



SINIR KOŞULLU DIRAC SİSTEMİ İÇİN LEVINSON FORMÜLÜ

SümeYra KAYHAN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

TEMMUZ 2021

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Sümeyra KAYHAN

02/07/2021

SINIR KOŞULLU DIRAC SİSTEMİ İÇİN LEVINSON FORMÜLÜ

(Yüksek Lisans Tezi)

Sümeyra KAYHAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2021

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde ana konu ile ilgili temel kavram ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölüm dört kısımdan oluşmaktadır. Bu bölümde sınır koşullu Dirac sistemi ele alınmıştır. Bu sistemin Jost çözümleri ile Jost Fonksiyonları bulunmuş ve Jost Fonksiyonlarının özellikleri incelenmiştir. Buna ek olarak, ele alınan sistemin saçılım fonksiyonu ve saçılım fonksiyonunun özellikleri bulunmuştur. Son kısımda ise bu sisteme ait Levinson Formülü elde edilmiştir. Son bölümde ise önceki bölümde elde edilen sonuç ve öneriler verilmiştir.

Bilim Kodu : 20404
Anahtar Kelimeler : Dirac sistemi, Jost çözümü, Jost Fonksiyonu, Saçılım fonksiyonu, Levinson Formülü
Sayfa Adedi : 43
Danışman : Prof. Dr. Esra KIR ARPAT

LEVINSON FORMULA FOR DIRAC SYSTEM WITH BOUNDARY CONDITION
(M. Sc. Thesis)

Sümeýra KAYHAN

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
July 2021

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, some basic concepts and theorems related to main topic are given. The third chapter is composed of four sections. In this chapter, Dirac system with boundary condition is considered. The Jost solutions and Jost Functions of this system are found and the properties of Jost Functions are investigated. In addition, the scattering function of this system and the properties of the scattering function are found. In the last section, the Levinson Formula of this problem is obtained. In the last chapter, the results and recommendations obtained in the previous section are given.

Science Code : 20404

Key Words : Dirac system, Jost solution, Jost Function, Scattering function, Levinson Formula

Page Number : 43

Supervisor : Assist. Prof. Dr. Esra KIR ARPAT

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim süresince desteğini benden esirgemeyen, sevgi ve hoşgörüsü ile insani ve ahlaki olarak bana yol gösteren, çok kıymetli bilgileri ile ufkumu aydınlatan çok kıymetli hocam ve danışmanım Prof. Dr. Esra KIR ARPAT' a ve eğitim hayatım boyunca sabır ve desteklerini benden esirgemeyen aileme, özellikle çok değerli annem Şerif KAYHAN' a sevgi, saygı ile teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
3. SINIR KOŞULLU DIRAC SİSTEMİ	9
3.1. Dirac Sisteminin Jost Çözümleri	11
3.2. Dirac Sisteminin Jost Fonksiyonları	20
3.3. Dirac Sisteminin Saçılım Fonksiyonu ve Özellikleri.....	28
3.4. Dirac Sistemi İçin Levinson Formülü	32
4. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	39
KAYNAKLAR	41
ÖZGEÇMİŞ	43

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

 $\mathbb{R}$

Gerçel sayılar kümesi

 $\mathbb{R}^-$

Negatif gerçel sayılar kümesi

 $\mathbb{R}^+$

Pozitif gerçel sayılar kümesi

 $\mathbb{C}$

Kompleks sayılar kümesi

 $\bar{\mathbb{C}}_+$

Kapalı üst-yarı düzlem

 $\bar{\mathbb{C}}_-$

Kapalı alt-yarı düzlem

 $Im(\lambda)$

λ sayısının sanal kısmı

 $Re(\lambda)$

λ sayısının gerçel kısmı

 $arg(e(\lambda))$

$e(\lambda)$ sayısının argümenti

 $L_2(0, \infty; \mathbb{C}_2)$

Karesi integrallenebilir fonksiyonların uzayı

1. GİRİŞ

Fizikte maddenin yapısında önemli rolü olan saçılım problemleri ve problemlerin analizi, matematiksel fiziğin önemli bir araştırma konusudur. Bu problemler ile ilgili ilk çalışmalar sürekli Schrödinger denklemleri için incelenmiştir [1, 2]. Marchenko 1986 yılında reel değerli q fonksiyonu için $L_2(0, \infty)$ uzayında tanımlı sınır koşuluna sahip Sturm-Liouville denklemini detaylı olarak incelemiştir. Bu sınır değer problemine ait Jost Fonksiyonunu $e(\lambda)$ olarak göstermiştir. Jost Fonksiyonunun açık üst düzlemde sonlu adette basit sıfırları olduğunu ispatlamıştır. Ayrıca incelenen problemin saçılım fonksiyonu, Jost Fonksiyonunun eşleniğinin Jost Fonksiyonuna oranı ile tarif edilip, $S(\lambda)$ şeklinde gösterilmiştir. Kaynaklarda $\lambda \in \mathbb{R}$ için, saçılım fonksiyonu, Jost Fonksiyonunun açık üst düzlemdeki sıfırları ve Jost Fonksiyonunun sıfırlarının normları ile elde edilen küme, problemin saçılım verileri olarak adlandırılmaktadır. Potansiyel fonksiyonu verilerek saçılım verilerinin elde edilmesi ve bu saçılım verilerinin özelliklerinin araştırılması saçılım teorisinde düz problem olarak adlandırılırken tersine olarak saçılım verilerine göre potansiyel fonksiyonun elde edilmesi ters problem olarak isimlendirilir. Sturm-Liouville, Schrödinger ve Dirac denklemleri için sürekli ve diskre durumlarda, düz ve ters saçılım problemlerini kapsayan bir çok çalışma mevcuttur [3, 4]. Marchenko, ters problem için çok önemli olan Levinson Formülünü Sturm-Liouville problemi için ispatlamıştır. Bulunan saçılım verileri Levinson Formülünü sağladığında, tek bir q potansiyel fonksiyonunun varlığı elde edilebilir.

Bu çalışmada $L_2(0, \infty, \mathbb{C}_2)$ uzayında

$$iu_1'(x, \lambda) + q_1(x)u_2(x, \lambda) = \lambda u_1(x, \lambda)$$

$$-iu_2'(x, \lambda) + q_2(x)u_1(x, \lambda) = \lambda u_2(x, \lambda) \quad , \quad x \in [0, \infty)$$

diferansiyel denklem sistemi ve

$$u_2(0, \lambda) - u_1(0, \lambda) = 0$$

sınır koşulu ile tanımlanan Dirac sistemi gözönüne alınmıştır. Burada. $q_i, i = 1, 2$ potansiyel fonksiyonları

$$|q_i(x)| \leq ce^{-\varepsilon\sqrt{x}} \quad , \quad c > 0 \quad , \quad \varepsilon > 0 \quad , \quad i = 1, 2$$

koşulunu sağlayan reel değerli fonksiyonlardır.

Bu sistemin Jost çözümleri ve Jost Fonksiyonları elde edilip, Jost Fonksiyonlarının özellikleri elde edilmiştir. Ayrıca problemin saçılım fonksiyonu tanımlanarak saçılım

fonksiyonunun özellikleri incelenmiştir. Son olarak Levinson Formülü elde edilmiştir. Saçılım verilerinin, denklemin veya problemin saçılım verilerinin kümesini meydana getirebilmesi için Levinson Formülünü gerçeklemesi gerekir.

Guseinov yarım eksen ve tüm ekseninde bir boyutlu diskre Schrödinger denklemi için ters saçılım probleminin çözümünün bulunabilmesi için gerek ve yeter şartları vermiştir [5].

[6, 7] çalışmalarında sınır koşulunda kuadratik spektral parametre barındıran sınır değer problemlerine ait Levinson Formülünü vermişlerdir.

Diğer yandan, E. Bairamov, Y. Aygar ve D. Karşlıoğlu çalışmalarında [8] diskre Schrödinger denkleminin spektrumunu incelemiş ve saçılım teorisini yapmışlardır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1. (Lineer Uzay)

L boş olmayan bir cümle ve $\mathbb{K}$, reel veya kompleks sayılar cismi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye $\mathbb{K}$ üzerinde lineer uzay (veya vektör uzayı) denir.

A) L , $+$ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

G1) Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir (kapalılık özelliği).

G2) Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir (birleşme özelliği).

G3) Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır (özdeş elemanın varlığı).

G4) Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır (ters elemanın varlığı).

G5) Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir (değişme özelliği).

B) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

L1) $\alpha \cdot x \in L$ dir (skalerle çarpmaya göre kapalılık).

L2) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ dir.

L3) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ dir.

L4) $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta x)$ dir.

L5) $1 \cdot x = x$ dir (Burada 1, $\mathbb{K}$ nın birim elemanıdır) [9].

Tanım 2.2.

Eğer V , $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) ise, V uzayına reel lineer uzay (vektör uzayı); eğer, $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) ise de V uzayına, kompleks lineer uzay (vektör uzayı) adı verilir [3].

Tanım 2.3.

H , $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzay olsun.

$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ fonksiyonu

$$1. \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$2. \langle ax, y \rangle = a \langle x, y \rangle \quad (a \in \mathbb{K})$$

$$3. \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$4. \langle x, x \rangle \geq 0; \langle x, x \rangle \geq 0$$

şartlarını sağlıyorsa bu fonksiyona iç çarpım (veya iç çarpım fonksiyonu) denir. Üzerinde iç çarpım fonksiyonunun tanımlandığı vektör uzayına iç çarpım uzayı denir. İç çarpım uzayı $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ veya kısaca H ile gösterilir [9].

Tanım 2.4.

H , bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\| : H \rightarrow \mathbb{R}$

fonksiyonunun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için

$$1. \|x\| \geq 0; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$2. \|ax\| = |a|\|x\| \quad (a \in \mathbb{K})$$

$$3. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{Üçgen eşitsizliği})$$

şartları sağlanıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna H de (veya H üzerinde) norm denir. Normlu uzaylar genellikle $(H, \|\cdot\|)$ ile gösterilir [9].

Tanım 2.5.

Herhangi bir vektör uzayı ya da normlu uzay üzerinde tanımlı olan dönüşümlere operatör adı verilir [10].

Tanım 2.6.

L ve L' aynı bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $T: L \rightarrow L'$ operatörü her $x, y \in L$, $a \in \mathbb{K}$ için

$$1. T(x + y) = T(x) + T(y)$$

$$2. T(ax) = aT(x)$$

şartlarını sağlıyorsa T ye lineer operatör denir [9].

Tanım 2.7.

H Hilbert uzayı ve L bu uzayda lineer operatör olmak üzere L nin tanım kümesi $D(L)$ şeklinde gösterilir. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi, X topolojik vektör uzayı, $L(X)$, X de tanımlı lineer operatörlerin uzayı olsun.

$L \in L(X)$ ve $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ için

$$(L - \lambda_0 I)x = 0$$

denkleminin $x = 0$ aşıkâr çözümünden başka bir $x \neq 0$ çözümü bulunursa, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ sayısına L operatörünün özdeğeri, bu denklemin her bir $x \neq 0$ çözümüne ise L operatörünün λ_0 özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu denir [11].

Tanım 2.8.

$A \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

ise f fonksiyonuna a noktasında süreklidır denir. Eğer f fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise fonksiyon A üzerinde süreklidır denir [12].

Tanım 2.9.

$$L_1(0, \infty) = \left\{ f : \int_0^{\infty} |f(x)| dx < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanan $L_1(0, \infty)$ uzayı üzerindeki iç çarpım ve norm $f, g \in L_1(0, \infty)$ için sırasıyla

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx \quad \text{ve}$$

$$\|f(x)\| := \int_0^{\infty} |f(x)| dx$$

olarak tanımlanır. Burada, keyfî bir $f \in L_1(0, \infty)$ fonksiyonu reel değışkenli, ancak kompleks değeri bir fonksiyondur [10].

Tanım 2.10.

$$L_2(0, \infty) = \left\{ f : \int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanan $L_2(0, \infty)$ uzayı üzerindeki iç çarpım ve norm, $f, g \in L_2(0, \infty)$ için sırasıyla

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx \quad \text{ve}$$

$$\|f(x)\| := \left\{ \int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

olarak tanımlanır. Burada, keyfi bir $f \in L_2(0, \infty)$ fonksiyonu reel değişkenli, ancak kompleks değerli bir fonksiyondur [10].

Tanım 2.11.

Bir $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının ε – komşuluğu,

$$D(z_0, \varepsilon) = \{z : |z - z_0| \leq \varepsilon\}$$

olarak tanımlanan kümedir. Buradaki z_0 noktasına komşuluğun merkezi, ε sayısına da komşuluğun yarıçapı denir [13].

Tanım 2.12.

Bir f karmaşık fonksiyonu bir z_0 noktasının belli bir $D(z_0, \delta)$ komşuluğundaki bütün noktalarda diferensiyellenebiliyorsa f , z_0 da analitiktir, denir. Eğer bir f karmaşık fonksiyonu bir S kümesinin bütün noktalarında analitikse, f , S üzerinde analitiktir, denir [13].

Tanım 2.13.

$f \in L_1(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

olarak tanımlanan g fonksiyonuna f fonksiyonunun Fourier dönüşümü denir ve

$$g(\lambda) = F(f)(\lambda)$$

olarak gösterilir. Eğer $g \in L_1(\mathbb{R})$ ise

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$$

dönüşümüne ters Fourier dönüşümü denir ve F^{-1} ile gösterilir [3].

Teorem 2.1. (Riemann-Lebesgue Teoremi)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu ölçülebilir olsun. Eğer $f, [a, b]$ üzerinde integrallenebilir ise,

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx = 0$$

olur. İntegrasyon aralığı sınırsız olabilir [14].

Teorem 2.2. (Lebesgue Yakınsaklık Toremı)

(X, A, μ) bir ölçü uzay, $g : X \rightarrow [0, \infty]$

integrallenebilen bir fonksiyon ve $f, f_1, f_2, \dots$ de X üzerinde A - ölçülebilir $[-\infty, \infty]$ - değerli fonksiyonlar olsun. Eğer hemen hemen her x için

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|f_n(x)| \leq g(x)$

ise f ve f_n fonksiyonları integrallenebilirdir ve

$$\lim \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

olur [15].

Tanım 2.14.

a) $[a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde bir eğri denir. Burada $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitiş noktaları denir.

b) Bir γ eğrisi verildiğinde $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ eğrisine kapalı eğridir, denir

c) Bir γ eğrisi sadece $t_1 = t_2$ için $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ oluyorsa basit eğridir, denir. Bazen basit eğrilere Jordan eğrisi de denir. γ basit bir eğri ve $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise basit kapalı eğri (kapalı Jordan eğrisi) denir.

d) Bir γ eğrisi verildiğinde γ' türevi var ve sürekli ise γ diferensiyellenebilir eğri (yay) diye adlandırılır.

e) γ diferensiyellenebilir bir eğri olsun. Eğer $\gamma'(t) \neq 0$ ise γ eğrisine düzgün eğri (regüler eğri) denir [13].

Teorem 2.3.

Eğer f bir B bölgesinin içinde analitikse ve sınırında sıfır olmuyorsa, B deki sıfır yerlerinin sayısı sonludur [13].

Teorem 2.4.

f , bir B bölgesinde analitik fonksiyon, γ ise B de bulunan ve f nin hiçbir sıfır yerinden geçmeyen basit kapalı eğri olsun. f nin γ nin iç kısmındaki sıfır yerleri $z_1, z_2, \dots, z_n$ ve katlılıkları da sırasıyla $m_1, m_2, \dots, m_n$ ise

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^n m_i$$

eşitliği sağlanır [13].

Teorem 2.5. (Argüment Prensibi)

f , bir B bölgesinde analitik fonksiyon, γ ise B de bulunan ve f nin hiçbir sıfır yeri ve kutup yerinden geçmeyen basit kapalı eğri olsun. Eğer f nin γ içindeki sıfır yerlerinin sayısı Z_f ve kutup yerlerinin sayısı P_f ise (sıfır yerleri ve kutup yerleri katlılıkları ile sayılıyor),

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z_f - P_f$$

dir [13].

Tanım 2.15. (Argüment Değişimi)

γ kapalı bir eğri ve z_0 , γ üzerinde bulunmayan herhangi bir nokta olsun. Eğer z , γ eğrisini tararsa $(z - z_0)$ sayısının argümentinde, meydana gelen değişme

$$\Delta_{\gamma} \arg(z - z_0)$$

simgesi ile gösterilir ve buna argüment değişimi denir [13].

3. SINIR KOŞULLU DIRAC SİSTEMİ

$L_2(0, \infty; \mathbb{C}_2)$ uzayında

$$u_2(0, \lambda) - u_1(0, \lambda) = 0 \quad (3.1)$$

sınır koşulu altında oluşturulan

$$iu_1'(x, \lambda) + q_1(x)u_2(x, \lambda) = \lambda u_1(x, \lambda) \quad (3.2)$$

$$-iu_2'(x, \lambda) + q_2(x)u_1(x, \lambda) = \lambda u_2(x, \lambda) \quad , \quad x \in [0, \infty) \quad (3.3)$$

diferensiyel denklem sistemini göz önüne alalım. Bu sistemi özel olarak Dirac sistemi olarak adlandırılır [16]. Bu sistemde λ kompleks parametre ve $q_i, i = 1, 2$ potansiyel fonksiyonu

$$q_i(x) \leq ce^{-\varepsilon\sqrt{x}} \quad , \quad c > 0 \quad , \quad \varepsilon > 0 \quad , \quad i = 1, 2 \quad (3.4)$$

koşulunu sağlayan reel değerli bir fonksiyondur.

$$L_2(0, \infty; \mathbb{C}_2) := \left\{ f : f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \quad , \quad \int_0^\infty (|f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2) dx < \infty \right\}$$

uzayında L operatörü aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$\forall u \in L_2(0, \infty; \mathbb{C}_2)$ diferensiyellenebilen $u(x, \lambda)$ fonksiyonu için

$$l(u) := \begin{pmatrix} i \frac{d}{dx} u_1(x, \lambda) + q_1(x)u_2(x, \lambda) \\ -i \frac{d}{dx} u_2(x, \lambda) + q_2(x, \lambda)u_1(x, \lambda) \end{pmatrix}$$

diferensiyellenebilen ifadesini gözönüne alalım.

$$D(L) = \left\{ u : u \in L_2(0, \infty, \mathbb{C}_2) \quad , \quad \begin{array}{l} 1. u \text{ mutlak sürekli} \\ 2. l(u) \in L_2 \\ 3. u_2(0, \lambda) - u_1(0, \lambda) = 0 \end{array} \right\}$$

olmak üzere $\forall u \in D(L)$ için

$$L(u) := l(u)$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

(3.2) – (3.3) denklem sistemini

$$\left[\sigma \frac{d}{dx} + Q(x) - \lambda \right] u(x, \lambda) = 0$$

biçiminde yazalım. Burada

$$\sigma = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad , \quad Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & q_1(x) \\ q_2(x) & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad u(x, \lambda) = \begin{pmatrix} u_1(x, \lambda) \\ u_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlanır.

Bu kısımda Dirac sisteminin Jost çözümleri ile Jost Fonksiyonları bulunarak bunlara ait özellikler verilmiştir. Ayrıca sistemin saçılım fonksiyonu ile saçılım fonksiyonunun özellikleri verilmiştir. Netice olarak sisteme ait Levinson Formülü elde edilmiştir. Sistemin Jost çözümüne geçmeden önce aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 3.1.

(3.2) – (3.3) diferensiyel denklem sisteminin her bir çözümü

$$u_1(x, \lambda) = u_1(0, \lambda)e^{-i\lambda x} + i \int_0^x e^{-i\lambda(x-t)} q_1(t) u_2(t, \lambda) dt \quad (3.5)$$

$$u_2(x, \lambda) = u_2(0, \lambda)e^{i\lambda x} - i \int_0^x e^{i\lambda(x-t)} q_2(t) u_1(t, \lambda) dt \quad (3.6)$$

(3.5) – (3.6) integral denklem sisteminde bir çözümüdür. Bunun karşıtı da doğrudur [16].

İspat

(3.2) denkleminin bir çözümünün (3.5) olduğunu gösterelim. Bunun için parametrelerin değişimi yöntemini kullanalım. (3.2) nin homogen denklemi

$$iu_1'(x, \lambda) - \lambda u_1(x, \lambda) = 0$$

olup bu homogen denklemin genel çözümü,

$$\tilde{u}_1(x, \lambda) = c_1 e^{-i\lambda x}$$

olup c_1 keyfî sabittir. O halde (3.2) denkleminin genel çözümü,

$$u_1(x, \lambda) = c_1(x) e^{-i\lambda x} \quad (3.7)$$

şeklindeir. (3.7) genel çözümünde x değişkenine göre türev alınarak

$$u_1'(x, \lambda) = c_1'(x) e^{-i\lambda x} - i\lambda c_1(x) e^{-i\lambda x} \quad (3.8)$$

eşitliği elde edilir. (3.7) ve (3.8) eşitlikleri (3.2) denkleminde yerine yazarsak

$$c_1'(x) = i e^{i\lambda x} q_1(x) u_2(x, \lambda)$$

elde edilir ve buradan

$$c_1(x) = c_1(0) + i \int_0^x e^{i\lambda t} q_1(t) u_2(t, \lambda) dt$$

olarak bulunur. (3.7) genel çözümünde $x = 0$ olarak alınarak elde edilen

$$u_1(0, \lambda) = c_1(0)$$

eşitliği $c_1(x)$ fonksiyonunda dikkate alınarak (3.7) genel çözümü,

$$u_1(x, \lambda) = u_1(0, \lambda)e^{-i\lambda x} + i \int_0^x e^{-i\lambda(x-t)} q_1(t) u_2(t, \lambda) dt$$

formuna dönüşerek istenilen bulunur.

Şimdi karşıt olarak (3.5) eşitliğini kullanarak (3.2) diferensiyel denklemini elde edelim.

(3.5) eşitliğinin x e göre türevini alalım.

$$\begin{aligned} u_1'(x, \lambda) &= -i\lambda u_1(0, \lambda)e^{-i\lambda x} + \lambda \int_0^x e^{-i\lambda(x-t)} q_1(t) u_2(t, \lambda) dt + i q_1(x) u_2(x, \lambda) \\ &= -i\lambda \left[u_1(0, \lambda)e^{-i\lambda x} + i \int_0^x e^{-i\lambda(x-t)} q_1(t) u_2(t, \lambda) dt \right] + i q_1(x) u_2(x, \lambda) \\ &= -i\lambda u_1(x, \lambda) + i q_1(x) u_2(x, \lambda) \end{aligned}$$

sağlanır, buradan da

$$i u_1'(x, \lambda) + q_1(x) u_2(x, \lambda) = \lambda u_1(x, \lambda)$$

denklemini bulunmuş olur.

Benzer şekilde (3.3) denkleminin bir çözümünün (3.6) olduğu ve karşıtı olarak (3.6) eşitliği kullanılarak (3.3) diferensiyel denkleminin elde edildiği ispatlanabilir.

3.1. Dirac Sisteminin Jost Çözümleri

(3.2) – (3.3) Dirac sisteminin Jost çözümlerini elde etmek için parametrelerin değişimi yöntemini kullanalım.

İlk olarak $u_1(x, \lambda)$ yı elde edelim. (3.2) nin homogen denklemini

$$i u_1'(x, \lambda) - \lambda u_1(x, \lambda) = 0$$

olup homogen denklemin genel çözümü

$$\tilde{u}_1(x, \lambda) = c_1 e^{-i\lambda x}$$

şeklinde. Burada c_1 keyfi sabittir. Öyleyse (3.2) denkleminin genel çözümü

$$u_1(x, \lambda) = c_1(x) e^{-i\lambda x} \tag{3.9}$$

şeklinde. (3.9) genel çözümünün x değişkenine göre türevini alırsak

$$u_1'(x, \lambda) = c_1'(x) e^{-i\lambda x} - i\lambda c_1(x) e^{-i\lambda x} \tag{3.10}$$

eşitliği elde edilir. (3.9) ve (3.10) eşitlikleri (3.2) denkleminde yerlerine yazılırlarsa

$$c_1'(x) = ie^{i\lambda x} q_1(x) u_2(x, \lambda)$$

türevi

$$A = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} c_1(\varepsilon) \quad , \quad (A \in \mathbb{R})$$

olmak üzere

$$c_1(x) = A - i \int_x^\infty e^{i\lambda t} q_1(t) u_2(t, \lambda) dt$$

olarak bulunur. Elde edilen $c_1(x)$ fonksiyonu (3.9) genel çözümünde dikkate alınır (3.9) çözümü

$$u_1(x, \lambda) = Ae^{-i\lambda x} - i \int_x^\infty e^{-i\lambda(x-t)} q_1(t) u_2(t, \lambda) dt$$

formunda elde edilir.

Benzer işlemler yapılarak $u_2(x, \lambda)$ yı elde edelim. (3.3) denkleminin homogen denklemi

$$-iu_2'(x, \lambda) - \lambda u_2(x, \lambda) = 0$$

olup homogen denklemin genel çözümü

$$\tilde{u}_2(x, \lambda) = c_2 e^{i\lambda x}$$

şeklinde. Burada c_2 keyfi sabittir. O halde (3.3) denkleminin genel çözümü

$$u_2(x, \lambda) = c_2(x) e^{i\lambda x} \tag{3.11}$$

biçimindedir. (3.11) genel çözümünün x değişkenine göre türevi alınır

$$u_2'(x, \lambda) = c_2'(x) e^{i\lambda x} + i\lambda c_2(x) e^{i\lambda x} \tag{3.12}$$

eşitliği elde edilir. (3.11) ve (3.12) eşitlikleri (3.3) denkleminde yerlerine yazılırlarsa

$$c_2'(x) = -ie^{-i\lambda x} q_2(x) u_1(x, \lambda)$$

türevi

$$B = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} c_2(\varepsilon) \quad , \quad (B \in \mathbb{R})$$

olmak üzere

$$c_2(x) = B + i \int_x^\infty e^{-i\lambda t} q_2(t) u_1(t, \lambda) dt$$

olarak bulunur. Elde edilen $c_2(x)$ fonksiyonu (3.11) genel çözümünde dikkate alınır (3.11) çözümü

$$u_2(x, \lambda) = Be^{i\lambda x} + i \int_x^\infty e^{i\lambda(x-t)} q_2(t) u_1(t, \lambda) dt$$

formunda elde edilir.

$$h(x, \lambda) = \begin{pmatrix} Ae^{-i\lambda x} \\ Be^{i\lambda x} \end{pmatrix}$$

fonksiyonu (3.2) – (3.3) Dirac sisteminin $q_1(x) \equiv q_2(x) \equiv 0$ için çözümüdür.

Tanım 3.1.1.

q_1 ve q_2 reel değerli fonksiyonları (3.4) koşulunu gerçeklesin. (3.2) – (3.3) sisteminin her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$u(x, \lambda) = \begin{pmatrix} u_1(x, \lambda) \\ u_2(x, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ae^{-i\lambda x} \\ Be^{i\lambda x} \end{pmatrix} + o(1) \quad , \quad x \rightarrow \infty$$

koşulunu sağlayan çözümüne Jost Çözümü denir ve $e(x, \lambda)$ ile gösterilir [1].

(3.2) – (3.3) sistemini

$$u(x, \lambda) = h(x, \lambda) + \int_x^\infty Q(x, t; \lambda) u(t, \lambda) dt \quad (3.13)$$

biçiminde yazabiliriz. Burada

$$Q(x, t; \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -iq_1(t)e^{-i\lambda(x-t)} \\ iq_2(t)e^{i\lambda(x-t)} & 0 \end{pmatrix}$$

gibi tanımlanır. $\lambda \in \mathbb{C}$ için (3.13) integral denkleminin çözümü

$$u(x, \lambda) = h(x, \lambda) + \int_x^\infty H(x, s) h(s, \lambda) ds \quad (3.14)$$

gösterimine sahiptir, burada

$$H(x, s) = \begin{pmatrix} H_{11}(x, s) & H_{12}(x, s) \\ H_{21}(x, s) & H_{22}(x, s) \end{pmatrix}$$

çözümlerin çekirdeğidir ve (3.4) koşulunu sağladığından

$$|H_{ij}(x, s)| \leq ce^{-\varepsilon \sqrt{\frac{x+s}{2}}} \quad , \quad c > 0 \quad , \quad \varepsilon > 0 \quad , \quad i, j = 1, 2 \quad (3.15)$$

koşulunda sağlar.

(3.14) ile tanımlanan $u(x, \lambda)$ çözümü yardımı ile (3.2) – (3.3) sisteminin Jost çözümlerini aşağıdaki gibi oluşturabiliriz.

$$u_1(x, \lambda) = Ae^{-i\lambda x} + A \int_x^\infty H_{11}(x, s) e^{-i\lambda s} ds + B \int_x^\infty H_{12}(x, s) e^{i\lambda s} ds \quad , \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad (3.16)$$

$$u_2(x, \lambda) = B e^{i\lambda x} + A \int_x^\infty H_{21}(x, s) e^{-i\lambda s} ds + B \int_x^\infty H_{22}(x, s) e^{i\lambda s} ds, \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad (3.17)$$

biçiminde yazabiliriz.

I. durum. $A = 0, B = 1$ olmak üzere,

$$u_1(x, \lambda) = \int_x^\infty H_{12}(x, s) e^{i\lambda s} ds = e_1^{(1)}(x, \lambda)$$

$$u_2(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty H_{22}(x, s) e^{i\lambda s} ds = e_2^{(1)}(x, \lambda)$$

ile tanımlansın. Bu durumda (3.16) ve (3.17) ifadelerinden

$$e^{(1)}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} e_1^{(1)}(x, \lambda) \\ e_2^{(1)}(x, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_x^\infty H_{12}(x, s) e^{i\lambda s} ds \\ e^{i\lambda x} + \int_x^\infty H_{22}(x, s) e^{i\lambda s} ds \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

yazılabilir.

II. durum. $A = 1, B = 0$ olmak üzere,

$$u_1(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} + \int_x^\infty H_{11}(x, s) e^{-i\lambda s} ds = e_1^{(2)}(x, \lambda)$$

$$u_2(x, \lambda) = \int_x^\infty H_{21}(x, s) e^{-i\lambda s} ds = e_2^{(2)}(x, \lambda)$$

ile tanımlansın. Bu durumda (3.16) ve (3.17) ifadelerinden

$$e^{(2)}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} e_1^{(2)}(x, \lambda) \\ e_2^{(2)}(x, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda x} + \int_x^\infty H_{11}(x, s) e^{-i\lambda s} ds \\ \int_x^\infty H_{21}(x, s) e^{-i\lambda s} ds \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

yazılabilir.

Teorem 3.1.1.

$H_{ij}(x, s)$, $i, j = 1, 2$ fonksiyonları için $H_{ij}(x, \cdot) \in L_1(0, \infty)$, $H_{ij}(\cdot, s) \in L_1(0, \infty)$ sağlanır [16].

İspat

$$|H_{ij}(x, s)| \leq c e^{-\varepsilon \sqrt{\frac{x+s}{2}}}, \quad c > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad i, j = 1, 2$$

eşitsizliğini kullanalım.

$$\int_0^\infty |H_{ij}(x, s)| ds \leq \int_0^\infty c e^{-\varepsilon \sqrt{\frac{x+s}{2}}} ds \leq c \int_0^\infty e^{-\varepsilon \sqrt{\frac{s}{2}}} ds < \infty$$

olduğundan $H_{ij}(x, \cdot) \in L_1(0, \infty)$ gerçekleşir. Benzer şekilde,

$$\int_0^\infty |H_{ij}(x, s)| dx \leq \int_0^\infty c e^{-\varepsilon \sqrt{\frac{x+s}{2}}} dx \leq c \int_0^\infty e^{-\varepsilon \sqrt{\frac{x}{2}}} dx < \infty$$

olduğundan $H_{ij}(\cdot, s) \in L_1(0, \infty)$ gerçekleşir.

Teorem 3.1.2.

(3.18), (3.19) ile tanımlanan $e^{(1)}(x, \lambda)$ ve $e^{(2)}(x, \lambda)$ çözümleri sırasıyla $\mathbb{C}_+$ ve $\mathbb{C}_-$ üzerinde analitik ve reel eksen üzerinde sürekli dirler [16].

İspat

$e^{(1)}(x, \lambda)$ fonksiyonunun analitikliğini göstermek için Oskut Teoremini kullanalım.

$e_1^{(1)}(x, \lambda)$ fonksiyonunda

$$\left| \int_x^\infty H_{12}(x, s) e^{i\lambda s} ds \right| \leq \int_x^\infty |H_{12}(x, s) e^{i\lambda s}| ds \leq \int_x^\infty |H_{12}(x, s)| ds < \infty, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+$$

gerçeklendiğinden düzgün yakınsak,

$e_2^{(1)}(x, \lambda)$ fonksiyonunda

$$\left| \int_x^\infty H_{22}(x, s) e^{i\lambda s} ds \right| \leq \int_x^\infty |H_{22}(x, s)| ds < \infty, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+$$

gerçeklendiğinden düzgün yakınsak ve $e^{i\lambda x}$ fonksiyonu tam fonksiyon olduğundan $e^{(1)}(x, \lambda)$ fonksiyonu λ ya göre $\bar{\mathbb{C}}_+ := \{ \lambda : \lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} \lambda \geq 0 \}$ yarı düzleminde tanımlı ve $\mathbb{C}_+$ da λ ya göre analitiktir. Ayrıca

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} e^{(1)}(x, \lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \begin{pmatrix} \int_x^\infty H_{12}(x, s) e^{i\lambda s} ds \\ e^{i\lambda x} + \int_x^\infty H_{22}(x, s) e^{i\lambda s} ds \end{pmatrix} = e^{(1)}(x, \lambda_0)$$

sağlandığından reel eksen de sürekli.

Benzer biçimde $e^{(2)}(x, \lambda)$ fonksiyonunun $\mathbb{C}_-$ üzerinde analitik ve reel eksen üzerinde sürekli olduğu gösterilebilir.

Bununla birlikte $e^{(1)}(x, \lambda)$ ve $e^{(2)}(x, \lambda)$ fonksiyonları için

$$e^{(1)}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} e_1^{(1)}(x, \lambda) \\ e_2^{(1)}(x, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_x^\infty H_{12}(x, s) e^{i\lambda s} ds \\ e^{i\lambda x} + \int_x^\infty H_{22}(x, s) e^{i\lambda s} ds \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \quad (3.20)$$

$$e^{(2)}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} e_1^{(2)}(x, \lambda) \\ e_2^{(2)}(x, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda x} + \int_x^\infty H_{11}(x, s) e^{-i\lambda s} ds \\ \int_x^\infty H_{21}(x, s) e^{-i\lambda s} ds \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_- \quad (3.21)$$

formu geçerlidir. Çekirdek fonksiyonun sağladığı (3.15) koşulu altında (3.2) – (3.3) Dirac sisteminin $e(x, \lambda)$ Jost çözümü (3.20) ve (3.21) biçimindedir.

Teorem 3.1.3.

Jost çözümü olan $e^{(1)}(x, \lambda)$ ve $e^{(2)}(x, \lambda)$ fonksiyonları aşağıdaki asimptotik eşitlikleri sağlar [16].

$$1. e^{(1)}(x, \lambda) = e^{i\lambda x} \begin{pmatrix} o(1) \\ 1 + o(1) \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Im} \lambda \geq 0$$

$$2. e^{(2)}(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} \begin{pmatrix} 1 + o(1) \\ o(1) \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Im} \lambda \leq 0$$

$$3. e^{(1)}(x, \lambda) = e^{i\lambda x} \begin{pmatrix} o(1) \\ 1 + o(1) \end{pmatrix}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Im} \lambda \geq 0$$

$$4. e^{(2)}(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} \begin{pmatrix} 1 + o(1) \\ o(1) \end{pmatrix}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \text{Im} \lambda \leq 0$$

İspat

1. (i) $\text{Im} \lambda = 0$ olsun.

$$e^{(1)}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \int_x^\infty H_{12}(x, s) e^{i\lambda s} ds \\ e^{i\lambda x} + \int_x^\infty H_{22}(x, s) e^{i\lambda s} ds \end{pmatrix}$$

olarak bulunmuştur. Buradan

$$e^{(1)}(x, \lambda) e^{-i\lambda x} = \begin{pmatrix} \int_x^\infty H_{12}(x, s) e^{i\lambda(s-x)} ds \\ 1 + \int_x^\infty H_{22}(x, s) e^{i\lambda(s-x)} ds \end{pmatrix}$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned} \left| \int_x^\infty H_{ij}(x, s) e^{i\lambda(s-x)} ds \right| &\leq \int_x^\infty |H_{ij}(x, s) e^{i\lambda(s-x)}| ds, \quad (|e^{i\lambda(s-x)}| = 1) \\ &\leq \int_x^\infty |H_{ij}(x, s)| ds \\ &\leq c \int_x^\infty e^{-\varepsilon \sqrt{\frac{x+s}{2}}} ds < \infty \end{aligned}$$

olur. Sonuncu eşitsizlikten

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^\infty H_{ij}(x, s) e^{i\lambda(s-x)} ds = 0$$

veya

$$\int_x^\infty H_{ij}(x, s) e^{i\lambda(s-x)} ds = o(1), \quad \text{Im}(\lambda) = 0, \quad x \rightarrow \infty$$

bulunur. Buradan

$$e^{(1)}(x, \lambda) = e^{i\lambda x} \begin{pmatrix} o(1) \\ 1 + o(1) \end{pmatrix}, \quad \text{Im}(\lambda) = 0, \quad x \rightarrow \infty$$

elde edilir.

(ii) $Im\lambda > 0$ olsun.

$$e^{(1)}(x, \lambda)e^{-i\lambda x} = \begin{pmatrix} \int_x^\infty H_{12}(x, s)e^{i\lambda(s-x)} ds \\ 1 + \int_x^\infty H_{22}(x, s)e^{i\lambda(s-x)} ds \end{pmatrix}$$

yazılabilirdi.

$$\begin{aligned} \left| \int_x^\infty H_{ij}(x, s)e^{i\lambda(s-x)} ds \right| &\leq \int_x^\infty |H_{ij}(x, s)| |e^{-Im(\lambda)(s-x)}| ds, \quad Im\lambda > 0 \\ &\leq \int_x^\infty |H_{ij}(x, s)| ds \\ &\leq c \int_x^\infty e^{-\varepsilon \sqrt{\frac{x+s}{2}}} ds < \infty \end{aligned}$$

çıkar. Sonuncu eşitsizlikten

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^\infty H_{ij}(x, s)e^{i\lambda(s-x)} ds = o(1)$$

olur. Buradan

$$e^{(1)}(x, \lambda) = e^{i\lambda x} \begin{pmatrix} o(1) \\ 1 + o(1) \end{pmatrix}, \quad Im(\lambda) > 0, \quad x \rightarrow \infty$$

bulunur.

(i) ve (ii) den

$$e^{(1)}(x, \lambda) = e^{i\lambda x} \begin{pmatrix} o(1) \\ 1 + o(1) \end{pmatrix}, \quad Im(\lambda) \geq 0, \quad x \rightarrow \infty$$

ispatlanmış olur.

2. 1. ispata benzer olarak yapılır.

3. (i) $Im\lambda = 0$ olsun.

$$e^{(1)}(x, \lambda)e^{-i\lambda x} = \begin{pmatrix} \int_x^\infty H_{12}(x, s)e^{i\lambda(s-x)} ds \\ 1 + \int_x^\infty H_{22}(x, s)e^{i\lambda(s-x)} ds \end{pmatrix}$$

yazılabilirdi.

$$H_{ij}(\widetilde{x}, s) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} H_{ij}(x, s) & , s \in [x, \infty) \\ 0 & , s \in (-\infty, x) \end{cases}$$

olmak üzere

$$H_{ij}(\widetilde{x}, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{ij}(x, s) e^{i\lambda(s-x)} ds$$

integraline $H_{ij}(x, s)$ fonksiyonunun ters Fourier Dönüşümü denir. $H_{ij}(x, \cdot) \in L_1(0, \infty)$

olduğundan ters Fourier dönüşümü olan $H_{ij}(\widetilde{x}, \cdot)$ fonksiyonunda $L_1(-\infty, \infty)$ uzayına aittir.

O halde Fourier dönüşümleri için Riemann-Lebesgue Lemmasına göre

$$\int_x^{\infty} H_{ij}(x, s) e^{i\lambda(s-x)} ds = \int_{-\infty}^{\infty} H_{ij}(\widetilde{x}, s) e^{i\lambda(s-x)} ds = o(1) \quad , \quad Im\lambda = 0 \quad , \quad |\lambda| \rightarrow \infty$$

yazılabilir ve buradan

$$e^{(1)}(x, \lambda) = e^{i\lambda x} \begin{pmatrix} o(1) \\ 1 + o(1) \end{pmatrix} \quad , \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad , \quad Im\lambda = 0$$

elde edilir.

(ii) $Im\lambda > 0$ olsun.

$$|H_{ij}(x, s) e^{i\lambda(s-x)}| \leq |H_{ij}(x, s)|$$

ve $H_{ij}(x, s) \in L_1(0, \infty)$ olduğundan Lebesgue Teoreminden

$$\begin{aligned} \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \int_x^{\infty} H_{ij}(x, s) e^{i\lambda(s-x)} ds &= \int_x^{\infty} \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} H_{ij}(x, s) e^{i\lambda(s-x)} ds = \int_x^{\infty} H_{ij}(x, s) \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} e^{i\lambda(s-x)} ds \\ &= o(1) \end{aligned}$$

olur ve

$$e^{(1)}(x, \lambda) = e^{i\lambda x} \begin{pmatrix} o(1) \\ 1 + o(1) \end{pmatrix} \quad , \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad , \quad Im\lambda > 0$$

elde edilir.

(i) ve (ii) den

$$e^{(1)}(x, \lambda) = e^{i\lambda x} \begin{pmatrix} o(1) \\ 1 + o(1) \end{pmatrix} \quad , \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad , \quad Im\lambda \geq 0$$

ispatlanmış olur.

4. 3. ispata benzer olarak yapılır.

3.2. Dirac Sisteminin Jost Fonksiyonları

Tanım 3.2.1. (Çözümlerin Wronskiyeni)

İncelediğimiz (3.1) – (3.2) Dirac sisteminin rastgele iki çözümü $y^{(1)}$ ve $y^{(2)}$ olsun. Buradan $W[y^{(1)}, y^{(2)}] = y_1^{(1)}(x, \lambda) y_2^{(2)}(x, \lambda) - y_2^{(1)}(x, \lambda) y_1^{(2)}(x, \lambda)$ ile tanımlı ifadeye $y^{(1)}$ ve $y^{(2)}$ çözümlerinin Wronskiyeni denir [16].

$\varphi_1(x, \lambda) = 1$ ve $\varphi_2(x, \lambda) = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere,

$$\varphi(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x, \lambda) \\ \varphi_2(x, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde bir gösterime sahip olsun. Buradan

$$W[\varphi(x, \lambda), e^{(1)}(x, \lambda)] = e_2^{(1)}(x, \lambda) - e_1^{(1)}(x, \lambda) = D_+(x, \lambda) \quad (3.22)$$

$$W[e^{(2)}(x, \lambda), \varphi(x, \lambda)] = e_1^{(2)}(x, \lambda) - e_2^{(2)}(x, \lambda) = D_-(x, \lambda) \quad (3.23)$$

olarak bulunur [16].

Teorem 3.2.1.

$D_+(x, \lambda)$ ve $D_-(x, \lambda)$ fonksiyonları aşağıdaki asimptotik bağıntıları sağlar.

1. $D_+(x, \lambda) = e^{i\lambda x}(1 + o(1))$, $x \rightarrow \infty$, $Im\lambda \geq 0$
2. $D_-(x, \lambda) = e^{-i\lambda x}(1 + o(1))$, $x \rightarrow \infty$, $Im\lambda \leq 0$
3. $(D_+)_x(x, \lambda) = e^{i\lambda x}(i\lambda + o(1))$, $x \rightarrow \infty$, $Im\lambda \geq 0$
4. $(D_-)_x(x, \lambda) = e^{-i\lambda x}(-i\lambda + o(1))$, $x \rightarrow \infty$, $Im\lambda \leq 0$

İspat

$$1. D_+(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty [H_{22}(x, s) - H_{12}(x, s)] e^{i\lambda s} ds$$

$$D_+(x, \lambda) e^{-i\lambda x} - 1 = \int_x^\infty [H_{22}(x, s) - H_{12}(x, s)] e^{i\lambda(s-x)} ds$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned}
\left| \int_x^\infty [H_{22}(x, s) - H_{12}(x, s)] e^{i\lambda(s-x)} ds \right| &\leq \int_x^\infty |H_{22}(x, s) - H_{12}(x, s)| |e^{i\lambda(s-x)}| ds \\
&\leq \int_x^\infty |H_{22}(x, s) - H_{12}(x, s)| |e^{-Im\lambda(s-x)}| ds \\
&\leq \int_x^\infty |H_{22}(x, s) - H_{12}(x, s)| ds
\end{aligned}$$

olup $H_{ij}(x, s) \in L_1(0, \infty)$ olduğundan $[H_{22}(x, s) - H_{12}(x, s)] \in L_1(0, \infty)$ olur. Buradan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^\infty |H_{22}(x, s) - H_{12}(x, s)| ds = 0$$

yazılır. O halde,

$$D_+(x, \lambda) = e^{i\lambda x} (1 + o(1)) \quad , \quad x \rightarrow \infty \quad , \quad Im\lambda \geq 0$$

asimptotik eşitliği bulunur.

$$\begin{aligned}
2. D_-(x, \lambda) &= e^{-i\lambda x} + \int_x^\infty [H_{11}(x, s) - H_{21}(x, s)] e^{-i\lambda s} ds \\
D_-(x, \lambda) e^{i\lambda x} - 1 &= \int_x^\infty [H_{11}(x, s) - H_{21}(x, s)] e^{-i\lambda(s-x)} ds
\end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned}
\left| \int_x^\infty [H_{11}(x, s) - H_{21}(x, s)] e^{i\lambda(s-x)} ds \right| &\leq \int_x^\infty |H_{11}(x, s) - H_{21}(x, s)| |e^{-i\lambda(s-x)}| ds \\
&\leq \int_x^\infty |H_{11}(x, s) - H_{21}(x, s)| |e^{Im\lambda(s-x)}| ds \\
&\leq \int_x^\infty |H_{11}(x, s) - H_{21}(x, s)| ds
\end{aligned}$$

olup $H_{ij}(x, s) \in L_1(0, \infty)$ olduğundan $[H_{11}(x, s) - H_{21}(x, s)] \in L_1(0, \infty)$ olur. Buradan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^\infty |H_{11}(x, s) - H_{21}(x, s)| ds = 0$$

yazılır. O halde,

$$D_-(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} (1 + o(1)) \quad , \quad x \rightarrow \infty \quad , \quad Im\lambda \leq 0$$

bulunur.

3. $D_+(x, \lambda)$ Jost Fonksiyonu kullanılarak

$$(D_+)_x(x, \lambda)e^{-i\lambda x} - i\lambda = -(H_{22}(x, x) - H_{12}(x, x)) \\ + \int_x^\infty [H_{22}(x, s) - H_{12}(x, s)]_x e^{i\lambda(s-x)} ds$$

yazılır. Buradan

$$|(D_+)_x(x, \lambda)e^{-i\lambda x} - i\lambda| \leq |H_{22}(x, x) - H_{12}(x, x)| \\ + \int_x^\infty |[H_{22}(x, s) - H_{12}(x, s)]_x e^{i\lambda(s-x)}| ds$$

olup her $0 < x < s$ için

$$|(D_+)_x(x, \lambda)e^{-i\lambda x} - i\lambda| \leq |H_{22}(x, x) - H_{12}(x, x)| + \int_x^\infty |[H_{22}(x, s) - H_{12}(x, s)]_x| ds$$

eşitsizliği sağlanır. Diğer yandan (3.15) eşitsizliğinden $e^{-\varepsilon\sqrt{\frac{x+s}{2}}}$ fonksiyonu azalan fonksiyon olduğundan $x \rightarrow \infty$ için $|H_{22}(x, x) - H_{12}(x, x)| \rightarrow 0$ sağlanır. Benzer şekilde $[H_{22}(x, s) - H_{12}(x, s)]_x \in L_1(0, \infty)$ olduğundan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^\infty |[H_{22}(x, s) - H_{12}(x, s)]_x| ds = 0$$

olur. O halde,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |(D_+)_x(x, \lambda)e^{-i\lambda x} - i\lambda| = 0, \quad \text{Im} \lambda \geq 0$$

yazılacağından ispat tamamlanır.

4. 3. ispata benzer olarak yapılır.

Lemma 3.2.1.

$\lambda \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

1. $W[D_+(x, \lambda), D_+(x, -\lambda)] = -2i\lambda$
2. $W[D_-(x, \lambda), D_-(x, -\lambda)] = 2i\lambda$

İspat

1. (3.22) eşitliğine göre

$$D_+(x, \lambda) = e_2^{(1)}(x, \lambda) - e_1^{(1)}(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty [H_{22}(x, s) - H_{12}(x, s)] e^{i\lambda s} ds$$

$$D_+(x, -\lambda) = e_2^{(1)}(x, -\lambda) - e_1^{(1)}(x, -\lambda) = e^{-i\lambda x} + \int_x^\infty [H_{22}(x, s) - H_{12}(x, s)]e^{-i\lambda s} ds$$

olur. Wronskiye x değişkeninden bağımsız olduğu için

$$W[D_+(x, \lambda), D_+(x, -\lambda)] = \lim_{x \rightarrow \infty} W[D_+(x, \lambda), D_+(x, -\lambda)]$$

eşitliği yazılabilir. Asimptotik bağıntılar kullanılarak,

$$\begin{aligned} W[D_+(x, \lambda), D_+(x, -\lambda)] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \{D_+(x, \lambda)(D_+)_x(x, -\lambda) - (D_+)_x(x, \lambda)D_+(x, -\lambda)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \{(D_+(x, \lambda)e^{-i\lambda x})((D_+)_x(x, -\lambda)e^{i\lambda x}) \\ &\quad - ((D_+)_x(x, \lambda)e^{-i\lambda x})(D_+(x, -\lambda)e^{i\lambda x})\} \\ &= -2i\lambda \end{aligned}$$

olarak bulunur.

2. (3.23) eşitliğine göre

$$D_-(x, \lambda) = e_1^{(2)}(x, \lambda) - e_2^{(2)}(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} + \int_x^\infty [H_{11}(x, s) - H_{21}(x, s)]e^{-i\lambda s} ds$$

$$D_-(x, -\lambda) = e_1^{(2)}(x, -\lambda) - e_2^{(2)}(x, -\lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty [H_{11}(x, s) - H_{21}(x, s)]e^{i\lambda s} ds$$

olarak yazılır. Asimptotik bağıntılar yardımıyla,

$$\begin{aligned} W[D_-(x, \lambda), D_-(x, -\lambda)] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \{D_-(x, \lambda)(D_-)_x(x, -\lambda) - (D_-)_x(x, \lambda)D_-(x, -\lambda)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \{(D_-(x, \lambda)e^{i\lambda x})((D_-)_x(x, -\lambda)e^{-i\lambda x}) \\ &\quad - ((D_-)_x(x, \lambda)e^{i\lambda x})(D_-(x, -\lambda)e^{-i\lambda x})\} \\ &= 2i\lambda \end{aligned}$$

olduğu bulunur.

Teorem 3.2.2.

Her $\lambda \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

1. $D_+(x, -\lambda) = \overline{D_+(x, \lambda)}$
2. $D_-(x, -\lambda) = \overline{D_-(x, \lambda)}$ [16].

İspat

q_i , ($i = 1, 2$) potansiyel fonksiyonu reel değerli olduğundan H_{ij} , ($i, j = 1, 2$) çekirdek

fonksiyonuda reel değerlidir. Dolayısıyla

$$1. \overline{D_+(x, \lambda)} = e^{-i\lambda x} + \int_x^\infty [H_{22}(x, s) - H_{12}(x, s)]e^{-i\lambda s} ds = D_+(x, -\lambda)$$

elde edilir.

$$2. \overline{D_-(x, \lambda)} = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty [H_{11}(x, s) - H_{21}(x, s)]e^{i\lambda s} ds = D_-(x, -\lambda)$$

elde edilir.

Tanım 3.2.2.

(3.22) – (3.23) ifadelerinde $x = 0$ alınmasıyla elde edilen

$$D_+(0, \lambda) = D_+(\lambda) := e_2^{(1)}(0, \lambda) - e_1^{(1)}(0, \lambda) = e_2^{(1)}(\lambda) - e_1^{(1)}(\lambda) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{C}_+$$

$$D_-(0, \lambda) = D_-(\lambda) := e_1^{(2)}(0, \lambda) - e_2^{(2)}(0, \lambda) = e_1^{(2)}(\lambda) - e_2^{(2)}(\lambda) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{C}_-$$

fonksiyonlara Dirac sisteminin Jost Fonksiyonları denir [16].

Sonuç 3.2.1.

Her $\lambda \in \mathbb{R}$ için Teorem 3.2.2 den

$$1. D_+(-\lambda) = \overline{D_+(\lambda)}$$

$$2. D_-(-\lambda) = \overline{D_-(\lambda)}$$

sağlanır.

Teorem 3.2.3.

$D_+(\lambda)$ ve $D_-(\lambda)$ Jost Fonksiyonları sırasıyla $\mathbb{C}_+$ ve $\mathbb{C}_-$ üzerinde analitik ve reel eksen üzerinde süreklidir.

İspat

$D_+(\lambda)$ Jost Fonksiyonunun analitikliğini göstermek için Oskut Teoremini kullanalım.

$D_+(\lambda)$ Jost fonksiyonunda $u(z) = 1, (0, \infty)$ aralığında tam fonksiyon ve

$$\int_0^{\infty} [H_{22}(0, s) - H_{12}(0, s)] e^{i\lambda s} ds$$

integrali $(0, \infty)$ aralığında düzgün yakınsak olduğundan $D_+(\lambda)$ fonksiyonu $\mathbb{C}_+$ üzerinde analitiktir. Şimdi ise $D_+(\lambda)$ fonksiyonunun reel eksen üzerinde sürekliliğini gösterelim. Her $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} D_+(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \left(1 + \int_0^{\infty} [H_{22}(0, s) - H_{12}(0, s)] e^{i\lambda_0 s} ds \right) = D_+(\lambda_0)$$

olduğundan $D_+(\lambda)$ fonksiyonu süreklidir.

$D_-(\lambda)$ Jost Fonksiyonunun $\mathbb{C}_-$ üzerinde analitik ve reel ekseninde sürekli olduğunu göstermek için benzer ispat yapılabilir.

Teorem 3.2.4.

$D_+(\lambda)$ ve $D_-(\lambda)$ fonksiyonları

1. $D_+(\lambda) = 1 + o(1)$, $|\lambda| \rightarrow \infty$, $Im\lambda \geq 0$
2. $D_-(\lambda) = 1 + o(1)$, $|\lambda| \rightarrow \infty$, $Im\lambda \leq 0$

asimptotik eşitliklerini sağlar [16].

İspat

1. $D_+(\lambda)$ Jost Fonksiyonu

$$D_+(\lambda) = e_2^{(1)}(0, \lambda) - e_1^{(1)}(0, \lambda) = 1 + \int_0^{\infty} [H_{22}(0, s) - H_{12}(0, s)] e^{i\lambda s} ds$$

olarak yazılır.

(i) $Im\lambda = 0$ olsun.

Fourier dönüşümleri için Riemann – Lebesgue Lemmasından,

$$D_+(\lambda) = 1 + o(1) \quad , \quad |\lambda| \rightarrow \infty$$

bulunur.

(ii) $Im\lambda > 0$ olsun. Bu durumda Lebesgue Yakınsaklık Teoreminden

$$D_+(\lambda) = 1 + o(1) \quad , \quad |\lambda| \rightarrow \infty$$

bulunur.

2. 1. ile benzer ispat $D_-(\lambda)$ fonksiyonu için yapılabilir.

Teorem 3.2.5.

Her $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için

$$D_+(\lambda) \neq 0 \text{ ve } D_-(\lambda) \neq 0$$

sağlanır.

İspat

Her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $W[D_+(x, \lambda), D_+(x, -\lambda)] = 2i\lambda$ olduğu gösterilmişti. Wronskiyen x değişkeninden bağımsız olduğundan

$$D_+(\lambda)(D_+)_x(0, -\lambda) - (D_+)_x(0, \lambda)D_+(-\lambda) = -2i\lambda$$

yazılır. $D_+(-\lambda) = \overline{D_+(\lambda)}$ olduğundan

$$D_+(\lambda)(D_+)_x(0, -\lambda) - (D_+)_x(0, \lambda)\overline{D_+(\lambda)} = -2i\lambda$$

sağlanır. O halde en az bir $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için $D_+(\lambda_0) = 0$ olduğunu kabul edelim. Buradan

$$D_+(\lambda_0)(D_+)_x(0, -\lambda_0) - (D_+)_x(0, \lambda_0)\overline{D_+(\lambda_0)} = -2i\lambda_0$$

yazılıp, kabul gereğince $-2i\lambda_0 = 0$ olup $\lambda_0 = 0$ bulunur. Ancak bu $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $D_+(\lambda) \neq 0$ olmalıdır.

Benzer şekilde $D_-(\lambda) \neq 0$ olduğu ispatlanır.

Teorem 3.2.6.

Dirac sisteminin özdeğerler cümlesi σ_d olsun.

$$\sigma_d = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}_+ , D_+(\lambda) = 0\} \cup \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}_- , D_-(\lambda) = 0\}$$

gerçeklenir [16].

İspat

$$M_1^+ = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}_+ , D_+(\lambda) = 0\} \text{ ve } M_1^- = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}_- , D_-(\lambda) = 0\}$$

olmak üzere

$$M = M_1^+ \cup M_1^- \text{ cümlesidir.}$$

(i) $M \subset \sigma_d$ gerçektir.

(ii) $\sigma_d \subset M$ olduğunu gösterelim.

$\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $\text{Im}\lambda_0 > 0$ ve $\lambda_0 \in \sigma_d(L)$ olsun.

Sistemin $\lambda = \lambda_0$ için aşık olmayan $u(x, \lambda_0) \in L_2(0, \infty; \mathbb{C}_2)$ ve $u_2 - u_1 = 0$ şartını sağlayan

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

ile gösterilen $u(x, \lambda)$ çözümü vardır. u, λ_0 sayısına karşılık gelen özfonksiyondur.

$$W[\varphi, u] = \varphi_1 u_2 - \varphi_2 u_1 = u_2 - u_1 = 0$$

olduğundan $c \neq 0$ için $u = c\varphi$ eşitliği yazılabilir. Bu durumda

$$W[u, e^{(1)}] = cW[\varphi, e^{(1)}] = cD_+$$

olarak yazılabilir. $u, e^{(1)} \in L_2$ ve sürekli diferensiyellenebilir olduklarından

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{(1)} = 0 \text{ olur.}$$

$$W[u, e^{(1)}] = \lim_{x \rightarrow \infty} W[u, e^{(1)}] = \lim_{x \rightarrow \infty} [u_1 e_2^{(1)} - u_2 e_1^{(1)}] = 0$$

elde edilir.

$$W[u, e^{(1)}] = cD_+ = 0$$

eşitliğinde $c \neq 0$ olduğundan $D_+(\lambda_0) = 0$ olmalıdır. Böylece

$$\lambda_0 \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} \lambda_0 > 0 \text{ ve } \lambda_0 \in \sigma_d(L) \text{ için } \lambda_0 \in M_1^+$$

olarak bulunur.

$$\lambda_0 \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} \lambda_0 < 0 \text{ ve } \lambda_0 \in \sigma_d(L) \text{ olsun. } \lambda_0 \in M_1^- \text{ elde edilir.}$$

Kabul edelim ki $\lambda_0 \in (-\infty, \infty)$ olsun. c_1 ve c_2 var ve $u = c_1 e^{(1)} + c_2 e^{(2)}$ olsun.

$$u = \begin{pmatrix} c_1 e^{-i\lambda_0 x} \\ c_2 e^{i\lambda_0 x} \end{pmatrix} + o(1), \quad x \rightarrow \infty, \quad \lambda_0 \in (-\infty, \infty)$$

asimptotiği sağlanır. $u(x, \lambda_0) \in L_2$ olması için $c_1 = c_2 = 0$ olmalıdır.

$\sigma_d(L) \cup (-\infty, \infty) = \emptyset$ ve $\lambda_0 \in M_1^+$ olduğundan $\sigma_d \subset M$ olur. Böylece $\sigma_d(L) = M$ olduğu ispatlanmış olur.

Teorem 3.2.7.

$D_+(\lambda)$ Jost Fonksiyonu açık üst yarı düzlemde, $D_-(\lambda)$ Jost Fonksiyonu açık alt yarı düzlemde sonlu sayıda sıfırlara sahiptir.

İspat

$D_+(\lambda)$ Jost Fonksiyonu açık üst yarı düzlemde analitik olduğundan, analitik fonksiyonun özelliklerinden, sıfırlarının limit noktası analitiklik bölgesinin sınırındadır. O halde $D_+(\lambda)$

Jost Fonksiyonu Teorem 3.2.6 uyarınca reel ekseninde sıfıra sahip değildir. Diğer taraftan Teorem 3.2.1 uyarınca

$$D_+(\lambda) = 1 + o(1) \quad , \quad x \rightarrow \infty \quad , \quad \text{Im}\lambda \geq 0$$

asimptotik eşitliğinden $D_+(\lambda) \neq 0$ olup $D_+(\lambda)$ Jost Fonksiyonunun sıfırları $\mathbb{C}_+$ yarı düzleminin sınırlı bir bölgesindedir. Bolzano-Weierstrass Teoremi gereğince sınırlı ve sonsuz elemanlı her küme en az bir yığılma noktasına sahiptir. Dolayısıyla $D_+(\lambda)$ Jost Fonksiyonu sonsuz çoklukta sıfıra sahip olamaz. Öyleyse $D_+(\lambda)$ Jost Fonksiyonu $\mathbb{C}_+$ yarı düzleminde sonlu sayıda sıfıra sahiptir.

Benzer ispatı $D_-(\lambda)$ Jost Fonksiyonu için yapalım. $D_-(\lambda)$ Jost Fonksiyonu açık alt yarı düzlemde analitik olduğundan, analitik fonksiyonun özelliklerinden sıfırlarının limit noktası analitiklik bölgesinin sınırındadır. O halde $D_-(\lambda)$ Jost Fonksiyonu Teorem 3.2.6 uyarınca reel ekseninde hiçbir sıfıra sahip değildir. Diğer taraftan Teorem 3.2.1 gereğince

$$D_-(\lambda) = 1 + o(1) \quad , \quad x \rightarrow \infty \quad , \quad \text{Im}\lambda \leq 0$$

asimptotik eşitliğinden $D_-(\lambda) \neq 0$ olup $D_-(\lambda)$ Jost Fonksiyonunun sıfırları $\mathbb{C}_-$ yarı düzleminin sınırlı bir bölgesindedir. Bolzano-Weierstrass Teoremi gereğince sınırlı ve sonsuz elemanlı her küme en az bir yığılma noktasına sahip olacağından $D_-(\lambda)$ Jost Fonksiyonu sonsuz çoklukta sıfıra sahip olamaz. O halde $D_-(\lambda)$ Jost Fonksiyonu $\mathbb{C}_-$ yarı düzleminde sonlu sayıda sıfıra sahiptir.

3.3. Dirac Sisteminin Saçılım Fonksiyonu ve Özellikleri

Tanım 3.3.1.

Jost Fonksiyonlarını kullanarak $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$S(\lambda) := \frac{D_-(\lambda)}{D_+(\lambda)}$$

biçiminde tanımlanan S fonksiyonuna (3.2) - (3.3) Dirac sisteminin saçılım fonksiyonu denir [16].

Teorem 3.3.1.

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} S(\lambda) = 1$$

eşitliği sağlanır [16].

İspat

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} S(\lambda) = \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \frac{D_-(\lambda)}{D_+(\lambda)} = \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)} = 1$$

elde edilir.

Lemma 3.3.1.

Jost Fonksiyonunun tanımı olan $D_+(\lambda)$ ve $D_-(\lambda)$ eşitliklerinde $\lambda = 0$ için $D_+(0) \neq 0$ ve $D_-(0) \neq 0$ ise saçılım fonksiyonu

$$S(0) := \frac{D_-(0)}{D_+(0)}$$

şeklinde yazılır.

Lemma 3.3.2.

Jost Fonksiyonunun tanımı olan $D_+(\lambda)$ ve $D_-(\lambda)$ eşitliklerinde $\lambda = 0$ için $D_+(0) = 0$ ve $D_-(0) = 0$ ise

$$K_1^+(s) = \int_s^\infty [H_{22}(0, t) - H_{12}(0, t)] dt, \quad K_1^-(s) = \int_s^\infty [H_{11}(0, t) - H_{21}(0, t)] dt$$

$$A_+(\lambda) = \int_0^\infty K_1^+(s) e^{i\lambda s} ds, \quad A_-(\lambda) = \int_0^\infty K_1^-(s) e^{-i\lambda s} ds$$

olmak üzere, saçılım fonksiyonu

$$S(\lambda) = -\frac{A_-(\lambda)}{A_+(\lambda)}$$

şeklinde tanımlı olup $\lambda = 0$ alınarak

$$S(0) = -\frac{A_-(0)}{A_+(0)}$$

olarak elde edilir.

İspat

$D_+(0, \lambda) = e_2^{(1)}(0, \lambda) - e_1^{(1)}(0, \lambda)$ ifadesinde $\lambda = 0$ için $D_+(0) = 0$ olduğundan

$$\int_0^{\infty} [H_{22}(0, s) - H_{12}(0, s)] ds = -1$$

olur.

$$D_+(\lambda) = e_2^{(1)}(0, \lambda) - e_1^{(1)}(0, \lambda) = 1 + \int_0^{\infty} [H_{22}(0, s) - H_{12}(0, s)] e^{i\lambda s} ds$$

ifadesine kısmi integrasyon uygulanırsa

$$D_+(\lambda) = i\lambda \int_0^{\infty} \int_s^{\infty} [H_{22}(0, t) - H_{12}(0, t)] e^{i\lambda s} dt ds$$

olup $H_{ij} \in L_1(0, \infty)$ olduğundan

$$D_+(\lambda) = i\lambda A_+(\lambda) \tag{3.24}$$

şeklinde yazılabilir.

Benzer şekilde $D_-(0, \lambda) = e_1^{(2)}(0, \lambda) - e_2^{(2)}(0, \lambda)$ ifadesinde $\lambda = 0$ için $D_-(0) = 0$ olduğundan

$$\int_0^{\infty} [H_{11}(0, s) - H_{21}(0, s)] ds = -1$$

olur.

$$D_-(0, \lambda) = e_1^{(2)}(0, \lambda) - e_2^{(2)}(0, \lambda) = 1 + \int_0^{\infty} [H_{11}(x, s) - H_{21}(x, s)] e^{-i\lambda s} ds$$

ifadesine kısmi integrasyon uygulanırsa

$$D_-(\lambda) = -i\lambda \int_0^{\infty} \int_s^{\infty} [H_{11}(0, t) - H_{21}(0, t)] e^{-i\lambda s} dt ds$$

olup $H_{ij} \in L_1(0, \infty)$ olduğundan

$$D_-(\lambda) = -i\lambda A_-(\lambda) \tag{3.25}$$

şeklinde yazılabilir. O halde (3.24) ve (3.25) eşitlikleri saçılım fonksiyonunun yerine yazılırsa

$$S(\lambda) = \frac{D_-(\lambda)}{D_+(\lambda)} = \frac{-i\lambda A_-(\lambda)}{i\lambda A_+(\lambda)} = -\frac{A_-(\lambda)}{A_+(\lambda)}$$

bulunup $\lambda = 0$ alınarak

$$S(0) = -\frac{A_-(0)}{A_+(0)}$$

olarak elde edilir.

Burada $A_+(0) \neq 0$ ve $A_-(0) \neq 0$ olmalıdır. Gerçekten Wronskiye tanımından

$$W[D_+(x, \lambda), D_+(x, -\lambda)] = D_+(\lambda)D'_+(-\lambda) - D_+(-\lambda)D'_+(\lambda)$$

olacağından

$$i\lambda A_+(\lambda)D'_+(-\lambda) + i\lambda A_+(-\lambda)D'_+(\lambda) = -2i\lambda$$

olarak yazılabilir. Burada

$$A_+(\lambda)D'_+(-\lambda) + A_+(-\lambda)D'_+(\lambda) = -2$$

olup $\lambda = 0$ için

$$A_+(0)D'_+(0) + A_+(0)D'_+(0) = -2$$

$$A_+(0)D'_+(0) = -1$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten $A_+(0) \neq 0$ olduğu aşıkardır.

Benzer şekilde

$$W[D_-(x, \lambda), D_-(x, -\lambda)] = D_-(\lambda)D'_-(-\lambda) - D_-(-\lambda)D'_-(\lambda)$$

olacağından

$$-i\lambda A_-(\lambda)D'_-(-\lambda) - i\lambda A_-(-\lambda)D'_-(\lambda) = 2i\lambda$$

olarak yazılabilir. Burada

$$-A_-(\lambda)D'_-(-\lambda) - A_-(-\lambda)D'_-(\lambda) = 2$$

olup $\lambda = 0$ için

$$-A_-(0)D'_-(0) - A_-(0)D'_-(0) = 2$$

$$A_-(0)D'_-(0) = -1$$

eşitliği bulunur. Dolayısıyla $A_-(0) \neq 0$ olduğu açıktır.

Lemma 3.3.3.

Jost Fonksiyonunun tanımı olan $D_+(\lambda)$ ve $D_-(\lambda)$ eşitliklerinde $\lambda = 0$ için $D_+(0) \neq 0$ ve $D_-(0) = 0$ ise $S(0) = 0$ olur.

İspat

$$D_-(0, \lambda) = e_1^{(2)}(0, \lambda) - e_2^{(2)}(0, \lambda)$$

ifadesinde $\lambda = 0$ için $D_-(0) = 0$ ve

$$D_+(\lambda) = e_2^{(1)}(0, \lambda) - e_1^{(1)}(0, \lambda)$$

ifadesinde $\lambda = 0$ için $D_-(0) \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$S(0) = \frac{D_-(0)}{D_+(0)} = 0$$

kolayca bulunur.

O halde Lemmalar sonucu olarak

$$S(0) = \begin{cases} \frac{D_-(0)}{D_+(0)} & D_+(\lambda) \neq 0, D_-(\lambda) \neq 0 \\ -\frac{A_-(0)}{A_+(0)} & D_+(\lambda) = 0, D_-(\lambda) = 0 \\ 0 & D_+(\lambda) \neq 0, D_-(\lambda) = 0 \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

3.4. Dirac Sistemi İçin Levinson Formülü

Lemma 3.4.1.

$$D_+(\lambda) = r_1 e^{i\theta_1(\lambda)} \quad (3.26)$$

$$D_+(-\lambda) = r_1 e^{-i\theta_1(\lambda)}$$

ve

$$D_-(\lambda) = r_2 e^{i\theta_2(\lambda)} \quad (3.27)$$

$$D_-(-\lambda) = r_2 e^{-i\theta_2(\lambda)}$$

eşitlikleri gerçekleşir. Burada $\theta_1(\lambda) = \arg D_+(\lambda)$, $\theta_2(\lambda) = \arg D_-(\lambda)$ ve $r_1 = |D_+(\lambda)|$, $r_2 = |D_-(\lambda)|$ olarak tanımlanır.

İspat

Kompleks fonksiyonların özelliğinden $|\overline{D_+(\lambda)}| = |D_+(\lambda)|$ yazılabileceğinden ve Sonuç 3.2.1 kullanılarak $|D_+(-\lambda)| = |D_+(\lambda)|$ olarak yazılır. Benzer şekilde $|D_-(-\lambda)| = |D_-(\lambda)|$ yazılabilir. Bu ise $D_+(\lambda)$, $D_+(-\lambda)$, $D_-(\lambda)$, $D_-(-\lambda)$ fonksiyonlarının (3.26) ve (3.27) şeklinde yazılabileceğini gösterir.

Lemma 3.4.2.

$\arg D_+(\lambda) = \theta_1(\lambda)$ ve $\arg D_-(\lambda) = \theta_2(\lambda)$ şeklinde tanımlı olan $\theta_1(\lambda)$ ve $\theta_2(\lambda)$ fonksiyonları tek fonksiyondur.

İspat

$\theta_1(\lambda)$ ve $\theta_2(\lambda)$ fonksiyonlarının tanım kümesi simetrik kümedir. Sonuç 3.2.1 gereğince $\lambda \in \mathbb{C}_+$ için $\overline{D_+(\lambda)}$ ve $D_+(-\lambda)$ fonksiyonlarının modülleri birbirine eşit olacağından (3.26) eşitliklerinden

$$|r_1| |e^{-i\theta_1(\lambda)}| = |r_1| |e^{i\theta_1(-\lambda)}|$$

olduğundan için $-\theta_1(\lambda) = \theta_1(-\lambda)$ olmalıdır. Dolayısıyla θ_1 fonksiyonu tek fonksiyon olarak bulunur.

Benzer şekilde θ_2 fonksiyonunun tek olduğu gösterilebilir.

Teorem 3.4.1.

Sırasıyla $\mathbb{C}_+$ ve $\mathbb{C}_-$ üzerinde tanımlı Jost Fonksiyonları için aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\frac{\theta_1(\infty) - \theta_1(0)}{\pi} = N_1 + \begin{cases} 0, & D_+(0) \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & D_+(0) = 0 \end{cases}$$

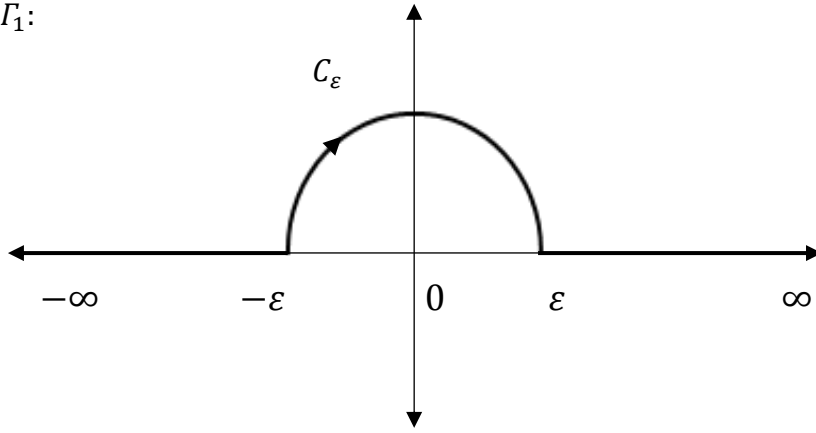
$$\frac{\theta_2(\infty) - \theta_2(0)}{\pi} = N_2 + \begin{cases} 0, & D_-(0) \neq 0 \\ -\frac{1}{2}, & D_-(0) = 0 \end{cases}$$

İspat

Γ_1 eğrisini

$$\Gamma_1 : (-\infty, -\varepsilon] \cup C_\varepsilon \cup [\varepsilon, \infty)$$

olacak şekilde

Γ_1 :

alalım. Teorem 3.2.7 uyarınca üst yarı düzlemde olan $D_+(\lambda)$ Jost Fonksiyonu, sonlu adette sıfırlara sahip olacağından Jost Fonksiyonunun sıfırlarının sayısını N_1 ile gösterelim. Teorem 3.2.3 gereğince $D_+(\lambda)$ Jost Fonksiyonu üst yarı düzlemde analitik olduğundan Argüment prensibinden

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{D'_+(\lambda)}{D_+(\lambda)} d\lambda = N_1$$

yazılabilir. Burada Γ_1 eğrisi göz önünde bulundurularak

$$\frac{1}{2\pi i} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{D'_+(\lambda)}{D_+(\lambda)} d\lambda + \int_{C_\epsilon} \frac{D'_+(\lambda)}{D_+(\lambda)} d\lambda + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{D'_+(\lambda)}{D_+(\lambda)} d\lambda \right] = N_1 \quad (3.28)$$

eşitliği elde edilir. Artık $D_+(0) \neq 0$ ve $D_+(0) = 0$ durumları için (3.28) eşitliğini inceleyelim.

(i) $D_+(0) \neq 0$ olsun.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} \frac{D'_+(\lambda)}{D_+(\lambda)} d\lambda = i(\theta_1(0) - \theta_1(0)) = 0$$

ve

$$2\pi i N_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{i[\theta_1(-\epsilon) - \theta_1(-\infty)] + i[\theta_1(\infty) - \theta_1(\epsilon)]\} = 2i[\theta_1(\infty) - \theta_1(0)]$$

olup

$$\frac{\theta_1(\infty) - \theta_1(0)}{\pi} = N_1$$

sonucu bulunur.

(ii) $D_+(0) = 0$ olsun.

(3.24) eşitliğinde λ yerine $-\lambda$ yazarak

$$D_+(-\lambda) = -i\lambda A_+(-\lambda) \quad (3.29)$$

elde edelim. Şimdi (3.24) ve (3.29) eşitliklerinden

$$\theta_1(\lambda) = \arg D_+(\lambda) = \frac{\pi}{2} + \varphi_1 + \arg A_+(\lambda)$$

$$\theta_1(-\lambda) = \arg D_+(-\lambda) = \frac{3\pi}{2} + \varphi_1 + \arg A_+(-\lambda)$$

olup

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{D'_+(\lambda)}{D_+(\lambda)} d\lambda = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i[\theta_1(\varepsilon) - \theta_1(-\varepsilon)] = -i\pi$$

ve

$$\{i[\theta_1(-\varepsilon) - \theta_1(-\infty)] - i\pi + i[\theta_1(\infty) - \theta_1(\varepsilon)]\} = 2\pi i N_1$$

olmalıdır. Buradan

$$\frac{\theta_1(\infty) - \theta_1(0)}{\pi} = N_1 + \frac{1}{2}$$

sonucu elde edilir. Sonuç olarak

$$\frac{\theta_1(\infty) - \theta_1(0)}{\pi} = N_1 + \begin{cases} 0, & D_+(0) \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & D_+(0) = 0 \end{cases}$$

yazılabilir.

Benzer ispat yapılarak

$$\frac{\theta_2(\infty) - \theta_2(0)}{\pi} = N_2 + \begin{cases} 0, & D_-(0) \neq 0 \\ -\frac{1}{2}, & D_-(0) = 0 \end{cases}$$

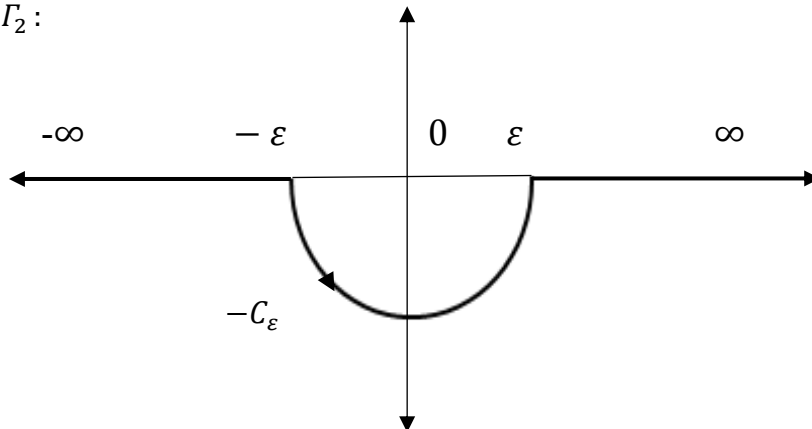
olduğunu gösterelim.

Γ_2 eğrisini

$$\Gamma_2 : (-\infty, -\varepsilon] \cup -C_\varepsilon \cup [\varepsilon, \infty)$$

olacak şekilde

$\Gamma_2 :$



olarak alalım. Teorem 3.2.7 uyarınca alt yarı düzlemde olan $D_-(\lambda)$ Jost Fonksiyonu, sonlu adette sıfırlara sahip olacağından Jost Fonksiyonunun sıfırlarının sayısını N_2 ile gösterelim. Teorem 3.2.3 gereğince $D_-(\lambda)$ Jost Fonksiyonu alt yarı düzlemde analitik olduğundan Argüment prensibinden

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{D'_-(\lambda)}{D_-(\lambda)} d\lambda = N_2$$

yazılır. Burada ise Γ_2 eğrisi gözönünde bulundurularak

$$\frac{1}{2\pi i} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{D'_-(\lambda)}{D_-(\lambda)} d\lambda + \int_{-C_\varepsilon} \frac{D'_-(\lambda)}{D_-(\lambda)} d\lambda + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{D'_-(\lambda)}{D_-(\lambda)} d\lambda \right] = N_2 \quad (3.30)$$

elde edilir. Şimdi $D_-(0) \neq 0$ ve $D_-(0) = 0$ durumları için (3.30) eşitliğini inceleyelim.

(i) $D_-(0) \neq 0$ olsun.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-C_\varepsilon} \frac{D'_-(\lambda)}{D_-(\lambda)} d\lambda = i(\theta_2(0) - \theta_2(0)) = 0$$

ve

$$2\pi i N_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{i[\theta_2(-\varepsilon) - \theta_2(-\infty)] + i[\theta_2(\infty) - \theta_2(\varepsilon)]\} = 2i [\theta_2(\infty) - \theta_2(0)]$$

olup

$$\frac{\theta_2(\infty) - \theta_2(0)}{\pi} = N_2$$

sonucu bulunur.

(ii) $D_-(0) = 0$ olsun.

(3.25) eşitliğinde λ yerine $-\lambda$ yazarak

$$D_-(-\lambda) = i\lambda A_-(-\lambda) \quad (3.31)$$

elde edelim. Şimdi (3.25) ve (3.31) eşitliklerinden

$$\theta_2(\lambda) = \arg D_-(\lambda) = \frac{3\pi}{2} + \varphi_2 + \arg A_-(\lambda)$$

$$\theta_2(-\lambda) = \arg D_-(-\lambda) = \frac{\pi}{2} + \varphi_2 + \arg A_-(-\lambda)$$

olup

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-C_\varepsilon} \frac{D'_-(\lambda)}{D_-(\lambda)} d\lambda = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i[\theta_2(\varepsilon) - \theta_2(-\varepsilon)] = i\pi$$

ve

$$\{i[\theta_2(-\varepsilon) - \theta_2(-\infty)] + i\pi + i[\theta_2(\infty) - \theta_2(\varepsilon)]\} = 2\pi i N_2$$

olmalıdır. Buradan

$$\frac{\theta_2(\infty) - \theta_2(0)}{\pi} = N_2 - \frac{1}{2}$$

sonucu elde edilir. Sonuç olarak

$$\frac{\theta_2(\infty) - \theta_2(0)}{\pi} = N_2 + \begin{cases} 0, & D_+(0) \neq 0 \\ -\frac{1}{2}, & D_+(0) = 0 \end{cases}$$

yazılabilir.

Teorem 3.4.2.

Potansiyel fonksiyonun sağladığı (3.2) - (3.3) sisteminin Levinson Formülü

$$\frac{\ln S(0) - \ln S(\infty)}{\pi i} = (N_1 - N_2) + \begin{cases} 0, & D_+(0) \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & D_+(0) = 0 \end{cases} - \begin{cases} 0, & D_+(0) \neq 0 \\ -\frac{1}{2}, & D_+(0) = 0 \end{cases}$$

biçiminde verilir.

İspat

$$S(\lambda) = \frac{D_-(\lambda)}{D_+(\lambda)} = \frac{r_2 e^{i\theta_2(\lambda)}}{r_1 e^{i\theta_1(\lambda)}} = \frac{r_2}{r_1} e^{i\theta_2(\lambda) - i\theta_1(\lambda)}$$

yazılabilir. Buradan logaritma fonksiyonunun özelliğinden

$$\ln S(\lambda) = \ln r_2 - \ln r_1 + i\theta_2(\lambda) - i\theta_1(\lambda)$$

olup

$$\ln S(0) = \ln r_2 - \ln r_1 + i\theta_2(0) - i\theta_1(0) \quad (3.32)$$

ve

$$\ln S(\infty) = \ln r_2 - \ln r_1 + i\theta_2(\infty) - i\theta_1(\infty) \quad (3.33)$$

eşitlikleri elde edilir. (3.32) ve (3.33) eşitliklerinden

$$\frac{\ln S(0) - \ln S(\infty)}{\pi} = \frac{i(\theta_1(\infty) - \theta_1(0))}{\pi} - \frac{i(\theta_2(\infty) - \theta_2(0))}{\pi}$$

yazılabilir ve buradan

$$\frac{\ln S(0) - \ln S(\infty)}{\pi i} = (N_1 - N_2) + \begin{cases} 0, & D_+(0) \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & D_+(0) = 0 \end{cases} - \begin{cases} 0, & D_+(0) \neq 0 \\ -\frac{1}{2}, & D_+(0) = 0 \end{cases}$$

ifadesi elde edilip ispat tamamlanır.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez hazırlanırken Marchenko tarafından 1986 yılında yazılmış olan “Sturm-Liouville Operators and Applications” başlıklı kitap, Mamedov ve Menken tarafından 2008 yılında basılan makale, Bairamov ve Çelebi tarafından 1999 yılında basılan makale esas alınmıştır.

1999 yılında Bairamov ve Çelebi tarafından yayınlanan makalede Dirac sisteminin spektral özellikleri incelenmiştir. Bu incelemede denklemin çözümleri elde edilmiş, çözümlerin yapısından bahsedilmiş, denklem ve sınır koşulu yardımıyla üretilen operatörün özdeğer ve spektral tekilliklerin sonluluğu araştırılmıştır. Biz de bu makaleden esinlenerek ve kaynak göstererek, denklemin çözümlerini, bu çözümlerin yapısını tekrar ele alıp, diskret spektrumu elde ettik. Ayrıca Marchenko’ nun tanımını kullanarak Bairamov ve Çelebi den esinlenerek mevcut problemimiz için saçılım fonksiyonu tanımladık. Saçılım fonksiyonunun özelliklerini inceledik.

Marchenko’nun ele aldığı Levinson Formülünü anlayıp, son kısımda bu formülü kendi problemimiz için elde ettik. Sonuç olarak, elde edilen Levinson Formülü benzer yöntemler izlenerek elde edilmiştir. Ters problemlerde, potansiyel fonksiyonun elde edilişi için çok önemli olan Levinson Formülü Dirac operatörü için bulunmuştur.

Bu alanda çalışanlar için bu tezin özellikle operatör sistemler için esin kaynağı olabileceğini düşünmekteyiz.

KAYNAKLAR

1. Jaluvent, M. and Jean, C. (1972). The inverse s-wave scattering problem for a class of potentials depending on energy. *Communications in Mathematical Physics*, 28(3), 177-220.
2. Agranovich, Z. S. and Marchenko V. A. (1963). *The inverse problem of scattering theory*. New York: Pratt Institute Brooklyn, 105-280.
3. Naimark, M. A (1968). *Linear Differential Operators II*. New York: Frederick Ungar Publishing Company, 13-352.
4. Case, K. M. and Chiu, S. C. (1973). The discrete version of Marchenko equations in the inverse scattering problem. *Journal of Mathematical Physics*, 14, 1643-1647.
5. Guseinov, G. S. and Tuncay, H. (1995). On the inverse scattering problem for a discrete n-dimensional Schrödinger equation. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Math*, 44, 95-102.
6. Mamedov, Kh. R. and Kosar, N. P. (2010). Continuity of the scattering Function and Levinson Type Formula of a Boundary-Value Problem. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 5(4), 159-170.
7. Mamedov, Kh. R. and Menken, H. (2008). The Levinson-type formula for a boundary value problem with a spectral parameter in the boundary condition. *The Arabian Journal for Science and Engineering*, 34(1), 224-225.
8. Bairamov, E., Aygar, Y., and Karşlıoğlu, D., (2017). Scattering analysis and spectrum of discrete schrödinger equations with transmission conditions. *Filomat*, 31, 17, 5391-5399.
9. Bayraktar, M. (2006). *Fonksiyonel Analiz*. (Üçüncü Baskı). Ankara: Gazi Kitabevi, 66-206.
10. Kreyszig, E. (1978). *Introductory functional analysis with applications*. New York: Wiley, 82.
11. Musayev, B. ve Alp, M. (2000). *Fonksiyonel Analiz*. Ankara: Balcı Yayınları, 168-411.
12. Balcı, M. (2011). *Analiz I*. (Dokuzuncu Baskı). Ankara: Balcı Yayınları, 113.
13. Başkan, T. (2012). *Kompleks Fonksiyonlar Teorisi*. (Yedinci Baskı). Bursa: Dora Yayıncılık, 24-276.
14. Titchmarsh, E. C. (1939). *The theory of functions*. New York: Oxford University Press, 403-404.
15. Balcı, M. (2014). *Reel Analiz*. (Altıncı Baskı). İzmir: Sürat Üniversite Yayınları, 79.

16. Bairamov, E. and Çelebi, A. O. (1999). Spektrum and spectral expansion for the non-selfadjoint discrete Dirac operators. *Quartely Journal of Mathematics Oxford Series*, (2)50, 371-384.
17. Mamedov, Kh. R. (2003). Uniqueness of the solution to the Inverse problem of scattering theory for the Sturm-Lioville operator with a spectral parameter in the Boundary Condition. *Mathematical Notes*, 74(1), 136-140.
18. Case, K. M. (1973). On discrete inverse scattering problems II. *Journal of Mathematical Physics*, 14, 916-920.



GAZİ GELECEKTİR..