

**ZAMAN SKALALARI ÜZERİNDE BAZI İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLERİ VE UYGULAMALARI**

Civan BOZKURT

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**OCAK 2010
ANKARA**

Civan BOZKURT tarafından hazırlanan ZAMAN SKALALARI ÜZERİNDE BAZI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ VE UYGULAMALARI adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd.Doç.Dr.Adil MISIR
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç.Dr.Ahmet ARIKAN
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Doç.Dr.Fatma AYAZ
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Yrd.Doç.Dr.Adil MISIR
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Tarih: 04 / 01 / 2010

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Civan BOZKURT

**ZAMAN SKALALARI ÜZERİNDE BAZI İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLERİ VE UYGULAMALARI
(Yüksek Lisans Tezi)**

Civan BOZKURT

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ocak 2010**

ÖZET

Zaman skalası kavramının ilk ortaya atılmasından bu yana , matematik dünyasında büyük bir ilgi odağı olmuştur. Ayrıca bu çalışma sahası geniş bir uygulama alanına sahiptir. Bu tez zaman skalası kavramı ve zaman skalaları üzerinde delta türev ,delta integral ve üstel fonksiyon kavramlarının analizi ile ilgili olup , ayrıca , Hölder , Minkowski ve Jensen eşitsizliklerinin zaman skalası versiyonunu içermektedir.

Bilim Kodu : 204.1.138
Anahtar Kelimeler : Zaman skalası, dinamik denklemler, delta integral
Sayfa Adedi : 54
Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Adil MISIR

**SOME INTEGRAL INEQUALITIES AND THEIR APPLICATIONS ON
TIME SCALES**

(M.Sc. Thesis)

Civan BOZKURT

**GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

January 2010

ABSTRACT

Since the time scale has been a first put forward it has become a focus of interest in the world of mathematics . Moreover , it has a large field of applications. This thesis is related to an analysis of the concept of the time scale , delta differential and delta integral on the time scale and the concept of exponential functions . Apart from these , it contains time scales version of inequalities : Hölder , Minkowski and Jensen and illustrations of several applications about these inequalities on time scales.

Science Code	: 204.1.138
Key Words	: The time scale , dynamic equations, delta integral
Page Number	: 54
Adviser	: Assist. Prof. Dr. Adil MISIR

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı yürütebilmem için değerli yardımlarını esirgemeyen tez yöneticim Yrd. Doç. Dr. Adil MISİR 'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
ŞEKİLLER.....	viii
SİMGELER.....	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Zaman Skalası	3
2.2. Delta Türev	7
2.3. Delta İntegral	17
2.4. Genelleştirilmiş Üstel Fonksiyon	35
3. BAZI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ.....	44
3.1. Hölder ve Cauchy-Schwarz Eşitsizlikleri.....	44
3.2. Minkowski Eşitsizliği	46
3.3. Jensen Eşitsizliği.....	48
3.4. Bazı Uygulamalar.....	49
KAYNAKLAR.....	53
ÖZGEÇMİŞ.....	54

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Silindir dönüşümü	38

SİMGELER

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{T}$	Zaman skalası
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\sigma(t)$	İleri sıçrama operatörü
$\rho(t)$	Geri sıçrama operatörü
$\mu(t)$	Granül fonksiyonu
$f^\Delta(t)$	Delta türev
$\int_a^b f(\tau) \Delta \tau$	Delta integral (Riemann)
$e_p(t, t_0)$	Genelleştirilmiş üstel fonksiyon
Σ	Toplam Sembolü
Π	Çarpım Sembolü
C_{rd}	Rd-sürekli fonksiyonların kümesi
$\mathfrak{R}$	Regresif fonksiyonların kümesi
$\in$	Elemanıdır.
$\circ$	Bileşke

1. GİRİŞ

Fark denklemler teorisi, matematiğin sistematik olarak gelişmesiyle birlikte ortaya çıkan ilk teorilerden birisidir. Bu teori, zamana bağlı ayrık olayların matematiksel ifadesinde kullanılmıştır [1]. Fark denklemleri birçok doğa olayını ifade etmekte kullanılır. Bununla birlikte fark denklemleri diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinin elde edilmesinde de kullanılır [1]. Yani, verilen bir diferansiyel denklem, ayrık benzeri olan fark denklemi ile ifade edilir ve bu fark denklemi, diferansiyel denklemin çözümünün yapısını araştırmak için incelenir. Bu nedendir ki fark denklemi teorisi ve diferansiyel denklem teorisi birbirine çok yakın ve paralel olarak gelişmektedir. Fark denklemi teorisi ile diferansiyel denklem teorisi arasında çok fazla benzerlikler olduğu kadar, çok önemli farklılıklar da vardır. Örneğin, birinci mertebeden bir diferansiyel denklemin salınımlı olan çözümleri yok iken bu denkleme ilişkin fark denklemi salınımlı çözümlere sahip olabilmektedir [1].

Fark denklemleri teorisi yaklaşık olarak sekiz asırlık çalışmalar sonunda sistematik bir hale gelmişken, diferansiyel denklemler teorisi dört asırdır çalışılmaktadır. Diferansiyel denklemler teorisinin daha kısa süredir çalışılmasının sebebi, doğa olaylarının kesiksiz olduğunun varsayılmasıdır. Bu yüzden, diferansiyel denklemler teorisi; fizik, kimya, biyoloji, astronomi, ekonomi ve diğer bilimlere ait matematiksel ifade yöntemi olarak kullanılır. Ancak zaman sürekli olarak ilerlese de, olayların kendi içinde süreklilik ve süreksizlik hallerinin aynı anda varlığı bir gerçektir. Dolayısıyla, her matematiksel olayı diferansiyel denklemlerle ve fark denklemleriyle ifade etmek mümkün değildir.

Fark denklemleri Fibonacci tarafından da incelenmiş ve onun çok başarılı çalışmaları sonucunda da bir çok matematikçi daha bu ilginç alana yönelmiştir. Örneğin, Laplace sabit katsayılı homojen doğrusal fark denklemleri, Guichard ise aynı denklemin homojen olmayan özel hallerini, ve Gelgrum bu denklemlerin çözümlerinin asimptotik davranışını incelemiştir.

Diferansiyel denklemler teorisi ise Leibnitz ve Newton tarafından başlatılıp, Claurit, Frobenious, Euler ve diğer birçok matematikçi tarafından geliştirilmiştir. Bu teoriye adını veren Leibnitztir.

Yukarıda değinildiği gibi, doğa olayları ne tam olarak sürekli ne de tam olarak kesiklidir. Dolayısıyla bu tür olaylara ilişkin denklemlerin modellemelerinde yeni bir teoriye ihtiyaç duyulmaktadır. İşte bu teorinin adı Zaman Skalasıdır. Zaman skalası teorisi ile birlikte, hem süreklilik hem de süreksizlik içeren olayların matematiksel modellemesi yapılabilmektedir. Zaman skalası üzerinde tanımlı bu denklemlere dinamik denklemler denir. Dinamik denklemler zaman skalasının özel durumlarında, fark denklemi ya da diferansiyel denklem haline dönüşür, ve Kuantum fiziğinde ortaya çıkan kuantum fark denkleminde dönüşür. Böylece fark denklemi ve diferansiyel denklem için ayrı ayrı sonuçlar vermek yerine, keyfi zaman skalaları için geçerli birleştirilmiş sonuçlar verilebilir [2, 3, 5, 9, 10].

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Zaman Skalası

Zaman skalası üzerinde dinamik denklemlerin çalışılmasının temellerini 1988 yılında Stefan HILGER atmıştır [9]. Zaman skalası üzerinde çalışmanın temel amacı ayırık analiz ile sürekli analizi birleştirme fikrine dayanmaktadır [2, 3, 5, 9].

2.1. Tanım

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin herhangi bir kapalı alt kümesine bir *zaman skalası* denir ve $\mathbb{T}$ ile gösterilir [5]. Bu küme üzerinde metrik, $\mathbb{R}$ deki alışılmış metrik olarak alınacaktır, yani $s, t \in \mathbb{T}$ için $d(s, t) = |s - t|$ olarak alınacaktır.

2.1. Örnek

$\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{N}^+, [0, 1], [0, 1] \cup [2, 3], \{a\}, q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$ kümeleri zaman skalasına birer örnektir. $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}', \mathbb{C}, (0, 1)$ ve $(a, b]$ gibi kümeler ise zaman skalası olamazlar [5].

2.2. Tanım

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun $t \in \mathbb{T}$ için

$\sigma: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T} \quad t \rightarrow \sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} ; s > t\}$ ile tanımlı σ operatörüne *ileri sıçrama* operatörü denir. Benzer biçimde $\rho: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T} \quad t \rightarrow \rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} ; s < t\}$ ile tanımlı ρ operatörüne *geri sıçrama* operatörü denir [5].

*Bu tanımda $t, \mathbb{T}$ 'nin maximum elemanı ise $\sigma(t) = t$ olur. $t, \mathbb{T}$ 'nin minimum elemanı ise $\rho(t) = t$ olur.

2.2. Örnek

$$\mathbb{T} = \mathbb{Z}, \sigma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$n \rightarrow \sigma(n) = \inf\{s \in \mathbb{Z} ; s > n\}$$

$$= \inf\{n+1, n+2, n+3, \dots\} = n+1 \quad (n \text{ 'den } n+1 \text{ 'e sıçramış oldu.})$$

$$n \rightarrow \rho(n) = \sup\{s \in \mathbb{Z} ; s < n\}$$

$$= \sup\{\dots, n-3, n-2, n-1\} = n-1 \quad (n \text{ 'den } n-1 \text{ 'e geri sıçramış oluyoruz})$$

2.3. Tanım

$\mu : \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty)$ *graniül (graininess) fonksiyonu*,

$$\mu(t) = \sigma(t) - t$$

olarak tanımlanır [5].

Tanım 2.1 e göre zaman skalasının elemanları aşağıdaki gibi sınıflandırılır:

2.4. Tanım

- (i) $\sigma(t) = t$ ise $t \in \mathbb{T}$ elemanına *sağ yoğun* denir.
- (ii) $\sigma(t) > t$ ise $t \in \mathbb{T}$ elemanına *sağ saçılımlı* denir.
- (iii) $\rho(t) = t$ ise $t \in \mathbb{T}$ elemanına *sol yoğun* denir.
- (iv) $\rho(t) < t$ ise $t \in \mathbb{T}$ elemanına *sol saçılımlı* denir [5].

Ayrıca hem sağ saçılımlı hem sol saçılımlı noktalara ise *izole noktalar* denir. Hem sağ hem de sol yoğun noktalara ise *yoğun nokta* denir [5].

2.3. Örnek

$$\mathbb{T} = \mathbb{R} \Rightarrow \sigma(t) = t \Rightarrow \mu(t) = t - t = 0$$

$$\mathbb{T} = \mathbb{Z} \Rightarrow \sigma(t) = t+1 \Rightarrow \mu(t) = t+1 - t = 1$$

2.4. Örnek

$a, b > 0$ olsun.

$$p_{a,b} = \bigcup_{k=0}^{\infty} [k(a+b), k(a+b)+a] = [0, a] \cup [a+b, 2a+b] \cup \dots$$

zaman skalasını ele alalım. Bu durumda,

$$\sigma(t) = \begin{cases} t & , t \in \bigcup_{k=0}^{\infty} [k(a+b), k(a+b)+a) \\ t+b & , t \in \bigcup_{k=0}^{\infty} \{k(a+b)+a\} \end{cases}$$

olur. Granül fonksiyon,

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 & , t \in \bigcup_{k=0}^{\infty} [k(a+b), k(a+b)+a) \\ b & , t \in \bigcup_{k=0}^{\infty} \{k(a+b)+a\} \end{cases}$$

elde edilir [5].

Dikkat edilirse $t \in \mathbb{T}$ olduğunda $\sigma(t)$ ve $\rho(t)$ de $\mathbb{T}$ dedir. Bu, $\mathbb{T}$ nin $\mathbb{R}$ nin kapalı bir alt kümesi olduğundandır [5].

2.5. Tanım

$\mathbb{T}$ sol-saçılımlı bir m maksimuma sahipse $\mathbb{T}^K = \mathbb{T} - \{m\}$, diğer şartlarda $\mathbb{T} = \mathbb{T}^K$ olarak tanımlanır [5].

2.1. Teorem(Tümevarım Prensibi)

$t_0 \in \mathbb{T}$ olsun ve kabul edelim ki

$$\{S(t) : t \in [t_0, \infty)\}$$

Ailesi aşağıdaki maddeleri sağlayan ifadelerin bir ailesi olsun,

- i) $S(t_0)$ ifadesi doğrudur.
- ii) $t \in [t_0, \infty)$ noktası sağ-saçılımlı ve $S(t)$ ifadesi doğru ise $S(\sigma(t))$ ifadesi de doğrudur.
- iii) $t \in [t_0, \infty)$ noktası sağ-yoğun ve $S(t)$ ifadesi doğru ise, o zaman t noktasının bir U komşuluğu vardır ki $\forall s \in U \cap (t, \infty)$ için $S(s)$ ifadesi doğrudur.
- iv) $t \in [t_0, \infty)$ noktası sol-yoğun ve $\forall s \in [t_0, t)$ için $S(s)$ ifadesi doğru ise, $S(t)$ ifadesi de doğrudur.

Bu durumda $S(t)$ ifadesi her $t \in [t_0, \infty)$ için doğrudur [5].

İspat

$$S^* = \{t \in [t_0, \infty) : S(t) \text{ doğru değildir}\}$$

kümesini alalım. Amacımız $S^* = \emptyset$ olduğunu göstermektir. $S^* \neq \emptyset$ olsun. S^* kümesi kapalı ve boştan farklı olduğundan bir minimumu vardır. $\inf S^* = t^* \in \mathbb{T}$ olsun. $S(t^*)$ ifadesinin doğru olduğunu iddia ediyoruz. $t^* = t_0$ ise (i) den dolayı $S(t^*)$ ifadesi doğrudur. t^* noktası sol-saçılımlı ise $S(t^*)$ ifadesi (ii) den dolayı

doğrudur. t^* noktası sol-yoğun ise (iv) den dolayı $S(t^*)$ ifadesi doğrudur. Sonuç olarak her koşulda $t^* \notin S^*$ oluyor. Bundan dolayı t^* noktası sağ-saçılımlı olamaz. Dolayısıyla $t^* \neq \max \mathbb{T}$ olur. Yani t^* noktası sağ-yoğundur. Fakat bu durum (iii) ile çelişir [5].

2.2. Delta Türev

2.6. Tanım

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^K$ olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, t nin bir $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ komşuluğu, her $s \in U$ için

$$\left| [f(\sigma(t)) - f(s)] - f^\Delta(t) \cdot [\sigma(t) - s] \right| \leq \varepsilon \cdot |\sigma(t) - s|$$

olacak şekilde varsa $f^\Delta(t)$ ye, f in t noktasında delta (Hilger) türevi denir.

Ayrıca her $t \in \mathbb{T}^K$ için $f^\Delta(t)$ mevcut ise f fonksiyonuna $\mathbb{T}^K$ da delta (Hilger) türevlenebilir denir. Biz bundan sonra buna kısaca türevlenebilir diyeceğiz.

$f^\Delta: \mathbb{T}^K \rightarrow \mathbb{R}$ ile de f in delta türevini göstereceğiz [5,9].

2.5. Örnek

i) $\alpha \in \mathbb{R}$ sabit olmak üzere, $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $t \in \mathbb{R}$ için $f(t) = \alpha$ olarak tanımlanmışsa $f^\Delta(t) \equiv 0$ dır. Gerçekten her $s \in \mathbb{T}$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\left| f(\sigma(t)) - f(s) - 0(\sigma(t) - s) \right| = |\alpha - \alpha| = 0 \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

her zaman sağlanır.

ii) Her $t \in \mathbb{T}$ için $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $f(t) = t$ olarak tanımlanmışsa $f^\Delta(t) \equiv 1$ dir. Gerçekten her $s \in \mathbb{T}$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - 1(\sigma(t) - s)| = |\sigma(t) - s - (\sigma(t) - s)| = 0 \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

her zaman sağlanır.

2.2. Teorem

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^\times$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

- i) f fonksiyonu t de türevlenebilir ise t de süreklidir.
- ii) f fonksiyonu t de sürekli ve t sağ-saçılımlı ise f fonksiyonu t de türevlenebilirdir ve

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

dir.

- iii) t sağ-yoğun ve

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limiti sonlu ise f fonksiyonu t de türevlenebilirdir ve

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

dir.

iv) f fonksiyonu t de türevlenebilir ise,

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t).f^{\Delta}(t)$$

sağlanır [5].

2.6. Örnek

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ durumlarını göz önüne alalım.

i) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise Teorem 2.2 -(iii) den dolayı $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ delta türevlenebilirdir ve

$$f'(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limiti sonlu olarak mevcut ise

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

olur.

ii) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise Teorem 2.2. -(ii) den dolayı $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ delta türevlenebilir ve

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+1) - f(t)}{1} = f(t+1) - f(t) = \Delta f$$

elde edilir.

2.7. Örnek

$h > 0$ için, $t = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}$ olsun. Bu durumda, $t \in \mathbb{T}$ için,

$$\sigma(t) = \inf \{s \in t; s > t\} = \inf \{t + nh : n \in \mathbb{N}\} = t + h$$

olur.

Benzer şekilde $\rho(t) = t - h$ elde edilir. O halde granül fonksiyonu,

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t + h - t = h$$

elde edilir. Görüldüğü gibi bu örnekte granül fonksiyon sabittir. Bir $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve her $t \in \mathbb{T}$ için,

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$f^{\Delta\Delta}(t) = \frac{f^\Delta(\sigma(t)) - f^\Delta(t)}{\mu(t)} = \frac{f^\Delta(t+h) - f^\Delta(t)}{h}$$

$$= \frac{\frac{f(t+2h) - f(t+h)}{h} - \frac{f(t+h) - f(t)}{h}}{h}$$

$$= \frac{f(t+2h) - 2f(t+h) + f(t)}{h^2}$$

olarak elde edilir. Bu yolla $f^{\Delta^n}(t)$ yi hesaplamak çok sıkıcıdır. Bu sebeple biz başka bir metod kullanacağız. Açıktır ki her $n \in \mathbb{N}$ için, $\sigma^n(t) = t + nh$ ve $\rho^n(t) = t - nh$ dır. Şimdi Δ_h operatörünü,

$\Delta_h = \frac{1}{h}(\sigma - I)$, I birim operatör olarak tanımlayalım. Şimdi,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$$

Binom Teoremini hatırlayalım. Burada, Δ_h in n . kuvvetini bulmak için binom teoreminin bir operatör versiyonunu kullanabiliriz,

$$\Delta_h^n = \frac{1}{h^n}(\sigma - I)^n = \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sigma^k (-1)^{n-k}$$

elde edilir. Δ_h operatörünü $f(t)$ fonksiyonuna uygularsak,

$$f^{\Delta^n}(t) = \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k f(t + kh)$$

elde ederiz [5].

2.8. Örnek

$q > 1$ için

$$q^{\mathbb{Z}} = \{q^k : k \in \mathbb{Z}\} \text{ ve } \overline{q^{\mathbb{Z}}} = q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$$

olsun. $\mathbb{T} = \overline{q^{\mathbb{Z}}}$ zaman skalasını düşünelim,

$$\sigma(t) = \inf\{q^n : n \in [m+1, \infty)\} = q^{m+1} = qq^m = qt$$

olur. $t = q^m \in \mathbb{T}$ için $\sigma(0) = 0$ olur. Çünkü sıfır sağ-yoğun bir minimumdur.

Diğer bütün noktalar izole noktadır. Sonuç olarak $\sigma(t) = tq$, $\rho(t) = \frac{t}{q}$ ve

$\mu(t) = (q-1)t$ olur. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için, $\forall t \in \mathbb{T} - \{0\}$ için

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(qt) - f(t)}{(q-1)t}$$

ve

$$f^\Delta(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(0) - f(s)}{0 - s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s) - f(0)}{s}, \text{ (limit mevcut ise)}$$

olur. Şimdi de $t \neq 0$ olmak üzere, ikinci türevleri hesaplayalım,

$$f^{\Delta\Delta}(t) = \frac{f^\Delta(\sigma(t)) - f^\Delta(t)}{\mu(t)} = \frac{f^\Delta(qt) - f^\Delta(t)}{(q-1)t}$$

$$= \frac{\frac{f(q^2t) - f(qt)}{q(q-1)t} - \frac{f(qt) - f(t)}{(q-1)t}}{(q-1)t}$$

$$= \frac{f(q^2t) - (q+1)f(qt) + qf(t)}{q(q-1)^2t^2}$$

elde edilir [5].

2.3. Teorem

$f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}^K$ noktasında türevlenebilir olsunlar. Bu durumda,

i) $f + g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilirdir ve,

$$(f + g)^\Delta = f^\Delta(t) + g^\Delta(t)$$

dir.

ii) Herhangi bir α sabiti için $\alpha f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilirdir ve,

$$(\alpha f)^\Delta(t) = \alpha \cdot f^\Delta(t)$$

dir.

iii) $fg : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilirdir ve,

$$(fg)^\Delta(t) = f^\Delta(t)g(t) + f(\sigma(t))g^\Delta(t) = f(t)g^\Delta(t) + f^\Delta(t)g(\sigma(t))$$

dir.

iv) Eğer $f(t).f(\sigma(t)) \neq 0$ ise $\frac{1}{f}$ fonksiyonu türevlenebilirdir ve,

$$\left(\frac{1}{f}\right)^\Delta(t) = -\frac{f^\Delta(t)}{f(t)f(\sigma(t))}$$

dir.

v) Eğer $g(t).g(\sigma(t)) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$ fonksiyonu türevlenebilirdir ve,

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)g(t) - f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

dir [5].

2.4. Teorem

$m \in \mathbb{N}$ ve α bir sabit olsun.

$$i) f(t) = (t - \alpha)^m$$

şeklinde tanımlı bir fonksiyon için,

$$f^{\Delta}(t) = \sum_{v=0}^{m-1} (\sigma(t) - \alpha)^v (t - \alpha)^{m-1-v}$$

$$ii) g(t) = \frac{1}{(t - \alpha)^m}$$

şeklinde tanımlı bir fonksiyon için,

$$g^{\Delta}(t) = - \sum_{v=0}^{m-1} \frac{1}{(\sigma(t) - \alpha)^{m-v} (t - \alpha)^{v+1}}, (\sigma(t) - \alpha)(t - \alpha) \neq 0$$

eşitlikleri doğrudur [5].

2.9. Örnek

$$\begin{aligned} (t^2)^\Delta &= t + \sigma(t) \\ \left(\frac{1}{t}\right)^\Delta &= -\frac{1}{t \cdot \sigma(t)} \end{aligned}$$

oldukları Teoremden 2.4 den dolayı açıktır [5].

2.7. Tanım

Bir $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için f^Δ fonksiyonu $\mathbb{T}^{K^2} = (\mathbb{T}^K)^K$ da türevlenebilirse $f^{\Delta\Delta} = (f^\Delta)^\Delta: \mathbb{T}^{K^2} \rightarrow \mathbb{R}$ ikinci mertebeden türevlerden bahsedebiliriz. Benzer şekilde $f^{\Delta^n}: \mathbb{T}^{K^n} \rightarrow \mathbb{R}$ yüksek mertebeden türevleri de verebiliriz. Biz $\sigma^2(t) = \sigma(\sigma(t))$ ve $\rho^2(t) = \rho(\rho(t))$ notasyonunu kullanacağız. Uygunluk açısından $\sigma^0(t) = t$, $\rho^0(t) = t$, $f^{\Delta^0}(t) = t$ ve $\mathbb{T}^{K^0} = \mathbb{T}$ ile göstereceğiz [5].

2.10. Örnek

Genel olarak f ve g nin ikisi de iki kez türevlenebilir olsa bile fg iki kez türevlenemez. Çünkü,

$$(fg)^\Delta = f^\Delta g + f^\sigma g^\Delta$$

olduğundan f ve g iki kez türevlenebilir ve f^σ türevlenebilir ise bu durumda,

$$\begin{aligned} (fg)^{\Delta\Delta} &= (f^\Delta g + f^\sigma g^\Delta)^\Delta = f^{\Delta\Delta} g + f^{\Delta^\sigma} g^\Delta + f^\sigma g^{\Delta^\Delta} + f^{\sigma^\Delta} g^{\Delta\Delta} \\ &= f^{\Delta\Delta} g + (f^{\Delta^\sigma} + f^{\sigma^\Delta}) g^\Delta + f^{\sigma\sigma} g^{\Delta\Delta} \end{aligned}$$

olur [5].

Burada $f^\sigma(t) = f(\sigma(t))$ dir.

2.5. Teorem (Leibniz Formülü)

$S_k^{(n)}$ k tane σ ve $n-k$ tane Δ içeren, n uzunluğundaki mümkün olan tüm dizilerden oluşan bir küme olsun. Eğer her $\Lambda \in S_K^{(n)}$ için f^Λ mevcut ise, $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$(fg)^{\Delta^n} = \sum_{k=0}^n \left[\sum_{\Lambda \in S_K^{(n)}} f^\Lambda \right] g^{\Delta^k}$$

eşitliği doğrudur [5].

2.11. Örnek

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alalım. Bu durumda $\Lambda \in S_K^{(n)}$ için, $f^\Lambda = f^{(n-k)}$ olur. Burada $f^{(n)}$ ile n inci mertebeden adi türevi gösteriyoruz.

Burada $|S_K^{(n)}| = \binom{n}{k}$ olup,

$$\sum_{\Lambda \in S_K^{(n)}} f^\Lambda = \sum_{\Lambda \in S_K^{(n-k)}} f(n) = f^{(n-k)} \sum_{\Lambda \in S_K^{(n)}} 1 = \binom{n}{k} f^{(n-k)} \quad \text{olduğundan,}$$

$$(fg)^{\Delta^n} = \sum_{k=0}^n \left[\sum_{\Lambda \in S_K^{(n)}} f^\Lambda \right] g^{\Delta^k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{\Delta^k}$$

elde edilir ki bu alışılmış Leibniz formülüdür [3].

2.3. Delta İntegral

2.8. Tanım

Bir $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathbb{T}$ nin tüm sağ-yoğun noktalarında sağ limiti var ve sonlu, $\mathbb{T}$ nin tüm sol-yoğun noktalarında sol limiti var ve sonlu ise f fonksiyonu *düzenlidir (regulated)* denir [5].

2.9. Tanım

Bir $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}$ deki sağ-yoğun noktalarda sürekli ve $\mathbb{T}$ deki sol-yoğun noktalarda sol limitleri var ve sonlu ise f fonksiyonu *rd-sürekli* denir.

Bundan sonra rd-sürekli tüm $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonların kümesini

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

ile göstereceğiz. rd-sürekli ve türevlenebilir fonksiyonların kümesini de

$$C_{rd}^1 = C_{rd}^1(\mathbb{T}) = C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

ile göstereceğiz [5].

2.6. Teorem

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ olsun.

- (i) f sürekli ise rd-sürekli
- (ii) f rd-sürekli ise düzenlidir.
- (iii) σ operatörü rd-sürekli.
- (iv) f rd-sürekli veya düzenli ise f^σ da öyledir.
- (v) f sürekli olsun. $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu rd-sürekli veya düzenli ise $f \circ g$ da öyledir [5].

2.10. Tanım

Bir $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu $D \subset \mathbb{T}^K$ için, her $t \in D$ noktasında diferensiyellenebilir ise ve, $\mathbb{T}^K \setminus D$ kümesi sayılabilir ve $\mathbb{T}$ nin hiçbir sağ-saçılımlı noktasını içermiyorsa, f fonksiyonuna D bölgesinde *pre-diferensiyellenebilir* (ön türevlenebilir) denir [5].

2.12. Örnek

$\mathbb{T} = \mathbf{p}_{1,2}$ ve $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , t \in \bigcup_{k=0}^{\infty} [3k, 3k+1] \\ t-3k-1 & , t \in [3k+1, 3k+2] \end{cases}$$

olsun. $P = \bigcup_{k=0}^{\infty} [3k, 3k+2]$ olmak üzere f fonksiyonu,

$D = \mathbb{T} \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} \{3k+1\}$ kümesinde pre-diferensiyellenebilirdir[5].

2.7. Teorem

Kapalı aralıkta, her düzenli fonksiyon sınırlıdır [5].

İspat

Kabul edelim ki $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırsız olsun. Yani, her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n \in [a,b]$ ve $|f(t_n)| > n$ olsun. $\{t_n : n \in \mathbb{N}\} \subset [a,b]$ olduğundan $\{t_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ yakınsak bir alt dizi vardır. Yani en az bir $t_0 \in [a,b]$ vardır ki,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_{n_k} = t_0$$

dır. $\{t_{n_k} : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{T}$ ve $\mathbb{T}$ kapalı olduğundan $t_0 \in \mathbb{T}$ dir. Bu durumda t_0 noktası izole olamaz ve t_0 noktasına ya yukarıdan ya da aşağıdan yaklaşan bir alt dizi vardır. Her iki durumda da düzgünlükten dolayı, $t \rightarrow t_0$ iken $f(t)$ nin limiti sonlu olmalıdır ki bu bir çelişkidir.

2.8. Teorem (Ortalama Değer Teoremi)

f ve g ; $\mathbb{T}$ de tanımlı reel değerli fonksiyonlar olsunlar ve ikisi de, bir D bölgesinde pre-diferensiyellenebilir olsunlar. Bu durumda, $\forall t \in D$ için

$$|f^\Delta(t)| \leq g^\Delta(t)$$

ise, her $r, s \in \mathbb{T}$, $r \leq s$ için,

$$|f(s) - f(r)| \leq g(s) - g(r)$$

dir [5].

İspat

$r, s \in \mathbb{T}$ ve $r \leq s$ olsun. $[r, s) \setminus D = \{t_n : n \in \mathbb{N}\}$ ile gösterelim. $\varepsilon > 0$ olsun. Şimdi tümevarım kullanarak, $\forall t \in [r, s]$ için,

$$S(t) : |f(t) - f(r)| \leq g(t) - g(r) + \varepsilon \left[t - r + \sum_{t_n < t} 2^{-n} \right]$$

olduğunu göstereceğiz. Bunu göstererek ortalama değer teoremini ispatlamış oluruz. Şimdi Teorem 2.1 ile verilen tümevarım prensibinin dört koşulunu kontrol edelim.

i) Aşık olarak $S(r)$ ifadesi doğrudur.

ii) t sağ saçılımlı olsun ve $S(t)$ doğru olsun. Bu durumda,

$$|f(\sigma(t)) - f(r)| = |f(t) + \mu(t).f^\Delta(t) - f(r)|$$

$$\leq \mu(t).|f^\Delta(t)| + |f(t) - f(r)|$$

$$\leq \mu(t).g^\Delta(t) + g(t) - g(r) + \varepsilon \left[t - r + \sum_{t_n < t} 2^{-n} \right]$$

$$= g(\sigma(t)) - g(r) + \varepsilon \left[t - r + \sum_{t_n < \sigma(t)} 2^{-n} \right]$$

$$< g(\sigma(t)) - g(r) + \varepsilon \left[t - r + \sum_{t_n < \sigma(t)} 2^{-n} \right]$$

olup $S(\sigma(t))$ doğrudur.

iii) $t = s$ sağ yoğun noktada $S(t)$ doğru olsun. ($\sigma(t) = t$). İki durumu da göz önüne alalım. Yani $t \in D$ ve $t \notin D$ için. İlk önce $t \in D$ olsun. Bu durumda f ve g , t de

diferensiyellenebilirler. Bundan dolayı bir U komşuluğu vardır, öyle ki; her $\tau \in U$ için,

$$|f(t) - f(\tau) - f^\Delta(t) \cdot (t - \tau)| \leq \frac{\varepsilon}{2} |t - \tau|$$

ve

$$|g(t) - g(\tau) - g^\Delta(t) \cdot (t - \tau)| \leq \frac{\varepsilon}{2} |t - \tau|$$

dır. Böylece,

$$|f(t) - f(\tau)| \leq \left[|f^\Delta(t)| + \frac{\varepsilon}{2} \right] |t - \tau|$$

ve

$$g(\tau) - g(t) - g^\Delta(t) \cdot (\tau - t) \geq -\frac{\varepsilon}{2} |t - \tau|$$

dır. Bu durumda her $\tau \in U \cap (t, \infty)$ için,

$$|f(\tau) - f(r)| \leq |f(\tau) - f(t)| + |f(t) - f(r)|$$

$$\leq \left[f^\Delta(t) + \frac{\varepsilon}{2} \right] |t - \tau| + |f(t) - f(r)|$$

$$\leq \left[g^\Delta(t) + \frac{\varepsilon}{2} \right] |t - \tau| + g(t) - g(r) + \varepsilon \cdot \left[t - r + \sum_{t_n < t} 2^{-n} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= g^\Delta(t) \cdot (\tau - t) + \frac{\varepsilon}{2}(\tau - t) + g(t) - g(r) + \varepsilon(t - r) + \varepsilon \sum_{t_n < t} 2^{-n} \\
&\leq g(\tau) - g(t) + \frac{\varepsilon}{2}|\tau - t| + \frac{\varepsilon}{2}(\tau - t) + g(t) - g(r) + \varepsilon(t - r) + \varepsilon \sum_{t_n < t} 2^{-n} \\
&= g(\tau) - g(r) + \varepsilon \left[t - r + \sum_{t_n < \tau} 2^{-n} \right]
\end{aligned}$$

olup $S(\tau)$ ifadesi her $\tau \in U \cap (t, \infty)$ için doğrudur.

Şimdi ikinci durum olarak $t \notin D$ olsun. Bu durumda bazı $m \in \mathbb{N}$ için $t = t_m$ olur. f ve g pre-diferensiyellenebilir olduklarından bir U komşuluğu vardır, öyle ki; her $\tau \in U$ için,

$$|f(\tau) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} 2^{-m}$$

ve

$$|g(\tau) - g(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} 2^{-m}$$

dir. Bundan dolayı,

$$g(\tau) - g(t) \geq -\frac{\varepsilon}{2} 2^{-m}$$

olur. Bunları kullanarak,

$$|f(\tau) - f(r)| \leq |f(\tau) - f(t)| + |f(t) - f(r)|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\varepsilon}{2} 2^{-m} + g(t) - g(r) + \varepsilon \left[t - r + \sum_{t_n < t} 2^{-n} \right] \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} 2^{-m} + g(\tau) + \frac{\varepsilon}{2} 2^{-m} - g(r) + \varepsilon \left[\tau - r + \sum_{t_n < t} 2^{-n} \right] \\
&= \varepsilon 2^{-m} + g(\tau) - g(r) + \varepsilon \left[\tau - r + \sum_{t_n < t} 2^{-n} \right] \\
&= g(\tau) - g(r) + \varepsilon \left[\tau - r + \sum_{t_n < t} 2^{-n} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir ki $S(\tau)$, her $\tau \in U \cap (t, \infty)$ için doğrudur.

iv) t sol yoğun olsun ve her $\tau < t$ için $S(\tau)$ doğru olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau \rightarrow t^-} |f(\tau) - f(r)| &\leq \lim_{\tau \rightarrow t^-} \left\{ g(t) - g(r) + \varepsilon \left[\tau - r + \sum_{t_n < \tau} 2^{-n} \right] \right\} \\
&\leq \lim_{\tau \rightarrow t^-} \left\{ g(\tau) - g(r) + \varepsilon \left[\tau - r + \sum_{t_n < t} 2^{-n} \right] \right\}
\end{aligned}$$

olup $S(t)$ doğrudur [5].

2.1. Not

f ve g , D üzerinde pre-diferensiyellenebilir olsunlar,

i) U , uç noktaları $r, s \in \mathbb{T}$ olan kompakt bir aralık ise,

$$|f(s) - f(r)| \leq \left\{ \sup_{t \in U^k \cap D} |f^\Delta(t)| \right\} \cdot |s - r|$$

dir [5].

ii) $\forall t \in D$ için $f^\Delta(t) \equiv 0$ ise f sabit fonksiyondur,

iii) $\forall t \in D$ için $f^\Delta(t) = g^\Delta(t)$ ise bu durumda, C bir sabit olmak üzere,

$\forall t \in D$ için $g(t) = f(t) + C$ dir [5].

2.9. Teorem (Ön-Antitürevin varlığı)

f düzenli bir fonksiyon olsun. Bu durumda bir F fonksiyonu vardır öyle ki, $F ; D$ bölgesinde pre-diferensiyellenebilir ve, her $t \in D$ için

$$F^\Delta(t) = f(t)$$

dir [5].

2.11. Tanım

$f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ düzenli bir fonksiyon olsun. Teorem 2.9. da tanımlanan fonksiyona f in “ön-antitürevi” denir. Bu durumda düzenli bir f fonksiyonunun “Belirsiz integrali” c bir sabit olmak üzere ve $F ; f$ nin ön-antitürevi olmak üzere,

$$\int f(t) \Delta t = F(t) + c,$$

olarak tanımlanır. Ayrıca $\forall r, s \in \mathbb{T}$ olmak üzere,

$$\int_r^s f(t) \Delta t = F(s) - F(r)$$

olarak Cauchy integrali tanımlanır [5].

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için $\forall t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ için $F^{\Delta}(t) = f(t)$ ise F ye f nin “antitürevi” denir [5].

2.13. Örnek

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $f(t) = a^t$ ve $a \neq 1$ sabit olmak üzere,

$$\int a^t \Delta t$$

integralini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} f^{\Delta}(t) &= \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} \\ &= \frac{a^{\sigma(t)} - a^t}{\sigma(t) - t}, \quad (\sigma(t) = t + 1) \\ &= \frac{a^{t+1} - a^t}{1} \\ &= a^t(a - 1) \\ \left[\frac{a^t}{a - 1} \right]^{\Delta} &= \Delta \left(\frac{a^t}{a - 1} \right) = \frac{a^{t+1} - a^t}{a - 1} = a^t \end{aligned}$$

olduğundan, c sabit olmak üzere,

$$\int a^t \Delta t = \frac{a^t}{a - 1} + c$$

elde edilir.

2.10. Teorem (Antitürevin varlığı)

Her rd-sürekli fonksiyonun antitürevi vardır. Ayrıca $t_0 \in \mathbb{T}$ ise, $t \in \mathbb{T}$ için,

$$F(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) \Delta \tau$$

şeklinde tanımlanan $F(t)$ fonksiyonu, $f(t)$ nin antitürevidir [5].

İspat

f rd-sürekli olsun. 2.3.1. Teorem (ii) den dolayı f düzenlidir. 2.3.4. Teoremden dolayı ön-antitürevi vardır. $F(t_0) \neq t_0$ olsun ve her $t \in D$ için $F^\Delta(t) = f(t)$ olsun. Yani F fonksiyonu D de ön-diferensiyellenebilirdir. Biz göstereceğiz ki, her $t \in \mathbb{T}^K$ için $F^\Delta(t) = f(t)$ dir. ($\mathbb{T}^K \setminus D \subset \mathbb{T}^K$ dir). Bu durumda t sağ-yoğundur. Çünkü $\mathbb{T}^K \setminus D$ de sağ saçılımlı nokta yoktur. f rd-sürekli olduğundan, t de süreklidir. $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda burada bir U komşuluğu vardır öyle ki, $\forall s \in U$ için,

$$|f(s) - f(t)| \leq \varepsilon$$

olur. Şimdi $\tau \in \mathbb{T}$ için,

$$h(\tau) = F(\tau) - f(t) \cdot (\tau - t_0)$$

tanımlayalım. Bu durumda h ; D de ön-diferensiyellenebilirdir. Bu durumda, $\tau \in D$ için

$$h^\Delta(\tau) = F^\Delta(\tau) - f(t) = f(\tau) - f(t)$$

olup, her $s \in D \cap U$ için,

$$|h^\Delta(s)| = |f(s) - f(t)| \leq \varepsilon$$

olur. Bu yüzden,

$$\sup_{s \in D \cap U} |h^\Delta(s)| \leq \varepsilon$$

olur. Not 2.1 den dolayı her $r \in U$ için,

$$\begin{aligned} |F(t) - F(r) - f(t).(t-r)| &= |h(t) + f(t).(t-t_0) - [h(r) + f(t).(r-t_0)] - f(t).(t-r)| \\ &= |h(t) - h(r)| \end{aligned}$$

$$= \left\{ \sup_{s \in D \cap U} |h^\Delta(s)| \right\} . |t-r|$$

$$\leq \varepsilon . |t-r|$$

olup F ; t de diferensiyellenebilirdir ve $F^\Delta(t) = f(t)$ dir [5].

2.11. Teorem

$f \in C_{rd}$ ve $t \in \mathbb{T}^K$ ise, bu durumda,

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau) \Delta \tau = \mu(t).f(t)$$

dir [3].

İspat

Teorem 2.10 dan dolayı f nin bir F antitürevi vardır ve,

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau) \Delta \tau = F(\sigma(t)) - F(t)$$

$$= \mu(t).F^\Delta(t)$$

$$= \mu(t).f(t) \quad \text{olur.}$$

2.12. Teorem

$f^\Delta(t) \geq 0$ ise f azalmayandır [3].

İspat

$[a, b]$ de $f^\Delta(t) \geq 0$ ve $s, t \in \mathbb{T}$ için $a \leq s \leq t \leq b$ olsun. Bu durumda,

$$f(t) = f(s) + \int_s^t f^\Delta(\tau) \Delta \tau \geq f(s)$$

olarak sonuç elde edilir.

2.13. Teorem

$a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C_{rd}$ olsun. Bu durumda,

$$\text{i) } \int_a^b [f(t) + g(t)] \Delta t = \int_a^b f(t) \Delta t + \int_a^b g(t) \Delta t ;$$

$$\text{ii) } \int_a^b \alpha.f(t) \Delta t = \alpha. \int_a^b f(t) \Delta t ;$$

$$\text{iii)} \int_a^b f(t) \Delta t = - \int_b^a f(t) \Delta t ;$$

$$\text{iv)} \int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^c f(t) \Delta t + \int_c^b f(t) \Delta t ;$$

$$\text{v)} \int_a^b f(\sigma(t)).g^\Delta(t) \Delta t = (f.g)(b) - (f.g)(a) - \int_a^b f^\Delta(t).g(t) \Delta t ;$$

$$\text{vi)} \int_a^b f(t).g^\Delta(t) \Delta t = (f.g)(b) - (f.g)(a) - \int_a^b f^\Delta(t).g(\sigma(t)) \Delta t ;$$

$$\text{vii)} \int_a^a f(t) \Delta t = 0 ;$$

viii) $[a, b]$ de $|f(t)| \leq g(t)$ ise bu durumda,

$$\left| \int_a^b f(t) \Delta t \right| \leq \int_a^b g(t) \Delta t$$

dir;

ix) $\forall t \in [a, b)$ için $f(t) \geq 0$ ise bu durumda,

$$\int_a^b f(t) \Delta t \geq 0$$

dır [5].

2.14. Teorem

$f \in C_{rd}$ ve $a, b \in \mathbb{T}$ olsun.

i) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise,

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^b f(t) dt$$

olur ki burada sağ taraf belirli integralidir.

ii) $[a, b]$ izole noktalardan oluşmuş ise,

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum_{t \in [a, b)} \mu(t).f(t) & , a < b \\ 0 & , a = b \\ - \sum_{t \in [b, a)} \mu(t).f(t) & , a > b \end{cases}$$

dır.

iii) $h > 0$ için $h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}$ ise

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(kh).h & , a < b \\ 0 & , a = b \\ - \sum_{k=\frac{b}{h}}^{\frac{a}{h}-1} f(kh).h & , a > b \end{cases}$$

dır.

iv) $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise,

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum_{t=a}^b f(t) & , a < b \\ 0 & , a = b \\ - \sum_{t=b}^a f(t) & , a > b \end{cases}$$

dir [5].

İspat

i) Örnek 2.6 -(i) ve genel matematiğin temel teoreminden açıktır.

ii) $[a, b]$ sonlu sayıda noktadan oluşmuş ve her noktası izoledir. $a < b$ olsun ve $[a, b] = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ kabul edelim. Yani $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \Delta t &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t) \Delta t \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{t_i}^{\sigma(t_i)} f(t) \Delta t \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mu(t_i) \cdot f(t_i) \\ &= \sum_{t \in [a, b)} \mu(t) \cdot f(t) \end{aligned}$$

olur. $b < a$ de benzer şekilde ispatlanabilir.

Teorem 2.13 den (iii) ve (iv) şıkları (ii) nin özel halleridir [5].

2.14. Örnek

$\mathbb{T} = [a, b]_{\mathbb{R}} \cup \{c\} \cup [d, e]_{\mathbb{R}}$ $\{b < c < d\}$ olmak üzere

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyonu için

$\int_a^e f(t) \Delta t$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\int_a^e f(t) \Delta t = \int_a^b f(t) dt + \int_b^{\sigma(b)} f(t) \Delta t + \int_c^{\sigma(c)} f(t) \Delta t + \int_d^e f(t) dt \quad \text{“ } \mu(t) = \sigma(t) - t \text{ ”}$$

$$= \int_a^b f(t) dt + \int_d^e f(t) dt + \mu(b) f(b) + \mu(c) f(c)$$

$$= \int_a^b f(t) dt + \int_d^e f(t) dt + f(b)(c-b) + f(c)(d-c)$$

2.12. Tanım

$a \in \mathbb{T}$, $\text{Sup } \mathbb{T} = \infty$ ve $f; [0, \infty)$ da rd-sürekli ise bu durumda *genelleştirilmiş integral*,

$$\int_a^\infty f(t) \Delta t = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \Delta t$$

olarak tanımlanır. Sağ taraftaki limit mevcut ise genelleştirilmiş integral “yakınsaktır”, aksi takdirde “ıraksaktır” denir [5].

2.15. Teorem (Zincir Kuralı)

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{T}^K$ da diferensiyellenebilir fonksiyon olsun.

Ayrıca $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $[t, \sigma(t)]$ reel aralığında bir c noktası vardır öyle ki,

$$(f \circ g)^\Delta(t) = f'(g(c)) \cdot g^\Delta(t)$$

eşitliği sağlanır [5].

2.16. Teorem

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası ve $\nu: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ kesin olarak artan bir fonksiyon ve $\tilde{\mathbb{T}} = \nu(\mathbb{T})$ bir zaman skalası olsun. $\tilde{\sigma}$ ile $\tilde{t}$ üzerindeki sıçrama fonksiyonunu ve $\tilde{\Delta}$ ile üzerindeki $\tilde{t}$ türevi gösterelim. Bu durumda $\nu \circ \sigma = \tilde{\sigma} \circ \nu$ olur [5].

2.17. Teorem (Zincir Kuralı)

$\nu: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ kesin olarak artan bir fonksiyon ve $\tilde{\mathbb{T}} = f(\mathbb{T})$ bir zaman skalası olsun. $w: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ alalım. Eğer $\nu^\Delta(t)$ ve $w^{\tilde{\Delta}}(\nu(t))$, $t \in \mathbb{T}^K$ için varsa, $(w \circ \nu)^\Delta = (w^{\tilde{\Delta}} \circ \nu) \nu^\Delta$ olur [5].

2.18. Teorem (Değişken değiştirme).

Kabul edelim ki, $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ kesin artan bir fonksiyon ve $\tilde{\mathbb{T}} = f(\mathbb{T})$ bir zaman skalası olsun. Bu durumda $g \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ve $f \in C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ olmak üzere, her $t, s \in \mathbb{T}$ için

$$\int_s^t g(\eta) f^\Delta(\eta) \Delta\eta = \int_{f(s)}^{f(t)} (g \circ f^{-1})(\xi) \tilde{\Delta}\xi$$

dır [5].

2.19. Teorem

Teorem 2.18 deki şartlar altında $\tilde{\mathbb{T}} = \mathbb{T}$ ise

$$\int_s^t g(\eta) f^\Delta(\eta) \Delta\eta = \int_{f(s)}^{f(t)} (g \circ f^{-1})(\eta) \Delta\eta$$

dır [5].

2.20. Teorem (Ara değer teoremi).

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun. $t, s \in \mathbb{T}$ ve $t > s$ olmak üzere,

$$f(s)f(t) < 0$$

sağlanıyorsa, bir $r \in [s, t)$ için $f(r) = 0$ veya $f(r)f(\sigma(r)) < 0$

olur [5].

2.21. Teorem (Leibnitz kuralı)

Kabul edelim ki, $s \in \mathbb{T}^K$ ve $f: \mathbb{T} \times \mathbb{T}^K \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $r > s$ ve $r \in \mathbb{T}^K$ olmak üzere (r, r) noktasında sürekli olsun. Bununla birlikte, $f^\Delta(r, \cdot) \in C_{rd}([s, \sigma(r)])$

olsun. O zaman; $g(t) = \int_s^t f(t, \eta) \Delta\eta$ ile tanımlanırsa

$$g^\Delta(t) = \int_s^t f^\Delta(t, \eta) \Delta\eta + f(\sigma(t), t)$$

sağlanır [5].

Yukarıdaki teoremde türev birinci derecede uygulanmaktadır.

2.4. Genelleştirilmiş Üstel Fonksiyon

2.13. Tanım

$h > 0$ olmak üzere, *Hilger karmaşık sayıları*, *Hilger reel eksen*i, *Hilger alternatif eksen*i ve *Hilger sanal çemberi* sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlıdır,

$$\mathbb{C}_h = \left\{ z \in \mathbb{C} : z \neq -\frac{1}{h} \right\},$$

$$\mathbb{R}_h = \left\{ z \in \mathbb{C}_h : z \in \mathbb{R}, z > -\frac{1}{h} \right\},$$

$$\mathbb{A}_h = \left\{ z \in \mathbb{C}_h : z \in \mathbb{R}, z < -\frac{1}{h} \right\},$$

$$\mathbb{I}_h = \left\{ z \in \mathbb{C}_h : \left| z + \frac{1}{h} \right| = \frac{1}{h} \right\}.$$

Bunlarla beraber, $h = 0$ için $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}$, $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R}$, $\mathbb{I}_0 = i\mathbb{R}$ ve $\mathbb{A}_0 = \emptyset$ ile tanımlıdır [5].

2.14. Tanım

$h > 0$ ve $z \in \mathbb{C}_h$ olsun.

$$z\text{'nin Hilger reel kısmı; } \operatorname{Re}_h(z) = \frac{|zh+1|-1}{h}$$

$$z\text{'nin Hilger imajiner kısmı; } \operatorname{Im}_h(z) = \frac{\operatorname{Arg}(zh+1)}{h} \text{ ile tanımlıdır.}$$

Burada $\operatorname{Arg}(z)$, z 'nin esas argümentidir. ($-\pi < \operatorname{Arg}(z) < \pi$)

Ayrıca $\operatorname{Re}_h(z)$ ve $\operatorname{Im}_h(z)$

$$-\frac{1}{h} < \operatorname{Re}_h(z) < \infty \text{ ve } -\frac{\pi}{h} < \operatorname{Im}_h(z) \leq \frac{\pi}{h} \text{ aralıklarını sağlar [5].}$$

2.15. Tanım

$-\frac{\pi}{h} < w \leq \frac{\pi}{h}$ olsun. Hilger'in pür imajiner sayısı iw

$$iw = \frac{e^{iwh} - 1}{h}$$

ile tanımlanır. $z \in \mathbb{C}_h$ için, $i \operatorname{Im}_h(z) \in I_h$ olur [5].

2.22. Teorem

Eğer $-\frac{\pi}{h} < w \leq \frac{\pi}{h}$ ise

$$|iw|^2 = \frac{4}{h_2} \sin^2 \frac{wh}{2}$$

olur [3].

2.16. Tanım

$\mathbb{C}_h$ üzerindeki “circle plus” toplama $\oplus$ işlemi

$$z \oplus w = z + w + hzw$$

ile tanımlanır. Bu durumda $(\mathbb{C}_h, \oplus)$ bir Abelian grup olur [5].

2.23. Teorem

$$z \in \mathbb{C}_h \text{ için } z = \operatorname{Re}_h z \oplus i \operatorname{Im}_h z$$

olur [5].

2.17. Tanım

Tanım 2.16 da tanımlanan $\oplus$ işlemi altında $z \in \mathbb{C}_h$ nin toplamsal tersi

$$\ominus z = \frac{-z}{1+zh} \text{ olur. Bu durumda } \mathbb{C}_h \text{ üzerindeki “circle minus” çıkarma } \ominus \text{ işlemini}$$

$$z \ominus w = z \oplus (\ominus w)$$

ile tanımlarız [5].

2.18. Tanım

$h \geq 0$ olmak üzere,

$$\xi : \mathbb{C}_h \rightarrow \mathbb{Z}_h = \left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{h} < \operatorname{Im}(z) \leq \frac{\pi}{h} \right\}$$

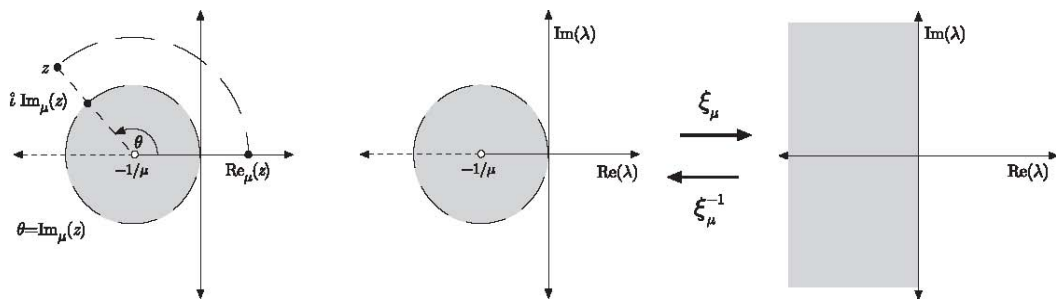
silindir dönüşümü,

$$\xi_h(z) = \begin{cases} z & , h = 0 \\ \frac{1}{h} \operatorname{Log}(1+zh) & , h > 0 \end{cases}$$

ile tanımlıdır. *Ters silindir dönüşümü* $\xi_h^{-1} : \mathbb{Z}_h \rightarrow \mathbb{C}_h$ ise

$$\zeta_h(z) = \begin{cases} z & , h = 0 \\ \frac{1}{h}(e^{zh} - 1) & , h > 0 \end{cases}$$

şeklindedir [5].



Şekil 2.1 Silindir Dönüşümü

2.19. Tanım

$p: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $t \in \mathbb{T}^{\times}$ için $1 + \mu(t)p(t) \neq 0$ özelliği sağlanıyorsa p fonksiyonuna *regressivdir* denir. Bütün regressiv ve rd-sürekli $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının kümesini $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathbb{T}) = \mathfrak{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ile göstereceğiz [5].

2.20. Tanım

$p \in \mathfrak{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ olmak üzere zaman skalası üzerinde *üstel fonksiyon* her $t, s \in \mathbb{T}$ için

$$e_p(t, s) = \exp \left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau \right)$$

ile tanımlanır [5].

2.1. Lemma

Eğer $p \in \mathfrak{R}$ ise her $r, s, t \in \mathbb{T}$ için

$$e_p(t, r)e_p(r, s) = e_p(t, s)$$

Yarı grup özelliği sağlanır [5].

İspat

$p \in \mathfrak{R}$, her $r, s, t \in \mathbb{T}$ olsun. 2.4.8. Tanımdan

$$\begin{aligned} e_p(t, r)e_p(r, s) &= \exp\left(\int_r^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right)\exp\left(\int_s^r \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) \\ &= \exp\left(\int_r^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau + \int_s^r \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) \\ &= \exp\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau \\ &= e_p(t, s) \end{aligned}$$

elde edilir [5].

2.20. Tanım

$p \in \mathfrak{R}$ ise birinci mertebeden lineer dinamik denklem,

$$y^\Delta = p(t)y$$

regressiv olarak adlandırılır [5].

2.24. Teorem

$f \in \mathfrak{R}$ ve $t \in \mathbb{T}$ olmak üzere,

$$x^\Delta - f(t)x = 0, \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$$

ile verilen başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$x(t) = x_0 e_f(t, t_0), \quad t \in \mathbb{T},$$

ile belirlidir [3].

2.25. Teorem (Sabitlerin Çeşitlenmesi)

$f \in \mathfrak{R}$, $g \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ve $t_0 \in \mathbb{T}$ olmak üzere

$$x^\Delta - f(t)x = g(t), \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$$

ile verilen başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$x(t) = x_0 e_f(t, t_0) + \int_{t_0}^t e_f(t, \sigma(\eta)) g(\eta) \Delta \eta$$

ile belirlidir [5].

2.26. Teorem

$p, q \in \mathfrak{R}$ ise

$$(i) \ e_0(t, s) \equiv 1 \text{ ve } e_p(t, t) \equiv 1$$

$$(ii) \ e_p(\sigma(t), s) = (1 + \mu(t)p(t))e_p(t, s)$$

$$(iii) \ \frac{1}{e_p(t, s)} = e_{\ominus p}(t, s)$$

$$(iv) \ e_p(t, s) = \frac{1}{e_p(s, t)} = e_{\ominus p}(s, t)$$

$$(v) \ e_p(t, s)e_p(s, r) = e_p(t, r)$$

$$(vi) \ e_p(t, s)e_q(t, s) = e_{p \oplus q}(t, s)$$

$$(vii) \ \frac{e_p(t, s)}{e_q(t, s)} = e_{p \ominus q}(t, s)$$

$$(viii) \ \left(\frac{1}{e_p(\cdot, s)} \right)^\Delta = - \frac{p(t)}{e_p^\sigma(\cdot, s)}$$

dir [5].

2.27. Teorem

$p \in \mathfrak{R}$ ve $t_0 \in \mathbb{T}$ olsun.

(i) Eğer $\mathbb{T}^K$ üzerinde $1 + \mu(t)p(t) > 0$ ise her $t \in \mathbb{T}$ için $e_p(t, t_0) > 0$ olur.

(ii) Eğer $\mathbb{T}^K$ üzerinde $1 + \mu(t)p(t) < 0$ ise her $t \in \mathbb{T}$ için

$$r_p(t, t_0) = \alpha(t, t_0)(-1)^{n_t} \text{ olur.}$$

Burada

$$\alpha(t, t_0) = \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{\log|1 + \mu(\tau)p(\tau)|}{\mu(\tau)} \Delta \tau \right)$$

ve

$$n_t = \begin{cases} | [t_0, t) | & , \quad t \geq t_0 \\ | [t, t_0) | & , \quad t < t_0 \end{cases}$$

dir [5].

2.21. Tanım

$\mathfrak{R}$ nin tüm pozitif regressiv elemanlarının kümesi,

$$\mathfrak{R}^+ = \mathfrak{R}^+(\mathbb{T}) = \mathfrak{R}^+(\mathbb{T}, \mathbb{R}) = \{p \text{ regressiv ve } 1 + \mu(t)p(t) > 0\}$$

ile tanımlanır [5].

2.2. Lemma

$\mathfrak{R}^+, \mathfrak{R}$ nin bir alt grubudur [3].

2.28. Teorem (Üstel fonksiyonun işareti)

Kabul edelim ki $f \in \mathfrak{R}$ ve $t_0 \in \mathbb{T}$ olsun. O zaman,

(i) $f \in \mathfrak{R}^+$ ise, her $t \in \mathbb{T}$ için $e_f(t, t_0) > 0$ olur.

(ii) $1 + \mu(t)p(t) < 0$ ifadesini sağlayan $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ noktaları için

$$e_f(t, t_0)e_f(\sigma(t), t_0) < 0$$

olur [5].

3. BAZI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

3.1. Hölder ve Cauchy-Schwarz Eşitsizlikleri

Zaman skalası üzerinde aşağıdaki versiyonda verilen Hölder eşitsizliği [4,Lemma 2.2(iv)] de verilmiştir ve ispatı klasik Hölder eşitsizliğinin [9,Teorem 188] de verilen biçimiyle aynıdır.

3.1. Teorem (Hölder Eşitsizliği)

$a, b \in \mathbb{T}$ olsun.

rd-sürekli $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları için $p > 1$ ve $q = p/(p-1)$ olduğunda

$$\int_a^b |f(t) \cdot g(t)| \Delta t \leq \left\{ \int_a^b |f(t)|^p \Delta t \right\}^{\frac{1}{p}} \cdot \left\{ \int_a^b |g(t)|^q \Delta t \right\}^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir [6].

İspat

Negatif olmayan α ve β reel sayıları için

$$\alpha^{\frac{1}{p}} \cdot \beta^{\frac{1}{q}} \leq \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} \quad (3.1)$$

eşitsizliği geçerlidir. Genelliği bozmadan

$$\left\{ \int_a^b |f(t)|^p \Delta t \right\} \cdot \left\{ \int_a^b |g(t)|^q \Delta t \right\} \neq 0$$

olduğunu varsayalım.

$$\alpha(t) = \frac{|f(t)|^p}{\int_a^b |f(\tau)|^p \Delta \tau} \quad \text{ve} \quad \beta(t) = \frac{|g(t)|^q}{\int_a^b |g(\tau)|^q \Delta \tau}$$

İfadelerine eşitsizlik (3.1) i uygulayıp ve çıkan eşitsizliğin a dan b ye integralini alırsak aşağıdaki sonuç kolayca elde edilir. [Bu mümkündür çünkü karşımıza çıkan fonksiyonların hepsi rd-sürekli(sağ yoğun sürekli) dir.]

$$\begin{aligned} & \int_a^b \frac{|f(t)|}{\left\{ \int_a^b |f(\tau)|^p \Delta \tau \right\}^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{|g(t)|}{\left\{ \int_a^b |g(\tau)|^q \Delta \tau \right\}^{\frac{1}{q}}} \Delta t \\ &= \int_a^b \alpha^{\frac{1}{p}}(t) \cdot \beta^{\frac{1}{q}}(t) \Delta t \\ &\leq \int_a^b \left(\frac{\alpha(t)}{p} + \frac{\beta(t)}{q} \right) \Delta t \\ &= \int_a^b \left\{ \frac{1}{p} \cdot \frac{|f(t)|^p}{\int_a^b |f(\tau)|^p \Delta \tau} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|g(t)|^q}{\int_a^b |g(\tau)|^q \Delta \tau} \right\} \Delta t \\ &= \frac{1}{p} \int_a^b \left\{ \frac{|f(t)|^p}{\int_a^b |f(\tau)|^p \Delta \tau} \right\} \Delta t + \frac{1}{q} \int_a^b \left\{ \frac{|g(t)|^q}{\int_a^b |g(\tau)|^q \Delta \tau} \right\} \Delta t \\ &= \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\int_a^b |f(\tau)|^p \Delta \tau} \cdot \int_a^b |f(t)|^p \Delta t + \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{\int_a^b |g(\tau)|^q \Delta \tau} \cdot \int_a^b |g(t)|^q \Delta t \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad (q \text{ yerine } q = \frac{p}{p-1} \text{ yazılırsa})$$

$$= 1$$

Bu da direkt olarak Hölder eşitsizliğinin gerçekleştiğini verir.

Özel olarak $p = q = 2$ alındığında Hölder eşitsizliğine Cauchy-Schwarz eşitsizliği denir.

3.2. Minkowski Eşitsizliği

Minkowski eşitsizliğini elde edebilmek için Hölder eşitsizliğini kullanabiliriz.

3.2. Teorem (Minkowski eşitsizliği)

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $p > 1$ alalım.

rd- sürekli $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları için;

$$\left\{ \int_a^b |(f+g)(t)|^p \Delta t \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \int_a^b |f(t)|^p \Delta t \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int_a^b |g(t)|^p \Delta t \right\}^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir [6].

İspat

Aşağıdaki sonuca ulaşmak için $q = p/(p-1)$ olarak Hölder eşitsizliğini uygulayalım

$$\begin{aligned}
& \int_a^b |(f+g)(t)|^p \Delta t = \int_a^b |(f+g)(t)|^{p-1} |(f+g)(t)| \Delta t \\
& \leq \int_a^b |f(t)| |(f+g)(t)|^{p-1} \Delta t + \int_a^b |g(t)| |(f+g)(t)|^{p-1} \Delta t \\
& \leq \left\{ \int_a^b |f(t)|^p \Delta t \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_a^b |(f+g)(t)|^{(p-1)q} \Delta t \right\}^{\frac{1}{q}} + \left\{ \int_a^b |g(t)|^p \Delta t \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_a^b |(f+g)(t)|^{(p-1)q} \Delta t \right\}^{\frac{1}{q}} \\
& = \left[\left\{ \int_a^b |f(t)|^p \Delta t \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int_a^b |g(t)|^p \Delta t \right\}^{\frac{1}{p}} \right] \left[\int_a^b |(f+g)(t)|^p \Delta t \right]^{\frac{1}{q}} \\
& \Rightarrow \int_a^b |(f+g)(t)|^p \Delta t = \left[\left\{ \int_a^b |f(t)|^p \Delta t \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int_a^b |g(t)|^p \Delta t \right\}^{\frac{1}{p}} \right] \left[\int_a^b |(f+g)(t)|^p \Delta t \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliğin her iki tarafını $\left[\int_a^b |(f+g)(t)|^p \Delta t \right]^{\frac{1}{q}}$ ya bölersek

$$\left\{ \int_a^b |(f+g)(t)|^p \Delta t \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \int_a^b |f(t)|^p \Delta t \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int_a^b |g(t)|^p \Delta t \right\}^{\frac{1}{p}}$$

Minkowski eşitsizliğine ulaşırız.

3.3. Jensen Eşitsizliği

Zaman skalası üzerinde Jensen eşitsizliğinin ispatı hemen hemen klasik Jensen eşitsizliği [7,Problem 3.42] de olduğu gibidir.Eğer $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ise ispat klasik Jensen eşitsizliği gibidir.

Eğer $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ ise Jensen eşitsizliği çok iyi bilinen aritmetik ortalama geometrik ortalama eşitsizliğine dönüşür.

3.3. Teorem (Jensen eşitsizliği)

$a,b\in\mathbb{T}$ ve $c,d\in\mathbb{R}$ olsun. $g:[a,b]\rightarrow(c,d)$ fonsiyonu rd-sürekli ve $F:(c,d)\rightarrow\mathbb{R}$ fonsiyonu konveks (dış bükey) olsun. Bu durumda

$$F\left(\frac{\int_a^b g(t)\Delta t}{b-a}\right) \leq \frac{\int_a^b F(g(t))\Delta t}{b-a}$$

eşitsizliği vardır [6].

İspat

$x_0\in(c,d)$ alalım.O zaman [11,Sayfa 109] dan öyle bir $\beta\in\mathbb{R}$ vardırki bütün $x\in(c,d)$ için

$$F(x)-F(x_0)\geq\beta(x-x_0) \tag{4.1}$$

sağlanır.

g fonsiyonu rd-sürekli olduğundan

$x_0 = \frac{\int_a^b g(\tau) \Delta \tau}{b-a}$ iyi tanımlıdır. Fog fonksiyonunda rd-sürekli olduğundan bundan dolayı $x=g(t)$

ile eşitsizlik (4.1) uygulayabiliriz ve istenen sonucu elde etmek için a 'dan b 'ye eşitsizliğin her iki tarafının integralini alırız.

$$\begin{aligned}
 &= \int_a^b [F(g(t)) - F(x_0)] \Delta t \\
 &\geq \beta \int_a^b [g(t) - x_0] \Delta t \\
 &= \beta \left[\int_a^b g(t) \Delta t - x_0(b-a) \right] \\
 &= \beta \left[\int_a^b g(t) \Delta t - \frac{\int_a^b g(\tau) \Delta \tau}{b-a} (b-a) \right] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Bu da doğrudan Jensen eşitsizliğini verir.

3.4. Bazı Uygulamalar

3.1. Örnek

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alalım. Aşık olarak $(0, \infty)$ aralığında $F(x) = -\log(x)$ dışbükey ve

sürekli. Öyleyse $g: [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$ sürekli olduğunda $\log \int_0^1 g(t) dt \geq \int_0^1 \log g(t) dt$

elde etmek için

Teorem 4.1 $F\left(\frac{\int_a^b g(t)dt}{b-a}\right) \leq \frac{\int_a^b f(g(t))dt}{b-a}$ Jensen eşitsizliğinde $a=0$ ve $b=1$ alırsak.

Böylece

$$-\log\left(\frac{\int_0^1 g(t)dt}{1-0}\right) \leq \frac{\int_0^1 -\log(g(t))dt}{1-0}$$

$$\Rightarrow \log\left(\int_0^1 g(t)dt\right) \geq \int_0^1 \log(g(t))dt$$

$$\Rightarrow \int_0^1 g(t)dt \geq \exp\left[\int_0^1 \log g(t)dt\right]$$

elde ederiz.

3.2. Örnek

$\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ ve $N \in \mathbb{N}$ alalım.

$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N g(t) \geq \left\{ \prod_{t=1}^N g(t) \right\}^{\frac{1}{N}}$ eşitsizliğini elde etmek için $g: \{1,2,3 \dots, N+1\} \rightarrow (0, \infty)$

için Teorem 3.3. da $a=1, b=N+1$ alarak Jensen eşitsizliğini uygularsak

$$\log\left\{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N g(t)\right\} = \log\left\{\frac{1}{N} \int_1^{N+1} g(t)\Delta t\right\}$$

$$\geq \frac{1}{N} \int_1^{N+1} \log g(t) \Delta t$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \log g(t)$$

$$= \log \left\{ \prod_{t=1}^N g(t) \right\}^{\frac{1}{N}}$$

elde ederiz ki bu da;

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N g(t) \geq \left\{ \prod_{t=1}^N g(t) \right\}^{\frac{1}{N}}$$

olması demektir.

Bu da bilinen aritmetik ortalama ,geometrik ortalama eşitsizliğidir [6].

3.3. Örnek

$\mathbb{T} = 2^{N_0}$ ve $N \in \mathbb{N}$ alalım.

$$\frac{\sum_{k=0}^{N-1} 2^k g(2^k)}{2^N - 1} \geq \left\{ \prod_{k=0}^{N-1} (g(2^k))^{2^k} \right\}^{1/(2^N - 1)} \quad \text{İfadesini bulmak için}$$

Teorem 3.3 den $a=1$, $b=2^N$ ve $g: \{2^k | 0 \leq k \leq N\} \rightarrow (0, \infty)$ alırsak

$$\log \left\{ \frac{\sum_{k=0}^{N-1} 2^k g(2^k)}{2^N - 1} \right\} = \log \left\{ \frac{\int_1^{2^N} g(t) \Delta t}{2^N - 1} \right\}$$

$$\geq \frac{\int_1^{2^N} \log g(t) \Delta t}{2^N - 1}$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{N-1} 2^k \log g(2^k)}{2^N - 1}$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \log(g(2^k))^{2^k}}{2^N - 1}$$

$$= \frac{1}{2^N - 1} \log \left\{ \prod_{k=0}^{N-1} (g(2^k))^{2^k} \right\}$$

$$= \log \left\{ \prod_{k=0}^{N-1} (g(2^k))^{2^k} \right\}^{1/(2^N - 1)}$$

$$\frac{\sum_{k=0}^{N-1} 2^k g(2^k)}{2^N - 1} \geq \left\{ \prod_{k=0}^{N-1} (g(2^k))^{2^k} \right\}^{1/(2^N - 1)}$$

eşitsizliği bulunmuş olur [6].

KAYNAKLAR

1. Agarwal, R.P., "Difference equations and inequalities, theory, methods, and applications", **Marcel Dekker**, New York, 1-44 (1992).
2. Agarwal, R.P., Bohner, M., O'Regan, D., Peterson, A., "Dynamic equations on time scales: A survey", **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 141(1-2): 1-26 (2002).
3. Agarwal, R.P., Bohner, M., "Basic Calculus on time scales and some of its applications", **Results Math**, 35(1-2): 3-22 (1999).
4. Bohner, M., Lutz, D.D., "Asymptotic behaviour of dynamic equations on time scales", **J. Diff. Equ. Appl.**, 7(1): 21-50 (2001).
5. Bohner, M., Peterson, A., "Dynamic equations on time scales: An introduction with applications", **Birkhäuser**, Boston, 1-78 (2001).
6. Agarwal, R.P., Bohner, M., Peterson A., "Inequalities on time scales: A survey", **Mathematical inequalities and Applications**, 4(4): 535-557 (2001).
7. Folland, G., "Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications", **John Wiley and Sons, Inc**, New York, second edition, 43-81 (1999).
9. Hardy, G.H., Littlewood, J.E., Polya, G., "Inequalities", **Cambridge University Press**, Cambridge, 139-143 (1959).
10. Hilger, S., "Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten", Ph.D. Thesis, **Universität Würzburg**, 1-85 (1988).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : BOZKURT, Civan
 Uyruğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 11.07.1963 Hatay(Antakya)
 Medeni hali : Evli
 Telefon : 0 (312) 252 21 19
 Telefon Cep : 0 505 560 58 86
 e-mail : civanbozkurt@hotmail.com
civanbozkurt@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek.Lisans	Gazi Ün. /Fen Bilimleri Enstitüsü	2010
	Matematik Ana Bilim dalı	
Lisans	Gazi Üniversitesi /Fen Edebiyat Fak.	1991
	Matematik Bölümü	

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
1991-2010	Kaya Bayazıtöğlü Lisesi	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce