

**LİNEER SİNGÜLER VE SİNGÜLER OLMAYAN İNTEGRAL
DENKLEMLERİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE BİR
ÇALIŞMA: FRACTURE MEKANİK**

Mustafa EKİCİ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HAZİRAN 2010
ANKARA**

Mustafa EKİCİ tarafından hazırlanan Lineer Singüler ve Singüler Olmayan İntegral Denklemlerinin Yaklaşık Çözümleri Üzerine Bir Çalışma: Fracture Mekanik adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Fatma AYZ

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN

Matematik A.B.D, Ankara Üniversitesi

Doç. Dr. Adil MISIR

Matematik A.B.D, Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Fatma AYZ

Matematik A.B.D, Gazi Üniversitesi

Tarih: 23/06/2010

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Mustafa EKİCİ

**LİNEER SİNGÜLER VE SİNGÜLER OLMAYAN İNTEGRAL
DENKLEMLERİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE BİR
ÇALIŞMA: FRACTURE MEKANİK
(Yüksek Lisans Tezi)**

Mustafa EKİCİ

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Haziran 2010

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci ve ikinci bölümünde integral denklemlerin bulunması, tarihi gelişimi, daha sonraki bölümlerde kullanacağımız bazı genel kavramlar ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde integral denklemlerinin tipleri ve sınıflandırılmasına yer verilmiştir. Dördüncü bölümde ise sadece Fredholm ve Volterra integral denklemleri için analitik çözüm yöntemleri verilmiş ve her biri birer örnekle açıklanmıştır. Son bölümde de sadece nümerik çözüm üzerine odaklanılmış ayrıca 2. tip singüler integral denklemlerinin uygulama problemlerine yer verilmiştir

Bilim Kodu : 204.1.138
Anahtar Kelimeler : Volterra-Fredholm ,İntegral denklemler,Singüler
Sayfa Adedi : 93
Tez Yöneticisi : Doç.Dr.Fatma AYAZ

**A STUDY OF LINEAR SINGULAR AND NON-SINGULAR
INTEGRAL EQUATION ON APROXIMATE SOLUTIONS:
FRACTURE MECHANIC**

(M.Sc. Thesis)

Mustafa EKİCİ

**GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

July 2010

ABSTRACT

This thesis consists of five parts. In the first and second parts, the discovery of Integral equations, historical development, some fundamental concepts and theorems which are going to be used in the following parts were explained. In the third part, type of Integral equations and their classification have been mentioned. In the fourth part, the analitic solving methods for only Fredholm and Volterra Integral equations were studied and each was explained by an example. In the last part, only approximation solution has been focused and also the application problems of the second type of singular Integral equations have been mentioned.

Science Code : 204.1.138

Key words : Volterra-Fredholm, Integral equations, Singular

Page Number: 93

Adviser : Assoc.Prof.Dr.Fatma AYAZ

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren değerli Hocam Doç. Dr. Fatma AYZA 'a, maddi olarak bana destek sağlayan TÜBİTAK' a, manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme, ayrıca çok değerli arkadaşlarım Öznur AKTAŞ ve Fatih SARIKAYA'ya teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	ix
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	x
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER.....	4
3. İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN TİPLERİ VE SINIFLANDIRMASI	8
3.1. Lineer ve Lineer Olmayan İntegral Denklemler.....	8
3.2. Singüler İntegral Denklemler	8
3.3. Singüler Olmayan İntegral Denklemlerinin Tiplerine Göre Sınıflandırılması..	9
3.4. Homogen ve Homogen Olmayan İntegral Denklemler	10
3.5. Volterra ve Fredholm İntegral Denklemler.....	10
3.6. Abel İntegral Denklemi	11
3.7. Wiener-Hopf İntegral Denklemi.....	12
3.8. Cauchy Tekil İntegral Denklemi	12
3.9. İntegro-Diferansiyel Denklemler	13
3.10. Parametrel İntegral Denklemler	13
3.11. Fox İntegral Denklemi	14
3.12. Konvolisyon İntegral Denklem	14
3.13. İntegral Denklemlerle Diferansiyel Denklemler Arasındaki İlişki	14
4. İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ.....	24
4.1. Fredholm İntegral Denklemlerinin Çözüm Yöntemleri.....	24
4.1.1.Sabit çekirdekli integral denklemler.....	24

	Sayfa
4.1.2. Dejenere çekirdekli integral denklemler	27
4.1.3. Dejenere çekirdekli 2.tip fredholm integral denklemlerinin çözümleri için bir genel yöntem.....	30
4.1.4. İtere çekirdek	35
4.1.5. Ardışık yaklaşımlar metodu	39
4.1.6. Çözücü çekirdek	44
4.1.7. Çekirdek ile çözücü çekirdek arasındaki ilişki	45
4.1.8. Çözücü çekirdeğin itere çekirdekler yardımıyla bulunması.....	46
4.1.9. Determinantlar yöntemi	51
4.2. Volterra integral denklemlerinin çözüm yöntemleri	54
4.2.1. Konvolisyon teoremi.....	54
4.2.2. Laplace dönüşümü ile volterra integral denkleminin çözümü	55
4.2.3. Gama ve Beta fonksiyonları	59
4.2.4. Volterra integral denklemlerini gama ve beta fonksiyonları Yardımla çözülmesi.....	61
4.2.5. Volterra integral denklemlerinin çözücü çekirdek(resolvant) Yardımla çözülmesi	65
5.SAYISAL YÖNTEMLER.....	70
5.1. İkinci Tip Volterra İntegral Denklemleri İçin Quadrature metot.....	70
5.2. İkinci Tip Singüler İntegral Denklemler İçin Gauss-Jacobi Quadrature Formülü	75
5.3. İkinci Tip Lineer Volterra İntegral Denklemlerinin Trapezoid Quadrature ve Block by Block Metodu ile Çözümü	84
KAYNAKLAR	92
ÖZGEÇMİŞ	93

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 5.1. Quadrature metot ile yaklaşık çözümler ve analitik çözüm.....	74
Çizelge 5.2. Düğüm noktaları ve $g(\zeta_i)$ yaklaşık çözümleri.....	80
Çizelge 5.3. Tekrarlı Trapezoid yöntemi ile yaklaşık çözümleri.....	88
Çizelge 5.4. Block by Block yöntemi ile yaklaşık çözümler	91

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 5.1. Kare uçlu düz matkap elastik yarı düzlemde kayarken.....	79
Şekil 5.2. Kare uçlu dalgalı matkap elastik bir yarı düzlem üzerinde kayarken....	82
Şekil 5.3. Dalgalı ve düz uçlu matkapların karşılaştırılması.....	83

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\ A\ $	A 'nın normu
$\phi'(x)$	$\phi(x)$ fonksiyonunun türevi
$\overrightarrow{A}$	A matrisi
$\mathcal{L}$	Laplace Dönüşümü
$\mathcal{L}^{-1}$	Ters Laplace Dönüşümü
$D(\lambda)$	Fredholm Determinantı
$D(x, t; \lambda)$	Fredholm minörü
(x_n)	n elemanlı bir dizi
$K(x, t)$	Çekirdek

1. GİRİŞ

İntegral denklemler kısaca; bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında bulunduğu denklemler olarak tanımlanabilir. Ancak bu tanım yetersiz kalmaktadır. Çünkü bu tanımdan hareket ederek, integral denklemlerin hepsini kapsayacak bir teori kurmak mümkün değildir. Bu nedenle her integral denklemi kendi içinde değerlendirmek doğru olacaktır. Böylece çok geniş bir araştırma sahası açılmış olmakta ve konu ayrıntılı bir inceleme konusu gerektirmektedir [1].

Fizik ve mühendislik uygulamalarda zaman zaman bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında olduğu denklemlerle karşılaşılır ve bu tür denklemlere yukarıda da belirtildiği gibi integral denklemler denir. Diferansiyel denklemlerle integral denklemler arasındaki en büyük fark, diferansiyel denklemlerin tek başlarına bir problemi tanımlamaya yetmemeleridir. Onlara sınır veya başlangıç şartları ilave edilmesi gerekir. Ancak integral denklemler ise ilave şartlara gerek kalmadan bir problemin tam tanımını vermektedirler.

İntegral denklemlerle ilgili ilk çalışmalar 19.yüzyılın ilk yarısında başlamıştır. Önceleri dağınık ve rastgele araştırmalar yapılmışken, aynı yüzyılın sonlarına doğru daha sistematik ve bilinçli araştırmaların yapıldığı ve bir takım sonuçlar alınmaya başlandığı izlenmektedir. ABEL, 1823 yılında bir mekanik problemini incelerken ilk defa integral denkleme rastladığı bilinmektedir. Ancak integral denklemi kavramını Du Bois REYMOND' un 1888 yılında yayınlanan bir çalışmasında önerdiği anlaşılmaktadır. 1822 yılında da Veian B. Joseph Fourier, trigonometrik serilerden yararlanarak ısı probleminin çözümünde kullanılan,

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} \sin(xy) \cdot \varphi(y) \cdot dy$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} \cos(xy) \cdot \varphi(y) \cdot dy$$

formüllerine ait

$$\varphi(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} \sin(xy) \cdot f(x) \cdot dx \quad \text{ve} \quad \varphi(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} \cos(xy) \cdot f(x) \cdot dx$$

denklemlerini vermiştir. 1823 yılında ise ABEL mekanik problemlerinin genel formülü;

$$f(x) = \int_0^{\alpha} \frac{\varphi(y)}{(x-y)^2} dy, \quad f(0)=0 \quad \text{ve} \quad 0 < \alpha < 1$$

olan bu integral denklemini formüle edip 1826 yılında çözümünü vermiştir. Bu denklemin $\alpha=0$ ve $\alpha=\frac{1}{2}$ hali ABEL' in karşılaştığı orijinal denklem olup buna ilişkin meşhur toutochrone(eşit zamanlı) problemi ise ilk olarak HUYGENS tarafından çözülmüştür . İntegral sınırlarından biri x gibi bir değişken olan ve bilinmeyen φ fonksiyonunu integralin hem içinde hem dışında bulunduran

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, y) \cdot \varphi(y) \cdot dy$$

integral denklemi ilk olarak Poisson tarafından elde edilmiştir. Burada φ çözümü λ 'nın kuvvetleri cinsinden verilmiştir. Ancak ilgili serinin yakınsaklığı Poisson tarafından gösterilmeyip daha sonra 1830 yılında Liouville tarafından ispatlanmıştır. Bir S yüzeyi içerisinde $\Delta F = 0$ Laplace denklemini sağlayan ve S 'nin sınırında belli bir değer alan F fonksiyonunun bulunması problemi olan Dirichlet probleminin bir integral denklem problemine eşdeğer olduğu 1870 yılında Liouville tarafından λ parametresinin bir açılımı olarak verilmiştir. Bu çözüm daha önceden Poisson ve Liouville' in kullandığı ardışık yaklaştırma metoduna karşılık gelir. İntegral sınırlarından birinin x değişkeni olduğu lineer integral denklemlere ait çalışmalar 1860 – 1940 yılları arasında yaşamış olan İtalyan matematikçi Vita VOLTERRA tarafından yayınlanmıştır.

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) \cdot \varphi(y) \cdot dy$$

integral denklemi ilk olarak 1900 yılında Eric İvan FREDHOLM (1866 – 1927) tarafından araştırılmış. Fredholm ise Volterra' nın 1884' te sunmuş olduğuna benzer yaklaşım problemlerini ele alıp 1903' te makalesini yayınlamıştır[1].

Bu tezin ikinci bölümünde temel tanım ve kavramlardan bahsedilecektir. Üçüncü bölümünde integral denklemlerin sınıflandırılması yer almaktadır. Dördüncü bölümde analitik çözüm yöntemlerine yer verilmiş olup beşinci bölüm sayısal yöntemleri içermektedir.

2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

2.1. Weirstrass M-Testi

$\{f_n\}$, E kümesi üzerinde tanımlanmış bir reel fonksiyon dizisi ve $\{M_n\}$ reel sayı dizisi olsun. $\forall x \in E$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$|f_n(x)| \leq M_n$$

oluyorsa ve $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ serisi yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisi E üzerinde düzgün ve mutlak yakınsaktır.

2.2. Süreklilik

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta(\varepsilon, x_0)$ var ve $\forall x \in [a, b]$ için $|x - x_0| < \delta$ iken $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ise f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir.

2.3. Düzgün Süreklilik

f , $[a, b]$ aralığında tanımlanmış reel değerli bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in [a, b]$ ve $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde,

$$|x - y| < \delta \quad \text{iken} \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

olacak biçimde $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ bulunabilirse f ' ye $[a, b]$ ' de düzgün süreklidir denir. Dikkat edilirse düzgün süreklilik bir küme üzerinde tanımlanır.

2.4. Noktasal Yakınsaklık ve Düzgün Yakınsaklık

X boş olmayan bir küme ve $f_n : X \rightarrow F$, $n \in \mathbb{N}$ şeklindeki fonksiyonlar olsun.

i) Eğer $\forall x \in X$ için $f_n(x) \rightarrow f(x)$ oluyorsa yani $\forall x \in X$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N = N(x, \varepsilon)$ varsa ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ oluyorsa (f_n) fonksiyonlar dizisi f 'ye noktasal yakınsar denir.

ii) $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N = N(\varepsilon)$ varsa $\forall x \in X$ ve $\forall n \geq N$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ oluyorsa (f_n) fonksiyonlar dizisi f 'ye düzgün yakınsar denir.

2.5. Vektör Uzayı

L boş olmayan bir küme, K reel yada kompleks sayılar cismi olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan L kümesine K cismi üzerinde vektör uzayı (Lineer uzay) denir ve bu uzayın elemanlarına da vektör denir.

$$+ : L \times L \rightarrow L \quad \bullet : K \times L \rightarrow L$$

işlemleri tanımlıdır.

a) $(L, +)$ değişmeli bir gruptur.

G1) Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir. (Kapalılık özelliği)

G2) Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ (Birleşme özelliği)

G3) Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır. (Birim eleman özelliği)

G4) Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır. (Ters eleman özelliği)

G5) Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir. (Değişme özelliği)

b) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in K$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

$$L1) \alpha.x \in L$$

$$L2) \alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$$

$$L3) (\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$$

$$L4) (\alpha . \beta) . x = \alpha . \beta . x$$

$$L5) 1_K . x = x \quad (\text{Burada } 1_K, K' \text{ 'nin birim elemanıdır})$$

2.6. Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık

L, K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de L 'nin sonlu bir alt kümesi olsun. $\alpha_i \in K$ olmak üzere $\sum_{i=1}^n \alpha_i . x_i = 0$ olması her i için $\alpha_i = 0$ olmasını gerektiriyorsa $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektörlerine lineer bağımsız denir. Herhangi bir $\alpha_i \neq 0$ ise o halde de $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektörlerine lineer bağımlı vektörler denir.

2.7. Normlu Uzay

V bir vektör uzayı olsun. $\forall v, w \in V$ ve $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$i) \|v\| \geq 0 \quad \text{ve} \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

$$ii) \|k.v\| = |k| . \|v\|$$

$$iii) \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

koşulları sağlanıyorsa

$$\|.\| : V \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonuna V üzerinde norm, $(V, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

2.8. Leibnitz Formülü

$a(x)$ ve $b(x)$ integralin sınırları olmak üzere, integral altında türev alma işlemi uygulanır.

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} F(x,t) \cdot dt = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial F(x,t)}{\partial x} dt + F\{x, b(x)\} \frac{db}{dx} - F\{x, a(x)\} \frac{da}{dx}$$

Burada $a(x)$ ve $b(x)$ sabitler ise $\frac{da}{dx}=0$, $\frac{db}{dx}=0$ olacağından

$$\frac{d}{dx} \int_a^b F(x,t) \cdot dt = \int_a^b \frac{\partial F(x,t)}{\partial x} \cdot dt$$

olarak kullanılır.

2.9. Hölder Eşitsizliği

Sonlu sayıda, hepsi sıfır olmayan a_i, b_i , $i=1,2,\dots,n$ pozitif sayılarını alalım.

$p, q < 1$ sayıları $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşulunu sağlasın.

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine Hölder eşitsizliği denir [2,3].

3. İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN TİPLERİ VE SINIFLANDIRMASI

Tek değişkenli fonksiyonlarda bir integral denklemin en genel hali,

$$\psi(x).\phi(x) = f(x) + \lambda \cdot \int_a^b K(x,t) \cdot \phi(t) \cdot dt \quad (3.1)$$

şeklinde olup burada a ve b sabitler ; λ bir parametre , $\psi(x), f(x), K(x,t)$; tanım bölgesi $a \leq x, t \leq b$ üzerinde bilinen fonksiyonlar ; $\phi(x)$ ise bilinmeyen fonksiyondur. $K(x,t)$ fonksiyonuna da çekirdek adı verilir. İntegral denklemlerin farklı sınıflandırılmaları mevcuttur ve bu sınıflandırmalar sırasıyla bu bölümde incelenecektir.

3.1. Lineer ve Lineer Olmayan İntegral Denklemler

İntegral denklemleri lineer ve lineer olmayan integral denklemler olmak üzere iki farklı sınıfa ayırabiliriz. $\phi(x)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere,

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t) \cdot \phi(t) \cdot dt \quad (3.2)$$

şeklindeki integral denklemde $\phi(x)$ bilinmeyen fonksiyonu lineer olduğundan Eş.3.2 'deki integral denklem de lineerdir. Eğer

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t) \cdot \phi^n(t) \cdot dt \quad , \quad n \neq 1 \quad (3.3)$$

ise bu integral denklemde $\phi(x)$ bilinmeyen fonksiyonunun n . kuvveti bulunduğundan lineer olmayan integral denklem sınıfındadır [1].

3.2. Singüler İntegral Denklemler

Singüler integral denklemler kendi içinde 3 farklı çeşit olarak verilir.

- i) İntegral sınırlarından biri yada her ikisinin de sonsuz olduğu integral denklemler
- ii) Çekirdek fonksiyonunun verilen aralıkta süreksiz olduğu integral denklemler
- iii) Bazı sonlu mertebeden türevlerin oluşturulamadığı integral denklemler

(Örneğin; $y(s) = (1-s^2)^{\frac{1}{2}}$, $[-1,1]$ aralığında singülerdir. Çünkü $y'(s)$ ' de sınırlar sürekliliği bozar)

olup sırasıyla 1.çeşit, 2.çeşit, 3.çeşit singüler integral denklemler diye ifade edilir. Singüler integral denklemler oldukça geniş kapsamlı bir konu olup ayrı bir inceleme alanı gerektirdiğinden bu tezin 4.bölümünde sadece 2.çeşit singüler integral denklemlerin özel bir durumuna yer verilmiştir.

İkinci çeşit integral denklemlere örnek olarak ; $0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$f(x) = \int_0^x \frac{u(t).dt}{(x-t)^\alpha} \quad (3.4)$$

integral denklemi verilebilir. $x=t$ için integral denklem süresizdir. Ayrıca aşağıdaki integral denklemler de 1.çeşit singüler integral denklem sınıfındadırlar.

$$f(x) = \int_0^\infty \sin(xt)u(t).dt \quad (\text{Fourier Sinüs Transformasyonu})$$

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt}u(t).dt \quad (\text{Laplace Transformasyonu})$$

3.3. Singüler Olmayan İntegral Denklemlerinin Tiplerine Göre Sınıflandırılması

$$u(x) = \int_a^b K(x,t).\phi(t).dt \quad (3.5)$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t).\phi(t).dt \quad (3.6)$$

burada $\phi(x)$ bilinmeyen fonksiyon , $u(x), f(x), K(x,t)$ bilinen fonksiyonlar olmak üzere Eş. 3.5 ve Eş. 3.6' daki integral denklemler 1.Tip integral denklemlerdir. Burada bilinmeyen fonksiyon sadece integral içindedir.

$$\phi(x) = \int_a^b K(x,t) \cdot \phi(t) \cdot dt \quad (3.7)$$

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t) \cdot \phi(t) \cdot dt \quad (3.8)$$

burada $\phi(x)$ bilinmeyen fonksiyon ; $f(x)$ ve $K(x,t)$ bilinen fonksiyonlar olmak üzere Eş. 3.7 ve Eş. 3.8' deki integral denklemler *2.Tip* integral denklemlerdir. Burada bilinmeyen fonksiyon integralin hem içinde hem de dışındadır.

$$\psi(x) \cdot \phi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t) \cdot \phi(t) \cdot dt \quad (3.9)$$

burada $\psi(x)$, $f(x)$ ve $K(x,t)$ bilinen fonksiyonlar, $\phi(x)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere Eş. 3.9' daki integral denklem de *3.Tip* integral denklemdir. Eş. 3.9' da integral dışındaki bilinmeyen fonksiyonun katsayısına göre integral denklem *1. ve 2. tip* integral denkleme dönüştürülebilir.

3.4. Homogen ve Homogen Olmayan İntegral Denklemler

Bir integral denkleminde integralin dışında ve bilinmeyen ϕ fonksiyonu haricinde f gibi bir fonksiyon bulundurmeyen integral denklemlere homogen integral denklem denir. f fonksiyonu bulunduran integral denklemlere homogen olmayan integral denklem denir.

$$\phi(x) = \int_a^b K(x,t) \cdot \phi(t) \cdot dt \quad (3.10)$$

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t) \cdot \phi(t) \cdot dt \quad (3.11)$$

Eş. 3.10 homogen integral denklem, Eş. 3.11 ise homogen olmayan integral denkleme birer örnektir.

3.5. Volterra ve Fredholm İntegral Denklemler

İntegral denklemler integral sınırlarının değişken ya da sabit olmasına göre de sınıflandırılırlar.

$t > x$ için $K(x, t) = 0$ şartını sağlayan

$$f(x) = \int_a^x K(x, t) \cdot \phi(t) \cdot dt \quad (3.12)$$

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t) \cdot \phi(t) \cdot dt \quad (3.13)$$

$$\psi(x) \cdot \phi(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t) \cdot \phi(t) \cdot dt \quad (3.14)$$

denklemleri sırasıyla 1. , 2. ve 3. tip Volterra integral denklemleridir.

$a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_a^b |f(x)|^2 \cdot dx < \infty$$

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 \cdot dx \cdot dt < \infty$$

özelliklerine sahip bilinen fonksiyonlar ve $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere;

$$f(x) = \int_a^b K(x, t) \cdot \phi(t) \cdot dt \quad (3.15)$$

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) \cdot \phi(t) \cdot dt \quad (3.16)$$

$$\psi(x) \cdot \phi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) \cdot \phi(t) \cdot dt \quad (3.17)$$

denklemleri sırasıyla 1. , 2. ve 3. tip Fredholm integral denklemleridir.

3.6. Abel İntegral Denklemi

Eş. 3.12' nin özel bir hali Abel integral denklemdir. Eş. 3.12' de

$$K(t, s) = \frac{H(t, s)}{(t^p - s^p)^\alpha} \quad (3.18)$$

olarak alınmıştır.

$$\int_0^t \frac{H(t,s)}{(t^p - s^p)^\alpha} x(s) ds = y(t) \quad , \quad t > 0 \quad (3.19)$$

burada $0 < \alpha < 1$, $p > 0$ ve $p \in \mathbb{Z}$ şeklindedir. Özellikle önemli durumlar $p=1$ ve $p=2$ durumlarıdır. Her iki durumda da $\alpha = \frac{1}{2}$ ' dir. $H(t,s)$ fonksiyonu düzgün yakınsak olarak varsayılmıştır (bu ifade aynı zamanda çoğunlukla sürekli integrallenebilirdir). Bu integral denklemlerin uygulama alanı çok geniş olup analitik yöntemler çoğu zaman yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle özel sayısal metotlar geliştirilmiştir.

3.7. Wiener – Hopf İntegral Denklemleri

Bu integral denklem,

$$\lambda .x(t) - \int_0^\infty K(t-s) x(s) ds = y(t) \quad , \quad 0 \leq t \leq \infty \quad (3.20)$$

şeklindedir. Orijinal olarak bu gibi integral denklemler ısı transfer denklemlerinde, düzlemsel problemlerin sadece düzgün yakınsak olduğu durumlar için sınır değer problemlerinin çözülmesinde kullanılır.

3.8. Cauchy Tekil İntegral Denklemleri

Γ açık veya kapalı sınırlı bir bölge olsun. Kompleks düzlemde Cauchy tekil integral denklemi,

$$a(z) . \phi(z) + \frac{b(z)}{\pi . i} \int_\Gamma \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_\Gamma K(z, \zeta) d\zeta = \psi(z) \quad , \quad z \in \Gamma \quad (3.21)$$

olup a, b, ψ ve K verilmiş kompleks değerli fonksiyonlardır. ϕ bilinmeyen fonksiyon, K integrallenebilir olarak Fredholm integral operatörü ile yakından ilişkilidir. Ayrıca bu integral denklem esas (öncül) değer denklemi olarak adlandırılır.

3.9. İntegro-Diferansiyel Denklemler

Bilinmeyen $\phi(x)$ fonksiyonunun türevlerinin de bulunduğu integral denklemlere integro-diferansiyel denklemler denir.

$$\phi'(x) = F \left\{ x, u(x), \int_0^x K(x, t, \phi(t), \phi'(t)) dt \right\} \quad (3.22)$$

denklemi bu tip integral denklemlerdir. İçinde hem bilinmeyen hem de bilinmeyenin türevleri bulunmaktadır.

3.10. Parametrelili İntegral Denklemler

$\lambda \neq 0$ ve $\lambda \neq 1$ olan bir parametre olmak üzere tanımı yapılmış olan integral denklemler λ parametresinin dahil edilmesi ile daha genel bir yapıya kavuşacaktırlar. Burada λ kompleks veya reel değerli olabilir. Örneğin;

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) \phi(t) dt \quad (2. tip Volterra İntegral denklemi)$$

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \cdot \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt \quad (2. tip Fredholm İntegral denklemi)$$

şeklindedir.

3.11. Fox İntegral Denklemi

Bu integral denklem;

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^{\infty} K(xy) \phi(y) dy \quad (0 < x < \infty) \quad (3.23)$$

şeklindedir. Bu integral denklemin çekirdeği özel olarak iki değişkenin çarpımı olarak seçilir yani xy ' yi değişken kabul eder ve sınırlarına da dikkat edilirse *1.çeşit* singüler integral denklem sınıfındadır.

3.12. Konvolisyon İntegral Denklem

$K(x, y)$ çekirdeği sadece $x - y$ farkına bağlı yani $x - y$ ' yi değişken kabul eden bir değişkenli fonksiyon olmak üzere genel bir konvolisyon integral denklemi,

$$\phi(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x - y) \phi(y) dy \quad (3.24)$$

şeklinde olup hemen hemen konvolisyon integral denklemi ise,

$$\phi(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x, x - y) \phi(y) dy \quad (3.25)$$

formundadır.

3.13. İntegral Denklemlerle Diferansiyel Denklemler Arasındaki İlişki

Başlangıç koşulu ile verilen değişken veya sabit katsayılı bir diferansiyel denklem Volterra tipinde bir integral denkleme dönüştürülebilir. Dolayısıyla bir integral denklemde bir diferansiyel denkleme dönüşebilir.

3.13.1. Diferansiyel denklemlerin integral denkleme dönüştürülmesi

$y(0)=c_0$, $y'(0)=c_1$,....., $y^{(n-1)}(0) = c_{n-1}$ başlangıç koşulları ile verilen

$$\frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}} + a_1(x) \cdot \frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}} + a_2(x) \cdot \frac{d^{(n-2)}y}{dx^{(n-2)}} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot \frac{dy}{dx} + a_n(x) \cdot y = f(x) \quad (3.26)$$

n . mertebeden lineer diferansiyel denklemini verilsin. Bu denklem integral denkleme dönüştürülebilir.

$$\frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}} = u(x)$$

$$\int_0^x \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}} \right) \cdot dx = \int_0^x u(x) \cdot dx$$

$$\frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}} = \int_0^x u(x) \cdot dx + c_{n-1}$$

olur. Benzer şekilde;

$$\int_0^x \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{(n-2)}y}{dx^{(n-2)}} \right) \cdot dx = \int_0^x \left(\int_0^x u(x) \cdot dx + c_{n-1} \right) dx$$

$$\frac{d^{(n-2)}y}{dx^{(n-2)}} = \int_0^x \int_0^x u(x) dx dx + (c_{n-1}) \cdot x + c_{n-2}$$

$$\frac{d^{(n-3)}y}{dx^{(n-3)}} = \int_0^x \int_0^x \int_0^x u(x) dx dx dx + \frac{1}{2!} (c_{n-1}) \cdot x^2 + (c_{n-2}) \cdot x + c_{n-3}$$

.

.

.

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \dots (n-1) \dots \int_0^x u(x) dx \dots dx + \frac{1}{(n-2)!} (c_{n-1}) x^{n-2} + \frac{1}{(n-3)!} (c_{n-2}) x^{n-3} + \dots + c_2 x + c_1$$

$$y = \int_0^x \dots (n) \dots \int_0^x u(x) dx \dots dx + \frac{1}{(n-1)!} (c_{n-1}) x^{n-1} + \frac{1}{(n-2)!} (c_{n-2}) x^{n-2} + \dots + c_1 x + c_0$$

elde edilir. Eş. 3.26' da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & u(x) + a_1(x) \int_0^x u(x) dx + a_1(x) c_{n-1} + a_2(x) \int_0^x \int_0^x u(x) dx dx + a_2(x) c_{n-1} x + a_2(x) c_{n-2} \\ & + a_3(x) \int_0^x \int_0^x \int_0^x u(x) dx dx dx + \frac{1}{2!} c_{n-1} x^2 a_3(x) + c_{n-2} x a_3(x) \\ & + c_{n-3} a_3(x) + \dots + a_{n-1}(x) \int_0^x \dots (n-1) \dots \int_0^x u(x) dx dx \dots dx \\ & + \frac{1}{(n-2)!} c_{n-1} x^{n-2} a_{n-1}(x) + \dots + c_2 x a_{n-1}(x) + c_1 a_{n-1}(x) \\ & + a_n(x) \int_0^x \dots (n) \dots \int_0^x u(x) dx dx \dots dx \\ & + \frac{1}{(n-1)!} c_{n-1} x^{n-1} a_n(x) + \dots + c_1 x a_n(x) + c_0 a_n(x) = f(x) \end{aligned}$$

olur. Düzenleyip tekrardan yazarsak,

$$\begin{aligned} & u(x) + a_1(x) \int_0^x u(x) dx + a_2(x) \int_0^x \int_0^x u(x) dx dx + a_3(x) \int_0^x \int_0^x \int_0^x u(x) dx dx dx + \dots \\ & \dots + a_{n-1}(x) \int_0^x \dots (n-1) \dots \int_0^x u(x) dx dx \dots dx + a_n(x) \int_0^x \dots (n) \dots \int_0^x u(x) dx dx \dots dx \\ & = f(x) - c_{n-1} a_1(x) - c_{n-1} x a_2(x) - \frac{1}{2!} c_{n-1} x^2 a_3(x) - \dots - \frac{1}{(n-1)!} c_{n-1} x^{n-1} a_{n-1}(x) \\ & - a_2(x) c_{n-2} - c_{n-2} x a_3(x) - \dots - \frac{1}{(n-2)!} c_{n-2} x^{n-2} a_{n-2}(x) - \dots \\ & \dots - c_1 x a_n(x) - c_0 a_n(x) \end{aligned}$$

Eşitliğin sağ tarafı x ' in bir fonksiyonu olduğundan $F(x)$ ile gösterelim. $F(x)$ ' in değerini de düzenleyerek yazabiliriz.

$$a_1(x) + x \cdot a_2(x) + \frac{x^2}{2!} a_3(x) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} a_n(x) = f_{n-1}(x)$$

$$a_2(x) + x \cdot a_3(x) + \dots + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} a_n(x) = f_{n-2}(x)$$

.

.

.

$$a_{n-1}(x) + x \cdot a_n(x) = f_1(x)$$

$$a_n(x) = f_0(x)$$

$$F(x) = f(x) - \{ c_{n-1} f_{n-1}(x) + c_{n-2} f_{n-2}(x) + \dots + c_1 f_1(x) + c_0 \cdot f_0(x) \}$$

şeklinde yazılabilir. Eşitliğin sol yanını

$$\int_0^x \dots (n) \text{tane} \dots \int_0^x u(t) \cdot dt \cdot dt \dots dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} u(t) \cdot dt \quad (3.27)$$

bağıntısını kullanarak tek katlı integral olarak yazmaya çalışalım.

$$u(x) + a_1(x) \cdot \int_0^x u(x) \cdot dx + \dots + a_n(x) \cdot \int_0^x \dots (n) \text{tane} \dots \int_0^x u(x) \cdot dx \dots dx = F(x) \quad (3.28)$$

Eş. 3.27 yardımıyla

$$u(x) + a_1(x) \cdot \int_0^x u(t) \cdot dt + a_2(x) \cdot \int_0^x (x-t) \cdot u(t) \cdot dt + \dots + a_n(x) \cdot \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} u(t) \cdot dt = F(x)$$

şeklinde ifade edilir. Belirli integralden

$$u(x) + \int_0^x \left[a_1(x) + a_2(x)(x-t) + a_3(x) \cdot \frac{(x-t)^2}{2!} + \dots + a_n(x) \cdot \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \right] u(t) \cdot dt = F(x)$$

olup

$$K(x, t) = a_1(x) + a_2(x)(x-t) + a_3(x) \frac{(x-t)^2}{2!} + \dots + a_n(x) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

ifadesi çekirdek fonksiyonu olarak ifade edilir. Bulduklarımızı yerine yazarsak

$$u(x) + \int_0^x K(x, t) \cdot u(t) dt = F(x)$$

elde edilir. Bu da 2. tip Volterra integral denklemdir. Dolayısıyla başlangıç koşullarıyla verilen bir diferansiyel denklemi integral denkleme dönüştürebildik. Eş.3.27’de verilen

$$\int_0^x \dots (n) \dots \int_0^x u(t) dt \dots dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} u(t) dt$$

eşitlik aşağıdaki şekilde ispatlanır. Eş. 3.27 aşağıdaki gibi düzenlenip, sağ tarafı I_n ile gösterilsin ve bu ifade daha genel incelenmiş olması için alt sınır da a olarak alınsın.

$$(n-1)! \int_a^x \dots (n) \dots \int_a^x u(t) dt \dots dt = \int_a^x (x-t)^{n-1} u(t) dt$$

$$I_n(x) = \int_a^x (x-t)^{n-1} \cdot u(t) dt \quad (3.29)$$

burada n pozitif bir tamsayı ve a bir sabittir. İntegral işareti altında türev almaya yarayan Leibnitz Formülünden yararlanılarak;

$$F(x, t) = (x-t)^{n-1} \cdot u(t)$$

alınırsa, türev alındığında,

$$\frac{dI_n}{dx} = (n-1) \int_a^x (x-t)^{n-2} u(t) dt + \left\{ (x-t)^{n-1} u(t) \right\} \Big|_{t=x}$$

bulunur. Böylece $n > 1$ için,

$$\frac{dI_n}{dx} = (n-1) I_{n-1} \quad (3.30)$$

olur. Özel olarak,

$$\frac{dI_1}{dx} = \frac{d}{dx} \int_a^x u(t) dt = u(x) \quad (3.31)$$

alalım. Eş. 3.30' dan türev almaya devam edilirse,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 I_n}{dx^2} &= (n-1)(n-2) I_{n-2} \\ \frac{d^3 I_n}{dx^3} &= (n-1)(n-2)(n-3) I_{n-3} \\ &\vdots \\ \frac{d^k I_n}{dx^k} &= (n-1)(n-2) \dots (n-k) I_{n-k}, \quad (n > k) \\ &\vdots \\ \frac{d^{n-1} I_n}{dx^{n-1}} &= (n-1)(n-2) \dots 2.1 I_1 = (n-1)! I_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

ve n . mertebeden türev için

$$\frac{d^n I_n}{dx^n} = (n-1)! \frac{dI_1}{dx} = (n-1)! u(x)$$

bulunur. $n \geq 1$ iken $I_n(a) = 0$ olduğuna dikkat edilirse, Eş. 3.32' den, $I_n(x)$ ' in ve onun ilk $(n-1)$ adet türevinin $x=a$ için sağladığı sonucuna varılabilir. Şimdi, yukarıdaki bağıntılardan geriye doğru hareket edilerek, integral işlemleri yapılırsa Eş. 3.31' den

$$I_1(x) = \int_a^x u(x) dx$$

elde edilir. Buradan

$$I_2(x) = \int_a^x I_2(x_2) dx_2 = \int_a^x \int_a^{x_2} u(x_1) dx_1 dx_2$$

yazılabilecektir. Burada x_1, x_2 birer parametredir. İşlemlere bu şekilde devam edilirse,

$$I_n(x) = (n-1)! \int_a^x \int_a^{x_n} \int_a^{x_{n-1}} \dots \int_a^{x_3} \int_a^{x_2} u(x_1) dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_{n-1} dx_n$$

bulunur. İfadeyi düzenlemek için, her iki tarafı $(n-1)!$ bölüp, I_n yerine Eş. 3.29' daki eşiti yazılırsa,

$$\int_a^x \int_a^{x_n} \int_a^{x_{n-1}} \dots \int_a^{x_3} \int_a^{x_2} u(x_1) dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_{n-1} dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} u(t) dt$$

ve burada $x = x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = x_n$ kabul edilirse, gösterilmek istenilen,

$$\int_0^x \dots (n) \text{ tane } \dots \int_0^x u(t) dt \dots dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} u(t) dt$$

bağıntısı elde edilmiş olur. Böylece ispatı tamamlamış olduk.

Örnek : $y'' + y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ başlangıç koşulları ile verilen diferansiyel denkleme karşılık gelen integral denklemini bulalım.

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = u(x) \quad \text{olarak tanımlanırsa;}$$

$$\int_0^x y''(x) dx = \int_0^x u(x) dx$$

$$\int_0^x y''(x) dx = \int_0^x u(x) dx$$

$$y'(x) = \int_0^x u(x) dx \Rightarrow y'(x) = 1 + \int_0^x u(x) dx$$

tekrar integral alırsak

$$y(t)|_0^x = x + \int_0^x \int_0^x u(t) dt dt$$

$$y(x) = x + \int_0^x (x-t) u(t) dt$$

bulunur. Bulduklarımızı yerine yazarsak;

$$u(x) + x + \int_0^x (x-t) u(t) dt = 0$$

şeklindeki integral denkleme dönüşür.

3.13.2. İntegral denklemin diferansiyel denkleme dönüştürülmesi

Şimdi de bir integral denklemin bir diferansiyel denkleme dönüştürülmesini görelim. Bunun için Leibnitz formülünün uygulanması yeterlidir.

Örnek : $u(x) = \lambda \int_0^x \sin(t)u(t)dt + x$ integral denklemini diferansiyel denkleme dönüştürelim.

Her iki tarafın x 'e bağlı türevini alalım. Burada $F(x,t)=\sin(t)u(t)$ ' dir. O halde türev alınırsa;

$$\frac{du(x)}{dx} - \lambda \frac{d}{dx} \int_0^x \sin(t)u(t)dt = 1$$

elde edilir. Leibnitz formülüne göre

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \sin(t)u(t)dt = \int_0^x 0dt + u(x)\sin x = u(x)\sin x$$

şeklinde yazabiliriz. Bulduğumuz eşitlikleri yerine yazarsak,

$$u' - \lambda u \cdot \sin x = 1$$

elde edilir.

Örnek : $u(x) - \int_0^x u(t) \tan t dt = \sin x$ integral denklemini diferansiyel denkleme dönüştürelim.

Her iki tarafın x ' e göre türevi alınırsa,

$$\frac{du(x)}{dx} - \frac{d}{dx} \int_0^x u(t) \tan(t) dt = \frac{d(\sin x)}{dx}$$

$$u'(x) - \frac{d}{dx} \int_0^x u(t) \tan(t) dt = \cos x$$

elde edilir. Bu ifadeye Leibnitz Formülü uygulandığında,

$$\frac{d}{dx} \int_0^x u(t) \tan(t) dt = \int_0^x 0 dt + u(x) \tan x = u(x) \tan x$$

şeklindedir. Bulduğumuz bu değeri yukarıda yerine yazarsak,

$$u'(x) - u(x) \tan x = \cos x$$

şeklindedir. Buradan da görüldüğü gibi bir integral denklemi diferansiyel denkleme dönüştürebiliriz.

4. İNTEGRAL DENKLEMLER İÇİN ANALİTİK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

4.1. Fredholm İntegral Denklemlerinin Çözüm Yöntemleri

Bu bölümde Fredholm integral denklemlerine ait çözüm yöntemleri verilmiş olup ardından bu yöntemlerin uygulanabilirliği örneklerle gösterilmiştir.

4.1.1. Sabit çekirdekli integral denklemler

Bir Fredholm integral denkleminde bilinen $K(x,t)$ fonksiyonunun sabit bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. “c” bu sabiti göstermek üzere,

$$K(x,t) = c$$

için integral denklemi

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b c \phi(t) dt$$

şeklinde olur. Biraz daha düzenlersek,

$$\phi(x) = f(x) + \lambda c \int_a^b \phi(t) dt$$

yazılır ve $\lambda.c = \mu$ alınmak üzere

$$\phi(x) = f(x) + \mu \int_a^b \phi(t) dt$$

olarak yazılabilir. Belirli integralin sınırları sabit olduğundan bu integralin sonlu bir değeri olacaktır. Bu sonlu değeri A ile gösterirsek;

$$A = \int_a^b \phi(t) dt$$

olup bu denklem $\phi(x) = f(x) + \mu A$ şeklini alır. Bu çözüm integral denklemini sağlaması gerekir. O halde

$$f(x) + \mu A = f(x) + \mu \int_a^b \{f(t) + \mu A\} dt$$

olur. Buradan gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$A = \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b A dt$$

$$A \left[1 - \mu \int_a^b dt \right] = \int_a^b f(t) dt$$

veya

$$A = \frac{1}{1 - \mu(b-a)} \int_a^b f(t) dt$$

bulunur. Buradan A 'nın anlamlı olması için $1 - \mu(b-a) \neq 0$ olmalıdır. Diğer taraftan $f(x)$ fonksiyonu verilmiş olduğundan integralin değeri de bilinmektedir. A için bulunan değer $\phi(x) = f(x) + \mu A$ denkleminde yerine koyulursa,

$$\phi(x) = f(x) + \mu \left[\frac{1}{1 - \mu(b-a)} \int_a^b f(t) dt \right]$$

$$= f(x) + \frac{\mu}{1 - \mu(b-a)} \int_a^b f(t) dt$$

olarak bulunur. $\mu = \lambda c$ değeri de yerine yazılırsa

$$\phi(x) = f(x) + \frac{\lambda c}{1 - \lambda c(b-a)} \int_a^b f(t) dt$$

sonucuna varılır. Görüldüğü gibi ikinci tarafta hep bilinen değerler olup $u(x)$ değeri doğrudan bulunabilecektir. Bu yöntem sadece Fredholm integral denkleminde kullanılır [3].

Örnek : $\phi(x) = 2x^2 + \lambda \int_0^1 5\phi(t) dt$ sabit çekirdekli integral denkleminin çözümünü bulalım.

$A = \int_0^1 \phi(t) dt$ olarak alınırsa $\phi(x) = 2x^2 + 5\lambda A$ olur. Bu değeri denkleme yerine

koyarsak;

$$2x^2 + 5\lambda A = 2x^2 + 5\lambda \int_0^1 (2t^2 + 5\lambda A) dt$$

ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^1 t^2 dt + 5\lambda A \int_0^1 dt \\ &= 2 \left(\frac{t^3}{3} \Big|_0^1 \right) + 5\lambda A(1-0) \end{aligned}$$

$$A(1-5\lambda) = \frac{2}{3}$$

olup buradan

$$A = \frac{2}{3(1-5\lambda)}$$

bulunur. Bu ifade $\phi(x) = 2x^2 + 5\lambda A$ ifadesinde yerine koyulursa

$$\phi(x) = 2x^2 + \frac{10\lambda}{3(1-5\lambda)}$$

çözümüne ulaşılır.

4.1.2. Dejenere çekirdekli integral denklemler

Bir integral denklemde $K(x, t)$ çekirdeği;

$$K(x, t) = r(x)s(t)$$

şeklinde ise bu çekirdeğe dejenere çekirdek denir. Bu şekilde bir çekirdek fonksiyonuna sahip olan integral denklem;

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b r(x)s(t)\phi(t)dt$$

yazılır ve bu denklemde $r(x)$, t 'den bağımsız olduğu için

$$\phi(x) = f(x) + \lambda r(x) \int_a^b s(t)\phi(t)dt$$

şeklinde düzenlenebilir. Dejenere çekirdekli integral denklemleri çözümünü sabit çekirdekli integral denklemlerde olduğu gibi düşünürsek, A integralin sabit değeri olmak üzere

$$A = \int_a^b s(t)\phi(t)dt$$

alındığında

$$\phi(x) = f(x) + \lambda Ar(x)$$

şeklini yazılabilir. Bulunan bu ifade çözümdür. Bu durumda;

$$f(x) + \lambda Ar(x) = f(x) + \lambda r(x) \int_a^b \{f(t) + \lambda Ar(t)\} s(t) dt$$

olup gerekli sadeleştirme yapılırsa;

$$A \left[1 - \lambda \int_a^b r(t)s(t) dt \right] = \int_a^b f(t)s(t) dt \quad \text{ve} \quad 1 - \lambda \int_a^b r(t)s(t) dt \neq 0$$

olmak üzere

$$A = \frac{\int_a^b f(t)s(t) dt}{1 - \lambda \int_a^b r(t)s(t) dt}$$

eşitliği bulunur. Bu eşitliğin sağ tarafındaki integraller $f(x)$, $r(x)$ ve $s(x)$ bilinen fonksiyonlar olduklarından hesaplanabilirler. Öyleyse A belirlenebilecektir. Bu sonuç kullanılırsa $u(x)$ çözüm fonksiyonu;

$$\phi(x) = f(x) + \frac{\lambda \int_a^b f(t)s(t) dt}{1 - \lambda \int_a^b r(t)s(t) dt} r(x)$$

olarak bulunur. Bu sonuç dejenere çekirdekli Fredholm integral denkleminin çözüm denklemdir.

Örnek : $\phi(x) = x + \int_0^1 e^{x-t} \phi(t) dt$ integral denklemini çözelim.

Verilen integral denklemde çekirdek fonksiyonu

$$K(x, t) = e^{x-t} = e^x e^{-t}$$

şeklindedir. Böylelikle çekirdek fonksiyon dejenere çekirdek tipli olur. Burada $r(x)s(t) = e^x e^{-t}$ eşitliğinden dolayı $r(x) = e^x$ ve $s(t) = e^{-t}$ olarak belirlenir. Verilen integral denklemde integral t 'ye göre alınacağından

$$\phi(x) = x + e^x \int_0^1 e^{-t} \phi(t) dt$$

şeklinde yazılır ve $A = \int_0^1 e^{-t} \phi(t) dt$ olarak alınırsa denklem

$$\phi(x) = x + Ae^x$$

biçiminde yazılabilir. Bulunan bu ifadeyi denklemde yerine yazarsak

$$x + e^x A = x + e^x \int_0^1 e^{-t} \{t + e^{-t} A\} dt$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadeyi düzenlersek

$$A = \int_0^1 te^{-t} dt + A \int_0^1 e^{-2t} dt$$

olarak bulunur. Bulunan iki integrali ayrı ayrı çözersek

$$\int_0^1 te^{-t} dt = (-t-1)e^{-t} \Big|_0^1 = (-2)e - (-1) = 1 - 2e$$

$$\int_0^1 e^{-2t} dt = -\frac{1}{2}e^{-2t} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2}(e^{-2} - 1)$$

elde edilir. O halde

$$A = 1 - 2e - A \frac{1}{2}(e^{-2} - 1)$$

eşitliğinden $A = \frac{2e^2(1-2e)}{1+e^2}$ ifadesi bulunur. Bu değeri $\phi(x) = x + Ae^x$ ifadesinde yerine yazarsak;

$$\phi(x) = x + \frac{2e^2(1-2e)}{1+e^2} e^x$$

çözümüne ulaşırız.

4.1.3. Dejenere çekirdekli 2.tip fredholm integral denklemlerinin çözümleri için bir genel yöntem

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) \phi(t) dt \quad (4.1)$$

şeklindeki 2.Tip Fredholm integral denklemini göz önüne alalım. $K(x,t)$ çekirdeğini parçalanabilir olarak kabul edersek çekirdek fonksiyonu;

$$K(x,t) = \sum_{j=1}^n a_j(x) b_j(t)$$

şeklinde alınabilir. Bu ifadeyi Eş. 4.1' de yerine koyarsak,

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^n a_j(x) \int_a^b b_j(t) \phi(t) dt$$

ifadesi yazılabilir ve integralin sınırları sabit olduğundan integralin değerini c_j gibi bir sabitle gösterirsek,

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^n c_j a_j(x) \quad (4.2)$$

elde edilir. Burada dikkat edilirse denklemde bulunan $\phi(x)$ değeri, c_j katsayıları bilindiği takdirde, Eş.4.1' in bir çözümünü vermektedir. İhtiyacımız olan c_j katsayılarını aşağıdaki şekilde hesaplayabiliriz [3]. Eş. 4.2' yi $b_i(x)$ ile çarpıp integralini alırsak,

$$\int_a^b \phi(x) b_i(x) dx = \int_a^b f(x) b_i(x) dx + \lambda \sum_{j=1}^n c_j \int_a^b a_j(x) b_i(x) dx$$

veya buna denk olarak

$$c_i = f_i + \lambda \sum_{j=1}^n c_j a_{ij}$$

elde edilir. Sonuç olarak $c_1, c_2, \dots, c_n$ bilinmeyen değişkenlerine ve

$$c_i = f_i + \lambda \sum_{j=1}^n c_j a_{ij}, \quad 1 \leq i \leq n$$

şeklindeki n tane denkleme sahip olan lineer sisteme sahip oluruz. Bulunan değerlerin matris formu ise aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$(I - \lambda A) \vec{c} = \vec{f}$$

$\vec{A}$, $\vec{c}$ ve $\vec{f}$ ifadelerinin açık şekli,

$$\vec{A} = a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ . \\ . \\ . \\ f_n \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ . \\ . \\ . \\ c_n \end{pmatrix}$$

Örnek : $f(t)$, $[-1,1]$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$x(t) - \lambda \int_{-1}^1 (ts^2 + st^2)x(s)ds = f(t)$$

integral denklemini çözelim.

Verilen integral denklemdeki çekirdek

$$a_1(t) = t, \quad b_1(s) = s^2, \quad a_2(t) = t^2, \quad b_2(s) = s$$

şeklinde alınabilir burada; $K(t,s) = K(s,t)$ olduğundan simetrik çekirdeğe sahip bir denklemdir.

$$a_{ij} = \int_a^b a_j(s)b_i(s)ds \quad \text{ve} \quad f_i = \int_a^b f(s)b_i(s)ds$$

formüllerini ele alıp a_{ij} ve f_i ifadelerini hesaplayalım.

$$a_{11} = \int_{-1}^1 a_1(s)b_1(s)ds = \int_{-1}^1 s.s^2ds = \int_{-1}^1 s^3ds = \left(\frac{s^4}{4} \Big|_{-1}^1 \right) = \frac{1}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = 0$$

$$a_{11} = 0$$

$$a_{12} = \int_{-1}^1 a_2(s)b_1(s)ds = \int_{-1}^1 s^2.s^2ds = \int_{-1}^1 s^4ds = \left(\frac{s^5}{5} \Big|_{-1}^1 \right) = \frac{1}{5} - \frac{(-1)^5}{5} = \frac{2}{5}$$

$$a_{12} = \frac{2}{5}$$

$$a_{21} = \int_{-1}^1 a_1(s)b_2(s)ds = \int_{-1}^1 ssds = \int_{-1}^1 s^2ds = \left(\frac{s^3}{3} \Big|_{-1}^1 \right) = \frac{1}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}$$

$$a_{21} = \frac{2}{3}$$

$$a_{22} = \int_{-1}^1 a_2(s)b_2(s)ds = \int_{-1}^1 s^2 s ds = \int_{-1}^1 s^3 ds = \left(\frac{s^4}{4} \Big|_{-1}^1 \right) = \frac{1}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = 0$$

$$a_{22} = 0$$

$$f_1 = \int_{-1}^1 f(s)s^2 ds \quad \text{ve} \quad f_2 = \int_{-1}^1 f(s)s ds$$

şeklinde elde edilir. Bulunan değerler aşağıdaki lineer denklem sisteminde yerine yazılacaktır.

$$(1 - \lambda a_{11})c_1 - \lambda a_{12}c_2 - \dots - \lambda a_{1n}c_n = f_1$$

$$-\lambda a_{21}c_1 + (1 - \lambda a_{22})c_2 - \dots - \lambda a_{2n}c_n = f_2$$

.

.

.

$$-\lambda a_{n1}c_1 - \lambda a_{n2}c_2 - \dots + (1 - \lambda a_{nn})c_n = f_n$$

Bu lineer denklem sisteminde problem, $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ değerlerinin bulunmasına dönüşmüştür. Bu durumda

$$(1 - \lambda 0)c_1 - \lambda \frac{2}{5}c_2 = f_1$$

$$-\frac{2}{3}\lambda c_1 + (1 - \lambda 0)c_2 = f_2$$

ifadesi elde edilir. İşlemler yapıldıktan sonra

$$c_1 - \frac{2\lambda}{5}c_2 = f_1$$

$$-\frac{2\lambda}{3}c_1 + c_2 = f_2$$

bulunur. Bu durumda determinant

$$\Delta(\lambda) = 1 - \frac{4\lambda^2}{15}$$

bulunur. $c_i = \frac{\Delta_i(f)}{\Delta(\lambda)}$ ifadesinden dolayı $\Delta(\lambda)$ değerinin sıfır olmaması

gerekmektedir. Yani $\lambda \neq \pm \frac{\sqrt{15}}{2}$ için oluşan sistemin her $c = (c_1, c_2)$ için tek bir çözüm vardır.

$$c_1 = \frac{\Delta_1(f)}{\Delta(\lambda)}, \quad c_2 = \frac{\Delta_2(f)}{\Delta(\lambda)}$$

ifadelerinden;

$$c_1 = \frac{f_1 + \frac{2}{5}\lambda f_2}{1 - \frac{4}{15}\lambda^2} \quad \text{ve} \quad c_2 = \frac{\frac{2}{3}\lambda f_1 + f_2}{1 - \frac{4}{15}\lambda^2}$$

çözümü vardır. Diğer yandan integral denklemin çözümü;

$$x(t) = f(t) + \lambda \sum_{j=1}^n c_j a_j(t) \Rightarrow x(t) = f(t) + \lambda c_1 a_1(t) + \lambda c_2 a_2(t)$$

şeklindedir. Bulunan ifadeleri yerine koyarak çözümü bulabiliriz. O halde $\forall f \in C[-1, 1]$ için tek bir

$$x(t) = f(t) + c_1 \lambda t + c_2 \lambda t^2$$

çözümü vardır. Buradan,

$$x(t) = f(t) + \frac{f_1 + \frac{2}{5}\lambda f_2}{1 - \frac{4}{15}\lambda^2} \lambda t + \frac{\frac{2}{3}\lambda f_1 + f_2}{1 - \frac{4}{15}\lambda^2} \lambda t^2$$

çözümünü buluruz.

4.1.4. İtere çekirdek

Genel olarak integral denklemlerde $K(x, t)$ ile gösterdiğimiz bir çekirdek fonksiyon bulunmaktadır. Bu çekirdeğin; $K_2(x, t), K_3(x, t), \dots, K_n(x, t)$ ile gösterilen ve sırasıyla 2. mertebeden, 3. mertebeden, $\dots$, n . mertebeden itere çekirdek denilen değişik şekilleri de tanımlanır. İlk itere çekirdek verilen çekirdek fonksiyonuna eşit olduğu kabul edilir. Yani,

$$K_1(x, t) = K(x, t)$$

şeklindedir. 2. mertebeden bir itere çekirdek, z bir değişken olmak üzere,

$$K_2(x, t) = \int_a^b K(x, z) K_1(z, t) dz = \int_a^b K(x, z) K(z, t) dz$$

yazılır. 3. mertebeden bir itere çekirdek ise;

$$\begin{aligned} K_3(x, t) &= \int_a^b K(x, z_1) K_2(z_1, t) dz_1 \\ &= \int_a^b K(x, z_1) \left[\int_a^b K(z_1, z_2) K(z_2, t) dz_2 \right] dz_1 \\ &= \int_a^b \int_a^b K(x, z_1) K(z_1, z_2) K(z_2, t) dz_2 dz_1 \end{aligned}$$

şeklinde ifade etmek mümkündür. Burada görüldüğü gibi itere çekirdekleri bulmak için bir önceki itere çekirdeğin bilinmesi gerekmektedir. Bu hesaplamalar sonucunda genel olarak n . mertebenden bir itere çekirdek;

$$K_n(x, t) = \int_a^b \dots (n-1) \dots \int_a^b K(x, z_1) K(z_1, z_2) \dots K(z_{n-1}, t) dz_{n-1} \dots dz_2 dz_1$$

bağıntısı ile bulunabilir. İtere çekirdeğin bir başka ifadesi ise h ve k pozitif tamsayılar olmak üzere;

$$K_{(h+k)}(x, t) = \int_a^b K_{(h)}(x, z) K_{(k)}(z, t) dz$$

veya

$$K_{(h)}(x, t) = \int_a^b K_{(k)}(x, z) K_{(h-k)}(z, t) dz$$

olarak verilir. Bu verilen tanım bir önceki tanıma uymaktadır. Burada $K(x, t)$ çekirdeğin yeni değişkenler üretmek süreci ile parçalanabileceği ve böylece daha yüksek mertebeden itere çekirdeklerin yazılabileceği anlaşılmaktadır. Yukarıda dikkat edilirse yeni bulunan değişken sayısı ile itere çekirdekteki integral sayısı birbirine eşittir. Yani ne kadar çok değişken olursa o kadar integral katı ortaya çıkacaktır. Şimdi örnekler vererek itere çekirdek yöntemini inceleyebiliriz.

Örnek : $K(x, t) = xt$ $a = 0$ ve $b = 1$ sınır değerleri için itere çekirdeklerini bulalım.

$K_1(x, t) = K(x, t) = xt$ dir.

$$\begin{aligned} K_2(x, t) &= \int_a^b K(x, z) K(z, t) dz \\ &= \int_0^1 x z z t dz = x t \int_0^1 z^2 dz = \frac{xt}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_3(x, t) &= \int_a^b K(x, z)K_2(z, t)dz \\
&= \int_0^1 x z \frac{zt}{3} = \frac{xt}{3} \int_0^1 z^2 dz = \frac{xt}{9} = \frac{xt}{3^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_4(x, t) &= \int_a^b K(x, z)K_3(z, t)dz \\
&= \int_0^1 x z \frac{zt}{9} dz = \frac{xt}{3} \int_0^1 z^2 dz = \frac{xt}{3^3}
\end{aligned}$$

.

.

.

$$\begin{aligned}
K_n(x, t) &= \int_a^b K(x, z)K_{n-1}(z, t)dz \\
&= \frac{xt}{3^{n-1}}
\end{aligned}$$

şeklinde tüm itere çekirdekleri bulunabilir.

Örnek: $K(x, t) = x - t$ $a = 0$ ve $b = 1$ çekirdek fonksiyonu için itere çekirdekleri bulalım.

$K_1(x, t) = K(x, t) = x - t$ olarak alırsınız. Yani 1. mertebeden itere çekirdek, çekirdek fonksiyonu kendisidir.

$$\begin{aligned}
K_2(x, t) &= \int_a^b K(x, z)K(z, t)dz \\
&= \int_0^1 (x - z)(z - t)dz \\
&= \int_0^1 (xz - xt - z^2 + zt)dz \\
&= \frac{x}{2} - xt - \frac{1}{3} + \frac{t}{2} \\
&= \frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_3(x, t) &= \int_a^b K(x, z)K_2(z, t)dz \\
&= \int_0^1 (x-z) \left(\frac{z+t}{2} - zt - \frac{1}{3} \right) dz \\
&= \int_0^1 \left[x \left(\frac{z+t}{2} \right) - xzt - \frac{x}{3} - z \left(\frac{z+t}{2} \right) + z^2t + \frac{z^3}{3} \right] dz \\
&= \frac{x}{2} \left(\frac{1}{2} + t \right) - xt \frac{1}{2} - \frac{x}{3} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{t}{2} \right) + \frac{t}{3} + \frac{1}{6} \\
&= \frac{x}{4} + \frac{x}{2}t - \frac{xt}{2} - \frac{x}{3} - \frac{1}{6} - \frac{t}{4} + \frac{t}{3} + \frac{1}{6} \\
&= \frac{t-x}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_4(x, t) &= \int_a^b K(x, z)K_3(z, t)dz \\
&= \int_0^1 (x-z) \frac{t-z}{2} dz \\
&= \left(-\frac{1}{12} \right) \left(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_5(x, t) &= \int_a^b K(x, z)K_4(z, t)dz \\
&= -\frac{1}{12} \int_0^1 (x-z) \left(\frac{z-t}{2} - tz - \frac{1}{3} \right) dz \\
&= \frac{x-t}{12^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_6(x, t) &= \int_a^b K(x, z)K_5(z, t)dz \\
&= \int_0^1 (x-t) \left(\frac{z-t}{12^2} \right) dz \\
&= \frac{1}{12^2} \left(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3} \right)
\end{aligned}$$

Görüldüğü gibi çift indisli itere çekirdekler ile tek indisli çekirdekler birbirlerine benzemektedirler. Bu duruma bu şekilde devam edip genel bir ifade elde edilmek istenirse;

$k = 1, 2, 3, \dots$ değerleri için $n = 2k - 1$ ise

$$K_n(x, t) = K_{2k-1}(x, t) = \frac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}}(x - t)$$

$n = 2k$ ise

$$K_n(x, t) = K_{2k}(x, t) = \frac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}} \left(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3} \right)$$

şeklinde itere çekirdekler bulunur.

4.1.5. Ardışık yaklaşımlar metodu

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)u(y)dy \quad (4.3)$$

integral denklemini göz önüne alalım. İlk yaklaşım olarak $\lambda = 0$ düşünelim. $\lambda = 0$ için $u(x) = f(x)$ olup bunu $u_0(x)$ ile gösterelim. Eş. 4.3' de aynı notasyonu kullanmak gerekirse;

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)u_0(y)dy \quad (4.4)$$

denklemini elde edilir. Burada integral x in bir fonksiyonu olacağından bu integrali;

$$\phi_1(x) = \int_a^b K(x, y)u_0(y)dy \quad (4.5)$$

ile gösterdiğimiz takdirde Eş. 4.4 aşağıdaki gibi

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \phi_1(x) \quad (4.6)$$

yazılır. Aynı yazıma uygun olması bakımından

$$u_0(x) = f(x) = \phi_0(x) \quad (4.7)$$

olarak kabul edelim. Eş. 4.7' i , Eş. 4.6' da yerine yazarsak yani $f(x)$ yerine $\phi_0(x)$ yazarsak,

$$u_1(x) = \phi_0(x) + \lambda \phi_1(x) \quad (4.8)$$

elde edilir. Eş. 4.4' den yararlanarak,

$$u_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) u_1(y) dy \quad (4.9)$$

şeklinde alınabilir. Buradan Eş. 4.8 , Eş. 4.9' da yerine yazılırsa,

$$u_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) [\phi_0(y) + \lambda \phi_1(y)] dy$$

$$u_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) \phi_0(y) dy + \lambda^2 \int_a^b K(x, y) \phi_1(y) dy$$

olup gerekli işlemler yapıldığında ve

$$\phi_1(x) = \int_a^b K(x, y) \phi_0(y) dy, \quad \phi_2(x) = \int_a^b K(x, y) \phi_1(y) dy$$

olduğu düşünüldüğünde,

$$u_2(x) = \phi_0(x) + \lambda \phi_1(x) + \lambda^2 \phi_2(x)$$

ifadesine ulaşılır. Böyle devam edildiğinde

$$u_0(x), u_1(x), u_2(x), \dots, u_{n-1}(x), u_n(x)$$

şeklinde bir fonksiyon dizisi elde edilir. Sonuçta;

$$u_n(x) = \phi_0(x) + \lambda \phi_1(x) + \lambda^2 \phi_2(x) + \dots + \lambda^n \phi_n(x)$$

şeklinde bir seri oluşacaktır. $n = 1, 2, 3, \dots$ için,

$$\phi_0(x) = f(x) \quad \text{ve} \quad \phi_n(x) = \int_a^b K(x, y) \phi_{n-1}(y) dy$$

şeklinde formülü bulunmuş olur.

Örnek : $u(x) = x + \lambda \int_a^b x u(s) ds$ integral denklemi $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$ değerleri için ardışık yaklaşımlar yöntemi ile çözümünü bulalım.

$$u(x) = \phi_0(x) + \lambda \phi_1(x) + \lambda^2 \phi_2(x) + \dots + \lambda^n \phi_n(x) \quad (4.10)$$

şeklinde bir çözüm arıyoruz. Bu serinin hesaplanması için

$$\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)$$

fonksiyonlarının değerlerinin hesaplanması gerekmektedir. Burada

$$\phi_0(x) = f(x) \quad \text{ve} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \text{ için}$$

$$\phi_n(x) = \int_a^b K(x, s) \phi_{n-1}(s) ds$$

şeklinde iterasyon yaparak değerleri hesaplayalım.

$K(x, s) = x$ ve $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$ şeklindedir.

$$\phi_0(x) = f(x) = x$$

$$\phi_1(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} K(x, s) \phi_0(s) ds$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} xs \, ds = x \int_0^{\frac{1}{2}} s \, ds$$

$$= x \frac{s^2}{2} \Big|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{x}{8}$$

$$\phi_2(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} K(x, s) \phi_1(s) ds$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} x \frac{s}{8} \, ds$$

$$= x \frac{s^2}{16} \Big|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{x}{8^2}$$

$$\phi_3(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} K(x, s) \phi_2(s) ds$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} x \frac{s}{64} \, ds$$

$$= x \frac{s^2}{128} \Big|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{x}{8^3}$$

bu şekilde devam edilirse

$$\phi_n(x) = \frac{x}{8^n}$$

olarak bulunur. Bu değerleri Eş. 4.10' da yerine yazarsak

$$\begin{aligned} u(x) &= x + \lambda \frac{x}{8} + \lambda^2 \frac{x}{8^2} + \dots + \lambda^n \frac{x}{8^n} \\ &= x + \frac{\lambda x}{8} \left[1 + \frac{\lambda}{8} + \frac{\lambda^2}{8^2} + \dots + \frac{\lambda^{n-1}}{8^{n-1}} \right] \end{aligned}$$

olup parantez içindeki geometrik serinin ortak çarpanı

$$q = \frac{\lambda}{8}$$

olup bu serinin toplamı

$$T = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{8}} = \frac{8}{8 - \lambda}$$

şeklindedir. Bu ifadeyi seride yerine yazarsak

$$\begin{aligned} u(x) &= x + \frac{\lambda x}{8} \frac{8}{8 - \lambda} \\ &= x + \frac{\lambda x}{8 - \lambda} \\ &= \frac{8x - \lambda x + \lambda x}{8 - \lambda} \\ &= \frac{8x}{8 - \lambda} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

4.1.6. Çözücü çekirdek

2.tip Fredholm integral denklemi

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)u(y)dy$$

biçimindedir. $K(x, y)$ çekirdeği dejenere çekirdek olarak kabul edilirse dejenere çekirdeğin genel hal durumundan faydalanılarak

$$D(x, t; \lambda) = \left[\left(\sum_{i=1}^n r_i(x) \sum_{j=1}^n \Delta_{ij} \right) s_i(t) \right]$$

şeklinde yazılır. Buradan

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)} f(t)dt$$

ifadesindeki $\frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)}$ oranı $R(x, t; \lambda)$ ile gösterilir ve buna çözücü çekirdek veya resolvant denir. Burada çözücü çekirdek,

$$R(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)}$$

şeklinde gösterilir. Bu ifadeyi yerine koyarsak

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t; \lambda) f(t)dt \quad (4.11)$$

biçiminde integral denklemi elde edilir.

4.1.7. Çekirdek ile çözücü çekirdek arasındaki ilişki

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt$$

fredholm integral denkleminde $t = y$ alırsak, integrasyon değişkeni y olur ve denklemi yeniden düzenleyip yazarsak,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) u(y) dy \quad (4.12)$$

ifadesi oluşur. Eş. 4.11 ve Eş. 4.12' i kullanarak $u(x)$ ' leri eşitlesek;

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) u(y) dy = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t; \lambda) u(t) dt$$

yazılır. Eşitliğin sol tarafındaki $u(y)$ ' yi Eş. 4.11' i kullanarak yazarsak,

$$\begin{aligned} \int_a^b K(x, y) \left[f(y) + \lambda \int_a^b R(y, t; \lambda) f(t) dt \right] dy &= \int_a^b R(x, t; \lambda) f(t) dt \\ \int_a^b K(x, y) \left[f(y) + \lambda \int_a^b R(y, t; \lambda) f(t) dt \right] dy - \int_a^b R(x, t; \lambda) f(t) dt &= 0 \\ \int_a^b \left[K(x, y) + \lambda \int_a^b K(x, y) R(y, t; \lambda) dy - R(x, t; \lambda) \right] f(t) dt &= 0 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada $f(t) \neq 0$ olacaktır. Bu ise köşeli parantezin içindeki ifadenin sıfır olmasıyla mümkündür. O halde

$$K(x, y) + \lambda \int_a^b K(x, y) R(y, t; \lambda) dy - R(x, t; \lambda) = 0$$

$$R(x, t; \lambda) = K(x, y) + \lambda \int_a^b K(x, y) R(y, t; \lambda) dy$$

elde edilir.

4.1.8. Çözücü çekirdeğin itere çekirdekler yardımıyla bulunması

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt$$

fredholm integral denklemini ele alalım. Ardışık yaklaşımlar metodunda kullandığımız eşitliği tekrardan göz önüne alırsak,

$$u(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \lambda^n$$

şeklinde olduğunu hatırlarız. Buradan

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \int_a^b K(x, t) \phi_0(t) dt \\ &= \int_a^b K_1(x, t) f(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2(x) &= \int_a^b K(x, t) \phi_1(t) dt \\ &= \int_a^b K_2(x, t) f(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_3(x) &= \int_a^b K(x, t) \phi_2(t) dt \\ &= \int_a^b K_3(x, t) f(t) dt \end{aligned}$$

elde edilir ve bu iterasyona devam ederek $\phi_n(x)$ fonksiyonları itere çekirdek yardımı ile bulunabilir. $K_n(x,t)$ itere çekirdekleri $n = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere

$$K_n(x,t) = \int_a^b K(x,z)K_{n-1}(z,t)dz$$

formülünü verebiliriz. Resolvanı bulmak için

$$u(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)\lambda^n$$

serisini kullanarak çözücü çekirdeğin eşitliğine benzetirsek,

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)\lambda^{n-1}$$

elde edilir. Çözücü çekirdeği de,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t;\lambda) f(t)dt$$

şeklinde tanımlamıştık. O halde resolvanı itere çekirdek yardımıyla

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x,t)\lambda^{n-1}$$

bağıntısı ile tanımlayabiliriz.

Örnek : $u(x) = x - 2 \int_0^1 (x-t)u(t)dt$ integral denklemini $R(x,t;\lambda)$ resolvanı

oluşturmak suretiyle bu denklemin çözümünü bulalım.

$K(x, t) = x - t$ çekirdek fonksiyonları için itere çekirdekler

$$K_1(x, t) = x - t$$

$$\begin{aligned} K_2(x, t) &= \int_a^b K(x, t_1) K_1(t_1, t) dt_1 \\ &= \int_0^1 (x - t_1)(t_1 - t) dt_1 \\ &= \frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_3(x, t) &= \int_a^b K(x, t_1) K_2(t_1, t) dt_1 \\ &= \int_0^1 (x - t_1) \left(\frac{t_1 + t}{2} - t_1 t - \frac{1}{3} \right) dt_1 \\ &= \frac{t - x}{12} \end{aligned}$$

.

.

.

$$K_n(x, t) = K_{2k-1}(x, t) = \frac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}} (x - t) \quad , \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$K_n(x, t) = K_{2k}(x, t) = \frac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}} \left(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3} \right) \quad , \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

çekirdeklerini daha önceden hesaplamıştık. Şimdi $\phi_n(x)$ ifadelerini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \int_0^1 K_1(x, t) f(t) dt \\ &= \int_0^1 (x - t)t dt \\ &= \frac{3x - 2}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_2(x) &= \int_0^1 K_2(x,t) f(t) dt \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3} \right) t dt \\
&= -\frac{x}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_3(x) &= \int_0^1 K_3(x,t) f(t) dt \\
&= \int_0^1 \left(\frac{t-x}{12} \right) t dt \\
&= \frac{3x-2}{6 \cdot 12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_4(x) &= \int_0^1 K_4(x,t) f(t) dt \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{1}{12} \right) \left(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3} \right) t dt \\
&= \frac{x}{12^2}
\end{aligned}$$

$$\phi_n(x) = \phi_{2k-1}(x) = \frac{3x-2}{6} \left(\frac{1}{12^{k-1}} \right) \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\phi_n(x) = \phi_{2k}(x) = (-1)^k \frac{x}{12^k} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

değerleri elde edilir. Bu değerleri de;

$$u(x) = \phi_0(x) + \lambda \phi_1(x) + \lambda^2 \phi_2(x) + \dots + \lambda^n \phi_n(x)$$

eşitliğinde yerine yazarak ardışık yaklaşımlar metoduyla verilen problemi çözebiliriz. Ancak burada resolvent yardımıyla örneğin çözümünü vereceğiz. O halde,

$$R(x, t; \lambda) = K_1(x, t) + \lambda K_2(x, t) + \lambda^2 K_3(x, t) + \dots + \lambda^{n-1} K_n(x, t) + \dots$$

şeklindedir. $\lambda = -2$ olduğu da göz önüne alınırsa;

$$R(x, t; \lambda) = x - t + (-2) \left(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3} \right) + (-2)^2 \left(\frac{t-x}{12} \right) + (-2)^3 \left[-\frac{1}{12} \left(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3} \right) \right] \\ + (-2)^4 \left(\frac{x-t}{12^2} \right) + \dots$$

$$R(x, t; \lambda) = \left(1 - \frac{2^2}{12} + \frac{2^4}{12^2} - \dots \right) (x-t) - 2 \left(1 - \frac{2^2}{12} + \frac{2^4}{12^2} - \dots \right) \left(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3} \right)$$

olup burada parantez içindeki serinin ortak çarpanı

$$q = -\frac{2^2}{12} = -\frac{1}{3}$$

şeklinde bulunur. Bu geometrik serinin toplamının değeri,

$$T = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3} \right)} = \frac{3}{4}$$

dir. Bu durumda resolvent

$$R(x, t; \lambda) = \frac{3}{4} (x-t) - 2 \frac{3}{4} \left(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3} \right) \\ = \frac{1}{2} (3xt - 3t + 1)$$

şeklinde bulunur. Çözüm ise,

$$u(x) = x - 2 \int_0^1 \frac{1}{2} \{1 + 3xt - 3t\} t \, dt$$

$$\begin{aligned}
&= x - x + 1 - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

4.1.9. Determinantlar yöntemi

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt \quad (4.13)$$

şeklindeki ikinci tip Fredholm integral denkleminin çözümünü

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t; \lambda) f(t) dt \quad (4.14)$$

formülü ile vermiştik ve $R(x, t; \lambda)$ fonksiyonu Eş. 4.13'ün Fredholm çözümü çekirdeği (resolvent) diye isimlendirmiştik. $D(\lambda) \neq 0$ olmak koşuluyla

$$R(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)} \quad (4.15)$$

bağıntısı ile tanımlamıştık. Burada $D(x, t; \lambda)$ ve $D(\lambda)$, λ cinsinden yazılmış kuvvet serileridir. Resolvanı hesaplamak için

$$D(x, t; \lambda) = K(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x, t) \lambda^n \quad (4.16)$$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n \lambda^n \quad (4.17)$$

formülleri kullanılır. İlk yaklaşım olarak $B_0(x,t) = K(x,t)$ olarak seçilir. $n = 1, 2, 3, \dots$ için diğer değerleri

$$B_n(x,t) = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b \begin{vmatrix} K(x,t) & K(x,t_1) & \dots & K(x,t_n) \\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1) & \dots & K(t_1,t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(t_n,t) & K(t_n,t_1) & \dots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

$$C_n = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) & \dots & K(t_1,t_n) \\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2) & \dots & K(t_2,t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(t_n,t_1) & K(t_n,t_2) & \dots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

formülleri ile hesaplanır. $D(x,t;\lambda)$ fonksiyonu fredholm minörü, $D(\lambda)$ fonksiyonu ise Fredholm determinantı olarak isimlendirilir. $B_n(x,t)$ ve C_n katsayıları Eş. 4.16 ve Eş. 4.17'de yerine yazılırsa bir seri elde edilir ve bu seriler genellikle yakınsaktırlar. İstenilen tüm değerler hesaplandıktan sonra Eş. 4.14' te yerine yazıp integral alınırsa aranan çözüm elde edilmiş olur.

Örnek : $u(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 x e^t u(t) dt$ integral denkleminin çözümünü determinantlar yöntemi ile bulalım.

$B_0(x,t) = K(x,t) = x e^t$ dir.

$$B_1(x,t) = \int \begin{vmatrix} K(x,t) & K(x,t_1) \\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1) \end{vmatrix} dt_1$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left| \begin{array}{cc} xe^t & xe^{t_1} \\ t_1 xe^t & t_1 xe^{t_1} \end{array} \right| dt_1 \\
&= \int_0^1 (xt_1 e^{t_1+t} - xt_1 e^{t_1+t}) dt_1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$B_2(x, t) = \int_0^1 \int_0^1 \left| \begin{array}{ccc} xe^t & xe^{t_1} & xe^{t_2} \\ t_1 xe^t & t_1 xe^{t_1} & t_1 xe^{t_2} \\ t_2 xe^t & t_2 xe^{t_1} & t_2 xe^{t_2} \end{array} \right| dt_1 dt_2 = 0$$

$n = 3, 4, \dots$ için $B_n(x, t) = 0$ olduğu rahatlıkla görülebilir. Şimdi de C_n 'leri bulalım.

$$\begin{aligned}
C_1 &= \int_0^1 K(t_1, t_1) dt_1 = \int_0^1 t_1 e^{t_1} dt_1 \\
&= e^{t_1} (t_1 - 1) \Big|_0^1 = 1
\end{aligned}$$

$$C_2 = \int_0^1 \int_0^1 \left| \begin{array}{cc} t_1 e^{t_1} & t_1 e^{t_2} \\ t_2 e^{t_1} & t_2 e^{t_2} \end{array} \right| dt_1 dt_2 = 0$$

ve diğer değerleri için de $C_n = 0$ olduğu görülebilir. O halde bu serilerin değerlerini yerine yazarsak Fredholm minörü

$$D(x, t; \lambda) = xe^t$$

şeklinde olup Fredholm determinanı da

$$D(\lambda) = 1 + (-1)1\lambda = 1 - \lambda$$

elde edilir. Bulunan bu değerler Eş. 4.15' te yerine yazılırsa

$$R(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)} = \frac{xe^t}{1 - \lambda}$$

sonucuna ulaşılır. Bu sonuç verilen problemin yani,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 x e^t u(t) dt \quad (\lambda \neq 1)$$

denkleminin çözümüdür. O halde

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{x e^t}{1 - \lambda} f(t) dt$$

yazılır. $f(x) = e^{-x}$ için

$$u(x) = e^{-x} + \frac{\lambda}{1 - \lambda} x$$

çözümü bulunur. Bu bölümde verilen tüm yöntemler analitik çözüm aradığımız için sadece özel problemlerin çözümünde kullanıldığına dikkat ediniz.

4.2. Volterra İntegral Denklemlerinin Çözüm Yöntemleri

Bu bölümde Volterra integral denklemlerinin çözüm yöntemlerini vereceğiz. Fredholm integral denklemindeki bazı metotlar Volterra integral denklemlerinin çözümü için kullanılabilir. Volterra integral denklemini Fredholm integral denkleminden ayıran tek fark integral sınırlarından birinin x gibi bir değişken olmasıdır. Bazı durumlarda bu özellik çözümü daha zorlaştıran bir faktör olarak ortaya çıkmaktadır.

4.2.1. Konvolisyon teoremi

$f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları $t \geq 0$ için tanımlanmış sürekli iki fonksiyon olsun. Bu iki fonksiyonun konvolisyonu

$$\phi(t) = \int_0^t f(t)g(t-\tau) d\tau \quad (4.18)$$

şeklinde olup $\phi(t)$ fonksiyonu $t \geq 0$ da tanımlanmış ve sürekli bir fonksiyondur. Eş.4.18' e Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\mathcal{L}\{\phi(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \mathcal{L}\{g(t)\} \quad (4.19)$$

ifadesi bulunur. Bir başka ifadeyle; iki fonksiyonun konvolisyonuna Laplace dönüşümü uygulanırsa, bu iki fonksiyonun ayrı ayrı Laplace dönüşümlerinin çarpımına eşittir. Çekirdeği $t-\tau$ (ya da $x-\tau$)' nun fonksiyonu olan aşağıdaki ikinci tip Volterra integral denklemini ele alırsak,

$$\phi(t) = f(t) + \int_0^t K(x-\tau)\phi(\tau) d\tau \quad (4.20)$$

integral denklemi konvolisyon tipi integral denklem olarak ifade edilir. O halde

$$\mathcal{L}\{\phi(t)\} = \Phi(s), \quad \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s), \quad \mathcal{L}\{K(t)\} = \tilde{K}(s)$$

olsun Eş. 4.20' deki integral denkleminin her iki yanına Laplace dönüşümü alıp konvolisyon teoremini uygularsak

$$\Phi(s) = F(s) + \tilde{K}(s)\Phi(s) \Rightarrow \Phi(s) = \frac{F(s)}{1 - \tilde{K}(s)}, \quad (\tilde{K}(s) \neq 1) \quad (4.21)$$

buluruz. $\Phi(s)$ nin ters dönüşümü olan $\phi(x)$ fonksiyonu Eş. 4.20' deki integral denklemin çözümü olur [5].

4.2.2. Laplace dönüşümü ile volterra integral denklemlerinin çözümü

$f(t)$ ve $g(t)$ bilinen fonksiyonlar olmak üzere Volterra integral denklemleri

$$\phi(t) = f(t) + \int_0^t \phi(\tau) g(t-\tau) d\tau \quad (4.22)$$

şeklindedir. Eş. 4.22' nin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulayıp $\Phi(s)$ değeri yalnız bırakılır. Ardından $\Phi(s)$ fonksiyonuna ters Laplace dönüşümünü uygulayarak Eş.4.22' nin çözümü elde edilir.

Örnek: $\phi(t) = 5t - e^t - \int_0^t \phi(\tau) e^{t-\tau} d\tau$ Volterra integral denklemini Konvolisyon teoremi yardımıyla çözelim.

Laplace dönüşümü yapılırsa, konvolisyon teoreminden,

$$\mathcal{L}\{\phi(t)\} = 5\mathcal{L}\{t\} - \mathcal{L}\{e^t\} - \mathcal{L}\{\phi(t)\} \mathcal{L}\{e^t\}$$

elde edilir. Aynı ayrı değerleri hesaplayıp yerine yazarsak,

$$\Phi(s) = 5\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s-1} - \Phi(s)\frac{1}{s-1}$$

$$\Phi(s)\left(1 + \frac{1}{s-1}\right) = \frac{5}{s^2} - \frac{1}{s-1}$$

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \frac{5(s-1)}{s^3} - \frac{s-1}{s(s-1)} \\ &= \frac{5}{s^2} - \frac{5}{s^3} - \frac{1}{s} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan ters Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$\begin{aligned} \phi(t) &= 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} \\ &= 5t - \frac{5t^2}{2} - 1 \end{aligned}$$

çözümü elde edilir.

Örnek: $\phi(t) = \sin t + 2 \int_0^t \cos(t-\tau)\phi(\tau) d\tau$ şeklindeki Volterra integral denklemini

konvolisyon teoremi yardımıyla çözelim.

Konvolisyon teoreminden;

$$\mathcal{L}\{\phi(t)\} = \mathcal{L}\{\sin t\} + 2\mathcal{L}\{\phi(t)\} \mathcal{L}\{\cos t\}$$

$$\Phi(s) = \frac{1}{s^2+1} + 2\frac{s}{s^2+1}\Phi(s)$$

elde edilir. Buradan $\Phi(s)$ çekilirse

$$\Phi(s) \left[1 - \frac{2s}{s^2+1} \right] = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\Phi(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

bulunur. Her iki tarafa ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-1)^2} \right\}$$

$$\phi(t) = te^t$$

çözümü elde edilir.

Örnek: Aşağıdaki integral denklem sistemini çözelim.

$$\phi_1(t) = 1 - 2 \int_0^t e^{2(t-\tau)} \phi_1(\tau) d\tau + \int_0^x \phi_2(\tau) d\tau \quad (4.23)$$

$$\phi_2(t) = 4t - \int_0^x \phi_1(\tau) d\tau + 4 \int_0^x (t-\tau) \phi_2(\tau) d\tau \quad (4.24)$$

Her iki denklemin de her iki yanının Laplace dönüşümünü alalım ve Konvolisyon teoreminden;

$$\mathcal{L}\{\phi_1(t)\} = \mathcal{L}\{1\} - 2\mathcal{L}\{\phi_1(t)\}\mathcal{L}\{e^{2t}\} + \mathcal{L}\{1\}\mathcal{L}\{\phi_2(t)\}$$

$$\Phi_1(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s-2}\Phi_1(s) + \frac{1}{s}\Phi_2(s)$$

Eş. 4.23 'den elde edilir.

$$\mathcal{L}\{\phi_2(t)\} = 4\mathcal{L}\{t\} - \mathcal{L}\{1\}\mathcal{L}\{\phi_1(t)\} + 4\mathcal{L}\{t\}\mathcal{L}\{\phi_2(t)\}$$

$$\Phi_2(s) = 4\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\Phi_1(s) + 4\frac{1}{s^2}\Phi_2(s)$$

Eş. 4.24'den elde edilir. O halde alt alta yazarsak,

$$\begin{cases} \Phi_1(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s-2}\Phi_1(s) + \frac{1}{s}\Phi_2(s) \\ \Phi_2(s) = 4\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\Phi_1(s) + 4\frac{1}{s^2}\Phi_2(s) \end{cases} \quad (4.25)$$

elde edilir. Bu denklem sistemi çözülürse

$$\Phi_1(s) = \frac{s}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$\Phi_2(s) = \frac{3s+2}{(s-2)(s+1)^2} = \frac{8}{9} \frac{1}{s-2} + \frac{1}{3} \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{8}{9} \frac{1}{s+1}$$

şeklindedir. $\Phi_1(s)$ ve $\Phi_2(s)$ ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\mathcal{L}^{-1}\{\Phi_1(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}$$

$$\phi_1(t) = e^{-t} - te^{-t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\Phi_2(s)\} = \frac{8}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} - \frac{8}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$\phi_2(t) = \frac{8}{9}e^{2t} - \frac{8}{9}e^{-t} + \frac{1}{3}te^{-t}$$

elde edilir. Bulduğumuz bu $\phi_1(t)$ ve $\phi_2(t)$ fonksiyonları istenen çözüm fonksiyonlardır.

4.2.3. Gama ve Beta fonksiyonları

Gama fonksiyonu veya 2. tip euler integrali $\Gamma(x)$ ile gösterilir ve

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (4.26)$$

ile tanımlanır. Burada x , $\text{Re}(x) > 0$ olan herhangi bir kompleks sayıdır. Özel olarak

$x = 1$ için

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1 \quad (4.27)$$

bulunur. Eş. 4.26' a kısmi integrasyon uygulanırsa

$$e^{-t} = u, \quad t^{x-1} dx = dv$$

alalım. O halde

$$-e^{-t} dt = du, \quad v = \frac{1}{x} t^x$$

şeklindedir. İntegralin çözümünden,

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x+1)$$

ifadesi elde edilir. Buradan gama fonksiyonunun temel özelliklerinden birini elde edeceğiz. Yani

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x) \quad (4.28)$$

eşitliği elde edilir. Eş. 4.27' de kullanarak

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1 \Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2 \Gamma(2) = 2!$$

$$\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3 \Gamma(3) = 3!$$

ve genel olarak

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (4.29)$$

bulunur. Beta fonksiyonu da

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (4.30)$$

bağıntısı ile tanımlanmıştır. Burada $\text{Re}(x) > 0$, $\text{Re}(y) > 0$ olarak alınır. Beta ve gama fonksiyonları arasında önemli bir bağıntı

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (4.31)$$

şeklindedir. Beta fonksiyonu matematikte euler integralinin ilk türüdür. Ayrıca beta fonksiyonu simetriktir.

4.2.4. Volterra integral denklemlerinin gama ve beta fonksiyonları yardımıyla çözülmesi

1. tip Volterra integral denkleminin

$$x^m = \int_0^x (x-t)^n u(t) dt \quad (4.32)$$

şeklindeki özel bir durumunu göz önüne alalım. Bu tip denklemler gama- beta fonksiyonları yardımıyla çözülebilir. Yukarıdaki integral denklem için $m \geq 0$, $n > -1$ olup m ve n reel sayılardır. Bu integral denklemin her iki yanını $r > -1$ ve reel olmak üzere $(z-x)^r$ ile çarpalım ve x ' e göre 0 ile z arasındaki integralini alalım.

$$\int_0^z (z-x)^r \left[\int_0^x (x-t)^n u(t) dt \right] dx = \int_0^x x^m (z-x)^r dx \quad (4.33)$$

olur. Burada $x = vz$ alalım. Eş. 4.33' ün sağındaki integral $(m+r+1 > m \geq 0)$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \int_0^x x^m (z-x)^r dx &= z^{m+r+1} \int_0^1 v^m (1-v)^r dv \\ &= z^{m+r+1} B(m+1, r+1) \\ &= z^{m+r+1} \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(r+1)}{\Gamma(m+r+2)} \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Eşitliğin birinci yanının hesabı yapılırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^z (z-x)^r \left[\int_0^x (x-t)^n u(t) dt \right] dx &= \int_0^z \left[\int_0^x (z-x)^r (x-t)^n u(t) dt \right] dx \\ &= \int_0^z \left[\int_0^x (z-x)^r (x-t)^n dx \right] u(t) dt \end{aligned}$$

şeklinde yeniden düzenlenerek yazılabilir. Burada $x = t + v(z - t)$ alalım.

$$\begin{aligned} \int_0^z (z-x)^r (x-t)^n dx &= (z-t)^{n+r+1} \int v^n (1-v)^r dv \\ &= (z-t)^{n+r+1} B(n+1, r+1) \\ &= (z-t)^{n+r+1} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(r+1)}{\Gamma(n+r+2)} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(r+1)}{\Gamma(n+r+2)}$ çarpanı sabit olacağından integral dışına atılarak ve $\Gamma(r+1)$ her iki yandan sadeleştirilerek,

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+r+2)} \int (z-t)^{n+r+1} u(t) dt = z^{m+r+1} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+r+2)}$$

bulunur. $n+r+1 = h$ olacak şekilde negatif olmayan bir h sayısı bulunacaktır. Buna göre

$\Gamma(n+r+2) = \Gamma(h+1)$ olur. Diğer taraftan $r = h - n - 1$ yazılacağından $m+r+2 = m+h-n+1$ olup

$$\Gamma(m+r+2) = \Gamma(m+h-n+1)$$

demektir. İfade yeniden düzenlenirse,

$$\int (z-t)^h u(t) dt = z^{m+h-n} \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(h+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+h-n+1)}$$

olarak bulunur. Gama fonksiyonunun özelliklerinden dolayı $\Gamma(h+1) = h!$ alınırsa;

$$\int \frac{(z-t)^h}{h!} u(t) dt = z^{m+h-n} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+h-n+1)}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan z ' ye göre her iki tarafın $h+1$ defa türev alınırsa,

$$u(x) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m-n)} z^{m-n-1} \quad (4.34)$$

bulunur. Bulunan bu ifade integral denkleminin çözümüdür. Dolayısıyla Volterra integral denklemlerini Γ fonksiyonları yardımıyla çözebiliriz [3].

Örnek: $\frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 u(t) dt = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ integral denkleminin çözümünü Γ

fonksiyonu yardımıyla çözelim.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$\sin x - x + \frac{x^3}{3!} = \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

yazılabilir. Bu eşitlik kullanılarak integral denklemi

$$\frac{1}{2} \int_0^x (x-z)^2 u(z) dz = \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

$$\int_0^x (x-z)^2 u(z) dz = \frac{2}{5!} x^5 - \frac{2}{7!} x^7 + \frac{2}{9!} x^9 - \dots$$

şeklinde yazılabilir. Böylece ikinci taraf cebirsel toplam şekline dönüştürülmüş olup bunun her terimi için ayrı ayrı çözüm araştırılacaktır. Sağ taraftaki terimler sırasıyla $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots$ şeklinde çözüm fonksiyonlarını gösterebilirsin. O halde

$$u(x) = \frac{2}{5!} \phi_1(x) - \frac{2}{7!} \phi_2(x) + \frac{2}{9!} \phi_3(x) - \dots$$

toplamı ile bulunabilecektir. $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots$ ara çözümleri ayrı ayrı hesaplamamız gerekir.

$\phi_1(x)$ için $n = 2, m = 5$ ve

$$\Gamma(m+1) = \Gamma(6) = 5!$$

$$\Gamma(n+1) = \Gamma(3) = 2!$$

$$\Gamma(m-n) = \Gamma(3) = 2!$$

$$m-n-1 = 5-2-1 = 2$$

olup $\phi_1(x) = \frac{5!}{2!2!} x^2$ bulunur.

$\phi_2(x)$ için $n = 2, m = 7$ ve

$$\Gamma(m+1) = \Gamma(8) = 7!$$

$$\Gamma(n+1) = \Gamma(3) = 2!$$

$$\Gamma(m-n) = \Gamma(5) = 4!$$

$$m-n-1 = 7-2-1 = 4$$

olup $\phi_2(x) = \frac{7!}{2!4!} x^4$ bulunur.

$\phi_3(x)$ için $n = 2, m = 9$ ve

$$\Gamma(m+1) = \Gamma(10) = 9!$$

$$\Gamma(n+1) = \Gamma(3) = 2!$$

$$\Gamma(m-n) = \Gamma(7) = 6!$$

$$m-n-1 = 7-1 = 6$$

olup $\phi_3(x) = \frac{9!}{2!6!}x^6$ bulunur. Bulduğumuz değerleri yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{2}{5!} \frac{5!}{2!2!} x^2 - \frac{2}{7!} \frac{7!}{2!4!} x^4 + \frac{2}{9!} \frac{9!}{2!6!} x^6 - \dots \\ &= \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} + \dots \\ &= 1 - \cos x \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

4.2.5. Volterra integral denklemlerinin çözücü çekirdek(resolvent) yardımıyla çözülmesi

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t) dt$$

şeklindeki 2. Tip Volterra integral denklemini göz önüne alalım. $K(x,t)$ fonksiyonu $0 \leq x \leq a$, $0 \leq t \leq x$ ve $f(x)$ fonksiyonu $0 \leq x \leq a$ aralıklarda süreklidirler. Bu denklemi tam seri şeklinde açılırsa,

$$u(x) = u_0(x) + \lambda u_1(x) + \lambda^2 u_2(x) + \dots + \lambda^n u_n(x)$$

serisi elde edilir. Bu seri λ parametresine göre kuvvet serisidir. Bu seriyi yukarıdaki integral denklemde $u(x)$ yerine yazalım;

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0(x) + \lambda u_1(x) + \lambda^2 u_2(x) + \dots + \lambda^n u_n(x) + \dots \\ &= f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t) \cdot \{u_0(x) + \lambda u_1(x) + \lambda^2 u_2(x) + \dots + \lambda^n u_n(x) + \dots\} dt \end{aligned}$$

eşitliğin sağ yanını λ ya göre düzenler ve λ 'nın aynı kuvvetli terimler için eşitliğin her iki yanındaki terimleri karşılıklı olarak yazarsak;

$$u_0(x) = f(x)$$

$$u_1(x) = \int_0^x K(x,t)u_0(t) dt$$

$$u_2(x) = \int_0^x K(x,t)u_1(t) dt$$

.

.

.

$$u_n(x) = \int_0^x K(x,t)u_{n-1}(t) dt$$

bulunur. $u_0(x) = f(x)$ olduğundan bununla ikinci bağıntıya gidilirse;

$$u_1(x) = \int_0^x K(x,t)u_0(t) dt = \int_0^x K(x,t)f(t) dt$$

yazılır. Benzer şekilde $u_2(x)$ için;

$$\begin{aligned} u_2(x) &= \int_0^x K(x,t)u_1(t) dt \\ &= \int_0^x K(x,t) \left[\int_0^t K(t,t_1)f(t_1) dt_1 \right] dt \\ &= \int_0^x f(t_1) dt_1 \int_0^x K(x,t)K(t,t_1) dt \\ &= \int_0^x K_2(x,t)f(t_1) dt_1 \end{aligned}$$

yazılır. Burada

$$K_2(x, t_1) = \int_{t_1}^x K(x, t) K(t, t_1) dt_1$$

işlemlere bu şekilde devam edersek genel olarak ($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$u_n(x) = \int_0^x K_n(x, t) f(t) dt$$

ifadesi elde edilecektir. $K_n(x, t)$ fonksiyonlarının itere çekirdekler olduğu bilinmektedir ve tekrar hatırlatılacak olursa,

$$K_1(x, t) = K(x, t)$$

$$K_{n+1}(x, t) = \int_t^x K(x, z) K_n(z, s) dz$$

şeklinde dir. Seri açılımı yukarıdaki işlemler sonucunda,

$$u(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_0^x K_{(n)}(x, t) f(t) dt$$

şeklinde yazılabilir. $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, t)$ serisi $K(x, t)$ çekirdek fonksiyonu sürekli olarak

kabul edildiğinden mutlak ve düzgün yakınsak olup buna Resolvent veya Çözücü çekirdek denir. Fredholm integral denklemlerinde olduğu gibi $R(x, t; \lambda)$ ile gösterilmektedir. Bu durumda

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, t)$$

yazılabilmektedir. $R(x, t; \lambda)$ resolvanı için çekirdek ve çözücü çekirdek arasında aşağıdaki bağıntıyı,

$$R(x, t; \lambda) = K(x, t) + \lambda \int_0^x K(x, t) R(x, t; \lambda) dt$$

şeklinde elde edilir. Bu bağıntı sınır değerleri dışında Fredholm integral denklemleri ile aynı özelliği taşıdığı görülmektedir. $R(x, t; \lambda)$ hesaplanabildiği takdirde Volterra integral denkleminin bir çözümü,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x R(x, t; \lambda) f(t) dt$$

şeklindedir.

Örnek: $u(x) = e^{t^2} + \int_0^x e^{x^2-t^2} u(t) dt$ integral denkleminin çözümünü resolvent yardımıyla çözelim.

$K(x, t) = e^{x^2-t^2}$, $\lambda = 1$ olup itere çekirdeklerini hesaplayalım.

$$K_1(x, t) = K(x, t) = e^{x^2-t^2}$$

$$\begin{aligned} K_2(x, t) &= \int_t^x K(x, z) K_1(z, t) dz \\ &= \int_t^x e^{x^2-z^2} e^{z^2-t^2} dz \\ &= \int_t^x e^{x^2-t^2} dz \\ &= e^{x^2-t^2} \int_t^x dz \\ &= (x-t) e^{x^2-t^2} \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} K_3(x, t) &= \int_t^x K(x, z) K_2(z, t) dz \\ &= \int_t^x e^{x^2-z^2} (z-t) e^{z^2-t^2} dz \\ &= e^{x^2-t^2} \int_t^x (z-t) dz \\ &= \frac{(x-t)^2}{2} e^{x^2-t^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_4(x, t) &= \int_t^x K(x, z) K_3(z, t) dz \\
&= \int_t^x e^{x^2-z^2} \frac{(z-t)^2}{2} e^{z^2-t^2} dz \\
&= \frac{(x-t)^3}{3!} e^{x^2-t^2}
\end{aligned}$$

.

.

.

$$K_{n+1}(x, t) = \frac{(x-t)^n}{n!} e^{x^2-t^2}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla bu problem için resolvent;

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-t)^n}{n!} e^{x^2-t^2}$$

$$R(x, t; \lambda) = e^{x-t} e^{x^2-t^2}$$

şeklinde ifade edilmiş olur. O halde bulunan değerler

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x R(x, t; \lambda) f(t) dt$$

denkleminde yerine yazılırsa,

$$u(x) = e^{x^2} + \int_t^x e^{x-t} e^{x^2-t^2} e^{t^2} dt$$

$$u(x) = e^{x^2} + e^{x^2+x} \int_t^x e^{-t} dt$$

$$u(x) = e^{x^2+x}$$

çözümü elde edilir.

5. SAYISAL YÖNTEMLER

5.1. İkinci Tip Volterra İntegral Denklemleri İçin Quadrature metot

$$u(x) = y(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t) dt, \quad a \leq x \leq b \quad (5.1)$$

şeklindeki 2. Tip Volterra integral denklemini göz önüne alalım. Eş. 5.1 'de integral teriminin yaklaşık değerinin hesaplanmasını quadrature kuralı ile verebiliriz. x ve t 'nin seçimi ;

$$x = x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{N} \quad \text{sabit uzunluk olmak üzere}$$

$$x_i = t_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

olup quadrature kuralı;

$$\begin{aligned} \int_a^{x_i} K(x_i, t)u(t) dt &\approx h \sum_{j=0}^i w_{ij} K(x_i, t_j) u(t_j) \\ &= h \sum_{j=0}^i w_{ij} K_{ij} u(t_j) \end{aligned}$$

formülü ile ifade edilebilir. Burada w_{ij} ' ler ağırlık fonksiyonları olup değerleri,

$$w_{i0} = w_{ii} = \frac{1}{2}, \quad w_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, 3, \dots, i-1$$

şeklindedir. Burada çözüm fonksiyonunun her bir x_i noktasındaki değeri aşağıdaki adımlarla hesaplanabilir.

$$u(x_0) = y(x_0)$$

$$\begin{aligned}
u(x_1) &= y(x_1) + \lambda h [w_{10}K_{10}u(t_0) + w_{11}K_{11}u(t_1)] \\
u(x_2) &= y(x_2) + \lambda h [w_{20}K_{20}u(t_0) + w_{21}K_{21}u(t_1) + w_{22}K_{22}u(t_2)] \\
&\vdots \\
u(x_i) &= y(x_i) + \lambda h \sum_{j=0}^i w_{ij}K_{ij}u(t_j) \quad , \quad i=1,2,\dots,N
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Eş. 5.2' i daha da sade şekilde yazarsak,

$$\begin{aligned}
u_0 &= y_0 \\
u_i &= y_i + \lambda h \sum_{j=0}^i w_{ij}K_{ij}u_j \quad , \quad i=1,2,\dots,N
\end{aligned} \tag{5.3}$$

olur [4]. Bu metodun işleyişi bir örnek üzerinde aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\text{Örnek : } u(x) = \frac{1}{(x+2)^2} - 2 \int_0^x \frac{1}{(x-t+2)^2} u(t) dt$$

şeklindeki 2.Tip Volterra integral denklemini $h = \frac{1}{2}$, $h = \frac{1}{4}$ ve $b = 5$ için quadrature kuralı ile çözelim.

Verilenler;

$$K(x,t) = \frac{1}{(x-t+2)^2} \quad \text{olup} \quad K(x_i,t_j) = \frac{1}{(x_i-t_j+2)^2} \quad \text{dir.}$$

$$a = 0 \quad \text{ve} \quad b = 5 \quad , \quad y(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$$

$$w_{i0} = w_{ii} = \frac{1}{2} \quad , \quad w_{ij} = 1 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, i-1$$

şeklinde olduğunu tekrardan hatırlayıp çözüme geçerseniz,

$h = \frac{1}{2}$ seçelim. Yani $N = 10$ olup $h = \frac{b-a}{N} = \frac{5-0}{10} = \frac{1}{2}$ dir.

$$x_i = t_i \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0.0 = t_0 \\ x_1 = 0.5 = t_1 \\ x_2 = 1.0 = t_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_{10} = 5.0 = t_{10} \end{cases}$$

şeklinde tüm adımları kolaylıkla görülebilir. Buradan,

$$i = 0 \text{ için } u(0) = y(0) \Rightarrow u(0) = \frac{1}{(0+2)^2} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$u(0) = 0.25$$

$$i = 1 \text{ için } u(x_1) = y(x_1) + \lambda h \sum_{j=0}^1 w_{1j} K_{1j} u(t_j)$$

$$\begin{aligned} u(0.5) &= y(0.5) - 2 \cdot \frac{1}{2} [w_{10} K_{10} u(0) + w_{11} K_{11} u(0.5)] \\ &= \frac{1}{(0.5+2)^2} - 2 \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(0.5-0+2)^2} \cdot (0.25) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(0.5-0.5+2)^2} \cdot u(0.5) \right] \\ u(0.5) &= \frac{4}{25} - \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{25} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot u(0.5) \right] \end{aligned}$$

$$u(0.5) = 0.124444444$$

$$i = 2 \text{ için } u(x_2) = y(x_2) + \lambda h \left[\sum_{j=0}^2 w_{2j} K_{2j} u(t_j) \right]$$

$$u(x_2) = y(x_2) - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot [w_{20} K_{20} u(t_0) + w_{21} K_{21} u(t_1) + w_{22} K_{22} u(t_2)]$$

$$u(1) = \frac{1}{(1+2)^2} - \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-0+2)^2} \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{(1-0.5+2)^2} \cdot (0.124444444) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot u(1) \right]$$

$$= \frac{1}{9} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{9} - \frac{4}{25} \cdot (0.124444444) - \frac{1}{8} \cdot u(1)$$

$$\frac{9}{8} u(1) = \frac{1}{9} \cdot \frac{7}{8} - \frac{4}{25} (0.124444444)$$

$$u(1) = 0.06872098$$

.

.

.

$$i = 10 \text{ için } u(5) = 0.0536$$

değerleri elde edilir. Şimdi de $h = \frac{1}{4}$ seçerek benzer işlemleri yapalım. Yani

$$N = 20 \text{ için } h = \frac{5-0}{20} = \frac{1}{4} \text{ olduğu görülür.}$$

$$i = 0 \text{ için } u(0) = y(0) = \frac{1}{(0+2)^2} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$u(0) = 0.25$$

$$i = 1 \text{ için } u(x_1) = y(x_1) + \lambda h [w_{10} K_{10} u(t_0) + w_{11} K_{11} u(t_1)]$$

$$u(0.25) = \frac{1}{(0.25+2)^2} - \frac{1}{2} \cdot [w_{10} K_{10} u(0) + w_{11} K_{11} u(0.25)]$$

$$= \frac{16}{81} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(0.25-0+2)^2} \cdot (0.25) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(0.25-0.25+2)^2} \cdot u(0.25) \right]$$

$$\frac{17}{16} \cdot u(0.25) = 0.185185$$

$$u(0.25) = 0.174291878$$

$$i = 2 \text{ için } u(x_2) = y(x_2) + \lambda h [w_{20} K_{20} u(t_0) + w_{21} K_{21} u(t_1) + w_{22} K_{22} u(t_2)]$$

$$\begin{aligned}
u(0.5) &= \frac{1}{(0.5+2)^2} - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot [w_{20}K_{20}u(0) + w_{21}K_{21}u(0.25) + w_{22}K_{22}u(0.5)] \\
&= \frac{1}{(0.5+2)^2} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{(0.5-0+2)^2} (0.25) \right. \\
&\quad \left. + 1 \frac{1}{(0.5-0.25+2)^2} (0.174291878) + \frac{1}{2} \frac{1}{(0.5-0.5+2)^2} u(0.5) \right]
\end{aligned}$$

$$\frac{17}{16}u(0.5) = \frac{4}{25} \cdot \frac{15}{16} - \frac{1}{2} (0.174291878)(0.197530864)$$

$$u(0.5) = 0.124975046$$

·
·
·

$$i = 20 \text{ için } u(5) = 0.00545$$

elde edilir. Bkz. Çizelge 5.1’ de $h = \frac{1}{2}$ ve $h = \frac{1}{4}$ değerleri için $[0, 2]$ aralığındaki bilinmeyen fonksiyonun çözüm değerleri verilmiş aynı zamanda analitik değerleri de yöntemin nasıl işlediği görülmesi açısından eklenmiştir.

Çizelge 5.1 Quadrature metot ile yaklaşık çözümler ve analitik çözüm

Hesaplanan Değerler			
x	$u_1(x)$	$u_2(x)$	$u(x)$
0.0	0.25000	0.25000	0.25000
0.5	0.12444	0.12497	0.12515
1.0	0.06872	0.06924	0.06942
1.5	0.04143	0.04184	0.04197
2.0	0.02690	0.02722	0.02733
2.5	0.01859	0.01883	0.01891
3.0	0.01352	0.01372	0.01378
3.5	0.01026	0.01041	0.01046
4.0	0.00805	0.00818	0.00821
4.5	0.00649	0.00659	0.00662
5.0	0.00536	0.00545	0.00547

Tabloda $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ çözümleri sırasıyla $h = \frac{1}{2}$ ve $h = \frac{1}{4}$ değerlerine karşılık gelen çözümlerdir. $u(x)$ de analitik çözümdür. Tabloda dikkat edilirse h ' ı küçük seçmek daha iyi sonuç vermektedir.

5.2. İkinci Tip Singüler İntegral Denklemler İçin Gauss-Jacobi

Quadrature Formülü

Cauchy çekirdeğine sahip ikinci tip Fredholm integral denklemleri fracture(kırık) veya contact mekanik problemlerinde sıkça karşımıza çıkar. Bu denklem;

$$a\phi(x) + \frac{b}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi(t)}{t-x} dt = f(x) \quad , \quad (-1 < x < 1) \quad (5.4)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada a ve b sabitler olup $f(x)$ sürekli bir fonksiyon olmalıdır. Aynı zamanda bilinmeyen $\phi(x)$ fonksiyonu da sürekli olmalı ve Hölder şartını sağlamalıdır. Bununla beraber singüler terimin temel değeri $[-1,1]$ kapalı aralığında var olmalıdır. $-1 < x < 1$ aralığında bilinmeyen $\phi(x)$ fonksiyonunun davranışı fonksiyonel analiz metotları kullanılarak araştırılabilir. Kırık problemlerinde gerilim kuvvetini artırmak için çatlağın her iki ucunda da bilinmeyen fonksiyon sonsuza yaklaşır. Yani probleme aşağıdaki ek şart ilave edilmelidir.

$$\phi(\pm 1) = \infty \quad (5.5)$$

$\phi(x)$ fonksiyonu duruma göre farklı anlamlar içerir. Örneğin fracture mekaniğinde karşılaşılan kırık problemlerinde $\phi(x)$, kırığın kalınlığı ile ilgili ya da kırık yüzeylerinin bağıl yer değiştirmesinin türevi olarak tanımlanır. Kontakt mekaniğinde $\phi(x)$ ise kontakt yüzeyler etrafındaki dağılmanın ne kadar olduğunu gösterir. Eş.5.5' de çatlak yüzeylerin bağıl yer değiştirmesinin türevini ya da aralığın uç noktalarında sonsuzluğa yaklaşması bitmiş bir kontaktaki dağılmayı gösterir. Eş. 5.4 tipindeki integral denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek genellikle zordur. Bundan dolayı tüm çabalar bu tipteki denklemlerin nümerik hesaplanmasının

geliştirilmesine adanmıştır. Birinci çeşit singüler integral denklemlerin nümerik çözüm metotları, ikinci çeşit singüler integral denklemlerin nümerik çözüm metotları ile karşılaştırıldığında, ikinci çeşit singüler integral denklemler için daha ileri bir incelemeye ihtiyaç duyulduğu görülmektedir. Biz burada sadece bilinmeyen fonksiyonun aralığın her iki sonunda singüler olduğu durumla ilgileniyoruz [6].

5.2.1. Gauss – Jacobi quadrature formülü

Gauss-Jacobi quadrature formülünde $\phi(x)$ fonksiyonu $w(x)$ ağırlık fonksiyonu ve sınırlı bir bilinmeyen $g(x)$ fonksiyonunun çarpımı ile ifade edilir. Yani,

$$\phi(x) = w(x) \cdot g(x) \quad (5.6)$$

olup burada,

$$w(x) = (1-x)^\alpha \cdot (1+x)^\beta \quad (-1 < \alpha, \beta < 0, -1 < x < 1)$$

$$\alpha = B-1, \quad \beta = -B, \quad \kappa = -(\alpha + \beta) = 1, \quad \tan \pi B = -\frac{b}{a} \quad (5.7)$$

şeklinde. Eş. 5.4 'de $\phi(x)$ 'i tam olarak bulmak yerine, Eş. 5.6'daki sınırlı $g(x)$ fonksiyonu için çözüm araştırılır. Bu yaklaşım bilinmeyen $\phi(x)$ fonksiyonunun hesaplamalardaki nümerik hataları önemli ölçüde azaltır. Sabit bir n tamsayısı verilsin ve $P_n^{(\alpha, \beta)}(t)$ 'nin köklerini

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(t) = 0 \quad (5.8)$$

olacak şekilde ζ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ile gösterelim. Şimdi bilinmeyen $g(t)$ fonksiyonunu ζ_i düğüm noktalarındaki değerlerinden yararlanarak Lagrange interpolasyon formülünden,

$$g(t) \approx \sum_{i=1}^n \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(t)}{(t-\zeta_i) P_n'^{(\alpha,\beta)}(\zeta_i)} g(\zeta_i) \quad (5.9)$$

şeklinde gösterebiliriz. Burada ' ' sembolü türevini gösterir. Eş. 5.4'ün sol tarafındaki integral terimini dikkate alır ve Eş. 5.9'da yerine koyarsak,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{\phi(t)}{t-x} dt &= \int_{-1}^1 \frac{w(t) g(t)}{(t-x)} dt \\ &= \int_{-1}^1 \frac{w(t)}{(t-x)} \left[\sum_{i=1}^n \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(t)}{(t-\zeta_i) P_n'^{(\alpha,\beta)}(\zeta_i)} g(\zeta_i) \right] dt \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{g(\zeta_i)}{P_n'^{(\alpha,\beta)}(\zeta_i)} \int_{-1}^1 \frac{w(t) P_n^{(\alpha,\beta)}(t)}{(t-x)(t-\zeta_i)} dt \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{g(\zeta_i)}{P_n'^{(\alpha,\beta)}(\zeta_i)} \frac{1}{(x-\zeta_i)} \left\{ \int_{-1}^1 w(t) \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(t)}{(t-x)} dt - \int_{-1}^1 w(t) \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(t)}{(t-\zeta_i)} dt \right\} \end{aligned} \quad (5.10)$$

elde edilir. Eş. 5.8'i de kullanırsak,

$$\int_{-1}^1 \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(t) w(t)}{(t-x)} dt = \pi \left[-\frac{a}{b} w(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - \frac{1}{\sin \pi a} P_{n-1}^{(-\alpha,-\beta)}(x) \right] \quad (5.11)$$

denklemini elde edilir. Burada $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ monik Jacobi polinomudur. Eş. 5.9' un sol kısmı gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{w(t) g(t)}{(t-x)} dt &= -\pi \frac{a}{b} w(x) \sum_{i=1}^n \frac{g(\zeta_i)}{P_n'^{(\alpha,\beta)}(\zeta_i)} \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{(t-\zeta_i)} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{g(\zeta_i)}{P_n'^{(\alpha,\beta)}(\zeta_i)} \frac{\pi}{(x-\zeta_i)} \left[\frac{1}{\sin \pi a} P_{n-1}^{(-\alpha,-\beta)}(\zeta_i) - \frac{1}{\sin \pi a} P_{n-1}^{(-\alpha,-\beta)}(x) \right] \end{aligned} \quad (5.12)$$

şeklinde yazılabilir. Eş. 5.9' u da kullanarak Eş. 5.12

$$\int_{-1}^1 \frac{w(t)g(t)}{(t-x)} dt = -\pi \frac{a}{b} w(x)g(x) + \sum_{i=1}^n \frac{g(\zeta_i)}{P_n^{(\alpha,\beta)}(\zeta_i)} \frac{\pi}{(x-\zeta_i)} \left[\frac{1}{\sin \pi a} P_{n-1}^{(-\alpha,-\beta)}(\zeta_i) - \frac{1}{\sin \pi a} P_{n-1}^{(-\alpha,-\beta)}(x) \right] \quad (5.13)$$

şeklinde yazabiliriz. Eş. 5.6 ve Eş. 5.13' u Eş. 5.4' de yerine koyarsak

$$\sum_{i=1}^n \frac{g(\zeta_i)}{P_n^{(\alpha,\beta)}(\zeta_i)} \frac{\pi}{(x-\zeta_i)} \left[\frac{1}{\sin \pi a} P_{n-1}^{(-\alpha,-\beta)}(\zeta_i) - \frac{1}{\sin \pi a} P_{n-1}^{(-\alpha,-\beta)}(x) \right] = f(x) \quad (5.14)$$

olur. Böylece orijinal Eş. 5.4 denklemi ζ_i düğüm noktalarındaki bilinmeyen $g(t)$ fonksiyonunun değerlerine dayanarak yaklaşık olarak elde edebiliriz. Biz şimdi sadece sonlu sayıda $x = x_j$ şeklindeki noktalarındaki değerleri kullanarak Eş. 5.14'ü çözmeye çalışalım. x_j ' leri

$$P_{n-1}^{(-\alpha,-\beta)}(x_j) = 0, \quad (j=1,2,\dots,n-1) \quad (5.15)$$

şeklinde seçelim. Son olarak Eş. 5.14' ü aşağıdaki cebirsel sisteme indirgenebilir.

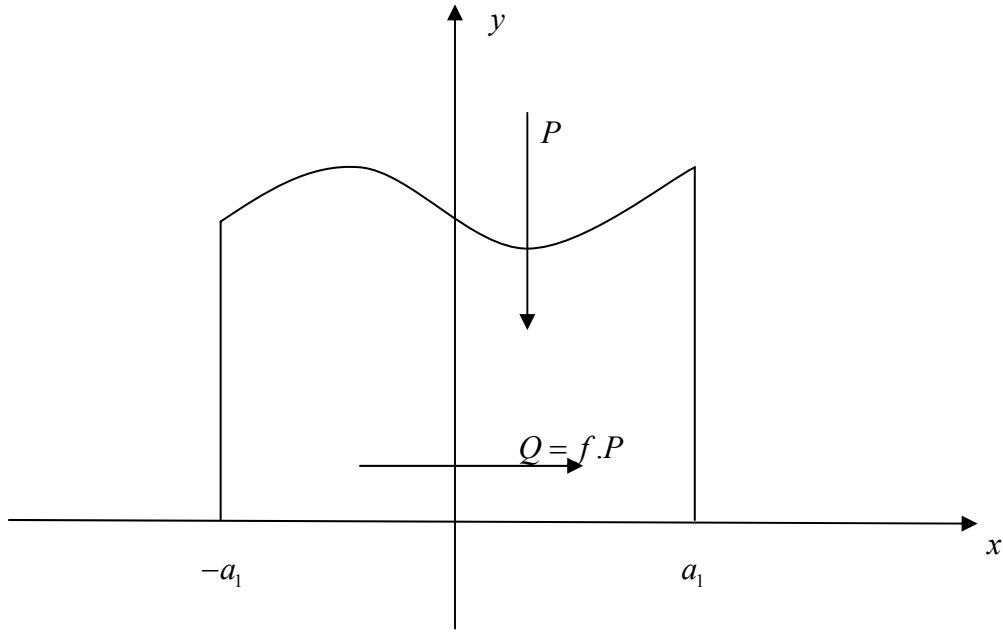
$$\sum_{i=1}^n \frac{w(\zeta_i)}{\sin \pi a} \frac{b}{(x_j - \zeta_i)} g(\zeta_i) = f(x_j)$$

Buradan

$$w(\zeta_i) = \frac{P_{n-1}^{(-\alpha,-\beta)}(\zeta_i)}{P_n^{(\alpha,\beta)}(\zeta_i)} \quad (5.16)$$

denklemleri elde edilir. Burada n düğüm noktalı ζ_i ($i=1,2,3,\dots,n$), $P_n^{(\alpha,\beta)}(\zeta_i)=0$ eşitliğini sağlar. $(n-1)$ noktalı x_j ($j=1,2,3,\dots,n-1$)' de $P_{n-1}^{(-\alpha,-\beta)}(x_j)=0$ şartını

sağlar. Böylece Eş. 5.16'nın bu yaklaşık formülü kapalı değildir ve bazı ek şartlara ihtiyaç duyar. Örneğin; Eş. 5.4 bir sonlandırılmış kontakt olarak tanımlanırsa, denge şartı ek şart olarak bakılabilir. Kırık problemleri tipindeki örneklerde, muhtemelen kapanış şartı eklenir. Bu şartın şekli;



Şekil. 5.1 Kare uçlu bir matkap elastik yarı düzlemde kayarken

$$P = a_1 \int_{-1}^1 \phi(t) dt \quad (5.17)$$

dir. Örneğin sonlandırılmış kontakt durumunda P dış güçtür ve $2a_1$ kontakt genişliğidir. Çatlağın olmadığı durumda da $P = 0$ 'dır. Eş. 5.9' u Eş. 5.8 ve Eş. 5.11 denklemleri ile birlikte kullanılırsa Eş. 5.17 denklemi

$$\sum_{i=1}^n w(\zeta_i) g(\zeta_i) = -\frac{\sin \pi a}{\pi} \frac{P}{a_1} \quad (5.18)$$

şekline dönüşür. Eş. 5.16 ve Eş. 5.18 denklemleri ikinci tip singüler integral denklemler için Gauss-Jacobi quadrature formülüdür ve bu denklemler aralığın her iki sonunda da sonsuza yaklaşan bilinmeyen fonksiyonun çözümünün singüler davranışının genel durumu için uygulanabilir.

5.2.2. Kare uçlu düz matkap

Sertlik problemi olan kare uçlu matkap, yarım genişliği a_1 , elastik yarı düzlem üzerinde kayan bir cisim olarak düşünülebilir(Bkz. Şekil 5.1). Bu problemi yukarıda verilen nümerik metotlarla çözeriz, fakat dikkat edelim ki bu problemi aynı zamanda analitik olarak da çözebiliriz. İki farklı yaklaşımdan elde edilen sonuçları karşılaştırsak bu konuda tanımlanan nümerik metodun doğruluğunu sınanmış olur.

Matkap sert bir cisim olduğundan yalnızca yarı düzlemin deformasyonu ile ilgilenilmektedir. Yüzey normal yer değiştirmesi $v(x)$, normal ve kayma sürtünme kuvveti de sırasıyla $\phi(x)$ ve $g(x)$ olsun. O halde

$$\frac{1-2\nu}{2\mu}q(x) + \frac{1-\nu}{\pi\mu} \int_{-a_1}^{a_1} \frac{\phi(t)}{t-x} dt = \frac{\partial v(x)}{\partial x} = 0 \quad (5.19)$$

şeklinde olup burada ν poisson oranı, μ sertlik katsayısıdır.

Çizelge 5.2 Düğüm noktaları ve $g(\zeta_i)$ yaklaşık çözümleri

i	ζ_i	$g(\zeta_i)$
1	0.998152341293455	0.317147616466104
2	0.982628164674953	0.317146847869753
3	0.951605745485052	0.317146880094113
4	0.905576080378733	0.317146945994837
5	0.845265233707347	0.317147022849993
6	0.771624374840183	0.317147009464436
7	0.685814873889498	0.317147014630391
8	0.589190001797237	0.317146984163095
9	0.483273592282616	0.317147026688546
10	0.369736011291179	0.317146957580020

Çizelge 5.2 (Devam) Düğüm noktaları ve $g(\zeta_i)$ yaklaşık çözümleri

11	0.250367814783509	0.317147035611473
12	0.127051510791568	0.317147061519590
13	1.731871230082485 E-003	0.317146968408158
14	-0.123614738279451	0.317146970461946
15	-0.247011526863765	0.317146998625924
16	-0.366512453580906	0.317146997607559
17	-0.480232917685294	0.317146982946921
18	-0.586379479991279	0.317147001693305
19	-0.683278146666021	0.317146966910296
20	-0.769400769550092	0.317147036304250
21	-0.843389147127064	0.317146985778126
22	-0.904076447810500	0.317147069680093
23	-0.950505626208274	0.317146905222412
24	-0.981944605084091	0.317146965424547
25	-0.997899122911981	0.317147325416179

Eğer matkap zemin üzerinde kayıyorsa, kayma ve normal sürtünme kuvvetleri arasında her zaman

$$q(x) = f \phi(x) \quad (5.20)$$

bağıntısı vardır. Yüzey normal yer değiştirmesi $v(x)$, $-a_1 \leq x \leq a_1$ aralığında sabittir ve böylece Eş. 5.19 denklemi

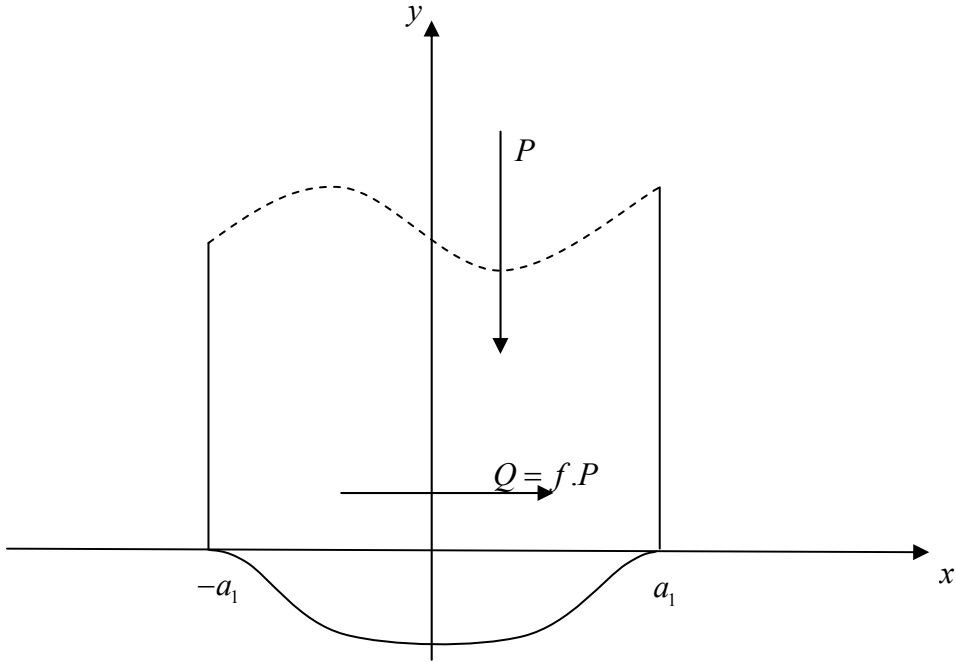
$$-f \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \phi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi(t)}{(t-x)} dt = 0 \quad (5.21)$$

olur. Çözüm ;

$$\phi(x) = \frac{\sin B\pi}{\pi} (1-x)^{B-1} (1+x)^{-B} \quad (5.22)$$

şeklindedir. Eğer dış bileşke kuvveti $P=1$ olarak ayarlanırsa burada

$$\tan \pi B = \frac{-2(1-\nu)}{f(1-2\nu)} \quad (0 < B < 1) \quad (5.23)$$



Şekil 5.2. Kare uçlu dalgalı matkap elastik bir yarı düzlem üzerinde kayarken

Eş. 5.6' da sınırlı $g(x)$ fonksiyonu için açık bir çözüm bulunur. Bu da Eş. 5.22 denklemindeki

$$g(x) = \frac{\sin B\pi}{\pi} \quad (5.24)$$

dir ve bu durumda da sabittir. Eş. 5.21 'in nümerik çözümü Gauss-Jacobi quadrature formülünden (Eş. 5.16 ve Eş. 5.18 denklemleri) elde edilen $g(t_i)$ düğüm değerleridir ve bu değerler Bkz. Çizelge 5.2 'de verilmiştir. Burada $f = -0.3$, $\nu = -0.3$ için hesaplama yapılırsa düğüm noktalarının sayısı $n = 25$ ' tir. Eş. 5.23 'den ve daha önceden özel olarak belirlenen B parametresinin değeri $B = 0.4727828$ olup analitik çözümü;

$$g(\zeta) = 0.317146987484391 \quad (5.25)$$

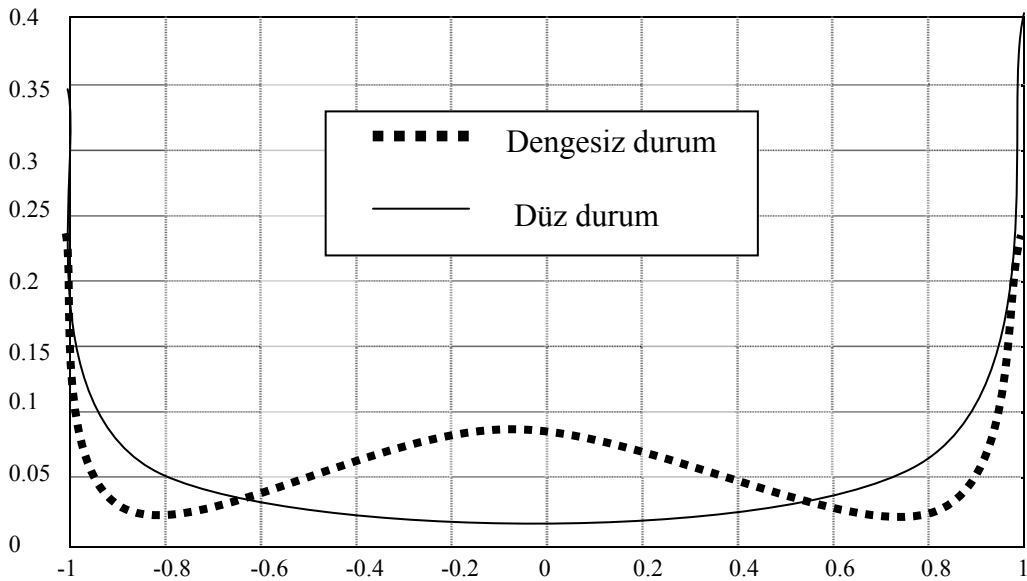
dir. Fonksiyonun hesaplanan düğüm noktasındaki değerleri Bkz. Çizelge 4.1' de verilmiştir. Eş. 5.25' deki analitik sonuçla karşılaştırılırsa, Bkz. Çizelge 5.2' deki nümerik sonuçlar çatlak ve kontakt mekanikte karşılaşılan ikinci tür singüler integral denklemlerinin çözümü için sunulan metotların yeterli olduğu görülür.

5.2.3. Kare uçlu dalgali matkap

Bu konu içinde tanımlanan metodun gücünü uygulamalarda sık sık karşılaşılan durumları dikkate alarak göstereceğiz. Matkabın alt tarafı oldukça düzdür, dengesizdir veya dalgalıdır(Bkz. Şekil 5.2). Biz dalgalanmayı kosinüs dalganın tek periyodu olarak seçeriz. Bu yüzden matkabın şekli;

$$v(x) = d + \varepsilon \cos\left(\frac{\pi x}{a_1}\right) \quad (5.26)$$

fonksiyonu ile tanımlanır. Burada ε , küçük bir pozitif parametredir ($\frac{\varepsilon}{a_1} < 0.05$) . Bu durum için tam kayma kontakt denklemi ;



Şekil 5.3 Düz uçlu ve Dalgali uçlu matkapların karşılaştırılması

$$-\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} f \phi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-a_1}^{a_1} \frac{\phi(t)}{(t-x)} dt = -\frac{\mu}{(1-\nu)} \frac{\pi}{a_1} \varepsilon \sin\left(\frac{\pi}{a_1} x\right) \quad (5.27)$$

şeklindedir. Önceki örnekte olduğu gibi $f = -0.3$, $\nu = -0.3$ olsun. Yükün yüzde

genişliği $\frac{P}{a_1} = (0.1) \frac{\mu}{(1-\nu)}$ ve dalgalanmanın büyüklüğünün değeri $\frac{\varepsilon}{a_1} = 0.01$ ' dir.

Eş. 5.27' nin nümerik çözümü Bkz. Şekil 5.3' de gösterilen düz olmayan matkap içindir. İki çözümün kıyaslanmasını yaparsak matkabin şekline bağlı olduğunu görürüz. Aynı zamanda matkabin kenarındaki singüleritenin doğası korunmaz. Böylece, bu singüler davranış için ölçekleme parametresi bu iki durum için açıkça farklıdır [6].

5.3. İkinci Tip Lineer Volterra İntegral Denklemlerinin Trapezoid Quadrature ve Block-by-Block Metodu ile Çözümü

Lineer Volterra integral denkleminin genel formu aşağıdaki gibidir:

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x, y) u(t) dt \quad a \leq x \leq b \quad (5.28)$$

Eş. 5.28' deki integralin yaklaşık çözümü için, (a, b) aralığını $k > 1$ sabiti için $h_1 = k h_n$ olacak şekilde $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$ uzunluğundaki n tane alt aralığa bölerek genişletebiliriz. Volterra integral denkleminin çözümü için quadrature metodunda hatalar ilk noktalardan daha çok son noktalardadır. Bu yüzden son aralığın ilk aralıktan daha küçük olduğuna dikkat edilirse, son noktalarda hatalar azalır [7].

$i = 1, 2, 3, \dots, n$ için $k \alpha d^{i-1}$ şeklinde olup d ve α hesaplanacaktır. Son alt aralığın uzunluğu α ve diğer durumlarda $k \alpha d^{n-1}$ olsun. O halde

$$d = \left(\sqrt[n]{k} \right)^{-1}$$

şeklinde olup diğer bir ifadeyle, $(b-a)$ ya eşit tüm alt aralıkların uzunlukları toplamı

$$k\alpha + kd\alpha + kd^2\alpha + \dots + kd^{n-1}\alpha = b - a$$

dır. Çünkü $0 < d < 1$ olup

$$\alpha = \frac{(b-a)(d-1)}{k(d^n-1)}$$

$$h_1 = k\alpha$$

$$h_i = k\alpha d^{i-1} = dh_{i-1} \quad , \quad i = 2, 3, \dots, n$$

Şimdi biz bu iterasyonları tekrarlı trapezoid quadrature ve block-by-block metodları ile yapacağız.

5.3.1. Tekrarlı trapezoid quadrature metot

2. tip lineer volterra integral denklemlerin çözümü için, yukarıdaki bahsedilenleri ele alalım.

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x, y)u(y) dy \quad a \leq x \leq b$$

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_i = x_{i-1} + h_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} u(x_0) = f(x_0) \\ u(x_i) = f(x_i) + \sum_{j=1}^i \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_i, t)u(t) dt, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

O halde formülü aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$u_0 = f_0$$

$$u_1 = f_1 + \frac{h_1}{2} k_{10} u_0 + \frac{h_1}{2} k_{11} u_1$$

$$\begin{aligned}
u_2 &= f_2 + \frac{h_1}{2} k_{20} u_0 + \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right) k_{21} u_1 + \frac{h_2}{2} k_{22} u_2 \\
u_3 &= f_3 + \frac{h_1}{2} k_{30} u_0 + \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right) k_{31} u_1 + \left(\frac{h_2 + h_3}{2} \right) k_{32} u_2 + \frac{h_3}{2} k_{33} u_3 \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
u_n &= f_n + \frac{h_1}{2} k_{n0} u_0 + \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right) k_{n1} u_1 + \dots + \left(\frac{h_{n-1} + h_n}{2} \right) k_{nn-1} u_{n-1} + \frac{h_n}{2} k_{nn} u_n
\end{aligned}$$

şeklindedir. Yani $u_i = u(x_i)$, $f_i = f(x_i)$ ve $k_{ij} = k(x_i, x_j)$ şeklindedir.

$$\text{Örnek: } u(x) = x + \frac{1}{5} \int_0^x xt u(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 2 \quad (5.29)$$

lineer Volterra integral denkleminin tekrarlı trapezoid quadrature metodu ile çözelim.

Bu denklemin analitik çözümü $u(x) = xe^{\frac{x^3}{15}}$ şeklinde olduğunu biliyoruz. Ancak biz burada tekrarlı trapezoid quadrature kuralı ile çözümünü vereceğiz. Verilenler,

$a = 0$ ve $b = 2$ dir.

$$i = 1, 2, 3, \dots, 20 \quad h = \frac{b-a}{N} = \frac{2-0}{20} = 0.1$$

$$K(x, t) = xt \quad \text{ve} \quad f(x) = x$$

olduğunu hatırlayalım. Buradan,

$$x_0 = 0$$

$$x_i = x_{i-1} + h_i$$

$$x_1 = x_0 + h_1 = 0.1, \quad x_2 = 0.2$$

$$u(x_0) = f(x_0) \Rightarrow u_0 = 0$$

$$\begin{aligned} u_1 &= f(x_1) + \frac{1}{5} \frac{h_1}{2} k_{10} u_0 + \frac{1}{5} \frac{h_1}{2} k_{11} u_1 \\ &= 0.1 + \frac{1}{10} (0.1) x_1 t_0 u_0 + \frac{1}{10} (0.1) x_1 t_1 u_1 \\ &= 0.1 + (0.01)(0.1)(0.1) u_1 \end{aligned}$$

$$u_1 = 0.10010$$

$$\begin{aligned} u_2 &= f_2 + \frac{h_1}{2} k_{20} u_0 + \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right) k_{21} u_1 + \frac{h_2}{2} k_{22} u_2 \\ &= 0.2 + \frac{0.1}{2} x_2 t_0 u_0 + (0.1) x_2 t_1 u_1 + (0.05) x_2 t_2 u_2 \\ &= 0.2 + \frac{1}{5} (0.1)(0.2)(0.1)(0.100010) + \frac{1}{5} (0.05)(0.2)(0.2) u_2 \\ &= 0.2 + 0.000040 + 0.0004 u_2 \end{aligned}$$

$$u_2 = 0.200120$$

$$\begin{aligned} u_3 &= f_3 + \frac{h_1}{2} k_{30} u_0 + \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right) k_{31} u_1 + \left(\frac{h_2 + h_3}{2} \right) k_{32} u_2 + \frac{h_3}{2} k_{33} u_3 \\ &= 0.3 + \frac{1}{5} (0.1)(0.3)(0.1)(0.10001) + \frac{1}{5} (0.1)(0.3)(0.2)(0.20012) + \frac{1}{5} (0.05)(0.3)(0.3) u_3 \end{aligned}$$

$$u_3 = 0.300571$$

·
·
·

$$u_{20} = f_{20} + \frac{h_1}{2} k_{20,0} u_0 + \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right) k_{20,1} u_1 + \dots + \left(\frac{h_{19} + h_{20}}{2} \right) k_{20,19} u_{19} + \frac{h_n}{2} k_{20,20} u_{20}$$

$$u_{20} = 3.414636$$

şeklinde olup tüm değerler ve hataları Bkz. Çizelge 5.3'te verilmiştir.

Çizelge 5.3 Eş.5.29’i Tekrarlı trapezoid yöntemiyle çözümü(T), Hata değeri(T-hata)

<i>Noktalar</i>	<i>T</i>	<i>T-hata</i>
0	0	0
0.1	0.100010	0.000003
0.2	0.200120	0.000013
0.3	0.300571	0.000030
0.4	0.401764	0.000054
0.5	0.504270	0.000086
0.6	0.608828	0.000126
0.7	0.716367	0.000176
0.8	0.828016	0.000238
0.9	0.945135	0.000315
1.0	1.069350	0.000411
1.1	1.202599	0.000531
1.2	1.347201	0.000683
1.3	1.505934	0.000877
1.4	1.682153	0.001125
1.5	1.879931	0.001446
1.6	2.104246	0.001866
1.7	2.361237	0.002417
1.8	2.658523	0.003146
1.9	3.005644	0.004119
2.0	3.414636	0.005426

5.3.2. Değişken adımli block-by-block metodu

Block-by-block metodu lineer Volterra integral denklemlerinin çözümü için en iyi yöntemdir. Aşağıdaki sistemle lineer Volterra integral denklemlerinin çözümünü yapabiliriz.

$$u_0 = f_0$$

$$\begin{aligned}
u_1 &= f_1 + \frac{5h}{12} k_{10} u_0 + \frac{8h}{12} k_{11} u_1 - \frac{h}{12} k_{12} u_2 \\
u_2 &= f_2 + \frac{h}{3} k_{20} u_0 + \frac{4h}{3} k_{21} u_1 + \frac{h}{3} k_{22} u_2 \\
u_3 &= f_3 + \frac{h}{3} k_{30} u_0 + \frac{4h}{3} k_{31} u_1 + \frac{2h}{3} k_{32} u_2 + \frac{4h}{3} k_{33} u_3 - \frac{h}{3} k_{34} u_4 \\
&\vdots \\
u_{2n-1} &= f_{2n-1} + \frac{h}{3} k_{2n-1,0} u_0 + \frac{4h}{3} k_{2n-1,1} u_1 + \dots + \frac{8h}{12} k_{2n-1,2n-1} u_{2n-1} - \frac{h}{12} k_{2n-1,2n} u_{2n} \\
u_{2n} &= f_{2n} + \frac{h}{3} k_{2n,0} u_0 + \frac{4h}{3} k_{2n,1} u_1 + \dots + \frac{4h}{3} k_{2n,2n-1} u_{2n-1} + \frac{h}{3} k_{2n,2n} u_{2n}
\end{aligned} \tag{5.30}$$

burada $h = \frac{b-a}{2n}$ dır. Trapezoid quadrature metoduna benzer bir şekilde bir yaklaşımla Eş. 5.30 sistemi yerine aşağıdaki sistem elde edilir.

$$\begin{aligned}
u_0 &= f_0 \\
u_1 &= f_1 + \frac{5h_1}{24} k_{10} u_0 + \frac{8h_1}{24} k_{11} u_1 - \frac{h_1}{24} k_{12} u_2 \\
u_2 &= f_2 + \frac{h_1}{6} k_{20} u_0 + \frac{4h_1}{6} k_{21} u_1 + \frac{h_1}{6} k_{22} u_2 \\
u_3 &= f_3 + \frac{h_1}{6} k_{30} u_0 + \frac{4h_1}{6} k_{31} u_1 + \left(\frac{h_1}{6} + \frac{5h_2}{24} \right) k_{32} u_2 + \frac{5h_2}{24} k_{33} u_3 - \frac{h_2}{24} k_{34} u_4 \\
&\vdots \\
u_{2n-1} &= f_{2n-1} + \frac{h_1}{6} k_{2n-1,0} u_0 + \frac{4h_1}{6} k_{2n-1,1} u_1 + \dots + \frac{8h_n}{24} k_{2n-1,2n-1} u_{2n-1} - \frac{h_n}{24} k_{2n-1,2n} u_{2n} \\
u_{2n} &= f_{2n} + \frac{h_1}{6} k_{2n,0} u_0 + \frac{4h_1}{6} k_{2n,1} u_1 + \dots + \frac{4h_n}{6} k_{2n,2n-1} u_{2n-1} + \frac{h_n}{6} k_{2n,2n} u_{2n}
\end{aligned} \tag{5.31}$$

sistemi elde etmiş oluruz.

Örnek: Eş. 5.29 denkleminin çözümünü block-by-block metoduyla inceleyelim. Bulduğumuz sonuçları analitik çözümle karşılaştıralım Eş. 5.29 denklemimiz

$$u(x) = x + \frac{1}{5} \int_0^x xt u(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 2$$

şeklinde olup burada; $K(x,t) = xt$ ve $b = 2$ değerleri verilmiştir. O halde formülleri kullanırsak;

$$u_0 = f_0 = 0$$

$$u_1 = f_1 + \frac{5h}{12} k_{10} u_0 + \frac{8h}{12} k_{11} u_1 - \frac{h}{12} k_{12} u_2$$

$$u_1 = (0.1) + \frac{1}{5} \frac{5(0.1)}{12} (0.1)(0)(0) + \frac{1}{5} \frac{8(0.1)}{12} (0.1)(0.1) u_1 - \frac{1}{5} \frac{(0.1)}{12} (0.1)(0.2) u_2$$

$$(0.999866666) u_1 + (0.000033333) u_2 = 0.1 \quad (5.32)$$

elde edilir. Diğer denklemden;

$$u_2 = f_2 + \frac{h}{3} k_{20} u_0 + \frac{4h}{3} k_{21} u_1 + \frac{h}{3} k_{22} u_2$$

$$u_2 = (0.2) + \frac{1}{5} \frac{(0.1)}{3} (0.2)(0)(0) + \frac{1}{5} \frac{4(0.1)}{3} (0.2)(0.1) u_1 + \frac{1}{5} \frac{(0.1)}{3} (0.2)(0.2) u_2$$

$$(0.000533333) u_1 + (0.999733333) u_2 = 0.2 \quad (5.33)$$

elde edilir. Eş. 5.32 ve Eş.5.33 beraber çözülürse;

$$u_1 = 0.100007 \quad \text{ve} \quad u_2 = 0.200107$$

değerleri bulunur. Bu şekilde devam edilirse benzer işlemler yapılarak

$$u_{20} = 3.409210$$

bulunur. Aşağıdaki tabloda tüm değerler ayrıntılı olarak verilmiştir ve ayrıca hatalarına dikkat edilirse çok küçük değerler olduğu görülür. Bu da metodumuzun çok iyi çalıştığını gösterir [7].

Çizelge 5.4 Eş. 5.29 'i block-by-block yöntemi ile çözümü(B),Hata değeri(B-hata)

<i>Noktalar</i>	<i>B</i>	<i>B-hata</i>
0	0	0
0.1	0.100007	-2.890316 E-09
0.2	0.200107	3.557610 E-09
0.3	0.300540	-7.851064 E-08
0.4	0.401710	2.851652 E-08
0.5	0.504184	-3.712513 E-07
0.6	0.608703	9.664237 E-08
0.7	0.716190	-1.066664 E-06
0.8	0.827778	2.305046 E-07
0.9	0.944818	-2.454951 E-06
1.0	1.068940	4.527011 E-07
1.1	1.202063	-5.056587 E-06
1.2	1.346518	7.796112 E-07
1.3	1.505047	-9.862559 E-06
1.4	1.681029	1.198285 E-06
1.5	1.878465	-1.881378 E-05
1.6	2.102382	1.596792 E-06
1.7	2.358784	-3.579639 E-05
1.8	2.655379	1.570539 E-06
1.9	3.001456	-6.877889 E-05
2.0	3.409210	-9.970176 E-08

KAYNAKLAR

1. Aksoy, Y., “İntegral Denklemler, Cilt I.”, *Y.T.Ü Yayınları*, İstanbul, 13-66 (1998)
2. Bayraktar , M., “Fonksiyonel Analiz” , *Gazi Kitabevi*, Ankara (2005)
3. Musayev, B. , Alp, M. , “Fonksiyonel Analiz” , *Balcı Yayınları*, Kütahya (2000)
4. Delves, L.M., Mohammed, J. L. , “Computational methods for integral equations”, *Cambridge University press*, Cambridge, 115–119 (1992)
5. Krasnov, M., Kiselev, A. , Makeronko, G. , “ İntegral Denklemler”, İstanbul, (1976)
6. Ma, L. , Korsunsky, A.M. , “ A note on the Gauss-Jacobi quadrature formulae for singular integral equations of the second kind” , *International Journal of fracture*, 126: 399–405 (2004)
7. Saberi-Nadjafi, J., Heidari, M. , “ A quadrature method with variable step for solving linear Volterra integral equations of second kind” , *Applied mathematics and Computation*, 188: 549–554 (2007)

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : EKİCİ, Mustafa
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 19.02.1984 Tortum
Medeni hali : Bekar
E-mail : matematikci984@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Atatürk Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2008
Lise	Akçaabat Lisesi Y.D.A	2002

Yabancı Dil

İngilizce