x)}{2^{[n]_q x}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+1}}{[n]_q^4 [r]_q!} V_{r+1,n}^\alpha(x, q) \\ &\quad + \frac{E_q(-\alpha x)}{2^{[n]_q x}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+2} (3q + 3q^2 + q^3)}{[n]_q^4 [r]_q!} V_{r+2,n}^\alpha(x, q) \\ &\quad + \frac{E_q(-\alpha x)}{2^{[n]_q x}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+3} (3q^3 + 2q^4 + q^5)}{[n]_q^4 [r]_q!} V_{r+3,n}^\alpha(x, q) \\ &\quad + \frac{E_q(-\alpha x)}{2^{[n]_q x}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+4} q^6}{[n]_q^4 [r]_q!} V_{r+4,n}^\alpha(x, q) \end{aligned}$$

İspat

$G_n^\alpha(t^3; x, q)$ ve $G_n^\alpha(t^4; x, q)$ elde edebilmek için aşağıdaki eşitsizliklerden yararlanılmaktadır.

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+3}}{[n]_q^3 [r]_q!} V_{r+3,n}^\alpha(x, q) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+3}}{[r]_q! [n]_q^3} \sum_{s=0}^{r+3} \begin{bmatrix} r+3 \\ s \end{bmatrix} \frac{\alpha^{r+3-s} ([n]_q x)_s}{(2x)^s} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+3}}{[r]_q! [n]_q^3} \sum_{s=0}^{r+2} q^s \begin{bmatrix} r+2 \\ s \end{bmatrix} \frac{\alpha^{r+3-s} ([n]_q x)_s}{(2x)^s} \\
&\quad + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+3}}{[r]_q! [n]_q^3} \sum_{s=0}^{r+2} \begin{bmatrix} r+2 \\ s \end{bmatrix} \frac{\alpha^{r+2-s} ([n]_q x)_{s+1}}{(2x)^{s+1}} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+3}}{[r]_q! [n]_q^3} \sum_{s=0}^r q^{3s} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \frac{\alpha^{r+3-s} ([n]_q x)_s}{(2x)^s} \\
&\quad + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+3}}{[r]_q! [n]_q^3} \sum_{s=0}^r q^{2s+2} [3]_q \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \frac{\alpha^{r+2-s} ([n]_q x)_{s+1}}{(2x)^{s+1}} \\
&\quad + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+3}}{[r]_q! [n]_q^3} \sum_{s=0}^r q^s [3]_q \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \frac{\alpha^{r+1-s} ([n]_q x)_{s+2}}{(2x)^{s+2}} \\
&\quad + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+3}}{[r]_q! [n]_q^3} \sum_{s=0}^r \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \frac{\alpha^{r-s} ([n]_q x)_{s+3}}{(2x)^{s+3}} \\
&\leq \left\{ \frac{\alpha^3 x^3}{[n]_q^3} + \frac{[3]_q \alpha^2 x^3}{[n]_q^2} + \frac{[3]_q \alpha x^3}{[n]_q} + \frac{[3]_q \alpha x^2}{[n]_q^2} + x^3 + \frac{3x^2}{[n]_q} + \frac{2x}{[n]_q^2} \right\} 2^{[n]_q x} e_q(\alpha x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+3}}{[r]_q! [n]_q^3} V_{r+3,n}^\alpha(x, q) \\
&\geq \left\{ \frac{q^{3n} \alpha^3 x^3}{[n]_q^3} + \frac{q^{2n} [3]_q \alpha^2 x^3}{[n]_q^2} + \frac{q^n [3]_q \alpha x^3}{[n]_q} + \frac{q^n [3]_q \alpha x^2}{[n]_q^2} \right. \\
&\quad \left. + x^3 + \frac{3x^2}{[n]_q} + \frac{2x}{[n]_q^2} \right\} 2^{[n]_q x} e_q(\alpha x)
\end{aligned}$$

benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+4}}{[n]_q^4 [r]_q!} V_{r+4,n}^{\alpha}(x, q) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+4}}{[r]_q! [n]_q^4} \sum_{s=0}^r q^{4s} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \frac{\alpha^{r+4-s} ([n]_q x)_s}{(2x)^s} \\
&+ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+4}}{[r]_q! [n]_q^4} \sum_{s=0}^r q^{3s} [4]_q \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \frac{\alpha^{r+3-s} ([n]_q x)_{s+1}}{(2x)^{s+1}} \\
&+ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+4}}{[r]_q! [n]_q^4} \sum_{s=0}^r q^{2s} [4]_q \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \frac{\alpha^{r+2-s} ([n]_q x)_{s+2}}{(2x)^{s+2}} \\
&+ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+4}}{[r]_q! [n]_q^4} \sum_{s=0}^r q^s [4]_q \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \frac{\alpha^{r+1-s} ([n]_q x)_{s+3}}{(2x)^{s+3}} \\
&+ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+4}}{[r]_q! [n]_q^4} \sum_{s=0}^r \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \frac{\alpha^{r-s} ([n]_q x)_{s+4}}{(2x)^{s+4}} \\
&\leq \frac{\alpha^4 x^4}{[n]_q^4} + \frac{[4]_q \alpha^3 x^4}{[n]_q^3} + \frac{[4]_q \alpha^2 x^4}{[n]_q^2} + \frac{[4]_q \alpha^2 x^3}{[n]_q^3} + \frac{[4]_q \alpha x^4}{[n]_q} \\
&+ \frac{3[4]_q \alpha x^3}{[n]_q^2} + \frac{2[4]_q q x^2}{[n]_q^3} + x^4 + \frac{6x^3}{[n]_q} + \frac{11x^2}{[n]_q^2} + \frac{6x}{[n]_q^3}
\end{aligned}$$

ve,

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+4}}{[r]_q! [n]_q^4} V_{r+4,n}^{\alpha}(x, q) &\geq \frac{q^{4n} \alpha^4 x^4}{[n]_q^4} + \frac{[4]_q q^{3n} \alpha^3 x^4}{[n]_q^3} + \frac{[4]_q q^{2n} \alpha^2 x^4}{[n]_q^2} + \frac{[4]_q q^{2n} \alpha^2 x^3}{[n]_q^3} \\
&+ \frac{[4]_q q^n \alpha x^4}{[n]_q} + \frac{3[4]_q q^n \alpha x^3}{[n]_q^2} + \frac{2[4]_q q^n x^2}{[n]_q^3} \\
&+ x^4 + \frac{6x^3}{[n]_q} + \frac{11x^2}{[n]_q^2} + \frac{6x}{[n]_q^3}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizliklerden yararlanarak,

$$\begin{aligned}
G_n^{\alpha}(t^3; x, q) &= \frac{E_q(-\alpha x)}{2^{[n]_q x}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+1}}{[n]_q^3 [r]_q!} V_{r+1,n}^{\alpha}(x, q) \\
&+ \frac{E_q(-\alpha x)}{2^{[n]_q x}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2q + q^2) x^{r+2}}{[n]_q^3 [r]_q!} V_{r+2,n}^{\alpha}(x, q) \\
&+ \frac{E_q(-\alpha x)}{2^{[n]_q x}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{q^3 x^{r+3}}{[n]_q^3 [r]_q!} V_{r+3,n}^{\alpha}(x, q)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_n^\alpha(t^3; x, q) &\leq q^3 x^3 \left(1 + \frac{[3]_q \alpha}{[n]_q} + \frac{[3]_q \alpha^2}{[n]_q^2} + \frac{\alpha^3}{[n]_q^3} \right) \\
&\quad + x^2 \left(\frac{3q^3 + 2q + q^2}{[n]_q} + \frac{([2]_q(2q + q^2) + 3q^3) \alpha}{[n]_q^2} + \frac{(2q + q^2) \alpha^2}{[n]_q^3} \right) \\
&\quad + x \left(\frac{1 + 2q + q^2 + 2q^3}{[n]_q^2} + \frac{\alpha}{[n]_q^3} \right) \\
G_n^\alpha(t^3; x, q) &\geq q^3 x^3 \left(1 + \frac{q^n [3]_q \alpha}{[n]_q} + \frac{q^{2n} [3]_q \alpha^2}{[n]_q^2} + \frac{q^{3n} \alpha^3}{[n]_q^3} \right) \\
&\quad + x^2 \left(\frac{3q^3 + 2q + q^2}{[n]_q} + \frac{q^n ([2]_q(2q + q^2) + [3]_q q^3) \alpha}{[n]_q^2} + \frac{q^{2n} (2q + q^2) \alpha^2}{[n]_q^3} \right) \\
&\quad + x \left(\frac{1 + 2q + q^2 + 2q^3}{[n]_q^2} + \frac{q^n \alpha}{[n]_q^3} \right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
G_n^\alpha(t^4; x, q) &= \frac{E_q(-\alpha x)}{2^{[n]_q x}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r [r]^3}{[n]_q^4 [r-1]_q!} V_{r,n}^\alpha(x, q) \\
&= \frac{E_q(-\alpha x)}{2^{[n]_q x}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+1}}{[n]_q^4 [r]_q!} V_{r+1,n}^\alpha(x, q) \\
&\quad + \frac{E_q(-\alpha x)}{2^{[n]_q x}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+2} (3q + 3q^2 + q^3)}{[n]_q^4 [r]_q!} V_{r+2,n}^\alpha(x, q) \\
&\quad + \frac{E_q(-\alpha x)}{2^{[n]_q x}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+3} (3q^3 + 2q^4 + q^5)}{[n]_q^4 [r]_q!} V_{r+3,n}^\alpha(x, q) \\
&\quad + \frac{E_q(-\alpha x)}{2^{[n]_q x}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+4} q^6}{[n]_q^4 [r]_q!} V_{r+4,n}^\alpha(x, q)
\end{aligned}$$

$$G_n^\alpha(t^4; x, q) \leq q^6 x^4 \left(1 + \frac{[4]_q \alpha}{[n]_q} + \frac{[4]_q \alpha^2}{[n]_q^2} + \frac{[4]_q \alpha^3}{[n]_q^3} + \frac{\alpha^4}{[n]_q^4} \right)$$

$$\begin{aligned}
& +x^3 \left(\frac{\frac{6q^6 + 3q^3 + 2q^4 + q^5}{[n]_q} + \frac{q^6 3[4]_q \alpha}{[n]_q^2}}{\frac{(q^6[4]_q + [3]_q(3q^3 + 2q^4 + q^5)) \alpha^2}{[n]_q^3} + \frac{(3q^3 + 2q^4 + q^5) \alpha^3}{[n]_q^4}} \right) \\
& +x^2 \left(\frac{\frac{11q^6 + 3(3q^3 + 2q^4 + q^5) + (3q + 3q^2 + q^3)}{[n]_q^2}}{\frac{(q^6 2[4]_q + [2]_q(3q + 3q^2 + q^3) + [3]_q(3q^3 + 2q^4 + q^5)) \alpha}{[n]_q^3} + \frac{(3q + 3q^2 + q^3) \alpha^2}{[n]_q^4}} \right) \\
& +x \left(\frac{6q^6 + 2(3q^3 + 2q^4 + q^5) + (3q + 3q^2 + q^3) + 1}{[n]_q^3} + \frac{\alpha}{[n]_q^4} \right) \\
G_n^\alpha(t^4; x, q) & \geq q^6 x^4 \left(1 + \frac{q^n[4]_q \alpha}{[n]_q} + \frac{q^{2n}[4]_q \alpha^2}{[n]_q^2} + \frac{q^{3n}[4]_q \alpha^3}{[n]_q^3} + \frac{q^{4n} \alpha^4}{[n]_q^4} \right) \\
& +x^3 \left(\frac{\frac{6q^6 + 3q^3 + 2q^4 + q^5}{[n]_q} + \frac{q^{6+n} 3[4]_q \alpha}{[n]_q^2}}{\frac{q^{2n} ([4]_q q^6 + [3]_q(3q^3 + 2q^4 + q^5)) \alpha^2}{[n]_q^3} + \frac{q^{3n} (3q^3 + 2q^4 + q^5) \alpha^3}{[n]_q^4}} \right) \\
& +x^2 \left(\frac{\frac{11q^6 + 3(3q^3 + 2q^4 + q^5) + (3q + 3q^2 + q^3)}{[n]_q^2}}{\frac{q^n (q^6 2[4]_q + [2]_q(3q + 3q^2 + q^3) + [3]_q(3q^3 + 2q^4 + q^5)) \alpha}{[n]_q^3} + \frac{q^{2n} (3q + 3q^2 + q^3) \alpha^2}{[n]_q^4}} \right) \\
& +x \left(\frac{6q^6 + 2(3q^3 + 2q^4 + q^5) + (3q + 3q^2 + q^3) + 1}{[n]_q^3} + \frac{q^n \alpha}{[n]_q^4} \right).
\end{aligned}$$

istenilen sonuç elde edilir.

4.2.5. Lemma

$n \in \mathbb{N}$ için Eş. 4.1 de verilen $G_n^\alpha(f; \cdot, q)$ operatörleri için aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir.

$$\begin{aligned}
& G_n^\alpha((t-x)^4; x, q) \\
& \leq \left\{ (q^6 - 4q^3 + 6q - 4 + 1) + \frac{([6]_q q^6 - 4[3]_q q^3 + 6[2]_q q - 4)}{[n]_q} \alpha \right\} x^4 \\
& \quad + \frac{([4]_q q^6 - 4[3]_q q^3 + 6q)}{[n]_q^2} \alpha^2 + \frac{[4]_q q^6 - 4}{[n]_q^3} \alpha^3 + \frac{q^6}{[n]_q^4} \alpha^4 \\
& + \left\{ \frac{6q^6 + 3q^3 + 2q^4 + q^5 - 4(3q^3 + 2q + q^2) + 6[2]_q}{[n]_q} \right. \\
& \quad + \frac{3[4]_q q^6 - 4([2]_q(2q + q^2) + [3]_q q^3) + 6}{[n]_q^2} \alpha \\
& \quad \left. + \frac{([4]_q q^6 + [3]_q(3q^3 + 2q^4 + q^5)) - 4(2q + q^2)}{[n]_q^3} \alpha^2 + \frac{(3q^3 + 2q^4 + q^5)\alpha^3}{[n]_q^4} \right\} x^3 \\
& + \left\{ \frac{11q^6 + 3(3q^3 + 2q^4 + q^5) + (3q + 3q^2 + q^3 - 4(1 + 2q + q^2 + 2q^3))}{[n]_q^2} \right. \\
& \quad + \frac{(2[4]_q q^6 + [2]_q(3q + 3q^2 + q^3) + [3]_q(3q^3 + 2q^4 + q^5)) - 4}{[n]_q^3} \alpha \\
& \quad \left. + \frac{(3q + 3q^2 + q^3)}{[n]_q^4} \alpha^2 \right\} x^2 \\
& + \left\{ \frac{6q^6 + 2(3q^3 + 2q^4 + q^5) + (3q + 3q^2 + q^3) + 1}{[n]_q^3} + \frac{\alpha}{[n]_q^4} \right\} x
\end{aligned}$$

4.2.6. Teorem

$0 < q < 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(q_n)_{n \geq 1}$ bir dizi ve $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ sağlansın. Eş 4.1 den $G_n^\alpha(f; \cdot, q_n)$ operatörleri için, $f \in C_{1+x^2}[0, \infty)$ için bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.

$$\sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|G_n^\alpha(t; x, q_n) - x|}{(1+x^2)^3} \leq M \Omega \left(f; \frac{1}{\sqrt{[n]_{q_n}}} \right), \quad n \geq n_0$$

İspat

$f \in C_{1+x^2}[0, \infty)$ olmak üzere

$$|f(t) - f(x)| \leq 2(1+x^2)(1+\delta^2)\Omega(f; \delta) \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right) (1+(t-x)^2)$$

Burada Hölder eşitsizliğini $G_n^\alpha(f; \cdot, q_n)$ lineer pozitif operatörüne uygularsak,

$$|G_n^\alpha(f; x, q_n) - f(x)| \leq 2(1+x^2)(1+\delta^2)\Omega(f; \delta) \times \left[\frac{1 + G_n^\alpha((t-x)^2; x, q_n)}{+\frac{1}{\delta} \sqrt{G_n^\alpha((t-x)^2; x, q_n)} \sqrt{G_n^\alpha((t-x)^2, (t-x)^4; x, q_n)}} \right]$$

$$G_n^\alpha((t-x)^2; x, q_n) \leq M_1(1+x^2) \frac{1}{[n]_{q_n}}$$

ve

$$G_n^\alpha((t-x)^4; x, q_n) \leq M_2(x^4 + x^3 + x^2 + x) \frac{1}{[n]_{q_n}}$$

eşitsizliklerde yazılırsa,

$$\delta = \delta_n = \frac{1}{\sqrt{[n]_{q_n}}} \text{ alındığında } \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{[n]_{q_n}}} = 0 \text{ olur.}$$

$$|G_n^\alpha(f; x, q_n) - f(x)| \leq 4(1+x^2)\Omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{[n]_{q_n}}}\right) \times \left[\frac{1 + \frac{1}{[n]_{q_n}} M_1(1+x^2)}{+\sqrt{M_1(1+x^2)} \sqrt{M_1 M_2(1+x^2)(x^4 + x^3 + x^2 + x)}} \right]$$

Burada $n \geq n_0$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

$$\sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|G_n^\alpha(t; x, q_n) - x|}{(1+x^2)^3} \leq M\Omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{[n]_{q_n}}}\right)$$

sağlanır. ■

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Tez boyunca lineer pozitif operatörlerin genellenmesi için kullanılan Blending tip genelleme ve q -genelleme ele alınmıştır. İki değişkenli Blending tip Lupaş operatörü için yaklaşım özellikleri verilmiştir. Ayrıca tek değişkenli Blending tip Lupaş operatörünün q -genellemesi tanımlanmıştır. Tanımlanan operatörler dizisinin ağırlıklı uzay ve ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla düzgün yakınsaklığı hakkında bilgiler verilmiştir.

Lineer pozitif operatörlerin başka bir genellenmesi olan (p,q) -genelleme tek değişkenli Blending tip Lupaş operatörü için verilebilir.

Blending tip Lupaş operatörü için çalışılmış konuların Blending tip Baskakov operatörü için de ele alınması uygundur.

KAYNAKLAR

- Agratini, O. (1999). On a sequence of linear positive operators. *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, 14, 41-48.
- Agratini, O. and Doğru, O. (2010). Weighted Statistical Approximation by Szasz Type Operators That Preserve Some Test Functions. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 14(4), 1283-1296.
- Agrawal, P. , N. and İspir, N. (2016). Degree of approximation for bivariate Chlodowsky–Szasz–Charlier type operators. *Results in Mathematics*, 69(3–4), 369–385.
- Agrawal, P. N., Kumar, D. and Araci, S. (2017). Linking of Bernstein-Chlodowsky and Szász-Appell-Kantorovich type operators. *Journal of Nonlinear Science and Applications*, 10(6), 3288-3302.
- Anastassiou, G. , A. and Gal, S. , G. (2000). *Approximation Theory: Moduli of Continuity and Global Smoothness Preservation*, Boston: Birkhauser.
- Andrews, G. E., Askey, R. and Roy, R. (1999). *Special Functions*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Atakut, C. and İspir, N. (2002). Approximation by modified Szasz–Mirakjan operators on weighted spaces. *Proceedings of the Indian Academy of Sciences - Mathematical Sciences*, 112(4), 571-578.
- Aral, A. and Gupta, V. (2006). The derivative and application to Szász Mirakyan operators. *Calcolo*, 43(3), 151-170.
- Bernstein, S. , N. (1912). Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. *Communications de la Société Mathématique de Kharkov 2 Series XIII* , 1.
- Derriennic, M. , M. (1981). Sur l’approximation de fonctions intégrables sur $[0,1]$ par des polynomes de Bernstein modifies. *Journal of Approximation Theory*, 31(4), 325-343.
- Dalmanoğlu, Ö. and Doğru, O. (2010). Statistical Approximation Properties of Kantorovich type MKZ operators. *Creative Mathematics and Informatics*, 19, 15-24.
- Doğru, O. and Duman, O. (2006). Statistical approximation of Meyer-König and Zeller operators based on the q-integers. *Publicationes Mathematicae-Debrecen*, 68, 199-214.
- Durrmeyer, J., L. (1967). *Une formule d’inversion de la transformée de Laplace: Applications a la theorie des moments*. Postgraduate thesis, Applied Mathematics Faculty of Science, Paris.

- Gauchman, H. (2004). Integral Inequalities in q -Calculus. *Computers and Mathematics with Applications*, 47, 281-300.
- Goyal, M. and Kajla, A. (2017). Blending-type approximation by generalized Lupaş-type operators. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 25, 97-115.
- Hacısalıhoğlu, H. ve Hacıyev, A. (1995). *Lineer pozitif operatör dizilerinin yakınsaklığı*. Ankara/Türkiye: Ankara Üniversitesi Yayınları, 2-45.
- İspir, N. (2001). On modified Baskakov operators on weighted spaces. *Turkish Journal of Mathematics*, 355-365.
- Kajla, A. and Miclăuş, D. (2018). Blending Type Approximation by GBS Operators of Generalized Bernstein–Durrmeyer Type. *Results in Mathematics*, 73(1).
- Kac, V. and Cheung, P. (2002). *Quantum Calculus (Universitext)*. Springer-Verlag.
- Kantorovich, L., V. (1930). *Sur certains développements suivant les polynômes de la forme de S. Bernstein*. I,II, Comptes Rendus Mathématique Académie des Sciences, Paris, 563-568, 595-600.
- Korovkin, P., P. (1953). On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. *Doklady Akademii Nauk (Russian)*, 90, 961-964.
- Lupaş, A. (1987). A analogue of the Bernstein operator. *University of Cluj-Napoca, Seminar on Numerical and Statistical Calculus*, 9.
- Lupaş, A. (1995). The approximation by some positive linear operators. *Proceedings of the International Dortmund Meeting on Approximation Theory*, Akademie Verlag, Berlin. 201-229.
- Marinkovich, S., Rajkovich, P. and Stankovich, M. (2008). The inequalities for some types of q – integrals. *Computers and Mathematics with Applications*, 56, 2490-2498.
- Mihasan, V. (1999). Uniform approximation with positive linear operators generated by generalized Baskakov method. *Automation Computers Applied Mathematics*, 7(1), 34–37.
- Oruç, H. and Tuncer N. (2002). On the convergence and iterates of Bernstein polynomials. *Journal of Approximation Theory*, 117, 301-313.
- Ostrowska, S. (2003). Bernstein polynomials and their iterates. *Journal of Approximation Theory*, 123, 232-255.
- Örkcü, M. and Doğru, O. (2012). Statistical approximation of a kind of Kantorovich type q -Szász–Mirakjan operators. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications (ISI)*, 75(5), 2874-2882.
- Phillips, G., M. (1997). Bernstein polynomials based on the q -integers. *Annals of Numerical Mathematics*, 4, 511-518.

- Phillips, G., M. (2000). A generalization of the Bernstein polynomials based on the integers. *ANZIAM Journal*, 42, 79-86
- Szasz, O. (1950). Generalization of S. Bernstein's Polynomials to the infinite interval. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 45, 239-245.
- Volkov, V., I. (1957). On the convergence sequences of linear positive operators in the space of continuous functions of two variables. *Doklady Akademii Nauk (Russian)*, 115, 17-19.
- Weierstrass, K. (1885). Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 633-639.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ERDALOĞLU, Esra
 Uyruğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 02.02.1988, Ankara
 Medeni hali : Bekar
 Telefon : 0 (554) 755 41 35
 e-mail : esraerdaloglu@gmail.com



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik ABD	Devam Ediyor
Lisans	Akdeniz Üniversitesi / Fen Fakültesi/ Matematik	2013
Lise	Tayfur Bayar Lisesi	2005

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2018-Halen	Eskişehir Bil Temel Lisesi	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

Erdaloğlu, E., Örkücü, M. (2018,27-28 Nisan) *Lupaş Operatörlerinin Brenke Tip Polinom İçeren Genellemesi*, 13. Ankara Matematik Günleri, TOBB ETÜ-Ankara.

İlgi Alanları

Voleybol, tiyatro, sinema.



GAZİ GELECEKTİR..