



LİFT EĞRİLERİ VE REGLE YÜZEYLER

Şeyma AFŞAR

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

TEMMUZ 2021

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu
- bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Şeyma AFŞAR

05/07/2021

LİFT EĞRİLERİ VE REGLE YÜZEYLER
(Yüksek Lisans Tezi)

Şeyma AFŞAR

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2021

ÖZET

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde lift eğrileri ve regle yüzeyler ile ilgili literatür anlamında bilgiler sunulmuştur. İkinci bölümde 3-Boyutlu Minkowski uzayı, lift eğrileri ve regle yüzeyler ile ilgili temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde 3- boyutlu Minkowski uzayında bir eğrinin ve onun lift eğrisinin timelike ve spacelike olması durumuna göre Darboux vektörleri hesaplanmış ve elde edilen bu vektörler tarafından $\chi(s, v)$ regle yüzeyi tanımlanmıştır. Bu regle yüzeyin striksiyon eğrisi, dağılma parametresi ($dral$), Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği hesaplanmıştır. Ayrıca elde edilen sonuçlarla ilgili örnek verilmiştir. Dördüncü bölümde tezde elde edilen bulgularla ilgili sonuçlara yer verilmiştir.

Bilim Kodu : 20402
Anahtar Kelimeler : Lift Eğrisi, Regle Yüzey, Darboux Vektör
Sayfa Adedi : 49
Danışman : Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN

LIFT CURVES AND RULED SURFACES

(M. Sc. Thesis)

Şeyma AFŞAR

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2021

ABSTRACT

This study is consists of four chapters submitted as a master's thesis. The first chapter is prepared as an introduction and literature rewiev about lift curves and ruled surfaces are given. In the second chapter, some basic concepts about lift curves and ruled surfaces in 3-dimensional Minkowski space are given. In the third chapter, Darboux vectors are calculated according to whether the curve and its lift curve are timelike and spacelike and the ruled surface $\chi(s,v)$ is defined by these obtained vectors in 3-dimensional Minkowski space. The sitriction curve, distribution parameter (dral), Gaussian curvature and mean curvature of the ruled surface are calculated. In addition, an example of the results obtained is given. In the fourth chapter, the results related to the findings obtained in the thesis are given.

ScienceCode : 20402

KeyWords : Lift Curves, Ruled Surfaces, Darboux Vector

PageNumber : 49

Supervisor : Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN

TEŞEKKÜR

Tezimde danışmanlığımı yapan çalışmalarım boyunca değerli yardımlarıyla beni yönlendiren ilgisini ve tecrübesini esirgemeyen hocam, Sayın Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN'a maddi manevi her zaman yanımda olan babam Abdurrahman AFŞAR'a ve bana her zaman destek olan annem Reyhan AFŞAR'a ve kardeşim Hafsa AFŞAR'a tezimin hazırlık aşamasında yardımları ve ilgisi için Dr. Öğr. Üyesi Emel KARACA'ya ve Araş. Gör. Anıl ALTINKAYA' ya en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	viii
1. GİRİŞ.....	3
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Lorentz Uzayı	3
2.2. Yarı- Riemann Manifoldu.....	7
2.3. $\mathbb{R}_1^3$ Uzayında Lift Eğrileri	12
2.4. $\mathbb{R}_1^3$ Uzayında Regle Yüzeyler	17
3. $\mathbb{R}_1^3$ MINKOWSKI UZAYINDA BİR EĞRİ VE ONUN LİFT EĞRİSİNİN DARBOUX VEKTÖRLERİ TARAFINDAN OLUŞTURULAN REGLE YÜZEYLER VE BAZI KARAKTERİZASYONLAR	23
3.1. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında $\chi(s, v)$ Yüzeyinin Striksiyon Eğrileri, Dağılma Parametresi, Gauss Eğriliği ve Ortalama Eğriliği	23
3.2. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında $\tilde{\chi}(s, v)$ Yüzeyinin Striksiyon Eğrileri, Dağılma Parametresi, Gauss Eğriliği ve Ortalama Eğriliği	28
3.3. Örnek.....	40
4.SONUÇ VE ÖNERİLER	45
KAYNAKLAR.....	47
ÖZGEÇMİŞ	49

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Silindir	17
Şekil 2.2. Koni	18
Şekil 3.1. $\chi(s, v)$ Yüzeyi	41
Şekil 3.2. $\bar{\chi}(s, v)$ Yüzeyi	43

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$\times$	Vektörel Çarpım
$\langle, \rangle$	İç Çarpım
$\ \cdot \ $	Norm
L^n	n- Boyutlu Lorentz Uzay
$\mathbb{R}_V^n$	Yarı-Öklidyen Uzay
$\mathbb{R}_1^3$	3- Boyutlu Minkowski Uzayı
D	Levi-Civita Konneksiyonu
χ	3-Boyutlu Minkowski Uzayında Regle Yüzey
β	Striksiyon Eğrisi
P_W	Dağılma Parametresi (Dral)
K	Gauss Eğriliği
H	Ortalama Eğrilik
κ	Eğrilik
τ	Torsiyon
W	Darboux Vektörü

1. GİRİŞ

Matematikte ve fizikte Hermann Minkowski anısına adlandırılan Minkowski Uzayı, Einstein'ın özel görelilik kuramının en uygun biçimde açıklandığı matematiksel yapıdır. Bu yapıda, bilinen üç uzay boyutu tek bir zaman boyutu ile birleştirilmiştir. Diferansiyel Geometri de eğri ve yüzey kavramı önemli bir yere sahiptir. Literatür de lift eğrisi ve regle yüzeylerle ilgili birçok çalışma yapılmıştır.

Lift eğrisi tanımı ilk olarak J.A Thorpe'nin kitabında verilmiştir. Tanıma göre lift eğrisi bir eğrinin her noktasındaki teğetlerinin uç noktalarının birleştirilmesiyle elde edilen bir eğri olarak tanımlanmıştır. Regle yüzey tanımı ilk olarak G. Monge tarafından incelenmiştir. Genel haliyle regle yüzeyler bir doğrunun bir eğri boyunca hareket etmesiyle elde edilen yüzey olarak tanımlanmıştır. Burada verilen doğru regle yüzeyin ana doğrusu verilen eğri ise dayanak eğrisi olarak verilmiştir.

Aysel Turgut (1995) doktora tezinde 3- boyutlu Öklid uzayında regle yüzeylerle ilgili kavramların ve bu kavramlara ait temel teoremlerin 3- Boyutlu Minkowski uzayındaki regle yüzeyler için karşılıklarını vermiştir.

Seher Tunçer (2008) yüksek lisans tezinde 3- boyutlu Minkowski uzayında timelike ve spacelike regle yüzeyler için striksiyon eğrisi, dağılma parametresi ve Gauss eğrisi kavramlarını incelemiştir.

Evren Ergün ve Mustafa Çalışkan (2012) 3-boyutlu Minkowski uzayında bir eğri ve onun lift eğrisi tarafından üretilen regle yüzeylerin striksiyon eğrisi ve dağılma parametresini hesaplamışlardır.

Evren Ergün (2013) doktora tezinde 3-boyutlu Minkowski uzayında lift eğrisi ve geodezik spray kavramlarından bahsetmiş bir eğrinin timelike, spacelike ve null eğri olma durumuna göre lift eğrisini tanımlamıştır.

Nagehan Demirhan İşat (2019) yüksek lisans tezinde Lorentz uzayında tanımlanan kavramlar yardımıyla bir α eğrinin timelike ve spacelike eğri olması durumunda oluşan regle yüzeylerin karakterizasyonları verilmiştir. Regle yüzeyin şekil operatörü hesaplanmıştır.

Bu tez çalışmasında 3-boyutlu Minkowski uzayında α ve lift eğrisi $\bar{\alpha}$ eğrilerinin timelike, spacelike binormali spacelike ve timelike binormali spacelike eğri olması durumlarına göre Darboux vektörleri hesaplanmıştır. Elde edilen Darboux vektörleri tarafından oluşturulan regle yüzeylerin striksiyon eğrisi, dağılma parametresi (dral), Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği incelenip örnek yardımıyla açıklanmıştır. α ve lift eğrisi $\bar{\alpha}$ için elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

2.TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez boyunca kullanılacak temel kavramlardan bahsedilmiştir.

2.1. Lorentz Uzayı

Tanım

V bir reel vektör uzayı olmak üzere

$\forall c, d \in \mathbb{R}$ ve $\forall x, y, z \in V$ için

$$b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü

$$i) b(x, y) = b(y, x)$$

$$ii) b(cx + dy, z) = cb(x, z) + db(y, z)$$

$$b(x, cy + dz) = cb(x, y) + db(x, z)$$

özelliklerine sahip ise bu dönüşüme V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form denir [1].

Tanım

V reel vektör uzayı üzerinde b bir simetrik bilinear form olsun. b simetrik bilinear formu,

$$i) \forall v \in V \text{ ve } v \neq 0 \text{ için } b(v, v) > 0 \text{ ise pozitif tanımlı,}$$

$$ii) \forall v \in V \text{ ve } v \neq 0 \text{ için } b(v, v) < 0 \text{ ise negatif tanımlı,}$$

$$iii) \forall v \in V \text{ ve } v \neq 0 \text{ için } b(v, v) \geq 0 \text{ ise yarı- pozitif tanımlı,}$$

$$iv) \forall v \in V \text{ ve } v \neq 0 \text{ için } b(v, v) \leq 0 \text{ ise yarı-negatif tanımlı,}$$

$$v) \forall v \in V \text{ için } b(v, w) = 0 \implies w = 0 \text{ ise nondejenere}$$

denir [1].

Tanım

V bir reel vektör uzayı olsun.

$$b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü bilinear, non-dejenere ve simetrik ise b ye V de bir skaler çarpım, V vektör uzayına ise skaler çarpım uzayı denir [1].

Tanım

V bir reel vektör uzayı ve $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, V üzerinde bir simetrik bilinear form olsun.

$$b_W: W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

en büyük boyutlu W alt uzayı negatif tanımlı olmak üzere W alt uzayının boyutu b simetrik bilinear formunun indeksi olarak ifade edilir ve v şeklinde gösterilir [1].

b skaler çarpımının indeksi v olarak kabul edilirse $0 \leq v \leq \text{boy}V$ dir. V skaler çarpım uzayının indeksi, üzerinde tanımlı olacak şekilde b skaler çarpımının indeksi olarak ifade edilir.

Tanım

V bir skaler çarpım uzayı olsun. V uzayının indeksi v kabul edilirse $v = 1$ ve $\text{boy}V \geq 2$ şartını şartını sağlayan V skaler çarpım uzayına Lorentz uzayı adı verilir [1].

Tanım

$\mathbb{R}^n$ n - boyutlu standart reel vektör uzayı olsun.

$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ ve $X = (x_1, x_2, \dots, x_n), Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ olmak üzere,

$$b: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(X, Y) \rightarrow b(X, Y) = -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^n x_i y_i$$

şeklinde tanımlı skaler çarpım fonksiyonuna $\mathbb{R}^n$ de Lorentz metriği denir [1].

Tanım

$\mathbb{R}^n$ de Lorentziyen metrik ile tanımlanan $\{\mathbb{R}^n, b\}$ ikilisine n-boyutlu Lorentziyen uzay veya kısaca Lorentz uzay denir ve $\mathbb{R}^n$ ile gösterilir [1].

Tanım

$\mathbb{R}^n$, n-boyutlu bir Lorentziyen uzay olmak üzere, $X \in \mathbb{R}^n$ vektörü için,

- i) $b(X, X) > 0$ veya $X = 0$ ise X e spacelike (uzaysı) vektör,
- ii) $b(X, X) < 0$ ise X e timelike (zamansı) vektör,
- iii) $b(X, X) = 0$ ise X e null veya lightlike (ışıksı) vektör denir [1].

Tanım

$\mathbb{R}^n$ n-boyutlu Lorentz uzayı, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ bir eğri olsun. M eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere,

- i) $b(T, T) > 0$ ise X e spacelike (uzaysı) eğri,
- ii) $b(T, T) < 0$ ise X e timelike (zamansı) eğri,
- iii) $b(T, T) = 0$ ise X e null veya lightlike (ışıksı) eğri denir [1].

Tanım

Bir $X \in \mathbb{R}^n$ vektörünün normu,

$$\|X\|_{\mathbb{R}} = \sqrt{|b(X, X)|}$$

şeklinde tanımlanır [1].

Teorem

i) $V, W \in IL^n$ pozitif (negatif) iki timelike vektör olmak üzere,

$$b(V, W) \leq \|V\| \|W\|$$

şeklindedir. Eşitliğin olması için V ve W nin lineer bağımlı olması gerekir. V ve W pozitif(negatif) vektörler ise,

$$b(V, W) = \|V\| \|W\| \cosh \theta, \theta = \eta(V, W) \quad (2.1)$$

olacak şekilde bir tek $\theta > 0$ reel sayısı vardır. θ açısı V ve W iki vektör arasındaki açı olmak üzere Lorentziyen timelike açı şeklinde ifade edilir.

ii) $V, W \in \mathbb{R}^n$ iki spacelike vektör olmak üzere,

$$|b(V, W)| \leq \|V\| \|W\|$$

şeklindedir. V ve W nin gerdiği düzlem spacelike ise

$$b(V, W) = \|V\| \|W\| \cos \theta, \theta = \eta(V, W) \quad (2.2)$$

olacak şekilde bir tek $0 \leq \theta \leq \pi$ sayısı vardır. V ve W vektörleri arasındaki θ açısı V ve W iki vektör arasındaki Lorentziyen spacelike açı şeklinde ifade edilir.

iii) $V, W \in \mathbb{R}^n$ iki spacelike vektör olmak üzere,

Eğer V ve W nin gerdiği düzlem timelike ise

$$|b(V, W)| \leq \|V\| \|W\|$$

şeklindedir. Buradan,

$$|b(V, W)| = \|V\| \|W\| \cosh \theta, \theta = \eta(V, W) \quad (2.3)$$

olacak şekilde bir tek $\theta > 0$ reel sayısı vardır. V ve W vektörleri arasındaki θ açısı V ve W iki vektör arasındaki Lorentziyen timelike açı şeklinde ifade edilir.

iv) $V \in IL^n$ spacelike ve $W \in \mathbb{R}^n$ pozitif timelike vektör olmak üzere,

$$|b(V, W)| = \|V\| \|W\| \sinh \theta, \theta = \eta(V, W) \quad (2.4)$$

olacak şekilde bir tek $\theta > 0$ reel sayısı vardır. θ açısı V ve W iki vektör arasındaki Lorentziyen timelike açı şeklinde ifade edilir [2].

2.2. Yarı-Riemann Monifoldları

Tanım

M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerinde b tensör alanı sabit indeksli $(0,2)$ tipinden, nondejenere ve simetrik ise b tensör alanına bir metrik tensör denir [1].

Tanım

$\mathbb{R}^n$, n – boyutlu standart vektör uzayı olsun. $\forall p \in \mathbb{R}^n$ ve $X_p = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y_p = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in T_p(\mathbb{R}^n)$ için,

$$b(X_p, Y_p) = - \sum_{i=1}^v x_i y_i + \sum_{i=v+1}^n x_i y_i$$

şeklinde verilen v -indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen uzay yarı-Öklidyen uzay olarak adlandırılır ve $\mathbb{R}_v^n$ ile gösterilir [1].

Tanım

$\mathbb{R}_v^n$ yarı- Öklidyen uzayı üzerinde $v = 1$ ve $n \geq 2$ olarak alınırsa $\mathbb{R}_1^n$ yarı- Öklidyen uzayı Minkowski n -uzay şeklinde ifade edilir [1].

Tanım

b , M de sabit indeksli bir metrik tensör olmak üzere M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. (M, b) ikilisi bir yarı-Riemann manifoldu şeklinde ifade edilir ve M ile gösterilir [1].

Tanım

M yarı-Riemann manifoldunun indeksi, M bir yarı-Riemann manifoldu olmak üzere b nin sabit indeksi şeklinde ifade edilir [1].

Tanım

M yarı- Riemann manifoldunun indeksi 1 ve $\dim M \geq 2$ şartını sağlıyor ise M yarı-Riemann manifolduna Lorentz manifoldu adı verilir [1].

Tanım

M bir Lorentz manifoldu ve M üzerindeki konneksiyon D olsun. $\bar{M}$, M nin bir Lorentz altmanifoldu olmak üzere,

$$D: \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) \rightarrow \chi(\bar{M})$$

fonksiyonuna $\bar{M}$ Lorentz alt manifolduna indirgenmiş konneksiyon adı verilir [1].

Tanım

M nin bir yarı-Riemann altmanifoldu $\bar{M}$ olsun. M de Levi-Civita konneksiyonu D olmak üzere $\forall V, W \in \chi(\bar{M})$ için,

$$\bar{D}_V W = \tan D_V W$$

şeklinde tanımlı $\bar{D}$ fonksiyonu $\bar{M}$ de bir Levi-Civita konneksiyondur [1].

Tanım

$\mathbb{R}_p^n$, n-boyutlu, v-indeksli yarı-Öklidyen uzayı olsun. Boyutu 3 ve indeksi 1 olmak üzere $\mathbb{R}^3$ üzerinde $\forall p \in \mathbb{R}^3$ ve $v_p, w_p \in T_p \mathbb{R}^3$ için,

$$\langle v_p, w_p \rangle = -v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

şeklinde ifade edilen 1 – indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen uzay 3- boyutlu Minkowski uzayı olarak ifade edilir ve $\mathbb{R}_1^3$ şeklinde gösterilir [8].

Tanım

x ve y, $\mathbb{R}_1^3$ de vektörler olsunlar. $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere

$$(x_2 y_3 - x_3 y_2, x_1 y_3 - x_3 y_1, x_2 y_1 - x_1 y_2)$$

vektörüne x ve y nin vektörel çarpımı (dış çarpım) denir ve $x \times y$ veya $x \wedge y$ şeklinde gösterilir [7].

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad i = j \\ 0 & , \quad i \neq j \end{cases} \text{ ise ve } e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$$

olmak üzere,

$$x \times y = \det \begin{bmatrix} e_1 & -e_2 & -e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanabilir.

Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olan eğrinin eğrilik ve burulması sırasıyla κ ve τ olmak üzere;

birim hızlı timelike bir eğri için

$$T \wedge N = -B, \quad B \wedge T = -N, \quad N \wedge B = T,$$

spacelike binormalli spacelike eğri için

$$T \wedge N = -B, \quad B \wedge T = N, \quad N \wedge B = -T,$$

timelike binormalı spacelike eğri için

$$T \wedge N = B, \quad B \wedge T = -N, \quad N \wedge B = -T$$

Tanım

$M \subset \mathbb{R}_1^3$, (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen diferensiyellenebilir bir eğri olmak üzere eğrinin herhangi bir noktasındaki Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olsun. Frenet vektörleri ile türev vektörleri arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde verilmiştir.

i) $\alpha, \mathbb{R}_1^3$ de bir timelike eğri olsun. α nın Frenet vektör alanları; T timelike, N ve B spacelike vektör alanlarıdır. Bu vektör alanları için Frenet denklemleri,

$$\begin{cases} T' = \kappa N \\ N' = \kappa T + \tau B \\ B' = -\tau N \end{cases}$$

şeklindedir [4].

ii) $\alpha, \mathbb{R}_1^3$ de spacelike binormalı bir spacelike eğri olsun. α nın Frenet vektör alanları; T spacelike, N timelike ve B de spacelike vektör alanlarıdır. Bu vektör alanları için Frenet denklemleri,

$$\begin{cases} T' = \kappa N \\ N' = \kappa T + \tau B \\ B' = \tau N \end{cases}$$

şeklindedir [4].

iii) $\alpha, \mathbb{R}_1^3$ de timelike binormalı bir spacelike eğri olsun. α nın Frenet vektör alanları; T ve N spacelike, B de timelike vektör alanıdır. Bu vektör alanları için Frenet denklemleri,

$$\begin{cases} T' = \kappa N \\ N' = -\kappa T + \tau B \\ B' = -\tau N \end{cases}$$

şeklindedir [4].

Tanım

$\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında $M, (I, \alpha)$ koordinat komşuluğu ile verilen diferensiyellenebilir bir eğri olmak üzere eğrinin her noktasında bir $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı vardır ve Darboux vektörleri aşağıdaki şekilde verilmiştir.

i) $\mathbb{R}_1^3$ de α bir timelike eğri olarak verilsin. Bu durumda Darboux vektörü

$$W = \tau T + \kappa B$$

şeklindedir.

a) W vektörü spacelike ise ($|\kappa| > |\tau|$) (2.1) den, θ , $-B$ ile W arasındaki Lorentzian timelike açı olmak üzere,

$$\kappa = \|W\| \cosh \theta, \quad \tau = \|W\| \sinh \theta$$

$$\|W\|^2 = b(W, W) = \kappa^2 - \tau^2 \text{ dir.}$$

b) W vektörü timelike ise ($|\kappa| < |\tau|$)

$$\kappa = \|W\| \sinh \theta, \quad \tau = \|W\| \cosh \theta$$

$$\|W\|^2 = -b(W, W) = -(\kappa^2 - \tau^2) \text{ dir.}$$

ii) $\alpha, \mathbb{R}_1^3$ de spacelike binormalli bir spacelike eğri olarak verilsin. Bu durumda Darboux vektörü

$$W = \tau T - \kappa B$$

şeklindedir.

$b(W, W) > 0$ olup W spacelike vektördür. θ , $-B$ ve W arasındaki Lorentziyen spacelike olmak üzere Bu durumda (2.2) den,

$$\kappa = \|W\|\cos\theta, \quad \tau = \|W\|\sin\theta$$

$$\|W\| = \sqrt{|\kappa^2 + \tau^2|} \text{ olup } b(W, W) = \kappa^2 + \tau^2 \text{ dir.}$$

iii) $\alpha, \mathbb{R}_1^3$ de timelike binormalı bir spacelike eğri olarak verilsin. Bu durumda Darboux vektörü

$$W = -\tau T + \kappa B$$

şeklindedir.

a) W vektörü spacelike ise ($|\kappa| < |\tau|$) (2.3) den, θ - B ile W arasındaki Lorentziyen timelike olmak üzere,

$$\kappa = \|W\|\sinh\theta, \quad \tau = \|W\|\cosh\theta$$

$$\|W\|^2 = b(W, W) = \tau^2 - \kappa^2 \text{ dir.}$$

b) W vektörü timelike ise ($|\kappa| > |\tau|$)

$$\kappa = \|W\|\cosh\theta, \quad \tau = \|W\|\sinh\theta$$

$$\|W\|^2 = -b(W, W) = -(\tau^2 - \kappa^2) \text{ dir [9].}$$

2.3. $\mathbb{R}_1^3$ Uzayında Lift Eğrileri

Tanım

$M, \mathbb{R}_1^3$ de bir hiperyüzey ve $\alpha: I \rightarrow M$ parametrelendirilmiş bir eğri olsun. M üzerindeki düzgün bir teğet vektör alanı X olmak üzere Buradan α, X in integral eğrisi olarak ifade edilirse $\forall s \in I$ için

$$\frac{d}{ds}(\alpha(s)) = X(\alpha(s))$$

dir.

M nin p deki teğet uzayı $T_p M$ dir ve M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ dir. O halde

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

dir.

Herhangi bir parametre eğrisi için $\alpha : I \rightarrow M$ ve $\bar{\alpha} : I \rightarrow TM$ olsun.

$$\bar{\alpha}(s) = (\alpha(s), \alpha'(s)) = \alpha'(s)_{/\alpha(s)}$$

α nın TM üzerinde tabii lifti $\bar{\alpha}$ olarak adlandırılır. Buradan $\mathbb{R}_1^3$ de Levi-Civita konneksiyonu,

$$\frac{d\bar{\alpha}}{ds} = \frac{d}{ds}(\alpha'(s)_{/\alpha(s)}) = D_{\alpha'(s)}\alpha'(s)$$

şeklinde ifade edilir [6].

Tanım

Herhangi bir parametre eğrisi için $\alpha : I \rightarrow M$ ve $\bar{\alpha} : I \rightarrow TM$ olsun.

$$\bar{\alpha}(s) = (\alpha(s), \alpha'(s)) = \alpha'(s)_{/\alpha(s)}$$

α nın TM üzerinde tabii lifti $\bar{\alpha}$ olarak adlandırılır. $\bar{\alpha}$ eğrisinin herhangi bir noktasındaki Frenet vektörleri $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}\}$ olmak üzere, sırasıyla, tanjant vektörü, asli normal vektörü ve binormal vektörüdür. Buradan;

i) $\mathbb{R}^3$ üzerinde $\bar{\alpha}$, α nın tabii lift eğrisi olsun. Buradan

$$\bar{T}(s) = N(s),$$

$$\bar{N}(s) = -\frac{\kappa(s)}{\|W\|} T(s) + \frac{\tau(s)}{\|W\|} B(s),$$

$$\bar{B}(s) = \frac{\tau(s)}{\|W\|} T(s) + \frac{\kappa(s)}{\|W\|} B(s),$$

$$\bar{\kappa}(s) = \frac{\kappa^2(s) + \tau^2(s)}{\|W\|},$$

$$\bar{\tau}(s) = \frac{-\kappa'(s)\tau(s) + \kappa(s)\tau'(s)}{\|W\|^2}.$$

ii) α birim hızlı timelike bir eğri olmak üzere $\bar{\alpha}$, α nın tabii lift eğrisi olsun. Buradan

$$\bar{T}(s) = N(s),$$

$$\bar{N}(s) = -\frac{\kappa(s)}{\|W\|} T(s) - \frac{\tau(s)}{\|W\|} B(s),$$

$$\bar{B}(s) = -\frac{\tau(s)}{\|W\|} T(s) - \frac{\kappa(s)}{\|W\|} B(s),$$

$$\bar{\kappa}(s) = \frac{\kappa^2(s) - \tau^2(s)}{\|W\|},$$

$$\bar{\tau}(s) = \frac{-\kappa'(s)\tau(s) + \kappa(s)\tau'(s)}{\|W\|^2}.$$

iii) α birim hızlı spacelike binormali spacelike bir eğri olmak üzere $\bar{\alpha}$, α nın tabii lift eğrisi olsun. Buradan

$$\bar{T}(s) = N(s),$$

$$\bar{N}(s) = \frac{\kappa(s)}{\|W\|} T(s) + \frac{\tau(s)}{\|W\|} B(s),$$

$$\bar{B}(s) = \frac{\tau(s)}{\|W\|} T(s) - \frac{\kappa(s)}{\|W\|} B(s),$$

$$\bar{\kappa}(s) = \frac{\kappa^2(s) + \tau^2(s)}{\|W\|},$$

$$\bar{\tau}(s) = \frac{\kappa'(s)\tau(s) - \kappa(s)\tau'(s)}{\|W\|^2}.$$

iv) α birim hızlı timelike binormalı spacelike bir eğri olmak üzere $\bar{\alpha}$, α nın tabii lift eğrisi olsun. Buradan

$$\bar{T}(s) = N(s),$$

$$\bar{N}(s) = -\frac{\kappa(s)}{\|W\|}T(s) - \frac{\tau(s)}{\|W\|}B(s),$$

$$\bar{B}(s) = \frac{\tau(s)}{\|W\|}T(s) + \frac{\kappa(s)}{\|W\|}B(s),$$

$$\bar{\kappa}(s) = \frac{\kappa^2(s) + \tau^2(s)}{\|W\|},$$

$$\bar{\tau}(s) = \frac{-\kappa'(s)\tau(s) + \kappa(s)\tau'(s)}{\|W\|^2}$$

[5].

Tanım

$\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında $M(I, \bar{\alpha})$ koordinat komşuluğu ile verilen diferensiyellenebilir bir eğri olmak üzere eğrinin her noktasında bir $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}\}$ Frenet çatısı vardır ve Darboux vektörleri aşağıdaki şekilde verilmiştir.

i) $\mathbb{R}_1^3$ de $\bar{\alpha}$ bir timelike eğri olarak verilsin. Bu durumda Darboux vektörü de

$$\bar{W} = \bar{\tau}\bar{T} + \bar{\kappa}\bar{B}$$

şeklindedir.

a) W vektörü spacelike ise ($|\kappa| > |\tau|$) eş(2.1) den B ile W arasındaki Lorentzian timelike açı θ olmak üzere,

$$\kappa = \|W\| \cosh \theta, \quad \tau = \|W\| \sinh \theta$$

$$\|W\|^2 = b(W, W) = \kappa^2 - \tau^2 \text{ dir.}$$

b) W timelike vektör ise ($|\kappa| < |\tau|$)

$$\kappa = \|W\| \sinh \theta, \quad \tau = \|W\| \cosh \theta$$

$$\|W\|^2 = -b(W, W) = -(\kappa^2 - \tau^2) \text{ dir.}$$

ii) $\bar{\alpha}, \mathbb{R}_1^3$ de spacelike binormalli bir spacelike eğri olsun. Bu durumda Darboux vektörü

$$\bar{W} = \bar{\tau} \bar{T} - \bar{\kappa} \bar{B}$$

şeklindedir. $g(W, W) > 0$ olduğundan W spacelike vektör alanıdır. B ve W arasındaki Lorentzian spacelike θ olsun. Bu durumda eş(2.2) den,

$$\kappa = \|W\| \cos \theta, \quad \tau = \|W\| \sin \theta$$

$$\|W\| = \sqrt{|\kappa^2 + \tau^2|} \text{ olup } \|W\|^2 = b(W, W) = \kappa^2 + \tau^2 \text{ dir.}$$

iii) $\bar{\alpha}, \mathbb{R}_1^3$ de timelike binormalli bir spacelike eğri olarak verilsin. Bu durumda Darboux vektörü

$$\bar{W} = -\bar{\tau} \bar{T} + \bar{\kappa} \bar{B}$$

şeklindedir.

a) Eğer W spacelike vektör alanı ise ($|\kappa| < |\tau|$) eş(2.3) den, $-B$ ile W arasındaki Lorentzian timelike açı θ olmak üzere

$$\kappa = \|W\|\sinh\theta \quad , \quad \tau = \|W\|\cosh\theta$$

$$\|W\|^2 = b(W, W) = \tau^2 - \kappa^2 \text{ dir.}$$

b) W timelike vektör ise ($|\kappa| > |\tau|$)

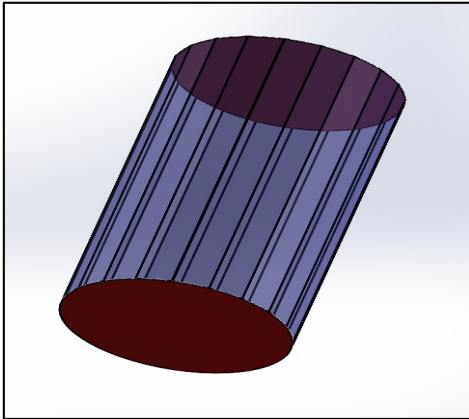
$$\kappa = \|W\|\cosh\theta \quad , \quad \tau = \|W\|\sinh\theta$$

$$\|W\|^2 = -b(W, W) = -(\tau^2 - \kappa^2) \text{ dir.}$$

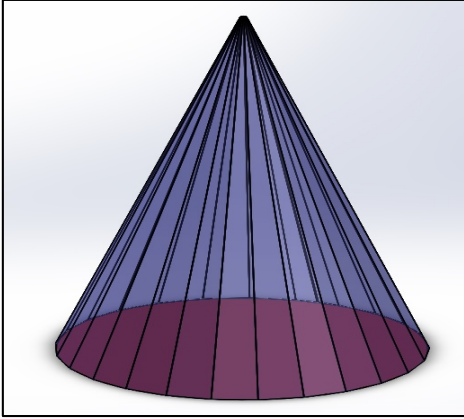
2.4. $\mathbb{R}_1^3$ Uzayında Regle Yüzeyler

Tanım

$\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir doğrunun bir eğri boyunca hareket ettirilmesiyle elde edilen yüzeye bir regle yüzey denir. Buradaki doğruya regle yüzeyin ana doğrusu ve verilen eğriye ise regle yüzeyin dayanak eğrisi denir [8].



Şekil 2.1. Silindir



Şekil 2.2. Koni

Tanım

Bir regle yüzey, tek parametrelili doğru ailesi tarafından oluşturulur ve parametrik gösterimi

$$\chi(s, v) = \alpha(s) + ve(s)$$

şeklindedir.

Burada α doğrultman vektör e ise birim vektördür [5].

Tanım

$\chi(s, v)$ bir regle yüzey olsun. $\forall u \in I$ için

$$\chi(u + 2\pi, v) = \chi(u, v)$$

olacak şekilde periyodik ise regle yüzey kapalıdır [3].

Tanım

$$\chi(s, v) = \alpha(s) + ve(s)$$

kapalı regle yüzeyinin ana doğrularının dik yörüngeleri teşkil ettirilip ve $d\chi$ tam diferansiyeli alınırsa

$$\langle e, d\chi \rangle = 0,$$

$$\langle e, d\alpha + dve + vde \rangle = 0,$$

$$\langle e, d\alpha \rangle + dv\|e\|^2 = 0, \langle e, de \rangle = 0,$$

$$-dv = \langle e, d\chi \rangle$$

elde edilir. Bu eşitliğin regle yüzeyin dayanak eğrisi boyunca eğrisel integrali alınırsa,

$$L_\chi = \int_\alpha \langle d\alpha, e \rangle = - \int_\alpha dv$$

bulunur. Buradan

$$L_\chi: I \rightarrow \mathbb{R};$$

$$v \rightarrow - \int_\alpha dv$$

şeklinde tanımlanan L_χ fonksiyonuna χ regle yüzeyinin açılım uzunluğu denir [3].

Tanım

Ana doğrusunun birim doğrultman vektörü e olan bir χ kapalı regle yüzeyinin ana doğrularına dik bir doğrultunun bir periyot sonra ilk konumu ile yaptığı açıya χ regle yüzeyinin açılım açısı adı verilir ve

$$\lambda_\chi = - \int_\alpha \det(\alpha', \alpha'', e) dv$$

olarak elde edilir [3].

Tanım

$\mathbb{R}_1^3$ de bir regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart yüzeyin ana doğrusu boyunca teğet düzlemlerinin aynı olması gerekir [8].

Tanım

$\mathbb{R}_1^3$ de bir regle yüzeyin komşu iki ana doğrusunun ortak dikmesinin esas ana doğru üzerindeki ayağına boğaz (merkez veya sitriksiyon) noktası adı verilir [8].

Tanım

$\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir regle yüzeyin ana doğrusu dayanak eğrisi boyunca regle yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin boğaz (merkez veya sitriksiyon) çizgisi (eğrisi) adı verilir [3].

$\beta(s)$ striksiyon eğrisi $\alpha(s)$ dayanak eğrisi türünden

$$\beta(s) = \alpha(s) - \frac{b(\alpha', e')}{b(e', e')} e(s)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım

$\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir regle yüzeyin ana doğrularının her birini dik olarak kesen bir eğri olsun. Bu eğriye regle yüzeyin ortogonal yörüngesi denir [8].

Tanım

Regle yüzeyin komşu iki ana doğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu ana doğru arasındaki açığa oranına, regle yüzeyin dağılma parametresi (drali) denir [3].

$$P_e = \frac{\det(\alpha', e, e')}{\|e'\|^2}$$

Teorem

$\chi(s, v)$ regle yüzeyinin açılabilir olması için $\Leftrightarrow$ dağılma parametresinin sıfır olmasıdır [3].

Tanım

$\mathbb{R}_1^3$, 3- boyutlu Minkowski Uzayında M bir yüzey olmak üzere $\forall p$ noktası için,

$$I_p: T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(V_p, W_p) \rightarrow I_p(V_p, W_p) = \langle V_p, W_p \rangle$$

fonksiyonu elde ediliyorsa I_p fonksiyonuna I. Temel Form denir.

$$II_p: T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(V_p, W_p) \rightarrow II_p(V_p, W_p) = \langle S(V_p), W_p \rangle$$

fonksiyonu elde ediliyorsa II_p fonksiyonuna II. Temel Form denir [3].

3. $\mathbb{R}_1^3$ MINKOWSKI UZAYINDA BİR EĞRİ VE ONUN LİFT EĞRİSİNİN DARBOUX VEKTÖRLERİ TARAFINDAN OLUŞTURULAN REGLE YÜZEYLER

3.1. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında $\chi(s, v)$ Yüzeyinin Striksiyon Eğrileri, Dağılma Parametresi Gauss Eğriliği ve Ortalama Eğriliği

α eğrisinin timelike ve spacelike olması durumlarına göre darboux vektörleri incelenip bu vektörlerle elde edilen $\chi(s, v)$ regle yüzeyi tanımlanmıştır. Daha sonra bu regle yüzeyin striksiyon eğrisi, dağılma parametresi (dral), Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği hesaplanmıştır.

Darboux vektörleri tarafından oluşturulan regle yüzeyin parametrik denklemi

$$\chi(s, v) = \alpha(s) + vW(s)$$

şeklinde verilir.

i) α timelike bir eğri olsun. $W = \tau T + \kappa B$ darboux vektörü oluşturulan regle yüzey χ olmak üzere

$$\chi(s, v) = \alpha(s) + vW(s)$$

şeklinde yazabiliriz.

Bu regle yüzeyin striksiyon eğrisini $\beta(s) = \alpha(s) - \lambda W(s)$ olarak verilir.

$$\beta(s) = \alpha(s) - \frac{b(\alpha', W')}{b(W', W')} W(s)$$

olmak üzere

$$\lambda = \frac{\tau'}{(\tau')^2 - (\kappa')^2}$$

elde edilir.

Bu regle yüzeyin dağılma parametresi (drali),

$$P_W = \frac{\det(\alpha', W, W')}{\|W'\|^2}$$

olmak üzere

$$P_W = 0$$

bulunur.

Bu regle yüzey açılabiliridir.

Bu regle yüzeyin Gauss eğriliği,

$$K(s, v) = -\frac{(\det(\alpha', W, W'))^2}{(EG - F^2)^2}$$

$$E = E(s, v) = \|\alpha'(s) + vW'(s)\|^2, \quad F = F(s, v) = \alpha'(s)W(s), \quad G = G(s, v) = 1$$

$P_W = 0$ olduğundan $K(s, v) = 0$ dır.

Bu regle yüzeyin ortalama eğriliği,

$$H(s, v) = \frac{-2(\alpha(s) \cdot W(s))\det(\alpha'(s), W(s), W'(s)) + \det(\alpha''(s) + vW''(s), \alpha'(s) + vW'(s), W(s))}{2(EG - F^2)^{3/2}}$$

$$\det(\alpha''(s) + vW''(s), \alpha'(s) + vW'(s), W(s)),$$

$$= \det\left((\kappa N + v(\tau''T + (\tau'\kappa - \kappa'\tau)N + \kappa''B), (T + v(\tau'T + \kappa'B)), (\tau T + \kappa B)\right),$$

$$= -(\kappa + v(\tau'\kappa - \kappa'\tau))(\kappa(1 + v\tau') - v\kappa'\tau),$$

$$E = \|\alpha' + vW'\|^2 = -(1 + v\tau')^2 + (v\kappa')^2,$$

$$F = \alpha'W = -\tau,$$

$$G = 1,$$

$$H(s, v) = \frac{-(\kappa + v(\tau'\kappa - \kappa'\tau))(\kappa(1 + v\tau') - v\kappa'\tau)}{2(-(1 + v\tau')^2 + (v\kappa')^2 - (-\tau)^2)^{3/2}}.$$

ii) α spacelike binormalı spacelike bir eğri olsun. $W = \tau T - \kappa B$ darboux vektörü oluşturulan regle yüzeye χ olmak üzere

$$\chi(s, v) = \alpha(s) + vW(s)$$

şeklinde yazılır.

Bu regle yüzeyin striksiyon eğrisini $\beta(s) = \alpha(s) - \lambda W(s)$ olarak verebiliriz.

$$\beta(s) = \alpha(s) - \frac{b(\alpha', W')}{b(W', W')} W(s)$$

olmak üzere

$$\lambda = \frac{\tau'}{(\tau')^2 + (\kappa')^2}$$

elde edilir.

Bu regle yüzeyin dağılma parametresi (drali),

$$P_W = \frac{\det(\alpha', W, W')}{\|W'\|^2}$$

olmak üzere

$$P_W = 0$$

bulunur.

Bu regle yüzey açılabiliridir.

Bu regle yüzeyin Gauss eğriliği,

$$K(s, v) = -\frac{(\det(\alpha', W, W'))^2}{(EG - F^2)^2}$$

$$E = E(s, v) = \|\alpha'(s) + vW'(s)\|^2, \quad F = F(s, v) = \alpha'(s)W(s), \quad G = G(s, v) = 1$$

$P_W = 0$ olduğundan $K(s, v) = 0$ dir.

Bu regle yüzeyin ortalama eğriliği,

$$H(s, v) = \frac{-2(\alpha(s) \cdot W(s))\det(\alpha'(s), W(s), W'(s)) + \det(\alpha''(s) + vW''(s), \alpha'(s) + vW'(s), W(s))}{2(EG - F^2)^{3/2}}$$

$$\det(\alpha''(s) + vW''(s), \alpha'(s) + vW'(s), W(s)),$$

$$= \det\left((\kappa N + v(\tau''T + (\tau'\kappa - \kappa'\tau)N - \kappa''B), (T + v(\tau'T - \kappa'B)), (\tau T - \kappa B)\right),$$

$$= (\kappa + v(\tau'\kappa - \kappa'\tau))(-\kappa(1 + v\tau') + v\kappa'\tau)$$

$$E = \|\alpha' + vW'\|^2 = (1 + v\tau')^2 + (v\kappa')^2,$$

$$F = \alpha'W = \tau,$$

$$G = 1,$$

$$H(s, v) = \frac{(\kappa + v(\tau'\kappa - \kappa'\tau))(-\kappa(1 + v\tau') + v\kappa'\tau)}{2((1 + v\tau')^2 + (v\kappa')^2 - (\tau)^2)^{3/2}}.$$

iii) α timelike binormalli spacelike bir eğri olsun. $W = -\tau T + \kappa B$ darboux vektörü oluşturulan regle yüzeye χ olmak üzere

$$\chi(s, v) = \alpha(s) + vW(s)$$

şeklinde yazılır.

Bu regle yüzeyin striksiyon eğrisini $\beta(s) = \alpha(s) - \lambda W(s)$ olarak verilir.

$$\beta(s) = \alpha(s) - \frac{b(\alpha', W')}{b(W', W')} W(s)$$

olmak üzere

$$\lambda = \frac{\tau'}{(\kappa')^2 - (\tau')^2}$$

elde edilir.

Bu regle yüzeyin dağılma parametresi (drali),

$$P_W = \frac{\det(\alpha', W, W')}{\|W'\|^2}$$

olmak üzere

$$P_W = 0$$

bulunur.

Bu regle yüzey açılabiliridir.

Bu regle yüzeyin Gauss eğriliği,

$$K(s, v) = -\frac{(\det(\alpha', W, W'))^2}{(EG - F^2)^2}$$

$$E = E(s, v) = \|\alpha'(s) + vW'(s)\|^2, \quad F = F(s, v) = \alpha'(s)W(s), \quad G = G(s, v) = 1$$

$P_W = 0$ olduğundan $K(s, v) = 0$ dır.

Bu regle yüzeyin ortalama eğriliği,

$$\begin{aligned} H(s, v) \\ = \frac{-2(\alpha(s) \cdot W(s))\det(\alpha'(s), W(s), W'(s)) + \det(\alpha''(s) + vW''(s), \alpha'(s) + vW'(s), W(s))}{2(EG - F^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\det(\alpha''(s) + vW''(s), \alpha'(s) + vW'(s), W(s)),$$

$$= \det\left((\kappa N + v(-\tau''T + (-\tau'\kappa + \kappa'\tau)N + \kappa''B), (T + v(-\tau'T + \kappa'B)), (-\tau T + \kappa B)\right),$$

$$= (\kappa + v(-\tau'\kappa + \kappa'\tau))(\kappa(1 - v\tau') + v\kappa'\tau),$$

$$E = \|\alpha' + vW'\|^2 = (1 - v\tau')^2 - (v\kappa')^2,$$

$$F = \alpha'W = -\tau,$$

$$G = 1,$$

$$H(s, v) = \frac{(\kappa + v(-\tau'\kappa + \kappa'\tau))(\kappa(1 - v\tau') + v\kappa'\tau)}{2((1 - v\tau')^2 - (v\kappa')^2 - (-\tau)^2)^{3/2}}.$$

3.2. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında $\bar{\chi}(s, v)$ yüzeyinin Striksiyon Eğrileri, Dağılma Parametresi Gauss Eğriliği ve Ortalama Eğriliği

$\bar{\alpha}$ lift eğrisinin timelike ve spacelike olması durumlarına göre darboux vektörleri hesaplanmıştır. Elde edilen darboux vektörleri tarafından $\bar{\chi}(s, v)$ regle yüzeyi tanımlanmıştır. Daha sonra bu regle yüzeyin striksiyon eğrisi, dağılma parametresi (dral),

Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği hesaplanmıştır.

i) $\bar{\alpha}$ timelike bir eğri olsun. $\bar{W} = \bar{\tau}\bar{T} + \bar{\kappa}\bar{B}$ darboux vektörü oluşturulan regle yüzey $\bar{\chi}$ olmak üzere,

$$\bar{\chi}(s, v) = \bar{\alpha}(s) + v\bar{W}(s)$$

şeklinde yazabiliriz.

$$\begin{aligned}\bar{W} &= \bar{\tau}\bar{T} + \bar{\kappa}\bar{B} = \left(\frac{-\kappa'\tau + \kappa\tau'}{\|W\|^2} \right) N + \frac{\kappa^2 - \tau^2}{\|W\|} \left(-\frac{\tau}{\|W\|} T - \frac{\kappa}{\|W\|} B \right) \\ &= \left(\frac{-\kappa'\tau + \kappa\tau'}{\|W\|^2} \right) N + \frac{\kappa^2 - \tau^2}{\|W\|^2} (-\tau T - \kappa B)\end{aligned}$$

W spacelike vektör alanı ise ($\|W\|^2 = \kappa^2 - \tau^2$)

$$\bar{W} = \left(\frac{-\kappa'\tau + \kappa\tau'}{\|W\|^2} \right) N - \tau T - \kappa B$$

bulunur. O halde

$$\bar{W}' = \left(\frac{-\kappa'\tau + \kappa\tau'}{\|W\|^2} \right)' N + \left(\frac{-\kappa'\tau + \kappa\tau'}{\|W\|^2} \right) N' - \tau'T - \tau T' - \kappa'B - \kappa B'$$

$$\bar{W}' = \left(\frac{-\kappa'\tau + \kappa\tau'}{\|W\|^2} \right)' N + \left(\kappa \left(\frac{-\kappa'\tau + \kappa\tau'}{\|W\|^2} \right) - \tau' \right) T + \left(\tau \left(\frac{-\kappa'\tau + \kappa\tau'}{\|W\|^2} \right) - \kappa' \right) B$$

$$A = \left(\frac{-\kappa'\tau + \kappa\tau'}{\|W\|^2} \right) \text{ olsun.}$$

$$A' = \frac{((- \kappa''\tau + \kappa\tau'') - 2\kappa'\tau')\|W\|^2 + 2\kappa\tau((\kappa')^2 + (\tau')^2)}{(\|W\|^2)^2},$$

$$\bar{W}' = A'N + (\kappa A - \tau')T + (\tau A - \kappa')B$$

elde edilir.

W timelike vektör alanı ise ($\|W\|^2 = \tau^2 - \kappa^2$)

$$\bar{W} = \left(\frac{-\kappa'\tau + \kappa\tau'}{\|W\|^2} \right) N + \tau T + \kappa B$$

bulunur. O halde

$$\bar{W}' = \left(\frac{-\kappa'\tau + \kappa\tau'}{\|W\|^2} \right)' N + \left(\frac{-\kappa'\tau + \kappa\tau'}{\|W\|^2} \right) N' + \tau'T + \tau T' + \kappa'B + \kappa B'$$

$$\bar{W}' = \left(\frac{-\kappa'\tau + \kappa\tau'}{\|W\|^2} \right)' N + \left(\kappa \left(\frac{-\kappa'\tau + \kappa\tau'}{\|W\|^2} \right) + \tau' \right) T + \left(\tau \left(\frac{-\kappa'\tau + \kappa\tau'}{\|W\|^2} \right) + \kappa' \right) B$$

$$A = \left(\frac{-\kappa'\tau + \kappa\tau'}{\|W\|^2} \right) \text{ olsun.}$$

$$A' = \frac{((- \kappa''\tau + \kappa\tau'') - 2\kappa'\tau')\|W\|^2 - 2\kappa\tau((\kappa')^2 + (\tau')^2)}{(\|W\|^2)^2}$$

$$\bar{W}' = A'N + (\kappa A + \tau')T + (\tau A + \kappa')B$$

elde edilir.

Bu regle yüzeyin striksiyon eğrisini $\bar{\beta}(s) = \bar{\alpha}(s) - \mu\bar{W}(s)$ olarak verebiliriz.

$$\bar{\beta}(s) = \bar{\alpha}(s) - \frac{b(\bar{\alpha}', \bar{W}')}{b(\bar{W}', \bar{W}')} W(s)$$

olmak üzere,

W spacelike vektör alanı ise ($\|W\|^2 = \kappa^2 - \tau^2$)

$$\mu = \frac{\kappa A'}{(A')^2 - A^2(\kappa^2 - \tau^2) + 2A(\kappa\tau' - \tau\kappa') + (\kappa')^2 - (\tau')^2}$$

elde edilir.

Bu regle yüzeyin dağılma parametresi (drali),

$$\bar{P}_{\bar{W}} = \frac{\det(\bar{\alpha}', \bar{W}, \bar{W}')}{\|\bar{W}'\|^2}$$

olmak üzere

$$\bar{P}_{\bar{W}} = 0$$

bulunur.

Bu regle yüzey açılabiliridir.

W timelike vektör alanı ise ($\|W\|^2 = \tau^2 - \kappa^2$)

$$\mu = \frac{\kappa A'}{(A')^2 + A^2(\kappa^2 - \tau^2) + 2A(\kappa\tau' - \tau\kappa') + (\kappa')^2 - (\tau')^2}$$

elde edilir.

Bu regle yüzeyin dağılma parametresi (drali),

$$\bar{P}_{\bar{W}} = \frac{\det(\bar{\alpha}', \bar{W}, \bar{W}')}{\|\bar{W}'\|^2}$$

olmak üzere

$$\bar{P}_{\bar{W}} = 0$$

bulunur.

Bu regle yüzeyin Gauss eğriliği (W spacelike için),

$$\bar{K}(s, v) = -\frac{(\det(\bar{\alpha}'(s), \bar{W}(s), \bar{W}'(s)))^2}{(EG - F^2)^2},$$

$$E = E(s, v) = \|\bar{\alpha}'(s) + v\bar{W}'(s)\|^2, \quad F = F(s, v) = \bar{\alpha}'(s)\bar{W}(s), \quad G = G(s, v) = 1$$

olmak üzere

$$\det(\bar{\alpha}'(s), \bar{W}(s), \bar{W}'(s)) = 0$$

olduğundan Gauss Eğriliği $\bar{K}(s, v) = 0$ dır.

Bu regle yüzeyin ortalama eğriliği,

$$\begin{aligned} \bar{H}(s, v) &= \frac{-2(\bar{\alpha}'(s)\bar{W}(s))\det(\bar{\alpha}'(s), \bar{W}(s), \bar{W}'(s)) + \det(\bar{\alpha}''(s) + v\bar{W}''(s), \bar{\alpha}'(s) + v\bar{W}'(s), \bar{W}(s))}{2(EG - F^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$E = E(s, v) = \|\bar{\alpha}'(s) + v\bar{W}'(s)\|^2, \quad F = F(s, v) = \bar{\alpha}'(s)\bar{W}(s), \quad G = G(s, v) = 1$$

$$-2(\bar{\alpha}'(s)\bar{W}(s))\det(\bar{\alpha}'(s), \bar{W}(s), \bar{W}'(s)) + \det(\bar{\alpha}''(s) + v\bar{W}''(s), \bar{\alpha}'(s) + v\bar{W}'(s), \bar{W}(s)),$$

$$= -(\kappa^2 + v(\kappa A' + (\kappa A - \tau')'))(\kappa(\kappa + vA') + v(\tau A - \kappa')A)$$

$$+ (\kappa' + v(A'' + \kappa(\kappa A - \tau') - (\tau A - \kappa')))(-\kappa v(\kappa A - \tau') + 2v(\tau A - \kappa'))$$

$$+ (\kappa\tau + v(\tau A' + (\tau A - \kappa')'))(-Av(\kappa A - \tau') - \tau(\kappa + vA')) \dots (*)$$

$$EG - F^2 = (-v^2(\kappa A - \tau')^2 + (\tau A - \kappa')^2 + 2v\kappa A' + A^2(v^2 - \kappa^2) + \tau^2),$$

$$\bar{H}(s, v) = \frac{(*)}{2(-v^2(\kappa A - \tau')^2 + (\tau A - \kappa')^2 + 2v\kappa A' + A^2(v^2 - \kappa^2) + \tau^2)^{3/2}}.$$

ii) $\bar{\alpha}$ spacelike binormalı spacelike bir eğri olsun. $\bar{W} = \bar{\tau}\bar{T} - \bar{\kappa}\bar{B}$ Darboux vektörü oluşturulan regle yüzeye $\bar{X}$ olmak üzere,

$$\bar{X}(s, v) = \bar{\alpha}(s) + v\bar{W}(s)$$

şeklinde yazabiliriz.

$$\begin{aligned}\bar{W} &= \bar{\tau}\bar{T} - \bar{\kappa}\bar{B} = \left(\frac{\kappa'\tau - \kappa\tau'}{\|W\|^2}\right) N - \frac{\kappa^2 + \tau^2}{\|W\|} \left(\frac{\tau}{\|W\|} T - \frac{\kappa}{\|W\|} B\right) \\ &= \left(\frac{\kappa'\tau - \kappa\tau'}{\|W\|^2}\right) N - \frac{\kappa^2 + \tau^2}{\|W\|^2} (\tau T - \kappa B)\end{aligned}$$

$(\|W\|^2 = \kappa^2 + \tau^2)$ olduğundan

$$\bar{W} = \left(\frac{\kappa'\tau - \kappa\tau'}{\|W\|^2}\right) N - \tau T + \kappa B$$

bulunur. O halde

$$\bar{W}' = \left(\frac{\kappa'\tau - \kappa\tau'}{\|W\|^2}\right)' N + \left(\frac{\kappa'\tau - \kappa\tau'}{\|W\|^2}\right) N' - \tau'T - \tau T' + \kappa'B + \kappa B'$$

$$\bar{W}' = \left(\frac{\kappa'\tau - \kappa\tau'}{\|W\|^2}\right)' N + \left(\kappa\left(\frac{\kappa'\tau - \kappa\tau'}{\|W\|^2}\right) - \tau'\right) T + \left(\tau\left(\frac{\kappa'\tau - \kappa\tau'}{\|W\|^2}\right) + \kappa'\right) B$$

$$A = \left(\frac{\kappa'\tau - \kappa\tau'}{\|W\|^2}\right) \text{ olsun.}$$

$$A' = \frac{(-\kappa''\tau + \kappa\tau'')\|W\|^2 - 2\kappa\tau((\kappa')^2 - (\tau')^2) - 2\kappa'\tau'(\tau^2 - \kappa^2)}{(\|W\|^2)^2},$$

$$\bar{W}' = A'N + (\kappa A - \tau')T + (\tau A + \kappa')B$$

elde edilir.

Bu regle yüzeyin striksiyon eğrisini $\bar{\beta}(s) = \bar{\alpha}(s) - \mu \bar{W}(s)$ olarak verilebilir.

$$\bar{\beta}(s) = \bar{\alpha}(s) - \frac{b(\bar{\alpha}', \bar{W}')}{b(\bar{W}', \bar{W}')} \bar{W}(s)$$

olmak üzere

$$\mu = \frac{-\kappa A'}{-(A')^2 + A^2(\kappa^2 + \tau^2) - 2A(\kappa\tau' - \tau\kappa') + (\kappa')^2 + (\tau')^2}$$

elde edilir.

Bu regle yüzeyin dağılma parametresi (drali),

$$\bar{P}_{\bar{W}} = \frac{\det(\bar{\alpha}', \bar{W}, \bar{W}')}{\|\bar{W}'\|^2}$$

olmak üzere

$$\bar{P}_{\bar{W}} = \frac{-2\kappa(-\kappa'\tau + \kappa\tau')}{-(A')^2 + A^2(\kappa^2 + \tau^2) - 2A(\kappa\tau' - \tau\kappa') + (\kappa')^2 + (\tau')^2}$$

bulunur.

Bu regle yüzeyin Gauss eğriliği,

$$\bar{K}(s, v) = -\frac{(\det(\bar{\alpha}'(s), \bar{W}(s), \bar{W}'(s)))^2}{(EG - F^2)^2}$$

$$E = E(s, v) = \|\alpha'(s) + vW'(s)\|^2, \quad F = F(s, v) = \alpha'(s)W(s), \quad G = G(s, v) = 1$$

$$(\det(\bar{\alpha}'(s), \bar{W}(s), \bar{W}'(s)))^2 = 4\kappa^2(-\kappa'\tau + \kappa\tau')^2,$$

$$E = \|\kappa N + v(A'N + (\kappa A + \tau')T + (\tau A + \kappa')B)\|^2,$$

$$E = v^2 A^2 (\kappa^2 + \tau^2) + 2Av^2 (\tau\kappa' + \kappa\tau') + v^2 ((\kappa')^2 + (\tau')^2) - \kappa^2 - 2\kappa v A' - v^2 (A')^2,$$

$$F = \kappa N (AN - \tau T + \kappa B),$$

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= v^2 A^2 (\kappa^2 + \tau^2) + 2Av^2 (\tau\kappa' + \kappa\tau') + v^2 ((\kappa')^2 + (\tau')^2) - \kappa^2 - 2\kappa v A' \\ &\quad - v^2 (A')^2 + (\kappa^2 A^2) \dots (*) \end{aligned}$$

$$\bar{K}(s, v) = \frac{-4\kappa^2 (-\kappa'\tau + \kappa\tau')^2}{(*)^2}.$$

Bu yüzeyin ortalama eğriliği,

$$\begin{aligned} \bar{H}(s, v) &= \frac{-2(\bar{\alpha}'(s)\bar{W}(s))\det(\bar{\alpha}'(s), \bar{W}(s), \bar{W}'(s)) + \det(\bar{\alpha}''(s) + v\bar{W}''(s), \bar{\alpha}'(s) + v\bar{W}'(s), \bar{W}(s))}{2(EG - F^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$E = E(s, v) = \|\bar{\alpha}'(s) + v\bar{W}'(s)\|^2, \quad F = F(s, v) = \bar{\alpha}'(s)\bar{W}(s), \quad G = G(s, v) = 1$$

$$-2(\bar{\alpha}'(s)\bar{W}(s))\det(\bar{\alpha}'(s), \bar{W}(s), \bar{W}'(s)) + \det(\bar{\alpha}''(s) + v\bar{W}''(s), \bar{\alpha}'(s) + v\bar{W}'(s), \bar{W}(s)),$$

$$= -2((\kappa A)N - \tau T + \kappa B)(-\kappa A')$$

$$- (\kappa^2 + v(\kappa A' + (\kappa A - \tau')'))(-v\kappa(\kappa + vA') + v(\tau A + \kappa')A)$$

$$+ (\kappa' + v(A'' + \kappa(\kappa A - \tau') + (\tau A + \kappa')))(\kappa v(\kappa A - \tau') + v\tau(\tau A + \kappa'))$$

$$+ (\kappa\tau + v(\tau A' + (\tau A + \kappa')'))(-vA(\kappa A - \tau') + \tau(\kappa + vA')) \dots (**)$$

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= v^2 A^2 (\kappa^2 + \tau^2) + 2Av^2 (\tau\kappa' + \kappa\tau') \\ &\quad + v^2 ((\kappa')^2 + (\tau')^2) - \kappa^2 - 2\kappa v A' - v^2 (A')^2 \dots (**) \end{aligned}$$

$$\bar{H}(s, v) = \frac{(*)}{2(**)^{3/2}}.$$

iii) $\bar{\alpha}$ timelike binormalı spacelike bir eğri olsun. $\bar{W} = -\bar{\tau}\bar{T} + \bar{\kappa}\bar{B}$ darboux vektörü oluşturulan regle yüzeye $\bar{\chi}$ olmak üzere,

$$\bar{\chi}(s, v) = \bar{\alpha}(s) + v\bar{W}(s)$$

şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned}\bar{W} &= -\bar{\tau}\bar{T} + \bar{\kappa}\bar{B} = -\left(\frac{-\kappa'\tau + \kappa\tau'}{\|W\|^2}\right)N + \frac{\kappa^2 + \tau^2}{\|W\|} \left(\frac{\tau}{\|W\|}T + \frac{\kappa}{\|W\|}B\right) \\ &= \left(\frac{\kappa'\tau - \kappa\tau'}{\|W\|^2}\right)N + \left(\tau\left(\frac{\kappa^2 + \tau^2}{\|W\|^2}\right)\right)T + \left(\kappa\left(\frac{\kappa^2 + \tau^2}{\|W\|^2}\right)\right)B\end{aligned}$$

olarak bulunur. O halde

$$\begin{aligned}\bar{W}' &= \left(\frac{\kappa'\tau - \kappa\tau'}{\|W\|^2}\right)'N + \left(\frac{\kappa'\tau - \kappa\tau'}{\|W\|^2}\right)N' + \left(\tau\left(\frac{\kappa^2 + \tau^2}{\|W\|^2}\right)\right)'T + \left(\tau\left(\frac{\kappa^2 + \tau^2}{\|W\|^2}\right)\right)T' \\ &\quad + \left(\kappa\left(\frac{\kappa^2 + \tau^2}{\|W\|^2}\right)\right)'B + \left(\kappa\left(\frac{\kappa^2 + \tau^2}{\|W\|^2}\right)\right)B' \\ \bar{W}' &= \left(\left(\frac{\kappa'\tau - \kappa\tau'}{\|W\|^2}\right)' + 2\tau\kappa\left(\frac{\kappa^2 + \tau^2}{\|W\|^2}\right)\right)N + \left(-\kappa\left(\frac{\kappa'\tau - \kappa\tau'}{\|W\|^2}\right) + \tau\left(\frac{\kappa^2 + \tau^2}{\|W\|^2}\right)'\right)T \\ &\quad + \left(\tau\left(\frac{\kappa'\tau - \kappa\tau'}{\|W\|^2}\right) + \kappa\left(\frac{\kappa^2 + \tau^2}{\|W\|^2}\right)'\right)B\end{aligned}$$

bulunur.

$$A = \left(\frac{-\kappa'\tau + \kappa\tau'}{\|W\|^2}\right) \text{ ve } C = \left(\frac{\kappa^2 + \tau^2}{\|W\|^2}\right) \text{ olsun.}$$

W spacelike vektör alanı ise ($\|W\|^2 = \tau^2 - \kappa^2$)

$$A' = \frac{(-\kappa''\tau + \kappa\tau'')\|W\|^2 - 2\kappa'\tau'(\tau^2 + \kappa^2) + 2\kappa\tau((\kappa')^2 + (\tau')^2)}{(\|W\|^2)^2}$$

$$C' = \left(\frac{\kappa^2 + \tau^2}{\|W\|^2} \right)' = \frac{4\kappa\tau(\kappa'\tau - \kappa\tau')}{(\tau^2 - \kappa^2)^2}$$

olur.

W timelike vektör alanı ise ($\|W\|^2 = \kappa^2 - \tau^2$)

$$A' = \frac{(-\kappa''\tau + \kappa\tau'')\|W\|^2 - 2\kappa\tau((\kappa')^2 + (\tau')^2) + 2\kappa'\tau'(\kappa^2 + \tau^2)}{(\|W\|^2)^2}$$

$$C' = \left(\frac{\kappa^2 + \tau^2}{\|W\|^2} \right)' = \frac{4\kappa\tau(\kappa'\tau - \kappa\tau')}{(\kappa^2 - \tau^2)^2}$$

Buradan

$$\bar{W}' = (A' + 2\tau\kappa C)N + (-\kappa A + \tau C')T + (\tau A + \kappa C')B$$

elde edilir.

Bu regle yüzeyin striksiyon eğrisini $\bar{\beta}(s) = \bar{\alpha}(s) - \mu\bar{W}(s)$ olarak verilebilir.

$$\bar{\beta}(s) = \bar{\alpha}(s) - \frac{b(\bar{\alpha}', \bar{W}')}{b(\bar{W}', \bar{W}')}W(s)$$

olmak üzere

$$\mu = \frac{\kappa(A' + 2\tau\kappa C)}{(A' + 2\tau\kappa C) + (\kappa^2 - \tau^2)(A^2 - (C')^2)}$$

elde edilir.

Bu regle yüzeyin dağılma parametresi (drali),

$$\bar{P}_{\bar{W}} = \frac{\det(\bar{\alpha}', \bar{W}, \bar{W}')}{\|\bar{W}'\|^2}$$

olmak üzere

$$\bar{P}_{\bar{W}} = \frac{-\kappa C A (\tau^2 + \kappa^2)}{(A' + 2\tau\kappa C) + (\kappa^2 - \tau^2)(A^2 - (C')^2)}$$

bulunur.

Bu regle yüzeyin Gauss Eğriligi,

$$\bar{K}(s, v) = -\frac{(\det(\bar{\alpha}'(s), \bar{W}(s), \bar{W}'(s)))^2}{(EG - F^2)^2}$$

$$E = E(s, v) = \|\alpha'(s) + vW'(s)\|^2, \quad F = F(s, v) = \alpha'(s)W(s), \quad G = G(s, v) = 1$$

$$(\det(\bar{\alpha}'(s), \bar{W}(s), \bar{W}'(s)))^2 = \kappa^2 C^2 A^2 (\tau^2 + \kappa^2)^2,$$

$$E = \|\kappa N + v((A' + 2\tau\kappa C)N + (-\kappa A + \tau C')T + (\tau A + \kappa C')B)\|^2,$$

$$= \kappa^2 + 2\kappa v(A' + 2\tau\kappa C) + v^2((A')^2 + 2A'\tau\kappa C + 4\tau^2\kappa^2 C^2 + A^2(\kappa^2 - \tau^2) - 4\kappa A\tau C' + (C')^2(\kappa^2 + \tau^2)),$$

$$F = \kappa N(AN + \tau CT + \kappa CB),$$

$$EG - F^2 = \kappa^2 + 2\kappa v(A' + 2\tau\kappa C) + v^2((A')^2 + 2A'\tau\kappa C + 4\tau^2\kappa^2 C^2 + A^2(\kappa^2 - \tau^2) - 4\kappa A\tau C' + (C')^2(\kappa^2 + \tau^2)) - \kappa^2 A^2 \dots (*)$$

$$\bar{K}(s, v) = \frac{-\kappa^2 C^2 A^2 (\tau^2 + \kappa^2)^2}{(*)^2}.$$

Bu regle yüzeyin ortalama eğriliği,

$$\bar{H}(s, v) = \frac{-2(\bar{\alpha}'(s)\bar{W}(s))\det(\bar{\alpha}'(s), \bar{W}(s), \bar{W}'(s)) + \det(\bar{\alpha}''(s) + v\bar{W}''(s), \bar{\alpha}'(s) + v\bar{W}'(s), \bar{W}(s))}{2(EG - F^2)^{3/2}}$$

$$E = E(s, v) = \|\bar{\alpha}'(s) + v\bar{W}'(s)\|^2, \quad F = F(s, v) = \bar{\alpha}'(s)\bar{W}(s), \quad G = G(s, v) = 1$$

olmak üzere,

$$-2(\bar{\alpha}'(s)\bar{W}(s))\det(\bar{\alpha}'(s), \bar{W}(s), \bar{W}'(s)) + \det(\bar{\alpha}''(s) + v\bar{W}''(s), \bar{\alpha}'(s) + v\bar{W}'(s), \bar{W}(s)),$$

$$= -2((\kappa A)N + 2CT + \kappa CB)(-\kappa CA(\kappa^2 + \tau^2)) -$$

$$\left((\kappa^2 + v(-\kappa(A' + 2\tau\kappa C)) + (-\kappa A + \tau C')'(-(\kappa + v(A' + 2\kappa\tau C))) \right) \kappa C v(\tau A + \kappa C')A' \right)$$

$$+ \left((\kappa' + v(A' + 2\tau\kappa C)') + (-\kappa a + \tau C') + (\tau A + \kappa C')(v\kappa C(-\kappa A + \tau C')) \right. \\ \left. - v((\tau A + \kappa C'))\tau C \right)$$

$$+ (\kappa\tau^2(A' + 2\tau\kappa C) + (\tau A + \kappa C')')(-vA'(-\kappa A + \tau C') + \kappa + v\tau C(A' + 2\kappa\tau C)) \dots (*)$$

$$EG - F^2 = \kappa^2 + 2\kappa v(A' + 2\tau\kappa C)$$

$$+ v^2((A')^2 + 2A'\tau\kappa C + 4\tau^2\kappa^2 C^2 + A^2(\kappa^2 - \tau^2) - 4\kappa A\tau C')$$

$$+ (C')^2(\kappa^2 + \tau^2) - (\kappa^2 A^2 + C^2(\tau^2 - \kappa^2)) \dots (**)$$

$$\bar{H}(s, v) = \frac{(*)}{2(**)^{3/2}}.$$

şeklinde bulunur.

3.3. Örnek

Timelike binormalli spacelike $\alpha(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cosh s, 1 - \sinh s, \frac{-2}{\sqrt{3}} \cosh s\right)$ eğrisi verilsin. Bu eğrinin Frenet vektörleri,

$$T(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \sinh s, -\cosh s, \frac{2}{\sqrt{3}} \sinh s\right),$$

$$N(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \cosh s, \sinh s, \frac{2}{\sqrt{3}} \cosh s\right),$$

$$B(s) = \left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

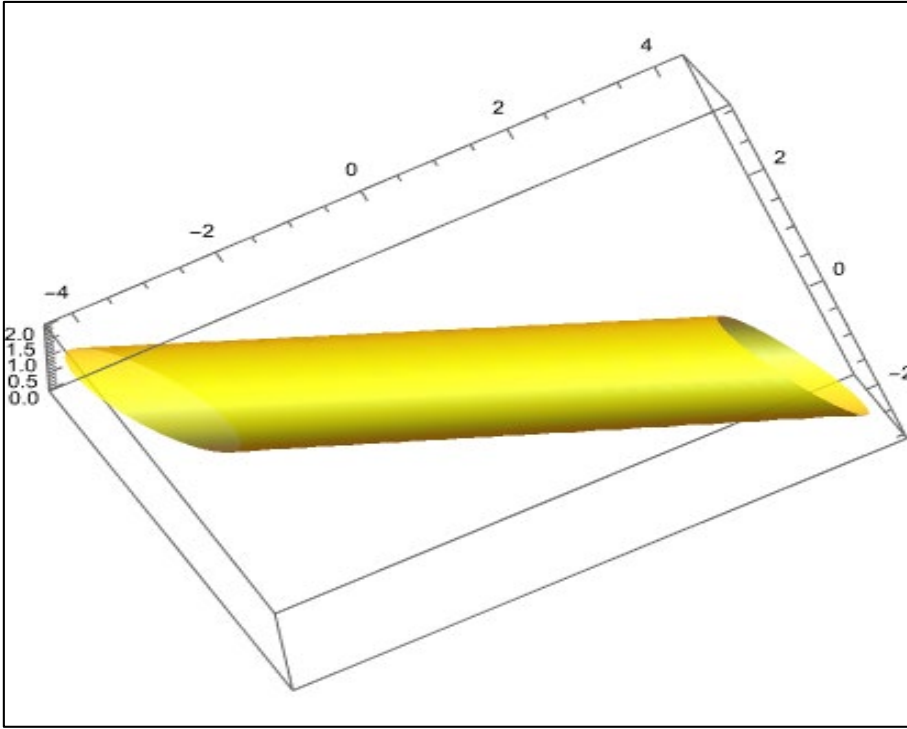
$$\kappa(s) = 1,$$

$$\tau(s) = 0.$$

Bu eğrinin Darboux vektörü $W = -\tau T + \kappa B$ dir.

$$W = \left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\chi(s, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cosh s, 1 - \sinh s, \frac{-2}{\sqrt{3}} \cosh s\right) + v \left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$



Şekil 3.1. $\chi(s, v)$ Yüzeyi

Timelike regle yüzeyi elde edilir.

$$\chi_s = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \sin s, -\cos s, \frac{2}{\sqrt{3}} \sin s \right),$$

$$\chi_v = \left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}} \right),$$

$$N = \frac{\chi_s \times \chi_v}{\|\chi_s \times \chi_v\|} = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}} \cos s, \sin s, \frac{2}{\sqrt{3}} \cos s \right),$$

$$S(\chi_s) = N_s = \lambda_1 \chi_s + \lambda_2 \chi_v,$$

$$S(\chi_v) = N_v = \mu_1 \chi_s + \mu_2 \chi_v,$$

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K(s) = 0,$$

$$H(s) = -\frac{1}{2},$$

$$I(V, W) = \langle V, W \rangle,$$

$$II(V, W) = \langle S(V), W \rangle = -\frac{1}{2} \langle V, W \rangle,$$

Bu eğrinin lift eğrisi,

$$\bar{\alpha}(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \sin s, -\cos s, \frac{2}{\sqrt{3}} \sin s \right) \text{ şeklindedir. Frenet vektörleri}$$

$$\bar{T}(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \cos s, \sin s, \frac{2}{\sqrt{3}} \cos s \right),$$

$$\bar{N}(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sin s, \cos s, -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin s \right),$$

$$\bar{B}(s) = \left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}} \right),$$

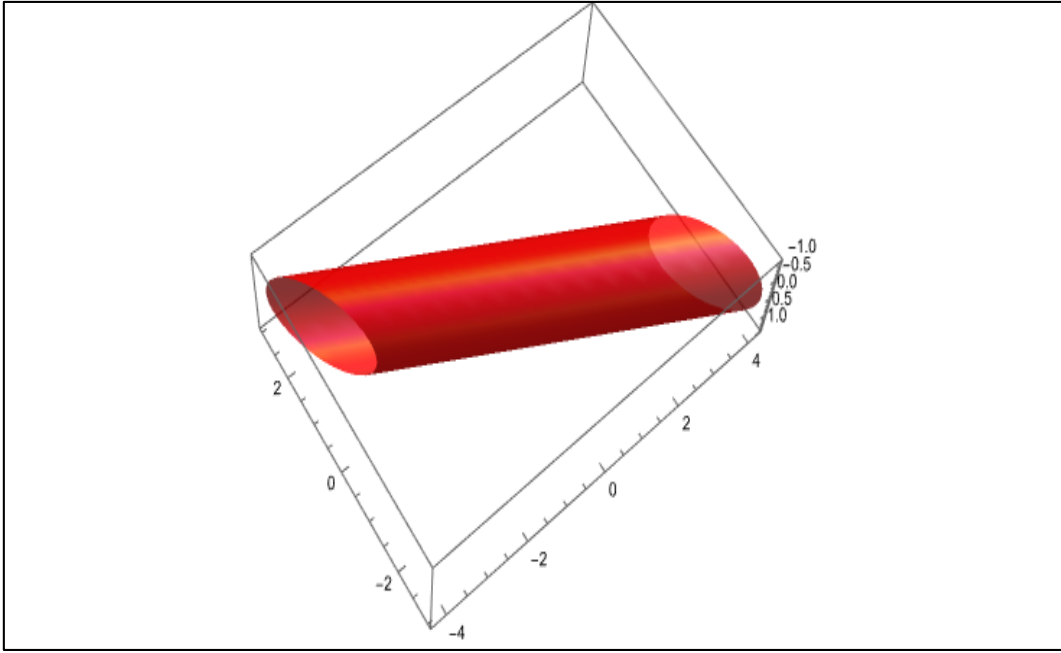
$$\bar{\kappa}(s) = 1,$$

$$\bar{\tau}(s) = 0.$$

Bu eğrinin Darboux vektörü $\bar{W} = -\bar{\tau}\bar{T} + \bar{\kappa}\bar{B}$ dir.

$$\bar{W} = \left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}} \right),$$

$$\bar{\chi}(s, v) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \sin s, -\cos s, \frac{2}{\sqrt{3}} \sin s \right) + v \left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$



Şekil 3.2. $\bar{\chi}(s, v)$ Yüzeyi

Timelike regle yüzeyi elde edilir.

$$\bar{\chi}_s = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \cosh, \sinh, \frac{2}{\sqrt{3}} \cosh \right),$$

$$\bar{\chi}_v = \left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}} \right),$$

$$\bar{N} = \frac{\bar{\chi}_s \times \bar{\chi}_v}{\|\bar{\chi}_s \times \bar{\chi}_v\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sinh, \cosh, -\frac{2}{\sqrt{3}} \sinh \right),$$

$$S(\bar{\chi}_s) = \bar{N}_s = \lambda_1 \bar{\chi}_s + \lambda_2 \bar{\chi}_v,$$

$$S(\bar{\chi}_v) = \bar{N}_v = \mu_1 \bar{\chi}_s + \mu_2 \bar{\chi}_v,$$

$$S(\bar{\chi}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{K}(s) = 0,$$

$$\bar{H}(s) = -\frac{1}{2},$$

$$I(V, W) = \langle V, W \rangle,$$

$$\Pi(V, W) = \langle S(V), W \rangle = -\frac{1}{2}\langle V, W \rangle.$$

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez de $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında $\bar{\alpha}$ lift eğrisinin timelike ve spacelike olması durumuna göre darboux vektörleri hesaplanmıştır. Bu darboux vektörlerinin oluşturduğu regle yüzeyler ile ilgili bazı karakterizasyonlar verilmiştir. Bu çalışma dual Lorentziyen uzaya da genişletilebilir.

KAYNAKLAR

1. O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian geometry, with applications to relativity*, New York: Academic Press, 254.
2. Ratcliffe, J. G. (1994). *Foundations of hyperbolic manifolds*, New York, Springer Verlag New York, Inc, 736.
3. Hacısalihoğlu, H. H. (1983). *Diferensiyel geometri*, Türkiye: İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, 1, 355, 490, 494, 495, 498.
4. Walrave, J. (1995). *Curves and Surface in Minkowski space*, Doktora Tezi, KU Leuven Faculteit Der Wetenschappen, Belgium.
5. Ergün, E., and Çalışkan, M. (2012). Ruled surface pair generated by a curve and its natural lift in $\mathbb{R}_1^3$. *Journal of Mathematical and Computational Sciences*, 2(5), 1387-1400.
6. Ergün, E., and Çalışkan, M. (2012). Ruled surface pair generated by a curve and its natural lift in $\mathbb{R}_1^3$. *Pure Mathematical Sciences*, 1(2), 75-80,6.
7. Akutagawa, K., and Nishikawa, S. (1990). The gauss map and spacelike surfaces with prescribed mean curvature in Minkowski 3-space. *Tohoku Mathematical Journal*, 42, 67-82.
8. Turgut, A. (1995). *3-Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler*, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 96s. 45768.
9. Ergün, E. (2013). *3-Boyutlu Minkowski Uzayında Lift Eğrileri Ve Geodezik Spraylar Üzerine*, Doktora Tezi, On Dokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun.
10. Tunçer, S. (2008). *Lorentz Uzayında Regle Yüzeyler*, Yüksek Lisans Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Afyon.
11. Izumiya, S., and Takeuchi, N. (2003). Special curves and ruled surfaces, *Contributions to Algebra and Geometry*. 44(1), 203-212.
12. Demiran İsat, N. (2019). *Lorentz Uzayında Regle Yüzeyler Üzerine*, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.



GAZİ GELECEKTİR..