



GENELLEŞTİRİLMİŞ HERMİTE POLİNOMLARININ ÖZELLİKLERİ

Neslihan BİRİCİK

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HAZİRAN 2020

Neslihan BİRİCİK tarafından hazırlanan “GENELLEŞTİRİLMİŞ HERMITE POLİNOMLARININ ÖZELLİKLERİ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Bayram ÇEKİM

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Başkan: Doç. Dr. Gürhan İÇÖZ

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Kadir KANAT

Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 22/06/2020

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Neslihan BİRİCİK

22/06/2020

GENELLEŞTİRİLMİŞ HERMİTE POLİNOMLARININ ÖZELLİKLERİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Neslihan BİRİCİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2020

ÖZET

Bu çalışmada, ilk olarak genelleştirilmiş üstel fonksiyon yardımıyla tanımlanan genelleştirilmiş Hermite polinomları tanıtıldıktan sonra, bu polinom ailesinin çeşitli özellikleri verilmiştir. Daha sonra genelleştirilmiş Hermite polinomları için multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyonlar bulunduktan sonra genelleştirilmiş Hermite polinomları için bilineer ve bilateral doğurucu fonksiyonlar elde edilmiştir.

Bilim Kodu : 20406
Anahtar Kelimeler : Hermite polinomları, Dunkl genellemesi, Doğurucu fonksiyon, Rekürans bağıntısı
Sayfa Adedi : 55
Danışman : Doç. Dr. Bayram ÇEKİM

THE PROPERTIES OF GENERALIZED HERMITE POLYNOMIALS
(M. Sc. Thesis)

Neslihan BİRİCİK

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
June 2020

ABSTRACT

In this study, first of all, the miscellaneous properties of this polynomial family are given after generalized Hermite polynomials which are described with the help of generalized exponential function. After multilinear and multilateral generating functions are found for the generalized Hermite polynomials, bilinear and bilateral generating functions are obtained for generalized Hermite polynomials.

Science Code : 20406
Key Words : Hermite polynomials, Dunkl generalization, Generating function,
Recurrence relation
Page Number : 55
Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Bayram ÇEKİM

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca desteğini hiç esirgemeyen, bilgi ve tecrübesiyle bana yol gösteren, tez danışmanım değerli hocam sayın Doç. Dr. Bayram ÇEKİM'e en içten duygularıyla teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca çalışmalarım boyunca desteklerini her zaman hissettiğim sevgili aileme çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	7
2.1. Gamma Fonksiyonu.....	7
2.2. Beta Fonksiyonu	7
2.3. Hipergeometrik Fonksiyon.....	8
2.4. Modifiye Bessel Fonksiyonu.....	10
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ HERMITE POLİNOMLARI	11
3.1. $\{H_n^\mu\}_0^\infty$ Dizisinin Tanımı	11
3.2. Üstel Fonksiyonun Dunkl Genellemesi	12
3.3. Çeşitli Özellikler.....	16
3.4. $D_{\mu,x}$ Türev Operatörü.....	27
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ HERMITE POLİNOMLARI İÇİN YENİ DOĞURUCU FONKSİYONLAR	41
4.1. Multilineer ve Multilateral Doğurucu Fonksiyonlar.....	41
4.2. Genelleştirilmiş Hermite ve Hermite Polinomları İçin Doğurucu Fonksiyon ..	43
4.3. Genelleştirilmiş Hermite Polinomları ve İki Değişkenli Laguerre Polinomları İçin Doğurucu Fonksiyon	44

Sayfa

4.4. Genelleştirilmiş Hermite Polinomları ve Erkus-Srivastava Polinomları İçin Doğurucu Fonksiyon.....	45
4.5. Genelleştirilmiş Hermite Polinomları İçin Bilineer Doğurucu Fonksiyon.....	47
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	49
KAYNAKLAR	51
ÖZGEÇMİŞ.....	55

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 1.1. Hermite Polinomları	2

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\beta(x,y)$	Beta fonksiyonu
$\Gamma(x)$	Gamma fonksiyonu
$\{H_n^\mu\}_0^\infty$	Genelleştirilmiş Hermite polinomları
$H_n(x)$	Hermite polinomları
${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)$	Hipergeometrik fonksiyon
${}_1F_1(a; b; x)$	Konfluent hipergeometrik fonksiyon
$L_{\tau+\psi k}(y_1; y_2)$	İki değişkenli Laguerre polinomları
$I_k(x)$	Modifiye Bessel fonksiyonu
$(\alpha)_n$	Pochhammer sembolü
$M_{k,m}(x)$	Whittaker fonksiyon

1. GİRİŞ

Klasik ortogonal polinomlardan biri olan Hermite polinomları Fransız matematikçi Charles Hermite (1822-1901) tarafından bulunmuştur. Charles Hermite'in çalışmalarından en önemlisi, e 'nin transandantal (aşkın) sayı olduğunu ispatlamasıdır. Yani doğal sayı katsayılı herhangi bir polinomun kökü olmamasıdır. Eliptik ve modüler fonksiyonlara da katkıda bulunan Hermite, yavaş yavaş tanınmış ve 1870 yılında Sorbonne'de Profesör olmuştur [1].

Hermite, Hermite diferensiyel denklemi olarak bilinen diferensiyel denklem sınıfı üzerine çalışmıştır. Bu denklemin daha sonra basit harmonik osilatörün kuantum mekanik işleminde ortaya çıktığını bulmuştur. Ayrıca Hermite, Hermitian matrislerin bazı özelliklerini keşfetmiştir. Eliptik modüler fonksiyonları kullanarak genel beşinci dereceden denklemleri çözmüştür. Diğer taraftan Hermite, Abelian fonksiyonlar, cebirsel değişmezler üzerinde de çalışmıştır [2].

Hermite, dünyanın en büyük matematikçileri arasında yer alan Picard, Gaston Darboux, Paul Appel, Emile Borel, Paul Painleve ve Henri Poincare gibi birçok ünlü matematikçiyi de yetiştirmiştir.

Matematiğin ve fiziğin önemli denklemlerinden olan

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2ny(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

denklemine *Hermite diferensiyel denklemi* adı verilir [3]. Bu denklemin çözümlerinden biri Hermite polinomlarıdır.

Hermite polinomları

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k n! (2x)^{n-2k}}{k! (n-2k)!}$$

şeklinde tanımlanmıştır [4].

İlk birkaç Hermite polinomu

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

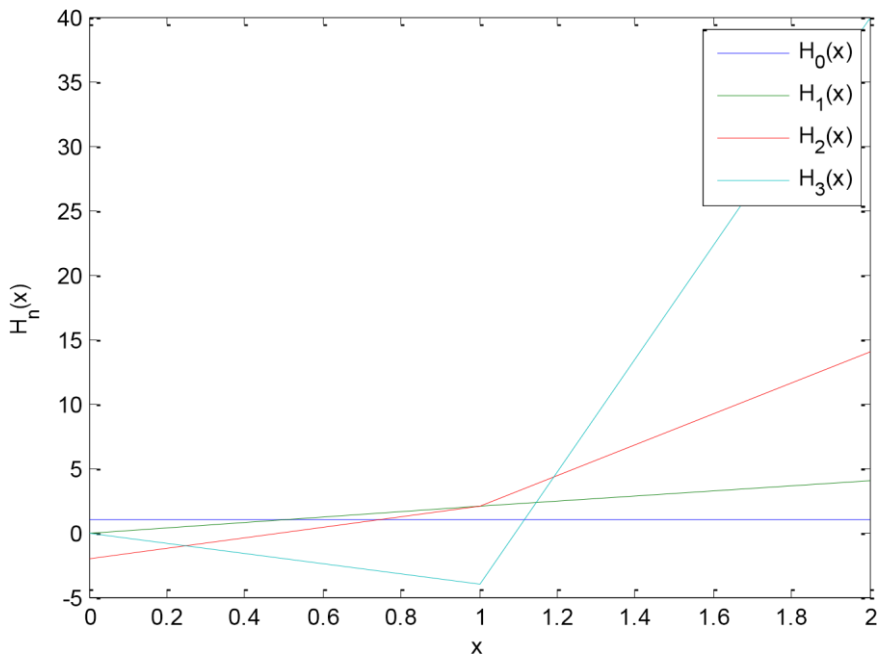
$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$$

$$H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$$

şeklinde [4]. Böylece çift ve tek dereceli Hermite polinomları aşağıdaki şekilde de gösterilebilir [1]

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(2n)!}{(n-k)!(2k)!} (2x)^{2k}$$

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(2n+1)!}{(n-k)!(2k+1)!} (2x)^{2k+1}.$$



Şekil 1.1. Hermite polinomları [5]

$H_n(x)$ ile gösterilen bu polinomlar $|t| < \infty$, $|x| < \infty$ olmak üzere

$$H(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = e^{2xt - t^2}$$

şeklinde bir doğurucu fonksiyona sahiptir [3]. Hermite polinomları

$$(H_n, H_m) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x) H_n(x) H_m(x) dx = 0, \quad m \neq n$$

olacak şekilde

$$w(x) = e^{-x^2}$$

ağırlık fonksiyonuna göre $(-\infty, \infty)$ aralığında ortogonal bir sistem teşkil eder [3].

Bu polinom ailesi

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

şeklinde Rodrigues formülü ile de gösterilmektedir [6].

Hermite polinomlarının üç terimli rekürans bağıntısı

$$H_1(x) = 2xH_0(x) \text{ olmak üzere,}$$

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlanmıştır [3]. Türev içeren rekürans bağıntısı ise

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x), \quad H'_0(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

şeklinde [3]. Hermite polinomlarının integral formu

$$H_n(x) = \frac{n!}{\pi} \int_0^\pi \exp(2x \cos \theta - \cos 2\theta) \cos(2x \sin \theta - \sin 2\theta - n\theta) d\theta$$

olarak verilir [4]. Hermite polinomlarının normu ise

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) H_n^2(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} = \|H_n(x)\|^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

olarak ifade edilir [4].

Bu polinom ailesinin bir çok genellemeleri tanımlanmıştır. Bunların en önemlilerinden biri olan $\mathbb{H}_n^\mu$ ile gösterilen genelleştirilmiş Hermite polinomları, Szego [7] tarafından $\mu > -\frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ olmak üzere, $|x|^{2\mu} e^{-x^2}$ ağırlık fonksiyonuna göre $(-\infty, \infty)$ aralığında ortogonal bir polinom ailesidir. Yani $m \neq n$ olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{H}_m^\mu(x) \mathbb{H}_n^\mu(x) e^{-x^2} |x|^{2\mu} dx = 0$$

eşitliği sağlanır [7].

Bu polinom ailesi Konfluent hipergeometrik fonksiyonlar ve genelleştirilmiş Laguerre polinomları cinsinden de yazılabilir.

$m \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ve c 'ler reel sabitler olmak üzere genelleştirilmiş Hermite polinomları

$$\mathbb{H}_{2m}^\mu(x) = c_{2m} \Phi\left(-m, \mu + \frac{1}{2}, x^2\right)$$

ve

$$\mathbb{H}_{2m+1}^\mu(x) = c_{2m+1} x \Phi\left(-m, \mu + \frac{3}{2}, x^2\right)$$

eşitlikleri ile tanımlanmıştır [8].

Chihara [9]' da $\mathbb{H}_n^\mu$ polinom ailesinin x^n li terimin katsayısını 2^n olarak almıştır.

Bu polinomların çeşitli genellemelerini çalışan diğer araştırmacılar ise Dickinson, Warski [10] ve Dutta, Chatterjea, More [11] dir. [12] de ise Rosenblum bu polinom ailesinin farklı bir genellemesi tanımlamıştır. Bu yeni sınıf $\{H_n^\mu\}_0^\infty$ ile gösterilmiştir. Bu polinom ailesinin farklı özellikleri [13]’te verilmiştir.

Bu tezde $\{H_n^\mu\}_0^\infty$ polinom ailesi ile ilgilenilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmada kullanılacak olan bazı temel kavramlar verilmiştir.

2.1. Gamma Fonksiyonu

2.1.1. Tanım

$0 < x < \infty$ olmak üzere

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (2.1)$$

genelleştirilmiş integraliyle tanımlanan fonksiyona *Gamma fonksiyonu* denir [14].

Özellikleri

$$i. \Gamma(x+1) = x! , \quad x \in \mathbb{N} \quad (2.2)$$

$$ii. \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) , \quad x > 0 \quad (2.3)$$

eşitlikleri sağlanır [14].

2.2. Beta Fonksiyonu

2.2.1. Tanım

$\text{Re}(x) > 0 , \text{Re}(y) > 0$ olmak üzere

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (2.4)$$

genelleştirilmiş integraliyle tanımlanan fonksiyona *Beta fonksiyonu* denir [14].

Özellikleri

$$i. \beta(x, y) = \beta(y, x) \quad (2.5)$$

$$ii. \beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (2.6)$$

$$iii. \beta(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2x-1} (\cos \theta)^{2y-1} d\theta \quad (2.7)$$

eşitlikleri sağlanır [14].

2.3. Hipergeometrik Fonksiyon

2.3.1. Tanım

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(\alpha)_0 = 1, \quad \alpha \neq 0$$

şeklinde tanımlanan $(\alpha)_n$ ifadesine *Pochhammer sembolü* denir. Bu sembol

$$i. (\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$ii. (\alpha)_{n+1} = \alpha(\alpha+1)_n$$

özelliklerine sahiptir [14]. Pochhammer sembolü dikkate alınarak hipergeometrik seri

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{x^n}{n!}, \quad \gamma \notin \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \quad (2.8)$$

şeklinde yazılır. Bu fonksiyon genelde ${}_2F_1$ gösterimi yerine F şeklinde gösterilir ve

$$i. F(\alpha, \beta; \gamma; x) = F(\beta, \alpha; \gamma; x)$$

$$ii. \frac{d}{dx} F(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; x)$$

$$iii. F(\alpha, \beta; \gamma; 0) = 1$$

$$iv. F'(\alpha, \beta; \gamma; 0) = \frac{\alpha\beta}{\gamma}$$

özelliklerine sahiptir [14].

α ve β reel ya da kompleks değişkenler olmak üzere

$$xy'' + (\beta - x)y' - \alpha y = 0 \quad (2.9)$$

şeklindeki denkleme *Kummer denklemi* ya da *Konfluent hipergeometrik denklem* adı verilir. Bu diferensiyel denklemin bir çözümü ise

$$\Phi(\alpha; \beta; x) = {}_1F_1(\alpha; \beta; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\beta)_n} \frac{x^n}{n!}, \quad \beta \notin \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \quad (2.10)$$

şeklindedir ve bu fonksiyona *Konfluent hipergeometrik fonksiyon* denir. Konfluent hipergeometrik fonksiyon ${}_1F_1$ veya Φ şeklinde gösterilir [14].

$\gamma + 1 > 0$ olmak üzere Konfluent hipergeometrik fonksiyonu

$$\begin{aligned} \Phi(-m, \gamma + 1, x) &:= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(k + \gamma + 1)} x^k \\ &= \frac{m! \Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(m + \gamma + 1)} L_m^\gamma(x) \end{aligned}$$

şeklinde genelleştirilmiş Laguerre polinomları cinsinden de yazılabilir [15].

Konfluent hipergeometrik fonksiyonunun özellikleri için [15,16] kaynaklarına bakılabilir.

Eş. 2.9’da

$$y = x^{-\beta/2} e^{x/2} z, \quad \alpha = \frac{1}{2} - k + \mu \text{ ve } \beta = 1 + 2\mu$$

dönüşümleri yapılırsa

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{x} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{x^2} \right) z = 0$$

şeklinde elde edilen denkleme *Whittaker denklemi* adı verilir. Bu diferensiyel denklemin bir çözümü

$$z = M_{k,\mu}(x) = x^{\frac{1}{2}+\mu} e^{-x/2} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - k + \mu; 1 + 2\mu; x\right) \quad (2.11)$$

şeklinde olup $M_{k,\mu}(x)$ fonksiyonuna *Whittaker fonksiyon* adı verilir [14].

2.4. Modifiye Bessel Fonksiyonu

2.4.1. Tanım

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + k^2)y = 0$$

denklemin k -yıncı basamaktan *Modifiye Bessel denklemi* adı verilir. Bu diferensiyel denklemin bir çözümü ise

$$I_k(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p! \Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2p} \quad (2.12)$$

şeklindedir ve bu fonksiyona *Modifiye Bessel fonksiyonu* denir [14].

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ HERMITE POLİNOMLARI

Bu bölümde, M. Rosenblum [12] tarafından verilen genelleştirilmiş Hermite polinomları tanıtılacak ve bazı özellikleri verilecektir.

3.1. $\{H_n^\mu\}_0^\infty$ Dizisinin Tanımı

$\mu \in \mathbb{C}_0$, $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \dots\right\}$ ve $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\{H_n^\mu\}_0^\infty$ ile gösterilen genelleştirilmiş Hermite polinomları, n 'nin çift ve tek durumu için

$$\begin{aligned} H_{2m}^\mu(x) &:= (-1)^m \frac{(2m)!}{m!} \Phi\left(-m, \mu + \frac{1}{2}, x^2\right) \\ &= (-1)^m \frac{(2m)!}{m!} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \frac{\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k + \mu + \frac{1}{2}\right)} x^{2k} \end{aligned} \quad (3.1)$$

ve

$$\begin{aligned} H_{2m+1}^\mu(x) &:= (-1)^m \frac{(2m+1)!}{m!} \frac{x}{\mu + \frac{1}{2}} \Phi\left(-m, \mu + \frac{3}{2}, x^2\right) \\ &= (-1)^m \frac{(2m+1)!}{m!} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \frac{\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k + \mu + \frac{1}{2}\right)} x^{2k+1} \end{aligned} \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanmıştır [12].

Bu genelleştirilmiş Hermite polinomlarının bir kaç tanesi aşağıda listelenmiştir:

$$H_1^\mu(x) = (1+2\mu)^{-1} 2x,$$

$$H_2^\mu(x) = (1+2\mu)^{-1} 4x^2 - 2,$$

$$H_3^\mu(x) = (1+2\mu)^{-1} (3+2\mu)^{-1} 24x^3 - (1+2\mu)^{-1} 12x,$$

$$H_4^\mu(x) = ((1+2\mu)(3+2\mu))^{-1} 48x^4 - (1+2\mu)^{-1} 48x^2 + 12, [12].$$

3.2. Üstel Fonksiyonun Dunkl Genellemesi

3.2.1. Tanım

$m \in \mathbb{N}$ olmak üzere, γ_μ fonksiyonunun çift ve tek doğal sayı için değerleri

$$\begin{aligned} \gamma_\mu(2m) &= \frac{2^{2m} m! \Gamma\left(m + \mu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)} \\ &= (2m)! \frac{\Gamma\left(m + \mu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

ve

$$\gamma_\mu(2m+1) = \frac{2^{2m+1} m! \Gamma\left(m + \mu + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)}$$

$$= (2m+1)! \frac{\Gamma\left(m+\mu+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)} \quad (3.4)$$

olup, üstel fonksiyonun Dunkl genellemesi (genelleştirilmiş üstel fonksiyon)

$$e_{\mu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{\gamma_{\mu}(m)} \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlanmıştır [12].

Ayrıca $e_{\mu}(x)$ fonksiyonu, Eş. 2.10, Eş. 2.11 ve Eş. 2.12 kullanılarak

$$\begin{aligned} e_{\mu}(x) &:= e^x \Phi\left(\mu, 2\mu+1, -2x\right) \\ &= \Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right) \left(\frac{2}{x}\right)^{\mu-\frac{1}{2}} \left(I_{\mu-\frac{1}{2}}(x) + I_{\mu+\frac{1}{2}}(x) \right) \\ &= (2x)^{-\frac{1}{2}-\mu} M_{-\frac{1}{2}, \mu}(2x) \end{aligned}$$

şeklinde sırasıyla Konfluent hipergeometrik fonksiyon, Modifiye Bessel fonksiyonu ve Whittaker fonksiyonu yardımıyla yazılabilir [12].

γ_{μ} fonksiyonunun bazı özel halleri aşağıda verilmiştir.

γ_{μ} fonksiyonu $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\gamma_{\mu}(n+1) = (n+1+2\mu\theta_{n+1})\gamma_{\mu}(n) \quad (3.6)$$

özelliğini sağlar [12]. Burada

$(n+1)$ eğer çift ise $\theta_{n+1} = 0$

$(n+1)$ eğer tek ise $\theta_{n+1} = 1$

olarak tanımlanır [12].

Bazı doğal sayılar için γ_μ fonksiyonunun değeri aşağıda verilmiştir.

$$\gamma_\mu(0) = 1,$$

$$\gamma_\mu(1) = 1 + 2\mu,$$

$$\gamma_\mu(2) = (1 + 2\mu)2,$$

$$\gamma_\mu(3) = (1 + 2\mu)2(3 + 2\mu),$$

$$\gamma_\mu(4) = (1 + 2\mu)2(3 + 2\mu)4,$$

$$\gamma_\mu(5) = (1 + 2\mu)2(3 + 2\mu)4(5 + 2\mu), [12].$$

3.2.2. Tanım

$n \in \mathbb{N}$ ve $\gamma_\mu(n)$ fonksiyonu Eş. 3.3 ve Eş. 3.4'te verilmek üzere, genelleştirilmiş Hermite polinomları

$$H_n^\mu(x) = n! \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{k! \gamma_\mu(n-2k)} \quad (3.7)$$

şeklinde tanımlanmıştır [12].

3.2.1. Teorem

$\mu \in \mathbb{C}_0, n \in \mathbb{N}, x, z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\exp(-z^2) e_\mu(2xz) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^\mu(x) \frac{z^n}{n!} \quad (3.8)$$

eşitliği sağlanır [12].

İspat

Eş. 3.7’ de $H_n^\mu(x)$ değeri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} H_n^\mu(x) \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n! \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{k! \gamma_\mu(n-2k)} \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k, n+2k) \quad (3.9)$$

ile verilen Eş. 3.9 [3] ve Eş. 3.5 ile e^{-z^2} fonksiyonunun Taylor açılımından dolayı

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} H_n^\mu(x) \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x)^n}{k! \gamma_\mu(n)} z^{n+2k} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{\gamma_\mu(n)} z^n \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z^2)^k}{k!} \right) \\ &= e_\mu(2xz) \exp(-z^2) \end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

3.3. Çeşitli Özellikler

3.3.1. Lemma

$\mu > 0$, $\alpha > -\frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$i. \beta\left(n + \alpha + \frac{1}{2}, \mu\right) = \int_{-1}^1 t^{2n} |t|^{2\alpha} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^\mu dt,$$

$$ii. \beta\left(n + \alpha + \frac{3}{2}, \mu\right) = \int_{-1}^1 t^{2n+1} |t|^{2\alpha} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^\mu dt,$$

$$iii. \frac{\gamma_\alpha(n)}{\gamma_{\mu+\alpha}(n)} = \frac{1}{\beta\left(\alpha + \frac{1}{2}, \mu\right)} \int_{-1}^1 t^n |t|^{2\alpha} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^\mu dt,$$

$$iv. e_{\mu+\alpha}(x) = \frac{1}{\beta\left(\alpha + \frac{1}{2}, \mu\right)} \int_{-1}^1 e_\alpha(xt) |t|^{2\alpha} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^\mu dt,$$

$$v. e_\mu(x) = \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}, \mu\right)} \int_{-1}^1 e^{xt} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^\mu dt,$$

vi. $0 < \mu < \frac{1}{2}$ olmak üzere

$$e^x = \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2} - \mu, \mu\right)} \int_{-1}^1 e_{-\mu}(xt) |t|^{-2\mu} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^\mu dt$$

$$vii. H_n^\mu(x) = \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}, \mu\right)} \int_{-1}^1 H_n(xt) (1-t)^{\mu-1} (1+t)^\mu dt$$

eşitlikleri sağlanır [12].

İspat

i, Eş. 2.4 kullanılırsa

$$\beta\left(n + \alpha + \frac{1}{2}, \mu\right) = \int_0^1 t^{n + \alpha - \frac{1}{2}} (1-t)^{\mu-1} dt$$

olarak yazılabilir. İntegralde t yerine t^2 dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} & \beta\left(n + \alpha + \frac{1}{2}, \mu\right) \\ &= \int_0^1 t^{2n} t^{2\alpha} t^{-1} (1-t^2)^{\mu-1} 2t dt \\ &= 2 \int_0^1 t^{2n} t^{2\alpha} (1-t^2)^{\mu-1} dt \end{aligned} \tag{3.10}$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 t^{2n} |t|^{2\alpha} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^{\mu} dt \\ &= \int_{-1}^1 t^{2n} |t|^{2\alpha} (1-t^2)^{\mu-1} (1+t) dt \\ &= \int_{-1}^1 t^{2n} |t|^{2\alpha} (1-t^2)^{\mu-1} dt + \int_{-1}^1 t^{2n+1} |t|^{2\alpha} (1-t^2)^{\mu-1} dt \end{aligned}$$

olup eşitliğin ikinci integralindeki fonksiyon tek fonksiyon olup simetrik aralıkta integrali sıfırdır. Böylece

$$\int_{-1}^1 t^{2n} |t|^{2\alpha} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^{\mu} dt$$

$$= 2 \int_0^1 t^{2n} t^{2\alpha} (1-t^2)^{\mu-1} dt \quad (3.11)$$

elde edilir. Eş. 3.10 ve Eş. 3.11'in birlikte düşünülmesiyle ispat tamamlanır.

ii. Eş. 2.4 kullanılırsa

$$\beta\left(n+\alpha+\frac{3}{2}, \mu\right) = \int_0^1 t^{n+\alpha+\frac{1}{2}} (1-t)^{\mu-1} dt$$

elde edilir. İntegralde t yerine t^2 dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} & \beta\left(n+\alpha+\frac{3}{2}, \mu\right) \\ &= \int_0^1 t^{2n} t^{2\alpha} t (1-t^2)^{\mu-1} 2t dt \\ &= 2 \int_0^1 t^{2n+2} t^{2\alpha} (1-t^2)^{\mu-1} dt \end{aligned} \quad (3.12)$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 t^{2n+1} |t|^{2\alpha} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^{\mu} dt \\ &= \int_{-1}^1 t^{2n+1} |t|^{2\alpha} (1-t^2)^{\mu-1} (1+t) dt \\ &= \int_{-1}^1 t^{2n+1} |t|^{2\alpha} (1-t^2)^{\mu-1} dt + \int_{-1}^1 t^{2n+1} |t|^{2\alpha} (1-t^2)^{\mu-1} t dt \end{aligned}$$

olup, eşitliğin birinci integralindeki fonksiyon tek fonksiyon olup simetrik aralıkta integrali sıfırdır. Böylece

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 t^{2n+1} |t|^{2\alpha} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^\mu dt \\
&= \int_{-1}^1 t^{2n+2} |t|^{2\alpha} (1-t^2)^{\mu-1} dt \\
&= 2 \int_0^1 t^{2n+2} t^{2\alpha} (1-t^2)^{\mu-1} dt
\end{aligned} \tag{3.13}$$

elde edilir. Eş. 3.12 ve Eş. 3.13'ten ispat tamamlanır.

iii. $n = 2k$ durumu için ispat yapılacaktır. Benzer şekilde $n = 2k+1$ için de ispat yapılabilir.

Eş. 3.3 kullanılırsa

$$\frac{\gamma_\alpha(n)}{\gamma_{\mu+\alpha}(n)} = \frac{\gamma_\alpha(2k)}{\gamma_{\mu+\alpha}(2k)} = \frac{(2k)! \frac{\Gamma\left(k+\alpha+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}}{(2k)! \frac{\Gamma\left(k+\mu+\alpha+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha+\mu+\frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{\gamma_\alpha(n)}{\gamma_{\mu+\alpha}(n)} = \frac{\Gamma\left(k+\alpha+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\alpha+\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(k+\mu+\alpha+\frac{1}{2}\right)} \tag{3.14}$$

eşitliği elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\beta\left(\alpha + \frac{1}{2}, \mu\right)} \left[\int_{-1}^1 t^n |t|^{2\alpha} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^\mu dt \right] \\
&= \frac{1}{\beta\left(\alpha + \frac{1}{2}, \mu\right)} \int_{-1}^1 t^n |t|^{2\alpha} (1-t^2)^{\mu-1} dt + \int_{-1}^1 t^{n+1} |t|^{2\alpha} (1-t^2)^{\mu-1} dt
\end{aligned}$$

olup, $n = 2k$ için eşitliğin ikinci integralindeki fonksiyon tek fonksiyon olduğundan simetrik aralıkta integrali sıfırdır. Böylece

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\beta\left(\alpha + \frac{1}{2}, \mu\right)} \int_{-1}^1 t^n |t|^{2\alpha} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^\mu dt \\
&= \frac{1}{\beta\left(\alpha + \frac{1}{2}, \mu\right)} \int_{-1}^1 t^n |t|^{2\alpha} (1-t^2)^{\mu-1} dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $n = 2k$ olduğundan dolayı eşitliğin sağındaki fonksiyonun çift fonksiyon olduğu dikkate alınırsa ve Lemma 3.3.1'in (i). özelliğinden dolayı

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\beta\left(\alpha + \frac{1}{2}, \mu\right)} \int_{-1}^1 t^n |t|^{2\alpha} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^\mu dt \\
&= \frac{1}{\beta\left(\alpha + \frac{1}{2}, \mu\right)} 2 \int_0^1 t^{2k} t^{2\alpha} (1-t^2)^{\mu-1} dt \\
&= \frac{1}{\beta\left(\alpha + \frac{1}{2}, \mu\right)} \beta\left(k + \alpha + \frac{1}{2}, \mu\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma\left(k+\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\mu)}{\Gamma\left(k+\alpha+\frac{1}{2}+\mu\right)} \frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}+\mu\right)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\mu)} \\
&= \frac{\Gamma\left(k+\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\alpha+\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k+\mu+\alpha+\frac{1}{2}\right)} \tag{3.15}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 3.14 ve Eş. 3.15'in birlikte düşünülmesiyle ispat tamamlanır.

$$\text{iv. } \frac{1}{\beta\left(\alpha+\frac{1}{2},\mu\right)} \int_{-1}^1 e_{\alpha}(xt) |t|^{2\alpha} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^{\mu} dt$$

integralinde $e_{\alpha}(xt)$ ifadesi seri şeklinde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\beta\left(\alpha+\frac{1}{2},\mu\right)} \int_{-1}^1 e_{\alpha}(xt) |t|^{2\alpha} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^{\mu} dt \\
&= \frac{1}{\beta\left(\alpha+\frac{1}{2},\mu\right)} \int_{-1}^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xt)^n}{\gamma_{\alpha}(n)} |t|^{2\alpha} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^{\mu} dt \\
&= \frac{1}{\beta\left(\alpha+\frac{1}{2},\mu\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\gamma_{\alpha}(n)} \int_{-1}^1 t^n |t|^{2\alpha} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^{\mu} dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\gamma_{\alpha}(n)} \frac{1}{\beta\left(\alpha+\frac{1}{2},\mu\right)} \int_{-1}^1 t^n |t|^{2\alpha} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^{\mu} dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 3.3.1'in (iii). özelliği ve Eş. 3.5'ten dolayı

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\beta\left(\alpha+\frac{1}{2},\mu\right)^{-1}} \int_0^1 e_{\alpha}(xt) |t|^{2\alpha} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^{\mu} dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\gamma_{\alpha}(n)} \frac{\gamma_{\alpha}(n)}{\gamma_{\mu+\alpha}(n)} \\
&= e_{\mu+\alpha}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

v. e^{xt} fonksiyonunun Taylor açılımından dolayı

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2},\mu\right)^{-1}} \int_0^1 e^{xt} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^{\mu} dt \\
&= \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2},\mu\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \int_{-1}^1 t^n (1-t)^{\mu-1} (1+t)^{\mu} dt
\end{aligned}$$

olup, seri tek ve çift terimlere ayrılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2},\mu\right)^{-1}} \int_0^1 e^{xt} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^{\mu} dt \\
&= \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2},\mu\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \int_{-1}^1 t^{2n} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^{\mu} dt + \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2},\mu\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_{-1}^1 t^{2n+1} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^{\mu} dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 3.3.1 'in (i). ve (ii). özelliklerinden dolayı

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}, \mu\right)^{-1}} \int_0^1 e^{xt} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^\mu dt \\
&= \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}, \mu\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \beta\left(n+\frac{1}{2}, \mu\right) + \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}, \mu\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \beta\left(n+\frac{3}{2}, \mu\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \frac{\beta\left(n+\frac{1}{2}, \mu\right)}{\beta\left(\frac{1}{2}, \mu\right)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{\beta\left(n+\frac{3}{2}, \mu\right)}{\beta\left(\frac{1}{2}, \mu\right)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\mu+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\mu+\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 3.3 ve Eş. 3.4'ten dolayı

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}, \mu\right)^{-1}} \int_0^1 e^{xt} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^\mu dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\gamma_\mu(2n)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{\gamma_\mu(2n+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\gamma_\mu(n)} \\
&= e_\mu(x)
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

vi. $e_{-\mu}(xt)$ fonksiyonunun seri açılımından dolayı

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}-\mu, \mu\right)} \int_{-1}^1 e_{-\mu}(xt) |t|^{-2\mu} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^{\mu} dt \\
&= \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}-\mu, \mu\right)} \int_{-1}^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n t^n}{\gamma_{-\mu}(n)} |t|^{-2\mu} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^{\mu} dt \\
&= \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}-\mu, \mu\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\gamma_{-\mu}(n)} \int_{-1}^1 t^n |t|^{-2\mu} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^{\mu} dt
\end{aligned}$$

olup, seride tek ve çift indisli terimler ayrı yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}-\mu, \mu\right)} \int_{-1}^1 e_{-\mu}(xt) |t|^{-2\mu} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^{\mu} dt \\
&= \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}-\mu, \mu\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\gamma_{-\mu}(2n)} \int_{-1}^1 t^{2n} |t|^{-2\mu} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^{\mu} dt \\
&+ \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}-\mu, \mu\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{\gamma_{-\mu}(2n+1)} \int_{-1}^1 t^{2n+1} |t|^{-2\mu} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^{\mu} dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 3.3.1'in (i). ve (ii). özelliklerinden dolayı

$$\frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}-\mu, \mu\right)} \int_{-1}^1 e_{-\mu}(xt) |t|^{-2\mu} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^{\mu} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}-\mu, \mu\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\gamma_{-\mu}(2n)} \beta\left(n-\mu+\frac{1}{2}, \mu\right) \\
&+ \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}-\mu, \mu\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{\gamma_{-\mu}(2n+1)} \beta\left(n-\mu+\frac{3}{2}, \mu\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 3.3 ve Eş. 3.4 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}-\mu, \mu\right)} \int_0^1 e_{-\mu}(xt) |t|^{-2\mu} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^{\mu} dt \\
&= \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}-\mu, \mu\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \frac{\Gamma\left(-\mu+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n-\mu+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \beta\left(n-\mu+\frac{1}{2}, \mu\right) \\
&+ \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}-\mu, \mu\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{\Gamma\left(-\mu+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(n-\mu+\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \beta\left(n-\mu+\frac{3}{2}, \mu\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Eş. 2.6 kullanılıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}-\mu, \mu\right)} \int_0^1 e_{-\mu}(xt) |t|^{-2\mu} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^{\mu} dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}
\end{aligned}$$

$$= e^x$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

vii. $H_n(xt)$ polinomunun açık gösterimi yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}, \mu\right)^{-1}} \int_{-1}^1 H_n(xt) (1-t)^{\mu-1} (1+t)^\mu dt \\ &= \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}, \mu\right)^{-1}} \int_{-1}^1 n! \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!} t^{n-2k} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^\mu dt \\ &= n! \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!} \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}, \mu\right)^{-1}} \int_{-1}^1 t^{n-2k} (1-t)^{\mu-1} (1+t)^\mu dt \end{aligned}$$

olup, Lemma 3.3.1'in (iii). özelliği kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}, \mu\right)^{-1}} \int_{-1}^1 H_n(xt) (1-t)^{\mu-1} (1+t)^\mu dt \\ &= n! \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{k!} \frac{1}{\gamma_\mu(n-2k)} \\ &= H_n^\mu(x) \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

3.4. $D_{\mu,x}$ Türev Operatörü

3.4.1. Tanım

$\phi(x)$ fonksiyonu için $D_\mu(x)$ lineer türev operatörü

$$D_{\mu,x}\phi(x) = \phi'(x) + \frac{\mu}{x}(\phi(x) - \phi(-x)) , \quad x \in \mathbb{C} \quad (3.16)$$

olarak tanımlanır [12]. Burada

$$D_{\mu,x}(\phi(x)) := (D_\mu\phi)(x)$$

şeklinde dir. D_μ türev operatörü ile ilgili özelliklere [17,18] kaynaklarından da bakılabilir.

3.4.1. Teorem

$\mu \in \mathbb{C}_0, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$i. (D_\mu^2\phi)(x) = \phi''(x) + \frac{2\mu}{x}\phi'(x) - \frac{\mu}{x^2}(\phi(x) - \phi(-x)),$$

$$ii. D_\mu^j : x^n \rightarrow \frac{\gamma_\mu(n)}{\gamma_\mu(n-j)} x^{n-j}, \quad j = 0, 1, \dots, n ; \quad D_\mu^j : 1 \rightarrow 0,$$

iii. ψ fonksiyonu çift bir fonksiyon olmak üzere

$$D_\mu(\phi\psi) = D_\mu(\phi)\psi + \phi D_\mu(\psi),$$

$$iv. D_\mu : e_\mu(\lambda x) \mapsto \lambda e_\mu(\lambda x)$$

eşitlikleri sağlanır [12].

İspat

i. Eş. 3.16 kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & (D_\mu^2 \phi)(x) \\ &= D_\mu (D_\mu \phi(x)) \\ &= D_\mu \left(\phi'(x) + \frac{\mu}{x} (\phi(x) - \phi(-x)) \right) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\varphi(x) = \phi'(x) + \frac{\mu}{x} (\phi(x) - \phi(-x))$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} & (D_\mu^2 \phi)(x) \\ &= D_\mu (\varphi) \\ &= \varphi'(x) + \frac{\mu}{x} (\varphi(x) - \varphi(-x)) \\ &= \phi''(x) - \frac{\mu}{x^2} (\phi(x) - \phi(-x)) + \frac{\mu}{x} (\phi'(x) + \phi'(-x)) \\ &\quad + \frac{\mu}{x} \left(\phi'(x) + \frac{\mu}{x} (\phi(x) - \phi(-x)) - \phi'(-x) + \frac{\mu}{x} (\phi(-x) - \phi(x)) \right) \end{aligned}$$

olarak bulunup gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$(D_\mu^2 \phi)(x)$$

$$= \phi''(x) + \frac{2\mu}{x} \phi'(x) - \frac{\mu}{x^2} (\phi(x) - \phi(-x))$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

ii. Tümevarım yöntemi kullanılarak

$$D_{\mu}^j(x_n) = \frac{\gamma_{\mu}(n)}{\gamma_{\mu}(n-j)} x^{n-j}$$

olduğu gösterilecektir.

$$D_{\mu}(1) = 0 + \frac{\mu}{x}(1-1) = 0$$

sağlanır ki böylece $D_{\mu}^j(1) = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$ eşitliği elde edilir. Diğer taraftan

$j = 1$ için

$$D_{\mu}(x^n) = \frac{\gamma_{\mu}(n)}{\gamma_{\mu}(n-1)} x^{n-1}$$

eşitliğinin sağlandığını göstermeliyiz. Eş. 3.6' da n yerine $n-1$ alınırsa

$$\gamma_{\mu}(n) = (n + 2\mu\theta_n) \gamma_{\mu}(n-1)$$

olup,

$$\frac{\gamma_{\mu}(n)}{\gamma_{\mu}(n-1)} = (n + 2\mu\theta_n)$$

olarak yazılabilir. Eş. 3.16 ve θ_n 'nin tanımından dolayı

$$\frac{\gamma_{\mu}(n)}{\gamma_{\mu}(n-1)}x^{n-1} = (n + 2\mu\theta_n)x^{n-1}$$

$$= nx^{n-1} + 2\mu\theta_n x^{n-1}$$

$$= nx^{n-1} + \mu x^{n-1} \left(1 + (-1)^{n-1}\right)$$

$$= D_{\mu}(x^n)$$

elde edilir.

$$D_{\mu}^{j-1}(x^n) = \frac{\gamma_{\mu}(n)}{\gamma_{\mu}(n-j+1)}x^{n-j+1}$$

olsun.

$$D_{\mu}(D_{\mu}^{j-1}(x^n))$$

$$= D_{\mu}\left(\frac{\gamma_{\mu}(n)}{\gamma_{\mu}(n-j+1)}x^{n-j+1}\right)$$

$$= \frac{\gamma_{\mu}(n)}{\gamma_{\mu}(n-j+1)}D_{\mu}(x^{n-j+1})\left(\frac{\gamma_{\mu}(n-j+1)}{\gamma_{\mu}(n-j)}x^{n-j+1-1}\right)$$

$$= \frac{\gamma_{\mu}(n)}{\gamma_{\mu}(n-j)}x^{n-j}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

iii. ψ çift fonksiyon olduğundan

$$\psi(x) = \psi(-x)$$

eşitliği sağlanır.

$$D_\mu(\phi\psi) = (\phi\psi)' + \frac{\mu}{x}((\phi\psi)(x) - (\phi\psi)(-x))$$

$$= \phi'\psi + \phi\psi' + \frac{\mu}{x}(\phi(x)\psi(x) - \phi(-x)\psi(-x))$$

$$= \phi'\psi + \phi\psi' + \frac{\mu}{x}\psi(x)(\phi(x) - \phi(-x))$$

$$= \psi\left(\phi' + \frac{\mu}{x}(\phi(x) - \phi(-x))\right) + \phi\psi'$$

$$= \psi D_\mu\phi + \phi D_\mu\psi$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

iv. Teorem 3.4.1'in (ii). özelliğinden

$$D_\mu e_\mu(\lambda x)$$

$$= D_\mu \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j x^j}{\gamma_\mu(j)} \right)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{\gamma_\mu(j)} D_\mu(x^j)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{\gamma_\mu(j)} \frac{\gamma_\mu(j)}{\gamma_\mu(j-1)} x^{j-1}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j}{\gamma_{\mu}(j-1)} x^{j-1}$$

elde edilir. j yerine $j+1$ alınıp ve e_{μ} fonksiyonunun Eş. 3.5 tanımı kullanılırsa

$$D_{\mu} e_{\mu}(\lambda x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j+1}}{\gamma_{\mu}(j)} x^j$$

$$= \lambda e_{\mu}(\lambda x)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

3.4.2. Teorem

$n \in \mathbb{N}, x, \lambda \in \mathbb{C}$ ve $H_{-1}^{\mu}(x) = 0$ olmak üzere

$$i. D_{\mu} : H_n^{\mu}(\lambda x) \rightarrow 2\lambda n H_{n-1}^{\mu}(\lambda x),$$

$$ii. D^* \phi(x) = x \phi(x) \text{ olmak üzere}$$

$$2n H_{n-1}^{\mu} + \frac{\gamma_{\mu}(n+1)}{(n+1)\gamma_{\mu}(n)} H_{n+1}^{\mu} = 2D^* H_n^{\mu}$$

eşitlikleri sağlanır [12].

İspat

$i.$ Eş. 3.8' de x yerine λx alınırsa

$$\exp(-z^2) e_{\mu}(2\lambda x z) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{\mu}(\lambda x) \frac{z^n}{n!}, \quad \mu \in \mathbb{C}_0 \quad (3.17)$$

elde edilir. Eş. 3.17'nin x 'e göre D_μ türevi alınır ve Teorem 3.4.1'in (iv). özelliği kullanılırsa

$$\exp(-z^2) e_\mu(2\lambda xz) 2\lambda z = \sum_{n=0}^{\infty} D_\mu H_n^\mu(\lambda x) \frac{z^n}{n!} \quad (3.18)$$

elde edilir. Eş. 3.18'de Eş. 3.8 kullanılırsa

$$2\lambda \sum_{n=0}^{\infty} H_n^\mu(\lambda x) \frac{z^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} D_\mu H_n^\mu(\lambda x) \frac{z^n}{n!}$$

halini alır. Eşitliğin sol tarafında n yerine $n-1$ alınır

$$2\lambda \sum_{n=1}^{\infty} H_{n-1}^\mu(\lambda x) \frac{z^n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} D_\mu H_n^\mu(\lambda x) \frac{z^n}{n!}$$

olup, z^n 'nin katsayıları eşitlendiğinde

$$2\lambda n H_{n-1}^\mu(\lambda x) = D_\mu H_n^\mu(\lambda x)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

ii. $n = 2m$ alınır

$$\begin{aligned} & 2n H_{n-1}^\mu(x) + \frac{\gamma_\mu(n+1)}{(n+1)\gamma_\mu(n)} H_{n+1}^\mu(x) \\ &= 4m H_{2m-1}^\mu(x) + \frac{\gamma_\mu(2m+1)}{(2m+1)\gamma_\mu(2m)} H_{2m+1}^\mu(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 3.6 kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$2n H_{n-1}^\mu(x) + \frac{\gamma_\mu(n+1)}{(n+1)\gamma_\mu(n)} H_{n+1}^\mu(x)$$

$$= 4m(2m-1)! \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k (2x)^{2m-1-2k}}{k! \gamma_\mu(2m-1-2k)} + (2m+1)! \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k (2x)^{2m+1-2k}}{k! \gamma_\mu(2m+1-2k)}$$

elde edilir. İlk toplamda k yerine $k-1$ alınırsa

$$\begin{aligned} & 2nH_{n-1}^\mu(x) + \frac{\gamma_\mu(n+1)}{(n+1)\gamma_\mu(n)} H_{n+1}^\mu(x) \\ &= 2(2m)! \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1} (2x)^{2m+1-2k}}{(k-1)! \gamma_\mu(2m+1-2k)} + (2m+1)! \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k (2x)^{2m+1-2k}}{k! \gamma_\mu(2m+1-2k)} \\ &= \frac{(2m+1)!(2x)^{2m+1}}{\gamma_\mu(2m+1)} + \sum_{k=1}^m \left[\frac{2(2m)!(-1)^{k-1} (2x)^{2m+1-2k}}{(k-1)! \gamma_\mu(2m+1-2k)} + \frac{(2m+1)!(-1)^k (2x)^{2m+1-2k}}{k! \gamma_\mu(2m+1-2k)} \right] \\ &+ \frac{(2m)!}{\gamma_\mu(2m)} (2x)^{2m+1} + \sum_{k=1}^m \frac{(2m)!}{k!} (-1)^k (2x)^{2m+1-2k} \frac{(2m+1-2k)}{\gamma_\mu(2m+1-2k)} \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{(2m)!}{k!} \frac{(-1)^k (2x)^{2m+1-2k}}{\gamma_\mu(2m-2k)} \\ &= 2x \sum_{k=0}^m \frac{(2m)!(-1)^k (2x)^{2m-2k}}{k! \gamma_\mu(2m-2k)} \\ &= 2xH_{2m}^\mu(x) \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. Benzer şekilde $n=2m+1$ alınarakta ispat yapılabilir.

H_n^μ için inversiyon formülü aşağıda verilmiştir.

3.4.3. Teorem

$H_n^\mu(x)$ polinomları

$$\frac{(2x)^n}{\gamma_\mu(n)} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{H_{n-2k}^\mu(x)}{k!(n-2k)!}$$

şeklinde inversiyon formülüne sahiptir [12].

İspat

e_μ fonksiyonunun Eş. 3.5' deki tanımı kullanılırsa

$$e_\mu(2xz) = e^{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} H_n^\mu(x) \frac{z^n}{n!}$$

olup, $e_\mu(2xz)$ ve e^{z^2} fonksiyonlarının seri açılımları yerlerine yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2xz)^n}{\gamma_\mu(n)} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{k!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} H_n^\mu(x) \frac{z^n}{n!} \right)$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafında n yerine $n-2k$ yazılıp Eş. 3.9 kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2xz)^n}{\gamma_\mu(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\left[n/2\right]} \frac{H_{n-2k}^\mu(x) z^n}{k!(n-2k)!}$$

bulunur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{(2x)^n}{\gamma_\mu(n)} = \sum_{k=0}^{\left[n/2\right]} \frac{H_{n-2k}^\mu(x)}{k!(n-2k)!}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

H_n^μ için Rodrigues formülü aşağıda verilmiştir.

3.4.4. Teorem

$H_n^\mu(x)$ polinomları

$$H_n^\mu(x) = \frac{n!}{\gamma_\mu(n)} (2D^* - D_\mu)^n H_0^\mu(x)$$

şeklinde Rodrigues formülüne sahiptir [12].

İspat

Tümevarım yöntemini kullanırsak $n=0$ için denklem doğru olduğu aşıkardır.

$n=1$ için

$$H_1^\mu(x) = \frac{1!}{\gamma_\mu(1)} (2D^* - D_\mu) H_0^\mu(x)$$

eşitliği bulunur ve gerekli düzenlemeler yapıldığında eşitliğin sağlandığı görülür.

Şimdi ise n için doğru olduğu kabul edilip, $n+1$ için doğruluğu gösterilecektir.

Teorem 3.4.2'nin (ii). özelliği kullanılırsa

$$(2D^* - D_\mu) H_n^\mu(x) = \frac{n!}{\gamma_\mu(n)} (2D^* - D_\mu)^{n+1} H_0^\mu(x)$$

$$\frac{\gamma_\mu(n+1)}{(n+1)\gamma_\mu(n)} H_{n+1}^\mu(x) = \frac{n!}{\gamma_\mu(n)} (2D^* - D_\mu)^{n+1} H_0^\mu(x)$$

bulunur. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$H_{n+1}^{\mu}(x) = \frac{(n+1)!}{\gamma_{\mu}(n+1)} (2D^* - D_{\mu})^{n+1} H_0^{\mu}(x)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

H_n^{μ} için Mehler formülü aşağıda verilmiştir.

3.4.5. Teorem

$|z| < 1$ için $H_n^{\mu}(x)$ polinomları

$$\begin{aligned} i. & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_{\mu}(n)}{2^n (n!)^2} H_n^{\mu}(x) H_n^{\mu}(y) z^n \\ &= \frac{1}{(1-z^2)^{\mu+\frac{1}{2}}} \exp\left(-\left(x^2 + y^2\right) \frac{z^2}{1-z^2}\right) e_{\mu}\left(2xy \frac{z}{1-z^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii. & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_{\mu}(2n)}{(2n!)} H_{2n}^{\mu}(x) \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \\ &= \frac{1}{(1-z^2)^{\mu+\frac{1}{2}}} \exp\left(\frac{-x^2 z^2}{1-z^2}\right) \end{aligned}$$

şeklinde Mehler formülüne sahiptir [12].

3.4.6. Teorem

$H_n^\mu(x)$ polinomları için

$$i. \exp(-y^2 D_\mu^2) x^n = \frac{\gamma_\mu(n)}{n!} H_n^\mu\left(\frac{x}{2y}\right) y^n, \quad 0 \neq y \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad [12]$$

$$ii. e^{-\frac{D_\mu^2}{4}}(x^n) = \frac{\gamma_\mu(n)}{2^n n!} H_n^\mu(x), \quad [19]$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat

i. Teorem 3.4.1'in (iv). özelliği kullanılırsa

$$\exp(-y^2 D_\mu^2)(e_\mu(\lambda x)) = \exp(-\lambda^2 y^2) e_\mu(\lambda x)$$

elde edilir. $e_\mu(\lambda x)$ fonksiyonunun Taylor serisi açılımı eşitliğin sol tarafında yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\exp(-y^2 D_\mu^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n x^n}{\gamma_\mu(n)} = \exp(-\lambda^2 y^2) e_\mu\left(2\lambda y \frac{x}{2y}\right)$$

elde edilir. Eş. 3.8 kullanılırsa

$$\exp(-\lambda^2 y^2) e_\mu(\lambda x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} H_n^\mu\left(\frac{x}{2y}\right) \frac{y^n \lambda^n}{n!}$$

elde edilir. O halde

$$\exp(-y^2 D_\mu^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n x^n}{\gamma_\mu(n)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} H_n^\mu \left(\frac{x}{2y} \right) \frac{y^n \lambda^n}{n!}$$

dir. Böylece

$$\exp(-y^2 D_\mu^2) x^n = \frac{\gamma_\mu(n)}{n!} H_n^\mu \left(\frac{x}{2y} \right)$$

olup, ispat tamamlanır.

ii. Teorem 3.4.6 (i)'de $y = \frac{1}{2}$ alınırsa

$$e^{-\frac{D_\mu^2}{4}} (x^n) = \frac{\gamma_\mu(n)}{2^n n!} H_n^\mu(x)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

3.4.7. Teorem

$\{H_n^\mu(x)\}_{n \geq 0}$ ve $T_y^\mu := e_\mu(y D_\mu)$ olmak üzere

$$T_y^\mu H_n^\mu(x) = \sum_{k=0}^n \frac{2^{n-k} n!}{\gamma_\mu(n-k) k!} y^{n-k} H_k^\mu(x)$$

eşitliği sağlanır [19].

İspat

T_y^μ değerini yerine yazarsak

$$T_y^\mu H_n^\mu(x) = e_\mu(y D_\mu) H_n^\mu(x)$$

elde edilir. Diğer taraftan Teorem 3.4.2'nin (i). özelliği kullanılırsa

$$D_\mu H_n^\mu(\lambda x) = 2\lambda n H_{n-1}^\mu(\lambda x)$$

$$D_\mu^2 H_n^\mu(\lambda x) = 2^2 \lambda^2 n(n-1) H_{n-2}^\mu(\lambda x)$$

$\vdots$

$$D_\mu^k H_n^\mu(\lambda x) = 2^k \lambda^k n(n-1)\cdots(n-k+1) H_{n-k}^\mu(\lambda x)$$

olup,

$$T_y^\mu H_n^\mu(x)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{y^k}{\gamma_\mu(k)} D_\mu^k H_n^\mu(x)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{y^k 2^k n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)!}{\gamma_\mu(k)(n-k)!} H_{n-k}^\mu(x)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{y^k 2^k n!}{\gamma_\mu(k)(n-k)!} H_{n-k}^\mu(x)$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafında k yerine $n-k$ yazılırsa

$$T_y^\mu H_n^\mu(x) = \sum_{k=0}^n \frac{y^{n-k} 2^{n-k} n!}{\gamma_\mu(n-k)k!} H_k^\mu(x)$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ HERMITE POLİNOMLARI İÇİN YENİ DOĞURUCU FONKSİYONLAR

Bu bölümde Biricik ve Çekim [20] tarafından sunulan genelleştirilmiş Hermite polinomları için multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyonlar ile bu polinom ailesi için bilineer ve bilateral doğurucu fonksiyonlar verilmiştir. Bu kısımda uygulanan metod için [21-29]'daki çalışmalar incelenebilir.

4.1. Multilineer ve Multilateral Doğurucu Fonksiyonlar

4.1.1. Teorem

$s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\tau, \psi \in \mathbb{C}$, $a_k \neq 0$, $y_1, \dots, y_s$; kompleks değişkenler olmak üzere, özdeş olarak sıfır olmayan $\Omega_{\tau+\psi k}(y_1, \dots, y_s)$ fonksiyonu

$$\Lambda_{\tau, \psi}(y_1, y_2, \dots, y_s; \zeta) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\tau+\psi k}(y_1, \dots, y_s) \zeta^k \quad (4.1)$$

özellikliğini sağlasın ve

$$\Theta_{n, \mu}^{\tau, \psi}(x, y_1, \dots, y_s; \zeta) := \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]} a_k \frac{H_{n-pk}^{\mu}(x)}{(n-pk)!} \Omega_{\tau+\psi k}(y_1, \dots, y_s) \zeta^k \quad (4.2)$$

olarak verilsin. Bu durumda $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n, \mu}^{\tau, \psi}\left(x, y_1, \dots, y_s; \frac{\eta}{t^p}\right) t^n = \exp(-t^2) e_{\mu}(2xt) \Lambda_{\tau, \psi}(y_1, \dots, y_s; \eta) \quad (4.3)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 4.2' den dolayı

$$\Theta_{n,\mu}^{\tau,\psi}\left(x, y_1, \dots, y_s; \frac{\eta}{t^p}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]} a_k \frac{H_{n-pk}^{\mu}(x)}{(n-pk)!} \Omega_{\tau+\psi k}(y_1, \dots, y_s) \eta^k t^{n-pk}$$

olarak yazılabilir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,\mu}^{\tau,\psi}\left(x, y_1, \dots, y_s; \frac{\eta}{t^p}\right) t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]} a_k \frac{H_{n-pk}^{\mu}(x)}{(n-pk)!} \Omega_{\tau+\psi k}(y_1, \dots, y_s) \eta^k t^{n-pk}$$

olarak bulunur. Burada n yerine $n + pk$ yazılırsa ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]} A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k, n + pk) \quad (4.4)$$

Eş. 4.4' ten dolayı [3]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,\mu}^{\tau,\psi}\left(x, y_1, \dots, y_s; \frac{\eta}{t^p}\right) t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{H_n^{\mu}(x)}{n!} \Omega_{\tau+\psi k}(y_1, \dots, y_s) \eta^k t^n$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^{\mu}(x)}{n!} t^n \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\tau+\psi k}(y_1, \dots, y_s) \eta^k \right)$$

$$= \exp(-t^2) e_{\mu}(2xt) \Lambda_{\tau,\psi}(y_1, \dots, y_s; \eta)$$

elde edilir.

Bu teoremda a_k 'nın uygun seçimi için $\Omega_{\tau+\psi k}(y_1, \dots, y_s)$ fonksiyonu uygun fonksiyonların çarpımı olarak yazıldığı taktirde genelleştirilmiş Hermite polinomları için multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyonlar bulunabilir.

4.2. Genelleştirilmiş Hermite ve Hermite Polinomları İçin Doğurucu Fonksiyon

Teorem 4.1.1' de $s=1$ alınıp, $\Omega_{\tau+\psi k}$ fonksiyonu da

$$\Omega_{\tau+\psi k}(y) = H_{\tau+\psi k}(y), \quad \tau, \psi \in \mathbb{N}$$

olarak seçilecektir. Burada $H_n(y)$ fonksiyonları

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(y)}{n!} t^n = e^{2yt-t^2}$$

doğurucu fonksiyonuna sahiptir [3]. Eş. 4.1 ve Eş. 4.2' den sırasıyla

$$\Lambda_{\tau, \psi}(y, \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k H_{\tau+\psi k}(y) \zeta^k$$

ve

$$\Theta_{n, \mu}^{\tau, \psi}(x, y; \zeta) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p} \right]} a_k \frac{H_{n-pk}^{\mu}(x)}{(n-pk)!} H_{\tau+\psi k}(y) \zeta^k$$

olup,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n, \mu}^{\tau, \psi} \left(x, y; \frac{\eta}{t^p} \right) t^n = \exp(-t^2) e_{\mu}(2xt) \Lambda_{\tau, \psi}(y; \eta)$$

eşitliği elde edilir.

Sonuçta $a_k = \frac{1}{k!}$, $\tau = 0$ ve $\psi = 1$ seçilirse

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor} \frac{1}{k!} \frac{H_{n-pk}^{\mu}(x)}{(n-pk)!} H_k(y) \eta^k t^{n-pk}$$

$$= \exp(-t^2) e_{\mu}(2xt) e^{2\eta y - \eta^2}$$

olarak verilen genelleştirilmiş Hermite polinomları ve Hermite polinomları için bilateral doğurucu fonksiyon elde edilir.

4.3. Genelleştirilmiş Hermite Polinomları ve İki Değişkenli Laguerre Polinomları İçin Doğurucu Fonksiyon

İki değişkenli Laguerre polinomları, Khan, Usman ve Choi tarafından [30]' da tanımlanmıştır. İki değişkenli Laguerre polinomlarının özellikleri [31]'de de incelenmiştir.

Teorem 4.1.1' de $s = 2$ alınıp, $\Omega_{\tau+\psi k}$ fonksiyonu da

$$\Omega_{\tau+\psi k}(y_1, y_2) = L_{\tau+\psi k}(y_1, y_2), \quad \tau, \psi \in \mathbb{N}$$

iki değişkenli Laguerre polinomları alınacaktır. İki değişkenli Laguerre polinomları

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(y_1, y_2) t^n = \frac{1}{1-y_2 t} e^{\frac{-y_1}{1-y_2 t}}, \quad |y_2 t| < 1$$

şeklinde doğurucu fonksiyona sahiptir [30]. Eş. 4.1 ve Eş. 4.2' den dolayı

$$\Lambda_{\tau, \psi}(y_1, y_2; \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k L_{\tau+\psi k}(y_1, y_2) \zeta^k$$

ve

$$\Theta_{n,\mu}^{\tau,\psi}(x, y_1, y_2; \zeta) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]} a_k \frac{H_{n-pk}^{\mu}(x)}{(n-pk)!} L_{\tau+\psi k}(y_1, y_2) \zeta^k$$

olup,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,\mu}^{\tau,\psi} \left(x, y_1, y_2; \frac{\eta}{t^p} \right) t^n = \exp(-t^2) e_{\mu}(2xt) \Lambda_{\tau,\psi}(y_1, y_2; \eta)$$

eşitliği elde edilir.

Sonuçta $a_k = 1$, $\tau = 0$ ve $\psi = 1$ seçilirse

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]} \frac{H_{n-pk}^{\mu}(x)}{(n-pk)!} L_k(y_1, y_2) \eta^k t^{n-pk} \\ &= \exp(-t^2) e_{\mu}(2xt) \frac{1}{1-y_2\eta} e^{\frac{-y_1\eta}{1-y_2\eta}}, \quad |y_2\eta| < 1 \end{aligned}$$

olarak verilen genelleştirilmiş Hermite polinomları ve iki değişkenli Laguerre polinomları için bilateral doğurucu fonksiyon elde edilir.

4.4. Genelleştirilmiş Hermite Polinomları ve Erkus-Srivastava Polinomları İçin Doğurucu Fonksiyon

Erkus-Srivastava polinomları [32]' de tanımlanmıştır.

Teorem 4.1.1' de $s = r$ alınıp, $\Omega_{\tau+\psi k}$ fonksiyonu da

$$\Omega_{\tau+\psi k}(y_1, \dots, y_r) = u_{\tau+\psi k}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)}(y_1, \dots, y_r), \quad \tau, \psi \in \mathbb{N}$$

olarak seçilecektir. Erkus-Srivastava polinomları

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r) t^n = \prod_{j=1}^r \left\{ \left(1 - x_j t^{m_j} \right)^{-1} \right\}$$

doğurucu fonksiyonuna sahiptir [32]. Eş. 4.1 ve Eş. 4.2' den dolayı

$$\Lambda_{\tau, \psi}(y_1, \dots, y_r; \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k u_{\tau+\psi k}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(y_1, \dots, y_r) \zeta^k$$

ve

$$\Theta_{n, \mu}^{\tau, \psi}(x, y_1, \dots, y_r; \zeta) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p} \right]} a_k \frac{H_{n-pk}^{\mu}(x)}{(n-pk)!} u_{\tau+\psi k}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(y_1, \dots, y_r) \zeta^k$$

olup,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n, \mu}^{\tau, \psi} \left(x, y_1, \dots, y_r; \frac{\eta}{t^p} \right) t^n = \exp(-t^2) e_{\mu}(2xt) \Lambda_{\tau, \psi}(y_1, \dots, y_r; \eta)$$

eşitliği elde edilir.

Sonuçta $a_k = 1$, $\tau = 0$ ve $\psi = 1$ seçilirse

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p} \right]} \frac{H_{n-pk}^{\mu}(x)}{(n-pk)!} u_{\tau+\psi k}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(y_1, \dots, y_r) \eta^k t^{n-pk} \\ &= \exp(-t^2) e_{\mu}(2xt) \prod_{j=1}^r \left\{ \left(1 - y_j \eta^{m_j} \right)^{-1} \right\} \end{aligned}$$

olarak verilen genelleştirilmiş Hermite polinomları ve Erkus-Srivastava polinomları için bilateral doğurucu fonksiyon elde edilir.

4.5. Genelleştirilmiş Hermite Polinomları İçin Bilineer Doğurucu Fonksiyon

Teorem 4.1.1' de $s=1$ alınıp, $\Omega_{\tau+\psi k}$ fonksiyonu da

$$\Omega_{\tau+\psi k}(y) = H_{\tau+\psi k}^{\mu}(y), \quad \tau, \psi \in \mathbb{N}$$

olarak seçilecektir. Burada $H_n^{\mu}(y)$ fonksiyonları

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^{\mu}(y)}{n!} t^n = e^{-t^2} e_{\mu}(2yt)$$

doğurucu fonksiyonuna sahiptir [12]. Eş. 4.1 ve Eş. 4.2 sırasıyla

$$\Lambda_{\tau, \psi}(y, \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k H_{\tau+\psi k}^{\mu}(y) \zeta^k$$

ve

$$\Theta_{n, \mu}^{\tau, \psi}(x, y; \zeta) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p} \right]} a_k \frac{H_{n-pk}^{\mu}(x)}{\gamma_{\mu}(n-pk)} H_{\tau+\psi k}^{\mu}(y) \zeta^k$$

olup,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n, \mu}^{\tau, \psi}\left(x, y; \frac{\eta}{t^p}\right) t^n = \exp(-t^2) e_{\mu}(2xt) \Lambda_{\tau, \psi}(y; \eta)$$

eşitliği elde edilir.

Sonuçta $a_k = \frac{1}{k!}$, $\tau = 0$ ve $\psi = 1$ seçilirse

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p} \right]} \frac{1}{k!} \frac{H_{n-pk}^{\mu}(x)}{\gamma_{\mu}(n-pk)} H_k^{\mu}(y) \eta^k t^{n-pk}$$

$$= \exp(-t^2) e_{\mu}(2xt) e^{-\eta^2} e_{\mu}(2y\eta)$$

olarak verilen genelleştirilmiş Hermite polinomları için bilineer doğurucu fonksiyon elde edilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde genelleştirilmiş üstel fonksiyon yardımıyla tanımlanan genelleştirilmiş Hermite polinomlarının özellikleri üzerinde durulmuştur. Bu polinom ailesinin multilineer ve multilateral fonksiyonları elde edilmiştir.

Bu genelleme ile literatürde matematiksel olarak teoriksel çalışma ile birlikte çeşitli uygulama alanlarında kullanışlı özellikler elde edilebilir. Üstel fonksiyonun Dunkl genellemesi gibi yeni bir özelliğin yardımıyla Hermite polinomlarının birden fazla değişkenli farklı genellemesinin rekürans bağıntıları, multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyonları, integral gösterimleri, inversiyon formülü, Rodrigues formülü gibi çeşitli özellikleri bulunabilir.

KAYNAKLAR

1. Weber, H. J. and Arfken, G. B. (2003). *Essential Mathematical Methods for Physicists*. San Diego: Elsevier Academic Press, 638-662.
2. İnternet: <http://scienceworld.wolfram.com/biography/Hermite.html>, Erişim Tarihi: 04.05.2020.
3. Bell, W.W. (1968). *Special Functions for Scientist and Engineers*. Canada: David Van Nostrand Company, 156-157, 162-163.
4. Rainville, E. D. (1965). *Special Functions* (Third edition). New York: The Macmillan Company, 187-188, 190, 193.
5. Yalçın, E. (2019). *İki Değişkenli Kısmi İntegro Diferansiyel Denklemlerin Hermite Polinomlarına Dayalı Nümerik Çözümleri ve Uygulamaları*, Doktora Tezi, Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Manisa, 17.
6. Erdoğan, A. (2011). *Ortogonal Polinomlar ve Uygulama Alanları & Gamma Fonksiyonu ve Cebirsel Denklemler* (Birinci baskı). Ankara: Nobel Yayın Dağıtım, 49.
7. Szego, G. (1939). *Orthogonal Polynomials*. New York: American Mathematics Society Colloquium Publications.
8. Chihara, T. S. (1978). *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. New York: Gordon and Breach, 43, 157.
9. Chihara, T. S. (1955). *Generalized Hermite Polynomials*, Thesis, Purdue.
10. Dickinson, D. J. and Warsi, S. A. (1963). On a generalized Hermite polynomial and a problem of Carlitz. *Bollettino Uione Matematica Italiana*, (18)3, 256-259.
11. Dutta, M., Chatterjea, S. K. and More, K. L. (1975). On a class of generalized Hermite polynomials. *Bulletin of the Institute of Mathematics*, 3, 377-381.
12. Rosenblum, M. (1994). Generalized Hermite polynomials and the Bose-like oscillator calculus. In: *Nonselfadjoint operators and related topics, Operator Theory: Advances and Applications*, 73, 369-396.
13. Dattoli, G., Germano, B., Martinelli, M. R. and Ricci, P. E. (2016). Chihara-Rosenblum polynomials and umbral methods. *Ilirias Journal of Mathematics*, 5(1), 1-11.
14. Altın, A. (2011). *Uygulamalı Matematik*, Ankara: Gazi Kitabevi, 1-290.
15. Erdelyi, A. (1980). *Higher Transcendental Functions*, New York: McGraw-Hill, 1, 248-292.

16. Slater, L. J. (1960). *Confluent Hypergeometric Functions*. Cambridge: Cambridge University Press, 504-535.
17. Dunkl, C. F. (1991). Integral kernels with reflection group invariance. *Canadian Journal of Mathematics*, 43(6), 1213-1227.
18. Dunkl C. F. (1992). Hankel Transforms associated to finite reflection groups. *Contemporary Mathematics*, 138, 128-138.
19. Chaggara, H. (2007). Operational rules and a genaralized Hermite polynomials. *Journal of Mathematical Analysis Applications*, 332(1), 11-21.
20. Biricik, N. ve Çekim, B. (2019, 28-29 Haziran). *Genelleştirilmiş Hermite Polinomlarının Bazı Özellikleri*. 14. Ankara Matematik Günleri'nde sunuldu, Ankara.
21. Özarslan, M. A. and Altın, A. (2004). Some families of generating functions for the multiple orthogonal polynomials associated with modified Bessel K -functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 297 (1), 186-193.
22. Özarslan, M. A., Altın, A. and Erkuş, E. (2006). Families of linear generating functions for polynomials in two variables. *Integral Transforms and Special Functions*, 17 (5), 315-320.
23. Altın, A. and Erkuş, E. (2006). On a multivariable extension of the Lagrange-Hermite polynomials. *Integral Transforms and Special Functions*, 17 (4), 239-244.
24. Altın, A., Aktaş, R. and Erkuş-Duman, E. (2009). On a multivariable extension for the extended Jacobi polynomials. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 353 (1), 121-133.
25. Korkmaz-Düzgün, D. and Erkuş-Duman, E. (2019). On a new type multivariable hypergeometric functions. arXiv:1901.07551v1 [Math.CA], 1-12.
26. Altın, A., Aktaş, R. and Çekim, B. (2013). On a multivariable extension of the Hermite and related polynomials, *Ars Combinatoria*, 110, 487-503.
27. Korkmaz-Düzgün, D. and Erkuş-Duman, E. (2019). Extended multivariable fourth type horn functions. *Gazi University Journal of Science*, 32(1), 225-240.
28. Erkuş-Duman, E. and Tuğlu, N. (2015). Generating functions for the generalized bivariate Fibonacci and Lucas polynomials. *Journal of Computational Analysis and Applications*, 18(5), 815-821.
29. Kızılateş, C. and Çekim, B. (2018). New families of generating functions for q-Fibonacci and the related polynomials, *Ars Combinatoria*, 136, 397-404.
30. Khan, N., Usman, T. and Choi, J. (2018). A new class of genaralized polynomials, *Turkish Journal of Mathematics*, 42(3), 1366-1379.

31. Aktaş, R. and Erkuş-Duman, E. (2013). The Laguerre polynomials in several variables, *Mathematica Slovaca*, 63(3), 531-544.
32. Erkuş, E. and Srivastava, H. M. (2006). A unified presentation of some families of multivariable polynomials. *Integral Transform and Special Functions*, 17(4), 267-273.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : BİRİCİK, Neslihan
 Uyruğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 02.09.1993, Kahramanmaraş
 Medeni hali : Bekar
 e-mail : neslihan.biricik@gazi.edu.tr



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik Ana Bilim Dalı	Devam ediyor
Lisans	Gaziosmanpaşa Üniversitesi / Matematik Bölümü	2015
Lise	Gülizar Şamil Aktaş Anadolu Lisesi	2011

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2019-Halen	Gaziosmanpaşa Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Bildiriler

[1] Biricik, N. ve Çekim, B. (2019, 28-29 Haziran). *Genelleştirilmiş Hermite Polinomlarının Bazı Özellikleri*. 14. Ankara Matematik Günleri'nde sunuldu, Ankara.

Hobiler

Yüzme, Kitap, Seyahat



GAZİ GELECEKTİR..