



**SIRALI KÜME ÖRNEKLEMESİ KULLANILARAK ORANSAL TAHMİN
YÖNTEMLERİNİN İNCELENMESİ**

Merve ESEN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

NİSAN 2017

Merve ESEN tarafından hazırlanan “SIRALI KÜME ÖRNEKLEMESİ KULLANILARAK ORANSAL TAHMİN YÖNTEMLERİNİN İNCELENMESİ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Yaprak Arzu ÖZDEMİR

İstatistik, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Başkan : Prof. Dr. Mehtap AKÇİL OK

Biyoistatistik, Başkent Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Üye : Doç. Dr. Meral EBEGİL

İstatistik, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Tez Savunma Tarihi: 07/04/2017

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Hadi GÖKÇEN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Merve ESEN

07/04/2017

SIRALI KÜME ÖRNEKLEMESİ KULLANILARAK ORANSAL TAHMİN YÖNTEMLERİNİN İNCELENMESİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Merve ESEN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Nisan 2017

ÖZET

Sıralı küme örnekleme, birimlerin ilgilenilen değişken bakımından ölçümlerinin zor ancak başka tekniklerle aynı değişken bakımından sıralanmasının mümkün olduğu durumlarda kullanılan bir örnekleme tekniğidir. Bu çalışmada, sıralı küme örnekleme ve medyan sıralı küme örneklemede birimlerin hem ilgilenilen değişken hem de yardımcı değişken kullanılarak sıralandığı durum ele alınarak, yığın ortalamasının oransal tahmini incelenmiştir. Normal dağılım varsayımı altında sıralı küme örneklemede yığın ortalamasının oransal tahmini için hata kareler ortalaması teorik olarak elde edilmiştir. Ayrıca sıralı küme örnekleme, medyan sıralı küme örnekleme ve basit tesadüfi örneklemede oransal tahmin edicilerin Monte Carlo simülasyon çalışması ile hata kareler ortalamaları elde edilerek, oransal tahmin ediciler göreceli etkinlikleri bakımından karşılaştırılmıştır. Uygulama olarak, Keban Baraj Gölü'nde yaşayan 167 balık türünün boy ve ağırlık verisi kullanılarak, sıralı küme örnekleme ve basit tesadüfi örnekleme tasarımları farklı örnek çapları için göreceli etkinlikleri bakımından karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak, sıralı küme örneklemesinin aynı örnek çapı ve korelasyon katsayısında basit tesadüfi örneklemeden daha etkin bir örnekleme yöntemi olduğu gösterilmiştir.

Bilim Kodu : 20510

Anahtar Kelimeler : Sıralı küme örnekleme, medyan sıralı küme örnekleme, basit tesadüfi örnekleme, hata kareler ortalaması, göreceli etkinlik, Monte Carlo simülasyon

Sayfa Adedi : 65

Danışman : Doç. Dr. Yaprak Arzu ÖZDEMİR

INVESTIGATION ON RATIO ESTIMATION METHODS USING RANKED SET
SAMPLING

(M. Sc. Thesis)

Merve ESEN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

April 2017

ABSTRACT

Ranked set sampling is a sampling technique used in cases which the measurement of sampling units according to the variable under consideration is difficult in all sense, but it is possible to rank sampling units according to the same variable by means of other methods. In this study, ratio estimation of the population mean is considered in the case of the units ranking by both auxiliary variable and variable of interest in ranked set sampling and median ranked set sampling. In ranked set sampling, mean square errors is obtained theoretically for ratio estimation of the population mean under normal distribution assumption. Moreover, the ratio estimators are compared in terms of relative efficiency by obtaining the mean square errors of the ratio estimators by Monte Carlo simulation in ranked set sampling, median ranked set sampling and simple random sampling. As a practical application, using the data about height and weight of 167 fish living at Keban Reservoir ranked set sampling were compared with the simple random sampling in the sense of relative efficiency for different sample size. The results indicate that the ranked set sampling method is more efficient than the simple random sampling method in the same sample size and correlation coefficient.

Science Code : 20510

Key Words : Ranked set sampling, median ranked set sampling, simple random sampling, mean square errors, relative efficiency, Monte Carlo simulation

Page Number : 65

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Yaprak Arzu ÖZDEMİR

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca değerli bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, kişilik olarak da örnek aldığım saygı değer hocam Doç. Dr. Yaprak Arzu ÖZDEMİR' e çok teşekkür ederim.

Yüksek lisans derslerim sırasında ve bilgisayar programları konusunda yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Doç. Dr. Fikri GÖKPINAR' a teşekkürü borç bilirim.

Ayrıca tez süresince bana destek olan arkadaşım, Makine Mühendisliği Bölümü Yüksek Lisans öğrencisi, Ali Muhittin KÖR' e teşekkür ederim.

Tüm yaşamım boyunca bana maddi ve manevi olanaklarını ellerinden geldiğince sunan sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. BASİT TESADÜFİ ÖRNEKLEMEDE YIĞIN ORTALAMASININ ORANSAL TAHMİNİ.....	5
3. SIRALI KÜME ÖRNEKLEMESİNDE YIĞIN ORTALAMASININ ORANSAL TAHMİNİ.....	9
3.1. X Değişkenine Göre Sıralama.....	11
3.2. Y Değişkenine Göre Sıralama	19
4. UYGULAMA	29
5. MEDYAN SIRALI KÜME ÖRNEKLEMESİNDE YIĞIN ORTALAMASININ ORANSAL TAHMİNİ.....	33
3.1. X Değişkenine Göre Sıralama.....	35
3.2. Y Değişkenine Göre Sıralama	41
4. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI.....	49
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	59
KAYNAKLAR	61
EKLER.....	63
EK-1. Standart normal dağılıma ilişkin sıra istatistiklerinin beklenen değer ve varyansları	64

Sayfa

ÖZGEÇMİŞ	65
----------------	----

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 3.1. Yardımcı değişkene göre sıralama yapılması durumunda m çaplı sıralı küme örneğinin oluşumu.....	10
Çizelge 4.1. n=6 ve n=10 iken farklı m ve r değerleri için HKO ve GE değerleri.....	31
Çizelge 5.1. m=6 ve r=1 için MSKÖ tasarımı ile seçilen örnek birimleri	33
Çizelge 5.2. m=5 ve r=1 için MSKÖ tasarımı ile seçilen örnek birimleri	34
Çizelge 6.1. SKÖ'de $C_x < C_y$ iken $GE_{(BTÖ,SKÖ(X))}$ ve $GE_{(BTÖ,SKÖ(Y))}$ değerleri.....	51
Çizelge 6.2. SKÖ'de $C_x = C_y$ iken $GE_{(BTÖ,SKÖ(X))}$ ve $GE_{(BTÖ,SKÖ(Y))}$ değerleri.....	53
Çizelge 6.3. MSKÖ'de $C_x < C_y$ iken $GE_{(BTÖ,SKÖ(X))}$ ve $GE_{(BTÖ,SKÖ(Y))}$ değerleri.....	55
Çizelge 6.4. MSKÖ'de $C_x = C_y$ iken $GE_{(BTÖ,SKÖ(X))}$ ve $GE_{(BTÖ,SKÖ(Y))}$ değerleri.....	57

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
m	Küme çapı
r	Tekrar sayısı
n	Örnek çapı
R	Yığın oranı
$r_{BTÖ}$	BTÖ' de yığın oranının tahmin edicisi
$\bar{y}_{r_{BTÖ}}$	BTÖ' de Y değişkeninin ortalamasının oransal tahmin edicisi
$r_{SKÖ(X)}$	SKÖ' de X değişkenine göre sıralama yapıldığında yığın oranının tahmin edicisi
$\bar{y}_{r_{SKÖ(X)}}$	SKÖ' de X değişkenine göre sıralama yapıldığında Y değişkeninin ortalamasının oransal tahmin edicisi
$r_{SKÖ(Y)}$	SKÖ' de Y değişkenine göre sıralama yapıldığında yığın oranının tahmin edicisi
$\bar{y}_{r_{SKÖ(Y)}}$	SKÖ' de Y değişkenine göre sıralama yapıldığında Y değişkeninin ortalamasının oransal tahmin edicisi
$r_{MSKÖ(X)}$	MSKÖ' de X değişkenine göre sıralama yapıldığında yığın oranının tahmin edicisi
$\bar{y}_{r_{MSKÖ(X)}}$	MSKÖ' de X değişkenine göre sıralama yapıldığında Y değişkeninin ortalamasının oransal tahmin edicisi
$r_{MSKÖ(Y)}$	MSKÖ' de Y değişkenine göre sıralama yapıldığında yığın oranının tahmin edicisi
$\bar{y}_{r_{MSKÖ(Y)}}$	MSKÖ' de Y değişkenine göre sıralama yapıldığında Y değişkeninin ortalamasının oransal tahmin edicisi

Kısaltmalar**Açıklamalar****BTÖ**

Basit tesadüfi örnekleme

ÇASKÖ

Çok aşamalı sıralı küme örnekleme

ÇSKÖ

Çift sıralı küme örnekleme

HKO

Hata kareler ortalaması

GE

Görelî etkinlik

LSKÖ

L sıralı küme örnekleme

MSKÖ

Medyan sıralı küme örnekleme

OS

Oransal sapma

SKÖ

Sıralı küme örnekleme

USKÖ

Uç sıralı küme örnekleme

YSKÖ

Yüzde sıralı küme örnekleme

1. GİRİŞ

Örnekleme çalışmalarında, seçilecek örneğin yığını en iyi şekilde temsil etmesi amaçlanır. Özellikle heterojen yapıdaki yığınlarda örnek çapı ne kadar yüksek olursa, seçilen örneğin yığını temsil etme kabiliyeti de o kadar fazla olacaktır. Ancak emek, zaman, maliyet ve eleman yetersizliği gibi sebeplerden dolayı pek çok araştırma, büyük çaplı örnekler ile gerçekleştirilemez. Dolayısıyla en az örnek çapı ile yığını en iyi şekilde temsil edecek bir örnekleme yönteminin kullanılmasına ihtiyaç duyulur. Bu ihtiyaca yönelik bir örnekleme yöntemi, ilk olarak 1952 yılında McIntyre tarafından Sıralı Küme Örnekleme (SKÖ) adıyla önerilmiştir. McIntyre, SKÖ yöntemi ile elde edilen örnekten meralardaki ortalama ürün miktarını tahmin ederek SKÖ yönteminin, Basit Tesadüfi Örnekleme (BTÖ)'ye göre oldukça duyarlı bir örnekleme yöntemi olduğunu göstermiştir (McIntyre,1952).

SKÖ'de örnek çekimi iki aşamadan oluşmaktadır. Öncelikle N birimlik bir yığından her biri m çaplı m tane rastgele örnek seçilir ve böylece m^2 büyüklüğünde bir örnek seçilmiş olur. m çaplı rastgele bir örnek küme olarak isimlendirilmek üzere, birinci aşamada her bir kümedeki birimler ilgilenilen Y değişkeni bakımından hassas olmayan bir başka ölçümle küçükten büyüğe sıralanır. Bu ölçüm yüksek maliyet gerektirmeyen düşük düzeyli bir ölçüm olabileceği gibi araştırmacının daha önceki deneyimleri veya görsel bir ölçüm kullanılarak da yapılabilir. Ayrıca sıralama için ilgilenilen değişkenle yüksek derecede ilişkili daha düşük maliyetle ölçülebilecek bir başka yardımcı değişken de kullanılabilir. Uygulamada araştırmacının kişisel yargılarının ön planda olduğu bir sıralama yöntemi kullanılırsa, sıralamanın kolay ve hatasız yapılabilmesi bakımından küme çapı m 'nin genellikle 5'ten büyük olması tercih edilmez. İkinci aşamada, birinci kümeden ilk sıradaki birim, ikinci kümedeki ikinci sıradaki birim ve bu şekilde devam edilerek m 'inci kümeden m 'inci sıradaki birim alınarak istenilen hassaslığı sağlayan yüksek düzeyli bir ölçümle ilgilenilen Y değişkeni bakımından ölçülür. Bu şekilde ölçülen birimler m çaplı sıralı küme örneğini oluşturur (Özdemir, 2005a).

SKÖ ilk olarak McIntyre (1952) tarafından önerildikten sonra, Takahasi ve Wakimoto (1968) SKÖ yönteminin alt yapısını oluşturacak matematiksel teoriyi vermişlerdir. Takahasi ve Wakimoto (1968), SKÖ kullanılarak elde edilen örnek ortalaması istatistiğinin, örnek çapları aynı iken BTÖ kullanılarak elde edilen örnek ortalaması istatistiğinden daha küçük

varyansa sahip olduğunu ve yığın ortalamasının sapmasız bir tahmin edicisi olduğunu ispatlamışlardır. Daha sonra Patil, Sinha ve Taillie (1994) SKÖ yöntemini detaylı olarak ele alarak, SKÖ ile ilgili temel çalışmaları özetlemişlerdir.

SKÖ yöntemi, pek çok istatistiksel analiz çalışmalarında etkin parametre tahminlerinin gerçekleştirilmesi amacıyla kullanılmaktadır. Örneğin; Lam, Sinha ve Wu (1994), iki parametrelili üstel dağılımın parametrelerini SKÖ yöntemine göre tahmin ederek, bu tahmin edicilerin BTÖ ile elde edilen tahmin edicilerden daha etkin olduğunu göstermişlerdir. Shen (1994), log-normal dağılıma ilişkin yığın ortalamasının tahminini SKÖ altında inceleyerek, yığına ilişkin değişim katsayısının bilinmesi durumunda BTÖ'ye göre elde edilen tahmin ediciden daha etkin bir tahmin edici elde etmiştir. Bimal. K. Sinha, Bikas. K. Sinha ve Purkayastha (1996), örnek seçim işlemi SKÖ yöntemine göre yapıldığında normal ve üstel dağılım parametrelerinin en iyi doğrusal tahmin edicilerini önererek, dağılımın özelliklerine göre örnek seçim işleminde yapılabilecek bazı değişiklikleri incelemişlerdir. Bhoj ve Absanullah (1996), genelleştirilmiş geometrik dağılıma ilişkin yığın parametrelerini SKÖ yöntemine göre tahmin etmeye çalışarak, örnek çekimi SKÖ'ye göre yapıldığında yığın parametrelerinin en iyi doğrusal tahmin edicilerini elde etmişlerdir.

SKÖ yönteminin en önemli özelliği yığın dağılımının şekli ne olursa olsun yığın ortalamasının sapmasız bir tahmin edicisinin elde edilebilmesidir. Ancak bazı durumlarda yığın dağılımının şekli tespit edilebilir. Bu durumda SKÖ yöntemi yerine daha etkin sonuçlar veren farklı SKÖ tasarımları önerilmiştir. Örneğin; Samawi, Ahmed ve Abu- Dayyeh (1996), yığın ortalamasını tahmin etmek için Uç SKÖ (USKÖ) tasarımını önermişlerdir. Bu tasarımdan elde edilen tahmin edicinin simetrik dağılımlar için yansız ve tekdüze dağılım altında SKÖ'nün klasik tasarımından daha etkin olduğunu göstermişlerdir. Muttalak (1997), tek modlu simetrik dağılımlar altında yığın ortalamasını tahmin etmede SKÖ'den daha etkin sonuçlar veren Medyan SKÖ(MSKÖ) tasarımını önermiştir. MSKÖ tasarımının, özellikle normal dağılım için BTÖ'ye göre daha etkin sonuçlar verdiğini göstermiştir. Al-Saleh ve Al-Kadiri (2000) küçük örnek çapları ile çalışırken, SKÖ'de etkinliği arttırmak için Çift Sıralı Küme Örneklemesi (ÇSKÖ)'ni önermişlerdir. Bu tasarımda, yığın ortalamasına ilişkin tahmin edicinin normal ve tekdüze dağılımları altında, üstel dağılıma göre daha etkin olduğu gösterilmiştir. Chen (2000), yığına ilişkin medyan, 1. çeyrek ve 3. çeyrek gibi dağılım kartillerinin tahmin edilmesinde SKÖ'yü kullanmıştır. Özellikle medyan için elde edilen tahmin edicinin BTÖ'ye göre elde edilen tahmin ediciden daha etkin olduğunu göstermiştir.

Al-Saleh ve Al-Omari (2002), ÇSKÖ'yü geliştirerek, SKÖ'de örnek çekim işleminin çok aşamalı olarak yapılmasını sağlayan Çok Aşamalı Sıralı Küme Örnekleme (ÇASKÖ)'ni önermişlerdir. Muttalak (2003), yığından örnek seçim işlemini belli bir yüzde değerine bağlı olarak gerçekleştirecek Yüzde SKÖ (YSKÖ) tasarımını önermiştir. Jemain ve Al-Omari (2006) yığın ortalamasını tahmin etmek için çok aşamalı MSKÖ'yü önermişlerdir. Al-Nasser (2007) yığın ortalamasını tahmin etmek amacıyla L tahmin edici fikrine dayalı olarak L Sıralı Küme Örnekleme (LSKÖ)'ni SKÖ'ye alternatif olarak önermiştir. LSKÖ tasarımına göre elde edilen tahmin edicinin, özellikle simetrik dağılımlar altında yığın ortalaması için sapmasız ve BTÖ'ye göre daha etkin bir tahmin edici verdiğini göstermiştir.

Samawi ve Muttalak (1996) SKÖ'de oransal tahmin edici üzerinde çalışmışlardır. SKÖ kullanılarak elde edilen tahminlerin BTÖ'deki tahminlerden daha etkin olduğunu simülasyon çalışması ile göstermişlerdir. Ganeslingam ve Ganesh (2006) çalışmalarında yığın ortalamasının ve yığın oranının tahmininde SKÖ ile BTÖ'yü gerçek bir veri üzerinde karşılaştırmışlardır. A. I. Al-Omari, Jaber ve A. Al-Omari (2008) USKÖ tasarımında yeni bir oransal tahmin edici önermişlerdir. Al-Omari, Jemain ve Ibrahim (2009) çalışmalarında yardımcı değişkenin birinci çeyrek (q_1) ve üçüncü çeyrek (q_3)'lerinden yararlanarak SKÖ ve BTÖ altında ortalamanın oransal tahmini için yeni bir oran tahmini önermişlerdir. Aynı örnek çapı, korelasyon katsayısı ve çeyrekliklerde SKÖ kullanılarak bulunan oran tahmininin BTÖ'ye göre daha etkin olduğunu göstermişlerdir. Kadılar, Ünyazıcı ve Çıngı (2009) Samawi ve Muttalak tarafından önerilen tahmin ediciden yararlanarak yeni bir oransal tahmin edici önermişlerdir. H. P. Singh, Tailor and S. Singh (2014) yığın ortalamasının tahmini için genel bir tahmin edici sınıfı önermişlerdir ve Kadılar ve diğ. (2009)'nin önerdiği tahmin edicinin bu tahmin edici sınıfının bir üyesi olduğunu göstermişlerdir. Al-Omari (2012) MSKÖ ve SKÖ altında yardımcı değişkenin birinci ve üçüncü çeyreğini kullanarak yeni bir oransal tahmin edici geliştirmişlerdir. Ayrıca yardımcı değişkenin ortalamasının bilinmediği durumda SKÖ'de çift örnekleme yönteminin kullanılmasını önermişlerdir.

Bu çalışmada öncelikle BTÖ ve SKÖ'de oransal tahmin yöntemi ele alınmıştır. İlgilenilen değişken ile yardımcı değişken arasında doğrusal bir ilişki olduğu ve sıralamada kullanılan değişkenin normal dağılıma sahip olduğu varsayımı altında SKÖ yöntemine göre oransal tahmin edicinin Hata Kareler Ortalaması (HKO) formülleri teorik olarak elde edilmiştir. Ayrıca tek modlu simetrik dağılımlarda yığın ortalaması için etkin bir tahmin edici veren MSKÖ tasarımı kullanılarak oransal tahmin incelenmiştir. Amaç, oransal tahmin yöntemi

ile yığın parametrelerinin daha duyarlı tahmin edicilerini elde etmek olmuştur. Bu amaca yönelik olarak; ikinci bölümde BTÖ’de ve üçüncü bölümde SKÖ’de yığın ortalamasının oransal tahmini konusu ayrıntılı bir şekilde ele alınmıştır. Dördüncü bölümde bu tasarımlarda teorik olarak elde edilen HKO formüllerinin kullanımını göstermek amacıyla gerçek bir veri üzerinde uygulama yapılmıştır. Beşinci bölümde MSKÖ tasarımında yığın ortalamasının oransal tahmini incelenmiştir.

SKÖ ve MSKÖ tasarımları kullanılarak yığın ortalaması için elde edilecek oransal tahmin edicilerin, hangi korelasyon katsayısı ve hangi örnek büyüklüğünde BTÖ’den daha etkin sonuçlar verdiğini saptamak amacıyla altıncı bölümde simülasyon çalışmasına yer verilmiştir. Tahmin edicilerin etkinliklerini karşılaştırabilmek bakımından Görelî Etkinlik (GE) değerleri Monte Carlo simülasyon çalışması ile elde edilerek, en iyi tasarım belirlenmeye çalışılmıştır.

Yedinci bölümde ise, sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

2. BASİT TESADÜFİ ÖRNEKLEMEDE YIĞIN ORTALAMASININ ORANSAL TAHMİNİ

Örnekleme çalışmalarında, yığın parametrelerinin bilinen tahmin edicileri dışında, daha duyarlı tahmin edicilerinin elde edilmesi de mümkündür. Araştırmalarda, ilgilenilen değişken ile başka bir değişken arasında yüksek derecede ilişki olduğu bilgisi mevcut olabilir. Bu durumda örnek seçim işlemi gerçekleştirilirken, ilgilenilen değişkene göre sıralama işlemi, aynı birime ait farklı bir değişken kullanılarak da yapılabilir. Burada, fazladan bilgisine sahip olduğumuz değişken, yardımcı değişken olarak isimlendirilir.

Yığından BTÖ gibi bilinen örnekleme yöntemleri ile örnekler seçilerek, ilgilenilen değişken Y ve yardımcı değişken X olmak üzere; $R = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}$ oranının tahmin edilmesi ile yığın ortalaması veya yığın toplamının tahmin edilmesi işlemine oransal tahmin adı verilir. Burada $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$ ve $\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i$ sırasıyla X ve Y değişkenleri için yığın ortalamalarını ifade eder. Bazı araştırmalarda sadece R oranının tahmini ile de ilgilenilebilir. BTÖ ile yığından seçilen n birimlik örnekten $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ değerleri gözlenmiş olsun. Bu durumda yığın oranı R 'nin tahmin edicisi;

$$r_{BTÖ} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{y}{x} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \quad (2.1)$$

olarak tanımlanır. Burada $\bar{x}$ ve $\bar{y}$ sırasıyla X ve Y değişkenleri için örnek ortalamalarını ifade eder. Yığın oranının tahmin edicisi r , yığın oranı R için yanlı bir tahmin edicidir. r örnek oranının beklenen değeri;

$$E(r_{BTÖ}) = R + \frac{1}{n\bar{X}^2} (RS_x^2 - S_{xy}) \quad (2.2)$$

şeklinde oluşur. r yanlı bir tahmin edici olduğundan, r 'nin HKO;

$$\begin{aligned} HKO(r_{BTÖ}) &= \frac{1}{n\bar{X}^2} (S_y^2 + R^2 S_x^2 - 2RS_{xy}) \\ &= \frac{1}{n\bar{X}^2} (S_y^2 + R^2 S_x^2 - 2R\rho S_x S_y) \end{aligned}$$

$$= \frac{R^2}{n} (C_x^2 + C_y^2 - 2\rho C_x C_y) \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$S_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2 \text{ ve } S_y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2$$

$$S_{xy} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

$$C_x^2 = \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} \text{ ve } C_y^2 = \frac{S_y^2}{\bar{Y}^2}$$

ρ ; X ve Y değişkenleri arasındaki korelasyon katsayısı

olarak tanımlanır.

Eş. (2.3)'ten görüldüğü gibi, n arttıkça ve ρ pozitif ve 1'e yakın olduğu durumda $HKO(r_{BT\bar{0}})$ değeri azalacaktır.

Yardımcı değişken X 'in yığın ortalaması $\bar{X}$ biliniyorken , $\bar{Y}$ 'nin oransal tahmin edicisi,

$$\bar{y}_{r_{BT\bar{0}}} = r_{BT\bar{0}} \bar{X} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \bar{X}$$

olarak tanımlanır. Bu tahmin edici; yığın ortalaması $\bar{Y}$ için yanlış bir tahmin edicidir.

$\bar{y}_{r_{BT\bar{0}}}$ tahmin edicisinin beklenen değeri, $\bar{y}_{r_{BT\bar{0}}} = r_{BT\bar{0}} \bar{X}$ olmak üzere; $E(\bar{y}_{r_{BT\bar{0}}}) = \bar{X} E(r_{BT\bar{0}})$ olacaktır. Eş. (2.2)'de verilen $E(r_{BT\bar{0}})$ ifadesi $E(\bar{y}_{r_{BT\bar{0}}})$ 'de yerine yazılırsa;

$$E(\bar{y}_{r_{BT\bar{0}}}) = \bar{X} E(r_{BT\bar{0}}) = \bar{X} R + \bar{X} \frac{1}{n\bar{X}^2} (RS_x^2 - S_{xy})$$

$$= \bar{X} \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} + \frac{1}{n\bar{X}} (RS_x^2 - S_{xy})$$

$$= \bar{Y} + \frac{1}{n\bar{X}} (RS_x^2 - S_{xy})$$

olacaktır. $\bar{y}_{r_{BT\ddot{0}}}$ tahmin edicisinin HKO,

$$HKO(\bar{y}_{r_{BT\ddot{0}}}) = HKO(r_{BT\ddot{0}} \bar{X}) = \bar{X}^2 HKO(r_{BT\ddot{0}})$$

olmak üzere; Eş. (2.3)'de verilen $HKO(r_{BT\ddot{0}})$ ifadesi $HKO(\bar{y}_{r_{BT\ddot{0}}})$ 'da yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} HKO(\bar{y}_{r_{BT\ddot{0}}}) &= \bar{X}^2 \frac{1}{n\bar{X}^2} (S_y^2 + R^2 S_x^2 - 2RS_{xy}) \\ &= \frac{1}{n} (S_y^2 + R^2 S_x^2 - 2RS_{xy}) \\ &= \bar{X}^2 \frac{R^2}{n} (C_x^2 + C_y^2 - 2\rho C_x C_y) \\ &= \bar{X}^2 \frac{\bar{Y}^2}{n\bar{X}^2} (C_x^2 + C_y^2 - 2\rho C_x C_y) \\ &= \frac{\bar{Y}^2}{n} (C_x^2 + C_y^2 - 2\rho C_x C_y) \end{aligned} \tag{2.4}$$

olarak elde edilir (Özdemir, Tekin ve Esin, 2015: 419-442, Çıngı, 2009: 349-354).

3. SIRALI KÜME ÖRNEKLEMESİNDE YIĞIN ORTALAMASININ ORANSAL TAHMİNİ

Bu bölümde yığın ortalamasının SKÖ ile oransal tahmin edicisi ele alınacaktır. SKÖ’de örnek seçimi yapılırken birimler ilgilenilen değişken yerine genellikle görsel yolla veya ilgilenilen değişkenle yüksek derecede ilişkili bir yardımcı değişken kullanılarak sıralanır. Aynı zamanda yardımcı değişken bilgisi kullanılarak yığın ortalamasının oransal tahmini elde edilebilir. Bu bölümde yardımcı değişken bilgisini tahmin işlemine dahil eden oransal tahmin yöntemi ile SKÖ altında yığın ortalamasının tahmini detaylı olarak incelenecektir. Burada BTÖ’den farklı olarak, hem yardımcı değişkene göre hem de ilgilenilen değişkene göre sıralama yapılması durumunda oransal tahmin incelenecektir. Yardımcı değişkene göre sıralama yapılması durumunda m çaplı sıralı küme örneğinin oluşumu Çizelge 3.1’de verilmiştir. SKÖ’ye göre örnek seçme işleminin ilk adımında, birimler yardımcı değişken X ’e göre hassas bir ölçüm yapılarak sıralanır. İkinci adımda ise, X değişkeni bakımından sıralanan birimlerden, i ’nci kümedeki i ’nci sıradaki birim ($i=1,2,\dots,m$) alınarak, istenilen hassaslığı sağlayan yüksek düzeyli bir ölçümle ilgilenilen Y değişkeni bakımından ölçülür. Bu işlem istenilen örnek çapını elde etmek üzere r kez tekrarlanabilir. Böylece r tekrar sonucunda $n=mr$ büyüklükte sıralı küme örneği elde edilir.

Çizelge 3.1’de $r=1$ iken örnek seçiminin adımları gösterilmiştir. Böylece Y değişkenine göre ölçülecek birimler öncelikle X değişkenine göre sıralandığından, Y değişkeni için sıralama X değişkenine göre oluşacaktır. Bu durumda, X değişkenine ilişkin i ’nci kümedeki i ’nci sıra istatistiği $X_{(i)}$ ’ye karşılık gelen Y değişkeni, $Y_{[i]}$ ile ifade edilir ve $Y_{[i]}$, i ’nci kümedeki i ’nci indirgenmiş sıra istatistiği olarak isimlendirilir. X ve Y değişkenleri arasındaki korelasyon katsayısı $\rho_{xy} = 1$ iken $Y_{[i]}=Y_{(i)}$ olacaktır.

Çizelge 3.1. Yardımcı değişkene göre sıralama yapılması durumunda m çaplı sıralı küme örneğinin oluşumu

Yığılından seçilen örnek birimleri	<u>Küme</u>				
	1	(Y_{11}, X_{11})	(Y_{12}, X_{12})	$\cdots$	(Y_{1m}, X_{1m})
	2	(Y_{21}, X_{21})	(Y_{22}, X_{22})	$\cdots$	(Y_{2m}, X_{2m})
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	m	(Y_{m1}, X_{m1})	(Y_{m2}, X_{m2})	$\cdots$	(Y_{mm}, X_{mm})
<i>Birinci Adım</i> $\Downarrow$					
Sıralanan örnek birimleri	<u>Küme</u>				
	1	$(Y_{[1]}^1, X_{(1)}^1)$	$(Y_{[2]}^1, X_{(2)}^1)$	$\cdots$	$(Y_{[m]}^1, X_{(m)}^1)$
	2	$(Y_{[1]}^2, X_{(1)}^2)$	$(Y_{[2]}^2, X_{(2)}^2)$	$\cdots$	$(Y_{[m]}^2, X_{(m)}^2)$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	m	$(Y_{[1]}^m, X_{(1)}^m)$	$(Y_{[2]}^m, X_{(2)}^m)$	$\cdots$	$(Y_{[m]}^m, X_{(m)}^m)$
<i>İkinci Adım</i> $\Downarrow$					
Örneğe alınan örnek birimleri (Sıralı Küme Örneği)	<u>Küme</u>				
	1	$(Y_{[1]}, X_{(1)})$	*	$\cdots$	*
	2	*	$(Y_{[2]}, X_{(2)})$	$\cdots$	*
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	*
	m	*	*	$\cdots$	$(Y_{[m]}, X_{(m)})$

Çizelge 3.1’de $i=1,2,\dots,m$ olmak üzere, $\{(Y_{i1}, X_{i1}), (Y_{i2}, X_{i2}), \dots, (Y_{im}, X_{im})\}$, i’nci küme için yığılından tesadüfî olarak seçilen örnek birimlerini, $\{(Y_{[1]}^i, X_{(1)}^i), (Y_{[2]}^i, X_{(2)}^i), \dots, (Y_{[m]}^i, X_{(m)}^i)\}$, i’nci küme için X değişkenine göre hassas ölçümle küçükten büyüğe doğru sıralanmış örnek birimlerini ve $(Y_{[i]}, X_{(i)})$, m çaplı sıralı küme örneğinde i’nci kümedeki i’nci örnek birimini ifade eder. Bu işlem r kez tekrar edilerek $n=mr$ çaplı örnek elde edilir. Bu durumda $(Y_{[ij]}, X_{(ij)})$, $i=1,2,\dots,m$ ve $j=1,2,\dots,r$ olmak üzere, i’nci küme ve j’inci tekrardaki i’nci örnek birimini ifade eder (Özdemir, 2005b).

3.1. X Değişkenine Göre Sıralama

Burada sadece yardımcı değişken X 'e göre sıralama yapıldığını varsayalım. Bu durumda Y 'nin sıralamasında hatalar oluşurken, X değişkeni en iyi şekilde sıralanmış olacaktır. Buradaki $(Y_{[i]}, X_{(i)})$, X değişkeni için i 'nci kümedeki i 'nci sıra istatistiğini ve Y değişkeni için de i 'nci kümedeki i 'nci indirgenmiş sıra istatistiğini ifade eder. Böylece yığın oranı R 'nin X 'e göre sıralama durumunda SKÖ altında tahmin edicisi aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$r_{SKÖ(X)} = \frac{\bar{y}_{SKÖ(X)}}{\bar{x}_{SKÖ(X)}}$$

Burada;

$$\bar{y}_{SKÖ(X)} = \frac{1}{mr} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r Y_{[i]j}$$

ve

$$\bar{x}_{SKÖ(X)} = \frac{1}{mr} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r X_{(i)j}$$

olarak tanımlanır (McIntyre, 1952).

$r_{SKÖ(X)}$ 'nin yaklaşık HKO aşağıdaki gibi bulunur;

$$HKO(r_{SKÖ(X)}) = E(r_{SKÖ(X)} - R)^2 = E\left(\frac{\bar{y}_{SKÖ(X)}}{\bar{x}_{SKÖ(X)}} - R\right)^2 \text{ olmak üzere;}$$

$$e_1 = \frac{\bar{x}_{SKÖ(X)}}{\bar{X}} - 1 \text{ ve } e_0 = \frac{\bar{y}_{SKÖ(X)}}{\bar{Y}} - 1$$

olarak tanımlansın. Bu durumda; $E(e_0) = E(e_1) = 0$ olacaktır.

$$\bar{x}_{SKÖ(X)} = \bar{X}(1+e_1) \text{ ve } \bar{y}_{SKÖ(X)} = \bar{Y}(1+e_0)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
HKO(r_{SK\ddot{O}(X)}) &= E \left(\frac{\bar{y}_{SK\ddot{O}(X)}}{\bar{x}_{SK\ddot{O}(X)}} - R \right)^2 \\
&= E(R(1 + e_0)(1 + e_1)^{-1} - R)^2 \\
&= R^2 E((1 + e_0)(1 + e_1)^{-1} - 1)^2
\end{aligned}$$

olmak üzere; Taylor serisi açılımından yararlanarak

$$\begin{aligned}
&= R^2 E((1 + e_0)(1 - e_1 + e_1^2 - e_1^3 + e_1^4 - e_1^5 \dots) - 1)^2 \\
&= R^2 E(e_0 - e_1 + e_1^2 - e_0 e_1 + e_0 e_1^2 - e_1^3 - e_0 e_1^3 + e_1^4 + e_0 e_1^4 + e_1^5 - \\
&e_0 e_1^5 + \dots)^2 \tag{3.1}
\end{aligned}$$

yazılabilir.

Eş. (3.1)'de parantez içindeki ifadenin karesi alındıktan sonra, 2.dereceden sonraki terimler ihmal edilirse,

$$\begin{aligned}
&= R^2 E(e_0^2 + e_1^2 - 2(e_0 e_1)) \\
&= R^2 (E(e_0^2) + E(e_1^2) - 2E(e_0 e_1)) \tag{3.2}
\end{aligned}$$

olur. Burada,

$$E(e_0^2) = E \left(\frac{(\bar{y}_{SK\ddot{O}(X)} - \bar{Y})^2}{\bar{Y}^2} \right) = \frac{1}{\bar{Y}^2} E(\bar{y}_{SK\ddot{O}(X)} - \bar{Y})^2 = \frac{1}{\bar{Y}^2} Var(\bar{y}_{SK\ddot{O}(X)}) \tag{3.3}$$

$$E(e_1^2) = E \left(\frac{(\bar{x}_{SK\ddot{O}(X)} - \bar{X})^2}{\bar{X}^2} \right) = \frac{1}{\bar{X}^2} E(\bar{x}_{SK\ddot{O}(X)} - \bar{X})^2 = \frac{1}{\bar{X}^2} Var(\bar{x}_{SK\ddot{O}(X)}) \tag{3.4}$$

$$E(e_0 e_1) = E \left(\left(\frac{\bar{y}_{SK\ddot{O}(X)} - \bar{Y}}{\bar{Y}} \right) \left(\frac{\bar{x}_{SK\ddot{O}(X)} - \bar{X}}{\bar{X}} \right) \right) = \frac{1}{\bar{X}\bar{Y}} E((\bar{y}_{SK\ddot{O}(X)} - \bar{Y})(\bar{x}_{SK\ddot{O}(X)} - \bar{X}))$$

$$= \frac{1}{\bar{X}\bar{Y}} \text{Kov}(\bar{y}_{SK\ddot{O}(X)}, \bar{x}_{SK\ddot{O}(X)}) \quad (3.5)$$

olarak tanımlanır. Ayrıca,

$$\text{Var}(\bar{y}_{SK\ddot{O}(X)}) = \text{Var}\left(\frac{1}{mr} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r Y_{[i]j}\right)$$

$$\text{Var}(\bar{x}_{SK\ddot{O}(X)}) = \text{Var}\left(\frac{1}{mr} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r X_{(i)j}\right)$$

$$\text{Kov}(\bar{y}_{SK\ddot{O}(X)}, \bar{x}_{SK\ddot{O}(X)}) = \text{Kov}\left(\frac{1}{mr} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r Y_{[i]j}, \frac{1}{mr} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r X_{(i)j}\right)$$

şeklinde tanımlanır. $Y_{[i]}$ ile $X_{(i)}$ sıra istatistiklerinin bağımsızlık özelliğinden ve

$$\text{Var}(Y_{[i]j}) = \text{Var}(Y_{[i]}) = S_{Y_{[i]}}^2$$

$$\text{Var}(X_{(i)j}) = \text{Var}(X_{(i)}) = S_{X_{(i)}}^2$$

$$\text{Kov}(Y_{[i]j}, X_{(i)j}) = \text{Kov}(Y_{[i]}, X_{(i)}) = S_{YX_{(i)}}$$

olduğundan

$$\text{Var}(\bar{y}_{SK\ddot{O}(X)}) = \frac{1}{m^2 r^2} r \sum_{i=1}^m \text{Var}(Y_{[i]}) = \frac{1}{m^2 r} \sum_{i=1}^m S_{Y_{[i]}}^2$$

$$\text{Var}(\bar{x}_{SK\ddot{O}(X)}) = \frac{1}{m^2 r^2} r \sum_{i=1}^m \text{Var}(X_{(i)}) = \frac{1}{m^2 r} \sum_{i=1}^m S_{X_{(i)}}^2$$

$$\text{Kov}(\bar{y}_{SK\ddot{O}(X)}, \bar{x}_{SK\ddot{O}(X)}) = \frac{1}{m^2 r^2} r \sum_{i=1}^m \text{Kov}(Y_{[i]}, X_{(i)}) = \frac{1}{m^2 r} \sum_{i=1}^m S_{YX_{(i)}}$$

yazılabilir. Burada sıra istatistiklerinin

$$\sum_{i=1}^m S_{Y_{[i]}}^2 = mS_y^2 - \sum_{i=1}^m (E(Y_{[i]}) - \bar{Y})^2$$

$$\sum_{i=1}^m S_{\bar{X}(i)}^2 = mS_x^2 - \sum_{i=1}^m (E(X_{(i)}) - \bar{X})^2$$

$$\sum_{i=1}^m S_{YX(i)} = mS_{yx} - \sum_{i=1}^m (E(X_{(i)}) - \bar{X})(E(Y_{[i]}) - \bar{Y})$$

özelliklerini kullanırsak

$$(E(Y_{[i]}) - \bar{Y})^2 = \tau_{y[i]}^2$$

$$(E(X_{(i)}) - \bar{X})^2 = \tau_{x(i)}^2$$

$$(E(X_{(i)}) - \bar{X})(E(Y_{[i]}) - \bar{Y}) = \tau_{yx(i)}$$

olarak tanımlanmak üzere;

$$Var(\bar{y}_{SK\ddot{O}(X)}) = \frac{1}{mr} (S_y^2 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tau_{y[i]}^2)$$

$$Var(\bar{x}_{SK\ddot{O}(X)}) = \frac{1}{mr} (S_x^2 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tau_{x(i)}^2)$$

$$Kov(\bar{y}_{SK\ddot{O}(X)}, \bar{x}_{SK\ddot{O}(X)}) = \frac{1}{mr} (S_{yx} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tau_{yx(i)})$$

olacaktır (Özdemir, 2005a). Böylece Eş. (3.3), (3.4) ve (3.5) tekrar düzenlenirse,

$$E(e_0^2) = \frac{1}{\bar{Y}^2} \frac{1}{mr} (S_y^2 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tau_{y[i]}^2)$$

$$E(e_1^2) = \frac{1}{\bar{X}^2} \frac{1}{mr} (S_x^2 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tau_{x(i)}^2)$$

$$E(e_0 e_1) = \frac{1}{\bar{X}\bar{Y}} \frac{1}{mr} (S_{yx} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tau_{yx(i)})$$

olarak yazılabilir. Buna göre Eş. (3.2)'de HKO ifadesi tekrar düzenlenirse;

$$HKO(r_{SK\ddot{O}(X)}) = R^2 \left[\frac{1}{\bar{Y}^2} \frac{1}{mr} \left(S_y^2 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tau_{y[i]}^2 \right) + \frac{1}{\bar{X}^2} \frac{1}{mr} \left(S_x^2 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tau_{x(i)}^2 \right) - \right.$$

$$\frac{2}{\bar{X}\bar{Y}} \frac{1}{mr} (S_{yx} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tau_{yx(i)}) \Big]$$

$$HKO(r_{SK\ddot{O}(X)}) = \frac{R^2}{mr} \left[\frac{S_x^2}{\bar{X}^2} + \frac{S_y^2}{\bar{Y}^2} - \frac{2\rho S_x S_y}{\bar{X}\bar{Y}} \right] - \frac{R^2}{m^2 r} \left[\frac{\sum_{i=1}^m \tau_{x(i)}^2}{\bar{X}^2} + \frac{\sum_{i=1}^m \tau_{y[i]}^2}{\bar{Y}^2} - \frac{2 \sum_{i=1}^m \tau_{yx(i)}}{\bar{X}\bar{Y}} \right]$$

$$HKO(r_{SK\ddot{O}(X)}) = \frac{R^2}{mr} [C_x^2 + C_y^2 - 2\rho C_x C_y] - \frac{R^2}{m^2 r} \left[\frac{\sum_{i=1}^m \tau_{x(i)}^2}{\bar{X}^2} + \frac{\sum_{i=1}^m \tau_{y[i]}^2}{\bar{Y}^2} - \frac{2 \sum_{i=1}^m \tau_{yx(i)}}{\bar{X}\bar{Y}} \right] \quad (3.6)$$

olarak elde edilir.

Yığın oranının tahmin edicisinden yararlanarak yardımcı değişken X 'in yığın ortalaması $\bar{X}$ biliniyorken, $\bar{Y}$ 'nin SKÖ altında oransal tahmin edicisi,

$$\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}(X)}} = r_{SK\ddot{O}(X)} \bar{X} = \frac{\bar{y}_{SK\ddot{O}(X)}}{\bar{x}_{SK\ddot{O}(X)}} \bar{X}$$

olarak tanımlanır. $\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}(X)}}$ tahmin edicisinin beklenen değeri,

$$E(\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}(X)}}) = \bar{X} E(r_{SK\ddot{O}(X)})$$

şeklinde tanımlanır. Burada,

$$E(r_{SK\ddot{O}(X)}) = E(R(1 + e_0)(1 + e_1)^{-1})$$

$$= RE((1 + e_0)(1 + e_1)^{-1})$$

olmak üzere Taylor serisi açılımından yararlanarak

$$= RE((1 + e_0)(1 - e_1 + e_1^2 - e_1^3 + e_1^4 - e_1^5 \dots))$$

$$= RE(1 + e_0 - e_1 - e_0 e_1 + e_1^2 + e_0 e_1^2 - e_1^3 - e_0 e_1^3 + e_1^4 + e_0 e_1^4 + e_1^5 - e_0 e_1^5 \dots)$$

yazılabilir. Burada 2.dereceden sonraki terimler ihmal edilirse,

$$\begin{aligned}
&= RE(1 + e_0 - e_1 - e_0 e_1 + e_1^2) \\
&= R(1 + E(e_0) - E(e_1) - E(e_0 e_1) + E(e_1^2)) \\
&= R(1 + E(e_1^2) - E(e_0 e_1))
\end{aligned}$$

olacaktır. Buradan

$$E(r_{SK\ddot{O}(X)}) = R \left[1 + \frac{1}{\bar{X}^2} \frac{1}{mr} \left(S_x^2 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tau_{x(i)}^2 \right) - \frac{1}{\bar{X}\bar{Y}} \frac{1}{mr} (S_{yx} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tau_{yx(i)}) \right]$$

olarak elde edilir. Bu durumda $\bar{Y}$ 'nin SKÖ altında oransal tahmin edicisinin beklenen değeri,

$$\begin{aligned}
E(\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}(X)}}) &= R \bar{X} \left[1 + \frac{1}{\bar{X}^2} \frac{1}{mr} \left(S_x^2 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tau_{x(i)}^2 \right) - \frac{1}{\bar{X}\bar{Y}} \frac{1}{mr} (S_{yx} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tau_{yx(i)}) \right] \\
&= \bar{Y} \left[1 + \frac{1}{\bar{X}^2} \frac{1}{mr} \left(S_x^2 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tau_{x(i)}^2 \right) - \frac{1}{\bar{X}\bar{Y}} \frac{1}{mr} (S_{yx} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tau_{yx(i)}) \right]
\end{aligned}$$

olacaktır. Görüldüğü gibi bu tahmin edici, yığın ortalaması $\bar{Y}$ için yanlı bir tahmin edicidir.

$\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}(X)}}$ tahmin edicisinin HKO, $\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}(X)}} = r_{SK\ddot{O}(X)} \bar{X}$ olmak üzere;
 $HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}(X)}}) = HKO(r_{SK\ddot{O}(X)} \bar{X}) = \bar{X}^2 HKO(r_{SK\ddot{O}(X)})$ olacaktır. Eş. (3.6) kullanılarak

$$\begin{aligned}
HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}(X)}}) &= \bar{X}^2 \frac{R^2}{mr} \left[\frac{S_x^2}{\bar{X}^2} + \frac{S_y^2}{\bar{Y}^2} - \frac{2\rho S_x S_y}{\bar{X}\bar{Y}} \right] - \bar{X}^2 \frac{R^2}{m^2 r} \left[\frac{\sum_{i=1}^m \tau_{x(i)}^2}{\bar{X}^2} + \frac{\sum_{i=1}^m \tau_{y[i]}^2}{\bar{Y}^2} - \frac{2 \sum_{i=1}^m \tau_{yx(i)}}{\bar{X}\bar{Y}} \right] \\
&= \frac{\bar{Y}^2}{mr} \left[\frac{S_x^2}{\bar{X}^2} + \frac{S_y^2}{\bar{Y}^2} - \frac{2\rho S_x S_y}{\bar{X}\bar{Y}} \right] - \frac{\bar{Y}^2}{m^2 r} \left[\frac{\sum_{i=1}^m \tau_{x(i)}^2}{\bar{X}^2} + \frac{\sum_{i=1}^m \tau_{y[i]}^2}{\bar{Y}^2} - \frac{2 \sum_{i=1}^m \tau_{yx(i)}}{\bar{X}\bar{Y}} \right] \\
&= \bar{X}^2 \frac{R^2}{mr} [C_x^2 + C_y^2 - 2\rho C_x C_y] - \bar{X}^2 \frac{R^2}{m^2 r} \left[\frac{\sum_{i=1}^m \tau_{x(i)}^2}{\bar{X}^2} + \frac{\sum_{i=1}^m \tau_{y[i]}^2}{\bar{Y}^2} - \frac{2 \sum_{i=1}^m \tau_{yx(i)}}{\bar{X}\bar{Y}} \right] \\
&= \frac{\bar{Y}^2}{mr} [C_x^2 + C_y^2 - 2\rho C_x C_y] - \frac{\bar{Y}^2}{m^2 r} \left[\frac{\sum_{i=1}^m \tau_{x(i)}^2}{\bar{X}^2} + \frac{\sum_{i=1}^m \tau_{y[i]}^2}{\bar{Y}^2} - \frac{2 \sum_{i=1}^m \tau_{yx(i)}}{\bar{X}\bar{Y}} \right]
\end{aligned}$$

$$= HKO(\bar{y}_{r_{BTÖ}}) - \frac{\bar{Y}^2}{m^2 r} \left[\frac{\sum_{i=1}^m \tau_{x(i)}^2}{\bar{X}^2} + \frac{\sum_{i=1}^m \tau_{y[i]}^2}{\bar{Y}^2} - \frac{2 \sum_{i=1}^m \tau_{yx(i)}}{\bar{X}\bar{Y}} \right] \quad (3.7)$$

olacaktır.

X ve Y değişkenleri arasındaki ilişkinin doğrusal olduğu varsayımı altında, $X_{(i)}$ koşulu altında $Y_{[i]}$ 'nin beklenen değeri aşağıdaki doğrusal regresyon modeli yardımıyla modellenir (Stokes, 1977).

$$E(Y_{[i]} / X_{(i)}) = \bar{Y} + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (X_{(i)} - \bar{X}) \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Bu modelin beklenen değerinin alınması ile i 'nci kümedeki i 'nci indirgenmiş sıra istatistiğinin beklenen değeri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E(E(Y_{[i]} / X_{(i)})) = E(Y_{[i]}) = \bar{Y} + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (E(X_{(i)}) - \bar{X}) \quad (3.8)$$

X değişkeni, ortalaması $\bar{X}$ ve varyansı σ_x^2 olan normal dağılıma sahip olmak üzere, standart normal değişken $Z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma_x}$ şeklinde tanımlanır. Z değişkenine ilişkin i 'nci sıra istatistiği ise

$$Z_{(i)} = \frac{X_{(i)} - \bar{X}}{\sigma_x}$$

şeklinde ifade edilir.

$Z_{(i)}$ sıra istatistiği, ortalaması 0 ve varyansı 1 olan standart normal dağılımdan çekilen n çaplı örnek için i 'nci sıra istatistiğini gösterir. Böylece $Z_{(i)}$ sıra istatistiğinin beklenen değeri

$$E(Z_{(i)}) = \frac{E(X_{(i)}) - \bar{X}}{\sigma_x} = \alpha_{i:m} \quad (3.9)$$

olarak tanımlanır (Arnold, Balakrishnan ve Nagaraja, 1993).

Buna göre Eş. (3.8) tekrar düzenlenirse;

$$E (E (Y_{[i]} / X_{(i)})) = E(Y_{[i]}) = \bar{Y} + \rho \sigma_y \alpha_{i:m} \quad (3.10)$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre Eş. (3.7) ifadesi tekrar ele alınırsa;

$$\begin{aligned} HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}(X)}}) &= HKO(\bar{y}_{r_{BT\ddot{O}}}) - \frac{\bar{Y}^2}{m^2 r} \left[\frac{\sum_{i=1}^m \tau_{x(i)}^2}{\bar{X}^2} + \frac{\sum_{i=1}^m \tau_{y[i]}^2}{\bar{Y}^2} - \frac{2 \sum_{i=1}^m \tau_{yx(i)}}{\bar{X}\bar{Y}} \right] \\ &= HKO(\bar{y}_{r_{BT\ddot{O}}}) - \frac{\bar{Y}^2}{m^2 r} \left[\frac{\sum_{i=1}^m (E(X_{(i)}) - \bar{X})^2}{\bar{X}^2} + \frac{\sum_{i=1}^m (E(Y_{[i]}) - \bar{Y})^2}{\bar{Y}^2} - \frac{2 \sum_{i=1}^m (E(X_{(i)}) - \bar{X})(E(Y_{[i]}) - \bar{Y})}{\bar{X}\bar{Y}} \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

olacaktır. Burada;

$$W_{x(i)} = \frac{E(X_{(i)}) - \bar{X}}{\bar{X}} \text{ ve } W_{y[i]} = \frac{E(Y_{[i]}) - \bar{Y}}{\bar{Y}}$$

ifade etmek üzere;

$$HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}(X)}}) = HKO(\bar{y}_{r_{BT\ddot{O}}}) - \frac{\bar{Y}^2}{m^2 r} \sum_{i=1}^m (W_{x(i)} - W_{y[i]})^2 \quad (3.12)$$

yazılabilir. Ayrıca Eş. (3.9) ve Eş. (3.10) kullanılarak,

$$W_{y[i]} = \frac{E(Y_{[i]}) - \bar{Y}}{\bar{Y}} = \frac{\bar{Y} + \rho \sigma_y \alpha_{i:m} - \bar{Y}}{\bar{Y}} = \frac{\rho \sigma_y}{\bar{Y}} \alpha_{i:m}$$

ve

$$W_{x(i)} = \frac{E(X_{(i)}) - \bar{X}}{\bar{X}} = \frac{\sigma_x}{\sigma_x} \frac{E(X_{(i)}) - \bar{X}}{\bar{X}} = \frac{\sigma_x}{\bar{X}} \alpha_{i:m}$$

olarak tekrar düzenlenirse, Eş. (3.12) aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}(X)}}) &= HKO(\bar{y}_{r_{BT\ddot{O}}}) - \frac{\bar{Y}^2}{m^2 r} \sum_{i=1}^m (W_{x(i)} - W_{y[i]})^2 \\ &= HKO(\bar{y}_{r_{BT\ddot{O}}}) - \frac{\bar{Y}^2}{m^2 r} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\sigma_x}{\bar{X}} \alpha_{i:m} - \frac{\rho \sigma_y}{\bar{Y}} \alpha_{i:m} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= HKO(\bar{y}_{r_{BT\ddot{O}}}) - \left(\frac{\sigma_x}{\bar{X}} - \frac{\rho\sigma_y}{\bar{Y}}\right)^2 \frac{\bar{Y}^2}{m^2r} \sum_{i=1}^m \alpha_{i:m}^2 \\
&= HKO(\bar{y}_{r_{BT\ddot{O}}}) - (C_x - \rho C_y)^2 \frac{\bar{Y}^2}{m^2r} \sum_{i=1}^m \alpha_{i:m}^2
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Görüldüğü gibi $HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}(X)}})$ değeri $\frac{\bar{Y}^2}{m^2r} \sum_{i=1}^m \alpha_{i:m}^2$ ifadesi sabit olmak üzere, değişim katsayılarına ve korelasyon katsayısına bağlı olarak değişmektedir. ρC_y ile C_x değeri arasındaki fark arttıkça $HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}(X)}}) < HKO(\bar{y}_{r_{BT\ddot{O}}})$ olacaktır. Ayrıca C_x ve C_y aynı değerleri aldıklarında ise, $HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}(X)}})$ ve $HKO(\bar{y}_{r_{BT\ddot{O}}})$ değerleri birbirine yaklaşacaktır.

Eşitliğin sağ tarafı pozitif olduğu sürece, SKÖ'de yardımcı değişken kullanarak elde edilen $HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}(X)}})$, BTÖ tasarımındaki $HKO(\bar{y}_{r_{BT\ddot{O}}})$ 'dan daha küçük olacaktır. Böylece X 'e göre sıralama durumunda daha etkin sonuçlar elde edilecektir.

3.2. Y Değişkenine Göre Sıralama

Burada sadece ilgilenilen değişken Y 'ye göre sıralama yapıldığını varsayalım. Bu durumda X 'in sıralamasında hatalar oluşurken, Y değişkeni en iyi şekilde sıralanmış olacaktır. Buradaki $(X_{[i]}, Y_{(i)})$, Y değişkeni için i 'nci kümedeki i 'nci sıra istatistiğini ve X değişkeni için de i 'nci kümedeki i 'nci indirgenmiş sıra istatistiğini ifade eder. Böylece yığın oranı R 'nin Y 'ye göre sıralama durumunda SKÖ altında tahmin edicisi aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$r_{SK\ddot{O}(Y)} = \frac{\bar{y}_{SK\ddot{O}(Y)}}{\bar{x}_{SK\ddot{O}(Y)}}$$

Burada;

$$\bar{y}_{SK\ddot{O}(Y)} = \frac{1}{mr} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r Y_{(i)j}$$

ve

$$\bar{x}_{SK\ddot{O}(Y)} = \frac{1}{mr} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r X_{[i]j}$$

olarak tanımlanır (McIntyre, 1952).

$r_{SK\ddot{O}(Y)}$ 'nin yaklaşık HKO aşağıdaki gibi bulunur;

$$HKO(r_{SK\ddot{O}(Y)}) = E(r_{SK\ddot{O}(Y)} - R)^2 = E\left(\frac{\bar{y}_{SK\ddot{O}(Y)}}{\bar{x}_{SK\ddot{O}(Y)}} - R\right)^2 \text{ olmak üzere;}$$

$$e_1 = \frac{\bar{x}_{SK\ddot{O}(Y)}}{\bar{X}} - 1 \text{ ve } e_0 = \frac{\bar{y}_{SK\ddot{O}(Y)}}{\bar{Y}} - 1$$

olarak tanımlansın. Bu durumda; $E(e_0) = E(e_1) = 0$ olacaktır.

$$\bar{x}_{SK\ddot{O}(Y)} = \bar{X}(1+e_1) \text{ ve } \bar{y}_{SK\ddot{O}(Y)} = \bar{Y}(1+e_0)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} HKO(r_{SK\ddot{O}(Y)}) &= E\left(\frac{\bar{y}_{SK\ddot{O}(Y)}}{\bar{x}_{SK\ddot{O}(Y)}} - R\right)^2 \\ &= E(R(1+e_0)(1+e_1)^{-1} - R)^2 \\ &= R^2 E((1+e_0)(1+e_1)^{-1} - 1)^2 \end{aligned}$$

olmak üzere; Taylor serisi açılımından yararlanarak

$$\begin{aligned} &= R^2 E((1+e_0)(1-e_1+e_1^2-e_1^3+e_1^4-e_1^5+\dots) - 1)^2 \\ &= R^2 E(e_0 - e_1 + e_1^2 - e_0e_1 + e_0e_1^2 - e_1^3 - e_0e_1^3 + e_1^4 + e_0e_1^4 + e_1^5 - \\ &\quad e_0e_1^5 + \dots)^2 \end{aligned} \tag{3.14}$$

yazılabilir.

Eş. (3.14)'de parantez içindeki ifadenin karesi alındıktan sonra, 2.dereceden sonraki terimler ihmal edilirse,

$$\begin{aligned}
&= R^2 E(e_0^2 + e_1^2 - 2(e_0 e_1)) \\
&= R^2 (E(e_0^2) + E(e_1^2) - 2E(e_0 e_1))
\end{aligned} \tag{3.15}$$

olur. Burada,

$$E(e_0^2) = E\left(\frac{(\bar{y}_{SK\ddot{O}(Y)} - \bar{Y})^2}{\bar{Y}^2}\right) = \frac{1}{\bar{Y}^2} E(\bar{y}_{SK\ddot{O}(Y)} - \bar{Y})^2 = \frac{1}{\bar{Y}^2} \text{Var}(\bar{y}_{SK\ddot{O}(Y)}) \tag{3.16}$$

$$E(e_1^2) = E\left(\frac{(\bar{x}_{SK\ddot{O}(Y)} - \bar{X})^2}{\bar{X}^2}\right) = \frac{1}{\bar{X}^2} E(\bar{x}_{SK\ddot{O}(Y)} - \bar{X})^2 = \frac{1}{\bar{X}^2} \text{Var}(\bar{x}_{SK\ddot{O}(Y)}) \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
E(e_0 e_1) &= E\left(\left(\frac{\bar{x}_{SK\ddot{O}(Y)} - \bar{X}}{\bar{X}}\right)\left(\frac{\bar{y}_{SK\ddot{O}(Y)} - \bar{Y}}{\bar{Y}}\right)\right) = \frac{1}{\bar{X}\bar{Y}} E((\bar{x}_{SK\ddot{O}(Y)} - \bar{X})(\bar{y}_{SK\ddot{O}(Y)} - \bar{Y})) \\
&= \frac{1}{\bar{X}\bar{Y}} \text{Kov}(\bar{x}_{SK\ddot{O}(Y)}, \bar{y}_{SK\ddot{O}(Y)})
\end{aligned} \tag{3.18}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca,

$$\text{Var}(\bar{y}_{SK\ddot{O}(Y)}) = \text{Var}\left(\frac{1}{mr} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r Y_{(i)j}\right)$$

$$\text{Var}(\bar{x}_{SK\ddot{O}(Y)}) = \text{Var}\left(\frac{1}{mr} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r X_{[i]j}\right)$$

$$\text{Kov}(\bar{x}_{SK\ddot{O}(Y)}, \bar{y}_{SK\ddot{O}(Y)}) = \text{Kov}\left(\frac{1}{mr} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r X_{[i]j}, \frac{1}{mr} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r Y_{(i)j}\right)$$

şeklinde tanımlanır. $Y_{(i)}$ ile $X_{[i]}$ sıra istatistiklerinin bağımsızlık özelliğinden ve

$$\text{Var}(Y_{(i)j}) = \text{Var}(Y_{(i)}) = S_{Y_{(i)}}^2$$

$$\text{Var}(X_{[i]j}) = \text{Var}(X_{[i]}) = S_{X_{[i]}}^2$$

$$\text{Kov}(X_{[i]j}, Y_{(i)j}) = \text{Kov}(X_{[i]}, Y_{(i)}) = S_{XY_{(i)}}$$

olduğundan

$$Var(\bar{y}_{SK\ddot{O}(Y)}) = \frac{1}{m^2 r^2} r \sum_{i=1}^m Var(Y_{(i)}) = \frac{1}{m^2 r} \sum_{i=1}^m S_{Y_{(i)}}^2$$

$$Var(\bar{x}_{SK\ddot{O}(Y)}) = \frac{1}{m^2 r^2} r \sum_{i=1}^m Var(X_{[i]}) = \frac{1}{m^2 r} \sum_{i=1}^m S_{X_{[i]}}^2$$

$$Kov(\bar{x}_{SK\ddot{O}(Y)}, \bar{y}_{SK\ddot{O}(Y)}) = \frac{1}{m^2 r^2} r \sum_{i=1}^m Kov(X_{[i]}, Y_{(i)}) = \frac{1}{m^2 r} \sum_{i=1}^m S_{XY_{(i)}}$$

yazılabilir. Burada sıra istatistiklerinin

$$\sum_{i=1}^m S_{Y_{(i)}}^2 = mS_y^2 - \sum_{i=1}^m (E(Y_{(i)}) - \bar{Y})^2$$

$$\sum_{i=1}^m S_{X_{[i]}}^2 = mS_x^2 - \sum_{i=1}^m (E(X_{[i]}) - \bar{X})^2$$

$$\sum_{i=1}^m S_{XY_{(i)}} = mS_{xy} - \sum_{i=1}^m (E(X_{[i]}) - \bar{X})(E(Y_{(i)}) - \bar{Y})$$

özelliklerini kullanırsak,

$$(E(Y_{(i)}) - \bar{Y})^2 = \tau_{y(i)}^2$$

$$(E(X_{[i]}) - \bar{X})^2 = \tau_{x[i]}^2$$

$$(E(X_{[i]}) - \bar{X})(E(Y_{(i)}) - \bar{Y}) = \tau_{xy(i)}$$

olarak tanımlanmak üzere;

$$Var(\bar{y}_{SK\ddot{O}(Y)}) = \frac{1}{mr} (S_y^2 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tau_{y(i)}^2)$$

$$Var(\bar{x}_{SK\ddot{O}(Y)}) = \frac{1}{mr} (S_x^2 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tau_{x[i]}^2)$$

$$Kov(\bar{x}_{SK\ddot{O}(Y)}, \bar{y}_{SK\ddot{O}(Y)}) = \frac{1}{mr} (S_{xy} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tau_{xy(i)})$$

olacaktır. Böylece Eş. (3.16), (3.17) ve (3.18) tekrar düzenlenirse,

$$E(e_0^2) = \frac{1}{\bar{Y}^2} \frac{1}{mr} (S_y^2 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tau_{y(i)}^2)$$

$$E(e_1^2) = \frac{1}{\bar{X}^2} \frac{1}{mr} (S_x^2 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tau_{x[i]}^2)$$

$$E(e_0 e_1) = \frac{1}{\bar{X}\bar{Y}} \frac{1}{mr} (S_{xy} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tau_{xy(i)})$$

olarak yazılabilir. Buna göre Eş. (3.15)'deki HKO ifadesi tekrar düzenlenirse;

$$HKO(r_{SKÖ(Y)}) = R^2 \left[\frac{1}{\bar{Y}^2} \frac{1}{mr} \left(S_y^2 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tau_{y(i)}^2 \right) + \frac{1}{\bar{X}^2} \frac{1}{mr} \left(S_x^2 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tau_{x[i]}^2 \right) - \right. \\ \left. \frac{2}{\bar{X}\bar{Y}} \frac{1}{mr} \left(S_{xy} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tau_{xy(i)} \right) \right]$$

$$HKO(r_{SKÖ(Y)}) = \frac{R^2}{mr} \left[\frac{S_x^2}{\bar{X}^2} + \frac{S_y^2}{\bar{Y}^2} - \frac{2\rho S_x S_y}{\bar{X}\bar{Y}} \right] - \frac{R^2}{m^2 r} \left[\frac{\sum_{i=1}^m \tau_{x[i]}^2}{\bar{X}^2} + \frac{\sum_{i=1}^m \tau_{y(i)}^2}{\bar{Y}^2} - \frac{2 \sum_{i=1}^m \tau_{xy(i)}}{\bar{X}\bar{Y}} \right]$$

$$HKO(r_{SKÖ(Y)}) = \frac{R^2}{mr} [C_x^2 + C_y^2 - 2\rho C_x C_y] - \frac{R^2}{m^2 r} \left[\frac{\sum_{i=1}^m \tau_{x[i]}^2}{\bar{X}^2} + \frac{\sum_{i=1}^m \tau_{y(i)}^2}{\bar{Y}^2} - \frac{2 \sum_{i=1}^m \tau_{xy(i)}}{\bar{X}\bar{Y}} \right] \quad (3.19)$$

olarak elde edilir.

Yığın oranının tahmin edicisinden yararlanarak yardımcı değişken X 'in yığın ortalaması $\bar{X}$ biliniyorken, $\bar{Y}$ 'nin SKÖ altında oransal tahmin edicisi,

$$\bar{y}_{r_{SKÖ(Y)}} = r_{SKÖ(Y)} \bar{X} = \frac{\bar{y}_{SKÖ(Y)}}{\bar{x}_{SKÖ(Y)}} \bar{X}$$

olarak tanımlanır. $\bar{y}_{r_{SKÖ(Y)}}$ tahmin edicisinin beklenen değeri,

$$E(\bar{y}_{r_{SKÖ(Y)}}) = \bar{X} E(r_{SKÖ(Y)})$$

şeklinde tanımlanır. Burada,

$$E(r_{SK\ddot{O}(Y)}) = E(R(1 + e_0)(1 + e_1)^{-1})$$

$$= RE((1 + e_0)(1 + e_1)^{-1})$$

olmak üzere Taylor serisi açılımından yararlanarak

$$= RE((1 + e_0)(1 - e_1 + e_1^2 - e_1^3 + e_1^4 - e_1^5 \dots))$$

$$= RE(1 + e_0 - e_1 - e_0e_1 + e_1^2 + e_0e_1^2 - e_1^3 - e_0e_1^3 + e_1^4 + e_0e_1^4 + e_1^5 - e_0e_1^5 \dots)$$

yazılabilir. Burada 2.dereceden sonraki terimler ihmal edilirse,

$$= RE(1 + e_0 - e_1 - e_0e_1 + e_1^2)$$

$$= R(1 + E(e_0) - E(e_1) - E(e_0e_1) + E(e_1^2))$$

$$= R(1 + E(e_1^2) - E(e_0e_1))$$

olacaktır. Buradan

$$E(r_{SK\ddot{O}(Y)}) = R \left[1 + \frac{1}{\bar{X}^2} \frac{1}{mr} \left(S_x^2 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tau_{x[i]}^2 \right) - \frac{1}{\bar{X}\bar{Y}} \frac{1}{mr} \left(S_{xy} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tau_{xy(i)} \right) \right]$$

olarak elde edilir. Bu durumda $\bar{Y}$ 'nın SKÖ altında oransal tahmin edicisinin beklenen değeri,

$$E(\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}(Y)}}) = R \bar{X} \left[1 + \frac{1}{\bar{X}^2} \frac{1}{mr} \left(S_x^2 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tau_{x[i]}^2 \right) - \frac{1}{\bar{X}\bar{Y}} \frac{1}{mr} \left(S_{xy} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tau_{xy(i)} \right) \right]$$

$$= \bar{Y} \left[1 + \frac{1}{\bar{X}^2} \frac{1}{mr} \left(S_x^2 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tau_{x[i]}^2 \right) - \frac{1}{\bar{X}\bar{Y}} \frac{1}{mr} \left(S_{xy} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tau_{xy(i)} \right) \right]$$

olacaktır. Görüldüğü gibi bu tahmin edici, yığın ortalaması $\bar{Y}$ için yanlı bir tahmin edicidir.

$\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}(Y)}}$ tahmin edicisinin HKO, $\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}(Y)}} = r_{SK\ddot{O}(Y)} \bar{X}$ olmak üzere;

$HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}(Y)}}) = HKO(r_{SK\ddot{O}(Y)}\bar{X}) = \bar{X}^2 HKO(r_{SK\ddot{O}(Y)})$ olacaktır. Eş. (3.19) kullanılarak

$$\begin{aligned}
 HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}(Y)}}) &= \bar{X}^2 \frac{R^2}{mr} \left[\frac{S_x^2}{\bar{X}^2} + \frac{S_y^2}{\bar{Y}^2} - \frac{2\rho S_x S_y}{\bar{X}\bar{Y}} \right] - \bar{X}^2 \frac{R^2}{m^2 r} \left[\frac{\sum_{i=1}^m \tau_{x[i]}^2}{\bar{X}^2} + \frac{\sum_{i=1}^m \tau_{y(i)}^2}{\bar{Y}^2} - \frac{2 \sum_{i=1}^m \tau_{xy(i)}}{\bar{X}\bar{Y}} \right] \\
 &= \frac{\bar{Y}^2}{mr} \left[\frac{S_x^2}{\bar{X}^2} + \frac{S_y^2}{\bar{Y}^2} - \frac{2\rho S_x S_y}{\bar{X}\bar{Y}} \right] - \frac{\bar{Y}^2}{m^2 r} \left[\frac{\sum_{i=1}^m \tau_{x[i]}^2}{\bar{X}^2} + \frac{\sum_{i=1}^m \tau_{y(i)}^2}{\bar{Y}^2} - \frac{2 \sum_{i=1}^m \tau_{xy(i)}}{\bar{X}\bar{Y}} \right] \\
 &= \bar{X}^2 \frac{R^2}{mr} [C_x^2 + C_y^2 - 2\rho C_x C_y] - \bar{X}^2 \frac{R^2}{m^2 r} \left[\frac{\sum_{i=1}^m \tau_{x[i]}^2}{\bar{X}^2} + \frac{\sum_{i=1}^m \tau_{y(i)}^2}{\bar{Y}^2} - \frac{2 \sum_{i=1}^m \tau_{xy(i)}}{\bar{X}\bar{Y}} \right] \\
 &= \frac{\bar{Y}^2}{mr} [C_x^2 + C_y^2 - 2\rho C_x C_y] - \frac{\bar{Y}^2}{m^2 r} \left[\frac{\sum_{i=1}^m \tau_{x[i]}^2}{\bar{X}^2} + \frac{\sum_{i=1}^m \tau_{y(i)}^2}{\bar{Y}^2} - \frac{2 \sum_{i=1}^m \tau_{xy(i)}}{\bar{X}\bar{Y}} \right] \\
 &= HKO(\bar{y}_{r_{BT\ddot{O}}}) - \frac{\bar{Y}^2}{m^2 r} \left[\frac{\sum_{i=1}^m \tau_{x[i]}^2}{\bar{X}^2} + \frac{\sum_{i=1}^m \tau_{y(i)}^2}{\bar{Y}^2} - \frac{2 \sum_{i=1}^m \tau_{xy(i)}}{\bar{X}\bar{Y}} \right] \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

olacaktır.

X ve Y değişkenleri arasındaki ilişkinin doğrusal olduğu varsayımı altında, $Y_{(i)}$ koşulu altında $X_{[i]}$ 'nin beklenen değeri aşağıdaki doğrusal regresyon modeli yardımıyla modellenir (Stokes, 1977).

$$E(X_{[i]} / Y_{(i)}) = \bar{X} + \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (Y_{(i)} - \bar{Y}) \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Bu modelin beklenen değerinin alınması ile i 'nci kümedeki i 'nci indirgenmiş sıra istatistiğinin beklenen değeri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E(E(X_{[i]} / Y_{(i)})) = E(X_{[i]}) = \bar{X} + \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (E(Y_{(i)}) - \bar{Y}) \quad (3.21)$$

Y değişkeni, ortalaması $\bar{Y}$ ve varyansı σ_y^2 olan normal dağılıma sahip olmak üzere, standart normal değişken $Z = \frac{Y - \bar{Y}}{\sigma_y}$ şeklinde tanımlanır. Z değişkenine ilişkin i 'nci sıra istatistiği ise

$$Z_{(i)} = \frac{Y_{(i)} - \bar{Y}}{\sigma_y}$$

şeklinde ifade edilir.

$Z_{(i)}$ sıra istatistiği, ortalaması 0 ve varyansı 1 olan standart normal dağılımdan çekilen n çaplı örnek için i 'nci sıra istatistiğini gösterir. Böylece $Z_{(i)}$ sıra istatistiğinin beklenen değeri

$$E(Z_{(i)}) = \frac{E(Y_{(i)}) - \bar{Y}}{\sigma_y} = \alpha_{i:m} \quad (3.22)$$

olarak tanımlanır.

Buna göre Eş. (3.21) tekrar düzenlenirse;

$$E(E(X_{[i]} / Y_{(i)})) = E(X_{[i]}) = \bar{X} + \rho \sigma_x \alpha_{i:m} \quad (3.23)$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre Eş. (3.20) ifadesi tekrar ele alınırsa;

$$\begin{aligned} HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}(Y)}}) &= HKO(\bar{y}_{r_{BT\ddot{O}}}) - \frac{\bar{Y}^2}{m^2 r} \left[\frac{\sum_{i=1}^m \tau_{x[i]}^2}{\bar{X}^2} + \frac{\sum_{i=1}^m \tau_{y(i)}^2}{\bar{Y}^2} - \frac{2 \sum_{i=1}^m \tau_{xy(i)}}{\bar{X}\bar{Y}} \right] \\ &= HKO(\bar{y}_{r_{BT\ddot{O}}}) - \frac{\bar{Y}^2}{m^2 r} \left[\frac{\sum_{i=1}^m (E(X_{[i]}) - \bar{X})^2}{\bar{X}^2} + \frac{\sum_{i=1}^m (E(Y_{(i)}) - \bar{Y})^2}{\bar{Y}^2} - \frac{2 \sum_{i=1}^m (E(X_{[i]}) - \bar{X})(E(Y_{(i)}) - \bar{Y})}{\bar{X}\bar{Y}} \right] \end{aligned} \quad (3.24)$$

olacaktır. Burada;

$$W_{x[i]} = \frac{E(X_{[i]}) - \bar{X}}{\bar{X}} \text{ ve } W_{y(i)} = \frac{E(Y_{(i)}) - \bar{Y}}{\bar{Y}}$$

ifade etmek üzere;

$$HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}(Y)}}) = HKO(\bar{y}_{r_{BT\ddot{O}}}) - \frac{\bar{Y}^2}{m^2 r} \sum_{i=1}^m (W_{x[i]} - W_{y(i)})^2 \quad (3.25)$$

yazılabilir.

Ayrıca Eş. (3.22) ve Eş. (3.23) kullanılarak,

$$W_{x[i]} = \frac{E(X_{[i]}) - \bar{X}}{\bar{X}} = \frac{\bar{X} + \rho\sigma_x \alpha_{i:m} - \bar{X}}{\bar{X}} = \frac{\rho\sigma_x}{\bar{X}} \alpha_{i:m}$$

ve

$$W_{y(i)} = \frac{E(Y_{(i)}) - \bar{Y}}{\bar{Y}} = \frac{\sigma_y}{\sigma_y} \frac{E(Y_{(i)}) - \bar{Y}}{\bar{Y}} = \frac{\sigma_y}{\bar{Y}} \alpha_{i:m}$$

olarak tekrar düzenlenirse, Eş. (3.25) aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}}(Y)}) &= HKO(\bar{y}_{r_{BT\ddot{O}}}) - \frac{\bar{Y}^2}{m^2 r} \sum_{i=1}^m (W_{x[i]} - W_{y(i)})^2 \\ &= HKO(\bar{y}_{r_{BT\ddot{O}}}) - \frac{\bar{Y}^2}{m^2 r} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\rho\sigma_x}{\bar{X}} \alpha_{i:m} - \frac{\sigma_y}{\bar{Y}} \alpha_{i:m} \right)^2 \\ &= HKO(\bar{y}_{r_{BT\ddot{O}}}) - \left(\frac{\rho\sigma_x}{\bar{X}} - \frac{\sigma_y}{\bar{Y}} \right)^2 \frac{\bar{Y}^2}{m^2 r} \sum_{i=1}^m \alpha_{i:m}^2 \\ &= HKO(\bar{y}_{r_{BT\ddot{O}}}) - (\rho C_x - C_y)^2 \frac{\bar{Y}^2}{m^2 r} \sum_{i=1}^m \alpha_{i:m}^2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Görüldüğü gibi $HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}}(Y)})$ değeri $\frac{\bar{Y}^2}{m^2 r} \sum_{i=1}^m \alpha_{i:m}^2$ ifadesi sabit olmak üzere, değişim katsayılarına ve korelasyon katsayısına bağlı olarak değişmektedir. C_y ile ρC_x değeri arasındaki fark arttıkça $HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}}(Y)}) < HKO(\bar{y}_{r_{BT\ddot{O}}})$ olacaktır. Ayrıca C_x ve C_y aynı değerleri aldıklarında, $HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}}(Y)})$ ve $HKO(\bar{y}_{r_{BT\ddot{O}}})$ değerleri birbirine yaklaşacaktır.

Eşitliğin sağ tarafı pozitif olduğu sürece, SKÖ'de ilgilenilen değişken kullanarak elde edilen $HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}}(Y)})$, BTÖ tasarımındaki $HKO(\bar{y}_{r_{BT\ddot{O}}})$ 'dan daha küçük olacaktır. Böylece Y 'ye göre sıralama durumunda daha etkin sonuçlar elde edilecektir. Bu durumu daha detaylı olarak incelemek için, Eş. (3.13) ve Eş. (3.26)'da verilen $HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}}(X)})$ ve $HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}}(Y)})$ ifadeleri karşılaştırılırsa;

$$HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{0}(X)}}) - HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{0}(Y)}}) =$$

$$HKO(\bar{y}_{r_{BT\ddot{0}}}) - (C_x - \rho C_y)^2 \frac{\bar{Y}^2}{m^2 r} \sum_{i=1}^m \alpha_{i:m}^2 - HKO(\bar{y}_{r_{BT\ddot{0}}}) + (\rho C_x - C_y)^2 \frac{\bar{Y}^2}{m^2 r} \sum_{i=1}^m \alpha_{i:m}^2$$

$$= [(\rho C_x - C_y)^2 - (C_x - \rho C_y)^2] \frac{\bar{Y}^2}{m^2 r} \sum_{i=1}^m \alpha_{i:m}^2$$

$$= [\rho^2 C_x^2 - 2\rho C_x C_y + C_y^2 - C_x^2 + 2\rho C_x C_y - \rho^2 C_y^2] \frac{\bar{Y}^2}{m^2 r} \sum_{i=1}^m \alpha_{i:m}^2$$

$$= [\rho^2 C_x^2 + C_y^2 - C_x^2 - \rho^2 C_y^2] \frac{\bar{Y}^2}{m^2 r} \sum_{i=1}^m \alpha_{i:m}^2$$

$$= [C_x^2(\rho^2 - 1) + C_y^2(1 - \rho^2)] \frac{\bar{Y}^2}{m^2 r} \sum_{i=1}^m \alpha_{i:m}^2$$

$$= [(C_x^2 - C_y^2)(\rho^2 - 1)] \frac{\bar{Y}^2}{m^2 r} \sum_{i=1}^m \alpha_{i:m}^2$$

$$= [(C_x^2 - C_y^2)(\rho^2 - 1)] \frac{\bar{Y}^2}{mn} \sum_{i=1}^m \alpha_{i:m}^2 \quad (3.27)$$

ifadesi bulunur.

Burada $\frac{\bar{Y}^2}{mn} \sum_{i=1}^m \alpha_{i:m}^2$ sabit olmak üzere;

- $C_y^2 > C_x^2$ iken ve ρ değeri 0'a yakın iken $[(C_x^2 - C_y^2)(\rho^2 - 1)]$ ifadesi pozitif olacağı için $HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{0}(X)}}) > HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{0}(Y)}})$ olacaktır. Ancak; ρ değeri 1'e yaklaştıkça HKO'ları arasındaki fark azalacaktır.
- $C_x^2 > C_y^2$ iken ve ρ değeri 0'a yakın iken $[(C_x^2 - C_y^2)(\rho^2 - 1)]$ ifadesi negatif olacağı için $HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{0}(Y)}}) > HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{0}(X)}})$ olacaktır. Ancak; ρ değeri 1'e yaklaştıkça HKO'ları arasındaki fark azalacaktır.

4. UYGULAMA

Uygulamada SKÖ’de hem ilgilenilen değişken hem de yardımcı değişken kullanılarak yığın ortalamasının oransal tahminini incelemek amacıyla Elazığ Keban Baraj Gölü’nden Kasım – Aralık 2011 aylarında yakalanan Alburnus mossulensis populasyonuna ait 167 balık türünün boy ve ağırlık verisi kullanılmıştır (Bütün, 2013). Ortalama balık ağırlığının tahmin edilmek istendiği varsayımı altında, balık boyu yardımcı değişken olarak ele alınmıştır. SKÖ’de sıralamanın hem balık ağırlığına göre hem de balık boyuna göre yapıldığı durumlar ayrı ayrı incelenmiştir.

Burada balık boyu (mm) (X) ve balık ağırlığı (gr) (Y) değişkenleri normal dağılıma sahip olup, bu değişkenler arasındaki korelasyon katsayısı $\rho = 0,8837$ dir. Bu yığının X değişkeni bakımından ortalaması $\bar{X}=126,44$ ve varyansı $\sigma_x^2=50,5487$, Y değişkeni bakımından ortalaması $\bar{Y}=12,50$ ve varyansı $\sigma_y^2=4,7648$ dir. X ve Y değişkenleri için değişim katsayıları sırasıyla

$$C_x = \frac{\sigma_x}{\bar{X}} = \frac{7,11}{126,44} = 0,0562$$

$$C_y = \frac{\sigma_y}{\bar{Y}} = \frac{2,18}{12,50} = 0,1744$$

olarak hesaplanır.

Yığın oranı ise;

$$R = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} = \frac{12,50}{126,44} = 0,0989$$

olarak bulunur. BTÖ ve SKÖ’ye göre oransal tahmin edicilerin HKO değerleri $n=6$ ve $n=10$ için farklı m ve r değerleri ele alınarak elde edilmiştir.

Eş. (2.3)’den yararlanarak $n=6$ için BTÖ altında oransal tahmin edicinin HKO;

$$HKO(\bar{y}_{r_{BTÖ}}) = \frac{\bar{Y}^2}{n} (C_x^2 + C_y^2 - 2\rho C_x C_y)$$

$$= \frac{12,50^2}{6} ((0,0562)^2 + (0,1744)^2 - 2(0,8837)(0,0562)(0,1744)) = 0,4232$$

elde edilir. Benzer şekilde n=10 için;

$$HKO(\bar{y}_{r_{BT\bar{0}}}) = \frac{12,50^2}{10} ((0,0562)^2 + (0,1744)^2 - 2(0,8837)(0,0562)(0,1744)) = 0,2539$$

olarak hesaplanır.

Sırasıyla X 'e ve Y 'ye göre sıralama durumunda SKÖ'ye ait HKO'ları ise n=6 için örneğin m=6 ve r=1 olmak üzere, Eş. (3.13) ve Eş. (3.26)'dan yararlanarak aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} HKO(\bar{y}_{r_{SK\bar{0}(X)}}) &= HKO(\bar{y}_{r_{BT\bar{0}}}) - \frac{\bar{y}^2}{m^2 r} \sum_{i=1}^m \alpha_{i:m}^2 (C_x - \rho C_y)^2 \\ &= 0,4232 - \frac{12,50^2}{36} [(2(1,2672)^2 + 2(0,6418)^2 + 2(0,2015)^2) (0,0562 - (0,8837)(0,1744))^2] \\ &= 0,2519 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} HKO(\bar{y}_{r_{SK\bar{0}(Y)}}) &= HKO(\bar{y}_{r_{BT\bar{0}}}) - \frac{\bar{y}^2}{m^2 r} \sum_{i=1}^m \alpha_{i:m}^2 (\rho C_x - C_y)^2 \\ &= 0,4232 - \frac{12,50^2}{36} [(2(1,2672)^2 + 2(0,6418)^2 + 2(0,2015)^2) ((0,8837)(0,0562) - 0,1744)^2] \\ &= 0,1452 \end{aligned}$$

Burada $\alpha_{i:m}$; $i=1,2, \dots, m$, standart normal dağılımda i'nci sıra istatistiğinin ortalama değerini ifade etmek üzere; bu değerler m=2, 3, 5, 6 ve 10 için Ek 1'de verilmiştir.

n=6 ve n=10'u sağlayan tüm mümkün m ve r değerleri için yukarıdaki hesaplamalara benzer şekilde elde edilen sonuçlar Çizelge 4.1'de gösterilmiştir.

GE değerleri ise, SKÖ'nün BTÖ'ye göre etkinliğini elde etmek amacıyla kullanılarak

X değişkenine göre sıralama için

$$GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(X))} = \frac{HKO(\bar{y}_{r_{BT\ddot{O}}})}{HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}(X)}})} \quad (4.1)$$

Y değişkenine göre sıralama için

$$GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(Y))} = \frac{HKO(\bar{y}_{r_{BT\ddot{O}}})}{HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}(Y)}})} \quad (4.2)$$

formülleri ile elde edilir.

Çizelge 4.1. n=6 ve n=10 iken farklı m ve r değerleri için HKO ve GE değerleri

	m	r	$HKO(\bar{y}_{r_{BT\ddot{O}}})$	$HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}(X)}})$	$HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}(Y)}})$	$GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(X))}$	$GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(Y))}$
n=6	2	3	0,4232	0,3437	0,2942	1,2313	1,4385
	3	2		0,3040	0,2297	1,3921	1,8424
	6	1		0,2519	0,1452	1,6800	2,9146
n=10	2	5	0,2539	0,2062	0,1765	1,2313	1,4385
	5	2		0,1582	0,0985	1,6049	2,5777
	10	1		0,1353	0,0615	1,8766	4,1285

Çizelge 4.1'den görüldüğü gibi; aynı (m,r) değerleri için $HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}(Y)}})$ değeri $HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}(X)}})$ değerinden daha küçüktür. Ancak hem $HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}(X)}})$ hem de $HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}(Y)}})$ değerleri aynı n değerleri için $HKO(\bar{y}_{r_{BT\ddot{O}}})$ 'dan daha küçük değerler almaktadırlar. Örneğin m=2 ve r=3 iken $HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}(Y)}}) = 0,2942 < HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}(X)}}) = 0,3437$ olmaktadır; ancak, her ikisi de n=6 iken $HKO(\bar{y}_{r_{BT\ddot{O}}}) = 0,4532$ 'den daha küçük değerlerdir. Bunun yanı sıra, aynı (m,r) değeri için $GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(Y))}$ değerleri $GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(X))}$ değerlerinden

daha büyüktür. Ancak $\rho=0,8837$ olduğundan, $GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(X))}$ değerleri de 1'den büyük çıkmaktadır.

Örnek çapları bakımından GE değerlerine bakıldığında ise aynı m küme çapına sahip (m,r) çiftleri ((m,r)=(2,3), (2,5)) için $GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(X))}$ ve $GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(Y))}$ aynı değerleri almaktadır. Dolayısıyla Eş. (3.27)'de görüldüğü gibi r tekrar sayısı GE değerleri üzerinde etkili olmamıştır. Ayrıca en yüksek $GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(X))}$ ve $GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(Y))}$ değerleri, n=10 için m=10 ve r=1 iken gerçekleşmiştir.

Sonuç olarak; Eş. (3.27)'den elde edildiği gibi $C_y^2 > C_x^2$ olduğundan tüm n değerleri için $HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}(X)}}) > HKO(\bar{y}_{r_{SK\ddot{O}(Y)}})$ olmuştur; ancak, ρ değeri 0,8837 olduğu için HKO'ları arasındaki fark azdır. Ayrıca n örnek çapı ne olursa olsun, SKÖ tasarımı BTÖ'den daha duyarlı bir örnekleme yöntemi olup, aynı n örnek çapı için m küme çapı arttıkça $GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(X))}$ ve $GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(Y))}$ değerleri de artmıştır.

5. MEDYAN SIRALI KÜME ÖRNEKLEMESİNDE YIĞIN ORTALAMASININ ORANSAL TAHMİNİ

Muttlak (1997) sıralamadaki hata miktarını azaltmak ve tek modlu simetrik dağılımlar için yığın ortalamasının tahmininde etkinliği arttırmak üzere MSKÖ tasarımı önermiştir. Muttlak yaptığı bu çalışmada, normal dağılım gibi tek modlu simetrik dağılımlar için yığın ortalamasını tahmin etmede, MSKÖ'nün SKÖ'den daha etkin sonuçlar verdiğini göstermiştir. Daha sonra Samawi ve Muttlak (2000) MSKÖ kullanarak oran tahminini incelemişlerdir. Bu bölümde yığın ortalamasının MSKÖ ile oransal tahmin edicisi ele alınacaktır.

MSKÖ'de örnek seçim işlemi, Çizelge 3.1'de verilen SKÖ'ye göre örnek seçim işleminde birinci adım aynen uygulanmak üzere, ikinci adımda m 'nin çift ya da tek sayı olmasına göre aşağıdaki gibi gerçekleştirilir.

1. m çift ise; kendi içinde sıralanan m birimlik ilk $(m/2)$ kümeden $(m/2)$ 'nci sıradaki birimler ve kalan $(m/2)$ kümeden $((m/2)+1)$ 'inci sıradaki birimler seçilir.

Örneğe çıkan birimler istenilen hassaslıktaki bir ölçümle ilgilenilen değişken bakımından ölçülür ve m çaplı medyan sıralı küme örneği elde edilir.

Örneğin; Yardımcı değişkene göre sıralama yapılması durumunda $m=6$ ve $r=1$ için MSKÖ tasarımı ile örneğe alınan örnek birimleri Çizelge 5.1'de gösterildiği gibi olacaktır.

Çizelge 5.1. $m=6$ ve $r=1$ için MSKÖ tasarımı ile seçilen örnek birimleri

$(Y_{1[1]}, X_{1(1)})$	$(Y_{1[2]}, X_{1(2)})$	$(Y_{1[3]}, X_{1(3)})$	$(Y_{1[4]}, X_{1(4)})$	$(Y_{1[5]}, X_{1(5)})$	$(Y_{1[6]}, X_{1(6)})$
$(Y_{2[1]}, X_{2(1)})$	$(Y_{2[2]}, X_{2(2)})$	$(Y_{2[3]}, X_{2(3)})$	$(Y_{2[4]}, X_{2(4)})$	$(Y_{2[5]}, X_{2(5)})$	$(Y_{2[6]}, X_{2(6)})$
$(Y_{3[1]}, X_{3(1)})$	$(Y_{3[2]}, X_{3(2)})$	$(Y_{3[3]}, X_{3(3)})$	$(Y_{3[4]}, X_{3(4)})$	$(Y_{3[5]}, X_{3(5)})$	$(Y_{3[6]}, X_{3(6)})$
$(Y_{4[1]}, X_{4(1)})$	$(Y_{4[2]}, X_{4(2)})$	$(Y_{4[3]}, X_{4(3)})$	$(Y_{4[4]}, X_{4(4)})$	$(Y_{4[5]}, X_{4(5)})$	$(Y_{4[6]}, X_{4(6)})$
$(Y_{5[1]}, X_{5(1)})$	$(Y_{5[2]}, X_{5(2)})$	$(Y_{5[3]}, X_{5(3)})$	$(Y_{5[4]}, X_{5(4)})$	$(Y_{5[5]}, X_{5(5)})$	$(Y_{5[6]}, X_{5(6)})$
$(Y_{6[1]}, X_{6(1)})$	$(Y_{6[2]}, X_{6(2)})$	$(Y_{6[3]}, X_{6(3)})$	$(Y_{6[4]}, X_{6(4)})$	$(Y_{6[5]}, X_{6(5)})$	$(Y_{6[6]}, X_{6(6)})$

2. m tek ise; kendi içinde sıralanan birimlerden medyan değerleri örneğe seçilir.

Örneğe çıkan birimler istenilen hassaslıktaki bir ölçümle ilgilenilen değişken bakımından ölçülür ve m çaplı medyan sıralı küme örneği elde edilir.

Örneğin; Yardımcı değişkene göre sıralama yapılması durumunda $m=5$ ve $r=1$ için MSKÖ tasarımı ile örneğe alınan örnek birimleri Çizelge 5.2’de gösterildiği gibi olacaktır.

Çizelge 5.2. $m=5$ ve $r=1$ için MSKÖ tasarımı ile seçilen örnek birimleri

$(Y_{1[1]}, X_{1(1)})$	$(Y_{1[2]}, X_{1(2)})$	$(Y_{1[3]}, X_{1(3)})$	$(Y_{1[4]}, X_{1(4)})$	$(Y_{1[5]}, X_{1(5)})$
$(Y_{2[1]}, X_{2(1)})$	$(Y_{2[2]}, X_{2(2)})$	$(Y_{2[3]}, X_{2(3)})$	$(Y_{2[4]}, X_{2(4)})$	$(Y_{2[5]}, X_{2(5)})$
$(Y_{3[1]}, X_{3(1)})$	$(Y_{3[2]}, X_{3(2)})$	$(Y_{3[3]}, X_{3(3)})$	$(Y_{3[4]}, X_{3(4)})$	$(Y_{3[5]}, X_{3(5)})$
$(Y_{4[1]}, X_{4(1)})$	$(Y_{4[2]}, X_{4(2)})$	$(Y_{4[3]}, X_{4(3)})$	$(Y_{4[4]}, X_{4(4)})$	$(Y_{4[5]}, X_{4(5)})$
$(Y_{5[1]}, X_{5(1)})$	$(Y_{5[2]}, X_{5(2)})$	$(Y_{5[3]}, X_{5(3)})$	$(Y_{5[4]}, X_{5(4)})$	$(Y_{5[5]}, X_{5(5)})$

5.1. X Değişkenine Göre Sıralama

Burada sadece X değişkenine göre sıralama yapıldığını varsayalım. Bu nedenle Y 'nin sıralamasında hatalar oluşurken, X değişkeninin sıralanmasında hata olmayacaktır. Eğer m tek ise; $i=1, \dots, m$ ve $j=1, \dots, r$ olmak üzere, sıralı küme örneği $\{(Y_{1[\frac{m+1}{2}]j}, X_{1(\frac{m+1}{2})j}), (Y_{2[\frac{m+1}{2}]j}, X_{2(\frac{m+1}{2})j}), \dots, (Y_{m[\frac{m+1}{2}]j}, X_{m(\frac{m+1}{2})j})\}$ şeklinde oluşur. Ancak m çift ise; $L=m/2$ olmak üzere, sıralı küme örneği $\{(Y_{1[\frac{m}{2}]j}, X_{1(\frac{m}{2})j}), \dots, (Y_{L[\frac{m}{2}]j}, X_{L(\frac{m}{2})j}), (Y_{L+1[\frac{m+2}{2}]j}, X_{L+1(\frac{m+2}{2})j}), \dots, (Y_{m[\frac{m+2}{2}]j}, X_{m(\frac{m+2}{2})j})\}$ olacaktır. Buna göre yığın oranının MSKÖ altında tahmin edicisi aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$r_{MSKÖ(X)} = \frac{\bar{y}_{MSKÖ(X)}}{\bar{x}_{MSKÖ(X)}}$$

Burada m tek ise;

$$\bar{y}_{MSKÖ(X)} = \frac{1}{mr} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r Y_{i[\frac{m+1}{2}]j}$$

ve

$$\bar{x}_{MSKÖ(X)} = \frac{1}{mr} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r X_{i(\frac{m+1}{2})j}$$

m çift ise;

$$\bar{y}_{MSKÖ(X)} = \frac{1}{mr} \left(\sum_{i=1}^{m/2} \sum_{j=1}^r Y_{i[\frac{m}{2}]j} + \sum_{i'=m/2+1}^m \sum_{j=1}^r Y_{i'[\frac{m+2}{2}]j} \right)$$

ve

$$\bar{x}_{MSKÖ(X)} = \frac{1}{mr} \left(\sum_{i=1}^{m/2} \sum_{j=1}^r X_{i(\frac{m}{2})j} + \sum_{i'=m/2+1}^m \sum_{j=1}^r X_{i'(\frac{m+2}{2})j} \right)$$

olarak tanımlanır (Samawi ve Muttalak, 2000).

$r_{MSK\ddot{O}(X)}$ 'nin yaklaşık HKO; SKÖ'nün klasik tasarımına benzer bir şekilde Eş. (3.2)'den yararlanarak aşağıdaki gibi bulunur;

$$HKO(r_{MSK\ddot{O}(X)}) = R^2(E(e_0^2) + E(e_1^2) - 2E(e_0e_1)) \quad (5.1)$$

Burada,

$$E(e_0^2) = E\left(\frac{(\bar{y}_{MSK\ddot{O}(X)} - \bar{Y})^2}{\bar{Y}^2}\right) = \frac{1}{\bar{Y}^2} E(\bar{y}_{MSK\ddot{O}(X)} - \bar{Y})^2 = \frac{1}{\bar{Y}^2} Var(\bar{y}_{MSK\ddot{O}(X)}) \quad (5.2)$$

$$E(e_1^2) = E\left(\frac{(\bar{x}_{MSK\ddot{O}(X)} - \bar{X})^2}{\bar{X}^2}\right) = \frac{1}{\bar{X}^2} E(\bar{x}_{MSK\ddot{O}(X)} - \bar{X})^2 = \frac{1}{\bar{X}^2} Var(\bar{x}_{MSK\ddot{O}(X)}) \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} E(e_0e_1) &= E\left(\left(\frac{\bar{y}_{MSK\ddot{O}(X)} - \bar{Y}}{\bar{Y}}\right)\left(\frac{\bar{x}_{MSK\ddot{O}(X)} - \bar{X}}{\bar{X}}\right)\right) = \frac{1}{\bar{X}\bar{Y}} E((\bar{y}_{MSK\ddot{O}(X)} - \bar{Y})(\bar{x}_{MSK\ddot{O}(X)} - \bar{X})) \\ &= \frac{1}{\bar{X}\bar{Y}} Kov(\bar{y}_{MSK\ddot{O}(X)}, \bar{x}_{MSK\ddot{O}(X)}) \end{aligned} \quad (5.4)$$

olarak tanımlanır.

Eğer m tek ise;

$$Var(\bar{y}_{MSK\ddot{O}(X)}) = Var\left(\frac{1}{mr} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r Y_{i[\frac{m+1}{2}]j}\right)$$

$$Var(\bar{x}_{MSK\ddot{O}(X)}) = Var\left(\frac{1}{mr} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r X_{i(\frac{m+1}{2})j}\right)$$

$$Kov(\bar{y}_{MSK\ddot{O}(X)}, \bar{x}_{MSK\ddot{O}(X)}) = Kov\left(\frac{1}{mr} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r Y_{i[\frac{m+1}{2}]j}, \frac{1}{mr} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r X_{i(\frac{m+1}{2})j}\right)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\frac{m+1}{2} = k$ olarak tanımlayalım. $Y_{[k]}$ ile $X_{(k)}$ sıra istatistiklerinin bağımsızlık özelliğinden ve

$$Var(Y_{i[k]j}) = Var(Y_{[k]}) = S_{Y_{[k]}}^2$$

$$Var(X_{i(k)j}) = Var(X_{(k)}) = S_{X(k)}^2$$

$$Kov(Y_{i[k]j}, X_{i(k)j}) = Kov(Y_{[k]}, X_{(k)}) = S_{Y[k]X(k)}$$

olduğundan

$$Var(\bar{y}_{MSK\ddot{O}(X)}) = \frac{1}{m^2 r^2} m r S_{Y[k]}^2 = \frac{1}{m r} S_{Y[k]}^2$$

$$Var(\bar{x}_{MSK\ddot{O}(X)}) = \frac{1}{m^2 r^2} m r S_{X(k)}^2 = \frac{1}{m r} S_{X(k)}^2$$

$$Kov(\bar{y}_{MSK\ddot{O}(X)}, \bar{x}_{MSK\ddot{O}(X)}) = \frac{1}{m r} S_{Y[k]X(k)}$$

yazılabilir. Böylece Eş. (5.2), (5.3) ve (5.4) tekrar düzenlenirse,

$$E(e_0^2) = \frac{1}{\bar{Y}^2} \frac{1}{m r} S_{Y[k]}^2$$

$$E(e_1^2) = \frac{1}{\bar{X}^2} \frac{1}{m r} S_{X(k)}^2$$

$$E(e_0 e_1) = \frac{1}{\bar{X} \bar{Y}} \frac{1}{m r} S_{Y[k]X(k)}$$

olarak yazılabilir. Buna göre Eş. (5.1)'deki HKO ifadesi tekrar düzenlenirse;

$$\begin{aligned} HKO(r_{MSK\ddot{O}(X)}) &= R^2 \left[\frac{1}{\bar{Y}^2} \frac{1}{m r} S_{Y[k]}^2 + \frac{1}{\bar{X}^2} \frac{1}{m r} S_{X(k)}^2 - \frac{2}{\bar{X} \bar{Y}} \frac{1}{m r} S_{Y[k]X(k)} \right] \\ &= \frac{R^2}{m r} \left[\frac{S_{X(k)}^2}{\bar{X}^2} + \frac{S_{Y[k]}^2}{\bar{Y}^2} - \frac{2 S_{Y[k]X(k)}}{\bar{X} \bar{Y}} \right] \\ &= \frac{R^2}{m r} \left[\frac{S_{X(k)}^2}{\bar{X}^2} + \frac{S_{Y[k]}^2}{\bar{Y}^2} - \frac{2 S_{Y[k]X(k)}}{\bar{X} \bar{Y}} \right] \end{aligned} \quad (5.5)$$

şeklinde elde edilir.

Yardımcı değişken X 'in yığın ortalaması $\bar{X}$ biliniyorken, $\bar{Y}$ 'nin oransal tahmin edicisi $\bar{y}_{r_{MSK\ddot{O}(X)}}$ 'nin HKO, $\bar{y}_{r_{MSK\ddot{O}(X)}} = r_{MSK\ddot{O}(X)} \bar{X}$ olmak üzere; $HKO(\bar{y}_{r_{MSK\ddot{O}(X)}}) = HKO(r_{MSK\ddot{O}(X)} \bar{X}) = \bar{X}^2 HKO(r_{MSK\ddot{O}(X)})$ olacaktır. Eş. (5.5) kullanılarak

$$HKO(\bar{y}_{r_{MSK\ddot{O}(X)}}) = \bar{X}^2 \frac{R^2}{mr} \left[\frac{S_X^2 \left(\frac{m+1}{2} \right)}{\bar{X}^2} + \frac{S_Y^2 \left[\frac{m+1}{2} \right]}{\bar{Y}^2} - \frac{2S_{Y \left[\frac{m+1}{2} \right] X \left(\frac{m+1}{2} \right)}}{\bar{X}\bar{Y}} \right]$$

olacaktır.

m çift ise;

$$Var(\bar{y}_{MSK\ddot{O}(X)}) = Var\left(\frac{1}{mr} \left(\sum_{i=1}^{m/2} \sum_{j=1}^r Y_{i \left[\frac{m}{2} \right] j} + \sum_{i'=\frac{m}{2}+1}^m \sum_{j=1}^r Y_{i' \left[\frac{m+2}{2} \right] j} \right)\right)$$

$$Var(\bar{x}_{MSK\ddot{O}(X)}) = Var\left(\frac{1}{mr} \left(\sum_{i=1}^{m/2} \sum_{j=1}^r X_{i \left(\frac{m}{2} \right) j} + \sum_{i'=\frac{m}{2}+1}^m \sum_{j=1}^r X_{i' \left(\frac{m+2}{2} \right) j} \right)\right)$$

$$Kov(\bar{y}_{MSK\ddot{O}(X)}, \bar{x}_{MSK\ddot{O}(X)}) = Kov\left(\frac{1}{mr} \left(\sum_{i=1}^{m/2} \sum_{j=1}^r Y_{i \left[\frac{m}{2} \right] j} + \sum_{i'=\frac{m}{2}+1}^m \sum_{j=1}^r Y_{i' \left[\frac{m+2}{2} \right] j} \right), \frac{1}{mr} \left(\sum_{i=1}^{m/2} \sum_{j=1}^r X_{i \left(\frac{m}{2} \right) j} + \sum_{i'=\frac{m}{2}+1}^m \sum_{j=1}^r X_{i' \left(\frac{m+2}{2} \right) j} \right)\right)$$

şeklinde tanımlanır. $Y_{i \left[\frac{m}{2} \right] j}$, $Y_{i' \left[\frac{m+2}{2} \right] j}$, $X_{i \left(\frac{m}{2} \right) j}$, $X_{i' \left(\frac{m+2}{2} \right) j}$ ($i \neq i'$; $i = 1, 2, \dots, m/2$;

$i' = ((m/2)+1, \dots, m)$ sıra istatistiklerinin bağımsızlık özelliğinden ve

$$Var(Y_{i \left[\frac{m}{2} \right] j}) = Var(Y_{\left[\frac{m}{2} \right]}) = S_{Y \left[\frac{m}{2} \right]}^2$$

$$Var(Y_{i' \left[\frac{m+2}{2} \right] j}) = Var(Y_{\left[\frac{m+2}{2} \right]}) = S_{Y \left[\frac{m+2}{2} \right]}^2$$

$$Var(X_{i \left(\frac{m}{2} \right) j}) = Var(X_{\left(\frac{m}{2} \right)}) = S_{X \left(\frac{m}{2} \right)}^2$$

$$\text{Var}(X_{i'(\frac{m}{2})j}) = \text{Var}(X_{(\frac{m}{2})}) = S_{X(\frac{m}{2})}^2$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{y}_{MSK\ddot{O}(X)}) &= \frac{1}{m^2 r^2} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{m/2} \sum_{j=1}^r Y_{i[\frac{m}{2}]j} + \sum_{i'=\frac{m}{2}+1}^m \sum_{j=1}^r Y_{i'[\frac{m+2}{2}]j}\right) \\ &= \frac{1}{m^2 r^2} \left[\frac{m}{2} r S_{Y[\frac{m}{2}]}^2 + m r S_{Y[\frac{m+2}{2}]}^2 \right] \\ &= \frac{mr}{m^2 r^2 2} S_{Y[\frac{m}{2}]}^2 + \frac{mr}{m^2 r^2} S_{Y[\frac{m+2}{2}]}^2 \\ &= \frac{1}{2mr} S_{Y[\frac{m}{2}]}^2 + \frac{1}{mr} S_{Y[\frac{m+2}{2}]}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{x}_{MSK\ddot{O}(X)}) &= \frac{1}{m^2 r^2} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{m/2} \sum_{j=1}^r X_{i(\frac{m}{2})j} + \sum_{i'=\frac{m}{2}+1}^m \sum_{j=1}^r X_{i'(\frac{m+2}{2})j}\right) \\ &= \frac{1}{m^2 r^2} \left[\frac{m}{2} r S_{X(\frac{m}{2})}^2 + m r S_{X(\frac{m+2}{2})}^2 \right] \\ &= \frac{mr}{m^2 r^2 2} S_{X(\frac{m}{2})}^2 + \frac{mr}{m^2 r^2} S_{X(\frac{m+2}{2})}^2 \\ &= \frac{1}{2mr} S_{X(\frac{m}{2})}^2 + \frac{1}{mr} S_{X(\frac{m+2}{2})}^2 \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece Eş. (5.2) ve (5.3) tekrar düzenlenirse,

$$E(e_0^2) = \frac{1}{\bar{y}^2} \left[\frac{1}{2mr} S_{Y[\frac{m}{2}]}^2 + \frac{1}{mr} S_{Y[\frac{m+2}{2}]}^2 \right]$$

$$E(e_1^2) = \frac{1}{\bar{x}^2} \left[\frac{1}{2mr} S_{X(\frac{m}{2})}^2 + \frac{1}{mr} S_{X(\frac{m+2}{2})}^2 \right]$$

olarak bulunur.

$$\begin{aligned}
E(e_0 e_1) &= \frac{1}{\bar{X}\bar{Y}} \text{Kov}(\bar{Y}_{MSK\ddot{O}[X]}, \bar{X}_{MSK\ddot{O}(X)}) \\
&= \frac{1}{\bar{X}\bar{Y}} \left[\text{Kov} \left(\frac{1}{mr} \left(\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} \sum_{j=1}^r Y_{i[\frac{m}{2}]_j}, \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} \sum_{j=1}^r X_{i(\frac{m}{2})_j} \right) \right) + \right. \\
&\quad \text{Kov} \left(\frac{1}{mr} \left(\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} \sum_{j=1}^r Y_{i[\frac{m}{2}]_j}, \sum_{i'=\frac{m}{2}+1}^m \sum_{j=1}^r X_{i'(\frac{m+2}{2})_j} \right) \right) + \\
&\quad \text{Kov} \left(\frac{1}{mr} \left(\sum_{i'=\frac{m}{2}+1}^m \sum_{j=1}^r Y_{i'[\frac{m+2}{2}]_j}, \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} \sum_{j=1}^r X_{i(\frac{m}{2})_j} \right) \right) + \\
&\quad \left. \text{Kov} \left(\frac{1}{mr} \left(\sum_{i'=\frac{m}{2}+1}^m \sum_{j=1}^r Y_{i'[\frac{m+2}{2}]_j}, \sum_{i'=\frac{m}{2}+1}^m \sum_{j=1}^r X_{i'(\frac{m+2}{2})_j} \right) \right) \right]
\end{aligned}$$

X ve Y değişkenleri farklı kümelerden elde edildiğinde sıra istatistikleri bakımından aralarındaki kovaryans sıfır olacağından,

$$\begin{aligned}
E(e_0 e_1) &= \frac{1}{\bar{X}\bar{Y}} \left[\text{Kov} \left(\frac{1}{mr} \left(\sum_{i=1}^{m/2} \sum_{j=1}^r Y_{i[\frac{m}{2}]_j}, \sum_{i=1}^{m/2} \sum_{j=1}^r X_{i(\frac{m}{2})_j} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. \text{Kov} \left(\frac{1}{mr} \left(\sum_{i'=\frac{m}{2}+1}^m \sum_{j=1}^r Y_{i'[\frac{m+2}{2}]_j}, \sum_{i'=\frac{m}{2}+1}^m \sum_{j=1}^r X_{i'(\frac{m+2}{2})_j} \right) \right) \right] \\
&= \frac{1}{\bar{X}\bar{Y}} \left[\frac{1}{m^2 r^2} \frac{m}{2} r S_{X_{(\frac{m}{2})Y_{[\frac{m}{2}]}}} \right] + \frac{1}{\bar{X}\bar{Y}} \left[\frac{1}{m^2 r^2} mr S_{X_{(\frac{m+2}{2})Y_{[\frac{m+2}{2}]}}} \right]
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Buna göre Eş. (5.1)'deki HKO ifadesi tekrar düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
HKO(r_{MSK\ddot{O}(X)}) &= R^2 \left[\frac{1}{\bar{Y}^2} \left[\frac{1}{2mr} S_{Y_{[\frac{m}{2}]}}^2 + \frac{1}{mr} S_{Y_{[\frac{m+2}{2}]}}^2 \right] + \frac{1}{\bar{X}^2} \left[\frac{1}{2mr} S_{X_{(\frac{m}{2})}}^2 + \frac{1}{mr} S_{X_{(\frac{m+2}{2})}}^2 \right] - \right. \\
&\quad \left. \frac{2}{\bar{X}\bar{Y}} \left[\frac{1}{m^2 r^2} \frac{m}{2} r S_{X_{(\frac{m}{2})Y_{[\frac{m}{2}]}}} \right] - \frac{2}{\bar{X}\bar{Y}} \left[\frac{1}{m^2 r^2} mr S_{X_{(\frac{m+2}{2})Y_{[\frac{m+2}{2}]}}} \right] \right] \quad (5.6)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Yardımcı değişken X 'in yığın ortalaması $\bar{X}$ biliniyorken, $\bar{Y}$ 'nin oransal tahmin edicisi $\bar{y}_{r_{MSK\ddot{O}(X)}}$ 'nin HKÖ, $\bar{y}_{r_{MSK\ddot{O}(X)}} = r_{MSK\ddot{O}(X)} \bar{X}$ olmak üzere; $HKO(\bar{y}_{r_{MSK\ddot{O}(X)}}) = HKO(r_{MSK\ddot{O}(X)} \bar{X}) = \bar{X}^2 HKO(r_{MSK\ddot{O}(X)})$ olacaktır. Eş. (5.6) kullanılarak

$$\begin{aligned}
 HKO(\bar{y}_{r_{MSK\ddot{O}(X)}}) &= \bar{X}^2 R^2 \left[\frac{1}{\bar{Y}^2} \left[\frac{1}{2mr} S_{Y_{[\frac{m}{2}]}}^2 + \frac{1}{mr} S_{Y_{[\frac{m+2}{2}]}}^2 \right] + \frac{1}{\bar{X}^2} \left[\frac{1}{2mr} S_{X_{(\frac{m}{2})}}^2 + \frac{1}{mr} S_{X_{(\frac{m+2}{2})}}^2 \right] - \right. \\
 &\quad \left. \frac{2}{\bar{X}\bar{Y}} \left[\frac{1}{m^2 r^2} \frac{m}{2} r S_{X_{(\frac{m}{2})} Y_{[\frac{m}{2}]}} \right] - \frac{2}{\bar{X}\bar{Y}} \left[\frac{1}{m^2 r^2} mr S_{X_{(\frac{m+2}{2})} Y_{[\frac{m+2}{2}]}} \right] \right] \\
 &= \frac{\bar{X}^2 R^2}{mr} \left[\frac{1}{\bar{Y}^2} \left[\frac{1}{2} S_{Y_{[\frac{m}{2}]}}^2 + S_{Y_{[\frac{m+2}{2}]}}^2 \right] + \frac{1}{\bar{X}^2} \left[\frac{1}{2} S_{X_{(\frac{m}{2})}}^2 + S_{X_{(\frac{m+2}{2})}}^2 \right] - \frac{1}{\bar{X}\bar{Y}} \left[S_{X_{(\frac{m}{2})} Y_{[\frac{m}{2}]}} - 2 S_{X_{(\frac{m+2}{2})} Y_{[\frac{m+2}{2}]}} \right] \right] \\
 (5.7)
 \end{aligned}$$

olacaktır.

5.2. Y Değişkenine Göre Sıralama

Y değişkenine göre sıralama yapıldığında elde edilecek sıralı küme örneği, m tek ise; $\{(Y_{1(\frac{m+1}{2})j}, X_{1[\frac{m+1}{2}]j}), (Y_{2(\frac{m+1}{2})j}, X_{2[\frac{m+1}{2}]j}), \dots, (Y_{m(\frac{m+1}{2})j}, X_{m[\frac{m+1}{2}]j})\}$ şeklinde, m çift ise; $\{(Y_{1(\frac{m}{2})j}, X_{1[\frac{m}{2}]j}), \dots, (Y_{L(\frac{m}{2})j}, X_{L[\frac{m}{2}]j}), (Y_{L+1(\frac{m+2}{2})j}, X_{L+1[\frac{m+2}{2}]j}), \dots, (Y_{m(\frac{m+2}{2})j}, X_{m[\frac{m+2}{2}]j})\}$ şeklinde oluşur. Yığın oranının MSKÖ altında tahmin edicisi aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$r_{MSK\ddot{O}(Y)} = \frac{\bar{y}_{MSK\ddot{O}(Y)}}{\bar{x}_{MSK\ddot{O}(Y)}}$$

Burada m tek ise;

$$\bar{y}_{MSK\ddot{O}(Y)} = \frac{1}{mr} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r Y_{i(\frac{m+1}{2})j}$$

ve

$$\bar{x}_{MSK\ddot{O}(Y)} = \frac{1}{mr} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r X_{i[\frac{m+1}{2}]j}$$

m çift ise;

$$\bar{y}_{MSK\ddot{O}(Y)} = \frac{1}{mr} \left(\sum_{i=1}^{m/2} \sum_{j=1}^r Y_{i(\frac{m}{2})j} + \sum_{i=\frac{m}{2}+1}^m \sum_{j=1}^r Y_{i(\frac{m+2}{2})j} \right)$$

ve

$$\bar{x}_{MSK\ddot{O}(Y)} = \frac{1}{mr} \left(\sum_{i=1}^{m/2} \sum_{j=1}^r X_{i[\frac{m}{2}]j} + \sum_{i=\frac{m}{2}+1}^m \sum_{j=1}^r X_{i[\frac{m+2}{2}]j} \right)$$

olarak tanımlanır (Samawi ve Muttalak, 2000).

$r_{MSK\ddot{O}(Y)}$ 'nin yaklaşık HKÖ; SKÖ'nün klasik tasarımına benzer bir şekilde Eş. (3.15)'den yararlanarak aşağıdaki gibi bulunur;

$$HKO(r_{MSK\ddot{O}(Y)}) = R^2(E(e_0^2) + E(e_1^2) - 2E(e_0e_1)) \quad (5.8)$$

Burada,

$$E(e_0^2) = E \left(\frac{(\bar{y}_{MSK\ddot{O}(Y)} - \bar{Y})^2}{\bar{Y}^2} \right) = \frac{1}{\bar{Y}^2} E(\bar{y}_{MSK\ddot{O}(Y)} - \bar{Y})^2 = \frac{1}{\bar{Y}^2} Var(\bar{y}_{MSK\ddot{O}(Y)}) \quad (5.9)$$

$$E(e_1^2) = E \left(\frac{(\bar{x}_{MSK\ddot{O}(Y)} - \bar{X})^2}{\bar{X}^2} \right) = \frac{1}{\bar{X}^2} E(\bar{x}_{MSK\ddot{O}(Y)} - \bar{X})^2 = \frac{1}{\bar{X}^2} Var(\bar{x}_{MSK\ddot{O}(Y)}) \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} E(e_0e_1) &= E \left(\left(\frac{\bar{y}_{MSK\ddot{O}(Y)} - \bar{Y}}{\bar{Y}} \right) \left(\frac{\bar{x}_{MSK\ddot{O}(Y)} - \bar{X}}{\bar{X}} \right) \right) = \frac{1}{\bar{X}\bar{Y}} E \left((\bar{y}_{MSK\ddot{O}(Y)} - \bar{Y})(\bar{x}_{MSK\ddot{O}(Y)} - \bar{X}) \right) \\ &= \frac{1}{\bar{X}\bar{Y}} Kov(\bar{y}_{MSK\ddot{O}(Y)}, \bar{x}_{MSK\ddot{O}(Y)}) \end{aligned} \quad (5.11)$$

olarak tanımlanır.

Eğer m tek ise;

$$Var(\bar{y}_{MSK\ddot{O}(Y)}) = Var\left(\frac{1}{mr} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r Y_{i(\frac{m+1}{2})j}\right)$$

$$Var(\bar{x}_{MSK\ddot{O}(Y)}) = Var\left(\frac{1}{mr} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r X_{i[\frac{m+1}{2}]j}\right)$$

$$Kov(\bar{y}_{MSK\ddot{O}(Y)}, \bar{x}_{MSK\ddot{O}(Y)}) = Kov\left(\frac{1}{mr} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r Y_{i(\frac{m+1}{2})j}, \frac{1}{mr} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r X_{i[\frac{m+1}{2}]j}\right)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\frac{m+1}{2} = k$ olarak tanımlayalım. $X_{[k]}$ ile $Y_{(k)}$ sıra istatistiklerinin bağımsızlık özelliğinden ve

$$Var(Y_{i(k)j}) = Var(Y_{(k)}) = S_{Y_{(k)}}^2$$

$$Var(X_{i[k]j}) = Var(X_{[k]}) = S_{X_{[k]}}^2$$

$$Kov(Y_{i(k)j}, X_{i[k]j}) = Kov(Y_{(k)}, X_{[k]}) = S_{Y_{(k)}X_{[k]}}$$

olduğundan

$$Var(\bar{y}_{MSK\ddot{O}(Y)}) = \frac{1}{m^2 r^2} mr S_{Y_{(k)}}^2 = \frac{1}{mr} S_{Y_{(k)}}^2$$

$$Var(\bar{x}_{MSK\ddot{O}(Y)}) = \frac{1}{m^2 r^2} mr S_{X_{[k]}}^2 = \frac{1}{mr} S_{X_{[k]}}^2$$

$$Kov(\bar{y}_{MSK\ddot{O}(Y)}, \bar{x}_{MSK\ddot{O}(Y)}) = \frac{1}{mr} S_{Y_{(k)}X_{[k]}}$$

yazılabilir. Böylece Eş. (5.9) ve (5.10) tekrar düzenlenirse,

$$E(e_0^2) = \frac{1}{\bar{Y}^2} \frac{1}{mr} S_{Y_{(k)}}^2$$

$$E(e_1^2) = \frac{1}{\bar{X}^2} \frac{1}{mr} S_{X_{[k]}}^2$$

$$E(e_0 e_1) = \frac{1}{\bar{X}\bar{Y}} \frac{1}{mr} S_{Y(k)X[k]}$$

olarak yazılabilir. Buna göre Eş. (5.8)'deki HKO ifadesi tekrar düzenlenirse;

$$\begin{aligned} HKO(r_{MSK\ddot{O}(Y)}) &= R^2 \left[\frac{1}{\bar{Y}^2} \frac{1}{mr} S_{Y(k)}^2 + \frac{1}{\bar{X}^2} \frac{1}{mr} S_{X[k]}^2 - \frac{2}{\bar{X}\bar{Y}} \frac{1}{mr} S_{X[k]Y(k)} \right] \\ &= \frac{R^2}{mr} \left[\frac{S_{X[k]}^2}{\bar{X}^2} + \frac{S_{Y(k)}^2}{\bar{Y}^2} - \frac{2S_{X[k]Y(k)}}{\bar{X}\bar{Y}} \right] \\ &= \frac{R^2}{mr} \left[\frac{S_{X[\frac{m+1}{2}]}^2}{\bar{X}^2} + \frac{S_{Y(\frac{m+1}{2})}^2}{\bar{Y}^2} - \frac{2S_{X[\frac{m+1}{2}]Y(\frac{m+1}{2})}}{\bar{X}\bar{Y}} \right] \end{aligned} \quad (5.12)$$

şeklinde elde edilir.

Yardımcı değişken X 'in yığın ortalaması $\bar{X}$ biliniyorken, $\bar{Y}$ 'nin oransal tahmin edicisi $\bar{y}_{r_{MSK\ddot{O}(Y)}}$ 'nın HKO, $\bar{y}_{r_{MSK\ddot{O}(Y)}} = r_{MSK\ddot{O}(Y)} \bar{X}$ olmak üzere; $HKO(\bar{y}_{r_{MSK\ddot{O}(Y)})} = HKO(r_{MSK\ddot{O}(Y)} \bar{X}) = \bar{X}^2 HKO(r_{MSK\ddot{O}(Y)})$ olacaktır. Eş. (5.12) kullanılarak

$$HKO(\bar{y}_{r_{MSK\ddot{O}(Y)})} = \bar{X}^2 \frac{R^2}{mr} \left[\frac{S_{X[\frac{m+1}{2}]}^2}{\bar{X}^2} + \frac{S_{Y(\frac{m+1}{2})}^2}{\bar{Y}^2} - \frac{2S_{X[\frac{m+1}{2}]Y(\frac{m+1}{2})}}{\bar{X}\bar{Y}} \right]$$

olacaktır.

m çift ise;

$$Var(\bar{y}_{MSK\ddot{O}(Y)}) = Var\left(\frac{1}{mr} \left(\sum_{i=1}^{m/2} \sum_{j=1}^r Y_{i(\frac{m}{2})j} + \sum_{i'=\frac{m}{2}+1}^m \sum_{j=1}^r Y_{i'(\frac{m+2}{2})j} \right)\right)$$

$$Var(\bar{x}_{MSK\ddot{O}(Y)}) = Var\left(\frac{1}{mr} \left(\sum_{i=1}^{m/2} \sum_{j=1}^r X_{i[\frac{m}{2}]j} + \sum_{i'=\frac{m}{2}+1}^m \sum_{j=1}^r X_{i'[\frac{m+2}{2}]j} \right)\right)$$

$$Kov(\bar{y}_{MSK\ddot{O}(Y)}, \bar{x}_{MSK\ddot{O}(Y)}) = Kov\left(\frac{1}{mr}\left(\sum_{i=1}^{m/2} \sum_{j=1}^r Y_{i(\frac{m}{2})j} + \sum_{i'=\frac{m}{2}+1}^m \sum_{j=1}^r Y_{i'(\frac{m+2}{2})j}\right), \frac{1}{mr}\left(\sum_{i=1}^{m/2} \sum_{j=1}^r X_{i[\frac{m}{2}]j} + \sum_{i'=\frac{m}{2}+1}^m \sum_{j=1}^r X_{i'[\frac{m+2}{2}]j}\right)\right)$$

şeklinde tanımlanır. $X_{i[\frac{m}{2}]j}$, $X_{i'[\frac{m+2}{2}]j}$, $Y_{i(\frac{m}{2})j}$, $Y_{i'(\frac{m+2}{2})j}$ ($i \neq i'$; $i = 1, 2, \dots, m/2$; $i' = ((m/2)+1, \dots, m)$) sıra istatistiklerinin bağımsızlık özelliğinden ve

$$Var(Y_{i(\frac{m}{2})j}) = Var(Y_{(\frac{m}{2})}) = S_{Y(\frac{m}{2})}^2$$

$$Var(Y_{i'(\frac{m}{2})j}) = Var(Y_{(\frac{m}{2})}) = S_{Y(\frac{m}{2})}^2$$

$$Var(X_{i[\frac{m}{2}]j}) = Var(X_{[\frac{m}{2}]}) = S_{X[\frac{m}{2}]}^2$$

$$Var(X_{i'[\frac{m+2}{2}]j}) = Var(X_{[\frac{m+2}{2}]}) = S_{X[\frac{m+2}{2}]}^2$$

olduğundan

$$\begin{aligned} Var(\bar{y}_{MSK\ddot{O}(Y)}) &= \frac{1}{m^2 r^2} Var\left(\sum_{i=1}^{m/2} \sum_{j=1}^r Y_{i(\frac{m}{2})j} + \sum_{i'=\frac{m}{2}+1}^m \sum_{j=1}^r Y_{i'(\frac{m+2}{2})j}\right) \\ &= \frac{1}{m^2 r^2} \left[\frac{m}{2} r S_{Y(\frac{m}{2})}^2 + m r S_{Y(\frac{m+2}{2})}^2 \right] \\ &= \frac{mr}{m^2 r^2} S_{Y(\frac{m}{2})}^2 + \frac{mr}{m^2 r^2} S_{Y(\frac{m+2}{2})}^2 \\ &= \frac{1}{2mr} S_{Y(\frac{m}{2})}^2 + \frac{1}{mr} S_{Y(\frac{m+2}{2})}^2 \end{aligned}$$

$$Var(\bar{x}_{MSK\ddot{O}(Y)}) = \frac{1}{m^2 r^2} Var\left(\sum_{i=1}^{m/2} \sum_{j=1}^r X_{i[\frac{m}{2}]j} + \sum_{i'=\frac{m}{2}+1}^m \sum_{j=1}^r X_{i'[\frac{m+2}{2}]j}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{m^2 r^2} \left[\frac{m}{2} r S_{X_{[\frac{m}{2}]}}^2 + m r S_{X_{[\frac{m+2}{2}]}}^2 \right] \\
&= \frac{mr}{m^2 r^2} S_{X_{[\frac{m}{2}]}}^2 + \frac{mr}{m^2 r^2} S_{X_{[\frac{m+2}{2}]}}^2 \\
&= \frac{1}{2mr} S_{X_{[\frac{m}{2}]}}^2 + \frac{1}{mr} S_{X_{[\frac{m+2}{2}]}}^2
\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece Eş. (5.9) ve (5.10) tekrar düzenlenirse,

$$E(e_0^2) = \frac{1}{\bar{Y}^2} \left[\frac{1}{2mr} S_{Y_{(\frac{m}{2})}}^2 + \frac{1}{mr} S_{Y_{(\frac{m+2}{2})}}^2 \right]$$

$$E(e_1^2) = \frac{1}{\bar{Y}^2} \left[\frac{1}{2mr} S_{X_{[\frac{m}{2}]}}^2 + \frac{1}{mr} S_{X_{[\frac{m+2}{2}]}}^2 \right]$$

olarak bulunur.

$$\begin{aligned}
E(e_0 e_1) &= \frac{1}{\bar{X}\bar{Y}} Kov(\bar{Y}_{MSK\ddot{O}(Y)}, \bar{X}_{MSK\ddot{O}[Y]}) \\
&= \frac{1}{\bar{X}\bar{Y}} \left[Kov \left(\frac{1}{mr} \left(\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} \sum_{j=1}^r Y_{i(\frac{m}{2})_j}, \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} \sum_{j=1}^r X_{i[\frac{m}{2}]_j} \right) \right) + \right. \\
&\quad Kov \left(\frac{1}{mr} \left(\sum_{i'=\frac{m}{2}+1}^m \sum_{j=1}^r Y_{i'(\frac{m+2}{2})_j}, \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} \sum_{j=1}^r X_{i[\frac{m}{2}]_j} \right) \right) + \\
&\quad Kov \left(\frac{1}{mr} \left(\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} \sum_{j=1}^r Y_{i(\frac{m}{2})_j}, \sum_{i'=\frac{m}{2}+1}^m \sum_{j=1}^r X_{i'[\frac{m+2}{2}]_j} \right) \right) + \\
&\quad \left. Kov \left(\frac{1}{mr} \left(\sum_{i'=\frac{m}{2}+1}^m \sum_{j=1}^r Y_{i'(\frac{m+2}{2})_j}, \sum_{i'=\frac{m}{2}+1}^m \sum_{j=1}^r X_{i'[\frac{m+2}{2}]_j} \right) \right) \right]
\end{aligned}$$

X ve Y değişkenleri farklı kümelerden elde edildiğinde sıra istatistikleri bakımından aralarındaki kovaryans sıfır olacağından,

$$\begin{aligned}
E(e_0 e_1) &= \frac{1}{\bar{X}\bar{Y}} \left[Kov \left(\frac{1}{mr} \left(\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} \sum_{j=1}^r Y_{i(\frac{m}{2})j}, \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} \sum_{j=1}^r X_{i[\frac{m}{2}]j} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. Kov \left(\frac{1}{mr} \left(\sum_{i'=\frac{m}{2}+1}^m \sum_{j=1}^r Y_{i'(\frac{m+2}{2})j}, \sum_{i'=\frac{m}{2}+1}^m \sum_{j=1}^r X_{i'[\frac{m+2}{2}]j} \right) \right) \right] \\
&= \frac{1}{\bar{X}\bar{Y}} \left[\frac{1}{m^2 r^2} \frac{m}{2} r S_{X_{[\frac{m}{2}]Y(\frac{m}{2})}} \right] + \frac{1}{\bar{X}\bar{Y}} \left[\frac{1}{m^2 r^2} mr S_{X_{[\frac{m+2}{2}]Y(\frac{m+2}{2})}} \right]
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Buna göre Eş. (5.8)'deki HKO ifadesi tekrar düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
HKO(r_{MSK\ddot{O}(Y)}) &= R^2 \left[\frac{1}{\bar{Y}^2} \left[\frac{1}{2mr} S_{Y(\frac{m}{2})}^2 + \frac{1}{mr} S_{Y(\frac{m+2}{2})}^2 \right] + \frac{1}{\bar{X}^2} \left[\frac{1}{2mr} S_{X_{[\frac{m}{2}]}^2} + \frac{1}{mr} S_{X_{[\frac{m+2}{2}]}^2} \right] - \right. \\
&\quad \left. \frac{2}{\bar{X}\bar{Y}} \left[\frac{1}{m^2 r^2} \frac{m}{2} r S_{X_{[\frac{m}{2}]Y(\frac{m}{2})}} \right] - \frac{2}{\bar{X}\bar{Y}} \left[\frac{1}{m^2 r^2} mr S_{X_{[\frac{m+2}{2}]Y(\frac{m+2}{2})}} \right] \right] \quad (5.13)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Yardımcı değişken X 'in yığın ortalaması $\bar{X}$ biliniyorken, $\bar{Y}$ 'nin oransal tahmin edicisi $\bar{y}_{r_{MSK\ddot{O}(Y)}}$ 'nin HKO, $\bar{y}_{r_{MSK\ddot{O}(Y)}} = r_{MSK\ddot{O}(Y)} \bar{X}$ olmak üzere; $HKO(\bar{y}_{r_{MSK\ddot{O}(Y)})} = HKO(r_{MSK\ddot{O}(Y)} \bar{X}) = \bar{X}^2 HKO(r_{MSK\ddot{O}(Y)})$ olacaktır. Eş. (5.13) kullanılarak

$$\begin{aligned}
HKO(\bar{y}_{r_{MSK\ddot{O}(Y)})} &= \bar{X}^2 R^2 \left[\frac{1}{\bar{Y}^2} \left[\frac{1}{2mr} S_{Y(\frac{m}{2})}^2 + \frac{1}{mr} S_{Y(\frac{m+2}{2})}^2 \right] + \frac{1}{\bar{X}^2} \left[\frac{1}{2mr} S_{X_{[\frac{m}{2}]}^2} + \frac{1}{mr} S_{X_{[\frac{m+2}{2}]}^2} \right] - \right. \\
&\quad \left. \frac{2}{\bar{X}\bar{Y}} \left[\frac{1}{m^2 r^2} \frac{m}{2} r S_{X_{[\frac{m}{2}]Y(\frac{m}{2})}} \right] - \frac{2}{\bar{X}\bar{Y}} \left[\frac{1}{m^2 r^2} mr S_{X_{[\frac{m+2}{2}]Y(\frac{m+2}{2})}} \right] \right] \\
&= \frac{\bar{X}^2 R^2}{mr} \left[\frac{1}{\bar{Y}^2} \left[\frac{1}{2} S_{Y(\frac{m}{2})}^2 + S_{Y(\frac{m+2}{2})}^2 \right] + \frac{1}{\bar{X}^2} \left[\frac{1}{2} S_{X_{[\frac{m}{2}]}^2} + S_{X_{[\frac{m+2}{2}]}^2} \right] - \frac{1}{\bar{X}\bar{Y}} \left[S_{X_{[\frac{m}{2}]Y(\frac{m}{2})}} - 2S_{X_{[\frac{m+2}{2}]Y(\frac{m+2}{2})}} \right] \right] \quad (5.14)
\end{aligned}$$

olacaktır. Eş. (5.7) ve Eş. (5.14)'den görüldüğü gibi MSKÖ'ye göre yığın ortalamasının oransal tahmin edicisinin BTÖ veya SKÖ'ye göre hangi durumlarda daha iyi sonuçlar verdiği açık biçimde görülememektedir. Bu nedenle bir sonraki bölümde simülasyon çalışması yapılarak farklı durumlar için MSKÖ'ye göre oransal tahmin edicinin BTÖ'ye göre etkinliği incelenmiştir.

6. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Simülasyon çalışmasında öncelikle ilgilenilen değişken Y ile yardımcı değişken X için iki değişkenli normal dağılımdan veriler üretilmiştir. Bu verilere göre, SKÖ ve MSKÖ tasarımlarında hem ilgilenilen değişkene göre hem de yardımcı değişkene göre sıralama yapılması durumunda yığın ortalamasının oransal tahmin edicileri bulunmuştur. Ayrıca BTÖ'ye göre oransal tahmin edici elde edilmiştir. Daha sonra bu oransal tahmin edicileri karşılaştırmak için, Monte Carlo simülasyon çalışması ile tahmin edicilerin oransal sapma (OS) ve HKO'ları elde edilerek, GE değerleri hesaplanmıştır.

Tahmin edicinin OS'si;

BTÖ için

$$OS_{(BTÖ)} = \frac{E(\bar{y}_{r_{BTÖ}}) - \bar{Y}}{\bar{Y}}$$

SKÖ'de X ve Y değişkenine göre sıralama için sırasıyla

$$OS_{(SKÖ(X))} = \frac{E(\bar{y}_{r_{SKÖ(X)}}) - \bar{Y}}{\bar{Y}}$$

$$OS_{(SKÖ(Y))} = \frac{E(\bar{y}_{r_{SKÖ(Y)}}) - \bar{Y}}{\bar{Y}}$$

MSKÖ'de X ve Y değişkenine göre sıralama için sırasıyla

$$OS_{(MSKÖ(X))} = \frac{E(\bar{y}_{r_{MSKÖ(X)}}) - \bar{Y}}{\bar{Y}}$$

$$OS_{(MSKÖ(Y))} = \frac{E(\bar{y}_{r_{MSKÖ(Y)}}) - \bar{Y}}{\bar{Y}}$$

şeklinde tanımlanır.

Monte Carlo simülasyon çalışması için örnek çapı $m = 3, 4, 5, 6, 9, 10$ ve tekrar sayısı $r=1$ olarak alınmıştır. Aynı zamanda korelasyon katsayısı $\rho = 0,50; 0,60; 0,70; 0,80; 0,90; 0,99$ olarak alınmıştır. Ayrıca X ve Y değişkenleri için değişim katsayıları $C_x=0,005$, $C_y=0,1$ ve $C_x=C_y=0,05$ olarak alınmıştır. Böylece $C_x < C_y$ ve $C_x = C_y$ durumları incelenmiştir. Simülasyon çalışması 600 000 kez tekrar edilmiştir.

X ve Y değişkenleri iki değişkenli normal dağılımdan üretilmiştir. Üretilen veriden OS, HKO ve GE değerleri hesaplanmıştır. SKÖ için GE değerleri elde edilirken Eş. (4.1) ve Eş. (4.2) formülleri kullanılmıştır. Ayrıca MSKÖ için GE değerleri de aynı eşitliklerde $HKO(\bar{y}_{r_{SKÖ(X)}})$ ve $HKO(\bar{y}_{r_{SKÖ(Y)}})$ ifadeleri yerine sırasıyla $HKO(\bar{y}_{r_{MSKÖ(X)}})$ ve $HKO(\bar{y}_{r_{MSKÖ(Y)}})$ değerleri konularak elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar SKÖ için Çizelge 6.1 ve 6.2’de; MSKÖ için Çizelge 6.3 ve 6.4’de verilmiştir.

Çizelge 6.1. SKÖ’de $C_x < C_y$ iken $GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(X))}$ ve $GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(Y))}$ değerleri

ρ		n =3	n =4	n=5	n=6	n=9	n=10
0,99	$OS_{(BT\ddot{O})}$	-0,0001	-0,0002	0,0000	0,0000	-0,0006	0,0000
	$OS_{(SK\ddot{O}(X))}$	-0,0001	-0,0001	-0,0001	-0,0001	0,0000	0,0000
	$OS_{(SK\ddot{O}(Y))}$	-0,0001	-0,0001	0,0000	-0,0001	0,0000	0,0000
	$GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(X))}$	1,8701	2,2652	2,6647	3,0123	4,1947	4,5590
	$GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(Y))}$	1,9071	2,3397	2,7690	3,1657	4,5573	4,9363
0,90	$OS_{(BT\ddot{O})}$	-0,0002	-0,0001	-0,0001	0,0000	0,0000	-0,0001
	$OS_{(SK\ddot{O}(X))}$	-0,0002	-0,0001	-0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	$OS_{(SK\ddot{O}(Y))}$	-0,0001	-0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	$GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(X))}$	1,7187	2,0002	2,2449	2,3661	2,9102	3,0795
	$GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(Y))}$	1,9135	2,3562	2,7614	3,1181	4,4288	4,8785
0,80	$OS_{(BT\ddot{O})}$	-0,0002	0,0000	0,0000	-0,0001	-0,0001	-0,0001
	$OS_{(SK\ddot{O}(X))}$	-0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	$OS_{(SK\ddot{O}(Y))}$	-0,0001	-0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	$GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(X))}$	1,5738	1,7566	1,9379	2,0531	2,2558	2,4713
	$GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(Y))}$	1,9055	2,3448	2,7647	3,1356	4,4428	4,8716
0,70	$OS_{(BT\ddot{O})}$	-0,0001	-0,0001	0,0000	-0,0001	0,0000	-0,0001
	$OS_{(SK\ddot{O}(X))}$	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0002	0,0000	-0,0001
	$OS_{(SK\ddot{O}(Y))}$	0,0000	-0,0001	0,0000	-0,0001	0,0000	0,0000
	$GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(X))}$	1,4869	1,6086	1,7199	1,7916	1,8960	2,0170
	$GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(Y))}$	1,9096	2,3387	2,7489	3,1396	4,4126	4,8503
0,60	$OS_{(BT\ddot{O})}$	-0,0001	-0,0002	-0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	$OS_{(SK\ddot{O}(X))}$	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0001	0,0000	-0,0001
	$OS_{(SK\ddot{O}(Y))}$	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0001	0,0000	0,0000
	$GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(X))}$	1,3997	1,4673	1,5481	1,6147	1,6664	1,7286
	$GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(Y))}$	1,9090	2,3381	2,7567	3,1384	4,3894	4,8197
0,50	$OS_{(BT\ddot{O})}$	-0,0001	0,0000	-0,0001	0,0000	0,0001	0,0000
	$OS_{(SK\ddot{O}(X))}$	0,0000	0,0000	-0,0001	-0,0002	0,0000	0,0000
	$OS_{(SK\ddot{O}(Y))}$	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0001	0,0000	0,0000
	$GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(X))}$	1,3329	1,3739	1,4420	1,4868	1,5034	1,5478
	$GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(Y))}$	1,9128	2,3412	2,7514	3,1412	4,4069	4,7847

- ❖ Çizelge 6.1'den görüldüğü gibi, aynı ρ korelasyon katsayısı için n değeri arttıkça $GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(X))}$ ve $GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(Y))}$ değerleri de artmaktadır. Ancak her durumda $GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(X))} < GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(Y))}$ olduğu görülmektedir. X ile Y değişkenleri arasındaki korelasyon katsayısı 0,50'ye yaklaştıkça, n değeri artarken $GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(X))}$ değerinin artış hızı $GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(Y))}$ 'den daha düşüktür.
- ❖ Korelasyon katsayısı azaldıkça ve örnek çapı arttıkça $GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(X))}$ ve $GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(Y))}$ değerleri arasındaki fark artmaktadır.
- ❖ Aynı örnek çapında tüm ρ değerleri için $GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(Y))}$ değerleri birbirine yakın değer almaktadır. Örneğin; $n=3$ olduğunda $\rho=0,99$ iken $GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(Y))}=1,9071$ değerini alırken, $\rho=0,50$ iken $GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(Y))}=1,9128$ değerini almaktadır. Buna göre, $GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(Y))}$ değerlerinin ρ 'nun değerinden etkilenmediği söylenebilir.
- ❖ OS değerlerine bakıldığında, genel olarak tüm durumlarda sıfıra yakın değerler aldıkları görülmektedir.

Çizelge 6.2. SKÖ’de $C_x = C_y$ iken $GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(X))}$ ve $GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(Y))}$ değerleri

ρ		n =3	n =4	n=5	n=6	n=9	n=10
0,99	$OS_{(BT\ddot{O})}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	$OS_{(SK\ddot{O}(X))}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	$OS_{(SK\ddot{O}(Y))}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	$GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(X))}$	0,9953	1,0032	0,9961	0,9979	1,0031	0,9969
	$GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(Y))}$	1,0011	0,9997	0,9983	1,0000	0,9973	1,0038
0,90	$OS_{(BT\ddot{O})}$	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000
	$OS_{(SK\ddot{O}(X))}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	$OS_{(SK\ddot{O}(Y))}$	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000
	$GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(X))}$	1,0363	1,0162	1,0429	1,0328	1,0225	1,0272
	$GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(Y))}$	1,0141	1,0320	1,0183	1,0346	1,0476	1,0313
0,80	$OS_{(BT\ddot{O})}$	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0001
	$OS_{(SK\ddot{O}(X))}$	0,0001	0,0000	0,0000	0,0004	0,0000	0,0000
	$OS_{(SK\ddot{O}(Y))}$	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
	$GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(X))}$	1,0376	1,0492	1,0468	1,0569	1,0666	1,0502
	$GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(Y))}$	1,0486	1,0659	1,0705	1,0656	1,0768	1,0834
0,70	$OS_{(BT\ddot{O})}$	0,0003	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001
	$OS_{(SK\ddot{O}(X))}$	0,0002	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	$OS_{(SK\ddot{O}(Y))}$	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0001	0,0001
	$GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(X))}$	1,0626	1,0832	1,0941	1,0774	1,1224	1,1095
	$GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(Y))}$	1,0635	1,0839	1,0923	1,0881	1,0947	1,1060
0,60	$OS_{(BT\ddot{O})}$	0,0004	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
	$OS_{(SK\ddot{O}(X))}$	0,0002	0,0001	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000
	$OS_{(SK\ddot{O}(Y))}$	0,0004	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
	$GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(X))}$	1,0908	1,1000	1,1162	1,1050	1,1603	1,1665
	$GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(Y))}$	1,0743	1,1269	1,1111	1,1452	1,1430	1,1332
0,50	$OS_{(BT\ddot{O})}$	0,0004	0,0003	0,0003	0,0002	0,0001	0,0001
	$OS_{(SK\ddot{O}(X))}$	0,0003	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000
	$OS_{(SK\ddot{O}(Y))}$	0,0005	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002
	$GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(X))}$	1,1062	1,1109	1,1428	1,1360	1,1916	1,2027
	$GE_{(BT\ddot{O},SK\ddot{O}(Y))}$	1,1029	1,1527	1,1399	1,1867	1,1719	1,1702

- ❖ Çizelge 6.2'den görüldüğü gibi, korelasyon katsayısı $\rho=0,99$ olduğunda $GE_{(BT\ddot{o},SK\ddot{o}(X))}$ ve $GE_{(BT\ddot{o},SK\ddot{o}(Y))}$ değerleri yaklaşık olarak 1 olmaktadır. Bu durumda SKÖ(X), SKÖ(Y) ve BTÖ tasarımları aynı etkinliğe sahip olacaktır.
- ❖ Korelasyon katsayısı azaldıkça ve n örnek çapı değeri arttıkça $GE_{(BT\ddot{o},SK\ddot{o}(X))}$ ve $GE_{(BT\ddot{o},SK\ddot{o}(Y))}$ değerleri artmaktadır. Örneğin; $\rho=0,50$ iken, $n=3$ olduğunda $GE_{(BT\ddot{o},SK\ddot{o}(X))}=1,1062$ ve $GE_{(BT\ddot{o},SK\ddot{o}(Y))}=1,1029$ iken; $n=10$ olduğunda $GE_{(BT\ddot{o},SK\ddot{o}(X))}=1,2027$ ve $GE_{(BT\ddot{o},SK\ddot{o}(Y))}=1,1702$ olmaktadır.
- ❖ Ayrıca OS değerleri de 0'a yakın çıkmıştır.

Çizelge 6.3. MSKÖ’de $C_x < C_y$ iken $GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(X))}$ ve $GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(Y))}$ değerleri

ρ		n =3	n =4	n=5	n=6	n=9	n=10
0,99	$OS_{(BT\ddot{O})}$	-0,0001	-0,0002	0,0000	0,0000	-0,0001	0,0000
	$OS_{(MSK\ddot{O}(X))}$	0,0004	-0,0002	0,0019	-0,0007	-0,0006	0,0008
	$OS_{(MSK\ddot{O}(Y))}$	0,0004	-0,0002	0,0020	-0,0007	-0,0007	0,0009
	$GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(X))}$	2,1916	2,6525	3,2080	3,8195	4,7939	5,1553
	$GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(Y))}$	2,2508	2,7672	3,3874	4,0939	5,3423	5,7312
0,90	$OS_{(BT\ddot{O})}$	-0,0002	-0,0001	-0,0001	0,0000	0,0000	-0,0001
	$OS_{(MSK\ddot{O}(X))}$	0,0002	0,0015	0,0010	0,0008	0,0023	0,0023
	$OS_{(MSK\ddot{O}(Y))}$	0,0002	0,0011	0,0003	0,0002	0,0011	0,0023
	$GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(X))}$	1,9260	2,1938	2,6100	2,9189	3,1126	3,2651
	$GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(Y))}$	2,2166	2,7115	3,4608	4,2524	5,7175	5,8814
0,80	$OS_{(BT\ddot{O})}$	-0,0002	0,0000	0,0000	-0,0001	-0,0001	-0,0001
	$OS_{(MSK\ddot{O}(X))}$	-0,0012	-0,0002	0,0015	0,0002	0,0020	-0,0007
	$OS_{(MSK\ddot{O}(Y))}$	-0,0013	-0,0001	-0,0008	-0,0003	-0,0001	0,0001
	$GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(X))}$	1,7649	1,9275	2,1765	2,3058	2,4449	2,5841
	$GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(Y))}$	2,2374	2,7724	3,4587	4,1891	5,7608	6,0169
0,70	$OS_{(BT\ddot{O})}$	-0,0001	-0,0001	0,0000	-0,0001	0,0000	-0,0001
	$OS_{(MSK\ddot{O}(X))}$	-0,0019	0,0010	-0,0010	-0,0005	-0,0011	0,0010
	$OS_{(MSK\ddot{O}(Y))}$	-0,0005	-0,0004	0,0001	0,0004	0,0018	-0,0011
	$GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(X))}$	1,5953	1,7406	1,9186	1,9897	2,0595	2,0858
	$GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(Y))}$	2,2247	2,7916	3,5056	4,2053	5,7974	6,1715
0,60	$OS_{(BT\ddot{O})}$	-0,0001	-0,0002	-0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	$OS_{(MSK\ddot{O}(X))}$	0,0010	-0,0001	0,0001	0,0018	0,0002	-0,0004
	$OS_{(MSK\ddot{O}(Y))}$	0,0002	-0,0002	0,0001	-0,0003	-0,0010	0,0007
	$GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(X))}$	1,4922	1,5671	1,6409	1,7009	1,7530	1,7807
	$GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(Y))}$	2,2343	2,7884	3,4760	4,1821	5,8881	6,2842
0,50	$OS_{(BT\ddot{O})}$	-0,0001	0,0000	-0,0001	0,0000	-0,0001	0,0000
	$OS_{(MSK\ddot{O}(X))}$	0,0014	-0,0005	-0,0006	-0,0009	-0,0027	0,0036
	$OS_{(MSK\ddot{O}(Y))}$	0,0002	0,0018	-0,0003	-0,0006	0,0016	-0,0010
	$GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(X))}$	1,3934	1,4386	1,4971	1,5347	1,5663	1,6083
	$GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(Y))}$	2,2126	2,7669	3,5006	4,1691	5,8413	6,3238

- ❖ Çizelge 6.3'den görüldüğü gibi, aynı ρ korelasyon katsayısı için n değeri arttıkça $GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(X))}$ ve $GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(Y))}$ değerleri de artmaktadır. Ancak her durumda $GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(X))} < GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(Y))}$ olmaktadır. X ile Y değişkenleri arasındaki korelasyon katsayısı 0,50'ye yaklaştıkça, n değeri artarken $GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(X))}$ değerinin artış hızı $GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(Y))}$ 'den daha düşüktür.
- ❖ Korelasyon katsayısı azaldıkça ve örnek çapı arttıkça $GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(X))}$ ve $GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(Y))}$ değerleri arasındaki fark artmaktadır.
- ❖ Aynı örnek çapında tüm ρ değerleri için $GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(Y))}$ değerleri birbirine yakın değer almaktadır. Örneğin; $n=4$ olduğunda $\rho=0,99$ iken $GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(Y))}=2,7672$ değerini alırken, $\rho=0,50$ iken $GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(Y))}=2,7669$ değerini almaktadır. Buna göre, $GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(Y))}$ değerlerinin ρ 'nun değerinden etkilenmediği söylenebilir.
- ❖ Ayrıca $C_x < C_y$ iken; MSKÖ'den elde edilen GE değerleri, aynı örnek çapı ve ρ değerleri için SKÖ tasarımından elde edilen GE değerlerinden büyük çıkmaktadır.
- ❖ OS değerleri tüm durumlarda sifıra yakın değer almaktadır.

Çizelge 6.4. MSKÖ'de $C_x = C_y$ iken $GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(X))}$ ve $GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(Y))}$ değerleri

ρ		n =3	n =4	n=5	n=6	n=9	n=10
0,99	$OS_{(BT\ddot{O})}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	$OS_{(MSK\ddot{O}(X))}$	0,0000	-0,0002	-0,0001	0,0000	0,0000	0,0001
	$OS_{(MSK\ddot{O}(Y))}$	0,0001	-0,0002	-0,0002	0,0005	0,0006	0,0001
	$GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(X))}$	0,9937	0,9606	0,9397	0,9939	0,9950	1,0584
	$GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(Y))}$	0,9930	0,9700	0,9588	0,9962	0,9538	1,0185
0,90	$OS_{(BT\ddot{O})}$	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000
	$OS_{(MSK\ddot{O}(X))}$	0,0006	-0,0001	0,0001	0,0010	0,0003	0,0004
	$OS_{(MSK\ddot{O}(Y))}$	0,0003	-0,0002	-0,0003	0,0008	-0,0001	0,0009
	$GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(X))}$	1,0586	0,9834	1,0089	0,9821	1,0623	1,0249
	$GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(Y))}$	1,0164	1,0611	1,0362	1,0904	1,0208	0,9907
0,80	$OS_{(BT\ddot{O})}$	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0001
	$OS_{(MSK\ddot{O}(X))}$	0,0001	0,0006	-0,0009	0,0007	0,0000	-0,0004
	$OS_{(MSK\ddot{O}(Y))}$	-0,0006	0,0002	0,0002	0,0006	-0,0001	-0,0005
	$GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(X))}$	1,0435	1,0494	1,0580	1,0197	1,0937	1,0431
	$GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(Y))}$	1,0415	1,0989	1,1021	1,0606	1,0395	1,0873
0,70	$OS_{(BT\ddot{O})}$	0,0003	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001
	$OS_{(MSK\ddot{O}(X))}$	0,0007	-0,0004	0,0010	-0,0007	0,0017	-0,0002
	$OS_{(MSK\ddot{O}(Y))}$	0,0008	0,0004	0,0007	0,0006	-0,0001	0,0005
	$GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(X))}$	1,0805	1,1115	1,0628	1,0903	1,1392	1,0972
	$GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(Y))}$	1,0744	1,1038	1,0917	1,0488	1,0775	1,0672
0,60	$OS_{(BT\ddot{O})}$	0,0004	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
	$OS_{(MSK\ddot{O}(X))}$	-0,0009	0,0008	0,0013	-0,0001	0,0002	-0,0010
	$OS_{(MSK\ddot{O}(Y))}$	0,0013	-0,0004	-0,0011	-0,0006	0,0001	0,0005
	$GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(X))}$	1,1330	1,1167	1,0720	1,1039	1,1684	1,1456
	$GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(Y))}$	1,0822	1,1503	1,1325	1,1261	1,1106	1,0930
0,50	$OS_{(BT\ddot{O})}$	0,0004	0,0003	0,0003	0,0002	0,0001	0,0001
	$OS_{(MSK\ddot{O}(X))}$	0,0009	-0,0011	0,0002	0,0023	-0,0009	-0,0013
	$OS_{(MSK\ddot{O}(Y))}$	0,0005	0,0011	-0,0002	-0,0015	0,0006	-0,0001
	$GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(X))}$	1,1387	1,1201	1,1362	1,1449	1,1882	1,1771
	$GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(Y))}$	1,1152	1,1745	1,1500	1,1663	1,1439	1,1488

- ❖ Çizelge 6.4'den görüldüğü gibi, korelasyon katsayısı $\rho=0,99$ olduğunda; $GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(X))}$ ve $GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(Y))}$ değerleri yaklaşık olarak 1 olmaktadır. Bu durumda MSKÖ(X), MSKÖ(Y) ve BTÖ tasarımları aynı etkinliğe sahip olacaktır.
- ❖ Korelasyon katsayısı azaldıkça ve n örnek çapı değeri arttıkça $GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(X))}$ ve $GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(Y))}$ değerleri artmaktadır. Örneğin; $\rho=0,50$ iken, $n=3$ olduğunda $GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(X))}=1,1387$ ve $GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(Y))}=1,1152$ iken; $n=10$ olduğunda $GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(X))}=1,1771$ ve $GE_{(BT\ddot{O},MSK\ddot{O}(Y))}=1,1488$ olmaktadır.
- ❖ Ayrıca OS değerleri de 0'a yakın çıkmıştır.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

İstatistiksel çalışmalarda, üzerinde araştırma yapılacak bir yığın hakkında tüm birimlerden bilgi toplamaya çalışmak genellikle imkansızdır. Bu nedenle ele aldığımız yığını en iyi şekilde temsil edebilecek örneğin seçilmesi önemlidir. Bu örnek birimlerinin seçiminde ise, uygun bir örnekleme tasarımının kullanılmasına ihtiyaç duyulmaktadır. Bu ihtiyaca yönelik olarak bu çalışmada; BTÖ, SKÖ ve MSKÖ tasarımları ele alınmıştır.

İki değişken arasındaki korelasyon katsayısı 0,5’den büyük olduğu zaman, BTÖ’de oransal tahmin edici bilinen örnek ortalaması istatistiğinden daha etkin bir tahmin edici olacaktır. Bu çalışmada; hem yardımcı değişken X ’e göre hem de ilgilenilen değişken Y ’ye göre sıralama yapılması durumunda SKÖ ve MSKÖ tasarımında oransal tahmin edici ele alınarak, bu tasarımların BTÖ’ye göre etkinlikleri incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında, öncelikle SKÖ’de yığın ortalamasının oransal tahmini için gerekli teorik formüller elde edilmiştir. Ayrıca normal dağılım varsayımı altında sıra istatistiklerinin özellikleri kullanılarak HKO’ları için formüller türetilmiştir. Daha sonra elde edilen teorik formüllerin kullanımını göstermek amacıyla, Elazığ Keban Baraj Gölü’nde yaşayan 167 balık türünün boy ve ağırlık verisi kullanılarak bir uygulama yapılmıştır. Çalışmada balık boyu (mm) (X) ve balık ağırlığı (gr) (Y) alınarak, $n=6$ ve $n=10$ için farklı m ve r değerlerinde oransal tahmin edicilerin HKO’ları elde edilmiştir. Bu uygulamanın sonucunda, n örnek çapı ne olursa olsun, SKÖ tasarımının BTÖ’den daha etkin bir örnekleme yöntemi olduğu ortaya çıkmıştır. Ayrıca aynı n örnek çapı için m küme çapı arttıkça $GE_{(BTÖ,SKÖ(X))}$ ve $GE_{(BTÖ,SKÖ(Y))}$ değerlerinin de arttığı görülmüştür. Bunun yanında teorik olarak elde edilen sonuçlara paralel olarak, Y değişkenine göre sıralama yapılması durumunda $GE_{(BTÖ,SKÖ(Y))}$ değerlerinin, X değişkenine göre sıralama yapılması durumunda elde edilecek $GE_{(BTÖ,SKÖ(X))}$ değerlerinden daha yüksek olduğu görülmüştür.

SKÖ’nün klasik tasarımına alternatif olarak MSKÖ tasarımı da incelenmiştir. MSKÖ tasarımında da hem yardımcı değişkene göre hem de ilgilenilen değişkene göre sıralama yapılması durumu ele alınarak; yığın ortalamasının oransal tahmini incelenmiştir.

Son olarak; BTÖ, SKÖ ve MSKÖ tasarımlarının etkinliklerini karşılaştırabilmek için simülasyon çalışması yapılmıştır. Simülasyon çalışmasından elde edilen sonuçlara göre $C_x < C_y$ iken; SKÖ’de elde edilen $GE_{(BTÖ,SKÖ(Y))}$ değerleri $GE_{(BTÖ,SKÖ(X))}$ değerlerinden büyük çıkmıştır. Benzer şekilde MSKÖ’de elde edilen $GE_{(BTÖ,MSKÖ(Y))}$ değerleri de $GE_{(BTÖ,MSKÖ(X))}$ değerlerinden büyük çıkmıştır. Ayrıca SKÖ’de ve MSKÖ’de hem X ’e göre hem de Y ’ye göre sıralama yaptığımızda, BTÖ’den daha etkin sonuçlar elde edilmiştir. Ancak $C_x < C_y$ iken MSKÖ’den elde edilen GE değerleri, SKÖ tasarımından elde edilen GE değerlerinden büyük çıkmıştır.

$C_x = C_y$ iken ise; X ve Y değişkenleri arasındaki ilişki arttıkça SKÖ, MSKÖ ve BTÖ tasarımlarının etkinlikleri birbirine yaklaşmıştır. Bu nedenle $C_x = C_y$ iken X ve Y değişkenleri arasındaki ilişkinin derecesine dikkat etmek gerekmektedir. Ayrıca tüm durumlarda OS değerleri 0’a yakın çıkmıştır.

Sonuç olarak, SKÖ ve MSKÖ yöntemlerinin, yığın ortalamasının oransal tahmin edicilerini elde etmek açısından BTÖ’ye göre daha etkin örnekleme yöntemleri oldukları görülmüştür. Bunun yanında ilerleyen çalışmalarda SKÖ’nün farklı tasarımlarında ve farklı dağılımlar altında yığın ortalamasının oransal tahmini incelenebilir. Böylece hangi dağılım ve tasarım altında oransal tahminin daha etkin olduğu tespit edilebilir.

KAYNAKLAR

1. Al-Nasser, A. D. (2007). L ranked set sampling: A generalization procedure for robust visual sampling. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 36, 33-43.
2. Al-Omari, A. I., Jaber, K. and Al-Omari, A. (2008). Modified ratio-type estimators of the mean using extreme ranked set sampling. *Journal of Mathematics and Statistics*, 4(3), 150-155.
3. Al-Omari, A. I., Jemain, A. A. and Ibrahim, K. (2009). New ratio estimators of the mean using simple random sampling and ranked set sampling methods. *Investigación Operacional*, 30(2), 97-108.
4. Al-Omari, A. I. (2012). Ratio estimation of the population mean using auxiliary information in simple random sampling and median ranked set sampling. *Statistics and Probability Letters*, 82(11), 1883-1890.
5. Al-Saleh, M. F. and Al Kadiri, M. A. (2000). Double ranked set sampling. *Statistics and Probability Letters*, 48(2), 205-212.
6. Al-Saleh M. F. and Al-Omari, A. I. (2002). Multistage ranked set sampling. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 102, 273-286.
7. Arnold, B., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N. (1993). *A First Course in Order Statistics*. New York: John Wiley, 1-107.
8. Bhoj, D. S. and Ahsanullah, M. (1996). Estimation of parameters of the generalized geometric distribution using ranked set sampling. *Biometrics*, 52, 685-694.
9. Bütün, S. (2013). *Keban Baraj Gölü'nde Yaşayan Alburnus Mossulensis Heckel, 1843'de Otolit Biyometrisi*, Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ, 4-30.
10. Chen, Z. (2000). On ranked set sample quantiles and their application. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 83, 125-135.
11. Çıngı, H. (2009). *Örnekleme Kuramı* (Üçüncü Baskı). Ankara: Bizim Büro Basımevi, 349-354.
12. Ganeslingam, S. and Ganesh, S. (2006). Ranked set sampling versus simple random sampling in the estimation of the mean and the ratio. *Journal of Statistics and Management Systems*, 9(2), 459-472.
13. Jemain, A. A. and Al-Omari, A. I. (2006). Multistage median ranked set samples for estimating the population mean. *Pakistan Journal of Statistics*, 22, 195-207.
14. Kadılar, C., Ünyazıcı, Y. ve Çıngı, H. (2009). Ratio estimator for the population mean using ranked set sampling. *Statistical Papers*, 50(2), 301-309.

15. Lam, K., Sinha, B. K. and Wu, Z. (1994). Estimation of parameters in two parameter exponential distribution using ranked set sample. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 46, 723-736.
16. McIntyre, G. A. (1952). A method of unbiased selective sampling using ranked sets, *Australian Journal of Agricultural Research*, 3, 385-390.
17. Muttlak, H. A. (1997). Median ranked set sampling. *Applied Statistical Science*, 6(4), 245-255.
18. Muttlak, H. A. (2003). Modified ranked set sampling methods. *Pak. J. Statist.*, 19(3), 315-323.
19. Özdemir, Y. A. (2005a). *Sıralı Küme Örneklemesiyle Doğrusal Regresyon Modelinde Parametre Tahminlerinin İncelenmesi*, Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 1-25.
20. Özdemir, Y. A. (2005b). Sıralı küme örneklemesinde yardımcı değişken kullanılarak yığın ortalamasının tahmini. *İstatistik Araştırma Dergisi*, 4, 1-13.
21. Özdemir, Y. A., Tekin, S. T. Ş., Esin, A. (2015). *Çözümlü Örneklerle Örneklem Yöntemlerine Giriş* (Birinci Baskı). Ankara: Seçkin Yayınevi, 419-442.
22. Patil, G. P., Sinha, A. K. and Taillie, C. (1994). *Ranked Set Sampling*. A Handbook of Statistics, Elsevier Science B. V., 12, 167-200.
23. Samawi, H. M. and Muttlak, H. A. (1996). Estimation of ratio using rank set sampling. *Biometrical Journal*, 38(6), 753-764.
24. Samawi, H. M., Ahmed, M. S. and Abu-Dayyeh, W. (1996). Estimation the population mean using extreme ranked set sampling. *Biometrical Journal*, 38(5), 577-586.
25. Samawi, H. M. and Muttlak, H. A. (2000). On ratio estimation using median ranked set sampling. *Journal of Applied Statistical Science*, 10(2), 89-98.
26. Shen, W. H. (1994). On estimation of a log-normal mean using a ranked set sample. *Sankhya*, 54, B, 323-333.
27. Singh, H. P., Tailor, R. and Singh, S. (2014). General procedure for estimating the population mean using ranked set sampling. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 84(5), 931-945.
28. Sinha, Bimal. K., Sinha, Bikas. K. and Purkayastha, S. (1996). On some aspects of ranked set sampling for estimation of normal and exponential parameters. *Statistical Decisions*, 14, 223-240.
29. Stokes, L. S. (1977). Ranked set sampling with concomitant variables. *Commun. Statist. Theor. Meth.*, A6(12), 1207-1211.

EKLER

EK-1. Standart normal dağılıma ilişkin sıra istatistiklerinin beklenen değer ve varyansları

m	$E(Z_{(i)}) = \eta_i = -\eta_{m-i+1} (i=1,2,\dots,m/2)$	$Var(Z_{(i)}) = \tau_i = \tau_{m-i+1} (i=1,2,\dots,(m+1)/2)$
2	-0,564190	0,681690
3	-0,846284	0,559467; 0,448671
4	-1,029375; -0,297011	0,491715; 0,360455
5	-1,162964; -0,495019	0,447534; 0,311519; 0,286834
6	-1,267206; -0,641755; -0,201547	0,415927; 0,279578; 0,246213
7	-1,352178; -0,757374; -0,352707	0,391918; 0,256733; 0,219722; 0,210447
8	-1,423600; -0,852225; -0,472822; -0,152514	0,372897; 0,239401; 0,200769; 0,187186
9	-1,485013; -0,932297; -0,571971; -0,274526	0,357353; 0,225697; 0,186383; 0,170559; 0,166101
10	-1,538753; -1,001357; -0,656059; -0,375765; -0,122668	0,344344; 0,214524; 0,175003; 0,157939; 0,151054

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ESEN, Merve
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 10.08.1992, Ankara
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0 (538) 294 88 91
e-mail : merve.esen@gazi.edu.tr



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi /İstatistik	Devam Ediyor
Lisans	Gazi Üniversitesi /Ekonometri	2015
Lisans	Gazi Üniversitesi /İstatistik	2014
Lise	Etlik Lisesi	2010

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Yürüyüş yapmak, yüzmek



GAZİ GELECEKTİR..