



**İKİ DEĞİŞKENLİ SZASZ OPERATÖRLERİNİN SCHURER TİP
GENELLEŞTİRMESİ**

Esra YURDAKUL

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MART 2021

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

Bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Esra YURDAKUL

.....

İKİ DEĞİŞKENLİ SZASZ OPERATÖRLERİNİN SCHURER TİP GENELLEŞTİRMESİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Esra YURDAKUL

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Mart 2021

ÖZET

Bu tezde iki değişkenli Szasz operatörlerinin Schurer genelleştirilmesi üzerine çalışılmıştır. Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüme giriş kısmına yer verilmiştir. İkinci bölümde, lineer pozitif operatörlerin tanımı verilmiş ve bilinen temel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca Korovkin teoremi verilmiştir. Üçüncü bölümde, Szasz operatörlerin yaklaşım özellikleri verilmiştir. Ayrıca Szasz operatörleri için Voronowskaja teoremi tipinde bir teorem de ispat edilmiştir. Dördüncü bölümde, süreklilik modülü, Peetre-K fonksiyoneli ve Lipschitz sınıfı fonksiyonları yardımıyla Szasz operatörlerin f fonksiyonuna yaklaşım hızının tahmini elde edilmiştir. Beşinci bölümde, iki değişkenli Szasz-Schurer operatörlerinin tanımı, yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızı verilmiştir. Bu yaklaşım hızının hesaplanması Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar için de elde edilmiştir. Ayrıca iki değişkenli Szasz-Schurer operatörü için Voronowskaja teoremi tipinde bir teorem de ispat edilmiştir. Altıncı bölümde ise sonuç ve öneriler kısmı bulunmaktadır.

Bilim Kodu : 20404

Anahtar Kelimeler : Lineer pozitif operatörler, Bernstein polinomu, Szasz operatörleri, Korovkin teoremi, Voronowskaja teoremi, süreklilik modülü

Sayfa Adedi : 53

Danışman : Prof. Dr. Birol ALTIN

SCHURER TYPE GENERALIZATION OF SZASZ OPERATORS OF TWO VARIABLES

(M. Sc. Thesis)

Esra YURDAKUL

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

Mart 2021

ABSTRACT

In this thesis, Schurer type generalization of Szasz operators of two variables is investigated. This thesis consists of five chapters. The first chapter is about the introduction. In the second chapter, definition of linear positive operator is given and its fundamental properties are obtained. Also, the Korovkin theorem is given. In the third chapter, approximation properties of the Szasz operator is obtained. Moreover a Voronowskaja type theorem is also proven for Szasz operators. In the fourth chapter, the estimation rate of approximation of the Szasz operator to the function f is obtained with the help of modulus of continuity, K functional of Peetre and Lipschitz functions. In the fifth chapter, Schurer type generalization of Szasz operators of two variables is given and the approximation properties and the rate of convergence of these operators are investigated. In addition to this, the estimation is also obtained for the function in the Lipschitz class. Moreover, a Voronowskaja type theorem is also proven for, Schurer type generalization of Szasz operators of two variables. Finally in the sixth chapter, there is the conclusion and recommendations part.

Science Code : 20404

Key Words : Sequences of linear positive operators, Bernstein polynomials, Szasz, operators, the Korovkin theorem, the Voronowskaja theorem, modulus of continuity

Page Number : 53

Supervisor : Prof. Dr. Birol ALTIN

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca benimle ilgilenen, destek ve önerileriyle beni yönlendiren saygı değer hocam, Sayın Prof. Dr. Birol ALTIN' a teşekkürlerimi sunarım. Manevi destekleriyle beni bu yolda yalnız bırakmayan aileme en içten sevgilerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Lineer Pozitif Operatör	3
2.1.1. Tanım	3
2.1.2. Tanım	3
2.1.3. Tanım	3
2.2. Lineer Pozitif Operatörlerin Özellikleri	4
2.2.1. Lemma	4
2.2.2. Lemma	4
2.2.3. Tanım	4
2.2.4. Tanım	4
2.2.5. Tanım	4
2.2.6. Tanım	5
2.2.7. Tanım	5
2.2.8. Tanım	5
2.2.9. Tanım	5
2.2.10. Lemma	5
2.3. P.P. Korovkin Teoremi (1953).....	6
2.3.1. Teorem	6

	Sayfa
2.3.2. Tanım	7
2.3.3. Lemma	7
3. SZASZ OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ	9
3.1. Szasz Operatörlerin Düzgün Yakınsaklığı	9
3.1.1. Tanım	9
3.1.2. Teorem	9
3.1.3. Tanım	9
3.1.4. Sonuç.....	10
3.2. Voronowskaja Teoremi	10
3.2.1. Teorem	10
3.2.2. Tanım	11
3.2.3. Teorem	11
3.2.4. Teorem	11
4. SZASZ OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM HIZI	13
4.1. Süreklilik Modülü	13
4.1.1. Tanım	13
4.1.2. Süreklilik modülünün özellikleri	13
4.1.3. Szasz operatörlerinin süreklilik modülü ile yaklaşım hızı	14
4.1.4. Teorem	14
4.2. Szasz Operatörlerinin Peetre-K Fonksiyoneli ile Yaklaşım Hızı.....	14
4.2.1. Tanım	14
4.2.2. Teorem	14
4.3. Szasz Operatörlerinin Lîpschitz Sınıfındaki Fonksiyonlar ile Yaklaşım Hızı....	15
4.3.1. Tanım	15
4.3.2. Teorem	15

5. İKİ DEĞİŞKENLİ SZASZ-SCHURER OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ.....	17
5.1. Tanım (İki değişkenli Szasz operatörünün Schurer tip genelleştirmesi)	18
5.1.1. Lemma	19
5.1.2. Teorem: (Volkov 1957)	26
5.1.3. Teorem	30
5.2. Süreklilik Modülü	30
5.2.1. Süreklilik modülünün özellikleri	30
5.2.2. Teorem	34
5.3. Lipschitz Sınıfı Fonksiyonları	38
5.3.1. Tanım	38
5.3.2. Sonuç.....	39
5.4. Voronovskaja-tip Teorem	39
5.4.1. Lemma	39
5.4.2. Sonuç.....	44
5.4.3. Teorem	45
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	49
KAYNAKÇA.....	51
ÖZGEÇMİŞ	53

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$A_n(f; x)$	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir operatör dizisi.
$B_n(f; x)$	Bernstein polinomları
$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığında tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonlardan oluşan küme
$C^2[a,b]$	$f, f', f'' \in C[a,b]$ olan fonksiyonlar uzayı.
$f_n(x)$	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere fonksiyon dizisi
$f_n(x) \Rightarrow f$	$\{f_n\}$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması.
$K(f; \delta)$	f fonksiyonun Peetre's K fonksiyoneli.
$Lip_M(\alpha)$	Lipschitz sınıfı fonksiyonları
$S_n(f; x)$	Szasz operatörleri
$S_n^*(f; x)$	Genelleştirilmiş Szasz operatörleri
$\omega(f; \delta)$	f fonksiyonun süreklilik modülü
$\ \cdot\ _{C[a,b]}$	$C[a,b]$ uzayındaki $\ \cdot\ _{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} \cdot $ ile tanımlı norm
$\ \cdot\ _{C^2[a,b]}$	$\ f\ _{C^2[a,b]} = \ f\ _{C[a,b]} + \ f'\ _{C[a,b]} + \ f''\ _{C[a,b]}$ ile tanımlı norm

1. GİRİŞ

Matematiğin araştırma alanlarından biri olan yaklaşım konusu, lineer pozitif operatörler üzerinde uygulanmasıyla, önemli teoremler ortaya çıkmıştır. Bu önemli teoremlere ilişkin Bohman (1952) ve Korovkin (1953) çalışmaları öne çıkmaktadır. Lineer pozitif operatörlerin sonlu aralıkta sürekli fonksiyona yaklaşımına ilişkin Korovkin teoremi; bu alandaki çalışmalara büyük kolaylık sağlamaktadır.

Tek değişkenli Szasz operatörü tanımlandıktan sonra temel özellikleri ele alınmıştır. Tanımı verilen Korovkin teoremi kullanarak operatörün yaklaşımı incelenmiştir. Süreklilik modülü ve Peetre-K fonksiyoneli birlikte yaklaşım hızı hesaplanmıştır. Ayrıca Szasz operatörlerinin Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlarla da yaklaşım hızı da incelenmiştir.

Tezimin esas konusu olan iki değişkenli Szasz-Schurer operatörünün genelleştirmesinin tanımını verip genel özelliklerini inceleyeceğiz. Bir sonraki adımda kullanacağımız süreklilik modülünün R^2 'deki özelliklerini vereceğiz. Ön bilgilerden sonra bu operatörün yaklaşım ve yaklaşım hızını ele alacağız.

Bu tezde açıklanmayan tanım ve notasyonlar için (Hacısalıhoğlu, H., Hacıyev, A. 1995, 1-100)' a bağlı kalınacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.1. Lineer Pozitif Operatör

2.1.1. Tanım

X ve Y iki fonksiyon uzayı olsun. X uzayından alınan herhangi bir fonksiyonun Y uzayındaki bir fonksiyona dönüştüren bağıntıya ‘operatör’ denir. Yani $f \in X$ ve $g \in Y$ olmak üzere;

$$S: X \rightarrow Y \quad S(f(t); x) = g(x)$$

ile gösterilir [9].

2.1.2. Tanım

X ve Y iki fonksiyon uzayı ve $S: X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. Eğer her $f, g \in X$ ve her α, β reel sayıları için;

$$S(\alpha f + \beta g; x) = \alpha S(f; x) + \beta S(g; x)$$

koşulu sağlanıyorsa S ye bir lineer operatör denir [9].

2.1.3. Tanım

X ve Y iki fonksiyon uzayı ve $S: X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. Herhangi bir $f \in X$ olsun. Eğer $f \geq 0$ iken $S(f; x) \geq 0$ ise S operatörüne pozitif operatör denir.

Lineer ve pozitif olan operatörlere lineer pozitif operatör denir [9,11].

2.2. Lineer Pozitif Operatörlerin Özellikleri

2.2.1. Lemma

Lineer pozitif operatörler monoton artandır. Yani;

$$f \leq g \Rightarrow S(f; x) \leq S(g; x)$$

eşitsizliği sağlanır [9,11].

2.2.2. Lemma

S bir lineer pozitif operatör olmak üzere; $|S(f)| \leq S(|f|)$ eşitsizliği sağlanır [9,11].

2.2.3. Tanım

$X = C[a, b]$ fonksiyonlar uzayı ve (f_n) , X kümesinde bir dizi olsun. $n \in \mathbb{N}$ için (f_n) dizisine bir fonksiyon dizisi denir [9].

2.2.4. Tanım

X ve Y iki fonksiyon uzayı ve $S_n: X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. O halde $n \in \mathbb{N}$ için $(S_n(f; x))$ dizisine bir operatör dizisi denir [9].

2.2.5. Tanım

Kapalı bir $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeye “ $C[a, b]$ fonksiyon uzayı” denir. Bu uzaydaki norm ise

$$\|f(x)\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

olarak tanımlanır [9].

2.2.6. Tanım

$D, \mathbb{R}$ nin boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere; $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in D$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $|x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(a, \varepsilon) > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna a noktasında süreklidir denir [2].

2.2.7. Tanım

$K, \mathbb{R}$ nin boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere; $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in K$ olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için $|x - y| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ bulunabiliyorsa; f fonksiyonu K üzerinde düzgün süreklidir denir [10].

2.2.8. Tanım

$D, \mathbb{R}$ nin bir alt kümesi olmak üzere; (f_n) D üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $x \in D$ için en az bir $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$ doğal sayısı bulunabiliyor ve her $n > n_0$ olduğunda $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ oluyorsa (f_n) fonksiyon dizisi D kümesi üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır denir ve $(f_n) \xrightarrow{n.y.} f$ ile gösterilir [13].

2.2.9. Tanım

Boştan farklı D kümesindeki her x elemanı ve her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa

(f_n) dizisi $C[a, b]$ üzerinde f fonksiyonuna D üzerinde düzgün yakınsaktır denir ve $(f_n) \Rightarrow f$ ile gösterilir [13].

2.2.10. Lemma

$C[a, b]$ uzay normunda yakınsaklık ile düzgün yakınsaklık denktir. Yani

$(f_n) \xrightarrow{d.y.} f \Leftrightarrow \|f_n(x) - f(x)\|_{C[a,b]} \rightarrow 0$ olmasıdır.

Düztgün yakınsama noktasal yakınsamayı gerektirir. Ancak tersi doğru değildir. Gerçekten; $(f_n) \Rightarrow f$ olsun. Buna göre her $x \in [a, b]$ ve her $\varepsilon > 0$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n > n_0$ olduğunda $\|f_n(x) - f(x)\|_{C[a,b]} < \varepsilon$ dır. Diğer taraftan

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \max_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n(x) - f(x)\|_{C[a,b]} < \varepsilon \text{ olup}$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{noktasal}} f$$

dır [13].

Tersine bir örnek verelim.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n \in C[0,1]$ olmak üzere; $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ şeklinde tanımlanan fonksiyon dizisi yakınsaktır ancak düztgün yakınsak değildir.

Korovkin (1953) tarafından $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sürekli f fonksiyonuna lineer pozitif operatörler dizisi ile yaklaşım yapılabileceğini aşığıdaki teorem ile ifade ve ispat etmiştir.

2.3. P.P. Korovkin Teoremi (1953)

2.3.1. Teorem

Her $n \in \mathbb{N}$ için (L_n) , $C[a, b]$ den $C[a, b]$ ye lineer pozitif bir operatör dizisi ve

$f \in C[a, b]$ olsun. Her $x \in [a, b]$ olmak üzere eğer;

- i. $L_n(1; x) \Rightarrow 1$
- ii. $L_n(t; x) \Rightarrow x$
- iii. $L_n(t^2; x) \Rightarrow x^2$

koşulları sağlanıyorsa $C[a, b]$ deki her f için $[a, b]$ üzerinde $L_n(f; x) \Rightarrow f(x)$ olur [1,9,11].

2.3.2. Tanım

Sonlu aralıkta sürekli olan fonksiyona bu aralıkta yakınsayan bir polinomun varlığına 1912 yılında matematikçi S.N. Bernstein tarafından $x \in [0,1]$ için

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

şeklinde olduğunu göstermiştir [7,12,13].

2.3.3. Lemma

Tanım 2.3.1 de verilen Bernstein operatörü için;

- i. $B_n(1; x) = 1$
- ii. $B_n(t; x) = x$
- iii. $B_n(t^2; x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$

dır [7,12,13].

3. SZASZ OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde kullanacağımız Szasz operatörleri ve bir genelleşmesi tanıtılarak Korovkin Teoremi yardımıyla yaklaşım özellikleri incelenecektir. Ayrıca Bernstein operatörleri için Voronowskaja' nın verdiği teorem ifade edilerek benzer şekilde Szasz operatörleri içinde ifade ve ispat edilecektir.

3.1. Szasz Operatörlerin Düzgün Yakınsaklığı

3.1.1. Tanım

$a > 0, a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$S_n : C[0, \infty) \rightarrow C[0, a]$$

$$f \rightarrow S_n(f) : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow S_n(f; x) = S_n^*(f; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} \quad (3.1)$$

olarak tanımlanan lineer pozitif operatörlere Szasz operatörleri denir [6,15].

3.1.2. Teorem

(3.1.1) ile verilen Szasz operatörleri $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $[0, a]$ kapalı aralığında sürekli ve tüm yarı ekseninde sınırlı olan f fonksiyonuna bu aralıkta düzgün yakınsar [7].

Yani $f \in C[0, a]$ için;

$$S_n(f; x) \rightrightarrows f(x); \quad x \in [0, a]$$

dır[6]. Korovkin şartları sağlatılarak düzgün yakınsaklığı kolayca görülebilir.

3.1.3. Tanım

$n \in \mathbb{N}$ ve $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ olmak üzere $h(n) > 0$ olsun.

$$S_n^*(f; x) = e^{-h(n)x} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{h(n)}\right) \frac{(h(n)x)^k}{k!}$$

olarak tanımlanan lineer pozitif operatörlere *genelleştirilmiş Szasz* operatörleri denir. Doğal olarak bu tanımda $h(n) = n$ alınmasıyla Szasz operatörleri elde ederiz. Szasz operatörlerde olduğu gibi Genelleştirilmiş Szasz operatörleri içinde;

$$S_n^*(1; x) = 1$$

$$S_n^*(t; x) = x$$

$$S_n^*(t^2; x) = x^2 + \frac{x}{h(n)}$$

benzer şekilde gösterilebilir [6].

3.1.4. Sonuç

(3.1.2) ile tanımı verilen Genelleştirilmiş Szasz operatörleri için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n^*(f; x) - f(x)\|_{C[0,a]} = 0$$

dır [6].

3.2. Voronowskaja Teoremi

1932 yılında E. Voronowskaja; Bernstein polinomları için aşağıdaki teoremi ispatlamıştır. (Lorentz 1953).

3.2.1. Teorem

f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sürekli ve $(0,1)$ aralığında ikinci türevi olsun. O halde;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[B_n(f; x) - f(x)] = \frac{1}{2}(x - x^2)f''(x)$$

eşitliği sağlanır [12].

Şimdi benzer şekilde Szasz operatörleri için ifade edelim. Ondan önce Szasz operatörleri için bilinen merkezi momentlerini hesaplayalım:

3.2.2. Tanım

$\varphi_{n,s}(x) = S_n((t-x)^s; x)$, $\{s = 0,1,2, \dots\}$ ile tanımlanan ifadeye (S_n) operatör dizisinin s -yinci merkezi momentleri denir.

3.2.3. Teorem

(3.2.2) ile tanımladığımız merkezi momentlerin Szasz operatörleri için ilk beş eşitleri ;

$$\varphi_{n,0}(x) = S_n((t-x)^0; x) = S_n(1; x) = 1 \quad (3.2)$$

$$\varphi_{n,1}(x) = S_n((t-x)^1; x) = S_n(t-x; x) = 0 \quad (3.3)$$

$$\varphi_{n,2}(x) = S_n((t-x)^2; x) = S_n((t-x)^2; x) = \frac{x}{n} \quad (3.4)$$

$$\varphi_{n,3}(x) = S_n((t-x)^3; x) = S_n((t-x)^3; x) = \frac{x}{n^2} \quad (3.5)$$

$$\varphi_{n,4}(x) = S_n((t-x)^4; x) = S_n((t-x)^4; x) = \frac{x}{n^3} + \frac{3x^2}{n^2} \quad (3.6)$$

şeklindedir [12].

3.2.4. Teorem

f fonksiyonu $[0, a]$ aralığında sınırlı ve $(0, a)$ aralığında ikinci türevi mevcut ise

o halde;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[S_n(f; x) - f(x)] = \frac{1}{2} x f''(x)$$

eşitliği sağlanır [12].

4. SZASZ OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM HIZI

Yaklaşımlar teorisinin önemli bir problemi de yaklaşma hızı problemidir. Bir önceki bölümde; operatörlerin yaklaşımından bahsetmiştik. Bu bölümde ise yaklaşma hızından bahsedeceğiz.

Yaklaşma hızı; $\alpha_n \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$ olmak üzere

$|S_n(f; x) - f(x)| < c\alpha_n$ olacak şekilde α_n lerin belirlenmesiyle hesaplanır. Ancak bu α_n ' ler S_n operatörü ve f fonksiyonuna göre değişirler. Buradaki hız probleminin hesaplanması için birden çok araç kullanılmakla beraber biz bu hızı; süreklilik modülü, Peetre K fonksiyoneli ve f nin Lipschitz sınıfından olması ile hesaplayacağız. O halde ilk olarak süreklilik modülünün tanımını ve bazı temel özelliklerini verelim.

4.1. Süreklilik Modülü

4.1.1. Tanım

$f \in C[a, b]$ olsun. Her $\delta > 0$ için;

$$\omega(f; \delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |t-x| \leq \delta}} |f(t) - f(x)| \text{ ile tanımlanan} \quad (4.1)$$

$\omega(f; \delta)$ ifadesine f fonksiyonun süreklilik modülü denir [1,3].

4.1.2. Süreklilik modülünün özellikleri

- i. $\omega(f; \delta) \geq 0$
- ii. $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$ dir.
- iii. $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\omega(f; m\delta) \leq m\omega(f; \delta)$
- iv. $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(f; \lambda\delta) \leq (\lambda + 1) \omega(f; \delta)$
- v. $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta) = 0$
- vi. $|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|)$
- vii. $|f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1\right) \omega(f; \delta)$ dir.

4.1.3. Szasz operatörlerinin süreklilik modülü ile yaklaşım hızı

Bu kısımda (3.1.1) de tanımı verilen Szasz operatörleri ile Szasz operatörlerinin genelleşmesinin yaklaşım hızını (4.1) ile tanımlanan süreklilik modülü yardımıyla hesaplayacağız.

4.1.4. Teorem

$f \in C[0, a]$ ise Szasz operatörlerinin süreklilik modülüyle yaklaşım hızı;

$$\|S_n(f; x) - f(x)\|_{C[0, a]} \leq (1 + \sqrt{a}) \omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

olarak hesaplanır [14].

4.2. Szasz Operatörlerinin Peetre-K Fonksiyoneli ile Yaklaşım Hızı

Bu bölümde Szasz operatörlerinin yaklaşım hızını Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla ele alacağız. Dolayısıyla önce Peetre-K fonksiyonelinin tanımını verelim (Bleimann 1980, Butzer 1967).

4.2.1. Tanım

$f \in C[0, a]$ ve $\delta \geq 0$ olmak üzere;

$K(f; \delta) = \inf_{g \in C^2[0, a]} \{\|f - g\|_{C[0, a]} + \delta \|g\|_{C^2[0, a]}\}$ ifadesine Peetre-K fonksiyoneli denir. [5,7]

4.2.2. Teorem

Eğer $f \in C[0, a]$ ise;

$$\|S_n(f; x) - f(x)\|_{C^2[0, a]} \leq 2K\left(f; \frac{a}{4n}\right) \text{ dır.}$$

Buradaki

$$K\left(f; \frac{a}{4n}\right)$$

Peetre-K fonksiyonelidir [5,7].

4.3. Szasz Operatörlerinin Lİpschitz Sınıfındaki Fonksiyonlar ile Yaklaşım Hızı

Bu bölümde önce Lipschitz sınıfı fonksiyonların bilinen tanımını vereceğiz. Daha sonra bu sınıftaki fonksiyonlara Szasz operatörlerinin yaklaşım hızını inceleyeceğiz.

4.3.1. Tanım

(Lipschitz Sınıfı Fonksiyonlar)

$0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere;

$|f(t) - f(x)| \leq M|t - x|^\alpha$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfına *Lipschitz sınıfı fonksiyonları* denir.

M ye *Lipschitz sabiti* denir ve $f \in Lip_M(\alpha)$ ile gösterilir.

4.3.2. Teorem

$f \in Lip_M(\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere;

$$\|S_n(f; x) - f(x)\|_{C[0,a]} = O\left(\left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right) \text{ dir [6,7].}$$

5. İKİ DEĞİŞKENLİ SZASZ-SCHURER OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Çalışmamızın son kısmı olan bu bölümde; iki değişkenli Szasz operatörlerin Schurer genelleştirilmesi verilir; bu operatörlerin yaklaşım özelliklerini inceleyeceğiz. Daha sonra bu operatörler için Voronowskaja tipi bir teorem vereceğiz. Son olarak bu operatörlerin süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızını hesaplayacağız. Şimdi kullanacağımız bilinen bazı temel tanımları verelim:

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, 0 \leq y\}$ ve $D_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a\}$ olsun.

D üzerinde tanımlı sürekli fonksiyon uzayını $C(D)$ ile, D_a üzerinde tanımlı sürekli fonksiyon uzayını $C(D_a)$ ile göstereceğiz.

Örnek1: $f: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, : f \in C(D)$

$$(s, t) \rightarrow f(s, t) = \cos(s + t)$$

Ayrıca ρ ağırlıklı fonksiyon uzayını uzayı ise; $\rho(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 + x_2^2$ olmak üzere

$$C_\rho(D) = \{f: f \in C(D), |f(x_1, x_2)| \leq K_f \rho(x_1, x_2), K_f > 0, (x_1, x_2) \in D\}$$

biçiminde tanımlı ve

$$\|f\|_{C_\rho(D)} = \sup_{(x,y) \in D} \left(\frac{|f(x_1, x_2)|}{1 + |(x_1, x_2)|^2} \right)$$

normu ile donatılmıştır.

Örnek2 : $f: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f \in C_\rho(D)$

$$(x_1, x_2) \rightarrow f(x_1, x_2) = 2x_1^2$$

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 \leq K_f (1 + x_1^2 + x_2^2), \text{ olacak şekilde } K_f = 2 > 0 \text{ vardır.}$$

Bu uzayın bir alt uzayı olan $C_\rho^*(D)$ aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$C_{\rho}^*(D) = \left\{ f \in C_{\rho}(D) : \lim_{|(x_1, x_2)| \rightarrow \infty} \frac{|f(x_1, x_2)|}{1 + |(x_1, x_2)|^2} \text{ var ve sonlu} \right\}$$

dır. Burada ρ fonksiyonu ise D üzerinde tanımlı sürekli bir ağırlık fonksiyonu denir.

Örnek3:

$$f: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f \in C_{\rho}^*(D)$$

$$(x_1, x_2) \rightarrow f(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 + x_2^2 \quad \text{seçersek}$$

$$\lim_{|(x_1, x_2)| \rightarrow \infty} \frac{1 + x_1^2 + x_2^2}{1 + |(x_1, x_2)|^2} = 1$$

5.1. Tanım (İki değişkenli Szasz operatörünün Schurer tip genelleştirmesi)

$$S_{n,p}^* : C_{\rho}^*(D) \rightarrow C(D)$$

$$f(s, t) \rightarrow S_{n,p}^*(f(s, t); (x_1, x_2))$$

$$:= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n+p}, \frac{j}{n+p}\right) \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!}$$

$(x_1, x_2) \in D$ ve $f \in C(D)$, $n \in \mathbb{N}$ ve $p > 0$; biçiminde tanımlanan operatöre *iki değişkenli Szasz operatörünün Schurer tip genelleştirmesi* denir.

Kolaylıkla görülebilir ki bu operatör pozitif ve lineer bir operatördür.

Şimdi bir sonraki bölümlerde kullanacağımız test fonksiyonlarının bu $S_{n,p}^*$ operatör altındaki görüntülerini hesaplayalım.

$e_{i,j} : D \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$e_{i,j}(s, t) = s^i + t^j \quad i, j = 0, 1, 2, 3, 4$$

olarak tanımlı fonksiyonlara test fonksiyonları denir.[17]

$i = j = 0$ için $e_{0,0}(s, t) = 1$ olmak üzere;

$$e_{1,0}(s, t) = s, \quad e_{0,1}(s, t) = t$$

$$e_{1,1}(s, t) = s + t, e_{2,0}(s, t) = s^2, e_{0,2}(s, t) = t^2, e_{2,2}(s, t) = s^2 + t^2$$

$$e_{3,0}(s, t) = s^3, e_{4,0}(s, t) = s^4, e_{0,3}(s, t) = t^3, e_{0,4}(s, t) = t^4$$

Şimdi bu test fonksiyonlarını $S_{n,p}^*$ operatörümüze uygulayalım.

5.1.1. Lemma

Aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\begin{aligned} (i) \quad & S_{n,p}^* \left(e_{0,0}(s, t); (x_1, x_2) \right) \\ &= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} e_{0,0} \left(\frac{k}{n+p}, \frac{j}{n+p} \right) \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!} \\ &= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!} \\ &= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} e^{(n+p)x_1} e^{(n+p)x_2} \\ &= 1 \text{ olup} \end{aligned}$$

$$S_{n,p}^* \left(e_{0,0}(s, t); (x_1, x_2) \right) = 1 \text{ bulunur.} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad & S_{n,p}^* \left(e_{1,0}(s, t); (x_1, x_2) \right) \\ &= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} e_{1,0} \left(\frac{k}{n+p}, \frac{j}{n+p} \right) \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!} \\ &= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k}{n+p} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n+p} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!} \\
&= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n+p} \frac{((n+p)x_1)^k}{(k-1)!} e^{(n+p)x_2}
\end{aligned}$$

$k \rightarrow k+1$ öteleme yaparsak;

$$\begin{aligned}
&= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \frac{(n+p)x_1}{n+p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} e^{(n+p)x_2} \\
&= x_1 e^{-(n+p)(x_1+x_2)} e^{(n+p)x_1} e^{(n+p)x_2}
\end{aligned}$$

$= x_1$ olup

$$S_{n,p}^*(e_{1,0}(s, t); (x, y)) = x_1 \quad (5.2)$$

elde ederiz.

$e_{0,1}(s, t) = t$ içinde benzer işlemlerle

$$S_{n,p}^*(e_{0,1}(s, t); (x_1, x_2)) = x_2 \text{ bulunur.} \quad (5.3)$$

$$(iii) \quad S_{n,p}^*(e_{1,1}(s, t); (x_1, x_2))$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} e_{1,1} \left(\frac{k}{n+p}, \frac{j}{n+p} \right) \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!} \\
&= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n+p} + \frac{j}{n+p} \right) \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!} \\
&= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k}{n+p} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!}
\end{aligned}$$

$$+e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j}{n+p} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!}$$

(5.2) ile (5.3) den

$$S_{n,p}^* \left(e_{1,1}(s, t); (x_1, x_2) \right) = x_1 + x_2 \quad (5.4)$$

elde ederiz.

$$(iv) \ S_{n,p}^* \left(e_{2,0}(s, t); (x_1, x_2) \right)$$

$$= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} e_{2,0} \left(\frac{k}{n+p}, \frac{j}{n+p} \right) \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!}$$

$$= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n+p} \right)^2 \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!}$$

$$= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{(n+p)^2} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!}$$

$k^2 = k(k-1) + k$ olarak yazabiliriz.

$$= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k(k-1)}{(n+p)^2} + \frac{k}{(n+p)^2} \right) \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} e^{(n+p)x_2}$$

$$= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)}{(n+p)^2} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(n+p)^2} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \right) e^{(n+p)x_2}$$

$$= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+p)^2} \right) \frac{((n+p)x_1)^k}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+p)^2} \frac{((n+p)x_1)^k}{(k-1)!} \right) e^{(n+p)x_2}$$

$k \rightarrow k+2$ ile $k \rightarrow k+1$ ötelemeleri yaparsak;

$$\begin{aligned}
&= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \left(x_1^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} + \frac{x_1}{n+p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \right) e^{(n+p)x_2} \\
&= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \left(\left(x_1^2 + \frac{x_1}{n+p} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \right) e^{(n+p)x_2} \\
&= \left(x_1^2 + \frac{x_1}{n+p} \right) e^{-(n+p)(x_1+x_2)} e^{(n+p)x_1} e^{(n+p)x_2} \\
&= x_1^2 + \frac{x_1}{n+p}
\end{aligned}$$

$$S_{n,p}^* \left(e_{2,0}(s, t); (x, y) \right) = x_1^2 + \frac{x_1}{n+p} \text{ buluruz.} \quad (5.5)$$

Benzer işlemlerle $e_{0,2}(s, t) = t^2$ için de

$$S_{n,p}^* \left(e_{0,2}(s, t); (x_1, x_2) \right) = x_2^2 + \frac{x_2}{n+p} \quad (5.6)$$

bulunur.

$$(v) \quad S_{n,p}^* \left(e_{2,2}(s, t); (x_1, x_2) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} e_{2,2} \left(\frac{k}{n+p}, \frac{j}{n+p} \right) \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!} \\
&= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{k^2}{(n+p)^2} + \frac{j^2}{(n+p)^2} \right) \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!} \\
&= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k^2}{(n+p)^2} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!}
\end{aligned}$$

$$+ e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^2}{(n+p)^2} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!}$$

(5.5) ile (5.6) den;

$$S_{n,p}^* \left(e_{2,2}(s, t); (x, y) \right) = x_1^2 + x_2^2 + \frac{x_1}{n+p} + \frac{x_2}{n+p} = x_1^2 + x_2^2 + \frac{x_1 + x_2}{n+p}$$

elde ederiz.

$$n \rightarrow \infty \text{ için } S_{n,p}^* \left(e_{2,2}(s, t); (x_1, x_2) \right) \rightarrow x_1^2 + x_2^2 \quad (5.7)$$

$$(vi) \quad S_{n,p}^* \left(e_{3,0}(s, t); (x_1, x_2) \right)$$

$$= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} e_{3,0} \left(\frac{k}{n+p}, \frac{j}{n+p} \right) \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!}$$

$$= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k^3}{(n+p)^3} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!}$$

$$= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} x_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(n+p)^2} \frac{((n+p)x_1)^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!}$$

$$k = k + 1 \text{ ötelemesi yaparsak ve } \sum_{j=0}^{\infty} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!} = e^{(n+p)x_2} \text{ den ;}$$

$$= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} x_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{(n+p)^2} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} e^{(n+p)x_2}$$

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 \text{ olup;}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} x_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 + 2k + 1}{(n+p)^2} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} e^{(n+p)x_2} \\
&= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} x_1 \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{(n+p)^2} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k}{(n+p)^2} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+p)^2} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \right\} e^{(n+p)x_2} \\
&= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \left\{ x_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{(n+p)^2} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} + \frac{2x_1}{n+p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n+p} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \right. \\
&\quad \left. + \frac{x_1}{(n+p)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \right\} e^{(n+p)x_2}
\end{aligned}$$

Gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra;

$$\begin{aligned}
&= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \left\{ x_1 \left(x_1^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \right) + \frac{2x_1}{n+p} \left(x_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{x_1}{(n+p)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \right\} e^{(n+p)x_2}
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Daha sonra,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} = e^{(n+p)x_1} \text{ olup parantezini aldığımızda ;}$$

$$= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \left\{ x_1^3 + \frac{2x_1^2}{n+p} + \frac{x_1}{(n+p)^2} \right\} e^{(n+p)x_1} e^{(n+p)x_2}$$

$$= x_1^3 + \frac{2x_1^2}{n+p} + \frac{x_1}{(n+p)^2}$$

olur. Buradan;

$$S_{n,p}^* \left(e_{3,0}(s, t); (x_1, x_2) \right) = x_1^3 + \frac{2x_1^2}{n+p} + \frac{x_1}{(n+p)^2} \quad (5.8)$$

dır. Benzer işlemlerle,

$$S_{n,p}^* \left(e_{0,3}(s, t); (x_1, x_2) \right) = x_2^3 + \frac{2x_2^2}{n+p} + \frac{x_2}{(n+p)^2} .$$

olarak buluruz.

$$(vii) \quad S_{n,p}^* \left(e_{4,0}(s, t); (x_1, x_2) \right)$$

$$= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} e_{4,0} \left(\frac{k}{n+p}, \frac{j}{n+p} \right) \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!}$$

$$= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k^4}{(n+p)^4} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!}$$

$$= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} x_1 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k^3}{(n+p)^3} \frac{((n+p)x_1)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!}$$

$k \rightarrow k+1$ öteleme yaparsak;

$$= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} x_1 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(k+1)^3}{(n+p)^3} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!}$$

elde ederiz.

$$\frac{(k+1)^3}{(n+p)^3} = \left(\frac{k}{n+p} + \frac{1}{n+p} \right)^3 = \frac{k^3}{(n+p)^3} + 3 \frac{k^2}{(n+p)^3} + 3 \frac{k}{(n+p)^3} + \frac{1}{(n+p)^3}$$

açılımını yerine yazalım.

$$= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} x_1 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{k^3}{(n+p)^3} + 3 \frac{k^2}{(n+p)^3} + 3 \frac{k}{(n+p)^3} + \frac{1}{(n+p)^3} \right\} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!}$$

çıkar. Buradan; toplamaları parantez içine dağılımını yapalım.

$$= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} x_1 \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k^3}{(n+p)^3} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!} + \frac{3}{n+p} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k^2}{(n+p)^2} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!} + \frac{3}{(n+p)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k}{n+p} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!} + \frac{1}{(n+p)^3} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!} \right\}$$

elde ederiz.

(5.1),(5.2),(5.5) ve (5.8) den;

$$= x_1 \left\{ x_1^3 + \frac{2x_1^2}{n+p} + \frac{x_1}{(n+p)^2} + \frac{3}{n+p} \left(x_1^2 + \frac{x_1}{n+p} \right) + \frac{3}{(n+p)^2} x_1 + \frac{1}{(n+p)^3} \right\} \text{ olup}$$

$$= x_1^4 + \frac{5x_1^3}{n+p} + \frac{7x_1^2}{(n+p)^2} + \frac{x_1}{(n+p)^3} \quad (5.9)$$

5.1.2. Teorem: (Volkov 1957)

Her $n, m \in \mathbb{N}$ için,

$L_{n,m}: C([0, \infty) \times [0, \infty)) \rightarrow C([0, a] \times [0, a])$ olsun. Eğer $L_{n,m}$ lineer pozitif operatör dizisi aşağıdaki şartları sağlarsa, o zaman her bir $f \in C([0, a] \times [0, a])$ için,

$$L_{n,m} (f(s, t); (x, y)) \rightrightarrows f(x, y)$$

olması için gerek ve yeterli şart;

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_{n,m}(e_{0,0}) - e_{0,0}\|_{C([0,a] \times [0,a])} = 0$
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_{n,m}(e_{1,0}) - e_{1,0}\|_{C([0,a] \times [0,a])} = 0$
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_{n,m}(e_{0,1}) - e_{0,1}\|_{C([0,a] \times [0,a])} = 0$
- (iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_{n,m}(e_{2,0} + e_{0,2}) - (e_{2,0} + e_{0,2})\|_{C([0,a] \times [0,a])} = 0$

olmasıdır.

İspat

Gereklilik şartı aşikârdır. Yeterlilik şartının ispatını verelim.

$(s, t) \in [0, a] \times [0, a]$ ve $f \in C([0, \infty) \times [0, \infty))$ olsun.

Her bir $f \in C([0, \infty) \times [0, \infty))$ için;

Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki;

$$\|(s, t) - (x, y)\| = \sqrt{(s-x)^2 + (t-y)^2} < \delta \text{ olduğunda } |f(s, t) - f(x, y)| < \varepsilon.$$

Diğer taraftan; eğer $\sqrt{(s-x)^2 + (t-y)^2} \geq \delta$ ise $(x, y) \in D$ için

$$\begin{aligned} |f(s, t) - f(x, y)| &\leq K_f(1 + s^2 + t^2) + K_f(1 + x^2 + y^2) \\ &\leq 2K_f \frac{(s-x)^2 + (t-y)^2}{\delta^2} \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla;

$$|f(s, t) - f(x, y)| \leq \varepsilon + 2K_f \frac{(s-x)^2 + (t-y)^2}{\delta^2} \quad (5.10)$$

olur.

$$f(x, y) = (f - f(s, t)e_{0,0})(x, y) + f(s, t)$$

$$f(x, y) - f(s, t) = (f - f(s, t)e_{0,0})(x, y)$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

$$\begin{aligned} (5.1) \text{ den } |f(s, t) - f(x, y)| &= |(f - f(s, t)e_{0,0})(x, y)| \\ &\leq \varepsilon + 2K_f \frac{(s-x)^2 + (t-y)^2}{\delta^2} \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} |L_{n,m}(f; (x, y)) - f(x, y)| &= |L_{n,m}(f - f(x, y)e_{0,0} + f(x, y)e_{0,0}; (x, y)) - f(x, y)| \\ &= |L_{n,m}(f - f(x, y)e_{0,0}; (x, y)) + f(x, y)\{L_{n,m}(e_{0,0}; (x, y)) - 1\}| \\ &\leq |L_{n,m}(f - f(x, y)e_{0,0}; (x, y))| + |f(x, y)\{L_{n,m}(e_{0,0}; (x, y)) - 1\}| \\ &\leq L_{n,m}(|f - f(x, y)e_{0,0}|; (x, y)) + |f(x, y)| |L_{n,m}(e_{0,0}; (x, y)) - 1| \\ &\leq L_{n,m}(|f - f(x, y)e_{0,0}|; (x, y)) + \|f\|_{C([0,a] \times [0,a])} |L_{n,m}(e_{0,0}; (x, y)) - 1| \end{aligned} \quad (5.12)$$

Burada $L_{n,m}$ operatörü için (5.11) ile (5.12) kullanalım.

$$\begin{aligned} &|L_{n,m}(f; (x, y)) - f(x, y)| \\ &\leq L_{n,m}(|f - f(x, y)e_{0,0}|; (x, y)) + \|f\|_{C([0,a] \times [0,a])} |L_{n,m}(e_{0,0}; (x, y)) - 1| \\ &\leq L_{n,m}\left(\varepsilon + 2K_f \frac{(s-x)^2 + (t-y)^2}{\delta^2}; (x, y)\right) + \|f\| |L_{n,m}(e_{0,0}; (x, y)) - 1| \\ &= \varepsilon L_{n,m}(1; (x, y)) + \frac{2K_f}{\delta^2} L_{n,m}((s-x)^2 + (t-y)^2; (x, y)) + \\ &\quad \|f\|_{C([a,b] \times [c,d])} |L_{n,m}(e_{0,0}; (x, y)) - 1| \end{aligned}$$

$$= \varepsilon L_{n,m}(1; (x, y)) + \frac{2K_f}{\delta^2} \{ L_{n,m}((s-x)^2; (x, y)) + L_{n,m}((t-y)^2; (x, y)) \}$$

$$+ \|f\|_{C([0,a] \times [0,a])} |L_{n,m}(e_{0,0}; (x, y) - 1)|$$

$$(s-x)^2 = s^2 - 2sx + x^2 \text{ ile } (t-y)^2 = t^2 - 2ty + y^2$$

ve $e_{0,0} = 1$ olup (5.1) dan da gerekli ifadeyi yazalım. O halde;

$$|L_{n,m}(f; (x, y)) - f(x, y)|$$

$$\leq \varepsilon + \frac{2K_f}{\delta^2} \{ L_{n,m}(s^2 - 2sx + x^2; (x, y)) + L_{n,m}(t^2 - 2ty + y^2; (x, y)) \}$$

$$+ \|f\|_{C([0,a] \times [0,a])} |1 - 1|$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapıldıktan sonra

$$|L_{n,m}(f; (x, y)) - f(x, y)|$$

$$\leq \varepsilon + \frac{2K_f}{\delta^2} (L_{n,m}(s^2; (x, y)) - 2x L_{n,m}(s; (x, y)) + x^2 L_{n,m}(1; (x, y))$$

$$+ L_{n,m}(t^2; (x, y)) - 2y L_{n,m}(t; (x, y)) + y^2 L_{n,m}(1; (x, y)))$$

olur.

Hipotezin (i),(ii),(iii),(iv) den

$$|L_{n,m}(f; (x, y)) - f(x, y)| < \varepsilon \text{ elde ederiz. Buradan da;}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_{n,m}(f) - f\|_{C([0,a] \times [0,a])} = 0 \quad \text{olup ispat biter.}$$

5.1.3. Teorem

Her $f \in C_\rho^*(D)$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_{n,p}^*(f) - f\|_{C_\rho^*(D)} = 0$$

dır.

İspat

5.1.1 Lemma ve 5.1.2 Teorem (Volkov) kullanılırsa ispat kolaylıkla görülür.

5.2. Süreklilik Modülü

$f \in C(D_a)$ olsun.

$$\omega(f; \delta) = \max\{|f(b^1, b^2)| : b^1, b^2 \in D_a \text{ ve } \|b^1 - b^2\| \leq \delta\} \quad (5.13)$$

olarak tanımlanan $\omega(f; \delta)$ ye *süreklilik modülü* denir.

Kısmi süreklilik modülü ise;

$$\omega^1(f; \delta) := \max_{0 \leq x_2 \leq a} \max_{|x_1 - x_3| \leq \delta} |f(x_1, x_2) - f(x_3, x_2)|$$

ve

$$\omega^2(f; \delta) := \max_{0 \leq y_1 \leq a} \max_{|y_2 - y_3| \leq \delta} |f(y_1, y_2) - f(y_1, y_3)|$$

dır. Süreklilik modülü için sağlanan tüm özellikler, kısmi süreklilik modülü de sağlar.

5.2.1. Süreklilik modülünün özellikleri

i. $\omega(f; \delta) \geq 0$

ii. $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$

iii. $\mu \in \mathbb{N}$ için $\omega(f; \mu\delta) \leq \mu\omega(f; \delta)$

iv. $\xi \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(f; \xi\delta) \leq (\xi + 1)\omega(f; \delta)$

v. $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta) = 0$

vi. $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq \omega(f; \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|)$

vii. $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq \left(\frac{\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|}{\delta} + 1 \right) \omega(f; \delta)$ dir. [11,16]

İspat

i. Tanımdan aşikârdır.

ii. $\delta_1 \leq \delta_2$ olduğunda;

$$\{|f(b^1, b^2)| : b^1, b^2 \in D_a \text{ ve } \|b^1 - b^2\| \leq \delta_1\} \subseteq \{|f(b^1, b^2)| : b^1, b^2 \in D_a \text{ ve } \|b^1 - b^2\| \leq \delta_2\}$$

olup ve küme genişledikçe maksimum artacağından

$$\max\{|f(b^1, b^2)| : b^1, b^2 \in D_a \text{ ve } \|b^1 - b^2\| \leq \delta_1\}$$

$$\leq \max\{|f(b^1, b^2)| : b^1, b^2 \in D_a \text{ ve } \|b^1 - b^2\| \leq \delta_2\}$$

olup,

$$\omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$$

elde ederiz.

iii. h pozitif bir sayı olmak üzere $x_2 = x$, $x_1 = x + h$, $y_2 = y$ ve $y_1 = y + h$ alınırsa

$$M_1 = (x + h, y + h), M_2 = (x, y) \text{ ve (5.1.12) den } \|M_1 - M_2\| = \sqrt{2}h \text{ dir.}$$

(5.13) den

$$\omega(f; \delta) = \max_{h \leq \frac{\delta}{\sqrt{2}}, (x,y) \in D_a} \{|f(x+h, y+h) - f(x, y)|\} \quad (5.14)$$

olduğu açıktır ve buradan da;

$$\omega(f; \mu\delta) = \max_{h \leq \frac{\mu\delta}{\sqrt{2}}, (x,y) \in D_a} \{|f(x+h, y+h) - f(x, y)|\}$$

elde ederiz. Buradaki h 'ı μh a dönüştürürsek;

$$\omega(f; \mu\delta) = \max_{h \leq \frac{\delta}{\sqrt{2}}, (x,y) \in D_a} \{|f(x + \mu h, y + \mu h) - f(x, y)|\} \quad (5.15)$$

olur. Sağ taraftaki ifadeyi

$$\begin{aligned} & f(x + \mu h, y + \mu h) - f(x, y) \\ &= f(x + \mu h, y + \mu h) - f(x + (\mu - 1)h, y + (\mu - 1)h) + f(x + (\mu - 1)h, y + (\mu - 1)h) \\ & \quad - f(x + (\mu - 2)h, y + (\mu - 2)h) + f(x + (\mu - 2)h, y + (\mu - 2)h) \mp f(x + h, y + h) \\ & \quad - f(x, y) \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan;

$$= \sum_{k=1}^{\mu} [f(x + kh, y + kh) - f(x + (k-1)h, y + (k-1)h)]$$

O halde,

$$\begin{aligned} & |f(x + \mu h, y + \mu h) - f(x, y)| \\ & \leq \sum_{k=1}^{\mu} |f(x + kh, y + kh) - f(x + (k-1)h, y + (k-1)h)| \end{aligned}$$

Eşitsizliği elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafı için D_a kümesinde olan her (x, y) noktalarına göre ve $h \leq \frac{\delta}{\sqrt{2}}$ olan h' a göre maksimumları alınırsa (5.14) ve (5.15) den;

$$\omega(f; \mu\delta) \leq \mu\omega(f; \delta) \quad \text{elde edilir.}$$

iv. $\llbracket \xi \rrbracket$ ile ξ sayısının tam kısmını gösterirsek;

$\llbracket \xi \rrbracket \leq \xi \leq \llbracket \xi \rrbracket + 1$ eşitsizliğini yazabiliriz. Bu durumda $\omega(f; \delta)$ monoton olduğuna göre;

$$(ii) \text{ den } \omega(f; \llbracket \xi \rrbracket \delta) \leq \omega(f; \xi \delta) \leq \omega(f; (\llbracket \xi \rrbracket + 1)\delta) \text{ dır.}$$

(iii) ifadesinden $\omega(f; (\llbracket \xi \rrbracket + 1)\delta) \leq (\llbracket \xi \rrbracket + 1)\omega(f; \delta)$ çıkar. Yine (ii) den

$$(\llbracket \xi \rrbracket + 1)\omega(f; \delta) \leq (\xi + 1)\omega(f; \delta) \text{ elde ederiz. Dolayısıyla}$$

$$\omega(f; \xi \delta) \leq (\xi + 1)\omega(f; \delta) \text{ olarak bulunur.}$$

v. f , D_a' 'da sürekli ve D_a kapalı bir bölge olduğundan f , D_a' 'da düzgün süreklidir.

Yani her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$ sayısı bulunur öyle ki $\|M_1 - M_2\| < \delta_1$

$$\text{olduğunda } |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon \text{ dur.} \quad (5.16)$$

$\delta \rightarrow 0^+$ olduğu için $\delta < \delta_1$ alabiliriz ve bu durumda $\|M_1 - M_2\| < \delta$ eşitsizliği

$\|M_1 - M_2\| < \delta_1$ eşitsizliğini gerektirir ve (5.5) sağlanır. Dolayısıyla

$$\max_{\substack{\|M_1 - M_2\| < \delta \\ M_1, M_2 \in D_a}} |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$$

olur ve bu da $\omega(f; \delta) < \varepsilon$ anlamına gelir. Buradan da $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta) = 0$ olur.

vi.

$$\omega(f; \delta) = \max_{\substack{\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| \leq \delta \\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D_a}} |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)|$$

olup $\|(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)\| = \delta$ seçersek;

$$\omega(f; \|(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)\|) = \max_{\substack{\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| \leq \delta \\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D_a}} |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \text{ olur.}$$

Buradan;

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq \max_{\substack{\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| \leq \delta \\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D_a}} |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)|$$

Dolayısıyla;

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq \omega(f; \|(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)\|)$$

olup ispat biter.

vii. (iv) ve (vi) özelliklerinden

$$\begin{aligned} |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| &\leq \omega\left(f; \|(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)\| \frac{\delta}{\delta}\right) \\ &\leq \left(\frac{\|(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)\|}{\delta} + 1\right) \omega(f; \delta) \text{ olup;} \end{aligned}$$

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq \left(\frac{\|(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)\|}{\delta} + 1\right) \omega(f; \delta)$$

olur ve ispat biter.

Şimdi vereceğimiz teorem süreklilik modülü yardımıyla $S_{n,p}^*$ lineer pozitif operatörün f fonksiyonuna yaklaşım hızını verecektir.

5.2.2. Teorem

$f \in C(D_a)$ için

$$\|S_{n,p}^*(f) - f\|_{C(D_a)} \leq (\sqrt{2a} + 1) \omega(f, \delta_n), \quad \delta_n = \frac{1}{\sqrt{n+p}}$$

dır.

İspat

$(x_1, x_2) \in D_a$ olsun.

$$\begin{aligned}
 & |S_{n,p}^*(f; (x_1, x_2)) - f(x_1, x_2)| \\
 &= \left| e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n+p}, \frac{j}{n+p}\right) \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!} \right. \\
 &\quad \left. - f(x_1, x_2) e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!} \right| \\
 &= \left| e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(f\left(\frac{k}{n+p}, \frac{j}{n+p}\right) - f(x_1, x_2) \right) \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!} \right| \\
 &\text{dır.}
 \end{aligned}$$

$$\left(f\left(\frac{k}{n+p}, \frac{j}{n+p}\right) - f(x_1, x_2) \right) \leq \left| \left(f\left(\frac{k}{n+p}, \frac{j}{n+p}\right) - f(x_1, x_2) \right) \right|$$

olarak yazabiliriz. Bu ifadeyi yukarıya yazdığımızda;

$$\begin{aligned}
 & |S_{n,p}^*(f; (x_1, x_2)) - f(x_1, x_2)| \\
 &\leq \left| e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left| \left(f\left(\frac{k}{n+p}, \frac{j}{n+p}\right) - f(x_1, x_2) \right) \right| \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!} \right|
 \end{aligned}$$

elde edilir. (5.17)

Süreklilik modülünün (vii) özelliğinden;

$$\left| f\left(\frac{k}{n+p}, \frac{j}{n+p}\right) - f(x_1, x_2) \right| \leq \left(\frac{\left\| \left(\frac{k}{n+p}, \frac{j}{n+p}\right) - (x_1, x_2) \right\|}{\delta_n} + 1 \right) \omega(f; \delta_n)$$

İfadesini (5.17) ye yazıp gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra;

$$\begin{aligned} & |S_{n,p}^*(f; (x_1, x_2)) - f(x_1, x_2)| \\ & \leq \omega(f; \delta_n) \left(\frac{1}{\delta_n} K_{n,p} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left\| \left(\frac{k}{n+p}, \frac{j}{n+p}\right) - (x_1, x_2) \right\| M_{n,p} + 1 \right) \end{aligned} \quad (5.18)$$

elde edilir. İşlemlerde kolaylık sağlamak için aşağıdaki kısaltmaları kullanalım.

$$K_{n,p}(x_1, x_2) = e^{-(n+p)(x_1+x_2)}, \quad M_{n,p}(x_1, x_2) = \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!}$$

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\left\| \left(\frac{k}{n+p}, \frac{j}{n+p}\right) - (x_1, x_2) \right\|^2 K_{n,p} M_{n,p} \right)^{\frac{1}{2}} (K_{n,p} M_{n,p})^{\frac{1}{2}}$$

olsun. T ifadesi için p=2 için Hölder eşitsizliği kullanılırsa;

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left\| \left(\frac{k}{n+p}, \frac{j}{n+p}\right) - (x_1, x_2) \right\|^2 K_{n,p} M_{n,p} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} K_{n,p} M_{n,p} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.19)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} & \left\| \left(\frac{k}{n+p}, \frac{j}{n+p}\right) - (x_1, x_2) \right\|^2 \\ & = \frac{k^2}{(n+p)^2} - 2x_1 \frac{k}{n+p} + x_1^2 + \frac{j^2}{(n+p)^2} - 2x_2 \frac{j}{n+p} + x_2^2 \end{aligned}$$

ve

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} K_{n,p}(x_1, x_2) M_{n,p}(x_1, x_2) = e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!}$$

$$= 1$$

ifadelerini (5.19) de yazıldığında;

$$\begin{aligned} T &\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{k^2}{(n+p)^2} - 2x_1 \frac{k}{n+p} + x_1^2 + \frac{j^2}{(n+p)^2} - 2x_2 \frac{j}{n+p} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + x_2^2 \right) K_{n,p}(x_1, x_2) M_{n,p}(x_1, x_2) \right)^{\frac{1}{2}} (1)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k^2}{(n+p)^2} M_{n,p}(x_1, x_2) \right. \\ &\quad - 2x_1 K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k}{n+p} M_{n,p}(x_1, x_2) + x_1^2 K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} M_{n,p}(x_1, x_2) \\ &\quad + K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^2}{(n+p)^2} M_{n,p}(x_1, x_2) - 2x_2 K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j}{n+p} M_{n,p}(x_1, x_2) \\ &\quad \left. + x_2^2 K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} M_{n,p}(x_1, x_2) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

olup ayrıca (5.1) , (5.2) , (5.3) , (5.5) ile (5.6) yardımıyla

$$T \leq \left(\frac{x_1}{n+p} + \frac{x_2}{n+p} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.20)$$

elde edilir. (5.20) ifadesini (5.18) eşitsizliğinde yazıldığında;

$$|S_{n,p}^*(f; (x_1, x_2)) - f(x_1, x_2)| \leq \omega(f; \delta_n) \left(\frac{1}{\delta_n} \left(\frac{x_1}{n+p} + \frac{x_2}{n+p} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right)$$

bulunur. Ayrıca ;

$(x_1, x_2) \in D_a$ için ;

$$\max \left(\frac{x_1}{n+p} + \frac{x_2}{n+p} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2a}{n+p}} \quad \text{olduğundan ve } \delta_n = \frac{1}{\sqrt{n+p}} \quad \text{seçersek}$$

$$|S_{n,p}^*(f; (x_1, x_2)) - f(x_1, x_2)| \leq \omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{n+p}}\right)(\sqrt{2a} + 1)$$

bulunur. Şimdi her iki tarafın $(x_1, x_2) \in D_a$ üzerinde supremumu alınırsa

$$\sup_{(x_1, x_2) \in D_a} |S_{n,p}^*(f; (x_1, x_2)) - f(x_1, x_2)| \leq \omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{n+p}}\right)(\sqrt{2a} + 1)$$

bulunur. Ve buradan

$$\|S_{n,p}^*(f) - f\|_{C(D_a)} \leq (\sqrt{2a} + 1) \omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n+p}}\right)$$

elde edilir. Buda ispatı tamamlar.

5.3. Lipschitz Sınıfı Fonksiyonları

Şimdi bilinen *Lipschitz sınıfı* fonksiyonların tanımını verip bu sınıftaki fonksiyonların aşağıdaki sonucu ispatsız vereceğiz.

5.3.1. Tanım

$M > 0$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $f \in C(D_a)$ için $\omega(f, \delta) \leq M\delta^\alpha$,

her $\delta \geq 0$, olarak tanımlanan f fonksiyonlarının oluşturduğu sınıfa *Lipschitz sınıfı* denir

ve $Lip_M(\alpha)$ ile gösterilir [18].

5.3.2. Sonuç

$f \in \mathcal{C}(D_a)$ olsun. Eğer $f \in Lip_M(\alpha)$ ise $M > 0$ ve $0 < \alpha \leq 1$ için

$$\|S_{n,p}^*(f) - f\|_{\mathcal{C}(D_a)} \leq (\sqrt{2a} + 1) M \delta_n^\alpha \text{ dır.}$$

5.4. Voronovskaja-tip Teorem

Bu teoreme geçmeden $V_{i,j}$ moment fonksiyonların tanımını verip; 5.7 lemma da $S_{n,p}^*$ operatörü için değerlerini hesaplayalım.

$$V_{i,j}((s, t); (x_1, x_2)) = (s - x_1)^i (t - x_2)^j, \quad i, j \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$$

dır. [18]

5.4.1. Lemma

Her $(x_1, x_2) \in D$ ve $n \in \mathbb{N}$ için;

$$K_{n,p}(x_1, x_2) = e^{-(n+p)(x_1+x_2)}, \quad M_{n,p}(x_1, x_2) = \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!} \text{ olsun.}$$

i.

$$S_{n,p}^*(V_{0,0}(s, t); (x_1, x_2)) = e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!} = 1$$

ii.

$$\begin{aligned} & S_{n,p}^*(V_{1,0}(s, t); (x_1, x_2)) \\ &= e^{-(n+p)(x_1+x_2)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n+p} - x_1 \right) \frac{((n+p)x_1)^k}{k!} \frac{((n+p)x_2)^j}{j!} \\ &= K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n+p} \right) M_{n,p}(x_1, x_2) - x_1 K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} M_{n,p}(x_1, x_2) = 0 \end{aligned}$$

Aynı şekilde

$$S_{n,p}^* \left(V_{0,1}(s, t); (x_1, x_2) \right) = 0$$

elde edilir.

iii.

$$S_{n,p}^* \left(V_{1,1}(s, t); (x_1, x_2) \right) = K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n+p} - x_1 \right) \left(\frac{j}{n+p} - x_2 \right) M_{n,p}(x_1, x_2)$$

$$= K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{kj}{(n+p)^2} - x_2 \frac{k}{n+p} - x_1 \frac{j}{n+p} + x_1 x_2 \right) M_{n,p}(x_1, x_2)$$

$$= K_{n,p}(x_1, x_2) M_{n,p}(x_1, x_2) - x_2 K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n+p} \right) M_{n,p}(x_1, x_2)$$

$$- x_1 K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{j}{n+p} \right) M_{n,p}(x_1, x_2) + x_1 x_2 K \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} M_{n,p}(x_1, x_2) = 0$$

olup

$$S_{n,p}^* \left(V_{1,1}(s, t); (x_1, x_2) \right) = 0$$

dır.

iv.

$$S_{n,p}^* \left(V_{2,0}(s, t); (x_1, x_2) \right)$$

$$= K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} V_{2,0} \left(\frac{k}{n+p}, \frac{j}{n+p} \right) M_{n,p}(x_1, x_2)$$

$$\begin{aligned}
&= K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n+p} - x_1 \right)^2 M_{n,p}(x_1, x_2) \\
&= K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n+p} \right)^2 M_{n,p}(x_1, x_2) - 2x_1 K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k}{n+p} M_{n,p}(x_1, x_2) \\
&\quad + x_1^2 K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} M_{n,p}(x_1, x_2) \\
&= \frac{x_1}{n+p}
\end{aligned}$$

olup

$$S_{n,p}^* \left(V_{2,0}(s, t); (x_1, x_2) \right) = \frac{x_1}{n+p}$$

olur. Aynı benzer işlemlerle;

$$S_{n,p}^* \left(V_{0,2}(s, t); (x_1, x_2) \right) = \frac{x_2}{n+p}$$

elde edilir.

v.

$$V_{2,2}((s, t); (x_1, x_2)) = (s - x_1)^2 (t - x_2)^2 \text{ olmak üzere;}$$

$$\begin{aligned}
&S_{n,p}^* \left(V_{2,2}(s, t); (x_1, x_2) \right) \\
&= K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} V_{2,2} \left(\frac{k}{n+p}, \frac{j}{n+p} \right) M_{n,p}(x_1, x_2) \\
&= K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n+p} - x_1 \right)^2 \left(\frac{j}{n+p} - x_2 \right)^2 M_{n,p}(x_1, x_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(K_{n,p} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n+p} - x_1 \right)^2 M_{n,p} \right) \cdot \left(K_{n,p} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{j}{n+p} - x_2 \right)^2 M_{n,p} \right) \\
&= \frac{x_1 x_2}{(n+p)^2}
\end{aligned}$$

$$S_{n,p}^* \left(V_{2,2}(s, t); (x_1, x_2) \right) = \frac{x_1 x_2}{(n+p)^2}$$

olur.

vi.

$$V_{3,0}((s, t); (x, y)) = (s - x)^3 = s^3 - 3s^2x + 3sx^2 - x^3$$

$$S_{n,p}^* \left(V_{3,0}(s, t); (x_1, x_2) \right)$$

$$= K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} V_{3,0} \left(\frac{k}{n+p}, \frac{j}{n+p} \right) M_{n,p}(x_1, x_2)$$

$$= K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n+p} - x_1 \right)^3 M_{n,p}(x_1, x_2)$$

$$\begin{aligned}
&= K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k^3}{(n+p)^3} M_{n,p}(x_1, x_2) \\
&\quad - 3x_1 K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k^2}{(n+p)^2} M_{n,p}(x_1, x_2) \\
&\quad + 3x_1^2 K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k}{n+p} M_{n,p}(x_1, x_2) \\
&\quad - x_1^3 K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} M_{n,p}(x_1, x_2)
\end{aligned}$$

$$= \frac{x_1}{(n+p)^2} - 2 \frac{x_1^2}{n+p}$$

$$S_{n,p}^* \left(V_{3,0}(s, t); (x_1, x_2) \right) = \frac{x_1}{(n+p)^2} - \frac{2x_1^2}{n+p} \text{ dir.}$$

Benzer işlemlerle;

$$S_{n,p}^* \left(V_{0,3}(s, t); (x_1, x_2) \right) = \frac{x_2}{(n+p)^2} - \frac{2x_2^2}{n+p}$$

vii.

$$V_{4,0}((s, t); (x_1, x_2)) = (s - x_1)^4 = s^4 - 4x_1^3 s + 6x_1^2 s^2 - 4x_1 s^3 + x_1^4$$

$$S_{n,p}^* \left(V_{4,0}(s, t); (x_1, x_2) \right) = K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} V_{4,0} \left(\frac{k}{n+p}, \frac{j}{n+p} \right) M_{n,p}(x_1, x_2)$$

$$= K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n+p} - x_1 \right)^4 M_{n,p}(x_1, x_2)$$

$$\begin{aligned} &= K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k^4}{(n+p)^4} M_{n,p}(x_1, x_2) \\ &\quad - 4x_1 K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k^3}{(n+p)^3} M_{n,p}(x_1, x_2) \\ &\quad + 6x_1^2 K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k^2}{(n+p)^2} M_{n,p}(x_1, x_2) \\ &\quad - 4x_1^3 K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k}{n+p} M_{n,p}(x_1, x_2) \\ &\quad + x_1^4 K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} M_{n,p}(x_1, x_2) \end{aligned}$$

$$= \frac{6x_1^3}{n+p} + \frac{3x_1^2}{(n+p)^2} + \frac{x_1}{(n+p)^3}$$

$$S_{n,p}^* \left(V_{4,0}(s, t); (x_1, x_2) \right) = \frac{6x_1^3}{n+p} + \frac{3x_1^2}{(n+p)^2} + \frac{x_1}{(n+p)^3} \quad (5.21)$$

Benzer işlemlerle;

$$S_{n,p}^* \left(V_{0,4}(s, t); (x_1, x_2) \right) = \frac{6x_2^3}{n+p} + \frac{3x_2^2}{(n+p)^2} + \frac{x_2}{(n+p)^3} \quad (5.22)$$

elde edilir.

5.4.2. Sonuç

Eğer $(x_1, x_2) \in D$ ise;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n S_{n,p}^* \left(V_{4,0} + V_{0,4}; (x_1, x_2) \right) = 6(x_1^3 + x_2^3)$$

dır.

İspat

$V_{4,0} + V_{0,4} = (s - x_1)^4 + (t - x_2)^4$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} & S_{n,p}^* \left((V_{4,0} + V_{0,4})(s, t); (x_1, x_2) \right) \\ &= K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (V_{4,0} + V_{0,4}) \left(\frac{k}{n+p}, \frac{j}{n+p} \right) M_{n,p}(x_1, x_2) \\ &= K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{k}{n+p} - x_1 \right)^4 + \left(\frac{j}{n+p} - x_2 \right)^4 \right\} M_{n,p}(x_1, x_2) \\ &= K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n+p} - x_1 \right)^4 M + K_{n,p}(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{j}{n+p} - x_2 \right)^4 M_{n,p}(x_1, x_2) \end{aligned}$$

(5.21) ve (5.22) den

$$\begin{aligned}
& S_{n,p}^* \left((V_{4,0} + V_{0,4})(s, t); (x_1, x_2) \right) \\
&= \frac{6x_1^3}{n+p} + \frac{3x_1^2}{(n+p)^2} + \frac{x_1}{(n+p)^3} + \frac{6x_2^3}{n+p} + \frac{3x_2^2}{(n+p)^2} + \frac{x_2}{(n+p)^3}
\end{aligned}$$

olup her iki tarafı n ile çarpalım

$$\begin{aligned}
& nS_{n,p}^* \left((V_{4,0} + V_{0,4})(s, t); (x_1, x_2) \right) \\
&= n \left(\frac{6x_1^3}{n+p} + \frac{3x_1^2}{(n+p)^2} + \frac{x_1}{(n+p)^3} + \frac{6x_2^3}{n+p} + \frac{3x_2^2}{(n+p)^2} + \frac{x_2}{(n+p)^3} \right)
\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nS_{n,p}^* \left((V_{4,0} + V_{0,4})(s, t); (x_1, x_2) \right) = 6(x_1^3 + x_2^3)$$

olup ispat biter.

5.4.3. Teorem

$f \in C^2(D)$ ve $(x, y) \in D$ olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nS_{n,p}^*((f; (x, y)) - f(x, y)) = \frac{x}{2}f''_{xx}(x, y) + \frac{y}{2}f''_{yy}(x, y)$$

İspat

$(x, y), (s, t) \in D$ olsun.

$f \in C^2(D)$ için Taylor açılımını yazalım.

$$\begin{aligned}
f(s, t) &= f(x, y) + f'_x(x, y)(s - x) + f'_y(x, y)(t - y) \\
&+ \frac{1}{2}f''_{xx}(x, y)(s - x)^2 + f''_{xy}(x, y)(s - x)(t - y) \\
&+ \frac{1}{2}f''_{yy}(x, y)(t - y)^2 + \varphi((s, t); (x, y))\sqrt{(s - x)^4 + (t - y)^4} \, dir.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Buradaki φ fonksiyonu $(s, t) \in D$ için

$$\varphi((\cdot, \cdot); (x, y)) = \varphi \in C(D) \text{ ve } \lim_{(s,t) \rightarrow (x,y)} \varphi((s, t); (x, y)) = 0 \text{ dir.}$$

Şimdi (5.23) ifadesine $S_{n,p}^*$ operatörünü uygulayalım.

$$\begin{aligned} S_{n,p}^*(f(s, t) - f(x, y)) &= S_{n,p}^*(f; (s, t) - f(x, y)) = f'_x(x, y) S_{n,p}^*((s - x); (x, y)) \\ &+ f'_y(x, y) S_{n,p}^*((t - y); (x, y)) + \frac{1}{2} f''_{xx} S_{n,p}^*((s - x)^2; (x, y)) \\ &+ \frac{1}{2} f''_{yy} S_{n,p}^*((t - y)^2; (x, y)) + f''_{xy}(x, y) S_{n,p}^*((s - x)(t - y); (x, y)) \\ &+ S_{n,p}^*(\varphi((s, t); (x, y)) \sqrt{(s - x)^4 + (t - y)^4}) \text{ elde edilir.} \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$S_{n,p}^*(\varphi((s, t); (x, y)) \sqrt{(s - x)^4 + (t - y)^4}) = S_{n,p}^*(\varphi \cdot \sqrt{V_{4,0} + V_{0,4}}; (x, y)) \text{ yazılır.}$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden;

$$|S_{n,p}^*(\varphi \cdot \sqrt{V_{4,0} + V_{0,4}}; (x, y))| \leq \left(S_{n,p}^*(\varphi^2; (x, y)) \right)^{\frac{1}{2}} \left(S_{n,p}^*(V_{4,0} + V_{0,4}; (x, y)) \right)^{\frac{1}{2}}$$

dır.

Buradan Teorem(5.1.2) den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n,p}^*(\varphi^2; (x, y)) = 0 \quad (5.25)$$

olur.

Sonuç (5.4.2) ve (5.25) ifadelerinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n S_{n,p}^*(\varphi \cdot \sqrt{V_{4,0} + V_{0,4}}; (x, y)) = 0 \quad (5.26)$$

Lemma 5.4.1 deki (ii),(iii) ve (iv) ile (5.26) den;

$$S_{n,p}^*(f(s, t) - f(x, y)) = S_{n,p}^*(f; (s, t) - f(x, y))$$

$$\begin{aligned}
&= f'_x(x, y) \cdot 0 + f'_y(x, y) \cdot 0 + \frac{1}{2} f''_{xx}(x, y) \cdot \frac{x}{n+p} \\
&+ \frac{1}{2} f''_{yy}(x, y) \cdot \frac{y}{n+p} + f''_{xy}(x, y) \cdot 0 + S_{n,p}^* \left(\varphi \cdot \sqrt{V_{4,0} + V_{0,4}}; (x, y) \right) \\
&= \frac{1}{2(n+p)} \left(f''_{xx}(x, y) \cdot x + f''_{yy}(x, y) \cdot y \right) + S_{n,p}^* \left(\varphi \cdot \sqrt{V_{4,0} + V_{0,4}}; (x, y) \right)
\end{aligned}$$

Her iki tarafı n ile çarpıp limitlerini aldığımızda;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n S_{n,p}^*(f; (x, y) - f(x, y)) = \frac{x}{2} f''_{xx}(x, y) + \frac{y}{2} f''_{yy}(x, y)$$

elde edilir ve ispat biter.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

İki değişkenli Szasz operatörlerinin Schurer tipi genelleştirmesi yapılmıştır. Başka farklı parametrik tipteki genelleştirmeleri çalışılabilir.

KAYNAKÇA

1. Altomare, F. and Campiti, M. (1993). Korovkin-type approximation theory and its applications. New York: *Walter de Gruyter*, 627.
2. Balcı, M. (2012). *Matematik analizi I* (3). İstanbul: Sürat Yayınları, 113-126.
3. Bernstein, S., (1912-1913). Démonstration du théorème de Weierstrass, fondée sur le calcul des probabilités. *Communications of the Kharkov Mathematical Society*, 13(2), 1-2.
4. Butzer, P. L. and Berens, H. (1967). Semi-groups of operators and approximation. New York: *Springer*, 67-89.
5. Bleimann, G., Butzer, P.L., Hahn, L. (1980). A Bernstein-type operator approximating continuous functions on the semi axis. *Indagationes Mathematicae*, 42(1980), 255-262
6. Doğru, O. (2002). Weighted approximation properties of szasz-type operators. *International Journal of Mathematics*, 2(9), 889-895.
7. De Vore, R. A. and Lorentz, G. G. (1993). Constructive approximation. Berlin: *Springer*, 303.
8. F.Taşdelen, A. Olgun and Başcanbaz-Tunca, G. (2007) Approximation of functions of two variables by certain linear positive operators. *Proceedings Mathematical Sciences*, 117(3), 387-399.
9. Hacısalıhoğlu, H. ve Hacıyev, A. (1995). *Lineer pozitif operatör dizilerinin yakınsaklığı*. Ankara: Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 1-100.
10. Halilov, H., Hasanoğlu, A. ve Can, M. (1999). *Yüksek matematik (1.Cilt)*. İstanbul: Literatür Yayınları, 64-82.
11. Korovkin, P.P. (1960). *Linear operators and approximation theory*. Hindustan, Publishing Corporation (India), 229.
12. Lorentz, G.G. (1953). *Bernstein polynomials*. Toronto: University of Toronto Press, 1953.
13. Musayev, B, Alp, M. ve Mustafayev, N. (2003). *Teori ve çözümlü problemlerle analiz II* (3). Kütahya: Tektaş Eylül Yayıncılık, 1-320.
14. Popoviciu, T. (1935). Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre superieur. *Mathematica (Cluj)*, 10, 49-54.
15. Szasz, O. (1950). Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 45, 239-245.
16. Tunç, T. (2013). On convergence properties of szasz-mirakyan-bernstein operators of two variables. *Mathematics and Statistics*, 1(3), 167-171.

17. Volkov, V. I. (1957). On the convergence of sequences of linear positive operators in the space of two variables, *Doklady Akademii Nauk Russian Academy of Sciences*, 115(1), 7-19.
18. Yüksel, İ., Dınlemez, Ü. and Altın, B. (2016). On approximation of Baskakov-Durrmeyer type operators of two variables. *University Politehnica Of Bucharest Scientific Bulletin-Series A-Applied Mathematics and Physics*, 78(1), 123-134.
19. Walczak, Z. (2002). Approximation properties of certain linear positive operators of functions of two variables, *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica*, 6, 17-27.



GAZİ GELECEKTİR..