



**BİR SINIF BERNSTEİN TİP RASYONEL FONKSİYONLARLA
YAKLAŞIM**

Ayşenur Elif ATA

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ARALIK 2022

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Ayşenur Elif ATA

08/12/2022

BİR SINIF BERNSTEİN TİP RASYONEL FONKSİYONLARLA YAKLAŞIM
(Yüksek Lisans Tezi)

Ayşenur Elif ATA

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Aralık 2022

ÖZET

Bu tezde, Bernstein tipi rasyonel fonksiyonların bir sınıfının iki değişkenli operatörleri inşa edilmiştir. Bernstein tipi rasyonel fonksiyonların bir sınıfının iki değişkenli operatörlerinin dikdörtgensel bölge düzgün yakınsaklığı araştırılmıştır. Ayrıca, bu operatörlerin yakınsama hızları tam süreklilik modülü, kısmi süreklilik modülleri ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar açısından incelenmiştir.

Bilim Kodu : 20404
Anahtar Kelimeler : Bernstein tip rasyonel fonksiyon, düzgün yakınsaklık, yakınsama oranı
Sayfa Adedi : 39
Danışman : Doç. Dr. Esmâ YILDIZ ÖZKAN

APPROXIMATION BY A CLASS OF BERNSTEIN-TYPE RATIONAL FUNCTIONS
(M. Sc. Thesis)

Ayşenur Elif ATA

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
December 2022

ABSTRACT

In this thesis, operators of two variables of a class of rational functions of Bernstein type are constructed. The rectangular region uniform convergence of the bivariate operators of a class of Bernstein-type rational functions is investigated. In addition, the convergence rates of these operators are examined in terms of the complete modulus of continuity, the partial modulus of continuity, and functions from the Lipschitz class.

Science Code : 20404
Key Words : Bernstein-type rational function, uniform convergence, rate of convergence
Page Number : 39
Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Esmâ YILDIZ ÖZKAN

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca bana yol gösteren, yardım ve katkılarını esirgemeyen, bilgi ve birikimlerini paylaşarak sabırla ve ilgiyle yardımcı olan saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Esmâ YILDIZ ÖZKAN' a çok teşekkür ederim. Eğitim hayatım boyunca bana yardımcı olan tüm hocalarıma, değerli çalışma arkadaşlarıma ve tüm dostlarıma teşekkür ederim. Hayatım boyunca attığım her adımda maddi, manevi desteklerini hiç esirgemeyen beni sevgi ve saygıyla bugünlere getiren en büyük şansım, biricik aileme sonsuz teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Tek Değişkenli Lineer Pozitif Operatörlerin Temel Kavramları	3
2.2. İki Değişkenli Lineer Pozitif Operatörlerin Temel Kavramları	6
3. TEK DEĞİŞKENLİ BERNSTEİN TİP OPERATÖRLERİN BİR SINIFI.....	11
3.1. Tek Değişkenli Operatörlerin Tanımı ve Özellikleri	11
3.2. Tek Değişkenli Operatörlerin Yaklaşımı	13
3.2.1. korovkin tip yaklaşım.....	13
3.2.2. Yakınsama oranları	13
4. İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEİN TİP OPERATÖRLERİN BİR SINIFI.....	19
4.1. İki Değişkenli Operatörlerin Tanımı ve Özellikleri	19
4.2. İki Değişkenli Operatörlerin Yaklaşımı	21
4.2.1. Volkov tipi yaklaşım.....	21
4.2.2. Yakınsama oranları	23
5. SONUÇLAR.....	35
KAYNAKLAR	37
ÖZGEÇMİŞ	39

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

$B_n(f; x)$

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere Bernstein polinomu

B_ρ

İki değişkenli ağırlıklı fonksiyon uzayı

$C[a, b]$

$[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonların uzayı

$C(I)$

$I = [0, a_1] \times [0, a_2]$ üzerinde tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonların uzayı

$C_\rho[0, \infty)$

B_ρ ağırlıklı uzayındaki tüm sürekli fonksiyonların alt uzayı

$\|f\|_{C[a,b]}$

$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ ile tanımlanan norm

$\|f\|_{C(I)}$

$I = [0, a_1] \times [0, a_2]$ olmak üzere,

$\|f\|_{C(I)} = \max_{(x,y) \in I} |f(x,y)|$ ile tanımlı norm

$\|f\|$

$\|f\| = \sup_{0 \leq x \leq \infty} |f(x)|$ ile tanımlanan norm

$\|f\|_\rho$

B_ρ ağırlıklı uzayında,

$\|f\|_\rho = \max_{(x,y) \in I} \frac{|f(x,y)|}{\rho(x,y)}$ ile tanımlı norm

$L_n(f; x)$

Bernstein tip rasyonel fonksiyonların bir sınıfı

$L_{n,m}(f; x, y)$

İki değişkenli Bernstein tip rasyonel fonksiyonların bir sınıfı

$K_2(f, \delta)$

f fonksiyonunun Peetre K- fonksiyoneli

$R_n(f; x)$

Balázs operatörü

$\omega(f, \delta)$

f fonksiyonunun süreklilik modülü

$\omega(f; \delta_1, \delta_2)$

f fonksiyonunun tam süreklilik modülü

$\omega_1(f, \delta)$

f fonksiyonunun birinci kısmi süreklilik modülü

$\omega_2(f, \delta)$

f fonksiyonunun ikinci kısmi süreklilik modülü

1. GİRİŞ

Bernstein polinomları Bernstein (1912) tarafından Weierstreiss teoremini ispatlamak amacıyla $[0,1]$ aralığında tanımlı reel değerli f fonksiyonları için

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, n = 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

olarak tanımlanmıştır. Eğer f , $[0,1]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ise, bu durumda $B_n(f; x)$ polinomlar dizisi $[0,1]$ aralığında f fonksiyonuna düzgün yakınsar.

f , $[0, \infty)$ aralığında tanımlı reel değerli bir fonksiyon olmak üzere, Balázs (1975) aşağıdaki operatörü tanımlamıştır:

$$R_n(f; x) = \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{b_n}\right) \binom{n}{k} (a_n x)^k, n = 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

Burada (a_n) ve (b_n) , her $n \in \mathbb{N}$ için uygun olarak seçilmiş reel sayı dizileridir. $k = 1, 2, \dots, n$ için,

$$p_k(x) = x^k (1-x)^{n-k},$$

$$r_k(x) = \frac{(a_n x)^k}{(1+a_n x)^n},$$

seçildiğinde,

$$r_k(x) = p_k\left(\frac{a_n x}{1+a_n x}\right)$$

bağıntısı; $b_n = n$ seçildiğinde de

$$R_n(f; x) = B_n\left(f; \frac{a_n x}{1+a_n x}\right) \quad (1.3)$$

elde edilmektedir. Eş.1.3 eşitliğindeki Balázs (1975) operatörünün Bernstein polinomuyla olan ilişkisi nedeniyle Balázs (1975) operatörü *Bernstein tip rasyonel fonksiyonlar* olarak

bilinmektedir. Balázs (1975), $[0,2A]$ aralığında tanımlı sürekli reel değerli fonksiyonların süreklilik modülü yardımıyla, Bernstein tip rasyonel fonksiyonların yakınsama oranını elde etmiş, Voronovskaja tipi bir teorem vermiş ve Bernstein tip rasyonel fonksiyonların türevinin yakınsama teorimini elde etmiştir.

Son zamanlarda, Agratini (2020), kesin azalan pozitif reel sayı dizilerini

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} n\lambda_n = \infty \quad (1.4)$$

koşulu altında, pozitif ekseninde sürekli belirli bir büyüme koşuluna sahip her f fonksiyonu için Eş.1.2 ile verilen Balázs (1975) operatöründe $a_n = \lambda_n$ ve $b_n = n\lambda_n$ seçerek Bernstein tip rasyonel fonksiyonların bir sınıfını ele alarak çalışmıştır.

Balázs ve Szabados (1982), Eş.1.2 ile verilen operatörün tanımında $0 < \beta \leq \frac{2}{3}$ için $a_n = n^{\beta-1}$ ve $b_n = n^\beta$ seçerek, Bernstein tip rasyonel fonksiyonların yakınsama oranını pozitif reel ekseninde daha kısıtlanmış şartlarda vermişlerdir.

Bu tezde, Agratini (2020) tarafından tanımlanan tek değişkenli ve Özkan ve Ata (2021) tarafından tanımlanan iki değişkenli bir sınıf Bernstein tip rasyonel fonksiyonların yaklaşım özellikleri araştırılmıştır.

Tezin birinci bölümünde giriş; ikinci bölümünde tezin anlaşılmasını kolaylaştıracak bazı temel kavramlara; üçüncü bölümünde Agratini (2020) tarafından tanımlanan tek değişkenli Bernstein tip rasyonel fonksiyonlarının bir sınıfının yaklaşım özelliklerinin araştırılmasına ve dördüncü bölümde Özkan ve Ata (2021) tarafından tanımlanan iki değişkenli Bernstein tip rasyonel fonksiyonlarının yaklaşım özelliklerinin araştırılmasına yer verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Tek Değişkenli Lineer Pozitif Operatörlerin Temel Kavramları

Tanım

X ve Y lineer fonksiyon uzayları olsun. Eğer herhangi bir $f \in X$ fonksiyonunu bir $g \in Y$ fonksiyonuna karşılık getiren bir $L: X \rightarrow Y$ dönüşümü varsa, bu durumda L 'ye X ' den Y 'ye bir *operatör* denir. Bu operatör $L(f(t); x) = g(x)$ ile gösterilir (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım

X ve Y lineer fonksiyon uzayları, L, X ' den Y 'ye bir operatör olsun. Her $f, g \in X$ ve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ için,

$$L(\alpha_1 f(t) + \alpha_2 g(t); x) = \alpha_1 L(f(t); x) + \alpha_2 L(g(t); x)$$

koşulu sağlanırsa, bu durumda L ' ye *lineer operatör* denir (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım

X ve Y lineer fonksiyon uzayları, L, X ' den Y 'ye bir operatör olsun. Her $f \in X$ için $f \geq 0$ ise $L(f; \cdot) \geq 0$ koşulu sağlanırsa, bu durumda L 'ye *pozitif operatör* denir.

X ve Y lineer fonksiyon uzayları olsun. Hem lineerlik hem de pozitiflik koşulunu sağlayan bir $L: X \rightarrow Y$ operatörüne *lineer pozitif operatör* denir (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995).

Lemma

X ve Y lineer fonksiyon uzayları olsun. Bir $L: X \rightarrow Y$ lineer pozitif operatörü *monoton* artandır. Yani, her $f, g \in X$ için $f \leq g$ ise $L(f; \cdot) \leq L(g; \cdot)$ eşitsizliği doğrudur (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995).

Lemma

X ve Y lineer fonksiyon uzayları ve L, X' den Y' ye bir lineer pozitif operatör olsun. Bu durumda

$$|L(f; \cdot)| \leq L(|f|; \cdot)$$

eşitsizliği sağlanır (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım

X bir lineer fonksiyon uzayı olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n \in X$ ise (f_n) 'ye X üzerinde *fonksiyon dizisi* denir (Bayraktar, 2006).

Her $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ için $f_{n_1, n_2} \in X$ ise (f_{n_1, n_2}) de *iki indisli fonksiyon dizisidir*.

Tanım

X ve Y lineer fonksiyon uzayları olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $f \in X$ için $L_n(f; \cdot) \in Y$ olacak şekildeki X uzayından Y uzayına tanımlı $(L_n(f; \cdot))$ 'ye bir *operatör dizisi* denir (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım

$[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı sürekli ve reel değerli fonksiyonların kümesi $C[a, b]$ ile gösterilir. Bu uzaydaki norm

$$\|f\|_{C[a, b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

şeklinde tanımlıdır. $C[a, b]$ fonksiyon uzayı $\|\cdot\|_{C[a, b]}$ normu ile bir *normlu uzay*dır (Bayraktar, 2006).

Tanım

(f_n) , $C[a, b]$ içinde bir fonksiyon dizisi olsun. Eğer her $x \in [a, b]$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{C[a,b]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

şartı sağlanıyorsa, (f_n) fonksiyon dizisi $[a, b]$ kapalı aralığında, f fonksiyonuna *düzgün yakınsaktır* denir (Bayraktar, 2006).

2.1.1. Teorem (P. P. Korovkin Teoremi)

Her $n \in \mathbb{N}$ için $L_n: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ şeklinde tanımlı L_n lineer pozitif operatörler dizisi olsun. Her bir $k = 0, 1, 2$ için $e_k(x) = x^k$ olmak üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(e_k; \cdot) - e_k\|_{C[a,b]} = 0, k = 0, 1, 2$$

koşulları sağlanırsa, bu durumda $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli ve tüm reel ekseninde sınırlı olan her $f \in C[a, b]$ fonksiyonu için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f; \cdot) - f\|_{C[a,b]} = 0$$

olur (Korovkin, 1953).

$C[0, \infty)$ ile $[0, \infty)$ aralığında tanımlı reel değerli sürekli f fonksiyonlarının uzayı ve $C_B[0, \infty)$ ile de $[0, \infty)$ aralığında tanımlı reel değerli sürekli ve sınırlı f fonksiyonlarının uzayı gösterilsin. $C_B[0, \infty)$ uzayı üzerindeki norm,

$$\|f\| = \sup_{0 \leq x < \infty} |f(x)|$$

ile tanımlıdır. Eğer $K \subset [0, \infty)$ kompakt bir alt küme ise $C(K)$ uzayı üzerinde de aynı norm kullanılır (Bayraktar, 2006).

Tanım

$f \in C_B[0, \infty)$ olsun. f fonksiyonunun *birinci süreklilik modülü* $\delta > 0$ için

$$\omega(f, \delta) = \sup_{0 < h \leq \delta} \sup_{0 \leq x < \infty} |f(x+h) - f(x)| \quad (2.5)$$

olarak tanımlıdır (Devore ve Lorentz, 1993).

Tanım

$f \in C[0, \infty)$, $E \subset [0, \infty)$, $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Eğer

$$|f(x) - f(y)| \leq M_f |x - y|^\alpha, x \in [0, \infty), y \in E \quad (2.6)$$

olacak şekilde bir $M_f > 0$ reel sabiti mevcut ise f 'ye *yerel Lipschitz- α fonksiyonu* denir ve yerel Lipschitz- α fonksiyonların sınıfı $Lip-\alpha$ ile gösterilir (Agratini, 2020).

Tanım

(x_n) ve (y_n) herhangi iki reel sayı dizisi, $1 < p, q < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olacak şekilde p ve q iki sayı olsun.

Eğer

$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q$ serileri yakınsaksa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p} (\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q)^{1/q} \quad (2.7)$$

eşitsizliğine *Hölder eşitsizliği* denir. Burada $p = q = 2$ alınırsa, bu eşitsizlik *Cauchy-Schwarz eşitsizliği* olarak bilinmektedir (Bayraktar, 2006).

2.2. İki Değişkenli Lineer Pozitif Operatörlerin Temel Kavramları

Tanım

$I = [0, a_1] \times [0, a_2]$ olsun. $C(I)$, I üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonlar uzayını gösterebilir. Bu uzay

$$\|f\|_{C(I)} = \max_{(x,y) \in I} |f(x, y)|$$

normu ile bir *Banach uzayıdır* (Bayraktar, 2006).

Tanım

$n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ olsun. $(f_{n_1, n_2}), C(I)$ üzerinde bir fonksiyon dizisi olmak üzere,

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \|f_{n_1, n_2} - f\|_{C(I)} = \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \max_{(x, y) \in I} |f_{n_1, n_2}(x, y) - f(x, y)| = 0$$

koşulu sağlanıyorsa, (f_{n_1, n_2}) fonksiyon dizisi I üzerinde f ye *düzgün yakınsaktır* denir (Bayraktar, 2006).

Volkov (1957)'nin iki değişkenli fonksiyonlar için verdiği düzgün yakınsaklık teoremini hatırlayalım.

Teorem (Volkov teoremi)

$A, \mathbb{R}^{2'}$ de kapalı ve sınırlı bir bölge, $C(A)$, bu A bölgesinde tanımlı sürekli ve reel değerli f fonksiyonların kümesi, $L_{n,m}(f(t,s); x, y), C(A)$ üzerinde tanımlı bir lineer pozitif operatörler dizisi,

$$f_0 = e_{00}(t, s) = 1,$$

$$f_1 = e_{10}(t, s) = t,$$

$$f_2 = e_{01}(t, s) = s,$$

$$f_3 = e_{20}(t, s) + e_{02}(t, s) = t^2 + s^2$$

olsun. $(L_{n,m})$ lineer pozitif operatörler dizisi

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|L_{n,m}(f_i) - f_i\|_{C(A)} = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

şartlarını sağlıyorsa, bu durumda her $f \in C(A)$ için A üzerinde

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|L_{n,m}(f) - f\|_{C(A)} = 0$$

gerçeklenir (Volkov, 1957).

Tanım

Herhangi bir iki değişkenli $f \in C(A)$ fonksiyonunun *tam süreklilik modülü*

$$\omega(f; \delta_1, \delta_2) = \sup_{\substack{|t-x| \leq \delta_1 \\ |s-y| \leq \delta_2}} |f(t, s) - f(x, y)|$$

olarak tanımlıdır. Burada $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ ve $(t, s), (x, y) \in A$ dır. $\omega(f; \delta_1, \delta_2)$ tam süreklilik modülü için

$$\lim_{\delta_1, \delta_2 \rightarrow 0^+} \omega(f; \delta_1, \delta_2) = 0,$$

limiti gerçekleşir ve aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$|f(t, s) - f(x, y)| \leq \omega(f; \delta_1, \delta_2) \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta_1}\right) \left(1 + \frac{|s-y|}{\delta_2}\right) \quad (2.8)$$

Herhangi bir iki değişkenli $f \in C(A)$, x ve y ' ye göre *kısmi süreklilik modülleri* sırasıyla

$$\omega_1(f; \delta_1) = \sup_{|t-x| \leq \delta_1} |f(t, s) - f(x, s)|,$$

$$\omega_2(f; \delta_2) = \sup_{|s-y| \leq \delta_2} |f(t, s) - f(t, y)|$$

olarak tanımlıdır. Burada $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ ve $(t, s), (x, s), (t, y) \in A$.

$\omega_1(f; \delta_1), \omega_2(f; \delta_2)$ aşağıdaki eşitsizlikleri gerçekler:

$$|f(t, s) - f(x, s)| \leq \omega_1(f; \delta_1) \left(1 + \frac{(t-x)^2}{\delta_1}\right), \quad (2.9)$$

$$|f(t, s) - f(t, y)| \leq \omega_2(f; \delta_2) \left(1 + \frac{(s-y)^2}{\delta_2}\right), \quad (2.10)$$

Burada $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ ve $(t, s), (x, s), (t, y) \in A$.

Herhangi bir iki değişkenli $f \in C(A)$ fonksiyonunun $Lip_M(\alpha_1, \alpha_2)$ ile gösterilen *Lipschitz sınıfı*

$$|f(t, s) - f(x, y)| \leq M|t - x|^{\alpha_1}|s - y|^{\alpha_2} \quad (2.11)$$

eşitsizliğini gerçekleyen fonksiyonların sınıfıdır. Burada $(t, s), (x, y) \in A$, $0 < \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$ ' dir. (Anastassiou ve Gal, 2000).

$\rho: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ iki değişkenli ağırlık fonksiyonu olsun. B_ρ ile $[0, \infty) \times [0, \infty)$ üzerinde tanımlı, her $(x, y) \in [0, \infty) \times [0, \infty)$ için,

$|f(x, y)| \leq M_f \rho(x, y)$, $M_f > 0$ şartını sağlayan reel değerli fonksiyonların uzayı gösterilsin. C_ρ ise, B_ρ nun tüm sürekli f fonksiyonlarının alt uzayını göstereyin.

C_ρ ve B_ρ uzayları üzerindeki norm her $f \in C_\rho$ (veya B_ρ) için

$$\|f\|_\rho = \sup_{x, y \geq 0} \frac{|f(x, y)|}{\rho(x, y)}$$

olarak tanımlıdır.

$$C_\rho^0 \text{ ile de } \lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty} \frac{|f(x, y)|}{\rho(x, y)} < \infty$$

olacak şekilde bütün f fonksiyonlarının C_ρ içindeki alt uzayı gösterilsin.

Gadzhiev (1974;1976) aşığıdaki ağırlıklı yaklaşım teoremini vermiştir.

Lemma (Gadzhiev' in ağırlıklı yaklaşım teoremi)

$\{L_{n_1, n_2}\}_{n_1, n_2 \in \mathbb{N}}$, C_ρ 'dan B_ρ ' ya tanımlı herhangi bir lineer pozitif operatörlerin dizisi olsun.

Bu durumda

$$\|L_{n_1, n_2}(\rho)\|_\rho \leq M$$

olacak şekilde bir $M > 0$ reel sayısı mevcuttur (Gadzhiev, 1974;1976).

Teorem

$$f_0 = e_{00}(t, s) = 1, \quad f_1 = e_{10}(t, s) = t, \quad f_2 = e_{01}(t, s) = s,$$

$$f_3 = e_{20}(t, s) + e_{02}(t, s) = t^2 + s^2$$

iki değişkenli test fonksiyonları ve $\{L_{n_1, n_2}\}_{n_1, n_2 \in \mathbb{N}}$ C_ρ 'dan B_ρ 'ya lineer pozitif operatörlerin

herhangi bir dizisi olsun. Eğer $\{L_{n_1, n_2}\}_{n_1, n_2 \in \mathbb{N}}$ operatörler dizisi

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \|L_{n_1, n_2}(f_i) - f_i\|_\rho = 0, i = 0, 1, 2, 3$$

şartlarını sağlar ise, bu durumda her $f \in C_\rho^0$ için

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \|L_{n_1, n_2}(f) - f\|_\rho = 0$$

limiti doğrudur (Gadzhiev, 1974;1976).

3. TEK DEĞİŞKENLİ BERNSTEİN TİP OPERATÖRLERİN BİR SINIFI

3.1. Tek Değişkenli Operatörlerin Tanımı ve Özellikleri

Tanım

Agratini (2020), kesin azalan bir (λ_n) reel sayı dizisini

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} n\lambda_n = \infty, \quad (3.1)$$

seçerek, belirli bir büyüme koşuluna sahip her $f \in C([0, \infty))$ için Bernstein tip rasyonel fonksiyonların bir sınıfını

$$L_n(f; x) = \frac{1}{(1+\lambda_n x)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\lambda_n x)^k f\left(\frac{k}{n\lambda_n}\right), n \in \mathbb{N}, x \geq 0. \quad (3.2)$$

olarak tanımlamıştır. Bu rasyonel fonksiyonlar, (1.2) ile verilen Balázs operatörlerinin sabitleri yeniden üreten değiştirilmiş bir lineer ve pozitif operatörüdür.

Lemma

$n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, \infty)$ ve $e_i(t) = t^i$, $i = 0, 1, 2$ olsun. Eş.3.2’de verilen değiştirilmiş Balázs operatörleri için aşağıdaki ifadeler doğrudur (Agratini, 2020):

$$L_n(e_0; x) = 1, \quad (3.3)$$

$$L_n(e_1; x) = \frac{x}{1+\lambda_n x}, \quad (3.4)$$

$$L_n(e_2; x) = \frac{1}{(1+\lambda_n x)^2} \left(x^2 + \frac{x}{n\lambda_n} \right). \quad (3.5)$$

İspat

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\lambda_n x)^k = (1 + \lambda_n x)^n \quad (3.6)$$

eşitliğinden Eş.3.3. açıktır. Eş.3.6.'dan

$$\begin{aligned}
 L_n(e_1; x) &= \frac{1}{(1 + \lambda_n x)^n} \sum_{k=0}^n \frac{k}{n\lambda_n} \binom{n}{k} (\lambda_n x)^k \\
 &= \frac{x}{(1 + \lambda_n x)^n} \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} (\lambda_n x)^{k-1} \\
 &= \frac{x}{1 + \lambda_n x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_n(e_2; x) &= \frac{1}{(1 + \lambda_n x)^n} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2(\lambda_n)^2} \binom{n}{k} (\lambda_n x)^k \\
 &= \frac{1}{(1 + \lambda_n x)^n} \left(\sum_{k=2}^n \frac{n-1}{n(\lambda_n)^2} \binom{n-2}{k-2} (\lambda_n x)^k \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{n(\lambda_n)^2} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2(\lambda_n)^2} \binom{n-1}{k-1} (\lambda_n x)^k \right) \\
 &= \frac{n-1}{n} \frac{x^2}{(1 + \lambda_n x)^2} + \frac{x}{n\lambda_n(1 + \lambda_n x)}
 \end{aligned}$$

Sonuç

$n \in \mathbb{N}$, $x, t \in [0, \infty)$, $i = 1, 2$, $\varphi_{x,i}(t) := (t - x)^i$ olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur (Agratini, 2020):

$$L_n(\varphi_{x,1}; x) = -\frac{\lambda_n x}{1 + \lambda_n x}, \quad (3.7)$$

$$L_n(\varphi_{x,2}; x) = \frac{(\lambda_n)^2 x^4}{(1 + \lambda_n x)^2} + \frac{x}{n\lambda_n(1 + \lambda_n x)^2}. \quad (3.8)$$

İspat

Eş.3.3-3.5. eşitlikleri kullanılarak ispat kolaylıkla elde edilir.

3.2. Tek Değişkenli Operatörlerin Yaklaşımı

3.2.1. korovkin tip yaklaşım

Teorem

(λ_n) , Eş.3.1.' deki şartları sağlayan bir reel sayı dizisi ve $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$, Eş.3.2. ile verilen lineer pozitif operatörlerin dizisi olsun. Herhangi bir $K \subset [0, \infty)$ kompakt aralığı ve her $f \in C([0, \infty))$ için $(L_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$, kompakt K aralığı üzerinde f ' ye düzgün olarak yakınsar.

İspat

Eş.3.1. şartı ve Eş.3.3-3.5. eşitlikleri dikkate alınarak, her $x \in [0, \infty)$ ve $e_i(t) = t^i$, $i = 0, 1, 2$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(e_i; x) = e_i(x) \quad (3.9)$$

elde edilir. $T_K: C([0, \infty)) \rightarrow C(K)$, her $f \in C([0, \infty))$ için $T_K(f) = f|_K$ latis homomorfizmi tanımlansın. Eş.3.9.'dan , $i = 0, 1, 2$ için $T_K(L_n(e_i))$, K üzerinde $T_K(e_i)$ ' ye düzgün olarak yakınsar. Korovkin (1953) teoremin şartları sağlandığından istenen sonuç elde edilir.

3.2.2. Yakınsama oranları

Agratini (2020) birinci süreklilik modülü yardımıyla aşağıdaki yakınsama oranını elde etmiştir:

Teorem

(λ_n) , Eş.3.1.' deki şartları sağlayan bir reel sayı dizisi ve $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$, Eş.3.2. ile verilen lineer pozitif operatörlerin dizisi olsun. Herhangi bir $f \in C_B([0, \infty))$ için

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq (1 + \sqrt{x^4 + x})\omega(f, \lambda_n^*), x \geq 0, \quad (3.10)$$

eşitsizliği doğrudur. Burada

$$\lambda_n^* = \max\{(\lambda_n)^2, (n\lambda_n)^{-1}\}. \quad (3.11)$$

(Agratini, 2020)

İspat

$A, C([0, \infty))$ üzerinde tanımlı bir lineer pozitif operatör, $x \in [0, \infty)$ ve $\delta > 0$ olmak üzere her $f \in C_B([0, \infty))$ için ispat Shisha ve Mond (1968) tarafından verilen aşağıdaki eşitsizlik yardımıyla elde edilir:

$$|A(f; x) - f(x)| \leq |f(x)| |A(e_0; x) - 1| + \left(A(e_0; x) + \frac{1}{\delta} \sqrt{A(e_0; x)A(\varphi_{x,2}; x)} \right) \omega(f, \delta). \quad (3.12)$$

Her $\delta > 0$ için $\omega(f, \delta) < \infty$ elde edebilmek için Shisha ve Mond (1968) eşitsizliğinin orijinal hali kompakt bir aralık üzerinde verilmiştir. Burada $C_B([0, \infty))$ uzayında çalışıldığından $[0, \infty)$ sınırsız aralığı için de Shisha ve Mond (1968) eşitsizliği doğrudur.

$A = L_n$ seçilip, Eş.3.3. ve Eş.3.8. kullanılarak, $\delta > 0$ için

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{L_n(\varphi_{x,2}; x)} \right) \omega(f, \delta) \quad (3.13)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$L_n(\varphi_{x,2}; x) \leq (\lambda_n)^2 x^4 + \frac{x}{n\lambda_n} \leq \lambda_n^* (x^4 + x) \quad (3.14)$$

bulunur. Eş.3.13.'de $\delta = \sqrt{\lambda_n^*}$ seçilerek ispat tamamlanır.

Sonuç

i. Eğer $f \in C([0, \infty))$ ve $[a, b] \subset [0, \infty)$ ise Teorem 3.2.2' deki Eş.3.10. aşağıdaki eşitsizliğe indirgenir:

$$\|L_n(f) - f\|_{[a,b]} \leq \left(1 + \sqrt{b^4 + b}\right) \omega_{[a,b]}(f; \lambda_n^*).$$

ii. λ_n^* ' nin Eş.3.11. ile verilen tanımı ve Eş.3.1. şartı altında (λ_n) reel sayı dizisinin kesin artan olma şartı da korunarak iki olasılık mevcuttur.

a) $\lambda_n < n^{-1/3}$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} n\lambda_n = \infty$

Bu durumda $\lambda_n^* = (n\lambda_n)^{-1}$ 'dir.

b) $\lambda_n > n^{-1/3}$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$.

Bu durumda $\lambda_n^* = (\lambda_n)^2$ 'dir.

$\lambda_n = n^{-1/3}$ durumu, Balázs (1975)' ında incelenmiştir.

Agratini (2020), yerel Lipschitz- α fonksiyonların sınıfı yardımıyla aşağıdaki yakınsama oranını vermiştir.

Teorem

(λ_n) , Eş.3.1.' deki şartları sağlayan bir reel sayı dizisi ve $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$, Eş.3.2. ile verilen lineer pozitif operatörlerin dizisi olsun. Herhangi bir $f \in \text{Lip-}\alpha$ için

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq M_f \left((\lambda_n^*)^{\frac{\alpha}{2}} \max \left\{ x^{2\alpha}, x^{\frac{\alpha}{2}} \right\} + 2d(x, E) \right), x \geq 0.$$

Burada λ_n^* , Eş.3.11.'de verilmiştir ve $d(x, E) = \inf\{|x - y|: y \in E\}$, x 'in E 'ye uzaklığıdır.

İspat

Hölder eşitsizliğinden elde edilen klasik bir eşitsizlik kullanılarak ispat yapılır. $r = 2\alpha^{-1}$ alınarak, Eş.3.2. ve Eş.3.3.'den

$$L_n(h^\alpha; x) \leq (L_n(h^2; x))^{\frac{\alpha}{2}}, x \geq 0$$

elde edilir. Burada $\alpha \in (0, 1]$ ve $h \geq 0$. $h = |\varphi_{x,1}|$ seçilerek ve Eş.3.14. kullanılarak,

$$L_n(|e_1 - xe_0|^\alpha; x) \leq \left(L_n((\varphi_{x,2})^2; x) \right)^{\frac{\alpha}{2}} \leq (\lambda_n^*(x^4 + x))^{\frac{\alpha}{2}}, x \geq 0 \quad (3.15)$$

elde edilir. f , sürekli olduğundan, Eş.2.6. eşitsizliği, her $x \geq 0$ ve $y \in \bar{E}$ için doğrudur. Burada $\bar{E}$, $E \subset [0, \infty)$ alt kümesini kapamıştır. $x \in [0, \infty)$ ve $x_0 \in \bar{E}$ olsun. $d(x, E) = |x - x_0|$ dir. Mutlak değer üçgen eşitsizliği özelliğinden

$$|f - f(x)| \leq |f - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x)| \quad (3.16)$$

yazılır. L_n 'nin lineer ve pozitif operatör olması nedeniyle monotonluk özelliğine sahiptir. L_n , Eş.3.16 ile verilen eşitsizliğe uygulanarak

$$\begin{aligned} |L_n(f; x) - f(x)| &\leq L_n(|f - f(x_0)|; x) + |f(x_0) - f(x)| \\ &\leq L_n(M_f |e_1 - xe_0|^\alpha; x) + M_f(x - x_0)^\alpha. \end{aligned} \quad (3.17)$$

elde edilir. $a \geq 0, b \geq 0$ ve $0 < \alpha \leq 1$ için $(a + b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha$ eşitsizliğinde $a = |e_1 - xe_0|$ ve $b = |x - x_0|e_0$ alınırsa

$$|e_1 - x_0e_0|^\alpha \leq |e_1 - xe_0|^\alpha + (|x - x_0|e_0)^\alpha$$

yazılabilir. Eş.3.3. ve Eş.3.15. kullanılarak,

$$L_n(M_f |e_1 - x_0e_0|^\alpha; x) \leq M_f(L_n(M_f |e_1 - xe_0|^\alpha; x) + |x - x_0|^\alpha)$$

$$\leq M_f \left((\lambda_n^* x^4)^{\frac{\alpha}{2}} + (\lambda_n^* x)^{\frac{\alpha}{2}} + |x - x_0|^\alpha \right) \quad (3.18)$$

elde edilir. Eş.3.18., Eş.3.17' de yerine koyulduğunda ispat tamamlanır.



4. İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEİN TİP OPERATÖRLERİN BİR SINIFI

4.1. İki Değişkenli Operatörlerin Tanımı ve Özellikleri

Tanım

(λ_n^1) ve (λ_m^2) ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^1 = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} n\lambda_n^1 = \infty, \quad (4.1)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m^2 = 0, \lim_{m \rightarrow \infty} m\lambda_m^2 = \infty, \quad (4.2)$$

şartlarını sağlayan kesin azalan reel sayı dizileri ve belirli bir büyüme koşuluna sahip her $f \in C([0, \infty) \times [0, \infty))$ için iki değişkenli Bernstein tipi rasyonel fonksiyonların iki bir sınıfını

$$L_{n,m}(f; x, y) = \frac{1}{(1 + \lambda_n^1 x)^n} \frac{1}{(1 + \lambda_m^2 y)^m} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{n}{k} (\lambda_n^1 x)^k \binom{m}{j} (\lambda_m^2 y)^j f\left(\frac{k}{n\lambda_n^1}, \frac{j}{m\lambda_m^2}\right) \quad (4.3)$$

olarak tanımlansın. Bu iki değişkenli rasyonel fonksiyonun lineer pozitif bir operatördür. (Özkan ve Ata; 2021)

Lemma

$i, j = 0, 1, 2$ için $e_{ij}(t, s) = t^i s^j$ iki değişkenli test fonksiyonu olsun. $L_{n,m}$ operatörü için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$L_{n,m}(e_{00}; x, y) = 1 \quad (4.4)$$

$$L_{n,m}(e_{10}; x, y) = \frac{x}{1 + \lambda_n^1 x} \quad (4.5)$$

$$L_{n,m}(e_{01}; x, y) = \frac{y}{1+\lambda_m^2 y} \quad (4.6)$$

$$L_{n,m}(e_{20}; x, y) = \frac{1}{(1+\lambda_n^1 x)^2} \left(x^2 + \frac{x}{n\lambda_n^1} \right). \quad (4.7)$$

$$L_{n,m}(e_{02}; x, y) = \frac{1}{(1+\lambda_m^2 y)^2} \left(y^2 + \frac{y}{m\lambda_m^2} \right). \quad (4.8)$$

(Özkan ve Ata; 2021)

İspat

Eş.4.32 ile verilen $L_{n,m}$ 'nin tanımında $f = e_{00} = 1$ seçilsin.

$$(1 + \lambda_n^1 x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\lambda_n^1 x)^k \quad (4.9)$$

$$(1 + \lambda_m^2 y)^m = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (\lambda_m^2 y)^j \quad (4.10)$$

eşitliklikleri dikkate alınarak

$$L_{n,m}(e_{00}; x, y) = 1$$

kolaylıkla elde edilir.

Eş.4.32 ile verilen $L_{n,m}$ 'nin tanımında $f = e_{10} = t$ seçilsin.

Eş.4.9. ve Eş.4.10 dikkate alınarak

$$\begin{aligned} L_{n,m}(e_{10}; x, y) &= \frac{x}{(1 + \lambda_n^1 x)^n} \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} (\lambda_n^1 x)^{k-1} \\ &\times \frac{1}{(1 + \lambda_m^2 y)^m} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (\lambda_m^2 y)^j \end{aligned}$$

$$= \frac{x}{1 + \lambda_n^1 x}$$

elde edilir. Eş.4.6'nın ispatı Eş.4.5'in ispatına benzer yöntemle ispatlanmaktadır. Bu yüzden ispatı verilmeyecektir.

Eş.4.9. ve Eş.4.10 dikkate alınarak

$$\begin{aligned} L_{n,m}(e_{20}; x, y) &= \frac{1}{(1 + \lambda_n^1 x)^n} \left(\sum_{k=2}^n \frac{n-1}{n(\lambda_n^1)^2} \binom{n-2}{k-2} (\lambda_n^1 x)^k \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n(\lambda_n^1)^2} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2(\lambda_n^1)^2} \binom{n-1}{k-1} (\lambda_n^1 x)^k \right) \\ &\quad \times \frac{1}{(1 + \lambda_m^2 y)^m} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (\lambda_m^2 y)^j \\ &= \frac{n-1}{n} \frac{x^2}{(1 + \lambda_n^1 x)^2} + \frac{x}{n\lambda_n^1(1 + \lambda_n^1 x)} \end{aligned}$$

elde edilir. Eş.4.8'nin ispatı Eş.4.7'nin ispatına benzer yöntemle ispatlanmaktadır. Bu yüzden ispatı verilmeyecektir.

4.2. İki Değişkenli Operatörlerin Yaklaşımı

4.2.1. Volkov tipi yaklaşım

Bu kısımda, iki değişkenli Bernstein tip rasyonel fonksiyonların bir sınıfını için Volkov tipi bir düzgün yakınsaklık sonucu verilecektir.

Teorem

(λ_n^1) ve (λ_m^2) , Eş.4.1. ve Eş.4.2 ile verilen şartları sağlayan kesin azalan reel sayı dizileri ve belirli bir büyüme koşuluna sahip her $f \in C([0, \infty) \times [0, \infty))$ için $\left(L_{n,m}(f; x, y) \right)_{n \in \mathbb{N}}$

iki değişkenli Bernstein tip rasyonel fonksiyonların bir sınıfı her $[0, a_1] \times [0, a_2] \subset [0, \infty) \times [0, \infty)$ kompakt dikdörtgensel bölge üzerinde f 'ye düzgün olarak yakınsar. (Özkan ve Ata; 2021)

İspat

Eş.4.4'den

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|L_{n,m}(e_{00}) - e_{00}\|_{C([0,a_1] \times [0,a_2])} = 0$$

olduğu açıktır. Eş.4.5' den

$$\left| \frac{x}{1 + \lambda_n^1 x} - x \right| \leq \frac{\lambda_n^1 x^2}{|1 + \lambda_n^1 x|}$$

olduğundan, Eş.4.1 ve Eş.4.2 ile verilen şartlar dikkate alınarak

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|L_{n,m}(e_{10}) - e_{10}\|_{C([0,a_1] \times [0,a_2])} = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde, Eş.4.6, Eş.4.1 ve Eş.4.2 dikkate alınarak

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|L_{n,m}(e_{01}) - e_{01}\|_{C([0,a_1] \times [0,a_2])} = 0$$

olduğu kolaylıkla görölür. Eş 4.7 ve Eş.4.8' den

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{(1 + \lambda_n^1 x)^2} \left(x^2 + \frac{x}{n\lambda_n^1} \right) + \frac{1}{(1 + \lambda_m^2 y)^2} \left(y^2 + \frac{y}{m\lambda_m^2} \right) - x^2 - y^2 \right| \\ & \leq \left| \frac{1}{(1 + \lambda_n^1 x)^2} \left(x^2 + \frac{x}{n\lambda_n^1} \right) - x^2 \right| + \left| \frac{1}{(1 + \lambda_m^2 y)^2} \left(y^2 + \frac{y}{m\lambda_m^2} \right) - y^2 \right| \\ & \leq \frac{1}{(1 + \lambda_n^1 x)^2} \left((\lambda_n^1)^2 x^4 + 2\lambda_n^1 x^3 + \frac{x}{n\lambda_n^1} \right) + \frac{1}{(1 + \lambda_m^2 y)^2} \left((\lambda_m^2)^2 y^4 + 2\lambda_m^2 y^3 + \frac{y}{m\lambda_m^2} \right) \end{aligned}$$

olduğundan, Eş.4.1 ve Eş.4.2 ile verilen şartlar dikkate alınarak

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|L_{n,m}(e_{20} + e_{02}) - (e_{20} + e_{02})\|_{C([0,a_1] \times [0,a_2])} = 0$$

elde edilir. Teorem 2.2.1 ile verilen Volkov teoreminin hipotezleri sağlanır. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

4.2.2. Yakınsama oranları

Bu kısımda, iki değişkenli Bernstein tip rasyonel fonksiyonların bir sınıfını için tam süreklilik modülü, kısmi süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar kullanılarak yakınsama oranları araştırılacaktır.

Teorem

(λ_n^1) ve (λ_m^2) , Eş.4.1. ve Eş.4.2 ile verilen şartları sağlayan kesin azalan reel sayı dizileri ve belirli bir büyüme koşuluna sahip her $f \in C([0, \infty) \times [0, \infty))$ için her $[0, a_1] \times [0, a_2] \subset [0, \infty) \times [0, \infty)$ kompakt dikdörtgensel bölge üzerinde aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$|L_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)| \leq 4\omega\left(f; \sqrt{\delta_n^1(x)}, \sqrt{\delta_m^2(y)}\right).$$

Burada

$$\delta_n^1(x) := \frac{(\lambda_n^1)^2 x^4}{(1 + \lambda_n^1 x)^2} + \frac{x}{n\lambda_n^1(1 + \lambda_n^1 x)^2}, \quad (4.11)$$

$$\delta_m^2(y) := \frac{(\lambda_m^2)^2 y^4}{(1 + \lambda_m^2 y)^2} + \frac{y}{n\lambda_m^2(1 + \lambda_m^2 y)^2}. \quad (4.12)$$

İspat

$L_{n,m}$ 'nin lineerlik ve pozitiflik özelliğini kullanarak $L_{n,m}$ operatörü Eş.2.8' e uygulanarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$|L_{n,m}(f(t, s); x, y) - f(x, y)| \leq \omega(f; \delta_1, \delta_2) \left\{ \frac{1}{\delta_1 \delta_2} L_{n,m}(|e_{10} - x| |e_{01} - y|; x, y) \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\delta_1} L_{n,m}(|e_{10} - x|; x, y) \\
& + \frac{1}{\delta_2} L_{n,m}(|e_{01} - y|; x, y) + 1 \}.
\end{aligned}
\tag{4.13}$$

Eş.4.13'e Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulandığında

$$\begin{aligned}
& |L_{n,m}(f(t, s); x, y) - f(x, y)| \\
& \leq \omega(f; \delta_1, \delta_2) \left\{ \frac{1}{\delta_1 \delta_2} \left(L_{n,m}((e_{10} - x)^2; x, y) \right)^{\frac{1}{2}} \left(L_{n,m}(e_{00}; x, y) \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
& \quad \times \left(L_{n,m}((e_{01} - y)^2; x, y) \right)^{\frac{1}{2}} \left(L_{n,m}(e_{00}; x, y) \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad + \frac{1}{\delta_1} \left(L_{n,m}((e_{10} - x)^2; x, y) \right)^{\frac{1}{2}} \left(L_{n,m}(e_{00}; x, y) \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad \left. + \frac{1}{\delta_2} \left(L_{n,m}((e_{01} - y)^2; x, y) \right)^{\frac{1}{2}} \left(L_{n,m}(e_{00}; x, y) \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right\}.
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş.4.4-Eş.4.8 dikkate alınarak hesaplamalar yapıldığında ve $\delta_1 = \sqrt{\delta_n^1(x)}$ ve $\delta_2 = \sqrt{\delta_m^2(y)}$ seçildiğinde

$$|L_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)| \leq 4\omega\left(f; \sqrt{\delta_n^1(x)}, \sqrt{\delta_m^2(y)}\right)$$

eşitsizliğine ulaşılır. (Özkan ve Ata; 2021)

Teorem

(λ_n^1) ve (λ_m^2) , Eş.4.1 ve Eş.4.2 ile verilen şartları sağlayan kesin azalan reel sayı dizileri ve belirli bir büyüme koşuluna sahip her $f \in C([0, \infty) \times [0, \infty))$ için her $[0, a_1] \times [0, a_2] \subset [0, \infty) \times [0, \infty)$ kompakt dikdörtgensel bölge üzerinde aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$|L_{n,m}(f(t,s); x, y) - f(x, y)| \leq 2\omega_1(f; \delta_n^1(x)) + 2\omega_2(f; \delta_m^2(y))$$

Burada $(t, s), (x, y) \in [0, a_1] \times [0, a_2]$, $\delta_n^1(x)$ ve $\delta_m^2(y)$, Eş.4.11 ve Eş.4.12' de verildiği gibidir.

İspat

$(t, s), (x, s), (t, y) \in [0, a_1] \times [0, a_2]$ ve $f \in C([0, \infty) \times [0, \infty))$ için

$$|f(t, s) - f(x, y)| \leq |f(t, s) - f(t, y)| + |f(t, y) - f(x, y)| \quad (4.14)$$

eşitsizliği doğrudur. $L_{n,m}$ ' nin lineerlik ve pozitiflik özelliği dikkate alınarak, $L_{n,m}$ operatörü Eş.4.14' e uygulanırsa

$$\begin{aligned} & |L_{n,m}(f(t, s); x, y) - f(x, y)| \\ & \leq L_{n,m}(|f(t, s) - f(t, y)|; x, y) + L_{n,m}(|f(t, y) - f(x, y)|; x, y) \end{aligned} \quad (4.15)$$

elde edilir. Eş.2.9 ve Eş.2.10 eşitsizlikleri, Eş.4.15' de dikkate alınır

$$\begin{aligned} & |L_{n,m}(f(t, s); x, y) - f(x, y)| \\ & \leq \omega_2(f; \delta_2) \left(L_{n,m}(e_{00}; x, y) + \frac{1}{\delta_2} L_{n,m}((e_{01} - y)^2; x, y) \right) \\ & + \omega_1(f; \delta_1) \left(L_{n,m}(e_{00}; x, y) + \frac{1}{\delta_1} L_{n,m}((e_{10} - x)^2; x, y) \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

elde edilir. Eş.4.4-Eş.4.8 dikkate alınarak Eş.4.16'da eşitsizliğin sağ tarafı hesaplandığında ve $\delta_1 := \delta_n^1(x)$ ve $\delta_2 := \delta_m^2(y)$ seçilerek

$$|L_{n,m}(f(t, s); x, y) - f(x, y)| \leq 2\omega_1(f; \delta_n^1(x)) + 2\omega_2(f; \delta_m^2(y))$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem

(λ_n^1) ve (λ_m^2) , Eş.4.1 ve Eş.4.2 ile verilen şartları sağlayan kesin azalan reel sayı dizileri ve belirli bir büyüme koşuluna sahip her $f \in Lip_M(\alpha_1, \alpha_2)$ için her $[0, a_1] \times [0, a_2] \subset [0, \infty) \times [0, \infty)$ kompakt dikdörtgensel bölge üzerinde aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$|L_{n,m}(f(t, s); x, y) - f(x, y)| \leq \left(\sqrt{\delta_n^1(x)}\right)^{\alpha_1} \left(\sqrt{\delta_m^2(y)}\right)^{\alpha_2}$$

Burada $(t, s), (x, y) \in [0, a_1] \times [0, a_2]$, $0 < \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$, $\delta_n^1(x)$ ve $\delta_m^2(y)$, Eş.4.11 ve Eş.4.12' de verildiği gibidir. (Özkan ve Ata; 2021)

İspat

$L_{n,m}$ 'nin lineerlik ve pozitiflik özellikleri dikkate alınarak, $f \in Lip_M(\alpha_1, \alpha_2)$ olduğundan, Eş.2.11'den

$$\begin{aligned} |L_{n,m}(f(t, s); x, y) - f(x, y)| &\leq ML_{n,m}(|e_{10} - x|^{\alpha_1} |e_{01} - y|^{\alpha_2}; x, y) \\ &\leq ML_{n,m}(|e_{10} - x|^{\alpha_1}; x, y) \times L_{n,m}(|e_{01} - y|^{\alpha_2}; x, y) \end{aligned} \quad (4.17)$$

yazılabilir. $i = 1, 2$ için $u = \frac{2}{\alpha_i}$, $v = \frac{2}{2-\alpha_i}$ ve $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 1$ olacak şekilde seçilerek Eş.4.17'e Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} |L_{n,m}(f(t, s); x, y) - f(x, y)| &\leq M \left(L_{n,m}((e_{01} - y)^2; x, y) \right)^{\frac{\alpha_2}{2}} \times \left(L_{n,m}(e_{00}; x, y) \right)^{\frac{2-\alpha_2}{2}} \\ &\times \left(L_{n,m}((e_{10} - x)^2; x, y) \right)^{\frac{\alpha_1}{2}} \times \left(L_{n,m}(e_{00}; x, y) \right)^{\frac{2-\alpha_1}{2}} \end{aligned} \quad (4.18)$$

elde edilir. Eş.4.4-Eş.4.8 dikkate alınarak, Eş.4.18 hesaplandığında ve $\delta_1 := \delta_n^1(x)$ ve $\delta_2 := \delta_m^2(y)$ seçilerek

$$|L_{n,m}(f(t,s);x,y) - f(x,y)| \leq \left(\sqrt{\delta_n^1(x)}\right)^{\alpha_1} \left(\sqrt{\delta_m^2(y)}\right)^{\alpha_2}$$

sonucu bulunur.

Teorem

(λ_n^1) ve (λ_m^2) , Eş.4.1 ve Eş.4.2 ile verilen şartları sağlayan kesin azalan reel sayı dizileri ve belirli bir büyüme koşuluna sahip her $f \in C([0, \infty) \times [0, \infty))$ için her $[0, a_1] \times [0, a_2] \subset [0, \infty) \times [0, \infty)$ kompakt dikdörtgensel bölge üzerinde aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$|L_{n,m}(f(t,s);x,y) - f(x,y)| \leq 4K \left(f, \sqrt{\mu_{n,m}(x,y)}\right) + \omega(f; \gamma_n^1(x), \gamma_m^2(x))$$

Burada $\delta_n^1(x)$ ve $\delta_m^2(y)$, Eş.4.11 ve Eş.4.12' de verildiği gibidir. Ayrıca

$$\mu_{n,m}(x,y) := L_{n,m}((e_{10} - x)^2; x,y) + \left(L_{n,m}(e_{10} - x; x,y)\right)^2$$

$$+ L_{n,m}((e_{01} - y)^2; x,y) + \left(L_{n,m}(e_{01} - y; x,y)\right)^2$$

$$\gamma_n^1(x) := \frac{\lambda_n^1 x^2}{1 + \lambda_n^1 x}$$

$$\gamma_m^2(y) := \frac{\lambda_m^2 y^2}{1 + \lambda_m^2 y}$$

(Özkan ve Ata; 2021)

İspat

$(x,y) \in [0, \infty) \times [0, \infty)$ ve $f \in C([0, \infty) \times [0, \infty))$ için

$$\hat{L}_{n,m}(f; x, y) := L_{n,m}(f; x, y) - f(\alpha_1, \alpha_2) + f(x, y) \quad (4.19)$$

yardımcı operatörü tanımlansın. Burada

$$\alpha_1 = \frac{x}{1 + \lambda_n^1 x}$$

$$\alpha_2 = \frac{y}{1 + \lambda_m^2 y}$$

dir. $\hat{L}_{n,m}$ yardımcı operatörü lineer ve pozitifdir. Lemma 4.1.1' den,

$$\hat{L}_{n,m}(e_{10}; x, y) = L_{n,m}(e_{10}; x, y) - \alpha_1 + x = x \quad (4.20)$$

$$\hat{L}_{n,m}(e_{01}; x, y) = L_{n,m}(e_{01}; x, y) - \alpha_2 + y = y \quad (4.21)$$

elde edilir. Eş.4.20 ve Eş.4.21' den

$$\hat{L}_{n,m}(e_{10} - x; x, y) = 0 \quad (4.22)$$

$$\hat{L}_{n,m}(e_{01} - y; x, y) = 0 \quad (4.23)$$

bulunur.

$C^2([0, a_1] \times [0, a_2])$ birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri sürekli tüm fonksiyonlardan oluşan $C([0, a_1] \times [0, a_2])$ nın bir alt uzayı olsun.

Her $f \in C^2([0, a_1] \times [0, a_2])$ için

$$\|f\|_{C^2(I)} = \|f\|_{C(I)} + \sum_{i=1}^2 \left(\left\| \frac{\partial^i f}{\partial x^i} \right\|_{C(I)} + \left\| \frac{\partial^i f}{\partial y^i} \right\|_{C(I)} \right)$$

bir normdur. Burada $I = [0, a_1] \times [0, a_2]$ olmak üzere

$$\|f\|_{C(I)} = \max_{x,y \in I} |f(x, y)|$$

dir. $f \in C([0, a_1] \times [0, a_2])$ ve $\delta > 0$ için Petree K -fonksiyoneli

$$K(f; \delta) = \inf_{g \in C^2(I)} \{ \|f - g\|_{C(I)} + \delta \|g\|_{C^2(I)} \}$$

$g \in C^2([0, a_1] \times [0, a_2])$ ve $(t, s), (x, y) \in [0, a_1] \times [0, a_2]$ için Taylor teoreminden,

$$\begin{aligned} g(t, s) - g(x, y) &= g(t, y) - g(x, y) + g(t, s) - g(t, y) \\ &= \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} (t - x) + \int_x^t (t - \xi) \frac{\partial^2 g(\xi, y)}{\partial \xi^2} d\xi \\ &\quad + \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} (s - y) + \int_y^s (s - \eta) \frac{\partial^2 g(x, \eta)}{\partial \eta^2} d\eta \end{aligned} \tag{4.24}$$

yazılabilir. Eş.4.19 ile tanımlanan $\hat{L}_{n,m}$ yardımcı operatörünün lineerlik özelliği dikkate alınarak Eş.4.24' e uygulanırsa

$$\begin{aligned} \hat{L}_{n,m}(g; x, y) - g(x, y) &= \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \hat{L}_{n,m}(e_{10} - x; x, y) \\ &\quad + \hat{L}_{n,m} \left(\int_x^t (t - \xi) \frac{\partial^2 g(\xi, y)}{\partial \xi^2} d\xi; x, y \right) \\ &\quad + \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \hat{L}_{n,m}(e_{01} - y; x, y) \\ &\quad + \hat{L}_{n,m} \left(\int_y^s (s - \eta) \frac{\partial^2 g(x, \eta)}{\partial \eta^2} d\eta; x, y \right) \end{aligned} \tag{4.25}$$

elde edilir. Eş.4.25' de Eş.4.22 ve Eş.4.23 yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\hat{L}_{n,m}(g; x, y) - g(x, y) &= L_{n,m} \left(\int_x^t (t - \xi) \frac{\partial^2 g(\xi, y)}{\partial \xi^2} d\xi; x, y \right) \\
&+ \int_x^{\alpha_1} (\alpha_1 - \xi) \frac{\partial^2 g(\xi, y)}{\partial \xi^2} d\xi \\
&+ L_{n,m} \left(\int_y^s (s - \eta) \frac{\partial^2 g(x, \eta)}{\partial \eta^2} d\eta; x, y \right) \\
&+ \int_y^{\alpha_2} (\alpha_2 - \eta) \frac{\partial^2 g(x, \eta)}{\partial \eta^2} d\eta
\end{aligned} \tag{4.25}$$

elde edilir. Eş.4.25'i mutlak değerine üçgen eşitsizliği ve $C^2([0, a_1] \times [0, a_2])$ uzayın üzerinde tanımlı normunun özelliği dikkate alındığında,

$$\begin{aligned}
|\hat{L}_{n,m}(g; x, y) - g(x, y)| &\leq L_{n,m} \left(\int_x^t |t - \xi| \left| \frac{\partial^2 g(\xi, y)}{\partial \xi^2} \right| d\xi; x, y \right) \\
&+ \int_x^{\alpha_1} |\alpha_1 - \xi| \left| \frac{\partial^2 g(\xi, y)}{\partial \xi^2} \right| d\xi \\
&+ L_{n,m} \left(\int_y^s |s - \eta| \left| \frac{\partial^2 g(x, \eta)}{\partial \eta^2} \right| d\eta; x, y \right) \\
&+ \int_y^{\alpha_2} |\alpha_2 - \eta| \left| \frac{\partial^2 g(x, \eta)}{\partial \eta^2} \right| d\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|g\|_{C^2} L_{n,m} \left(\int_x^t |t - \xi| d\xi; x, y \right) + \|g\|_{C^2} \int_x^{\alpha_1} |\alpha_1 - \xi| d\xi \\
&+ \|g\|_{C^2} L_{n,m} \left(\int_y^s |s - \eta| d\eta; x, y \right) + \|g\|_{C^2} \int_y^{\alpha_2} |\alpha_2 - \eta| d\eta
\end{aligned}
\tag{4.26}$$

elde edilir. Eş. 4.26' deki son eşitsizlikteki tüm integraller değişken değiştirme yöntemiyle hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
&|\hat{L}_{n,m}(g; x, y) - g(x, y)| \\
&\leq \frac{1}{2} \|g\|_{C^2} L_{n,m}((e_{10} - x)^2; x, y) + \frac{1}{2} \|g\|_{C^2} (\alpha_1 - x)^2 \\
&+ \frac{1}{2} \|g\|_{C^2} L_{n,m}((e_{01} - y)^2; x, y) + \frac{1}{2} \|g\|_{C^2} (\alpha_2 - y)^2 \\
&\leq \|g\|_{C^2} L_{n,m}((e_{10} - x)^2; x, y) + \|g\|_{C^2} \left(L_{n,m}(e_{10} - x; x, y) \right)^2 \\
&+ \|g\|_{C^2} L_{n,m}((e_{01} - y)^2; x, y) + \|g\|_{C^2} \left(L_{n,m}(e_{01} - y; x, y) \right)^2
\end{aligned}
\tag{4.27}$$

elde edilir. Eş.4.27' de

$$\begin{aligned}
\mu_{n,m}(x, y) &:= L_{n,m}((e_{10} - x)^2; x, y) + \left(L_{n,m}(e_{10} - x; x, y) \right)^2 + L_{n,m}((e_{01} - y)^2; x, y) \\
&+ \left(L_{n,m}(e_{01} - y; x, y) \right)^2
\end{aligned}$$

alınırsa,

$$|\hat{L}_{n,m}(g; x, y) - g(x, y)| \leq \mu_{n,m}(x, y) \|g\|_{C^2} \tag{4.28}$$

bulunur. Burada her $(x, y) \in [0, a_1] \times [0, a_2]$ için

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \mu_{n,m}(x, y) = 0$$

olduğu Lemma 4.1.1' den açıktır.

Ayrıca, Eş.4.19 ve üçgen eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} |\hat{L}_{n,m}(f - g; x, y)| &\leq |L_{n,m}(f - g; x, y)| + |(f - g)(\alpha_1, \alpha_2)| + |(f - g)(x, y)| \\ &\leq \|f - g\|_{C(I)} (L_{n,m}(e_{00}; x, y) + 1 + 1) \\ &= 3\|f - g\|_{C(I)} \\ |\hat{L}_{n,m}(f - g; x, y)| &\leq 3\|f - g\|_{C(I)} \end{aligned} \tag{4.29}$$

ve

$$\begin{aligned} |f(\alpha_1, \alpha_2) - f(x, y)| &\leq \omega(f; |\alpha_1 - x|, |\alpha_2 - y|) \\ &\leq \omega(f; |L_{n,m}(e_{10} - x; x, y)|, |L_{n,m}(e_{01} - y; x, y)|) \end{aligned}$$

bulunur.

$$\gamma_n^1(x) := |L_{n,m}(e_{10} - x; x, y)|$$

$$\gamma_m^2(x) := |L_{n,m}(e_{01} - y; x, y)|$$

alınırsa,

$$|f(\alpha_1, \alpha_2) - f(x, y)| \leq \omega(f; \gamma_n^1(x), \gamma_m^2(x)) \tag{4.30}$$

elde edilir

Eş.4.28, Eş.4.29 ve Eş.4.30 dikkate alınarak, her $f \in \mathcal{C}([0, a_1] \times [0, a_2])$ ve $g \in \mathcal{C}^2([0, a_1] \times [0, a_2])$ için

$$\begin{aligned}
& |L_{n,m}(f(t, s); x, y) - f(x, y)| \\
& \leq |\hat{L}_{n,m}(f; x, y) - f(x, y) + f(\alpha_1, \alpha_2) - f(x, y)| \\
& \leq |\hat{L}_{n,m}(f - g; x, y)| + |\hat{L}_{n,m}(g; x, y) - g(x, y)| + |g(x, y) - f(x, y)| \\
& \quad + |f(\alpha_1, \alpha_2) - f(x, y)| \\
& \leq 4\|f - g\|_{\mathcal{C}(I)} + \mu_{n,m}(x, y)\|g\|_{\mathcal{C}^2} +
\end{aligned}$$

yani,

$$|L_{n,m}(f(t, s); x, y) - f(x, y)| \leq 4\|f - g\|_{\mathcal{C}(I)} + \mu_{n,m}(x, y)\|g\|_{\mathcal{C}^2} + \omega(f; \gamma_n^1(x), \gamma_m^2(x)) \quad (4.31)$$

Eş.4.31 eşitsizliğinin sağ tarafında ilk iki teriminin her $g \in \mathcal{C}^2([0, a_1] \times [0, a_2])$ için infimum alınarak ve $\delta := \mu_{n,m}(x, y)$ seçilerek

$$|L_{n,m}(f(t, s); x, y) - f(x, y)| \leq 4K \left(f, \sqrt{\mu_{n,m}(x, y)} \right) + \omega(f; \gamma_n^1(x), \gamma_m^2(x))$$

bulunur.



5. SONUÇLAR

Bu tezde, Agratini (2020) tarafından verilen Bernstein tip rasyonel fonksiyonların bir sınıfının yaklaşım özellikleri araştırılmış ve bu sınıfının iki değişkenli operatörleri inşa edilmiştir (Özkan ve Ata; 2021). Bernstein tip rasyonel fonksiyonların bir sınıfının iki değişkenli operatörlerinin dikdörtgensel bölge üzerinde tanımlı herhangi bir reel değerli sürekli f fonksiyonundaki görüntüsünün f ye düzgün yakınsaklığını araştırmak için bu operatörlerin test fonksiyonlarındaki değerlerini hesaplanmıştır. Ayrıca, bu operatörlerin yakınsama hızları tam süreklilik modülü, kısmi süreklilik modülleri ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar açısından incelenmiştir.





KAYNAKLAR

- Agratini, O. (2020). On a class of Bernstein-type rational functions. *Numerical Functional Analysis Optimization*, 41 (4), 483-494.
- Anastassiou, G.A., Gal, S. (2000). *Approximation Theory: Moduli of Continuity and Global Smoothness Preservation*, Birkhauser, Boston.
- Balázs, K. (1975). Approximation by Bernstein type rational funstions. *Acta Mathematica Hungariaca Tomus*, 26 (1-2), 123-134.
- Balázs, K., Szabados, J. (1982). Approximation by Bernstein type rational functions II. *Acta. Math. Acad. Sci. Hungar.*, 40 (3-4), 331-337.
- Bayraktar, M., (2006), *Fonksiyonel Analiz* (5), Gazi Kitabevi, Ankara, 85-86.
- Bernstein, S.N. (2012-2013). Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul de probabilités. *Communitatons of the American Mathematical Society.*, 13 (2), 1-2.
- Devore, R.A., Lorentz, G.G. (1993) *Constructive Approximation: Polynomials and Splines Approximation*. vol.303, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Gadzhiev, A.D. (1974). The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets, and theorems analogous at of P.P. Korovkin. *Doklady Akademi Nauk SSSR*, 218,5, English translated:Soviet Mathematics *Doklody.*,15,5,1433-1436.
- Gadzhiev, A.D. (1976). On Korovkin type theorems, *Math. Zametki.*, 20,5, 781-786.
- Hacısalıhoğlu, H., Hacıyev, A. (1995). *Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı*, Ankara: A.Ü. Fen Fakültesi Yayınları, Ankara,1-20.
- Korovkin, P.P. (1953). On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. *Doklady Akademi Nauk. SSSR.*, 90, 961-964 (In Russian).
- Shisha, O., Mond, B. (1968) The degree of convergence of sequences of linear positive operators. *National Academy of Sciences. U.S.*, 60, 1196-1200.
- Özkan, E.Y, Ata, A.E. (2021, 11-12. Ağustos) *Bivariate Operators of a Class of Bernstein Type Rational Functions*. Paper presented at Euro Asia 9th International Congress on Applied Sciences, Erzurum, Türkiye, 45-46.
- Volkov, V. I. (1957). On the convergence of sequence of linear positive operators in the space of continuous function of two variables. *Doklady Akademi Nauk S.S.S.R. (N.S)*, 115, 17-19.





GAZİLİ OLMAK AYRICALIKTIR