



DOMAIN TEMSİLCİLİ TOPOLOJİK UZAYLAR

Gökçe EMİNOĞLU

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

EKİM 2019

Gökçe EMİNOĞLU tarafından hazırlanan "DOMAİN TEMSİLCİLİ TOPOLOJİK UZAYLAR" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Çetin VURAL

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

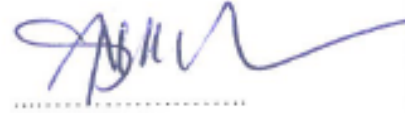
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.



Başkan: Prof. Dr. Erdal GÜNER

Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi

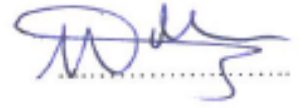
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.



Üye: Prof. Dr. Hakan EFE

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.



Tez Savunma Tarihi: 10/10/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....
Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,
- bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.


Gökçe EMİNOĞLU

10/10/2019

DOMAIN TEMSİLCİLİ TOPOLOJİK UZAYLAR
(Yüksek Lisans Tezi)

Gökçe EMİNOĞLU

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ekim 2019

ÖZET

Domain temsil edilebilirlik bir topolojik tamlık özelliğidir. “Domain” ilk olarak teorik bilgisayar bilimlerinde kullanılmıştır. Sonrasında birçok çalışmalar yapılmış ve topolojide kullanılmaya başlanmıştır. Bu çalışmada domain temsilcili uzaylar, altkompakt uzaylar ve genelleştirilmiş altkompakt uzaylar incelenmiştir. Ayrıca bu uzaylar arasındaki geçişlerden söz edilmiştir. İlaveten domain temsilcili uzayların altuzayları ve kalıtsallığı incelenmiştir. Bunlarla ilgili örnekler verilmiştir.

Bilim Kodu : 20405
Anahtar Kelimeler : Sürekli ytk küme, domain temsilcili topolojik uzaylar, altkompakt uzaylar, genelleştirilmiş altkompakt uzaylar
Sayfa Adedi : 55
Danışman : Prof. Dr. Çetin VURAL

DOMAIN REPRESENTATIVE TOPOLOGICAL SPACES

(M. Sc. Thesis)

Gökçe EMİNOĞLU

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

October 2019

ABSTRACT

Domain representability is a topological completeness property. “Domain” is first used in theoretical computer science. After that a lot of studies are performed and it is started to be used in topology. In this study, domain representative spaces, subcompact spaces and generalizations subcompact spaces are examined. Also the relations between these spaces are mentioned. In addition, hereditary and subspaces of domain representative spaces are examined. Examples are given about them.

Science Code : 20405
Key Words : Continuous dcpo, domain representative topological spaces, subcompact spaces, generalized subcompact spaces
Page Number : 55
Supervisor : Prof. Dr. Çetin VURAL

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım, katkı ve tecrübelerini esirgemeyen, çalışmamı bilimsel temeller doğrultusunda şekillendiren değerli hocam Sayın Prof. Dr. Çetin VURAL'a, ayrıca tez yazımı sırasında desteklerini esirgemeyen başta eşim olmak üzere tüm aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
3. SÜREKLİ YÖNLENDİRMeye GÖRE TAM OLAN KISMİ SIRALI KÜMELER.....	11
4. DOMAIN TEMSİLCİLİ TOPOLOJİK UZAYLAR	29
4.1. Sürekli Yönlendirmeye Göre Tam Olan Kısmi Sıralı Kümelerden Domaine Geçiş	29
4.2. Domain Temsilcili Uzayların Bazı Özellikleri.....	31
4.3. Domain Temsilcili Uzaylar ve Geri Çekilme Dönüşümü	35
5. ALTKOMPAKT UZAYLAR.....	39
6. GENELLEŞTİRİLMİŞ ALTKOMPAKT UZAYLAR.....	43
7. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME	51
KAYNAKLAR	53
ÖZGEÇMİŞ	55

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 4.1. Y uzayından X uzayına tanımlanan r fonksiyonu	35
Şekil 7.1. Domain temsilcili, altkompakt ve genelleştirilmiş altkompakt uzaylar arasındaki ilişki.....	51

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simge ve kısaltmalar, aşağıda açıklamaları ile birlikte sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

$\bar{A}$	A kümesinin kapanışı
$int_X A$	X de A nın içi
$\pi_i(p)$	p nin i ’ ninci koordinatı
$\tau(X)$	X üzerindeki topoloji
$\tau^*(X)$	$\tau(X)$ in boş olmayan elemanlarının ailesi
$\mathbb{P}$	İrrasyonel Sayılar Kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$max A$	A kümesinin maksimali
$sup A$	A kümesinin supremumu

Kısaltmalar

Açıklamalar

ytk	Yönlendirmeye göre tam olan kısmi sıralı küme
------------	---

1. GİRİŞ

Bu yüksek lisans tezinde topolojik uzaylarda tamlık özellikleri olarak da nitelendirilebilecek olan domain temsilcili topolojik uzaylar (domain temsil edilebilir uzaylar), altkompakt uzaylar ve genelleştirilmiş altkompakt uzaylar incelenecek ve aralarındaki geçişlerden söz edilecektir.

En iyi bilinen tamlık özelliklerinden biri metrik uzayların tamlığı, diğeri de bir topolojik uzayın Cech anlamında tam olmasıdır.

İyi bilinir ki bir X metrik uzayının tam metrik olması için X uzayının Cech-tam olması gerekli ve yeterlidir. Metrik uzaylarının tam oluşunun bir diğeri genelleştirilmesi de altkompaktlık kavramıdır.

John De Groot'un altkompakt uzayları takdim etmesiyle bu konuda bir araştırma akımı başlamıştır [1]. Bu yöndeki ikinci araştırma akımı ise sürekli yönlendirilmeye göre tam olan kısmi sıralılar yani domain üzerinedir. Bu iki araştırma akımı Bennet ve Lutzer'in son çalışmaları [2] de birleşir.

Elemanları sayılabilir sayıda olmayan $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin elemanlarını bilgisayara tanıtmak ve bunlar üzerinde işlem yapabilmek amacıyla Dana Scott, bilgisayar bilimlerinde kullanmak üzere matematiksel bir modelleme sunmuştur. Bilgisayara reel sayıları tanıtmak işlemi olarak başlayan bu süreç daha sonra Edalat, Escuordo, Martin'in gerçekleştirdiği birçok çalışma sonucu topolojide kullanılmaya başlanmıştır [2]. Böylelikle sürekli yönlendirmeye göre tam olan kısmi sıralı (ytk) bir kümenin maksimal elemanları ile bir uzayın noktalarını temsil edilebilmesi kavramı ortaya çıkmıştır.

Bennet ve Lutzer [2] de üzerindeki Scott topoloji ile domain olarak adlandırılan sürekli yönlendirilmeye göre tam olan bir kısmi sıralamanın maksimal elemanları ile temsil edilebilen uzaylara domain temsilcili topolojik uzaylar (domain temsil edilebilir uzaylar) demişlerdir ve Cech-tam uzayların domain ile temsil edilebileceğini göstermişlerdir.

Onlar aynı zamanda altkompakt uzayların da domain ile temsil edilebileceğini göstermişlerdir. [2] de domain temsilcili uzaylara P -tam uzaylar ismi verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezin okunabilirliğini kolaylaştırmak için bazı temel kavramlara, önermelere ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1. Tanım

Boş olmayan bir X kümesi için $X \times X$ kartezyen çarpımı kümesinden $\mathbb{R}$ nin içine tanımlanan bir d fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa d ye X üzerinde bir metrik, (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir [3].

$\forall x, y, z \in X$ için

$$m_1) d(x, y) \geq 0$$

$$m_2) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$m_3) d(x, y) = d(y, x)$$

$$m_4) d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

2.2. Tanım

X boştan farklı bir küme ve τ , X in bir $P(X)$ kuvvet kümesinin olan bir altkümesi olsun. τ ailesi

$$t_1) X \in \tau, \emptyset \in \tau$$

$$t_2) \tau \text{ ya ait sonlu sayıdaki elemanların arakesiti yine } \tau \text{ ya aittir. Yani } A_1, A_2, \dots, A_n \in \tau \text{ için } \bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau$$

$$t_3) \tau \text{ ya ait keyfi sayıdaki elemanların birleşimi yine } \tau \text{ ya aittir. Yani } \forall \{A_i\}_{i \in I} \subseteq \tau \text{ için } \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$$

özelliklerini sağlıyorsa τ ailesine X üzerinde bir topoloji, (X, τ) ikilisine de topolojik uzay denir [3].

2.3. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay ve $\beta \subseteq \tau$ olsun. τ topolojisinin her elemanı β nın elemanlarının herhangi birleşimi olarak yazılabiliyor ise β ya τ topolojisinin bir tabanı denir; yani

β τ için taban $\Leftrightarrow$ Her $A \in \tau$ için $A = \bigcup_{B \in \theta} B$ olacak biçimde bir $\theta \subseteq \beta$ alt ailesi vardır [3].

2.4. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A kümesini kapsayan bir U açık kümesi içeren her N kümesine A kümesinin bir komşuluğu denir [3].

2.5. Teorem

(X, d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun. Bu durumda $B_d(x_0, r) = \{x \in X: d(x, x_0) < r\}$ kümesine x_0 merkezli, r yarıçaplı açık yuvar denir [3].

2.6. Tanım

(X, d) metrik uzayındaki tüm açık yuvarlardan oluşan $\mathcal{B}$ ailesinin ürettiği topolojiye yani d metriğinden üretilen (X, τ) topolojik uzayına metrik topoloji, τ ya d metriğinin doğurduğu topoloji denir [3].

2.7. Tanım

Eğer τ yu doğuran $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ metriği var ve (X, d) tam metrik uzaysa (X, τ) tam metriklenelirdir [3].

2.8. Tanım

$X \neq \emptyset$ ve $S \subseteq P(X)$ boş olmayan kümeler ailesi olsun. S ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa S ailesine X üzerinde bir süzgeç denir [3].

$$s_1) \emptyset \notin S$$

$$s_2) A, B \in S \text{ ise } A \cap B \in S \text{ dir.}$$

$$s_3) \text{ Eğer } A \in S \text{ ve } A \subset B \text{ ise } B \in S \text{ dir.}$$

2.9. Tanım

S, X kümesi üzerinde bir süzgeç ve $\beta \subseteq S$ bir alt ailesi olsun. Eğer her $A \in S$ için $B \subseteq A$ olacak şekilde bir $B \in \beta$ varsa, β ailesine S süzgecinin bir tabanıdır denir [3].

2.10. Teorem

β ailesi X kümesinin alt kümelerinin boş olmayan bir ailesi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir [3].

i) β ailesi X üzerindeki bir süzgecin tabanıdır.

ii) β ailesi

$$b_1) \emptyset \notin \beta$$

$$b_2) B_1, B_2 \in \beta \text{ için } B_3 \subset B_1 \cap B_2 \text{ olacak biçimde bir } B_3 \in \beta \text{ vardır.}$$

özelliklerini sağlar.

İspat

(i) $\Rightarrow$ (ii) β ailesi X üzerindeki bir S süzgeci için bir taban olsun. $\beta \subseteq S$ ve $\emptyset \notin S$ olduğundan $\emptyset \notin \beta$ dir. Ayrıca $B_1, B_2 \in \beta$ için $\beta \subseteq S$ olduğundan $B_1, B_2 \in S$ dir. (s_2) den $B_1 \cap B_2 \in S$ dir. Süzgeç tabanı tanımından $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ olacak şekilde bir $B_3 \in \beta$ vardır. O halde (b_1) ve (b_2) özellikleri sağlanmış olur.

(ii) $\Rightarrow$ (i) β ailesi (b_1) ve (b_2) şartlarını sağlasın. β ailesinden faydalananarak bir süzgeç oluşturalım. $S = \{A \subseteq X: \exists B \in \beta \text{ için } B \subseteq A\}$ olsun. S ailesinin tanımında (s_3) şartını sağladığı açıktır. $\emptyset \notin \beta$ ve $\emptyset$ hiçbir kümenin üst kümesi olmadığından $\emptyset \notin S$ dir. Böylece (s_1) sağlanır. (s_2) şartını yani sonlu arakesite göre S ailesinin kapalı olduğunu gösterelim.

$A_1, A_2 \in S$ herhangi iki eleman olsun. Bu durumda $B_1 \subseteq A_1$ ve $B_2 \subseteq A_2$ olacak şekilde $B_1, B_2 \in \beta$ vardır. (b_2) şartından $B_1, B_2 \in \beta$ için $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ olacak şekilde bir $B_3 \in \beta$ vardır. O halde $B_3 \subseteq A_1 \cap A_2$ olup S nin tanımından $A_1 \cap A_2 \in S$ dir. Bu da (s_2) şartının sağlandığını gösterir. Böylece S ailesi X üzerinde bir süzgeçtir.

2.11. Tanım

$(X, \tau), (Y, \tau')$ topolojik uzaylar olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ bire-bir ve örten bir fonksiyon olsun. Eğer f ve f^{-1} fonksiyonları sürekli ise f ye bir homeomorfizm, X ile Y uzayına da homeomorf uzaylar denir [3].

2.12. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. X uzayının her $\{A_i\}_{i \in I}$ açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa X uzayına kompakt uzay denir [3].

2.13. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. x noktasının X uzayında kompakt bir komşuluğu varsa X uzayına x noktasında yerel kompakt denir. Eğer X uzayı her noktasında yerel kompakt uzay ise X uzayına yerel kompakt uzay denir [3].

2.14. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. $x \neq y$ olacak biçimdeki her $x, y \in X$ için $y \notin N$ olacak biçimde $N \in N(x)$ veya $x \notin M$ olacak biçimde $M \in N(y)$ komşulukları varsa X topolojik uzayına T_1 uzayı denir [3].

2.15. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. X in farklı her bir x ve y elemanları için bunlardan birini içeren ve diğerini içermeyen en az bir komşulukları varsa yani $x \neq y$ olacak biçimdeki her $x, y \in X$ için $x \notin M$ ve $y \notin N$ olacak biçimde $N \in N(x)$ ve $M \in N(y)$ komşulukları varsa X topolojik uzayına T_1 uzayı denir [3].

2.16. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. X in farklı her x ve y elemanlarının ayrık komşulukları varsa yani $x \neq y$ olacak biçimdeki her $x, y \in X$ için $N \cap M = \emptyset$ olacak biçimde $N \in N(x)$ ve $M \in N(y)$ komşulukları varsa X uzayına Hausssdorf uzayı denir [3].

2.17. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. X uzayının x noktasını içermeyen kapalı her K kümesi ile x noktasının ayrık komşulukları varsa, yani her $x \in X$ ve her $K \subseteq X$ kapalı, $x \notin K$ için $N \cap M = \emptyset$ olacak biçimde $N \in N(x)$ ve $M \in N(y)$ komşulukları varsa X uzayına düzenli uzay denir [3].

2.18. Tanım

T_1 aksiyomunu sağlayan düzenli topolojik uzaylara T_3 uzayı denir [3].

2.19. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay $x \in X$, $x \notin K$, $K \subseteq X$ kapalı için $f(x) = 0$ ve $f(K) = 1$ olacak şekilde sürekli bir $f: X \rightarrow I$ fonksiyonu varsa X uzayına tamamen düzenli uzay denir [3].

2.20. Tanım

Tamamen düzenli T_1 uzayına Tychonoff uzayı denir [3].

2.21. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere X uzayının herhangi kapalı ayrık iki altkümesinin ayrık komşulukları varsa X uzayına Normal Uzay denir [3].

2.22. Tanım

T_1 aksiyomunu sağlayan her normal uzaya T_4 uzayı denir [3].

2.23. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $\bar{A} = X$ ise A kümesine X uzayında her yerde yoğun ya da kısaca “yoğundur” denir [3].

2.24. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve $x \in X$ olsun. x noktasının her komşuluğunda A kümesinin x den farklı en az bir noktası varsa x noktasına A kümesinin bir yığılma noktası denir [3].

2.25. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A kümesine ait herhangi bir x noktası A kümesinin yığılma noktası değilse x noktasına A kümesinin izole (ayrık) noktası denir [3].

2.26. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzayına ait bir özellik bu uzayın bütün alt uzaylarında var ise bu özelliğe kalıtsal özellik denir [3].

2.27. Tanım

Bir metrik uzayda her Cauchy dizisi yakınsaksa bu metrik uzaya tam metrik uzay denir [4].

2.28. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay, $(x_n) \subseteq X$ de bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. x_0 ın her $N \in N(x_0)$ komşuluğu için $n \geq n_0$ ise $x_n \in N$ olacak şekilde sadece N komşuluğuna bağlı bir $n_0 \in N$ sayısı varsa (x_n) dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir. Yani;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \forall N \in N(x_0) \text{ için } \exists n_0 \in N \text{ var öyle ki } \forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in N \text{ [3].}$$

2.29. Tanım

A bir küme ve β, A üzerinde bağıntı olsun. Eğer β bağıntısı yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağlıyorsa β ya bir kısmi sıralama bağıntısıdır denir [5].

2.30. Tanım

Üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı bulunan kümeye kısmi sıralı küme denir [5].

2.31. Tanım

$(A, \leq)$ kısmi sıralı küme $B \subseteq A$ ve $c \in B$ olsun. Eğer $c \leq b$ biçimindeki her $b \in B$ için $c = b$ oluyorsa o zaman c ye B nin bir maksimal elemanıdır denir [4].

2.32. Tanım

(X, τ) topolojik uzayının yoğun açık alt kümelerinin sayılabilir her bir ailesinin arakesiti X de yoğun ise (X, τ) uzayına Baire Uzayı denir [6].

2.33. Tanım

X bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere A kümesi X uzayının sayılabilir sayıdaki açık altkümelerinin kesişimi olarak yazılabiliyorsa A kümesine bir G_δ - küme denir [7].

2.34. Tanım

Kompakt bir uzayın bir G_δ altkümesine homeomorf olan topolojik uzaylara Cech-tam uzaylar denir [8].

2.35. Tanım

$\sigma = \{[a, b]: a \leq b, a, b \in \mathbb{R}\}$ ve $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}$ irrasyonel sayıların kümesi olmak üzere $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde $\tau = \sigma \cup \{\{x\}: x \in \mathbb{P}\}$ ailesinin ürettiği topolojiye Michael Doğrusu denir [8].

2.36. Tanım

Reel sayılar kümesi üzerinde $\mathcal{B} = \{[a, b): a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ ailesinin ürettiği topoloji τ olmak üzere $(\mathbb{R}, \tau)$ uzayına Sorgenfrey Doğrusu denir [8].

2.37. Tanım

$(P, \sqsubseteq)$ kısmi sıralı küme ve $D \subseteq P$ olsun. Herhangi bir $d_1, d_2 \in D$ için $d_1 \sqsubseteq d_3$ ve $d_2 \sqsubseteq d_3$ olacak şekilde en az bir $d_3 \in D$ varsa D kümesine yönlendirilmiş (yukarı yönlendirilmiş) küme denir. (“ d_3 , d_1 ve d_2 nin ortak uzantısıdır” ifadesi de kullanılabilir) [9].

2.38. Tanım

$(P, \sqsubseteq)$ kısmi sıralı küme ve $D \subseteq P$ olsun. Herhangi bir $d_1, d_2 \in D$ için $d_3 \sqsubseteq d_1$ ve $d_3 \sqsubseteq d_2$ olacak biçimde en az bir $d_3 \in D$ varsa D kümesine aşağı yönlendirilmiş küme denir [9].

3. SÜREKLİ YÖNLENDİRMEYE GÖRE TAM OLAN KISMİ SIRALI KÜMELER

Bu bölümde üzerindeki Scott topoloji ile sürekli yönlendirilmeye göre tam olan bir kısmi sıralı kümenin maksimal elemanları ile temsil edilebilen uzaylar ifade edilecektir. Scott'un yapısının topolojide kullanılmaya başlanmasının ardından sürekli yönlendirmeye göre tam olan kısmi sıralı kümeler olarak ifade edilen uzaylar, 4. bölümde domain temsilcili (domain temsil edilebilir) topolojik uzaylar olarak adlandırılacaktır.

Elemanları sayılabilir sayıda olmayan $\mathbb{R}$ gibi bir yapı üzerinde bilgisayarlarda hesaplama yapılmak istenirse bu doğrudan mümkün olmayabilir. Çünkü bilgisayar tarafından gerçekleştirilecek hesaplamaların somut nesnelerle yani doğal sayılara kodlanmasıyla yapılması gerekir. Özellikle hesaplamaların yapıldığı yapı sayılabilir olmalıdır. Bu nedenle doğrudan $\mathbb{R}$ ile hesaplama yapmak mümkün değildir. $\mathbb{R}$ deki elemanların somut yaklaşımları üzerine hesaplama yapılabilir. Reel sayıları bilgisayara tanıtmak amacıyla Dana Scott, bilgisayar bilimlerinde kullanmak üzere matematiksel bir modelleme sunmuştur [6].

$\mathbb{R}$ üzerindeki şu örneği incelemekle başlayalım. $\mathcal{J}$, reel sayılarda $a \in \mathbb{R}$ için $[a, a] = \{a\}$ şeklinde dejenere aralıkları da içermek üzere tüm boştan farklı, kapalı ve sınırlı aralıkların ailesi olsun. $\mathcal{J}$ ailesi ters kapsama bağıntısı ile kısmi sıralıdır. Bu bağıntı $J, K \in \mathcal{J}$ için $J \sqsubseteq K$ ise $J \supseteq K$ şeklindedir. Açıkça $\mathcal{J}$ ailesinin " $\sqsubseteq$ " bağıntısına göre maksimal elemanları tek nokta kümelerdir. Gerçekten de $I \in \mathcal{J}$ olmak üzere $[a, a] \sqsubseteq I$ olsun. " $\sqsubseteq$ " bağıntısının tanımından $[a, a] \supseteq I$ olduğundan $I = \{a\} = [a, a]$ olur. $a \neq b$ olmak üzere $M = [a, b]$ aralığının $\mathcal{J}$ nin maksimal elemanı olduğunu kabul edelim. $a \neq b$ ve $a < b$ olduğundan $a \leq r_1 < r_2 \leq b$ olacak şekilde $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ vardır. O zaman $[a, b] \supseteq [r_1, r_2]$ olup " $\sqsubseteq$ " bağıntısının tanımından $[a, b] \sqsubseteq [r_1, r_2]$ olur. Bu da $M = [a, b]$ nin maksimal eleman olması ile çelişir. O halde $\mathcal{J}$ nin maksimal elemanları tek nokta kümeleridir. Böylece uygun topolojilerle elde edilen $\mathcal{J}$ ailesinin tüm maksimal elemanlarının kümesi $\max(\mathcal{J})$, $\mathbb{R}$ nin bir kopyasıdır. $\mathcal{J}$ üzerinde, Scott topoloji olarak adlandırılan, ilerleyen kısımda bahsedilecek olan özel bir topoloji vardır. $\max(\mathcal{J})$, Scott topoloji kullanılarak $\mathcal{J}$ nin bir alt uzayı olacak şekilde topoloji oluşturduğunda $\max(\mathcal{J})$, $\mathbb{R}$ ye homeomorf olur. Bu durumda $(\mathcal{J}, \sqsubseteq)$ $\mathbb{R}$ yi temsil eder denir [6].

$(\mathcal{J}, \sqsubseteq)$ nin $\mathbb{R}$ yi temsil ettiği yukarıdaki örnek genel bir yapının özel halidir. $(P, \sqsubseteq)$ kısmi sıralı kümesi ile başlayalım.

3.1. Tanım

$(P, \sqsubseteq)$ kısmi sıralı küme olmak üzere, eğer P kümesinin boştan farklı yönlendirilmiş her D altkümesi P kümesinde bir en küçük üst sınıra sahipse yani $\sup(D) \in P$ ise $(P, \sqsubseteq)$ kümesine yönlendirilmeye göre tam olan kısmi sıralı (ytks) küme denir [9].

$(P, \sqsubseteq)$ üzerinde “ $\ll$ ” ile ikinci bir bağıntıyı şu şekilde tanımlayalım:

$p, q \in P$ olmak üzere;

“ $p \ll q \Leftrightarrow q \sqsubseteq \sup(D)$ olacak biçimdeki yönlendirilmiş her $D \subseteq P$ altkümesi için $p \sqsubseteq d$ olacak şekilde en az bir $d \in D$ vardır [9].”

Genel olarak $p \ll q$ ifadesi “ p, q nun çok altındadır” veya “ q, p nin çok üstündedir” diye okunur. Her $q \in P$ için $D = \{q\}$ yönlendirilmiş bir küme olduğundan her $p, q \in P$ için $p \ll q$ olması $p \sqsubseteq q$ olmasını gerektirir. “ $\ll$ ” bağıntısı yansıyan olmak zorunda değildir. En az bir $p \in P$ için $p \ll p$ bağıntısı sağlanabilir [9].

3.2. Tanım

$(P, \sqsubseteq)$ kısmi sıralı küme olmak üzere $p \ll p$ biçimindeki her $p \in P$ elemanına P kümesinin kompakt elemanları denir [9].

$p \in P$ için $\uparrow(p) = \{q \in P : p \ll q\}$ ve $\downarrow(p) = \{q \in P : q \ll p\}$ kümelerini tanımlayalım [9].

3.3. Tanım

$(P, \sqsubseteq)$ ytks bir küme olmak üzere eğer her bir $p \in P$ için $\downarrow(p)$ kümesi “ $\sqsubseteq$ ” bağıntısına göre yönlendirilmiş ve en küçük üst sınırı p ise $(P, \sqsubseteq)$ kısmi sıralı kümesine sürekli denir [9].

Örnek

(X, τ) kompakt topolojik bir uzay olmak üzere $P = \{K \subseteq X: K \neq \emptyset \text{ ve } K \text{ kapalı}\}$ kümesi sürekli yönlendirmeye göre tam olan kısmi sıralı bir kümedir.

İspat

Herhangi bir $D \subseteq P$ yönlendirilmiş altkümesini alalım. D kümesi “ $\supseteq$ ” bağıntısıyla kısmi sıralama olduğundan D nin supremumu D deki elemanların kesişimidir. Yani $\sup D = \bigcap_{K \in D} K$ dır. Aynı zamanda D kümesi yönlendirilmiş olduğundan sonlu arakesit özelliğine sahiptir. X kompakt ve D “ $\supseteq$ ” bağıntısına göre yönlendirilmiş olduğundan X ve D sonlu arakesit özelliğine sahip olup $\bigcap_{K \in D} K \neq \emptyset$ dir. Böylece $\sup D = \bigcap_{K \in D} K \neq \emptyset$ ve $\bigcap_{K \in D} K$ kapalı olduğundan $\sup D \in P$ olup $(P, \supseteq)$ ytkls bir kümedir.

Şimdi P kümesinin sürekli olduğunu görelim. Öncelikle $\downarrow (K_0) = \{F \in P: F \ll K_0\}$ kümesinin yönlendirilmiş olduğunu görelim. $F_1, F_2 \in \downarrow (K_0)$ için $F_3 = F_1 \cap F_2$ alırsak $F_1, F_2 \supseteq F_3$ sağlanır. Şöyle ki; $F_3 \in P$ olduğu ve $F_1 \supseteq F_3, F_2 \supseteq F_3$ olduğu açıktır.

Şimdi $F_3 \in \downarrow (K_0)$ olduğunu yani $F_3 \ll K_0$ olduğunu görelim. $D \subseteq P$ yönlendirilmiş bir küme olmak üzere $\sup D \supseteq K_0$ olsun. $\sup D = \bigcap_{K \in D} K$ olduğundan $K_0 \subseteq \bigcap_{K \in D} K$ dır. $F_1 \ll K_0$ ve $F_2 \ll K_0$ olduğundan “ $\ll$ ” bağıntısının tanımından $F_1 \supseteq K_1$ ve $F_2 \supseteq K_2$ olacak biçimde K_1, K_2 vardır. D yönlendirilmiş olduğundan $K_3 \subseteq K_1$ ve $K_3 \subseteq K_2$ olacak biçimde bir $K_3 \in D$ vardır. Böylece $K_3 \subseteq K_1 \subseteq F_1$ ve $K_3 \subseteq K_2 \subseteq F_2$ olup $K_3 \subseteq F_1 \cap F_2 = F_3$ olur. Böylece $F_3 \ll K_0$ dır.

Şimdi de $\sup \downarrow (K_0) = K_0$ olduğunu görelim.

$\sup \downarrow (K_0) = \bigcap \{F: F \supseteq K_0, F \text{ kapalı}\} = \overline{K_0} = K_0$ sağlanır. O halde $(P, \supseteq)$ sürekli ytkls bir kümedir.

Şimdi herhangi bir $(P, \sqsubseteq)$ ytkls kümesi üzerinde Scott topolojiyi tanımlayalım.

3.4. Tanım

$(P, \sqsubseteq)$ ytk's bir küme olmak üzere $U \subseteq P$ olsun. Eğer

- a) $x \in U$ ve $x \sqsubseteq y \in P$ ise $y \in U$ dir.
- b) $\sup(D) \in U$ olacak biçimdeki yönlendirilmiş her $D \subseteq P$ altkümesi için $D \cap U \neq \emptyset$ dir.

özellikleri sağlanıyorsa U kümesine Scott açıktır denir [9].

P üzerindeki bütün Scott açık kümelerin ailesi Scott topoloji olarak adlandırılır. $\tau = \{U \subseteq P : U \text{ Scott açık}\}$ olsun. Gerçekten de (P, τ) bir topolojik uzaydır. Şöyle ki;

$t_1)$ $\emptyset$ ve $P \in \tau$ olduğu açıktır.

$t_2)$ $U_1, U_2, \dots, U_n \in \tau$ olsun.

- a) $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$ ve $x \sqsubseteq y \in P$ olsun. $1 \leq i \leq n$ biçimindeki her i için $x \in U_i$, U_i Scott açık ve $x \sqsubseteq y$ olduğundan $y \in U_i$ dir. Buradan $y \in \bigcap_{i=1}^n U_i$ sağlanır.
- b) $\sup D \in \bigcap_{i=1}^n U_i$ olacak biçimdeki herhangi bir $D \subseteq P$ yönlendirilmiş kümesini alalım. $1 \leq i \leq n$ biçimindeki her i için $\sup(D) \in U_i$ ve U_i Scott açık olduğundan $D \cap U_i \neq \emptyset$ dir. O halde $1 \leq i \leq n$ biçimindeki her i için $x_i \in U_i$ olacak biçimde bir $x_i \in D$ ve vardır. D kümesi yönlendirilmiş olduğundan $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere her x_i için $x_i \sqsubseteq y$ olacak şekilde bir $y \in D$ vardır. $1 \leq i \leq n$ biçimindeki her i için $x_i \in U_i$, $x_i \sqsubseteq y$ ve U_i Scott açık olduğundan her i için $y \in U_i$ olup $D \cap (\bigcap_{i=1}^n U_i) \neq \emptyset$ sağlanır.

Tanım 3.4 den $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$ olur.

$t_3)$ $\{U_i\}_{i \in I} \in \tau$ olsun.

- a) $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ ve $x \sqsubseteq y$ olsun. O halde en az bir $k \in I$ için $x \in U_k$ ve $x \sqsubseteq y$ olduğundan ve U_k Scott açık olduğundan $y \in U_k$ olur. Buradan $y \in \bigcup_{i \in I} U_i$ sağlanır.
- b) $D \subseteq P$ yönlendirilmiş bir küme olmak üzere $\sup(D) \in \bigcup_{i \in I} U_i$ olsun. $\sup(D) \in \bigcup_{i \in I} U_i$ olduğundan $\sup(D) \in U_j$ olacak biçimde bir $j \in I$ vardır. U_j Scott açık olduğundan $D \cap U_j \neq \emptyset$ olup $D \cap (\bigcup_{i \in I} U_i) \neq \emptyset$ dir.

Böylece $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$ olur.

Örnek

" $\leq$ " $\mathbb{R}$ deki bilinen sıralama olmak üzere $(P = \{0,1\}, \leq)$ kısmi sıralı kümesinin üzerindeki Scott topoloji $\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}$ Sierpinski topolojisiidir. Gerçekten de;

Öncelikle $(P = \{0,1\}, \leq)$ kümesinin ytkls bir küme olduğunu gösterelim. $D \subseteq P$ yönlendirilmiş bir küme olsun. $P = \{0,1\}$ kümesinin $\leq$ bağıntısına göre yönlendirilmiş tüm altkümeleri $\{0,1\}$, $\{0\}$ ve $\{1\}$ dir.

Eğer $D = \{0,1\}$ ise $\sup(D) = 1$ olup $\sup(D) \in P$ dir.

Eğer $D = \{0\}$ ise $\sup(D) = 0$ olup $\sup(D) \in P$ dir.

Eğer $D = \{1\}$ ise $\sup(D) = 1$ olup $\sup(D) \in P$ dir.

Böylece $(P, \leq)$ ytkls bir kümedir.

Şimdi de Scott açık kümeleri bulalım.

$U = \{0\}$ olsun.

a) $0 \in U$ ve $0 \leq 1$ olmasına rağmen $1 \notin U$ dur.

O halde $U = \{0\}$ Scott açık değildir.

$U = \{1\}$ olsun.

a) $1 \in U$ ve $1 \leq 1$ olup $1 \in U$ dur.

b) $\sup(D) \in U$ olacak biçimde herhangi bir yönlendirilmiş $D \subseteq P$ altkümesini alalım. $\sup D = 1 \in U$ olacak biçimdeki yönlendirilmiş altkümeler $D = \{1\}$ ve $D = \{0,1\}$ dir.

$D = \{1\}$ yönlendirilmiş kümesini alalım. $D \cap U = \{1\} \neq \emptyset$ dir.

$D = \{0,1\}$ yönlendirilmiş kümesini alalım. $D \cap U = \{1\} \neq \emptyset$ dir.

O halde $U = \{1\}$ Scott açıktır.

$U = \{0,1\}$ olsun.

- a) $0 \in U$ ve $0 \leq 0$ olup $0 \in U$ dur. $0 \leq 1$ olup $1 \in U$ dur.
 $1 \in U$ ve $1 \leq 1$ olup $1 \in U$ dur.
- b) $\sup(D) \in U$ olacak biçimdeki yönlendirilmiş altkümeler $D = \{0\}$, $D = \{1\}$ ve $D = \{0,1\}$ dir.

$D = \{0\}$ yönlendirilmiş kümesini alalım. $D \cap U = \{0\} \neq \emptyset$ dır.

$D = \{1\}$ yönlendirilmiş kümesini alalım. $D \cap U = \{1\} \neq \emptyset$ dır.

$D = \{0,1\}$ yönlendirilmiş kümesini alalım. $D \cap U = \{0,1\} \neq \emptyset$ dir.

O halde $U = \{0,1\}$ Scott açıktır.

Bu durumda Scott açıkların oluşturduğu topoloji $\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}$ dir.

3.5. Lemma

$(D, \sqsubseteq)$ boştan farklı herhangi bir yönlendirilmiş küme olsun. Eğer $(D, \sqsubseteq)$ maksimum eleman içermiyorsa her bir $d \in D$ için D kümesinin farklı elemanlarının $d = d_1 \sqsubseteq d_2 \sqsubseteq d_3 \sqsubseteq \dots$ olacak şekilde bir $\langle d_j \rangle$ dizisi vardır [9].

İspat

$d \in D$ olsun. $d = d_1$ diyelim. D kümesinin maksimum elemanı olmadığından $d = d_1 \sqsubseteq d_2$ olacak şekilde $d_2 \in D$ vardır. D yönlendirilmiş küme olduğundan $d = d_1 \sqsubseteq d_2 \sqsubseteq p$ olacak şekilde $p \in D$ vardır. ($p = d_2$ alabiliriz.) Bu şekilde devam edilirse $d = d_1 \sqsubseteq d_2 \sqsubseteq d_3 \sqsubseteq \dots$ olacak şekilde bir $\langle d_j \rangle$ dizisi elde edilir.

3.6. Lemma

Eğer $(P, \sqsubseteq)$ ytkş bir küme ise her bir $p \in P$ için $p \sqsubseteq x$ olacak şekilde en küçük bir $x \in P$ maksimal elemanı vardır [9].

İspat

$p \in P$ olsun. p maksimal ise sağlanır. p maksimal değilse $p = p_0$ diyelim. p_0 maksimal eleman olmadığından $p_0 \sqsubseteq p_1$ olacak şekilde en az bir $p_1 \in P \setminus \{p_0\}$ vardır. p_1 maksimal ise sağlanır. p_1 maksimal eleman değilse $p_1 \sqsubseteq p_2$ olacak şekilde en az bir $p_2 \in P \setminus \{p_0, p_1\}$ vardır. Bu şekilde devam edilerek en az bir $\{p_n : n \in \omega\}$ artan dizisi bulunur. Zorn Lemması'nda belirtildiği gibi "Kısmi sıralı bir kümedeki her zincir bir maksimal zincir tarafından içerilir." ifadesinden Z maksimal zincir ve $\{p_n : n \in \omega\} \subseteq Z$ olacak şekilde en az bir $Z \subseteq P$ vardır. Z zincir olduğundan Z yönlendirilmiştir. Dolayısıyla $\sup Z \in P$ vardır. $\sup Z$ maksimal elemandır. Gerçekten de $\sup Z$ maksimal eleman değilse $\sup Z \sqsubseteq r$ ve $\sup Z \neq r$ olacak şekilde en az bir $r \in P$ vardır. Buradan $r \notin Z$ ve her $p \in Z$ için $p \sqsubseteq r$ olur. Böylece $Z \cup \{r\} \neq Z$ zincir olur. Bu da Z nin maksimal olması ile çelişir.

P kümesinin bütün maksimal elemanlarının kümesi $\max(P)$ ile gösterilir [9].

3.7. Tanım

P sürekli ytks bir küme olmak üzere eğer bir X topolojik uzayı, Scott topolojiden indirgenen $\max P$ topolojik uzayına homeomorf ise X uzayına sürekli ytks bir P kümesinin maksimal elemanları ile temsil edilebilir denir [9].

3.8. Teorem

Metriklenebilir bir X uzayının, en az bir sürekli ytks kümenin maksimal elemanları ile temsil edilebilmesinin gerek ve yeter şartı X uzayının tam metriklenebilmesidir [9].

İspat

X metriklenebilir bir uzay olmak üzere X tam metriklenebilir bir uzay olsun. X in sürekli ytks bir kümenin maksimal elemanları ile temsil edilebilir olduğunu görmeliyiz.

$P = X \times [0, \infty)$ üzerine " $\sqsubseteq$ " bağıntısı şöyle tanımlansın:

" $(x, r) \sqsubseteq (y, s) \Leftrightarrow d(x, y) \leq r - s$ olmasıdır."

P kümesinin " $\sqsubseteq$ " bağıntısına göre kısmi sıralı küme olduğunu görelim. $d(x, x) = 0 \leq r - r = 0$ olup $(x, r) \sqsubseteq (x, r)$ olduğundan yansıma özelliği sağlanır. $(x, r), (y, s) \in X \times [0, \infty)$ olmak üzere $(x, r) \sqsubseteq (y, s)$ ve $(y, s) \sqsubseteq (x, r)$ ise $d(x, y) \leq r - s$ ve $d(y, x) \leq s - r$ olur. $d(x, y) = d(y, x)$ ve $d(x, y) \geq 0$ olduğundan $r - s = 0$ olmalıdır. Buradan $r = s$ olur. Bu durumda $0 \leq d(x, y) \leq 0$ olacağından $d(x, y) = 0$ ve böylece $x = y$ olur. O halde $(x, r) = (y, s)$ olup ters simetrik özelliği sağlanır.

$(x, r), (y, s), (t, u) \in X \times [0, \infty)$ olmak üzere $(x, r) \sqsubseteq (y, s)$ ve $(y, s) \sqsubseteq (t, u)$ ise " $\sqsubseteq$ " bağıntısının tanımından $d(x, y) \leq r - s$ ve $d(y, t) \leq s - u$ olur. $d(x, y) + d(y, t) \leq r - s + s - u$ olup $d(x, t) \leq d(x, y) + d(y, t) \leq r - u$ olur. Buradan $d(x, t) \leq r - u$ olup $(x, r) \sqsubseteq (t, u)$ olur. Böylece geçişme özelliği sağlanır.

Şimdi de $(P, \sqsubseteq)$ kümesinin yönlendirmeye göre tam olduğunu görelim. P nin boştan farklı herhangi bir yönlendirilmiş altkümesini alalım. Eğer D kümesinin en büyük elemanı varsa $\sup D \in P$ sağlanır. Eğer D kümesinin en büyük elemanı yoksa o zaman D içinde artan bir (x_n, r_n) dizisi bulunabilir. $(x_n, r_n) \sqsubseteq (x_{n+1}, r_{n+1})$ olduğundan $d(x_n, x_{n+1}) \leq r_n - r_{n+1}$ dir. Buradan $r_{n+1} \leq r_n$ olup $(r_n) \subseteq [0, \infty)$ azalan ve alttan sınırlıdır. O halde (r_n) dizisinin yakınsadığı en az bir $r \in [0, \infty)$ vardır. Böylece (r_n) Cauchy dizisi olup $(x_n) \subseteq X$ Cauchy dizisi olur. Şöyle ki $\varepsilon > 0$ verilsin. (r_n) Cauchy dizisi olduğundan öyle bir n_0 doğal sayısı vardır ki $m, n \geq n_0$ biçimindeki her m, n doğal sayıları için $(r_n - r_m) < \varepsilon$ sağlanır. Genelliği bozmadan $m < n$ kabul edebiliriz. $\{(x_n, r_n): n \in \mathbb{N}\}$ dizisi artan olduğundan $(x_m, r_m) \sqsubseteq (x_n, r_n)$ olup $d(x_m, x_n) \leq r_m - r_n$ dir. $r_m - r_n < \varepsilon$ olduğundan $d(x_m, x_n) \leq \varepsilon$ olur. Böylece $(x_n) \subseteq X$ Cauchy dizisi olur. (X, d) tam metrik uzay olduğundan (x_n) dizisinin yakınsadığı en az bir $x \in X$ vardır. Rutin yöntemlerle $\sup D = (x, r) \in P$ olduğu görülebilir.

P üzerindeki ikinci bağıntı " $\ll$ " :

" $(x, r) \ll (y, s) \equiv D \subseteq P$ yönlendirilmiş olmak üzere $(y, s) \sqsubseteq \sup D$ ise $(x, r) \sqsubseteq (z, t)$ olacak şekilde en az bir $(z, t) \in D$ vardır."

olmak üzere kolayca görülebilir ki

$(x, r) \ll (y, s)$ olması için gerek ve yeter şart $d(x, y) < r - s$ dir.

$(P, \sqsubseteq)$ kümesinin sürekli olduğunu görelim. Her $p \in P$ için $\Downarrow (x, r)$ kümesi " $\sqsubseteq$ " bağıntısı ile yukarı yönlendirilmiş ve $\sup(\Downarrow (x, r)) = (x, r)$ olmalıdır.

$x \in X, s \in [0, \infty)$ olmak üzere X kümesinin elemanları birbiri ile karşılaştırılamayacağından $\Downarrow (x, r)$ kümesinin elemanları (x, s) şeklinde olmalıdır. Şimdi $(x, s), (x, t) \sqsubseteq (x, u)$ olduğunu görelim. Her $(x, s), (x, t) \in \Downarrow (x, r)$ için $u = \min\{s, t\}$ seçelim. $(x, s) \not\sqsubseteq (x, u)$ olsun. O halde $d(x, x) = 0 > s - u$ olur. $\min u = s$ ise $0 > 0$, $\min u = t$ ise $s - t > 0$ olup her iki durumda da çelişki elde edilir. Böylece $(x, s) \sqsubseteq (x, u)$ sağlanır. Benzer şekilde $(x, t) \sqsubseteq (x, u)$ olduğu görülür. O halde $\Downarrow (x, r)$ kümesi " $\sqsubseteq$ " bağıntısı ile yukarı yönlendirilmiştir. $\sup(\Downarrow (x, r)) = (x, r)$ olduğu kolaylıkla görülür.

$\max(P) = \{(x, 0) : x \in X\}$ dır. Gerçekten de $x \in X$ için $(x, 0)$ maksimal eleman olmasın. O halde $(x, 0) \sqsubseteq (y, s)$ olacak şekilde $(y, s) \in X$ vardır. Buradan $d(x, y) \leq 0 - s$ olur. $s \in [0, \infty)$ ve $0 - s \geq 0$ olduğundan $s = 0$ olur. Böylece $d(x, y) = 0$ olacağından $x = y$ olmalıdır. Dolayısıyla $\max(P) = \{(x, 0) : x \in X\}$ olur.

$i: (X, \tau) \rightarrow (\max(P), \sigma_{\max(P)})$ olmak üzere i fonksiyonunu $i(x) = (x, 0)$ şeklinde tanımlayalım. $i(x)$ fonksiyonunun homeomorfizm olduğu açıktır. Böylece X uzayı, sürekli ytk's bir P kümesinin maksimal elemanları ile temsil edilebilir.

Diğer taraftan (X, d) metrik uzay olmak üzere X sürekli ytk's bir küme olsun. $(x_n) \subseteq X$ Cauchy dizisi ise $(x_{n_k}, \frac{1}{2^k})$ artan dizi olacak şekilde en az bir $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ vardır. Buradan $\sup(x_{n_k}, \frac{1}{2^k}) = (y, 0)$ olacak şekilde $(y, 0) \in P$ vardır. (x_{n_k}) dizisi y ye yakınsar. $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ ve $(x_n) \subseteq X$ Cauchy dizisi olduğundan (x_n) dizisi x e yakınsar. Böylece (X, d) tam metrik uzaydır.

3.9. Teorem

Herhangi bir yerel kompakt Hausdorff uzayı, en az bir sürekli ytk's kümenin maksimal elemanları ile temsil edilebilir [9].

3.10. Tanım

$(P, \sqsubseteq)$ sürekli ytk's bir küme olmak üzere $Q \subseteq P$ olsun. Eğer her $p \in P$ için $\downarrow(p) \cap Q$ kümesi, en küçük üst sınırı p olan yönlendirilmiş bir küme içeriyorsa Q altkümesine P için bir tabandır denir [7].

Q tabanına sahip $(P, \sqsubseteq)$ sürekli ytk's bir küme verilsin. $\{\uparrow(p) : p \in Q\}$ ailesi P üzerindeki Scott topoloji için tabandır. Ayrıca $\{\uparrow(p) \cap \max(P) : p \in Q\}$ ailesi P nin bütün maksimal elemanlarını içeren $\max(P)$ kümesi üzerindeki altuzay topolojisinin tabanıdır.

Bu çalışmada ytk's kümelerle ilgili kullanacağımız birkaç bilinen sonucu ifade edelim

3.11. Lemma

P sürekli ytk's bir küme ve Q, P için bir taban olsun.

1. (Artan özellik) Eğer $a \sqsubseteq b \ll c \sqsubseteq d$ ise $a \ll d$ dır [7].
2. (Ara değer özelliği) $y \in P$ ve $M \subseteq P$ sonlu küme olmak üzere her bir $m \in M$ için $m \ll y$ olsun. Bu durumda öyle bir $y' \in Q$ vardır ki her $m \in M$ için $m \ll y' \ll y$ olur [7].
3. $D \subseteq Q$ olmak üzere D kümesi $\ll$ bağıntısı ile yukarı yönlendirilmiş ise her $d \in D$ için $d \ll \sup D$ dir [7].

İspat

1. $a \sqsubseteq b \ll c \sqsubseteq d$ olsun. $D \subseteq P$ yönlendirilmiş bir küme olmak üzere $d \sqsubseteq \sup D$ olsun. $c \sqsubseteq d$ ve $d \sqsubseteq \sup D$ olduğundan $c \sqsubseteq \sup D$ dir. $b \ll c, c \sqsubseteq \sup D$ ve D yönlendirilmiş olduğundan $b \sqsubseteq d_0$ olacak biçimde bir $d_0 \in D$ vardır. $a \sqsubseteq b$ ve $b \sqsubseteq d_0$ olduğundan $a \sqsubseteq d_0$ olur ki böylece $a \ll d$ dir.
2. Ara değer özelliği [10] deki Lemma 2.2.15 den sağlanır.
3. $D \subseteq Q$ olmak üzere D kümesi $\ll$ bağıntısı ile yukarı yönlendirilmiş . P sürekli ytk's bir küme olduğundan $\sup D \in P$ olup $(P, \sqsubseteq)$ kısmi sıralı küme olduğundan $\sup D \sqsubseteq \sup D$ sağlanır. D kümesi " $\ll$ " bağıntısı ile yönlendirilmiş olduğundan her $d \in D$ için $d \ll d_0$ olacak şekilde $d_0 \in D$ vardır. Buradan $d \sqsubseteq d_0$ olur. O halde D yönlendirilmiş

küme $\sup D \sqsubseteq \sup D$ ve $d \sqsubseteq d_0$ olacak şekilde $d_0 \in D$ olduğundan " $\ll$ " bağıntısının tanımından $d \ll \sup D$ sağlanır.

3.12. Önerme

$(P, \sqsubseteq)$ sürekli ytkş bir küme olmak üzere (X, σ) topolojik uzayı için $X = \max(P)$ olsun. I, X kümesinin keyfi bir altkümesi olmak üzere $\sigma \cup \{\{y\}: y \in I\}$ ailesinin X üzerinde ürettiği topoloji τ olsun. Bu durumda $\max(Q) = (X, \tau)$ olacak şekilde sürekli ytkş bir $(Q, \leq)$ kümesi vardır [9].

İspat

Her bir $y \in I$ için, $y \neq z$ iken $y^+ \neq z^+$ olacak biçimde P de olmayan bir y^+ noktasını seçelim. $Q = P \cup \{y^+: y \in I\}$ olsun. Q üzerinde

$$“\leq = \sqsubseteq \cup \{(p, y^+): p \sqsubseteq y\} \cup \{(y, y^+): y \in I\} \cup \{(y^+, y^+): y \in I\}”$$

bağıntısını tanımlayalım.

“ $\leq$ ” bağıntısı Q kümesi üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Gerçekten de

1) Her $q \in Q$ için $q \leq q$ olduğunu görelim.

$q \in P$ ise $(P, \sqsubseteq)$ kısmi sıralı küme olduğundan $q \sqsubseteq q$ sağlanır. Böylece $q \leq q$ dur.

$q \in \{y^+: y \in I\}$ ise “ $\leq$ ” bağıntısının tanımından $q \leq q$ sağlanır.

2) $p, q \in Q$ için $p \leq q$ ve $q \leq p$ ise $q = p$ olduğunu görelim.

$p, q \in P$ ise $(P, \sqsubseteq)$ kısmi sıralı küme olduğundan sağlanır.

$p \in P$ ve $q \in \{y^+: y \in I\}$ olsun. $p \leq q^+$ fakat $q^+ \not\leq p$ dır.

$p, q \in \{y^+: y \in I\}$ olsun. $p^+ \leq q^+$ ve $q^+ \leq p^+$ ise $p = q$ sağlanır.

3) $p, q, r \in Q$ için $p \leq q$ ve $q \leq r$ ise $p \leq r$ olduğunu görelim.

$p, q, r \in P$ ise $(P, \sqsubseteq)$ kısmi sıralı küme olduğundan sağlanır.

$p, q \in P$ ve $r \in \{y^+ : y \in I\}$ ise $p \leq q$ ve $q \not\leq r^+$ olur.

$p \in P$ ve $q, r \in \{y^+ : y \in I\}$ ise $p \not\leq q^+$ olur.

$p, q, r \in \{y^+ : y \in I\}$ olsun. $p^+ \leq q^+$ ve $q^+ \leq r^+$ ise $p=q=r$ olup $p \leq r$ sağlanır.

$\max(Q) = \{y : y \in X - I\} \cup \{y^+ : y \in I\}$ olduğu açıktır. Biz aşıkarak bu kümeyi X ile özdeş kılabiliriz.

Şimdi $(Q, \leq)$ kısmi sıralı kümesinin yönlendirmeye göre tam olduğunu görelim. Bunun için eğer D , Q kümesinin boştan farklı yönlendirilmiş altkümesi ise $\sup D \in Q$ olduğunu görmeliyiz.

$D \subseteq P$ olması durumunda $(P, \sqsubseteq)$ yönlendirmeye göre tam olduğundan bir $p_0 \in P$ noktası $(P, \sqsubseteq)$ de D kümesinin en küçük üst sınırıdır. $\sup D = p_0 \in P \subseteq Q$ sağlanır.

$D \not\subseteq P$ durumunda $y^+ \in D$ olacak biçimde bir $y \in I$ vardır. D yönlendirilmiş olduğundan başka hiçbir $z \in I$ için $z^+ \notin D$ dir. Şöyle ki; $z \in I$ ve $y \neq z$ olmak üzere eğer $z^+ \in D$ olsaydı, $y^+ \in D$, $z^+ \in D$ ve D yönlendirilmiş olduğundan $y^+ \leq d$ ve $z^+ \leq d$ olacak biçimde bir $d \in D$ elemanının var olması gerekirdi. Ancak bu durumda “ $\leq$ ” bağıntısının tanımından $d = y^+$ ve $d = z^+$ olurdu ki bu $y \neq z$ olması ile çelişirdi. O halde D nin y^+ dan başka bu türden eleman yoktur. Öyleyse bu durumda $\sup D = y^+$ olup $\sup D \in Q$ sağlanır.

Şimdi Q kümesinin sürekli olduğunu görelim. İspatın bu kısmında $\downarrow_{\sqsubseteq}(r)$ kümesi, $(P, \sqsubseteq)$ kısmi sıralı kümesinde r elemanının “çok aşağısında” olan P kümesinin elemanlarının ailelerini, $\downarrow_{\leq}(r)$ kümesi de $(Q, \leq)$ kısmi sıralı kümesinde r elemanının “çok aşağısında” olan Q kümesinin elemanlarının ailelerini belirtecektir. Her bir $r \in Q$ için $\downarrow_{\leq}(r)$ kümesinin yönlendirilmiş ve en küçük üst sınırı Q kümesinde kalacak şekilde $r = \sup(\downarrow_{\leq}(r))$ olduğunu görmeliyiz.

Herhangi bir $r \in Q$ alalım. $r \in P$ ise P sürekli olduğundan $\downarrow_{\sqsubseteq}(r)$ yönlendirilmiş olur ve dolayısıyla da $\downarrow_{\leq}(r)$ kümesi yönlendirilmiş ve $r = \sup(\downarrow_{\leq}(r))$ olur. İspatın bu kısmını tamamlamak için her bir $y \in I$ için $y^+ \in \downarrow_{\leq}(y^+)$ olduğunu görelim. $E \subseteq Q$ yönlendirilmiş bir küme ve E kümesinin en küçük üst sınırı da $(Q, \leq)$ kümesinin elemanı olacak şekilde $y^+ \leq \sup_{\leq}(E)$ olsun. Eğer $y^+ \in E$ ise ispata gerek yoktur. $y^+ \notin E$ olsun. Herhangi bir $e \in E$ için $e \leq y^+$ olduğunu “ $\leq$ ” bağıntısının tanımından biliyoruz. Öyleyse “ $\leq$ ”

bağıntısının tanımından $y \in P$ ve $e \sqsubseteq y$ olur. Ancak bu durumda y , hem E için bir üst sınırdır hem de y^+ 'nın kesinlikle “aşağısındadır”. Fakat bu mümkün değildir. Bu nedenle her bir $y^+ \in Q$ için $y^+ \in \downarrow_{\leq} (y^+)$ olur. Buradan $y^+, \downarrow_{\leq} (y^+)$ kümesinin herhangi iki elemanının ortak uzantısıdır. Böylece $\downarrow_{\leq} (y^+)$ kümesinin yönlendirilmiş ve $y^+ = \sup_{\leq} \downarrow_{\leq} (y^+)$ olduğunu ispatlanır.

$\max(Q) = \{y: y \in X - I\} \cup \{y^+: y \in I\}$ olduğunu belirtmiştik. Şimdi de $\max(Q)$ üzerindeki Scott topolojinin önermede ifade edilen τ topolojisi olduğunu görelim.

$z \in U \in \tau$ olsun. Eğer $z \in I$ ise $z, z^+ \in \max(Q)$ ile özdeş olacak şekilde tanımlanır. Çünkü $z^+ \in \downarrow_{\leq} (z^+)$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca $z^+ \in \uparrow_{\leq} (z^+)$ sağlanır. Buradan $\uparrow_{\leq} (z^+) \cap \max(Q) = \{z^+\}$ olur. Bu da bize U nun Scott topolojiye göre z noktasının bir komşuluğu olduğunu gösterir.

$z \in X - I$ olacak şekilde $z \in U$ ve $u \in \tau$ olsun. O zaman U, σ topolojisinde z elemanının komşuluğudur. Böylece $z \in \uparrow_{\sqsubseteq} (p)$ ve $\uparrow_{\sqsubseteq} (p) \cap \max(P) \subseteq U$ olacak şekilde en az bir $p \in P$ vardır. Dolayısıyla $\uparrow_{\leq} (p) \cap \max(P) \subseteq U$ sağlanır.

Tersine $r \in Q$ iken herhangi bir $\uparrow_{\leq} (r) \cap \max(Q)$ kümesini düşünelim. Eğer $r \in P$ ise $\uparrow_{\leq} (p) \cap \max(P)$ kümesi yerine $\uparrow_{\sqsubseteq} (r) \cap \max(P)$ kümesini alabiliriz. Bu küme σ da açıktır; dolayısıyla da τ da açık olur. $r \notin P$ ise $y \in I$ için $r = y^+$ yazılabilir. Böylece $\uparrow_{\leq} (r) \cap \max(Q) = \{y^+\} \in \tau$ dur. Böylece $\max(Q)$ üzerindeki Scott topoloji τ topolojisidir.

Örnek

Michael doğrusu sürekli ytk's bir kümenin maksimal elemanları ile temsil edilebilirdir [9].

İspat

Alışılmış reel sayılar uzayı $\sigma = \{[a,b]: a \leq b, a, b \in \mathbb{R}\}$ ailesinin " $\supseteq$ " bağıntısına göre maksimal elemanları tarafından temsil edilebilir olduğu 3. bölümde gösterilmiştir.

$\mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}$ tüm irrasyonel sayıların kümesi olmak üzere $\tau = \sigma \cup \{\{x\}: x \in \mathbb{P}\}$ Michael doğrusunun sürekli ytk bir kümenin maksimal elemanları ile temsil edilebilir olduğunu göstermeliyiz. Önerme 3.12 den dolayı $\max(Q) = (\mathbb{R}, \tau)$ olacak şekilde sürekli bir ytk Q kümesi vardır.

Sorgenfrey doğrusunun en az bir sürekli ytk kümenin maksimal elemanlarının uzayı olarak temsil edildiğini göstermek kolay değildir ancak bir sonraki örnekte bunun doğru olduğu gösterilmektedir.

Örnek

Sorgenfrey doğrusu S , herhangi sürekli ytk bir kümenin maksimal elemanları ile temsil edilebilir [9].

İspat

$a < b$ biçimindeki her a, b reel sayısı için $S(a, b)$ ile $a = x_1, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ ve $|x_{n+1} - x_n| \leq (b - a)/2$ koşullarını sağlayan kesin artan (x_n) dizisi gösterilsin.

$C_0 = \mathbb{Z}$ olsun ve verilen C_n için $C_{n+1} = \bigcup \{S(a, b): a < b, a, b \in C_n, (a, b) \cap C_n = \emptyset\}$ biçiminde tanımlansın. $C = \bigcup \{C_n: 0 \leq n < \omega\}$ olsun. Eğer $a < b$ bir C_n nin ardışık noktaları ise $b - a \leq 2^{-n}$ olur.

$A = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$ kümesi üzerinde $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kartezyen çarpım kümesi üzerindeki sözlük sıralamasının doğurduğu açık aralık topolojisinden indirgenen altuzay topolojisi var olsun. $a < b$ reel sayıları için $J(a, b) = [(a, 1), (b, 0)]$ olsun. Her bir $J(a, b)$, A kümesinin konveks ve kompakt bir altkümesidir.

$Q(\omega) = \{(\{(x, 0), (x, 1)\}, \omega): x \in \mathbb{R} - C\} \cup \{(\{(x, 1)\}, \omega): x \in \mathbb{R}\}$ ve her bir n için $0 \leq n < \omega$ olmak üzere $Q(n) = \{J(a, b, n): a < b, b \in C(n) \text{ ve } (a, b) \cap C_n = \emptyset\}$ ailesini tanımlayalım.

$q_1, q_2 \in Q$ olmak üzere $Q = \bigcup \{Q(n): 0 \leq n \leq \omega\}$ olsun. Q kümesi üzerinde “ $\sqsubseteq$ ” bağıntısını şöyle tanımlayalım:

$q_1 \sqsubseteq q_2$ olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartlardan birinin sağlanmasıdır.

- a) $q_1 = q_2$;
- b) $i = 1, 2$ için $q_i = (J(a_i, b_i), n_i) \in Q - Q(w)$, $J(a_2, b_2) \subseteq J(a_1, b_1)$ ve $n_1 < n_2$;
- c) $q_1 = (J(a, b), n) \in Q - Q(w)$, $q_2 \in Q(w)$ ve $q_2 \subseteq \text{Int}_A(J(a, b))$;
- d) $q_i = (p_i, \omega)$ ve $p_2 \subseteq p_1$.

$(Q, \sqsubseteq)$ bir kısmi sıralı kümedir. Gerçekten de her $q \in Q$ için $q = q$ olduğundan yansıma özelliği sağlanır.

$q_1, q_2 \in Q$ için $q_1 \sqsubseteq q_2$ ve $q_1 \sqsubseteq q_2$ olsun. Eğer her iki bağıntıda da (a) şartı sağlanıyorsa $q_1 = q_2$ olup ters simetrik özelliği sağlanır. Eğer her iki bağıntıda da (b) şartı sağlanıyorsa $J(a_2, b_2) \subseteq J(a_1, b_1)$, $n_2 < n_1$ ve $J(a_1, b_1) \subseteq J(a_2, b_2)$, $n_1 < n_2$ olur. Buradan $J(a_1, b_1) = J(a_2, b_2)$ ve $n_1 = n_2$ olup $q_1 = q_2$ den ters simetrik özelliği sağlanır. Her iki bağıntı aynı anda (c) şartını sağlayamaz. Eğer her iki bağıntıda da (d) şartı sağlıyorsa $q_1 = (p_1, \omega)$ ve $q_2 = (p_2, \omega)$ dır. Buradan $p_2 \subseteq p_1$ ve $p_1 \subseteq p_2$ olup $p_1 = p_2$ olur. Böylece $q_1 = q_2$ olup ters simetrik özelliği sağlanır.

$q_1, q_2, q_3 \in Q$ olsun. $q_1 \sqsubseteq q_2$ ve $q_2 \sqsubseteq q_3$ olsun. Her ikisi de (a) yı sağlıyorsa $q_1 = q_2$ veya $q_2 = q_3$ ise geçişme özelliği açıktır. Her ikisi de (b) yı sağlıyorsa $q_1 = (J(a_1, b_1), n_1)$, $q_2 = (J(a_2, b_2), n_2)$ ve $q_3 = (J(a_3, b_3), n_3)$ olmak üzere $J(a_2, b_2) \subseteq J(a_1, b_1)$, $n_1 < n_2$ ve $J(a_3, b_3) \subseteq J(a_2, b_2)$, $n_2 < n_3$ ise $J(a_3, b_3) \subseteq J(a_1, b_1)$ ve $n_1 < n_3$ olup $q_1 \sqsubseteq q_3$ sağlanır. Her iki bağıntı (c) yı sağlayamaz. Her ikisi de (d) yı sağlarsa $q_1 = (p_1, \omega)$, $q_2 = (p_2, \omega)$, $q_3 = (p_3, \omega)$ için $p_2 \subseteq p_1$ ve $p_3 \subseteq p_2$ olup $p_3 \subseteq p_1$ olur. Buradan $q_1 \sqsubseteq q_3$ sağlanır. $q_1 \sqsubseteq q_2$ için (b), $q_2 \sqsubseteq q_3$ için (c) sağlansın. $i = 1, 2$ için $q_i = (J(a_i, b_i), n_i) \in Q - Q(w)$, $J(a_2, b_2) \subseteq J(a_1, b_1)$ ve $n_1 < n_2$; $q_2 = J(a_2, b_2) \in Q - Q(w)$, $q_3 \in Q(w)$ ve $q_3 \subseteq \text{Int}_A(J(a_2, b_2))$ olur. Buradan $q_3 \subseteq \text{Int}_A(J(a_2, b_2)) \subseteq J(a_2, b_2) \subseteq J(a_1, b_1)$ olup $q_3 \subseteq J(a_1, b_1)$ olur. Buradan $q_1 \sqsubseteq q_3$ sağlanır. $q_1 \sqsubseteq q_2$ için (c), $q_2 \sqsubseteq q_3$ için (d) olamaz. Benzer şekilde bağıntının biri (b) yı diğeri (d) yı sağlayamaz. Böylece geçişme özelliği sağlanır.

Eğer E , kendisinin maksimum elemanını içermeyen Q kümesinin boş olmayan yönlendirilmiş bir altkümesi ise $E \cap Q(\omega) = \emptyset$ dir ve $\{\pi_1(e) : e \in E\}$ ailesi A kümesinin konveks kompakt altkümelerinin yönlendirilmiş ailesidir. Lemma 3.5 ten dolayı her bir

i için $\pi_2(e_i) < \pi_2(e_{i+1})$ iken E nin farklı elemanlarının $e_1 \sqsubseteq e_2 \sqsubseteq \dots$ dizisi vardır. $n_i = \pi_2(e_i)$ iken C_{ni} de ardışık noktalar üzerindeki genişlik kısıtlamasından dolayı en az bir $x \in \mathbb{R}$ için $\cap\{\pi_1(e): e \in E\} \subseteq \{(x, 0), (x, 1)\}$ olur. Eğer en az bir $e \in E$, $e = (J(x, b), n)$ formundaysa $\sup(E) = \{(x, 1)\}$ ve aksi taktirde $\sup(E) = \{(x, 0), (x, 1)\}$ dir. Buradan $(Q, \sqsubseteq)$ ytkls bir kümedir.

$\pi_2(q) < \omega$ olmak üzere herhangi bir $q \in Q$ için $q \ll q$ sağlanır. Öyleyse $q \in \Downarrow(q)$ dur. Bu nedenle $q, \Downarrow(q)$ nun herhangi iki ögesinin ortak uzantısıdır, $\Downarrow(q)$ yönlendirilmiş kümedir ve $q = \sup(\Downarrow(q))$ dur. Farklı $q_1, q_2 \in Q(\omega)$ için $q_1 \ll q_2$ bağıntısı asla sağlanmaz ve herhangi bir $q \in Q(\omega)$ için $\Downarrow(q) = \{q' \in Q - Q(\omega): q' \sqsubseteq q\}$ olur. Buradan $\Downarrow(q)$ yönlendirilmiştir ve $\sup(\Downarrow(q)) = q$ olur. Bu nedenle Q sürekli ytkls bir kümedir.

Q kümesinin maksimal elemanlarının kümesi $\max(Q) = \{(x, 1): x \in \mathbb{R}\}$ olur. Her bir $x \in \mathbb{R}$ için keyfi olarak küçük $\epsilon = b - x$ olmak üzere $q = (J(x, b), n) \in Q$ elemanları vardır. Böylelikle $\max(Q) \cap \uparrow q = [x, x + \epsilon)$ olur. Buradan Q üzerindeki Scott topoloji tarafından $\max(Q)$ üzerine indirgenmiş topoloji kesinlikle Sorgenfrey doğrusu topolojisidir [9].

Hangi uzayların her altuzayının sürekli ve yönlendirmeye göre tam olan kısmi sıralı kümelerin maksimal elemanları ile temsil edilebileceği halen açık bir problemidir.

Sürekli ve yönlendirmeye göre tam olan kısmi sıralı bir kümenin maksimal elemanları ile temsil edilebilen öyle X topolojik uzayları vardır ki bu X uzayı sürekli ve yönlendirmeye göre tam olan hiçbir kısmi sıralı kümenin maksimal elemanları ile temsil edilemeyen kapalı bir Y altuzayına sahiptir. O halde sürekli ve yönlendirmeye göre tam olan kısmi sıralı bir kümenin maksimal elemanları ile temsil edilebilme özelliği uzayın kapalı altuzaylarına geçmek zorunda değildir [9]. Şimdi buna bir örnek verelim.

Örnek

Y tamamen düzenli herhangi bir topolojik uzay olsun. Y nin Stone-Cech kompaktlaştırması βY olsun. Kompakt Hausdorff βY uzayının en az bir sürekli ytkls kümenin maksimal elemanları gibi temsil edilebildiğini biliyoruz. (Teorem 3.9 a bakınız.) $X, \beta Y - Y$ 'nin izole tüm noktaları ile βY 'den elde edilmiş uzay olsun. Önerme 3.12 den X sürekli ytkls bir

kümenin maksimal elemanlarının uzayı olarak temsil edilebilir ve Y, X 'in kapalı alt uzayıdır. Özel olarak, Y uzayını rasyonel sayıların alışılmış $\mathbb{Q}$ kümesini alalım. $\mathbb{Q}$ Baire uzayı olmadığından sürekli ytk's kümenin maksimal elemanlarının uzayı olarak temsil edilemez.

Sürekli ytk's bir kümenin maksimal elemanları ile temsil edilebilirliği kapalı kalıtsal özellik değilken açık kalıtsal özelliktir [9].

4. DOMAIN TEMSİLCİLİ TOPOLOJİK UZAYLAR

Dana Scott'un bilgisayar bilimlerinde kullanmak üzere matematiksel bir modelleme sunmasının ardından Edalat, Escuordo, Martin birçok çalışma gerçekleştirmiş ve Scott'un yapısını topolojide kullanmaya başlamışlardır. Bennet ve Lutzer [2] de üzerindeki Scott topoloji ile domain olarak adlandırılan sürekli yönlendirilmeye göre tam olan bir kısmi sıralı kümenin maksimal elemanları ile temsil edilebilen uzaylara domain temsilcili topolojik uzaylar (domain temsil edilebilir uzaylar) demişlerdir.

Bu bölümde öncelikle sürekli ytk's bir kümeden domain temsilcili uzaylara geçişten bahsedilecektir. Domain temsilcili uzayların tanımı ifade edilecek, bu uzaylara örnekler verilecektir. Ayrıca domain temsilcili topolojik uzayların özellikleri incelenecek, altuzaylarından bahsedilecektir.

4.1. Sürekli Yönlendirmeye Göre Tam Olan Kısmi Sıralı Kümelerden Domaine Geçiş

Bundan sonra sürekli ytk's $(P, \sqsubseteq)$ kümeleri "domain" olarak adlandırılacaktır [7]. Eğer bir X topolojik uzayı en az bir sürekli ytk's $(P, \sqsubseteq)$ kümesi için Scott topoloji kullanılarak elde edilen $\max(P)$ topolojik uzayına homeomorf ise X uzayı P kümesinin maksimal elemanlarının uzayı ile temsil edilebilir ve X uzayı domain temsilcilidir (veya domain temsil edilebilir ifadesi kullanılır.) [9].

En az bir domainin maksimal elemanlarının uzayı olarak temsil edilebilir olmak X uzayı üzerinde kuvvetli bir ayırt edici özelliktir. Örneğin, böyle uzaylar Baire uzayıdır [9].

Bilinen topolojik uzayların birçoğu en az bir sürekli ytk's kümenin maksimal elemanları olarak temsil edilebilir; yani domain temsilcilidir.

4.1.1. Tanım

(X, τ) bir T_1 uzayı olmak üzere;

1. $\{\varphi(q): q \in Q\} \subseteq \tau^*(x)$, τ için taban,
2. Q üzerindeki $\ll$ bağıntısı ters simetrik ve geçişli,
3. Her $p, q \in Q$ için $p \ll q \Rightarrow \varphi(q) \subseteq \varphi(p)$,

4. Her $x \in X$ için $\{q \in Q: x \in \varphi(q)\}$ kümesi $\ll$ bağıntısı ile yukarı yönlendirilmiş,
5. Eğer $D \subseteq Q$ ve $(D, \ll)$ yukarı yönlendirilmiş ise $\bigcap \{\varphi(q): q \in D\} \neq \emptyset$ dır.

şartlarını sağlayan $(Q, \ll, \varphi)$ üçlüsüne (X, τ) uzayını temsil eder denir, X uzayına da domain temsilcili uzay denir [11].

Tanım 4.1.1 deki (3), (4) ve (5) maddeleri aşağı yönlendirme bağıntısı ile şu şekilde ifade edilebilir:

1. Her $p, q \in Q$ için $p \ll q \Rightarrow \varphi(p) \subseteq \varphi(q)$,
2. Her $x \in X$ için $\{q \in Q: x \in \varphi(q)\}$ kümesi $\ll$ bağıntısı ile aşağı yönlendirilmiş,
3. Eğer $D \subseteq Q$ ve $(D, \ll)$ aşağı yönlendirilmiş ise $\bigcap \{\varphi(q): q \in D\} \neq \emptyset$ dır.

4.1.2. Lemma

X bir topolojik uzay olmak üzere X uzayı (P, Ξ) domainin (sürekli, ytk) maksimal elemanları ile temsil edilebilsin ve P nin bir tabanı Q olsun.

O zaman X uzayını temsil eden bir $(Q, \ll_Q, \varphi)$ üçlüsü vardır, yani X uzayı domain temsilcili bir uzaydır [7].

İspat

X uzayı, bir (P, Ξ) domaininin maksimal elemanları ile temsil edilebildiğinden P nin maksimal elemanlarının kümesi olan $\text{maks}(P)$ kümesi üzerinde rölatif Scott topoloji var olmak üzere bir $\phi: X \rightarrow \text{maks}(P)$ homeomorfizmi vardır.

$\varphi: Q \rightarrow \tau^*(X)$ dönüşümü her $q \in Q$ için $\varphi(q) = \{x \in X: q \ll \phi(x)\}$ biçiminde tanımlansın.

" Ξ " bağıntısı yardımıyla tanımlanan ikinci bağıntı " $\ll$ " olmak üzere $\ll$ bağıntısının Q kümesine kısıtlanmış $\ll_Q$ ile gösterilsin. Q nun P için bir taban oluşu ve " $\ll$ " bağıntısının özellikleri kullanılarak $(Q, \ll_Q, \varphi)$ üçlüsünün X uzayını temsil ettiği görülebilir. Böylece X domain temsilcili bir uzaydır.

4.2. Domain Temsilcili Uzayların Bazı Özellikleri

Domain temsilcili iki altuzayın birleşimi ile ilgili aşağıdaki Lemma 4.2.1 in ispatı [7] deki Önerme 7.1 de bulunabilir.

4.2.1. Lemma

Domain temsilcili iki altuzayın birleşimi domain temsilcilidir [7].

4.2.2. Teorem

Eğer bir X uzayı domain temsilcili açık altuzayların birleşimi ise X domain temsilcili bir uzaydır [7].

İspat

$X = \bigcup \{Y_i : i \in I\}$ olmak üzere $\{Y_i : i \in I\}$ ailesi X uzayının açık domain temsilcili altuzaylarının ailesi olsun. Her bir $i \in I$ için $(Q_i, \ll_i, B_i)$ üçlüsü Y_i uzayını temsil etsin. Q aşağıdaki şartları sağlayan $q = (a, f, W)$ üçlülerinin kümesi olsun.

1. $a \in [I]^{<\omega}$
2. Her $i \in a$ için $\text{dom} f = a$ ve $f(i) \in Q_i$ olmak üzere f bir fonksiyondur.
3. $W = \bigcap \{B_i(f(i)) : i \in a\} \in \tau^*(X)$

$q \in Q$ için $B(q) = W$ biçiminde tanımlansın. Q kümesinde $\ll$ bağıntısı $q = (a, f, w)$ ve $q' = (a', f', w')$ olmak üzere " $q \ll q' \Leftrightarrow$ Her $i \in a$ için $a \subseteq a', f(i) \ll_i f'(i)$ ve $B_i(f'(i)) \subseteq W$ " biçiminde tanımlansın.

$(Q, \ll, B)$ üçlüsünün Tanım 4.1.1 in (1), (2), (3), (4) ve (5) maddelerini sağladığını görelim.

Madde (1) için $\{B(q) : q \in Q\}$ ailesinin X üzerindeki topoloji için bir taban olduğunu görelim. $T \subseteq X$ açık, $x \in X$ olmak üzere $x \in T$ olsun. $X = \bigcup_{i \in I} Y_i$ olduğundan $x \in Y_j$ olacak biçimde bir $j \in I$ vardır. Öyleyse $x \in T \cap Y_j$ olup $T \cap Y_j$ kümesi Y_j uzayında açık ve $\{B_j(p) : p \in Q_j\}$ ailesi Y_j üzerindeki topoloji için bir taban olduğundan $x \in B_j(p_0) \subseteq T \cap Y_j$ olacak biçimde bir $p_0 \in Q_j$ vardır. O halde $a_0 = \{j\}$ olmak üzere $f_0(j) = p_0$ biçiminde

tanımlanan $f_0: a_0 \rightarrow Q_j$ fonksiyonu için $q_0 = (a_0, f_0, B_j(f_0(j)) = W_0)$ olup $x \in B(q_0) = W_0 = B_j(f_0(j)) = B_j(p_0) \subseteq T \cap Y_j \subseteq T$ sağlanır.

Madde (2) için " $\ll^*$ " bağıntısının ters simetrik ve geçişme özelliklerini sağladığını görelim. $q_1, q_2 \in Q$ için $q_1 = (a_1, f_1, W_1)$ ve $q_2 = (a_2, f_2, W_2)$ olsun. $q_1 \ll^* q_2$ ve $q_2 \ll^* q_1$ ise $a_1 \subseteq a_2$, $f_1(i) \ll_i f_2(i)$, $B_i(f_2(i)) \subseteq W_1$ ve $a_2 \subseteq a_1$, $f_2(i) \ll_i f_1(i)$, $B_i(f_1(i)) \subseteq W_2$ olur. Buradan $a_1 = a_2$, $f_1(i) = f_2(i)$ olur. $B_i(f_2(i)) \subseteq W_1 = \cap\{B_i(f_1(i))\}$ ise $B_i(f_2(i)) \subseteq B_i(f_1(i))$ ve $B_i(f_1(i)) \subseteq W_2 = \cap\{B_i(f_2(i))\}$ ise $B_i(f_1(i)) \subseteq B_i(f_2(i))$ olur. Buradan $B_i(f_2(i)) = B_i(f_1(i))$ olup $\cap\{B_i(f_2(i))\} = \cap\{B_i(f_1(i))\}$ olur. Böylece $W_1 = W_2$ olup $q_1 = (a_1, f_1, W_1) = q_2 = (a_2, f_2, W_2)$ olur. Buradan " $\ll^*$ " bağıntısı ters simetrik.

$q_1, q_2, q_3 \in Q$ için $q_1 = (a_1, f_1, W_1)$ ve $q_2 = (a_2, f_2, W_2)$ ve $q_3 = (a_3, f_3, W_3)$ olsun. $q_1 \ll^* q_2$ ve $q_2 \ll^* q_3$ ise $a_1 \subseteq a_2$, $f_1(i) \ll_i f_2(i)$, $B_i(f_2(i)) \subseteq W_1$ ve $a_2 \subseteq a_3$, $f_2(i) \ll_i f_3(i)$, $B_i(f_3(i)) \subseteq W_2 = \cap\{B_i(f_2(i))\}$ olur. Buradan $a_1 \subseteq a_3$, $f_1(i) \ll_i f_3(i)$ ve $B_i(f_3(i)) \subseteq \cap\{B_i(f_2(i))\} \subseteq B_i(f_2(i)) \subseteq W_1$ dır. Böylece $q_1 \ll^* q_3$ olur. Böylece " $\ll^*$ " bağıntısının geçişme özelliği vardır.

Madde (3) için $q_1, q_2 \in Q$ olmak üzere $q_1 = (a_1, f_1, W_1)$ ve $q_2 = (a_2, f_2, W_2)$ olsun. $q_1 \ll^* q_2$ ise $B_i(f_2(i)) \subseteq W_1$ olur. Buradan $B_i(f_2(i)) \subseteq \cap\{B_i(f_1(i))\} \subseteq B_i(f_1(i))$ olup $B_i(f_2(i)) \subseteq B_i(f_1(i))$ olur. Dolayısıyla $\cap\{B_i(f_2(i))\} \subseteq \cap\{B_i(f_1(i))\}$ olup $W_2 \subseteq W_1$ dir. Böylece $B(q_2) \subseteq B(q_1)$ sağlanır.

Madde (4) için $q = (a_q, f_q, W_q)$ ve $r = (a_r, f_r, W_r)$ olmak üzere $x \in B(q) \cap B(r)$ olsun. $a = a_q \cup a_r$ olsun. $i \in a$ için $x \in B_i(p_0(q, r)) \subseteq B(q) \cap B(r)$ sağlayan $p_0(i) \in Q_i$ seçelim. Sonra $p_0(i) \ll_i f(i)$ sağlayan $f(i) \in Q_i$ seçelim. Eğer $i \in a_q$ ise $f_q(i) \ll_i f(i)$ ve eğer $i \in a_r$ ise $f_r(i) \ll_i f(i)$ dir. $W = \cap\{B_i(f(i)): i \in a\}$ tanımlayalım. $p = (a, f, w)$ $q, r \ll p$ yi sağlar ve $x \in B(q)$ olur.

Madde (5) için $D \subseteq Q$ kümesi $\ll$ bağıntısı ile yönlendirilmiş olsun. $p \in D$ ve $j \in a_p$ sabitleyelim. $E = \{q \in D: p \ll q\}$ kümesinin D içinde eş sonlanan olduğunu kabul edelim.

$\{f(j): (a, f, w) \in E\} \quad Q_j$ de yönlendirilmiştir, bu nedenle $x \in \cap B_j(f(j)): (a, f, W) \in E = \cap \{B(q): q \in D\} \neq \emptyset$ dir.

Örnek

X metriklenebilir bir uzay olmak üzere, X domain temsilcili, yoğun bir Y altuzayına sahip olsun. X domain temsilcili olmak zorunda değildir [9].

İspat

$Y = \{(k/n, 1/n): k, n \in \mathbb{Z} \text{ ve } n > 0\}$ ve $X = Y \cup \{(q, 0): q \in Q\}$ ve X üzerine $\mathbb{R}^2$ den indirgenen topolojiyi koyalım. İzole noktaların bir kümesi olan Y tam metriklenebilirdir ve X uzayında yoğundur. Ancak X tam metriklenebilir değildir; çünkü kapalı bir altuzay olarak $\mathbb{Q}$ ya sahiptir. Teorem 3.8 den Y domain temsilcilidir; ama X değildir.

4.2.3. Önerme

Domain temsilcili uzayların G_δ – altuzayları da domain temsilcilidir. [7].

İspat

X domain temsilcili bir uzay olmak üzere $Y \subseteq X$ bir G_δ –küme olsun. $(Q, \ll, \varphi)$ üçlüsünün X uzayını temsil ettiğini kabul edelim. $\{U_n: n \in \omega\}$ ailesi X uzayının boştan farklı açık altkümelerinin iç içe azalan bir dizisi olmak üzere $Y = \cap \{U_n: n \in \omega\}$ olsun. $U_\omega = Y$ alabiliriz. $Q^* = \{q \in Q: \varphi(q) \cap Y \neq \emptyset\}$ olsun. $q \in Q^*$ için $n(q) = \sup\{n \in \omega: \varphi(q) \subseteq U_n\}$ ve $\varphi^*(q) = \varphi(q) \cap Y$ şeklinde tanımlayalım. $q, r \in Q'$ için $q \ll^* r \Leftrightarrow q \ll r$ ve $(n(r) > n(q) \text{ ya da } n(r) = n(q) = \omega)$ olsun. $(Q^*, \ll^*, \varphi^*)$ üçlüsünün Y uzayını temsil ettiğini yani Tanım 4.1.1 in (1), (2), (3), (4) ve (5) maddelerinin sağlandığını görelim.

İlk olarak Tanım 4.1.1 in (1). maddesini yani $\{\varphi^*(q): q \in Q\} \subseteq \tau^*(Y)$ nin taban olduğunu görelim. $T \subseteq Y$ açık ve $x \in Y$ olmak üzere $x \in T$ olsun. $T = V \cap Y$ olacak şekilde bir $V \subseteq X$ açığı vardır. $\{\varphi(p): p \in Q\}$ ailesi X için taban olduğundan $x \in \varphi(p) \subseteq V \subseteq Y$ olacak

biçimde bir $p \in Q$ vardır. Buradan $x \in \varphi(p) \cap Y \subseteq V \cap Y$ olur. $T = V \cap Y$ alırsak $\varphi^*(q) \subseteq T$ sağlanır. O halde $\{\varphi^*(q): q \in Q\}$ ailesi Y için tabandır.

Tanım 4.1.1 in (2). maddesini görelim. $q_1, q_2 \in Q^*$ olmak üzere $q_1 \ll^* q_2$ ve $q_2 \ll^* q_1$ olsun. Eğer $q_1 \ll q_2$ ve $n(q_2) > n(q_1)$, $q_2 \ll q_1$ ve $n(q_1) > n(q_2)$ ise $q_1 = q_2$ sağlanır. Eğer $q_1 \ll q_2$ ve $n(q_1) = n(q_2) = \omega$, $q_2 \ll q_1$ ve $n(q_2) = n(q_1) = \omega$ ise $q_1 = q_2$ sağlanır. $(q_1 \ll q_2$ ve $n(q_2) > n(q_1))$, $(q_2 \ll q_1$ ve $n(q_2) = n(q_1) = \omega)$ ve benzer şekilde $(q_1 \ll q_2$ ve $n(q_1) = n(q_2) = \omega)$, $(q_2 \ll q_1$ ve $n(q_1) > n(q_2))$ durumu mümkün değildir.

$q_1, q_2, q_3 \in Q^*$ olmak üzere $q_1 \ll^* q_2$ ve $q_2 \ll^* q_3$ olsun. Eğer $q_1 \ll q_2$ ve $n(q_2) > n(q_1)$, $q_2 \ll q_3$ ve $n(q_3) > n(q_2)$ ise $q_1 \ll q_3$ ve $n(q_3) > n(q_1)$ olur. O halde $q_1 \ll^* q_3$ sağlanır. Eğer $q_1 \ll q_2$ ve $n(q_2) > n(q_1)$ ve $q_2 \ll q_3$ ve $n(q_3) = n(q_2) = \omega$ ise $\omega = n(q_3) > n(q_1)$ ve $q_1 \ll q_3$ olur. O halde bu durumda da $q_1 \ll^* q_3$ sağlanır. Eğer $q_1 \ll q_2$ ve $n(q_2) = n(q_1) = \omega$, $q_2 \ll q_3$ ve $n(q_3) = n(q_2) = \omega$ ise " $\ll^*$ " nin tanımından $q_1 \ll^* q_3$ sağlanır. Eğer $q_1 \ll q_2$ ve $n(q_2) = n(q_1) = \omega$, $q_2 \ll q_3$ ve $n(q_3) > n(q_2)$ ise $q_1 \ll q_3$ ve $n(q_3) > n(q_2) = \omega$ durumu mümkün değildir.

Tanım 4.1.1 in (3). maddesini görelim. $q, r \in Q^*$ için $q \ll^* r$ olsun. " $\ll^*$ " bağıntısının tanımından $q \ll r$ ve $(n(r) > n(q)$ ya da $n(r) = n(q) = \omega)$ olur. $(Q, \ll, \varphi)$ üçlüsünün X uzayını temsil ettiğinden Tanım 4.1.1 den $\varphi(r) \subseteq \varphi(q)$ sağlanır. Buradan $\varphi(r) \cap Y \subseteq \varphi(q) \cap Y$ olup $\varphi^*(r) \subseteq \varphi^*(q)$ sağlanır.

Tanım 4.1.1 in (4). maddesini görelim. $x \in \varphi^*(r) \cap \varphi^*(q)$ kabul edelim. $n = 1 + \max\{n(q), n(r)\}$ ve $x \in \varphi(p') \subseteq \varphi(q) \cap \varphi(r) \cap U_n$ olmak üzere $p' \in Q$ olsun. O zaman $p', q, r \ll p$ ve $x \in \varphi(p)$ olacak şekilde $p \in Q$ olsun. $p \in Q^*$, $x \in \varphi^*(p)$ ve $q, r \ll^* p$ dir. Böylece $\{q \in Q^*: x \in \varphi^*(q)\}$ kümesi $\ll^*$ bağıntısı ile yukarı yönlendirilmiştir.

Tanım 4.1.1 in (5). maddesini görelim. $D \subseteq Q^*$, kümesi $\ll^*$ bağıntısı ile yönlendirilmiş olsun. X uzayı $(Q, \ll, \varphi)$ üçlüsü ile temsil edilebilir olduğundan $\ll$ bağıntısı ile yukarı yönlendirilmiştir. Eğer $n(p) = \omega$ olacak şekilde $p \in D$ varsa $\cap\{\varphi(q): q \in D\} \subseteq \varphi(p) \subseteq Y$ dir. Buradan $\cap\{\varphi^*(q): q \in D\} = \cap\{\varphi(q): q \in D \neq \emptyset\}$ olur. Eğer böyle bir p yoksa $\{n(p_i): i \in \omega\}$ kümesi ω de sınırsız olacak şekilde $\{p_i: i \in \omega\} \subseteq D$ dir. Bu durumda $\cap\{\varphi(q): q \in D\} \subseteq \{\varphi(q_i): i \in \omega\} \subseteq Y$ olur.

Bunun anlamı $\cap\{\varphi^*(q): q \in D\} = \cap\{\varphi(q): q \in D\} \neq \emptyset$ dır.

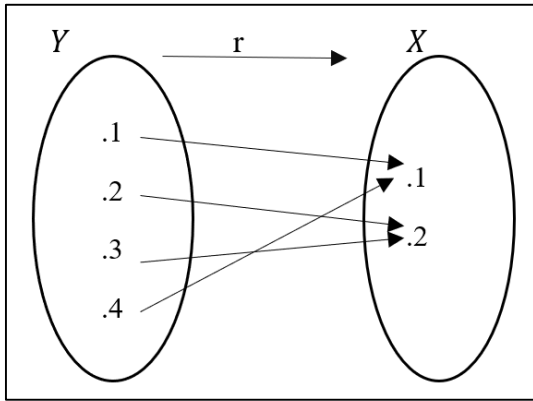
4.3. Domain Temsilcili Uzaylar ve Geri Çekilme Dönüşümü

4.3.1. Tanım

Y bir topolojik uzay olmak üzere $X \subseteq Y$ olsun. Her $x \in X$ için $r(x) = x$ biçiminde tanımlı sürekli bir $r: Y \rightarrow X$ fonksiyonu bir geri çekilme dönüşümü (retract) olarak adlandırılır. Eğer Y uzayından X altuzayına bir geri çekilme dönüşümü varsa X uzayına Y nin bir geri çekilmiş denir [11].

Örnek

$Y = \{1,2,3,4\}$ olmak üzere Y üzerindeki topoloji $\sigma = \{\emptyset, Y, \{1,4\}, \{2,3\}\}$ ve $X = \{1,2\}$ olsun. X üzerindeki altuzay topolojisi $\tau = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}\}$ dir. $r: Y \rightarrow X$ fonksiyonunun Şekil 1 deki gibi tanımlayalım.



Şekil 4.1. Y uzayından X uzayına tanımlanan r fonksiyonu

Her $x \in X$ için $r(x) = x$ sağlanır.

Şimdi r fonksiyonun sürekli olduğunu görelim.

$$\emptyset \in \tau \text{ için } r^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \sigma$$

$$\{1\} \in \tau \text{ için } r^{-1}(1) = \{1,4\} \in \sigma$$

$$\{2\} \in \tau \text{ için } r^{-1}(2) = \{2,3\} \in \sigma$$

$$\{X\} \in \tau \text{ için } r^{-1}(X) = Y \in \sigma$$

Böylelikle X uzayı Y uzayının geri çekilmiştir.

Şimdi domain temsilciliğin geri çekme dönüşümü altında korunduğunu göreceğiz.

4.3.2. Teorem

Domain temsilcili bir uzayın her geri çekilmiş domain temsilcili [11].

İspat

Y domain temsilcili bir uzay ve $X \subseteq Y$ olmak üzere X altuzayı Y nin bir geri çekilmiş olsun. $(Q, \ll, \phi)$ üçlüsü Y uzayını temsil etsin. X uzayı $r: Y \rightarrow X$ fonksiyonu ile Y uzayının geri çekilmiş olsun. $P = \{p \in Q: \phi(p) \cap X \neq \emptyset\}$ olsun. P üzerinde her $p, q \in P$ için " $\ll_p$ " bağıntısını şöyle tanımlayalım:

$$"p \ll_p q \Leftrightarrow (p \ll q \text{ ve } r(\phi(p)) \subseteq \phi(q)) \text{ ya da } p = q"$$

Her bir $p \in P$ için $\varphi(p) = \phi(p) \cap X$ olsun. $(P, \ll_p, \varphi)$ üçlünün Tanım 4.1.1 maddelerini sağladığını yani $(P, \ll_p, \varphi)$ üçlünün X uzayını temsil ettiğini görelim.

Madde (1) için $\{\varphi(p): p \in P\}$ ailesinin X için taban olduğunu görelim. $T \subseteq X$ açık ve $x \in T$ olsun. $T = V \cap X$ olacak şekilde bir $V \subseteq Y$ açığı vardır. $\{\phi(p): p \in Q\}$ ailesi Y için taban olduğundan $x \in \phi(p) \subseteq V$ olacak biçimde $p \in Q$ vardır. Buradan $x \in \phi(p) \cap X \subseteq V \cap X$ olur. $T = V \cap X$ olduğundan $\varphi(p) \subseteq T$ sağlanır. O halde $\{\varphi(p): p \in P\}$ ailesi X için bir tabandır.

Madde (2) için " $\ll_p$ " bağıntısının ters simetrik ve geçişme özelliğini sağladığını görelim. $p, q \in P$ olmak üzere $p \ll_p q$ ve $q \ll_p p$ olsun. Eğer ($p \ll q$ ve $r(\phi(p)) \subseteq \phi(q)$) ve ($q \ll p$ ve $r(\phi(q)) \subseteq \phi(p)$) ise " $\ll$ " bağıntısı ters simetrik olduğundan $p = q$ sağlanır. Eğer ($p \ll q$ ve $r(\phi(p)) \subseteq \phi(q)$) ve $q = p$ ise $p = q$ sağlanır. Benzer şekilde $p = q$ ve ($q \ll p$ ve $r(\phi(q)) \subseteq \phi(p)$) ise $p = q$ sağlanır. Eğer $p = q$ ve $q = p$ ise ispat aşıkardır.

$p, q, r \in P$ olmak üzere $p \ll_p q$ ve $q \ll_p r$ olsun. Eğer ($p \ll q$ ve $r(\phi(p)) \subseteq \phi(q)$) ve $q \ll r$ ve $r(\phi(q)) \subseteq \phi(r)$ ise " $\ll$ " geçişme özelliğine sahip olduğundan $p \ll r$ ve P

kümesinin tanımından ve " r " dönüşümünün tanımından $\phi(q) = r(\phi(q))$ sağlanır. Buradan $p \ll r$ ve $r(\phi(p)) \subseteq \phi(q) = r(\phi(q)) \subseteq \phi(r)$ olacağından $r(\phi(p)) \subseteq \phi(r)$ olup $p \ll_p r$ sağlanır. ($p \ll q$ ve $r(\phi(p)) \subseteq \phi(q)$), $q = r$ ise $p \ll r$ ve $r(\phi(p)) \subseteq \phi(r)$ olup $p \ll_p r$ sağlanır. Benzer şekilde $p = q$, ($q \ll r$ ve $r(\phi(q)) \subseteq \phi(r)$) ise $p \ll_p r$ sağlanır. $p = q$ ve $q = r$ ise $p = r$ olup $p \ll_p r$ sağlanır.

Madde (3) için $p, q, r \in P$ olmak üzere $p \ll_p q$ ise $p \ll q$ ve $r(\phi(p)) \subseteq \phi(q)$ olup $(Q, \ll, \phi)$ üçlüsü Y uzayını temsil ettiğinden $\phi(q) \subseteq \phi(p)$ sağlanır. Buradan $\phi(q) \cap X \subseteq \phi(p) \cap X$ olup $\varphi(q) \subseteq \varphi(p)$ sağlanır. Eğer $p = q$ ise $\varphi(p) = \varphi(q)$ olup $\varphi(q) \subseteq \varphi(p)$ sağlanır.

Madde (4) için $x \in X$, $p, q \in P$ ve $x \in \varphi(p) \cap \varphi(q)$ olsun. $x = r(x) \in \phi(p) \cap \phi(q) \cap X$ kümesi X de açık bir küme ve r sürekli olduğundan $r(V) \subseteq \phi(p) \cap \phi(q)$ olacak şekilde Y uzayında x in bir V açık komşuluğu vardır. $\{\phi(q): q \in Q\}$ ailesi Y için taban olduğundan $x \in \phi(w) \subseteq V$ olacak şekilde bir $w \in Q$ vardır. $\{q \in Q: x \in \phi(q)\}$ kümesi $\ll$ bağıntısı ile aşağı yönlendirildiğinden $z \ll w$, $z \ll p$, $z \ll q$ ve $x \in \phi(z)$ olacak şekilde bir $z \in Q$ vardır. $z \ll w$ olduğundan Tanım 4.1.1 in (3). maddesinden $\phi(z) \subseteq \phi(w)$ dir. Burada $r(\phi(z)) \subseteq r(\phi(w)) \subseteq r(V) \subseteq \phi(p) \subseteq \phi(q)$ olur. Böylece $z \ll_p p$, $z \ll_p q$ ve $x \in \varphi(z)$ olur. Buradan her $x \in X$ için $\{p \in P: x \in \varphi(p)\}$ kümesi $\ll_p$ bağıntısı ile aşağı yönlendirilmiştir.

Madde (5) için D kümesi $\ll_p$ bağıntısıyla aşağı yönlendirilmiş olsun. Genelliği kaybetmeden D kümesinin $\ll_p$ bağıntısına göre en küçük bir elemanı olmadığını kabul edelim. $\bigcap_{p \in D} \phi(p) \cap X \neq \emptyset$ olduğunu göreceğiz. D kümesi $\ll_p$ bağıntısıyla aşağı yönlendirilmiş olduğundan $\ll$ bağıntısıyla da aşağı yönlendirilmiştir, öyleyse en az bir $y \in \bigcap_{p \in D} \phi(p)$ vardır. Her $p \in D$ için $r(y) \in r(\phi(p))$ ve $r(y) \in X$ dir. Herhangi bir $p_1 \in D$ yi sabitleyelim. Burada $p_2 \ll_p p_1$ olmak üzere en az bir $p_2 \in D$ vardır. Böylece $r(\phi(p_2)) \subseteq \phi(p_1)$ dir. Bu nedenle $r(y) \in X \cap \bigcap_{p \in D} \phi(p)$ dir.

5. ALTKOMPAKT UZAYLAR

Klasik Baire Kategori Teoremi; eğer X uzayı tam metrik bir uzay ya da bir yerel kompakt Hausdorff uzayı ise X uzayının yoğun açık altkümelerinin sayılabilir her ailesinin kesişiminin X de yoğun bir altküme olduğunu belirtir [1].

Analizde birçok önemli uygulaması olan bu teorem hem tamamen farklı nitelikteki iki uzayla ilgilenir hem de altkümelerin sayılabilir ailelere sahip olmasını gerektirir. Bu iki durum Baire Kategori Teoremi'nin tatmin edici olmayan yanlarıdır. İstedığımız kadar noktaya sahip olan kompakt hausdorff bir topolojik uzayla tek nokta kümesinin çarpım uzayı hiçbir yerde yoğun olmayan sayılabilir sayıda altkümenin birleşimi olarak yazılabildiğinde Baire Kategori Teoremi'ndeki sayılabilirlik esastır. Yoğun olmayan altkümenin tanımını genelleştirerek sayılabilirlik şartından kurtarılabilir. Ancak diğer durum için John De Groot tarafından altkompaktlık kavramını sunularak çözüm üretilmiştir. Bir uzayın altkompaktlığı uzayın en az bir açık bir tabanına göre kompaktlığın zayıf biçimidir. Tamamen düzenli uzaylarda tüm açık altkümelerin tabanı kullanılıyorsa altkompaktlık kompaktlığa eş değerdir [1].

Bu bölümde Baire uzayından daha dar olan altkompakt uzaylar ele alınacaktır. Altkompaktlığın iki tanımı verilecek, bu tanımların birbirine denk olduğu görülecektir.

5.1. Tanım

X , bir topolojik uzay ve $\mathcal{F}$, X kümesinin boştan farklı kümelerin bir ailesi olmak üzere eğer $\mathcal{F}$ ailesinin herhangi iki G ve H elemanları için $\bar{F} \subseteq G \cap H$ olacak biçimde bir $F \in \mathcal{F}$ varsa $\mathcal{F}$ ailesine düzenli süzgeç tabanı denir [1].

5.2. Tanım

X bir topolojik uzay olmak üzere, $\mathcal{F}$ ailesi X uzayının boştan farklı açık altkümelerinden oluşan düzenli bir süzgeç tabanı ise $\mathcal{F}$ ailesine düzenli açık süzgeç tabanı denir [1].

5.3. Tanım

X bir topolojik uzay olmak üzere, X uzayının $\forall \mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}: \mathcal{F}$ düzenli açık süzgeç tabanı için $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \bar{F} \neq \emptyset$ koşulunu sağlayan bir $\mathcal{B}$ tabanı varsa X topolojik uzayına altkompakt uzay denir [1]. Bu koşulu sağlayan $\mathcal{B}$ tabanına da X uzayının altkompaktlık tabanı denir [7].

5.4. Tanım

(X, τ) bir T_3 uzayı olmak üzere;

1. $\mathcal{B} \subseteq \tau^*(x)$, τ için tabandır,
2. $<_{cl}$ bağıntısı $\mathcal{B}$ de ters simetrik ve geçişme özelliğine sahiptir,
3. $B, B' \in \mathcal{B}$ olmak üzere $B <_{cl} B' \implies B \subseteq B'$ dir,
4. Her $x \in X$ için $\{B \in \mathcal{B}: x \in B\}$ kümesi $<_{cl}$ tarafından aşağı yönlendirilmiştir,
5. Eğer $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ ve $(\mathcal{F}, <_{cl})$ aşağı yönlendirilmiş ise $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ dir,

şartlarını sağlayan $\mathcal{B}$ ailesi varsa (X, τ) uzayına altkompakt uzay denir [7].

$(5)_{w_1}$ $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$, $\mathcal{F}$ sayılabilir ve $(\mathcal{F}, <_{cl})$ aşağı yönlendirilmiş ise $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ dir.

Bu durumda eğer (1)-(4) ve $(5)_{w_1}$ sağlanıyorsa X uzayına sayılabilir altkompakt denir.

$\tau^*(X)$ üzerinde $<_{cl}$ bağıntısını $V <_{cl} U \iff \bar{V} \subseteq U$ şeklinde tanımlayalım. $\mathcal{F}, \tau^*(X)$ uzayının boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere $(\mathcal{F}, \subseteq)$ ikilisi aşağı yönlendirilmiş ise $\mathcal{F}$ ailesine X uzayı üzerinde açık süzgeç tabanı denir. $\mathcal{F}, \tau^*(X)$ uzayının boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere $(\mathcal{F}, <_{cl})$ ikilisi aşağı yönlendirilmiş ise düzenli açık süzgeç tabanı denir [7].

Sonuç

Tanım 5.3 ile aşağıdaki Tanım 5.4 denktir.

İspat

Altkompaktlık için Tanım 5.3 ü kabul edelim. Tanım 5.4 ün şartlarının sağlandığını görelim.

Madde (1) için $\mathcal{B} \subseteq \tau^*(X)$ in τ için taban olduğunu görmeliyiz. Tanım 5.3 den $\mathcal{B}$ altkompaktlık tabanı vardır.

Madde (2) için $<_{cl}$ bağıntısının ters simetrik ve geçişme özelliği olduğunu görmeliyiz.

$B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ için $B_1 <_{cl} B_2$ ve $B_2 <_{cl} B_1$ olsun. O halde $<_{cl}$ bağıntısının tanımından $\overline{B_1} \subseteq B_2$ ve $\overline{B_2} \subseteq B_1$ olur. $B_1 \subseteq \overline{B_1} \subseteq B_2$ ve $B_2 \subseteq \overline{B_2} \subseteq B_1$ olup $B_1 = B_2$ sağlanır.

$B_1, B_2, B_3 \in \mathcal{B}$ için $B_1 <_{cl} B_2$ ve $B_2 <_{cl} B_3$ olsun. O halde $<_{cl}$ bağıntısının tanımından $\overline{B_1} \subseteq B_2$ ve $\overline{B_2} \subseteq B_3$ olur. Kapanış işleminin özelliğinden $B_2 \subseteq \overline{B_2}$ olup $\overline{B_1} \subseteq B_2 \subseteq \overline{B_2} \subseteq B_3$ olduğundan $\overline{B_1} \subseteq B_3$ elde edilir. Buradan $B_1 <_{cl} B_3$ bağıntısı sağlanmış olup $<_{cl}$ bağıntısı ile $\mathcal{B}$ üzerinde geçişme özelliği sağlanır.

Madde (3) için $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ için $B_1 <_{cl} B_2$ ise $B_1 \subseteq B_2$ olduğunu görmeliyiz. $<_{cl}$ bağıntısının tanımından $\overline{B_1} \subseteq B_2$ olur. Kapanış işleminin özelliğinden $B_1 \subseteq \overline{B_1} \subseteq B_2$ olup $B_1 \subseteq B_2$ sağlanır.

Madde (4) için $x \in X$ olsun. $\mathcal{A} = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ ailesinin $<_{cl}$ bağıntısı ile aşağı yönlendirilmiş olduğunu görelim. $B_1, B_2 \in \mathcal{A}$ alalım. Buradan $x \in B_1 \cap B_2$ olur. $\mathcal{B}$ taban olduğundan $x \in U \subseteq B_1 \cap B_2$ olacak şekilde en az bir $U \in \mathcal{B}$ vardır. $x \in U, U$ açık ve X düzenli uzay olduğundan $x \in B \subseteq \overline{B} \subseteq U \subseteq B_1 \cap B_2$ olup $\overline{B} \subseteq B_1 \cap B_2$ olur. Böylece $B <_{cl} B_1$ ve $B <_{cl} B_2$ sağlanır. Buradan $\mathcal{A} = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ ailesi $<_{cl}$ bağıntısı ile aşağı yönlendirilmiştir.

Madde (5) için $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ ve $(\mathcal{F}, <_{cl})$ aşağı yönlendirilmiş ise $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ olduğunu göstermeliyiz. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ ve $(\mathcal{F}, <_{cl})$ aşağı yönlendirilmiş olsun. $\mathcal{F}$ düzgün süzgeç tabanı olduğundan $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} \neq \emptyset$ olduğunu biliyoruz. $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ olduğunu göstermeliyiz. Kapanış işleminin özelliğinden $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \subseteq \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$ olur.

$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} \subseteq \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ olduğunu göstermek için olmayana ergi yöntemini kullanalım. $x \notin \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ olacak şekilde en az bir $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$ vardır. Öyleyse $x \notin F_0$ olacak şekilde en az bir $F_0 \in \mathcal{F}$ vardır. $\mathcal{F} <_{cl}$ bağıntısı ile aşağı yönlendirilmiş olduğundan $F_1 <_{cl} F_0$ olacak şekilde en az bir $F_1 \in \mathcal{F}$ vardır. Bu durumda $F_1 \subseteq F_0$ olduğundan $x \notin \overline{F_1}$ olur. Bu da çelişkidir. O halde $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} \subseteq \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ olur.

$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \subseteq \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \bar{F}$ ve $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \bar{F} \subseteq \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ olduğundan $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \bar{F} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ dır.

Şimdi de altkompaktlık için Tanım 5.4 ü kabul edelim. Tanım 5.4 ün (5) inci maddesinden Tanım 5.3 sağlanmış olur.

6. GENELLEŞTİRİLMİŞ ALTKOMPACT UZAYLAR

Genelleştirilmiş altkompaktlık kavramını Fleissner ve Yengulalp ortaya koymuştur. Daha sonra genelleştirilmiş altkompakt uzaylar ile domain temsilcili uzayların birbirine denk olduğu görülmüştür [7].

Bu bölümde genelleştirilmiş altkompakt uzayların tanımı verilecek, domain temsilcili uzaylar ile ilişkisi görülecektir.

6.1. Tanım

(X, τ) bir T_3 uzayı olmak üzere

1. $\mathcal{B} \subseteq \tau^*(x)$, τ için taban,
2. $\mathcal{B}$ ailesi üzerinde tanımlı olan $<$ bağıntısı ters simetrik ve geçişli,
3. $B, B' \in \mathcal{B}$ olmak üzere $B < B' \implies B \subseteq B'$,
4. Her $x \in X$ için $\{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ kümesi $<$ tarafından aşağı yönlendirilmiş,
5. Eğer $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ ve $(\mathcal{F}, <)$ aşağı yönlendirilmiş ise $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ dir.

şartlarını sağlayan $\mathcal{B}$ ailesine sahipse (X, τ) uzayına genelleştirilmiş altkompakt uzay denir [7].

Altompakt uzayların genelleştirilmiş altkompakt uzay olduğu açıktır. Gerçekten de (X, τ) T_3 uzayı ve $\mathcal{B}$ ailesi Tanım 5.4 deki altkompaktlık şartlarını sağlasın.

" $<$ " bağıntısını $B < B' \iff B <_{cl} B'$ olarak tanımlayalım.

$\mathcal{B}$ ailesinin Tanım 6.1 deki maddeleri sağladığını görelim.

Madde (1) için $\mathcal{B}$ ailesinin τ için taban olduğunu görmeliyiz. $\mathcal{B}$ ailesi Tanım 5.4 deki altkompaktlık şartlarını sağladığından $\mathcal{B}$ ailesi τ için tabandır.

Madde (2) için $\mathcal{B}$ ailesi üzerinde tanımlı " $<$ " bağıntısının ters simetrik ve geçişli olduğunu görmeliyiz. $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ için $B_1 < B_2$, $B_2 < B_1$ olsun. " $<$ " bağıntısının tanımından

$B_1 <_{cl} B_2, B_2 <_{cl} B_1$ olup " $<_{cl}$ " bağıntısı $\mathcal{B}$ üzerinde ters simetrik olduğundan $B_1 = B_2$ sağlanır.

$B_1, B_2, B_3 \in \mathcal{B}$ için $B_1 < B_2, B_2 < B_3$ olsun. " $<$ " bağıntısının tanımından $B_1 <_{cl} B_2, B_2 <_{cl} B_3$ olup " $<_{cl}$ " bağıntısı $\mathcal{B}$ üzerinde geçişli olduğundan $B_1 <_{cl} B_3$ sağlanır. " $<$ " bağıntısının tanımından $B_1 < B_3$ olup " $<$ " bağıntısı $\mathcal{B}$ üzerinde geçişli olur.

Madde (3) için $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ için $B_1 < B_2$ ise $B_1 \subseteq B_2$ olduğunu görmeliyiz. $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ için $B_1 < B_2$ olsun. " $<$ " bağıntısının tanımından $B_1 <_{cl} B_2$ olup $B_1 \subseteq B_2$ sağlanır.

Madde (4) için her $x \in X$ için $\{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ kümesi $<$ tarafından aşağı yönlendirilmiş olduğunu görmeliyiz. $x \in X$ olsun. $\{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ kümesi $<_{cl}$ bağıntısı ile aşağı yönlendirilmiş olduğundan $B_0 <_{cl} B_1$ ve $B_0 <_{cl} B_2$ olacak şekilde en az bir $B_0 \in \mathcal{B}$ vardır. " $<$ " bağıntısının tanımından $B_0 < B_1$ ve $B_0 < B_2$ için en az bir $B_0 \in \mathcal{B}$ vardır.

Madde (5) için Eğer $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ ve $(\mathcal{F}, <)$ aşağı yönlendirilmiş ise $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ olduğunu görmeliyiz. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ ve $(\mathcal{F}, <)$ aşağı yönlendirilmiş olsun. Tanım 5.4 ten $\bigcap \bar{\mathcal{F}} \neq \emptyset$ dir. Ayrıca Tanım 5.3 ve Tanım 5.4 denkleğinin ispatındaki (5). maddeden $\bigcap \bar{\mathcal{F}} = \bigcap \mathcal{F}$ dir. Böylece $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ sağlanır.

Genelleştirilmiş altkompakt uzayların domain temsilcili olduğunu doğrulamak kolaydır. Karşıtı φ bire-bir fonksiyonsa sağlanır [7].

6.2. Lemma

Eğer X bir genelleştirilmiş altkompakt uzay ise X uzayını temsil eden $(Q, \ll, \varphi)$ üçlüsü vardır. Ayrıca φ bire-birdir [7].

İspat

X genelleştirilmiş altkompakt olsun. Bu durumda " $<$ " bağıntısı ile Tanım 6.1 in şartlarını sağlayan $\mathcal{B}$ ailesi vardır. Tanım 4.1.1 de verilen Q kümesini $Q = \mathcal{B}$ olarak tanımlayalım. $V, V' \in \mathcal{B} = Q$ için " $\ll$ " bağıntısı

$$"V \ll V' \Leftrightarrow V' < V"$$

olsun.

φ fonksiyonunu $\mathcal{B}$ ailesi üzerinde birim fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned}\varphi: Q = \mathcal{B} &\rightarrow \tau^* \\ V &\rightarrow \varphi(V) = V\end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım.

Tanım 4.1.1 in (1) (2), (3), (4), (5) maddelerinin sağlandığını görelim.

Madde (1) için öncelikle $\{\varphi(V): V \in Q\}$ ailesinin X için taban olduğunu görmeliyiz. X genelleştirilmiş altkompakt olduğundan $\{\varphi(V) = V: V \in \mathcal{B}\}$ X için tabandır. O halde $\mathcal{B} = Q$ olduğundan $\{\varphi(V): V \in Q\}$ X için tabandır.

Madde (2) için " $\ll$ " bağıntısının ters simetrik ve geçişli olduğunu görmeliyiz. $V_1, V_2 \in Q$ olmak üzere $V_1 \ll V_2$ ve $V_2 \ll V_1$ ise $V_2 < V_1$ ve $V_1 < V_2$ olur. X uzayı " $<$ " bağıntısına göre genelleştirilmiş altkompakt olduğundan Tanım 6.1 in ikinci maddesinden $V_1 = V_2$ sağlanır.

$V_1, V_2, V_3 \in Q$ olsun. $V_1 \ll V_2$ ve $V_2 \ll V_3$ ise $V_2 < V_1$ ve $V_3 < V_2$ olur. X uzayı " $<$ " bağıntısına göre genelleştirilmiş altkompakt olduğundan Tanım 6.1 in ikinci maddesinden $V_3 < V_1$ sağlanır. " $\ll$ " bağıntısının tanımından $V_1 \ll V_3$ sağlanır.

Madde (3) için $V_1, V_2 \in Q$ için $V_1 \ll V_2$ ise $V_2 \subseteq V_1$ olduğunu görmeliyiz. $V_1 \ll V_2$ ise " $\ll$ " bağıntısının tanımından $V_2 < V_1$ olur. X genelleştirilmiş altkompakt olduğundan $V_2 \subseteq V_1$ dir. φ birim fonksiyon olduğundan $\varphi(V_2) \subseteq \varphi(V_1)$ sağlanır.

Madde (4) için her $x \in X$ için $\{V \in Q = \mathcal{B}: x \in \varphi(V)\}$ " $\ll$ " bağıntısı ile yukarı yönlendirilmiş olduğunu görmeliyiz. $\{V \in \mathcal{B}: x \in V\}$ ailesi " $<$ " bağıntısı ile aşağı yönlendirilmiş olduğunu biliyoruz. O halde $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$ için $V_3 < V_1, V_2$ olacak şekilde $V_3 \in \mathcal{B}$ vardır. " $\ll$ " bağıntısının tanımından $V_1, V_2 \ll V_3$ olur. O halde $\{V \in Q = \mathcal{B}: x \in \varphi(V)\}$ " $\ll$ " bağıntısı ile yukarı yönlendirilmiştir.

Madde (5) için $D \subseteq Q$ ve $(D, \ll)$ yukarı yönlendirilmiş ise $\cap \varphi(V): V \in D \neq \emptyset$ olduğunu görmeliyiz. $D \subseteq Q$ ve $(D, \ll)$ yukarı yönlendirilmiş olsun. $\cap \varphi(V): V \in D = \cap \{V: V \in D\}$ olup X genelleştirilmiş altkompakt olduğundan $\cap \varphi(V): V \in D = \cap \{V: V \in D\} \neq \emptyset$ olur.

φ , birim fonksiyon olduğundan bire-bir olduğu açıktır.

6.3. Lemma

Eğer $(Q, \ll, \varphi)$ üçlüsü bir X uzayını temsil ediyorsa ve φ bire-bir fonksiyon ise X genelleştirilmiş altkompakt uzaydır [7].

İspat

$\mathcal{B} = \{\varphi(q): q \in Q\}$ olsun. " $<$ " bağıntısını

$$"\varphi(q) < \varphi(q') \Leftrightarrow q' \ll q"$$

şeklinde tanımlayalım. Tanım 6.1 in maddelerinin sağlandığını görelim.

Madde (1) için $\mathcal{B} = \{\varphi(q): q \in Q\}$ ailesinin τ için taban olduğunu görmeliyiz. $(Q, \ll, \varphi)$ üçlüsü bir X uzayını temsil ettiğinden $\mathcal{B} = \{\varphi(q): q \in Q\}$ ailesi τ için tabandır.

Madde (2) için $\mathcal{B}$ ailesi üzerinde tanımlı " $<$ " bağıntısının ters simetrik ve geçişme özelliğine sahip olduğunu görmeliyiz.

$\varphi(q_1), \varphi(q_2) \in \mathcal{B}$ olmak üzere $\varphi(q_1) < \varphi(q_2)$ ve $\varphi(q_2) < \varphi(q_1)$ ise $q_2 \ll q_1$ ve $q_1 \ll q_2$ olur. $(Q, \ll, \varphi)$ üçlüsü bir X uzayını temsil ettiğinden Tanım 4.1.1 den $q_1 = q_2$ olur. Buradan $\varphi(q_1) = \varphi(q_2)$ sağlanır.

$\varphi(q_1), \varphi(q_2), \varphi(q_3) \in \mathcal{B}$ olmak üzere $\varphi(q_1) < \varphi(q_2)$ ve $\varphi(q_2) < \varphi(q_3)$ ise $q_2 \ll q_1$ ve $q_3 \ll q_2$ olup $(Q, \ll, \varphi)$ üçlüsü bir X uzayını temsil ettiğinden Tanım 4.1.1 den $q_3 \ll q_1$ olur. " $<$ " bağıntısının tanımından $\varphi(q_1) < \varphi(q_3)$ sağlanır.

Madde (3) için $\varphi(q_1), \varphi(q_2) \in \mathcal{B}$ olmak üzere $\varphi(q_1) < \varphi(q_2)$ ise $\varphi(q_1) \subseteq \varphi(q_2)$ olduğunu görmeliyiz. $\varphi(q_1), \varphi(q_2) \in \mathcal{B}$ olmak üzere $\varphi(q_1) < \varphi(q_2)$ olsun. O halde $q_2 \ll q_1$ olup Tanım 4.1.1 den $\varphi(q_1) \subseteq \varphi(q_2)$ sağlanır.

Madde (4) için her $x \in X$ için $\{\varphi(q) \in \mathcal{B} : x \in \varphi(q)\}$ ailesi " $<$ " bağıntısı ile aşağı yönlendirilmiş olduğunu görelim. $(Q, \ll, \varphi)$ üçlüsü bir X uzayını temsil ettiğinden $\{q \in Q : x \in \varphi(q)\}$ " $\ll$ " bağıntısı ile yukarı yönlendirilmiştir. O halde $q_1 \ll q_3, q_2 \ll q_3$ olacak şekilde $q_3 \in Q$ vardır. " $\ll$ " bağıntısının tanımından $\varphi(q_3) < \varphi(q_1)$ ve $\varphi(q_3) < \varphi(q_2)$ olacak şekilde $\varphi(q_3) \in \mathcal{B}$ vardır. Böylece $\{\varphi(q) \in \mathcal{B} : x \in \varphi(q)\}$ ailesi " $<$ " bağıntısı ile aşağı yönlendirilmiştir.

Madde (5) için $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ ve $(\mathcal{F}, <)$ aşağı yönlendirilmiş ise $\cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ olduğunu görmeliyiz. Tanım 4.1.1 den $D \subseteq Q$ ve $(D, \ll)$ yukarı yönlendirilmiş ise $\cap D \neq \emptyset$ olduğunu biliyoruz. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ ve $(\mathcal{F}, <)$ aşağı yönlendirilmiş olsun. " $<$ " bağıntısının tanımından $\cap \{\varphi(q) : q \in D\} \neq \emptyset$ olduğu kolaylıkla görülür.

[7] deki Önerme 3.8 de domain temsilcili uzay ile genelleştirilmiş altkompakt uzayın denk olduğu ispatlanmıştır.

6.5. Önerme

Y , altkompakt bir X uzayının yoğun bir G_δ altuzayı ise Y genelleştirilmiş altkompakttır [7].

İspat

X altkompakt ve $\{U_n : n \in \omega\}$ ailesi X uzayının boştan farklı açık altkümelerinin iç içe azalan bir dizisi olsun. $Y = \cap \{U_n : n \in \omega\}$ olsun. $U_0 = X$ kabul edelim. $n \in \omega$ için U_n iç içe azalan olduğundan $Y = U_\omega$ yazabiliriz. $\mathcal{B}$, X için bir altkompaktlık tabanı olsun. $\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ tanımlayalım. Her bir $U \in \mathcal{B}_Y$ için $B(U) \cap Y = U$ olacak şekilde $\mathcal{B}$ ailesinin en az bir elemanını $B(U)$ olarak seçelim. $n(U) = \sup\{n \in \omega : cl_X(B(U)) \subseteq U_n\}$ olsun. Y , X uzayında yoğun olduğundan $U \in \mathcal{B}_Y$ ise $B' \cap Y = U$ olmak üzere $B' \in \mathcal{B}$ için $(B') = \overline{B(U)}$ olur. $\mathcal{B}_Y$ üzerinde bir genelleştirilmiş altkompaktlık ilişkisi tanımlayalım:

$$U <_Y V \Leftrightarrow B(U) <_{cl} B(V) \text{ ve } (n(U) > n(V) \text{ ya da } n(U) = n(V) = \omega)$$

$\mathcal{B}_Y$ ailesi ile " $<_Y$ " bağıntısı Y için Tanım 6.1 in maddelerini sağlar.

Madde (1) için $\mathcal{B}_Y$ ailesinin taban olduğunu görelim. β_Y boştan farklı açık küme içerdiğinden Y için tabandır.

Madde (2) için $\mathcal{B}_Y$ ailesi üzerinde tanımlı olan " $<_Y$ " bağıntısının ters simetrik ve geçişme özelliğini görelim.

$U, V \in \mathcal{B}_Y$ olsun. $U <_Y V$ ve $V <_Y U$ olsun. $B(U) <_{cl} B(V)$, $n(U) > n(V)$ ve $B(V) <_{cl} B(U)$, $n(V) > n(U)$ durumunda $B(U) = B(V)$ ve $n(U) = n(V)$ olur. Buradan $B(U) \cap Y = B(V) \cap Y$ olup $U = V$ sağlanır. $B(U) <_{cl} B(V)$, $n(U) = n(V) = \omega$ ve $B(V) <_{cl} B(U)$, $n(V) = n(U) = \omega$ durumunda $B(U) = B(V)$ ve $n(U) = n(V) = \omega$ olur. Buradan $B(U) \cap Y = B(V) \cap Y$ olup $U = V$ sağlanır. $B(U) <_{cl} B(V)$, $n(U) > n(V)$ ve $B(V) <_{cl} B(U)$, $n(V) = n(U) = \omega$ durumu ve $B(U) <_{cl} B(V)$, $n(U) = n(V) = \omega$ ve $B(V) <_{cl} B(U)$, $n(V) > n(U)$ durumu mümkün değildir. O halde " $<_Y$ " bağıntısının ters simetrik özelliğini sağlar.

$U, V, T \in \mathcal{B}_Y$ olsun. $U <_Y V$ ve $V <_Y T$ olsun. $B(U) <_{cl} B(V)$, $n(U) > n(V)$ ve $B(V) <_{cl} B(T)$, $n(V) > n(T)$ durumunda $B(U) <_{cl} B(T)$ ve $n(U) > n(T)$ olup $B(U) <_{cl} B(T)$ olur. Böylece $U <_Y T$ sağlanır. $B(U) <_{cl} B(V)$, $n(U) > n(V)$ ve $B(V) <_{cl} B(T)$, $n(V) = n(T) = \omega$ durumu olamaz. $B(U) <_{cl} B(V)$, $n(U) = n(V) = \omega$ ve $B(V) <_{cl} B(T)$, $n(V) = n(T) = \omega$ ise $B(U) <_{cl} B(T)$ ve $n(U) = n(T) = \omega$ olup $U <_Y T$ sağlanır. $B(U) <_{cl} B(V)$, $n(U) = n(V) = \omega$ ve $B(V) <_{cl} B(T)$, $n(V) > n(T)$ ise $B(U) <_{cl} B(T)$, $n(U) > n(T)$ olup $U <_Y T$ sağlanır.

Madde (3) için $W <_Y V$ ise $<_Y$ tanımından $W <_{cl} V$ olup $\bar{W} \subseteq V$ olur. $W \subseteq \bar{W}$ ve $W \in \mathcal{B}_Y$ olduğundan $W = B(W) \cap Y$ yazılabildiğinden $W \subseteq \bar{W} = \overline{B(W) \cap Y} = \overline{B(W)} \subseteq B(V)$ olur. Buradan $W = W \cap Y \subseteq B(V) \cap Y = V$ olduğundan $W <_Y V$ ise $W \subseteq V$ olduğu sağlanır.

Madde (4) için $x \in Y$ ve $x \in W \cap V$ olacak şekilde $W, V \in \beta_Y$ olsun. $m = 1 + \max\{n(W), n(V)\}$ tanımlayalım. $x \in B_0 \subseteq \bar{B}_0 \subseteq B(W) \cap B(V) \cap U_m$ yi sağlayan $B_0 \in \mathcal{B}$ seçelim. O zaman $U = B_0 \cap Y$ olsun. Daha önceden belirttiğimiz gibi $\bar{B}_0 = \overline{B(U)}$ dir. Böylece $\overline{B(U)} \subseteq B(W) \cap B(V) \subseteq (B(W), B(V))$ dir. Dahası

$\overline{B(U)} = B_0 \subseteq U_m$ olduğundan $n(U) > n(W), n(V)$ (ya da $n(U) = n(W) = n(V) = \omega$) olur.

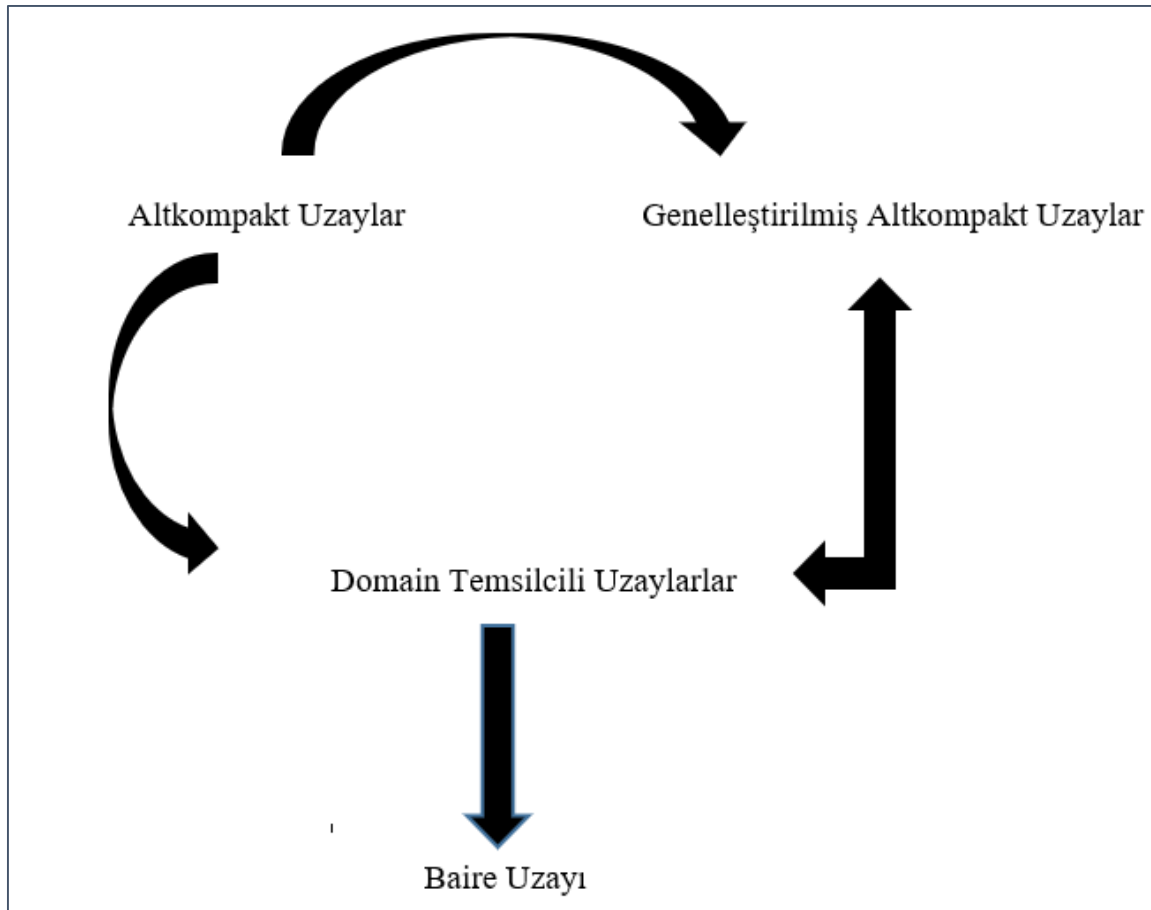
Madde (5) için $\mathcal{F} \subseteq \beta_Y$, $<_Y$ bağıntısı ile aşağı yönlendirilmiş olsun. O zaman $\mathcal{F}' = \{B(W): W \in \mathcal{F}\}$, $\mathcal{B}$ ailesinde $<_{cl}$ ile aşağı yönlendirilmiştir. X altkompakt olduğundan $\cap \mathcal{F}' \neq \emptyset$ dir. $\cap \mathcal{F}' \subseteq Y$ olduğunu görmeliyiz. Buradan $\cap \mathcal{F} = \cap \mathcal{F}' \cap Y$ boştan farklıdır. $\mathcal{F}$ ailesi $<_Y$ bağıntısı ile yönlendirilmiş olduğundan $\mathcal{F}$ ailesinin elemanlarının bir sonlu artan $V_0 \succ_Y V_1 \succ_Y V_2 \succ_Y \dots$ zincirini seçebiliriz. Sonra $\{n(V_i): i \in \omega\}$, ω de artan ve sınırsızdır ya da her $i \geq j$ için $n(V_i) = \omega$ olmak üzere $j \in \omega$ vardır. Her iki durumda da $\cap \{V_i: i \in \omega\} \subseteq Y$ ile sonuçlandırırız. Bundan dolayı $\cap \mathcal{F}' \subseteq \cap \{V_i: i \in \omega\} \subseteq Y$ dir.

Sonuç: Y , Cech tam uzay ise Y genelleştirilmiş altkompakttır [7].

7. SONUÇLAR

Dana Scott'un Reel sayıları bilgisayara tanıtmada kullandığı yapının bilgisayar bilimlerinde kullanılmasıyla başlayan süreç, bu yapının topolojiye uyarlanmasıyla yeni bir çalışma alanı doğurmuştur. Böylelikle bir uzayın maksimal elemanları kullanılarak başka bir uzay temsil edilebilir hale gelmiştir. Dolayısıyla verilen bir uzayda çalışmak yerine bu uzayı temsil eden başka bir uzay ile çalışılabilir.

Bu çalışmada domain temsilcili uzayların tanımı verilmiş ve bu uzayların altuzayları incelenmiştir. Görülmüştür ki; domain temsilcili olma kapalı kalıtsal bir özellik değildir. Altkompakt uzaylar genelleştirilmiş altkompakt uzaydır, dolayısıyla domain temsilcili uzaydır. Domain temsilcili altuzayların G_δ altuzayları da domain temsilcileridir.



Şekil 7.1. Domain temsilcili, altkompakt ve genelleştirilmiş altkompakt uzaylar arasındaki ilişki

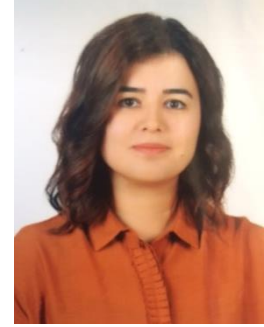
KAYNAKLAR

1. Groot, J. D. (1963a). Subcompactness and the baire category theorem, *Indagationes Mathematicae*, 22, 761-767.
2. Bennet, H. and Lutzer, D. (2009). Strong completeness properties in topology, *Questions and Answers in General Topology*, (27), 107-112.
3. Yıldız, C. (2005). *Genel topoloji*. (3.Baskı). Ankara: Gazi Kitapevi, 2-273.
4. Çakar, Ö. (2007). *Fonksiyonel analize giriş*. (7. Baskı). Ankara: Ankara Üniversitesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, 21-150.
5. Asar, A. O., Arıkan, A. ve Arıkan, A. (2009). *Cebir*. (1. Basım). Ankara: Eflatun Kitapevi, 20.
6. Bennet, H. ve Lutzer, D. (2009). Domain representable spaces and completeness. *In Topology Proceedings*, (34), 223-244.
7. Fleissner, W. and Yengulalp, L. (2015). From subcompact to domain representable. *Topology and Its Applications*, 195, 174-195.
8. Aarts, J. and Lutzer, D. (1974). Completeness properties designed for recognizing baire spaces, *Dissertationes Mathematicae*, 116, 1-45.
9. Bennet, H. and Lutzer, D. (2006). Domain representable spaces, *Fundamental Mathematicae*, (189), 255-268.
10. Abramsky, S. and Jung, A. (1994). Domain theory, *in Handbook of Logic in Computer Science*, Clarendon Press, 1-168.
11. Önal, S. and Vural, Ç. (2015). Domain representability of retracts, *Topology and Its Applications*, 194, 1-3.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : EMİNOĞLU, Gökçe
 Uyruğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 20.08.1989, Altındağ
 Medeni hali : Evli
 e-mail : gokcemmat89 @gmail.com



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik Anabilim Dalı	Devam Ediyor
Lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik Anabilim Dalı	2011
Lise	Keçiören İncirli Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi	2007

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2013-Halen	MEB	Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Eminoğlu, G. (2018, 27-28 Nisan). *Altkompakt Uzaylar ve P-Tam Topolojik Uzaylar*, 13. Ankara Matematik Günleri Konferansı, Ankara.

Hobiler

Bağlama çalmak, kitap okumak, tiyatroya gitmek.



GAZİ GELECEKTİR..