

**BANACH ÖRGÜLERİ ÜZERİNDE TANIMLI ZAYIF KOMPAKT
OPERATÖRLERİN VEKTÖR ÖRGÜLERİ**

Safire Elif GENÇ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**AĞUSTOS 2010
ANKARA**

Safire Elif GENÇ tarafından hazırlanan BANACH ÖRGÜLERİ ÜZERİNDE TANIMLI ZAYIF KOMPAKT OPERATÖRLERİN VEKTÖR ÖRGÜLERİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Birol ALTIN
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Şafak ALPAY
(Matematik Anabilim Dalı, Orta Doğu Teknik Üniversitesi)

Prof. Dr. Bahri TURAN
(Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi)

Doç. Dr. Birol ALTIN
(Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi)

Tarih: 19/08/2010

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Safire Elif GENÇ

**BANACH ÖRGÜLERİ ÜZERİNDE TANIMLI ZAYIF KOMPAKT
OPERATÖRLERİN VEKTÖR ÖRGÜLERİ**

(Yüksek Lisans Tezi)

Safire Elif GENÇ

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Ağustos 2010

ÖZET

Bu tez çalışmasında, E ve F iki Banach örgüsü olmak üzere E den F ye tanımlı zayıf kompakt operatörlerin modülünün var ve zayıf kompakt operatör olduğunu karakterize eden teoremler incelenmiştir. Ayrıca E bir sonsuz boyutlu AL uzayı olduğunda E den F ye tanımlı zayıf kompakt operatörler uzayının vektör örgüsü olmasını karakterize eden önermeler çalışılmıştır.

Bilim Kodu : 204.1.095
Anahtar Kelimeler : Banach örgüsü, Zayıf kompakt operatörler, (W_1) özelliği,
Sayfa Adedi : 68
Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Birol ALTIN

**VECTOR LATTICES OF WEAKLY COMPACT OPERATORS
ON BANACH LATTICES**

(M.Sc. Thesis)

Safire Elif GENÇ

**GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

August 2010

ABSTRACT

In this thesis theorems which characterize that modulus of weakly compact operators, defined from E to F where E and F are Banach lattices, exist and they are also weakly compact operators are investigated. In addition to that propositions which characterize that space of weakly compact operators which are defined from E to F , when E is an infinite dimensional AL space, is vector lattice are studied.

Science Code : 204.1.095

Key Words : Banach lattice, Weakly compact operators, (W_1) property,

Page Number : 68

Adviser : Assoc. Prof. Dr. Birol ALTIN

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve fikirleriyle beni yönlendiren ve kaynaklarla beni destekleyen Sayın Hocam Doç. Dr. Birol ALTIN' a teşekkür ederim. Ayrıca benden yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Prof. Dr. Bahri TURAN' a teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL TANIM VE TEOREMLER.....	2
2.1. Pozitif Operatörler.....	2
2.2. Sıralı Projeksiyonlar.....	7
2.3. Pozitif Lineer Fonksiyoneller.....	9
2.4. Topolojik Vektör Uzayları.....	11
2.5. Banach Örgüleri.....	17
2.6. Kompakt Operatörler.....	23
2.7. Zayıf Kompakt Operatörler.....	24
3. ZAYIF KOMPAKT OPERATÖRLERİN MODÜLÜ.....	31
4. ZAYIF KOMPAKT OPERATÖRLERİN VEKTÖR ÖRGÜLERİ.....	44
KAYNAKLAR.....	67
ÖZGEÇMİŞ.....	68

SİMGELER

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$[x, y]$	Sıralı aralık
$x \vee y$	x ve y nin supremumu
$x \wedge y$	x ve y nin infimumu
x^+	x ve 0 (vektör uzayının sıfırı) ın supremumu
x^-	$-x$ ve 0 ın supremumu
$ x $	$-x$ ve x ın supremumu
$x_\alpha \downarrow x$	(x_α) aşağıya yönlendirilmiştir ve infimumu x dir.
$x_\alpha \uparrow x$	(x_α) yukarı yönlendirilmiştir ve supremumu x dir.
$L_b(E, F)$	Sıra sınırlı operatörlerin vektör uzayı
$L^r(E, F)$	Regüler operatörlerin vektör uzayı
$W(E, F)$	Zayıf kompakt operatörlerin vektör uzayı
$E^\sim$	E nin sıra duali
$E_n^\sim$	E nin sıra sürekli duali
T'	T dönüşümünün eşleniği
$ T $	T dönüşümünün modülü
$Co(A)$	A kümesinin konveks zarfı
U_E	E uzayının birim yuvarı

1. GİRİŞ

1981 yılında Aliprantis ve Burkinshaw bir AL uzayından KB uzayına tanımlı her zayıf kompakt operatörün zayıf kompakt bir modülünün olduğunu göstermişlerdir. Daha sonra 1982 yılında Groenewegen bu sonucu AL uzaylarından (W_1) özelliğine sahip uzaylara genişletmiştir. 1988 yılında Schmidt bu sonucun dual versiyonunu ispatlamıştır.

Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde zayıf kompakt operatörlerin hangi koşullar altında zayıf kompakt modüle sahip olduğu incelenmiştir. Aynı sonuçların dual versiyonları da incelenmiştir.

Son bölümde E bir sonsuz boyutlu AL uzayı olduğunda E den F ye zayıf kompakt operatörlerin uzayı olan $W(E, F)$ yi bir vektör örgüsü yapan en geniş F , Banach örgülerinin (W_1) özelliğine sahip olması gerektiğini gösteren teorem ve bunun dual versiyonları incelenmiştir.

Ayrıca E den F ye tanımlı pozitif zayıf kompakt operatörlerin lineer gereni olan $W^r(E, F)$ nin vektör örgüsünü karakterize eden teoremler çalışılmıştır.

2. GENEL TANIM VE ÖNERMELER

2.1. Pozitif Operatörler

2.1.1. Tanım

Üzerindeki “ $\geq$ ” sıralama bağıntısı ile tanımlanmış olan bir gerçel vektör uzayı E olsun. $x, y \in E$ olmak üzere,

- (i) $x \geq y$ iken her bir $z \in E$ için $x + z \geq y + z$,
- (ii) $x \geq y$ iken her bir $0 \leq \alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha x \geq \alpha y$ şartlarını sağlıyorsa E uzayına sıralı vektör uzayı denir.

E sıralı vektör uzayının $x \geq 0$ bağıntısını sağlayan elemanlarına pozitif diyeceğiz. E uzayındaki pozitif elemanların kümesini $\{x \in E : x \geq 0\}$, E^+ veya E_+ sembollerinden biri ile göstereceğiz. E ve F iki sıralı vektör uzayı olmak üzere bir $T: E \rightarrow F$ lineer dönüşümüne kısaca operatör diyeceğiz. Ayrıca her bir $x \in E^+$ için $T(x) \geq 0$ oluyorsa T operatörüne pozitif diyeceğiz ve $T \geq 0$ ile göstereceğiz.

2.1.2. Tanım

E bir sıralı vektör uzayı ve E nin herhangi iki elemanı x, y olsun. Eğer,

- (i) $x \leq z$ ve $y \leq z$
- (ii) $s \in E$ ve $x \leq s$ ve $y \leq s$ iken $z \leq s$ koşullarını sağlayan E nin bir z elemanı varsa buna x ve y nin supremumu denir.

2.1.3. Tanım

E bir sıralı vektör uzayı ve E nin herhangi iki elemanı x, y olsun. Eğer,

- (i) $z \leq x$ ve $z \leq y$
- (ii) $s \in E$ ve $s \leq x$ ve $s \leq y$ iken $s \leq z$ koşullarını sağlayan E nin bir z elemanı varsa buna x ve y nin infimumu denir.

2.1.4. Tanım

Bir sıralı vektör uzayı E olsun. Eğer üzerindeki sıralamaya göre E uzayının her x, y çiftinin supremumu E uzayına ait ise bu uzaya Riesz uzayı (vektör örgüsü) denir. Bundan sonra supremum ve infimum yerine sırasıyla, $x \vee y := \sup \{x, y\}$, $x \wedge y := \inf \{x, y\}$ sembollerini kullanacağız.

Örnek

Ω boştan farklı bir küme olsun. Ω kümesi üzerinde tanımlı gerçel değerli fonksiyonların vektör uzayı $\mathbb{R}^\Omega$, her bir $f, g \in \mathbb{R}^\Omega$ çifti için, $\mathbb{R}^\Omega$ uzayında $f \leq g$ sıralaması sağlanması için gerek ve yeter koşul her $\omega \in \Omega$ için $f(\omega) \leq g(\omega)$ olmasıdır. Bu noktasal sıralama ile $\mathbb{R}^\Omega$ bir Riesz uzayıdır. Burada her bir $\omega \in \Omega$ ve her $f, g \in \mathbb{R}^\Omega$ için $f \vee g(\omega) := \max \{f(\omega), g(\omega)\}$ ve $f \wedge g(\omega) := \min \{f(\omega), g(\omega)\}$ ifadesi sağlanır.

Üzerinde noktasal sıralama ile aşağıdaki uzaylar birer Riesz uzayıdır.

- (i) $C(\Omega)$, Ω topolojik uzayı üzerinde tanımlı gerçel değerli sürekli fonksiyonların uzayıdır.
- (ii) $C_b(\Omega)$, Ω topolojik uzayı üzerinde tanımlı gerçel değerli sürekli ve sınırlı fonksiyonların uzayıdır.
- (iii) $l_\infty(\Omega)$, Ω üzerinde tanımlı gerçel değerli sınırlı fonksiyonların uzayıdır.
- (iv) $1 \leq p < \infty$ için $l_p := \{ (x_1, x_2, \dots), \text{ her } n \in \mathbb{N}, x_n \in \mathbb{R} \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \}$ dizi uzayıdır.

Ayrıca, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olmak üzere $(0 < p < \infty)$ için

$$L_p(\mu) := \{ f : f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ ölçülebilir ve } \int_X |f|^p d\mu < \infty \}$$

$L_\infty(\mu) := \{f : f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ ölçülebilir ve } \text{ess sup } |f| < \infty\}$ uzayları, *h.h.y.* $x \in X$ için $f(x) \leq g(x)$ sıralaması altında birer Riesz uzayıdır.

2.1.5. Tanım

E bir Riesz uzayı ve $x \in E$ olsun $x^+ := x \vee 0$, $x^- := (-x) \vee 0$ ve $|x| = x \vee (-x)$ elemanlarına sırayla $x \in E$ elemanının pozitif kısmı, negatif kısmı ve modülü diyeceğiz. Ayrıca $x, y \in E$ olsun. Eğer $|x| \wedge |y| = 0$ ise x ile y birbirine diktir denir ve $x \perp y$ ile gösterilir.

2.1.1. Önerme

E bir Riesz uzayı ve $x, y, z \in E$ olsun. O zaman aşağıdaki önermeler doğrudur.

- (i) $x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)]$ ve $x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]$
- (ii) $x + y = x \wedge y + x \vee y$
- (iii) $x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z)$ ve $x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$
- (iv) Her $0 \leq \alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha(x \vee y) = (\alpha x) \vee (\alpha y)$ ve $\alpha(x \wedge y) = (\alpha x) \wedge (\alpha y)$
- (v) $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$ ve $x^+ \wedge x^- = 0$
- (vi) $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ ve $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$
- (vii) $|x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x + y| + |x - y|)$ ve $|x| \wedge |y| = \frac{1}{2}(|x + y| - |x - y|)$
- (viii) $||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$ (Üçgen eşitsizliği)
- (ix) $|x \vee z - y \vee z| \leq |x - y|$ ve $|x \wedge z - y \wedge z| \leq |x - y|$
- (x) Eğer $x, y, z \in E^+$ ise $x \wedge (y + z) \leq x \wedge y + x \wedge z$ [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].

2.1.6. Tanım

E bir Riesz uzayı ve $\{x_\alpha\}$ E Riesz uzayında bir ağ olsun. Eğer her $x_\alpha, x_\beta \in \{x_\alpha\}$ için $x_\alpha \leq x_\gamma$ ve $x_\beta \leq x_\gamma$ ($x_\gamma \leq x_\alpha$ ve $x_\gamma \leq x_\beta$) olacak şekilde $x_\gamma \in \{x_\alpha\}$ varsa $\{x_\alpha\}$ ağına artan (azalan) denir ve $x_\alpha \uparrow$ ($x_\alpha \downarrow$) sembolü ile gösterilir. E Riesz uzayının bir

elemanı x olmak üzere $x_\alpha \uparrow x$ ($x_\alpha \downarrow x$) sembolleri $x_\alpha \uparrow$ ($x_\alpha \downarrow$) $\sup\{x_\alpha\}=x$ ($\inf\{x_\alpha\}=x$) anlamına gelecektir. Eğer her $x \in E^+$ için $\frac{1}{n} x \downarrow 0$ sağlanıyorsa E Riesz uzayına Archimedean Riesz uzayı denir.

2.1.2. Önerme (Kantorovic)

E bir Riesz uzayı, F Archimedean Riesz uzayı ve $T: E^+ \rightarrow F^+$ toplamsal (Her $x, y \in E^+$ için $T(x+y) = T(x) + T(y)$) olsun. O zaman T, E den F ye bir tek pozitif operatöre genişler. Üstelik (genişlemeyi yine T ile gösterirsek) her bir $x \in E$ için, $T(x) = T(x^+) - T(x^-)$ dir [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].

Bir E Riesz uzayından bir F Riesz uzayına tanımlı operatörlerin vektör uzayı $L(E, F)$ olsun. Her $S, T \in L(E, F)$ için $T \geq S \Leftrightarrow T - S \geq 0$ (her bir $x \in E^+$ için $T(x) \geq S(x)$) sıralaması ile bir sıralı vektör uzayıdır.

2.1.7. Tanım

E ve F birer Riesz uzayları ve $T: E \rightarrow F$ bir operatör olsun. Eğer $L(E, F)$ sıralı vektör uzayında $\{T, -T\}$ kümesinin supremumu var ise T operatörünün modülü vardır denir ve $|T| := T \vee (-T)$ ile gösterilir.

2.1.8. Tanım

Bir E Riesz uzayının $x \leq y$ şartını sağlayan iki elemanı x, y olsun. $[x, y] = \{z \in E: x \leq z \leq y\}$ ile tanımlı alt kümeye sıralı aralık denir. E uzayının boştan farklı bir alt kümesi A olsun. Eğer her bir $y \in A$ için $y \leq x$ ($x \leq y$) olacak şekilde bir $x \in E$ varsa A kümesine üstten (alttan) sınırlıdır denir. Hem üstten hem alttan sınırlı olan kümeye sıra sınırlı küme denir. Yani $A \subseteq [x, y]$ olacak şekilde $x, y \in E$ varsa A ya sıra sınırlı küme denir.

2.1.9.Tanım

E, F iki Riesz uzayı ve $T: E \rightarrow F$ bir operatör olsun. Eğer T operatörü E Riesz uzayının sıralı aralıklarını F Riesz uzayının sıra sınırlı kümelerine dönüştürüyorsa T operatörüne sıra sınırlı operatör denir. Bir E Riesz uzayının bir F Riesz uzayına tanımlı sıra sınırlı operatörlerin uzayı $L_b(E, F)$ ile gösterilir.

İki pozitif operatörün farkı şeklinde yazılabilen operatöre regüler operatör denir. Bir E Riesz uzayından bir F Riesz uzayı içine tanımlanan regüler operatörlerin uzayı $L^r(E, F)$ ile göstereceğiz. Açık olarak, $L^r(E, F) \subseteq L_b(E, F) \subseteq L(E, F)$ vektör uzayı kapsamı sağlanır. Kısalık için $L(E, E), L_b(E, E), L^r(E, E)$ sırasıyla $L(E), L_b(E), L^r(E)$ ile gösterilecektir.

2.1.10.Tanım

E bir Riesz uzayı olsun. Eğer E Riesz uzayının boştan farklı ve üstten sınırlı her alt kümesinin (sayılabilir alt kümesinin) bir supremumu varsa E Riesz uzayına Dedekind tam (σ -Dedekind tam) Riesz uzayı denir.

Bir E Riesz uzayının Dedekind tam (σ -Dedekind tam) olması için gerekli ve yeterli koşul $0 \leq x_\alpha \uparrow \leq x$ ($0 \leq x_n \uparrow \leq x$) olduğunda $\sup\{x_\alpha\} (\sup\{x_n\}) \in E$ içinde var olmasıdır. $L_p(\mu), (1 \leq p \leq \infty)$ uzayları Dedekind tam Riesz uzaylarına örnek oluştururlar.

2.1.3. Önerme

E ve F Riesz uzayları $T: E \rightarrow F$ bir operatör olsun. Her bir $x \in E^+$ için $\sup\{|Ty| : |y| \leq x\} \in F$ de varsa o zaman T nin modülü vardır ve her $x \in E^+$ için $|T|(x) = \sup\{|Ty| : |y| \leq x\}$ dir [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].

2.1.4. Önerme (Riesz-Kantorovic)

E, F Riesz uzayları ve F Dedekind tam olsun. Bu durumda $L_b(E, F)$ sıralı vektör uzayı, Dedekind tam Riesz uzayıdır. Her $x \in E^+$ ve her bir $S, T \in L_b(E, F)$ çifti için,

$$S \vee T(x) = \sup \{ S(y) + T(z) : y, z \in E^+ \text{ ve } y + z = x \}$$

$$S \wedge T(x) = \inf \{ S(y) + T(z) : y, z \in E^+ \text{ ve } y + z = x \}$$

$$|T|(x) = \sup \{ |Ty| : |y| \leq x \}$$

$$T^+(x) = \sup \{ Ty : 0 \leq y \leq x \}$$

$$T^-(x) = \sup \{ -Ty : 0 \leq y \leq x \} \text{ eşitlikleri gerçekleşir [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].}$$

2.1.5. Önerme

E ve F iki Riesz uzayı ve F Dedekind tam uzay olsun. O zaman her $S, T \in L_b(E, F)$ ve her $x \in E^+$ için aşağıdaki önermeler doğrudur.

$$(1) \{ \sum_{i=1}^n S(x_i) \vee T(x_i) : x_i \in E^+ \text{ ve } \sum_{i=1}^n x_i = x \} \uparrow S \vee T(x) \text{ dir.}$$

$$(2) \{ \sum_{i=1}^n S(x_i) \wedge T(x_i) : x_i \in E^+ \text{ ve } \sum_{i=1}^n x_i = x \} \uparrow S \wedge T(x) \text{ dir.}$$

$$(3) \{ \sum_{i=1}^n |T(x_i)| : x_i \in E^+ \text{ ve } \sum_{i=1}^n x_i = x \} \uparrow |T|(x) \text{ dir [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].}$$

2.2. Sıralı Projeksiyonlar

2.2.1. Tanım

G , bir E Riesz uzayının alt vektör uzayı olsun. Eğer her bir $x, y \in G$ çiftinin supremumu G vektör uzayında bulunuyorsa bu alt uzaya E nin bir Riesz alt uzayı denir.

Bir E Riesz uzayının alt kümesi A olsun. Eğer $|x| \leq |y|$ ve $y \in A$ iken $x \in A$ oluyorsa A kümesine solid denir. Riesz uzayının solid olan alt vektör uzaylarına ideal denir.

$x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ eşitliğinden her ideal bir Riesz alt uzaydır.

2.2.2.Tanım

E bir Riesz uzayı, $x \in E$ ve $\{x_\alpha\}$, E Riesz uzayında bir ağ olsun. Eğer her bir α için $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha$ ve $y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde bir $\{y_\alpha\}$ ağı var ise $\{x_\alpha\}$ ağı x elemanına sıralı yakınsıyor denir ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ ile gösterilir.

A, E Riesz uzayının bir alt kümesi ve $\{x_\alpha\}$ A nın bir ağı olsun. Eğer $\{x_\alpha\}$ ağı x elemanına sıralı yakınsıyor iken x elemanı A kümesine ait oluyorsa A ya sıra kapalı denir. Sıra kapalı olan ideallere de band diyeceğiz.

A, E Riesz uzayının boştan farklı bir alt kümesi olsun. A kümesini kapsayan en küçük (kapsama bağıntısına göre) ideale A kümesinin ürettiği ideal denir. A kümesinin ürettiği ideal, $\{x \in E : \exists x_1, x_2, \dots, x_n \in A \text{ ve } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+, |x| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|\}$ dir. $A = \{x\}$ ise $x \in E$ elemanının ürettiği ideal A_x ile gösterilirse $A_x = \{y \in E : \exists \lambda > 0, |y| \leq \lambda |x|\}$ kümesidir. Bir Riesz uzayında tek elemanlı kümelerin ürettikleri ideallere esas ideal denir. Benzer olarak A kümesinin ürettiği band A kümesini kapsayan en küçük banddır.

2.2.1. Önerme

A, E Riesz uzayının bir ideali olsun. $\{x \in E : \exists \{x_\alpha\} \subseteq A^+ \text{ ve } 0 \leq x_\alpha \uparrow |x|\}$ kümesi A tarafından üretilen banddır. Üstelik tek bir x elemanının ürettiği band B_x ise $B_x = \{y \in E : |y| \wedge n|x| \uparrow |y|\}$ dir [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].

Bir E Riesz uzayında bir band B olsun. Eğer $E = B \oplus B^d$ eşitliği sağlanıyorsa B uzayına projeksiyon band denir. E Dedekind tam Riesz uzayında her band, projeksiyon banddır.

E bir Riesz uzayı ve $0 < e \in E$ olsun. Eğer $B_e = E$ sağlanıyorsa e elemanına zayıf sıra birim denir. Bir Archimedean Riesz uzayında $0 < e \in E$ elemanının zayıf sıra birim olması için gerekli ve yeterli koşul $x \perp e$ iken $x = 0$ olmasıdır.

2.2.3.Tanım

E, F iki Riesz uzayı ve $T: E \rightarrow F$ bir operatör olsun.

- (i) E uzayında $x_\alpha \xrightarrow{0} 0$ iken F uzayında da $Tx_\alpha \xrightarrow{0} 0$ sağlanıyorsa T operatörüne sıra sürekli operatör denir.
- (ii) E uzayında $x_n \xrightarrow{0} 0$ iken F uzayında da $Tx_n \xrightarrow{0} 0$ sağlanıyorsa T operatörüne σ - sıra sürekli operatör denir.

$T: E \rightarrow F$ pozitif operatörünün sıra sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul E içinde $x_\alpha \downarrow 0$ iken F içinde $Tx_\alpha \downarrow 0$ sağlanmasıdır.

2.3. Pozitif Lineer Fonksiyoneller

E bir Riesz uzayı olsun. E üzerinde tanımlı gerçel değerli sıra sınırlı operatörlerin vektör uzayına E Riesz uzayının sıra duali denir ve $E^\sim$ ile gösterilir. $f \in E^\sim$ olsun. Eğer her bir $x \in E^+$ için $f(x) \geq 0$ ise f fonksiyoneline pozitif lineer fonksiyonel denir. $f, g \in E^\sim$ olsun “ $f \leq g \Leftrightarrow$ Her bir $x \in E^+$ için $f(x) \leq g(x)$ ” sıralaması ile $E^\sim$ bir sıralı vektör uzayıdır. Üstelik $\mathbb{R}$ bir Dedekind tam Riesz uzayı olduğundan Önerme 2.5 den $E^\sim$ bir Dedekind tam Riesz uzayıdır.

$E^\sim$ Riesz uzayının sıra duali $(E^\sim)^\sim = E^{\sim\sim}$, E üzerinde tanımlı bütün sıra sürekli ve sıra sınırlı lineer fonksiyonellerin uzayı ise $E_n^\sim$ ile gösterilecektir.

2.3.1.Tanım

$T: E \rightarrow F$ bir operatör olsun. Eğer her $x, y \in E$ için $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$ sağlanıyorsa T ye bir örgü homomorfizmi denir. Aynı zamanda birebir olan Riesz homomorfizmlerine örgü izomorfizmi denir. Eğer E Riesz uzayından F Riesz uzayına örten bir örgü izomorfizmi varsa E ve F uzayları örgü izomorftur denir.

$T: E \rightarrow F$ bir birebir ve örten operatör olsun. T operatörünün örgü izomorfizmi olması için gerekli ve yeterli koşul T ve T^{-1} operatörlerinin pozitif olmasıdır.

2.3.2.Tanım

E bir Riesz uzayı olsun. Eğer her bir $0 \neq x \in E$ için $f(x) \neq 0$ olacak şekilde bir $f \in E^\sim$ var ise $E^\sim$ ya E nin noktalarını ayırıyor denir.

2.3.3.Tanım

E bir Riesz uzayı ve $x \in E$ olsun. Her bir $f \in E^\sim$ için $x^\wedge(f) = f(x)$ biçiminde tanımlanan $^\wedge: E \rightarrow E^{\sim\sim}$ dönüşümüne doğal gömme denir.

2.3.1. Önerme

E bir Riesz uzayı olsun. O zaman $x \rightarrow x^\wedge$ doğal gömmesi E den $E^{\sim\sim}$ içine Riesz işlemlerini koruyan bir operatördür. (Yani her $x, y \in E$ çifti için $(x \vee y)^\wedge = x^\wedge \vee y^\wedge$ dir).

Özel olarak eğer $E^\sim$ uzayı E nin noktalarını ayırıyor ise $x \rightarrow x^\wedge$ dönüşümü birebirdir (Bu durumda E uzayı $E^{\sim\sim}$ uzayı içindeki görüntüsü ile özdeşleştirilerek $E^{\sim\sim}$ uzayının bir Riesz alt uzayı olarak düşünülebilir).

2.3.4. Tanım

E ve F Riesz uzayları, $f \in E^\sim$ ve $u \in F$ olsun. Her bir $x \in E$ için $(f \otimes u)(x) = f(x)u$ biçiminde tanımlı operatöre rank bir operatörü denir.

V bir vektör uzayı olmak üzere V üzerinde tanımlı lineer fonksiyonellerin oluşturduğu vektör uzayı V^* ile gösterilir. W bir başka vektör uzayı ve $T : V \rightarrow W$ bir operatör olsun. Her bir $f \in W^*$ ve her bir $v \in V$ için $T^* f(v) = f(T(v))$ olarak tanımlanan $T^* : W^* \rightarrow V^*$ operatöre T operatörünün cebirsel eşleği (transpozu) denir. Genelde $\langle T^* f, v \rangle = \langle f, Tv \rangle$ biçiminde gösterilir.

2.3.2. Önerme

E ve F Riesz uzayları, $T : E \rightarrow F$ bir sıra sınırlı operatör ise $T^* (F^\sim) \subseteq E^\sim$ dir. T^* operatörünün $F^\sim$ uzayına kısıtlanmasına T operatörünün (sıra) eşleği denir ve T' ile gösterilir. Yani $T' : F^\sim \rightarrow E^\sim$ $\langle T' f, x \rangle = \langle f, Tx \rangle$, $x \in E$ dir.

2.3.3. Önerme (Krengel–Synnatzschke)

E ve F Riesz uzayları F Dedekind tam ve $T : E \rightarrow F$ bir sıra sınırlı operatör olsun. O zaman her bir $f \in F_n^\sim$ için $|T'| f = |T|' f$ eşitliği sağlanır [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].

2.4. Topolojik Vektör Uzayları

X bir vektör uzayı ve τ , X üzerinde bir topoloji olsun. Eğer,

$$+ : X \times X \rightarrow X, (x, y) \rightarrow x + y$$

$*$: $\mathbb{R} \times X \rightarrow X, (\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ biçiminde tanımlı iki fonksiyon τ topolojisine göre sürekli ise (X, τ) ikilisine bir topolojik vektör uzayı denir.

2.4.1.Tanım

X bir vektör uzayı olsun. A, X in boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer $x, y \in A$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için $\lambda x + (1 - \lambda) y \in A$ oluyorsa A ya konveks küme denir.

A, X in boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer $x \in A$ ve $|\lambda| \leq 1$ için $\lambda x \in A$ oluyorsa A ya dengeli küme denir.

A kümesini içeren en küçük (kapsama bağıntısına göre) konveks kümeye A nın konveks zarfı denir ve $Co(A)$ ile gösterilir. $Co(A) := \{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : x_i \in A, \lambda_i \geq 0, \text{ ve } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \}$ dir.

Benzer şekilde A kümesini içeren en küçük konveks ve dengeli kümeye A nın mutlak konveks zarfı denir ve $mCo(A)$ ile gösterilir. $mCo(A) = \{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : x_i \in A \text{ ve } \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq 1 \}$ olduğu kolayca görülebilir.

2.4.2.Tanım

E bir topolojik uzay olsun. (E, τ) topolojik uzayında açık kümelerden oluşan bir $\{A_i ; i \in I\}$ ailesinin bileşimi tüm E uzayına eşitse bu aileye E uzayının bir açık örtüsü denir. Bir açık örtünün bir alt ailesi de gene bir açık örtü oluyorsa bu aileye alt örtü denir.

Eğer (E, τ) topolojik uzayında verilen her açık örtünün sonlu bir alt örtüsü varsa (E, τ) topolojik uzayına kompakt denir. E uzayındaki bir A alt kümesi için de kompaktlık benzer şekilde tanımlanır.

E topolojik uzayında bir A kümesinin kapanışı kompakt ise bu A kümesine göreceli kompakt denir.

2.4.3.Tanım

(X, τ) bir topolojik vektör uzayı olsun. Eğer X uzayının sıfırının bir konveks komşuluklar tabanı var ise (X, τ) topolojik uzayına bir lokal konveks topolojik vektör uzayı adı verilir.

2.4.4.Tanım

(X, τ) bir lokal konveks topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Sıfırın her bir V komşuluğu için $A \subseteq \lambda V$ koşulunu sağlayan bir $\lambda > 0$ gerçel sayısı var ise A kümesine τ -sınırlı küme adı verilir.

X bir topolojik vektör uzayı ve X üzerinde tanımlı yarınormların bir Q ailesi verilsin. X üzerinde Q ailesindeki her bir yarınormu sürekli yapan X üzerinde bir en kaba topoloji vardır. Bu topoloji altında X bir konveks uzay olup sıfırın kapalı komşuluklar tabanı $\sigma(\theta) = \{ \{ x : \sup_{1 \leq i \leq n} P_i(x) \leq \varepsilon \}, \varepsilon > 0, P_i \in Q \}$ ailesidir.

X ve X' iki vektör uzayı ve $X \times X'$ üzerinde bir bilineer form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ olsun. Eğer $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bilineer formu,

D : Her bir $0 \neq x \in X$ için $\langle x, x' \rangle \neq 0$ olacak şekilde bir $x' \in X'$ vardır.

D' : Her bir $0 \neq x' \in X'$ için $\langle x, x' \rangle \neq 0$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. Şartlarını sağlarsa X ve X' ne bir dual ikili denir ve $\langle X, X' \rangle$ ile gösterilir.

$\langle X, X' \rangle$ bir dual ikili olsun. Her bir $x' \in X'$ ve her bir $x \in X$ için $P_{x'}(x) = |\langle x, x' \rangle|$ biçiminde tanımlanan $P_{x'} : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu bir yarınormdur.

$Q = \{ P_{x'} : x' \in X' \}$ yarınormlar ailesinin X üzerinde tanımladığı topolojiye zayıf topoloji denir ve $\sigma(X, X')$ ile gösterilir. $\sigma(X, X')$ topolojisine göre sıfırın bir kapalı

komşuluklar tabanı $\{ \{ x: \sup | \langle x, x'_i \rangle | \leq 1 \} \text{ her bir } 1 \leq i \leq n \text{ için } x'_i \in X' \}$ ailesidir.

$Q' = \{ P_x : x \in X \}$, $P_x(x') = |\langle x, x' \rangle|$, yarınormların ailesinin X' üzerinde doğurduğu zayıf topolojiyi ise $\sigma(X', X)$ ile göstereceğiz. Bu topolojiye göre $\{x'_\alpha\} \subseteq X'$ ağının $x'_\alpha \rightarrow 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul her bir $x \in X$ için $\langle x, x'_\alpha \rangle \rightarrow 0$ $\mathbb{R}$ de sağlanmasıdır.

2.4.5.Tanım

$\langle X, X' \rangle$ bir dual sistem ve τ , X üzerinde bir lokal konveks topoloji olsun. Eğer (X, τ) uzayının topolojik duali X' oluyorsa τ topolojisine dual sistem ile uyumludur denir.

2.4.1. Önerme (Mackey)

$\langle X, X' \rangle$ bir dual ikili olsun. Dual sistem ile uyumlu olan X üzerinde tanımlı tüm lokal konveks topolojilere göre X uzayının sınırlı kümeleri aynıdır [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].

2.4.6.Tanım

Bir vektör uzayı E üzerinde tanımlı, gerçel değerli ve x noktasındaki değeri $\|x\|$ ile gösterilen bir fonksiyon aşağıdaki koşulları sağlarsa, bu fonksiyona E üzerinde bir norm denir.

(N1) : Her $x \neq 0$ için $\|x\| > 0$ geçerlidir.

(N2) : $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ $\alpha \in K, x \in E$

(N3) : Her $x, y \in E$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ eşitsizliği sağlanır.

Bu takdirde $(E, \|\cdot\|)$ çiftine normlu uzay ve $\|x\|$ sayısına da x noktasının normu denir.

X bir normlu uzay olsun. X norm metriğine göre tam ise X e Banach uzayı denir. X bir Banach uzayı ve $x \rightarrow x^*$ lineer dönüşümü örten ise X uzayına yansımali (refleksive) Banach uzayı denir.

X aşikar olmayan bir normlu uzay ve X' norm dual ise her bir $(x, x') \in X \times X'$ için $\langle x, x' \rangle = x'(x)$ bilineer formu D ve D' şartlarını sağlayacağından her bir normlu uzay üzerinde bir zayıf topoloji tanımlanabilir.

2.4.2. Önerme (Eberlein-Smulian)

Bir X normlu uzayının alt kümesi A olsun. A kümesinin göreceli zayıf kompakt (zayıf kompakt) olması için gerekli ve yeterli koşul A içindeki her dizinin X uzayının (A kümesinin) bir elemanına zayıf yakınsayan bir alt dizisinin var olmasıdır [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].

2.4.3. Önerme (Krein-Smulian)

Bir Banach uzayının bir göreceli zayıf kompakt alt kümesinin konveks zarfı da göreceli zayıf kompakttır [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].

2.4.4. Önerme

Eğer $\{x_n\}$ dizisi bir Banach uzayında zayıf yakınsak ise $\{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 1\}$ kümesi göreceli zayıf kompakttır [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].

E bir Riesz uzayı ve $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ bir yarı norm olsun. Eğer E içinde $|x| \leq |y|$ koşulunu sağlayan her $x, y \in E$ için $p(x) \leq p(y)$ oluyorsa p ye Riesz yarınormu

denir. E bir Riesz uzayı ve $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer p aşağıdaki şartları sağlarsa p fonsiyonuna bir pseudonorm denir.

- (i) $\forall x \in E$ için $p(x) \geq 0$
- (ii) $\forall x, y \in E$ için $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$
- (iii) $\forall x \in E$ için $\lambda \rightarrow 0$ yakınsarken $p(\lambda x) \rightarrow 0$
- (iv) $\forall x, y \in E$ için $|x| \leq |y|$ olduğunda $p(x) \leq p(y)$.

E bir Riesz uzayı ve Q, E üzerinde tanımlı Riesz yarı normlarının bir ailesi olsun. Q Riesz yarı normlar ailesinin E üzerine koyduğu topolojiye lokal konveks-solid topoloji denir (E, τ) ikilisine lokal konveks-solid Riesz uzayı denir.

E bir Riesz uzayı ve A, E^* uzayının boştan farklı bir alt kümesi olsun. Her bir $\varphi \in A$ ve her bir $u \in E$ için $p_\varphi(u) = |\varphi|(|u|)$ ile tanımlı p_φ , E üzerinde bir Riesz yarınormudur. $\{p_\varphi : \varphi \in A\}$ Riesz yarınormlarının E üzerine koyduğu lokal konveks-solid topolojiye mutlak zayıf topoloji denir ve $|\sigma|(E, A)$ ile gösterilir.

2.4.5. Önerme

(E, τ) Hausdorff lokal konveks-solid Riesz uzayı olsun. O zaman aşağıdaki önermeler doğrudur.

- (i) E uzayının pozitif kısmı E^+ kümesi τ - kapalıdır.
- (ii) E içinde $x_\alpha \uparrow$ ve $x_\alpha \xrightarrow{\tau} x$ şartını sağlayan $\{x_\alpha\}$ ağı için $\sup\{x_\alpha\} = x$ dir.
- (iii) E uzayının her bir bandı τ - kapalıdır [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].

2.4.6. Önerme

$\{x_\alpha\} (E, \tau)$ lokal konveks-solid Riesz uzayında bir ağ olsun ve $x_\alpha \downarrow 0$ sağlansın. O zaman $x_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$ olması için gerek ve yeter şart $x_\alpha \xrightarrow{\sigma(E, E')} 0$ olmasıdır [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].

2.5. Banach Örgüleri

E bir Riesz uzayı ve $\|\cdot\|$, E üzerinde bir norm olsun. Eğer $|x| \leq |y|$ koşulunu sağlayan her $x, y \in E$ için $\|x\| \leq \|y\|$ oluyorsa $\|\cdot\|$ normuna E üzerinde bir örgü (lattice) normu denir.

Bir örgü normu ile donatılmış Riesz uzayına normlu Riesz uzayı denir. Üstelik normlu Riesz uzayı tam ise bu uzay Banach örgüsü adını alır. Açık olarak her bir normlu Riesz uzayı bir lokal konveks-solid Riesz uzayıdır.

2.5.1. Önerme

Normlu bir Riesz uzayının norm duali bir Banach örgüsüdür [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].

Örnek

K bir kompakt Hausdorff uzay olmak üzere $C(K)$ ve her bir p ($1 \leq p \leq \infty$) için $L_p(\mu)$ uzayı bir Banach örgüsüdür.

2.5.2. Önerme (Garrett Birkhoff)

E Banach örgüsünün norm duali ile E nin sıra duali çakışır. Yani $E' = E^\sim$ dir. Şimdi $\{X_n\}$, Banach uzaylarının bir dizisi olsun.

($1 \leq p < \infty$) olmak üzere ;

$$(X_1 \oplus X_2 \oplus \dots)_p := \{x = (x_1, x_2, \dots) : x_n \in X_n \text{ ve } \|x\| := (\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$$

şeklinde tanımlanan uzay $\|x\| = (\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p)^{\frac{1}{p}}$ normu ile Banach uzayıdır.

$(X_1 \oplus X_2 \oplus \dots)_p$ Banach uzayına, $\{X_n\}$ lerin L_p - toplamı denir.

$(X_1 \oplus X_2 \oplus \dots)_\infty$ ve $(X_1 \oplus X_2 \oplus \dots)_0$ uzaylarını ise sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlayacağız.

$$(X_1 \oplus X_2 \oplus \dots)_\infty := \{x = (x_1, x_2, \dots) : x_n \in X_n \text{ ve } \|x\| : \sup\{\|x_n\|\} < \infty\} \text{ ve}$$

$$(X_1 \oplus X_2 \oplus \dots)_0 := \{x = (x_1, x_2, \dots) : x_n \in X_n \text{ ve } \lim\|x\| = 0\}.$$

Eğer her bir X_n Banach örgüsü ise $(X_1 \oplus X_2 \oplus \dots)_p$ de Banach örgüsüdür [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].

2.5.3. Önerme

$\{X_n\}$, Banach uzaylarının bir dizisi, $1 < p, q < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. O zaman $x = (x_1, x_2, \dots) \in (X_1 \oplus X_2 \oplus \dots)_p$ ve $x' = (x'_1, x'_2, \dots) \in (X'_1 \oplus X'_2 \oplus \dots)_q$ için $\langle x, x' \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x'_n(x_n)$ olarak tanımlanan dual operatörü ile $(X_1 \oplus X_2 \oplus \dots)'_p = (X'_1 \oplus X'_2 \oplus \dots)_q$ dir.

Benzer olarak ,

$$(X_1 \oplus X_2 \oplus \dots)'_1 = (X'_1 \oplus X'_2 \oplus \dots)_\infty \text{ ve}$$

$$(X_1 \oplus X_2 \oplus \dots)'_0 = (X'_1 \oplus X'_2 \oplus \dots)_1 \text{ olur [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].}$$

2.5.4. Önerme

Bir Banach örgüsünden bir normlu Riesz uzayına tanımlanan her bir pozitif operatör süreklidir [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].

E bir Banach örgüsü olsun. Eğer E içinde $x_\alpha \downarrow 0$ şartını sağlayan her bir $\{x_\alpha\}$ ağı için $\|x_\alpha\| \downarrow 0$ oluyorsa $\|\cdot\|$ normuna sıra sürekli norm denir.

2.5.5. Önerme (Fremlin-Meyer-Nieberg)

Bir Banach örgüsünün sıra sürekli norma sahip olması için gerek ve yeter koşul E nin her sıra sınırlı dik dizisinin 0 a normda yakınsak olmasıdır [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].

2.5.6. Önerme

E bir Banach örgüsü ise aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- (i) E sıra sürekli norma sahiptir.
- (ii) E içinde $0 \leq x_n \uparrow x$ ise $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir.
- (iii) E, σ Dedekind tam ve E içinde $x_n \downarrow 0$ ise $\|x_n\| \downarrow 0$ dir.
- (iv) E uzayı E'' uzayı içinde bir idealdir.
- (v) E içindeki her bir sıra aralık zayıf kompakt bir kümedir [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].

2.5.1.Tanım

E bir normlu uzay olsun. $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ olduğunda $\|x_\alpha\| \uparrow \|x\|$ oluyorsa E üzerindeki norma Fatou normu denir.

2.5.2.Tanım

$\{x_n\}$, X Banach uzayında bir dizi olsun. Eğer her bir $x' \in X'$ için $\lim x'(x_n) \in \mathbb{R}$ de varsa bu diziye zayıf Cauchy dizisi denir. X Banach uzayındaki her zayıf Cauchy dizisi X in bir elemanına zayıf yakınsaksa X uzayına zayıf dizisel tam denir.

2.5.3.Tanım

E bir Banach örgüsü olsun.

- (i) $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $x \wedge y = 0$ şartını sağlayan her bir $x, y \in E$ için $\|x + y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p$ oluyorsa E ye soyut L_p uzayı denir.
- (ii) $x \wedge y = 0$ koşulunu sağlayan her bir $x, y \in E$ için $\|x \vee y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ eşitliği sağlanırsa E ye soyut M uzay denir. Genelde soyut L_1 uzayına AL uzay, soyut M uzayına ise AM uzay denir.

2.5.7. Önerme

E bir Banach örgüsü olsun.

- (i) E uzayının bir AL uzay olması için gerekli ve yeterli koşul her bir $x, y \in E^+$ çifti için $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ olmasıdır.
- (ii) E uzayının bir AM uzay olması için gerekli ve yeterli koşul her bir $x, y \in E^+$ için $\|x \vee y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ olmasıdır [Zaanen, 1983].

2.5.4.Tanım

E bir Riesz uzayı ve $0 < e \in E$ olsun. Eğer her bir $x \in E$ için $|x| \leq \lambda e$ olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{R}$ var ise e elemanına E Riesz uzayının sıra birimi denir.

2.5.8. Önerme

E , bir Banach örgüsü olsun. E uzayının bir AL (AM) uzay olması için gerekli ve yeterli koşul E' norm dualinin bir AM (AL) uzay olmasıdır [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].

2.5.5.Tanım

E bir Banach örgüsü olsun. Eğer $P: E \rightarrow E$ lineer operatörü $P^2 = P$, $\|P\| \leq 1$ ve $P \geq 0$ ise P ye pozitif contractive projeksiyon denir. Eğer $P: E'' \rightarrow E$ pozitif contractive projeksiyon varsa E ye (P) özelliğine sahiptir denir.

2.5.9. Önerme

E ve F birer Banach örgüsü olsun. $P: E'' \rightarrow E$ bir pozitif contractive projeksiyon, $T: F \rightarrow E$ lineer operatör ve T' sıra sınırlı olsun. Eğer $j: E \rightarrow E''$ doğal gömme dönüşümü varsa $|T| = P |T'|' j = P |T''| j$ olur [P.Meyer- Nieberg, 1991].

2.5.10. Önerme

E ve F birer Banach örgüsü olsun. Eğer aşağıdaki önermelerden birisi sağlanırsa $L(E, F) = L^r(E, F)$ dir.

- (i) F , Dedekind tam birimli AM uzayıdır.
- (ii) F, AL uzayı ve $E, (P)$ özelliğine sahiptir [P.Meyer- Nieberg, 1991].

2.5.11. Önerme

E bir AL uzayı veya Dedekind tam birimli AM uzay olsun. O zaman her bir $T \in L(E)$ için $|T|$ vardır ve $|||T||| = \|T\|$ dir [Schaefer, 1974].

2.5.6.Tanım

E bir Banach örgüsü olsun. E nin her pozitif artan ve norm sınırlı dizisi, norm yakınsak oluyorsa E uzayına KB (Kantorovic Banach) uzayı denir.

2.5.12. Önerme

E bir Banach örgüsü olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

- (1) E, KB uzayıdır.
- (2) E, E'' nin bandidir.
- (3) $E = (E')_n^\sim$ dir.

(4) E zayıf dizisel tamdır [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].

2.5.13. Önerme

E bir Banach örgüsü olsun. E nin KB uzayı olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul

- (i) E nin sıra sürekli norma sahiptir ve
- (ii) $0 \leq x_\alpha \uparrow$ ve $\sup \|x_\alpha\| < \infty$ iken $\sup x_\alpha$ vardır [Zaanen, 1983].

2.5.14. Önerme

E bir AL uzay ve F bir KB uzay olsun. O zaman $L_b(E, F) = L(E, F)$ eşitliği sağlanır [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].

2.5.15. Önerme

Her AL uzay bir KB uzaydır [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].

2.5.16. Önerme (Kakutani-Bohnenblust-Nakano)

Bir E Banach örgüsünün soyut L_p ($1 \leq p \leq \infty$) uzay olması için gerekli ve yeterli koşul E nin bir $L_p(\mu)$ uzayına örgü izometrik olmasıdır [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].

2.5.17. Önerme (Kakutani-Bohnenblust ve M. Krein-S. Krein)

E Banach örgüsünün bir birimli AM uzay olması için gerekli ve yeterli koşul (homeomorfizm farkıyla tek) Ω , bir kompakt Hausdorff topolojik uzayı olmak üzere E uzayının $C(\Omega)$ Riesz uzayına örgü izometrik olmasıdır [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985]. Özel olarak, bir Banach örgüsünün AM uzay olması için gerekli ve yeterli

koşul bir $C(\Omega)$ uzayının kapalı bir Riesz alt uzayına örgü izometrik olmasıdır [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].

2.5.7.Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X uzayının her açık kümesinin kapanışı yine açık oluyorsa X topolojik uzayına Stonean uzay denir.

2.5.18. Önerme

X kompakt topolojik uzay olmak üzere $C(X)$, AM uzayının Dedekind tam olması için gerek ve yeter koşul X in Stonean olmasıdır [P.Meyer- Nieberg, 1991].

2.6. Kompakt Operatörler

2.6.1.Tanım

X ve Y birer normlu uzay, $T: X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. T operatörü X uzayının kapalı birim yuvarını Y nin bir göreceli norm kompakt kümesine dönüştürüyorsa T ye kompakt operatör denir. Açık olarak her kompakt operatör bir norm sınırlı operatördür.

2.6.1. Önerme

X ve Y birer normlu uzay, $T: X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. T nin kompakt operatör olması için gerekli ve yeterli koşul X uzayının her norm sınırlı dizisinin T altındaki görüntüsünün norm yakınsak bir alt diziye sahip olmasıdır.

2.6.2. Önerme (Schauder)

X ve Y iki Banach uzayı, $T: X \rightarrow Y$ bir norm sınırlı operatör olsun.

T nin kompakt operatör olması için gerekli ve yeterli koşul $T':Y' \rightarrow X'$ operatörünün kompakt olmasıdır [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].

2.7. Zayıf Kompakt Operatörler

X bir normlu uzay olmak üzere X üzerindeki $\sigma(X, X')$ zayıf topolojiyi ω ile, X' üzerindeki $\sigma(X', X)$ zayıf topolojiyi ise ω^* ile göstereceğiz.

2.7.1. Önerme

X ve Y normlu uzaylar, $T: X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. O zaman aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

- (i) T norm süreklidir.
- (ii) T zayıf süreklidir. [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].

2.7.1.Tanım

X ve Y Banach uzayları, $T: X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. Eğer X uzayının kapalı birim yuvarının T altındaki görüntüsü Y uzayının göreceli zayıf kompakt bir alt kümesi ise T ye zayıf kompakt operatör denir.

2.7.2. Önerme

X ve Y Banach uzayları olsun. $T: X \rightarrow Y$ operatörünün zayıf kompakt operatör olması için gerekli ve yeterli koşul X uzayının her norm sınırlı dizisinin görüntüsünün zayıf yakınsak bir alt dizisinin olmasıdır [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].

2.7.3. Önerme

X ve Y Banach uzayları olsun, $T: X \rightarrow Y$ bir zayıf kompakt operatör ise T norm süreklidir [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].

2.7.4. Önerme

$T: Z \rightarrow X$ sürekli lineer operatör T nin zayıf kompakt olması için gerek ve yeter koşul $S: Z \rightarrow Y$, $j: Y \rightarrow X$ sürekli operatörleri olmak üzere $T = jS$ olacak şekilde en az bir tane Y yansımali Banach uzayı olmasıdır [P.Meyer- Nieberg, 1991].

2.7.5. Önerme (Orlitz Pettis)

$\sum_n x_n$ serisinin terimleri bir X Banach uzayına ait olsun. Eğer her artan k_n pozitif tamsayıları için $\sum_{j=1}^n x_{k_j}$, X uzayında zayıf yakınsarsa o zaman $\sum_{j=1}^n x_{k_j}$ normda yakınsaktır.

2.7.6. Önerme (Gantmacher)

X ve Y iki Banach uzayı, $T: X \rightarrow Y$ bir sürekli operatör olsun. Bu takdirde aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

- (i) T zayıf kompakt operatördür.
- (ii) $T''(X'') \subseteq Y$ dir.
- (iii) $T' : (Y', \omega^*) \rightarrow (X', \omega)$ süreklidir.
- (iv) T' zayıf kompakt operatördür [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].

2.7.7. Önerme

X, Y, Z Banach uzayları olmak üzere aşağıdaki önermeler doğrudur.

- (1) X den Y ye tanımlı bütün zayıf kompakt operatörlerin kümesi $L(X, Y)$ uzayının norm kapalı alt vektör uzayıdır.
- (2) S operatörü X den Y ye, T operatörü ise Y den Z ye tanımlı ve sürekli olsunlar. Eğer S ve T operatöründen biri zayıf kompakt ise, TS de zayıf kompakt olur [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].

2.7.8. Önerme

X bir Banach örgüsü $\{x_n\}$, X de bir dizi ve $\{x_n'\}$, X' nde bir dizi olmak üzere X de $x_n \xrightarrow{w} 0$ ve X' de $x_n' \xrightarrow{w} 0$ sağlanırsa o zaman,

- (1) $S: l_1 \rightarrow X$ $S(\alpha_1 \alpha_2 \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ biçiminde tanımlı operatör ve
- (2) $T: X \rightarrow C_0$ $T(x) = (x_1'(x), x_2'(x), \dots)$ biçiminde tanımlı operatör zayıf kompakttır [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].

2.7.2.Tanım

E ve F Riesz uzayları $T: E \rightarrow F$ bir pozitif operatör. Her $x \in E$ için $|Sx| \leq T|x|$ ise $S: E \rightarrow F$ operatörü T tarafından domine edilir denir.

2.7.9. Önerme (Wickstead)

E ve F Banach örgüleri için aşağıdaki önermeler denktir.

- (1) Ya E' ya da F sıra sürekli norma sahiptir.
- (2) Bir zayıf kompakt operatör tarafından domine edilen E den F ye her pozitif operatör zayıf kompakttır [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].

2.7.10. Önerme

Bir AL uzaydan bir KB uzay içine tanımlanan her zayıf kompakt operatör bir zayıf kompakt modüle sahiptir [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].

E ve G normlu uzaylar olmak üzere E den G ye tanımlı zayıf kompakt operatörlerin uzayını $W(E, G)$ ile göstereceğiz.

2.7.11. Önerme

E bir Banach örgüsü, E' sıra sürekli norma sahip ve G Dedekind tam birimli AM uzay olsun. O zaman her bir $T: E \rightarrow G$ zayıf kompakt operatörün modülü vardır ve bir zayıf kompakt operatördür [Schmidt, 1988].

2.7.12. Önerme

E bir Banach örgüsü E' sıra sürekli norma sahip ve G Dedekind tam birimli AM uzay olsun. O zaman $W(E, G), L_b(E, G)$ Riesz uzayında bir idealdir. [Schmidt, 1988].

2.7.3. Tanım

E bir Banach örgüsü, X bir Banach uzayı $T: E \rightarrow X$ bir sürekli operatör olsun. Eğer her $x \in E^+$ için $T([0, x])$, X uzayının göreceli zayıf kompakt alt kümesi ise T operatörüne sıra zayıf (o-zayıf) kompakt operatör denir.

2.7.13. Önerme (Dodds)

E bir Banach örgüsü, X bir Banach uzayı $T: E \rightarrow X$ bir sürekli operatör olsun. O zaman aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

- (i) T o-zayıf kompakt operatördür.
- (ii) E uzayının her sıra sınırlı (x_n) dizisi için, $\lim T(x_n) = 0$ olur.
- (iii) Her $x \in E^+$ ve her bir $\varepsilon > 0$ için $|y| \leq x$ ve $x'(|y|) < \delta$ olduğunda $\|Ty\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $0 \leq x' \in E'$ ve $\delta > 0$ vardır.
- (iv) E uzayını E'' içinde doğurduğu ideal A olmak üzere $T''(A) \subseteq X$ olur [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].

2.7.4.Tanım

E bir Banach örgüsü, X bir Banach uzayı $T : E \rightarrow X$ bir sürekli operatör olsun. Eğer E uzayının her bir norm sınırlı dik dizisi (x_n) için $\lim T(x_n) = 0$ oluyorsa T ye M -zayıf kompakt operatör denir.

2.7.14. Önerme (Meyer-Nieberg)

Her M - zayıf kompakt operatör bir zayıf kompakt operatördür [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].

2.7.5.Tanım

Y, X Banach uzayının kapalı alt vektör uzayı olmak üzere $X = Y \oplus Z$ olacak şekilde X in başka bir kapalı alt vektör uzayı Z varsa Y ye tamamlanabilir denir.

2.7.15. Önerme

K, E Banach örgüsünün sınırlı bir alt kümesi olmak üzere K nın konveks solid zarfı göreceli zayıf dizisel tam olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

- (i) K , göreceli zayıf kompakttır.
- (ii) l_1 in doğal bazına eşit olan K nın elemanlarından oluşan hiçbir x_n dizisi yoktur öyle ki $\overline{\text{span}}(x_n)_n$ E de tamamlanmaktadır.
- (iii) $(x'_n)_n$, E' uzayının birbirine dik pozitif elemanlarının zayıf toplanabilir dizisi olmak üzere $x \in K$ için $n \rightarrow \infty$ iken $x'_n(x)$, 0 a düzgün yakınsar.
- (iv) $(x'_n)_n$, E' uzayının birbirine dik pozitif elemanlarının sıra sınırlı bir dizisi olmak üzere $x \in K$ için $n \rightarrow \infty$ iken $x'_n(x)$, 0 a düzgün yakınsar [Niculescu. 1981].

2.7.6.Tanım

E Archimedian Riesz uzayı ve X Banach uzayı olsun.

$T: E \rightarrow X$ operatörü E nin her sıra aralığının görüntüsünü norm sınırlı olursa T ye aralık sınırlı operatör denir. $T: E \rightarrow X$ aralık sınırlı lineer operatör olmak üzere $q(T)(x) = \sup\{\|Ty\| : |y| \leq |x|\}$ ile tanımlanan yarınorma mutlak monoton yarınorm denir.

2.7.16. Önerme (Dodds)

Her aralık sınırlı lineer $T: E \rightarrow X$ operatörü için aşağıdaki önermeler denktir.

- (i) T sıra- zayıf kompakttır.
- (ii) Her sıra sınırlı dik dizi $(x_n)_1^\infty \in E^+$ için $n \rightarrow \infty$ iken $qT(x_n) \rightarrow 0$ dir.
- (iii) Her sıra sınırlı dik dizi $(x_n)_1^\infty \in E^+$ için $n \rightarrow \infty$ iken $|Tx_n| \rightarrow 0$ dir.
- (iv) Her sıra sınırlı artan dizi $(x_n)_1^\infty \in E^+$ için $(Tx_n)_1^\infty$ yakınsaktır [P. Meyer-Nieberg, 1991].

2.7.7.Tanım

X ve Y iki Banach uzayı ve $T: X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. Her $x \in X$ için $K\|x\| \leq \|T(x)\| \leq M\|x\|$ olacak şekilde iki sabit K ve M pozitif sayıları bulunabiliyorsa T operatörüne bir gömme denir.

X Banach uzayında Y Banach uzayı içine bir gömme varsa X uzayı Y içine gömülebilir denir. T operatörü Banach örgüleri arasında bir gömme ise T ye örgü gömülebilir denir. X Banach örgüsünden Y Banach örgüsüne bir gömme varsa X uzayı Y içine örgü gömülebilir denir.

2.7.17. Önerme (Lozonovskii–Mekler–Meyer–Nieberg)

F , σ - Dedekind tam Banach örgüsü için aşağıdaki önermeler denktir.

- (1) l_∞, F de örgü gömülebilirdir.
- (2) F , sıra süreli norma sahip değildir.

- (3) F^+ nın normda 0 a yakınsamayan sıra sınırlı dik bir dizisi vardır [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].

2.7.18. Önerme

E , Banach örgüsü için aşağıdaki önermeler denktir.

- (1) l_1 , E de örgü gömülebilirdir.
- (2) E' sıra sürekli norma sahip değildir.

2.7.19. Önerme

E Banach örgüsü olsun. E nin l_1 e izomorfik olan her U alt örgüsü için U , E den E ye bir pozitif projeksiyonun görüntüsüdür [P.Meyer- Nieberg, 1991].

2.7.20. Önerme

H birimli AM uzayının sıra sürekli norma sahip olması için gerek ve yeter koşul H uzayının sonlu boyutlu olmasıdır.

2.7.21. Önerme

E ve F Banach örgüleri olmak üzere F , Dedekind tam birimli AM uzayı ise bu durumda $L(E, F) = L^r(E, F)$ dir [Aliprantis ve Burkinshaw, 1985].

2.7.22. Önerme (Monoton Yakınsaklık Teoremi)

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve (f_n) de $M^+(X, \mathcal{A})$ daki fonksiyonların monoton artan bir dizisi olsun. (f_n) dizisi f fonksiyonuna yakınsak ise $\int_X f d\mu = \lim \int_X f_n d\mu$ dir [Cohn, 1980].

3. ZAYIF KOMPAKT OPERATÖRLERİN MODÜLÜ

3.1.Tanım

E bir Banach örgüsü olmak üzere A, E nin göreceli zayıf kompakt altkümesi olsun. $|A| = \{|x| : x \in A\}$ kümesi de göreceli zayıf kompakt oluyorsa E kümesine (W_1) özelliğine sahiptir denir. KB uzayları ve AM uzayları (W_1) özelliğine sahiptirler.

Örnek

$E = C_0(L_1[0,1])$ olmak üzere E sıra sürekli norma sahiptir fakat (W_1) özelliğine sahip değildir.

Çözüm: $E = C_0(L_1[0,1])$ uzayı $E'' = l_\infty[(L_1[0,1])'']$ uzayı içinde ideal olduğundan E uzayı sıra sürekli norma sahiptir. E uzayının (W_1) özelliğine sahip olmadığını gösterelim.

$r_n(t) = \text{sgn}(\sin 2^n \pi t)$ $[0,1]$ üzerinde tanımlı n . Rademacher fonksiyonu olsun. $L_1[0,1]$ de $n \rightarrow \infty$ iken $r_n(t) \xrightarrow{w} 0$ dir.

$x_n = \left(\underbrace{r_n, r_n, \dots, r_n}_{n \text{ tane}}, 0, 0, \dots \right) \in E$ olarak tanımlansın. $E = C_0(L_1[0,1])$ uzayında

$n \rightarrow \infty$ iken $x_n \xrightarrow{w} 0$ dir. Gerçekten, $E' = l_1(L_\infty[0,1])$ olduğundan her $F \in E' = l_1(L_\infty[0,1])$ için $F = (f'_n)$ olacak şekilde $(f'_n) \in L_\infty[0,1]$ vardır.

$x_n = (x_n^k)_{k=1}^\infty \in C_0(L_1[0,1])$ olmak üzere $F(x_n) = F(x_n^k) = \sum_{k=1}^\infty f'_k(x_n^k)$ dir.

$F(x_n) = F(x_n^k) = \sum_{k=1}^\infty f'_k(x_n^k) = \sum_{k=1}^n f'_k(x_n^k) = f'_1(r_n) + f'_2(r_n) + \dots + f'_n(r_n)$ olduğundan $F(x_n) \rightarrow 0$ olur.

$\|x_n\| = \left(\underbrace{|r_n|, |r_n|, \dots, |r_n|}_{n \text{ tane}}, 0, 0, \dots \right) = \left(\underbrace{\chi_{[0,1]}, \chi_{[0,1]}, \dots, \chi_{[0,1]}}_{n \text{ tane}}, 0, \dots \right)$ dir ve $n \neq m$

olmak üzere $\|x_n - x_m\| = 1$ dir. Bu nedenle $(\|x_n\|)$ dizisinin zayıf yakınsak bir alt dizisi yoktur. Dolayısıyla $E, (W_1)$ özelliğine sahip değildir.

3.1. Önerme

F , Banach örgüsü için aşağıdaki önermeler denktir.

- (1) F , (W_1) özelliğine sahiptir.
- (2) Her bir E, AL uzayı için E den F ye tanımlı her zayıf kompakt operatörün modülü zayıf kompakttır.
- (3) l_1 uzayından F ye tanımlı her zayıf kompakt operatör zayıf kompakt modüle sahiptir.

İspat

(1) $\Rightarrow$ (2): F , (W_1) özelliğine sahip ve $T: E \rightarrow F$ bir zayıf kompakt operatör olsun. $|T|$ nin mevcut ve zayıf kompakt bir operatör olduğunu gösterelim.

E nin kapalı birim yuvarı U_E ve pozitif kısmını da U_E^+ olsun. T zayıf kompakt olduğundan $T(U_E^+)$ göreceli zayıf kompakttır. $T(U_E^+)$ kümesini A ile gösterelim. $A \subseteq F$ dir ve F , (W_1) özelliğine sahip olduğundan $|A|$ göreceli zayıf kompakttır.

Önerme 2.4.2 den $|A|$ nın kapalı konveks zarfı $K = \overline{Co}(|A|)$ da zayıf kompakttır.

Her bir $x \in U_E^+$ için $A_x = \{ \sum_{i=1}^n |Tx_i| : n \in \mathbb{N} : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = x \}$ olsun. Önerme 2.1.5 den $A_x \uparrow$ olur. Ayrıca $A_x \subset K$ dir. Gerçekten, keyfi bir $z = \sum_{i=1}^n |Tx_i| \in A_x$ elamanını alalım.

$z = \sum_{i=1}^n |Tx_i| = \sum_{i=1}^n \|x_i\| \cdot \left| \frac{T(x_i)}{\|x_i\|} \right|$ eşitliğinde $y_i = T\left(\frac{x_i}{\|x_i\|}\right)$ olarak alınırsa $y_i \in A$ olmasından $|y_i| \in K$ olur ve $z = \sum_{i=1}^n \|x_i\| \cdot |y_i|$ olur.

$0 \in U_E^+$ ve $T(0) = 0 \in T(U_E^+)$ olmasından $0 \in K$ olur.

E , AL -uzayı olduğundan $\sum_{i=1}^n \|x_i\| = \|\sum_{i=1}^n x_i\| = \|x\|$ eşitliği sağlanır.

$\alpha = \sum_{i=1}^n \|x_i\| = \|\sum_{i=1}^n x_i\| = \|x\|$ olarak alınırsa $x \in U_E^+$ olmasından $\alpha \leq 1$ olur. z elemanına $0.(1-\alpha)$ sayısını eklememiz değerini değiştiremeyeceğinden ve K kümesinin tanımından $z \in K$ olduğu görülür.

K zayıf kompakt küme olduğundan A_x ağının zayıf yakınsak bir A_{x_α} alt ağı vardır. A_{x_α} alt ağı yukarı yönlendirildiğinden ve zayıf yakınsaklığından A_{x_α} ağı norm yakınsaktır. (Bkz. Önerme 2.4.6) Önerme 2.4.5 (ii) den $\sup(A_{x_\alpha}) = y(x) \in K$ dir. Diğer taraftan $\sup(A_x) = y(x) \in K$ olur. Önerme 2.1.3 den T nin modülü $|T|$ var ve $|T|(x) = y(x)$ dir.

Her $x \in U_E^+$ için $|T|(U_E) \subset K$ olur. $|T|(U_E)$ kümesi de göreceli zayıf kompakt buradan $|T|$ zayıf kompakt olur. Ayrıca $\|T\|_r = \||T|\| = \|T\|$ dir.

Gerçekten, her $x \in U_E^+$ için

$$\|(|T|x)\| = \|y(x)\| = \lim\{\|y\| ; y \in A_x\} \leq \|T\|$$

$$\begin{aligned} \|\sum_{i=1}^n |Tx_i|\| &= \|\sum_{i=1}^n \|x_i\| \cdot \left|T\left(\frac{x_i}{\|x_i\|}\right)\right|\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|x_i\| \left\|T\left(\frac{x_i}{\|x_i\|}\right)\right\| \\ &\leq \|T\| \cdot \|\sum_{i=1}^n x_i\| \\ &\leq \|T\| \end{aligned}$$

$\||T|\| \leq \|T\|$ bulunur. Diğer taraftan $\|T\| \leq \||T|\|$ olduğundan $\|T\|_r = \||T|\| = \|T\|$ dir.

(2) $\Rightarrow$ (3): l_1 , AL uzayı olduğundan ispat açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (1): Kabul edelim ki (3) sağlansın ancak (1) sağlanmasın. Yani l_1 den F ye tanımlı her zayıf kompakt operatör, zayıf kompakt modüle sahip olsun. Ancak F' nin en az bir göreceli zayıf kompakt alt kümesi A için $|A|$ kümesi göreceli zayıf kompakt olmasın. Yani A nin bir (y_n) dizisi için $(|y_n|)$ dizisi zayıf yakınsak bir alt diziye

sahip olmasın. A göreceli zayıf kompakt olduğundan A nın her (y_n) dizisinin zayıf yakınsak bir (x_n) alt dizisi vardır, fakat $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin zayıf yakınsak hiçbir alt dizisi yoktur.

$T: l_1 \rightarrow F$ $(\lambda_i) \in l_1$ olmak üzere $T(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \in F$ olarak tanımlansın.

T anlamlıdır. Gerçekten, $S_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ kısmi toplamlar dizisini alalım. (S_n) nin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $n > m > n_0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\| &= \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i - \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=m+1}^n \lambda_i x_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=m+1}^n \|\lambda_i x_i\| \\ &= \sum_{i=m+1}^n |\lambda_i| \cdot \|x_i\| \\ &< M \cdot \sum_{i=m+1}^n |\lambda_i| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \quad ((x_i) \text{ norm sınırlı ve } (\lambda_i) \in l_1) \end{aligned}$$

Dolayısıyla $(S_n) \subseteq F$ de Cauchy dizisi olur. F tam olduğundan $\lim S_n = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \in F$ olur.

T nin iyi tanımlı olduğu da kolayca gösterilebilir.

$\{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 1\} = \{T(\lambda_n) : \lambda_n \in U_{l_1}\} = T(U_{l_1})$ dir. Önerme 2.4.4 den T zayıf kompaktır. (3) den T nin zayıf kompakt bir modülü vardır.

$S = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \|x_i\|$ olsun. $S = \|T\|$ olduğunu gösterelim. Kolayca görülebilir ki $\overline{T} \leq S$ dir. $\overline{T}$ operatörünün başka bir üst sınırı olarak K operatörünü alalım. $S \leq K$ dir.

Gerçekten her $0 \leq \lambda = (\lambda_i) \in l_1$ için $\mu_i = (0, 0, \dots, \lambda_i, 0, 0, \dots) \in l_1$ olarak tanımlanırsa $\overline{T}(\mu_i) \leq K(\mu_i)$ olur. Buradan

$$\overline{T}(\mu_i) \leq K(\mu_i) \Rightarrow \overline{T} \lambda_i x_i \leq K(\mu_i)$$

$$\Rightarrow \lambda_i |x_i| \leq K(\mu_i)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i |x_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} K(\mu_i)$$

$$\Rightarrow S(\lambda) \leq K(\lambda) \text{ olur.}$$

Her $(\lambda_i) \in l_1$ için $|T|(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i |x_i|$ bulunur.

$e_i = (0, 0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$ seçelim.

$\{|x_i| = |T|e_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi zayıf yakınsak alt dizi içerir. Ancak $\{|x_n|\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin hiçbir zayıf yakınsak alt dizisi yoktu. Bu bir çelişkidir, dolayısıyla kabulümüz yanlıştır.

3.2. Önerme

E , Banach örgüsü için aşağıdaki önermeler denktir.

- (1) E' , (W_1) özelliğine sahiptir.
- (2) Dedekind tam birimli AM uzayı F için, E den F ye her zayıf kompakt operatörün, zayıf kompakt bir modülü vardır.
- (3) E den l_{∞} a tanımlı her zayıf kompakt operatörün zayıf kompakt bir modülü vardır.

İspat

(1) $\Rightarrow$ (2): F Dedekind tam birimli AM uzayı olsun. O zaman her $T \in L^r(E, F) = L(E, F)$ için $|T| = P|T'|'j = P|T''|j$ olur. Burada $P : F'' \rightarrow F$ bir pozitif contractive projeksiyon ve $j : E \rightarrow E''$ doğal gömme dönüşümüdür.

Eğer T zayıf kompakt ise T' zayıf kompakttır (Bkz. Önerme 2.7.6 (Gantmacher)). Önerme 2.5.11 den F' bir AL uzayı ve Önerme 3.1 in (2) şartından $|T'|$ zayıf kompakttır. Gantmacher teoremden $|T''|'$ zayıf kompakt $|T| = P|T''|j$ olmasından ve Önerme 2.7.7 den $|T|$ zayıf kompakttır.

(2) $\Rightarrow$ (3): l_{∞} Dedekind tam birimli AM uzayı olduğundan açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (1): Kabul edelim ki E' , (W_1) özelliğine sahip olmasın. O zaman $n \rightarrow \infty$ için $x'_n \in E'$ zayıf yakınsak dizisi vardır öyle ki $x'_n \rightarrow x'_0 \in E'$ zayıf yakınsar. Fakat $\{|x'_n|\}_{n=1}^\infty$ nin zayıf yakınsak alt dizisi yoktur.

$T : E \rightarrow l_\infty$ $T(x) = (x'_n(x))_{n=1}^\infty$ olarak tanımlansın. x'_n zayıf yakınsak olduğundan x'_n zayıf sınırlıdır ve buradan x'_n norm sınırlıdır, T anlamlıdır. T zayıf kompakttır.

$S : E \rightarrow C_0 \subset l_\infty$ her $x \in E$ için $Sx = (x'_n(x) - x'_0(x))_{n=1}^\infty$ olarak tanımlansın. Önerme 2.7.8 den S zayıf kompakt operatördür. $S_0 : E \rightarrow l_\infty$ $e_0 = (1, 1, \dots) \in l_\infty$ için $S_0 = x'_0(x) \cdot e_0$ olarak tanımlanan S_0 , rank bir operatördür, dolayısıyla zayıf kompakt bir operatördür. $T = S + S_0$ olduğundan T de zayıf kompakt operatördür.

$|T| : E \rightarrow l_\infty$ her $x \in E$ için $|T|x = (|x'_n|(x))_{n=1}^\infty$ dır. Gerçekten

$$\begin{aligned} |T|x &= \sup \{ |Ty| : |y| \leq x \} \\ &= \sup \{ |x'_n(y)| : |y| \leq x \} \\ &\leq \sup \{ |x'_n|(|y|) : |y| \leq x \} \\ &= (|x'_n|(x)) \text{ dir.} \end{aligned}$$

Diğer taraftan $\overline{\mp}T \leq H$ olacak şekilde bir $H \in L_b(E, F)$ seçelim.

Her $x \in E^+$ için $\overline{\mp}T(x) \leq H(x)$ dir.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\overline{\mp}x'_n(x) \leq H(x) \Rightarrow (\overline{\mp}x'_n)(x) \leq H(x) \Rightarrow |x'_n|(x) \leq H(x)$ olur.

Buradan $|T|x = (|x'_n|(x))_{n=1}^\infty$ bulunur. (3) den $|T|$ zayıf kompakt operatördür.

$$|T| : E \rightarrow l_\infty \quad |T|' = (l_\infty)' \rightarrow E'$$

Her $(\lambda_n) \in l_1 \subset (l_\infty)'$ için $|T|'(\lambda_n) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n |x'_n|$ olur.

Gantmacher teoreminden $|T|'$ zayıf kompakttır. e_n l_1 uzayının n .terimi 1 diğer terimleri 0 olan elemanı olmak üzere, $\{|x'_n| ; n \in \mathbb{N}\} = \{|T|'e_n : e_n \in l_1 ; n \in \mathbb{N}\}$ olur. $|T|'$ zayıf kompakt olduğundan $\{|x'_n| ; n \in \mathbb{N}\}$ zayıf yakınsak alt dizi içerir. Ancak bu mümkün değildir. Bu bir çelişkidir. $(3) \Rightarrow (1)$ sağlanır.

Aşağıdaki örnek F birimsiz bir Dedekind tam AM uzayı E , bir AM uzayı olduğunda Önerme 3.2 nin sonuçlarının sağlanmadığını gösterecektir.

Örnek

$E = C([0,1])$, $F = l_\infty(F_n)$, $F_n = (l_\infty, \|\cdot\|)$ ve her $(\lambda_k) \in l_\infty$ için $\|(\lambda_k)\| = \max\{\|(\lambda_k)\|_\infty, \limsup(|\lambda_k|)\}$ olsun. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için F_n bir Dedekind tam AM uzayıdır. Bu yüzden F de Dedekind tam AM uzayı olur.

Çözüm : $T_n : E \rightarrow F_n$ her $f \in E$ için $T_n f = \left(2^n \int_{I_n} f r_k dt\right)_{k=1}^\infty r_n$, $[0,1]$ üzerinde n .dereceden Rademacher fonksiyonu ve $I_n = (2^{-n}, 2^{-n+1})$ olsun.

$L_1[0,1]$ uzayında $r_n \xrightarrow{w} 0$ dir. $L_1[0,1]$, E' nün kapalı alt uzayı olduğundan E' içinde $r_n \xrightarrow{w} 0$ dir.

$T_n : E \rightarrow C_0 \subset F_n$, Önerme 2.7.2 den her $n \in \mathbb{N}$ için T_n zayıf kompakttır. Her bir $f \in E$ ve her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\|T_n f\|_{F_n} = \left\| \left(2^n \int_{I_n} f \cdot r_k dt\right)_{k=1}^\infty \right\|_\infty \leq \|f\|$ dir. Böylece $\|T\| \leq 1$ bulunur.

T_n nin modülü $|T_n|$ vardır ve $|T_n|f = \left(2^n \int_{I_n} f \cdot r_k dt\right) e_o \in F_n$, burada $e_o = (1, 1, \dots)$ dir. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $\|T_n\|_r = \||T_n|\| = n$ dir.

$T : E \rightarrow F$ $Tf = \left(\frac{1}{n} T_n\right)_{n=1}^\infty$ olarak tanımlansın. O zaman T zayıf kompakt, T nin modülü vardır ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\overline{e_n} = \frac{1}{n} e_o$ olmak üzere

$|T|f = \left(\frac{1}{n}|T_n|f\right)_{n=1}^{\infty} = \left((2^n \int_{I_n} f dt) \frac{e_0}{n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left((2^n \int_{I_n} f dt) \overline{e_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ dir. $|T|$ zayıf kompakt değildir. Gerçekten,

$0 \leq f_n \leq 1$ olacak şekilde $f_n \in E$ seçilsin ve $t \notin I_n$ iken $f_n(t) = 0$ ve $\int_{I_n} f_n dt = 2^{-n-1}$ olsun. f_n ler sıra sınırlı ve diktir.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\| |T|f_n \| \geq \left\| \frac{1}{n}|T_n|f_n \right\| = 2^n \int_{I_n} f_n dt = \frac{1}{2}$ bulunur.

Önerme 2.7.18 gösterir ki $|T|$ sıra-zayıf kompakt değildir ve bu yüzden zayıf kompakt da değildir. (x_n) X Banach uzayında bir dizi olsun. $H, \mathbb{N}$ nın sonlu alt kümesi olmak üzere $\lim_H \sum_{n \in H} x_n = x$, $x \in X$ oluyorsa (x_n) dizisine koşulsuz toplanabilir dizi (şartsız toplanabilir dizi) denir.

Eğer E Banach örgüsündeki her $\{x_n\}$ koşulsuz toplanabilir dizisi için $\{\sum_{i=1}^n |x_i|\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi E de sıra sınırlı olduğunda $\{|x_n|\}_{n=1}^{\infty}$ toplanabilir oluyorsa E ye sıra sınırlı AM uzayı denir [G. Groenewegen, A. van Rooij. 1987].

3.3. Önerme

E , Banach örgüsü için aşağıdaki önermeler denktir.

- (1) E' sıra sınırlı AM uzayıdır.
- (2) Her bir KB uzayı F için E den F ye her regüler zayıf kompakt operatörün zayıf kompakt bir modülü vardır.
- (3) E den l_1 e tanımlı her zayıf kompakt operatörün zayıf kompakt bir modülü vardır.

İspat

(1) $\Rightarrow$ (2): F , KB uzayı, $T: E \rightarrow F$ regüler zayıf kompakt operatör olsun. T regüler operatörünü alalım, her regüler operatör sıra sınırlı olduğundan T sıra sınırlıdır. F Dedekind tam olduğundan $|T|$ vardır. Kabul edelim ki $|T|$ zayıf kompakt olmasın, Önerme 2.7.15 de K kümesi olarak $|T|(U)$ kümesini alırsak, o zaman $(x'_n)_n, F'$

uzayının sıra sınırlı, dik ve pozitif bir dizisi olmak üzere ve $|T|(U)$ üzerinde (x'_n) , 0 a düzgün yakınsak değildir.

Dolayısıyla $\sup \{ |x'_n(|T|(x))| ; x \in U \} = \| |T'| x'_n \| \geq \varepsilon > 0$ sağlanır.

Önerme 2.3.3 (Krengel –Synnatzschke) den her bir $f \in F_n^\sim$ için $|T'| f = |T'| f$ eşitliği sağlanır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\| |T'| x'_n \| \geq \varepsilon > 0$ bulunur.

E' üzerindeki norm Fatou özelliğini sağlar. Gerçekten $0 \leq f_\alpha \uparrow f$ E' üzerinde sağlansın. Her $x \in U$ için $0 \leq |f_\alpha(x)| \leq |f_\alpha|(|x|) \leq f(|x|)$ olduğundan $0 \leq \|f_\alpha\| \leq \|f\|$ dir.

Diğer taraftan her α için $\|f_\alpha\| \leq k$ olsun.

$\forall x \in U_+$ için $f_\alpha(x) \leq k$

$\Rightarrow \sup f_\alpha(x) \leq k$

$\Rightarrow f(x) \leq k$ olur.

$|f(x)| \leq |f|(|x|) \leq f(|x|) \leq k$

$\Rightarrow \sup \{ |f(x)| : x \in U \} \leq k$

$\Rightarrow \|f\| \leq k$ bulunur. Dolayısıyla $\|f_\alpha\| \uparrow \|f\|$ olur. Önerme 2.1.5. (3) den her $x'_n \in F'_+$ için $\{ \sum_{i=1}^{m_n} |T' z'_{ni}| : z'_{ni} \in F'_+ \text{ ve } \sum_{i=1}^{m_n} z'_{ni} = x'_n \} \uparrow |T'| (x'_n)$ olur.

E' üzerindeki norm Fatou normu olduğundan $\| \sum_{i=1}^{m_n} |T' z'_{ni}| \| \uparrow \| |T'| (x'_n) \|$ bulunur. Böylece $z'_{n1}, z'_{n2}, \dots, z'_{nm_n} \in F'_+$ için $\sum_{i=1}^{m_n} z'_{ni} = x'_n$ olacak şekilde en az bir $m_n \in \mathbb{N}$ vardır ... (1)

$\| \sum_{i=1}^{m_n} |T' z'_{ni}| \| + \frac{1}{2} \varepsilon > \| |T'| x'_n \| \geq \varepsilon$

$\Rightarrow \| \sum_{i=1}^{m_n} |T' z'_{ni}| \| > \frac{1}{2} \varepsilon \dots (2)$

$x' \in F'$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{i=1}^n x'_i \leq x'$ olsun.

$$\underbrace{z'_{11} + z'_{12} + \dots + z'_{1m_1}}_{x'_1} + \underbrace{z'_{21} + z'_{22} + \dots + z'_{2m_2}}_{x'_2} + \underbrace{z'_{31} + z'_{32} + \dots + z'_{3m_3}}_{x'_3} + \dots$$

serisinin kısmi toplamlar dizisi artan ve sıra sınırlıdır. Her $f \in F'_+$ için

$$f(z'_{11} + z'_{12} + \dots + z'_{21} + \dots + z'_{m_1} + \dots + z'_{mn}) \leq f(x'_n) \text{ olduğundan}$$

$\lim f(z'_{11} + z'_{12} + \dots + z'_{21} + \dots + z'_{m_1} + \dots + z'_{mn}) \in \mathbb{R}$ olur. Buradan serinin kısmi toplamlar dizisi zayıf Cauchy dizisidir.

Hipotezden T operatörü zayıf kompakt ve Gantmacher teoreminden T' zayıf kompaktır.

Önerme 2.7.4 den $S: F' \rightarrow Y$, $j: Y \rightarrow E'$ sürekli operatörleri olmak üzere $T' = S \circ j$ olacak şekilde bir Y yansımali Banach uzayı vardır. Y yansımali Banach uzayı olduğundan $Y = Y''$ dir. S sürekli bir operatör olduğundan $Sz'_{11} + Sz'_{12} + \dots$ serisinin kısmi toplamlar dizisi Y de bir y elemanına zayıf yakınsar. Önerme 2.7.4 den ve j sürekli olduğundan $jS(z'_{11} + \dots)$ serisinin kısmi toplamlar dizisi zayıf yakınsaktır.

$$T'z'_{11} + T'z'_{12} + \dots + T'z'_{1m_1} + T'z'_{21} + \dots + T'z'_{31} + \dots (*)$$

T' zayıf kompakt olduğundan $(*)$ serisinin kısmi toplamlar dizisi zayıf yakınsak bir dizi oluşturur. $(*)$ serisinin her alt serisi de zayıf yakınsaktır. Önerme 2.7.5 (Orlitz Pettis) den $T'z'_{11}, T'z'_{12}, \dots, T'z'_{1m_1}, T'z'_{21}, \dots, T'z'_{2m_2}, \dots, T'z'_{31}, \dots$ dizisi normda yakınsaktır. Dolayısıyla bu dizi koşulsuz toplanabilir bir dizidir. Bu koşulsuz toplanabilir diziyi göz önüne alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için, $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} |T'z'_{ij}| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} |T'z'_{ij}| = |T'(\sum_{i=1}^n x'_i)| \leq |T'(x')|$ olur.

Böylece $|T'z'_{11}|, \dots, |T'z'_{m_1}|, |T'z'_{21}|, \dots, |T'z'_{m_2}|, \dots$ dizisi sıra sınırlı kısmi toplamlara sahiptir. E' sıra sınırlı AM uzayı olduğundan $|T'z'_{11}|, \dots, |T'z'_{m_1}|,$

$|T'z'_{21}|, \dots, |T'z'_{m2}| \dots$ dizisi toplanabilirdir. Dolayısıyla $\|\sum_{i=1}^{m_n} |T'z'_{ni}|\| \rightarrow 0$ olur. Bu ise (2) ile çelişir. Böylece $|T|$ zayıf kompakttır.

(2) $\Rightarrow$ (3) l_1 bir AL uzayı ve her AL uzayı da KB uzayı olduğundan kanıt açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (1): Kabul edelim ki (3) sağlansın. $\{x'_n\}_{n=1}^\infty$ E' nde koşulsuz toplanabilir dizi ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{i=1}^n |x'_i| \leq x'$ olsun. $\{|x'_n|\}_{n=1}^\infty$ toplanabilirdir. Her $n \in \mathbb{N}$ her bir $x \in E$ ve $x'' \in E''$ için $\sum_{i=1}^n |x'_i(x)| \leq \sum_{i=1}^n |x'_i|(|x|) \leq x'(|x|)$ olur.

Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x'' \in E''$ için $\sum_{i=1}^n |x''(x'_i)| \leq \sum_{i=1}^n |x''|(|x'_i|) \leq |x''|(|x'|)$ olduğundan $(x'_n(x)), (|x'_n|(x)), (x''(x'_n)) \in l_1$ olur.

$T : E \rightarrow l_1$, $x \in E$ olmak üzere $T(x) = (x'_n(x))$ olarak tanımlansın. T anlamlıdır. Gerçekten her $x \in E$ için $(x'_n(x)) \in l_1$ dir.

Ayrıca $x_1 = x_2$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $(x'_n(x_1)) = (x'_n(x_2))$ olacağından T iyi tanımlıdır.

$|y| \leq x$ olmak üzere $|Ty| = |(x'_n(y))| \leq |x'_n| |y| \leq |x'_n| (x) \in l_1$ olduğundan T sıra sınırlı ve l_1 Dedekind tam olduğundan T nin modülü $|T|$ vardır.

$T = \underbrace{|T|}_{\geq 0} - \underbrace{(|T| - T)}_{\geq 0}$ olduğundan T regüler operatördür.

$|T|(x) = (|x'_n|(x))$ dır. Gerçekten bir S operatörünü $x \in E$ için $S(x) = (|x'_n|(x))$ olarak tanımlayalım. $|T| = S$ olduğunu gösterelim.

Her $x \in E^+$ için $\pm T(x) = \pm x'_n(x) \leq |x'_n|(x)$ olduğundan $\pm T \leq S$ dir.

Şimdi $\pm T \leq H$ olsun. Her $x \in E^+$ için $\pm(x'_n(x)) \leq H(x)$

$\pm(x'_n(x)) \leq H(x) \Rightarrow |x'_n(x)| \leq H(x)$

$\Rightarrow |x'_n|(x) \leq H(x)$

$\Rightarrow S \leq H$ olur. Buradan da $|T| = S = (|x'_n|(x))$ elde edilir.

$T': l_\infty \rightarrow E'$ her $(\lambda_n) \in l_\infty$ için $T'(\lambda_n) = (\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot x'_n)$ dönüşümünü göz önüne alalım.

Her $x'' \in E''$ ve her $(\lambda_n) \in l_\infty$ için $T'': E'' \rightarrow (l_1)'' = (l_\infty)'$ olur.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x''(x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda_k x''(x'_k)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} x''(\sum_{k=1}^n \lambda_k x'_k)$$

$$= x'' \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{k=1}^n \lambda_k x'_k)$$

$$= x'' (\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x'_n)$$

$$= x'' (T'(\lambda_n))$$

Böylece $T''x''((\lambda_n)) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x''(x'_k)$ dir.

Ayrıca $x''(x'_n) \wedge (\lambda_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x''(x'_n)) = T''x''(\lambda_n)$ olduğundan $x''(x'_n) = T''x''$ olur. Her $x'' \in E''$ için $T''x'' = (x''(x'_n)) \in l_1$ olur. Buradan $T''E'' \subseteq l_1$ olur. Önerme 2.7.6 (Gantmacher) dan T zayıf kompakttır. Hipotezden $|T|$ zayıf kompakttır. Gantmacher önermesinden $|T|'$ zayıf kompakttır. Her $x \in E$ için

$$(|T|'e_n)(x) = (e_n)(|T|(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} e_n^k \cdot |T|(x)_k = \sum_{k=1}^{\infty} e_n^k \cdot (|x'_k|(x)) = |x'_n|(x)$$

dir.

Dolayısıyla her $x \in E$ için $|T|'e_n = |x'_n|$ bulunur.

$u_n = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\|u_n\| = 1$ ve $0 \leq u_n \uparrow$ dir.

Her $f \in l_\infty^+$ için $0 \leq f(u_n) \uparrow \leq \|f\| \cdot \|u_n\| \leq \|f\|$ olur.

$\lim f(u_n) \in \mathbb{R}$ mevcut olduğundan (u_n) zayıf Cauchy dizisi olur.

$u_n = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ l_∞ da zayıf Cauchy dizisi olduğundan $|T|'$ ' nün zayıf kompaktlığından $|T|'(u_n) = (|x'_1| + |x'_2| + \dots + |x'_n|)$ artan dizisi zayıf yakınsak ve bu yüzden norm yakınsak olur.

Bu da $\{|x'_n|\}_{n=1}^\infty$ dizisinin toplanabilir olmasını gerektirir. Yani E' sıra sınırlı AM -uzayı olur.

4. ZAYIF KOMPAKT OPERATÖRLERİN VEKTÖR ÖRGÜLERİ

E bir kısmi sıralı vektör uzayı, F de E uzayının bir altuzayı olsun. Eğer $(F, \leq)$ bir vektör örgüsü ve her $x, y \in F$ için x ve y elemanının F de hesaplanan supremumu ile E de hesaplanan supremumu aynı ise F ye E nin genelleştirilmiş alt örgüsü denir. Örneğin $L^r(C[-1, 1])$ bir vektör örgüsü değildir. Ancak $K(C[-1, 1])$ bir vektör örgüsüdür. Böylece $K(C[-1, 1])$, $L^r(C[-1, 1])$ nin bir genelleştirilmiş alt örgüsüdür.

E Banach örgüsünden F Banach örgüsüne tanımlı bütün zayıf kompakt operatörlerin uzayı $W(E, F)$ olarak gösterilsin. $W^r(E, F)$ ise pozitif zayıf kompakt operatörler tarafından gerilen zayıf kompakt operatörlerin alt uzayı olsun.

Yani $W^r(E, F) = \{R = S - T; S, T \in W(E, F), S \geq 0, T \geq 0\}$ dir. Önerme 3.1 den E bir AL -uzayı, F bir (W_1) özelliğine sahip Banach örgüsü iken $W(E, F), L^r(E, F)$ nin genelleştirilmiş alt örgüsü olur.

A, X kısmi sıralı kümesinin bir alt kümesi olsun. Eğer $x \in X$, $a, b \in A$ için $a \leq x \leq b$ iken $x \in A$ oluyorsa A ya sıra konveks küme denir.

4.1. Önerme

E sonsuz boyutlu AL uzayı ve F , Banach örgüsü olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

- (1) F , (W_1) özelliğine sahiptir.
- (2) $W(E, F)$, $L^r(E, F)$ nin genelleştirilmiş altörgüsüdür.
- (3) $W(E, F)$ bir vektör örgüsüdür.

İspat

(1) $\Rightarrow$ (2): Önerme 3.1. den, F , (W_1) özelliğine sahip iken her bir E , AL uzayı için E den F ye her zayıf kompakt operatörün modülü vardır ve zayıf kompakttır.

$T \in W(E, F)$ olsun. $T: E \rightarrow F$ zayıf kompakt ise $|T|$ zayıf kompakttır. (Bkz. Önerme 3.1.)

$|T| \in W(E, F)$ olduğundan $W(E, F)$ bir vektör örgüsü olur. Ayrıca $T \in L^r(E, F)$ ve $|T| \in L^r(E, F)$ olur.

(2) $\Rightarrow$ (3) : (2) önermesinden $W(E, F)$ bir vektör örgüsüdür.

(3) $\Rightarrow$ (1) : Farz edelim ki (3) sağlansın.

$E = L_1(X, A, \mu) = L_1(\mu)$ olsun. E sonsuz boyutlu olduğundan X de sonsuz elemanlıdır. Her $i \in \mathbb{N}$ için $0 < \mu(A_i) < \infty$ olacak şekilde X in $A_1, A_2, A_3, \dots$ dik ölçülebilir kümelerini bulabiliriz. $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ olsun.

Her $f \in E$ için $P, P_i : E \rightarrow E$ $Pf = f \cdot \chi_A$, $P_i f = f \cdot \chi_{A_i}$ olarak tanımlansınlar. $i \neq j$ için $P_i \cdot P_j = P_i (P - P_i) = (P - P_i)P_i = 0$ dir. Gerçekten,

$$(P_i \cdot P_j)(f) = P_i(P_j f) = P_i(f \chi_{A_j}) = f \cdot \chi_{A_j} \cdot \chi_{A_i} = 0$$

$$P_i((P - P_i)f) = P_i(f \chi_A - f \chi_{A_i}) = \frac{f \chi_A \cdot f \chi_{A_i}}{\chi_{A_i}} - \frac{f \chi_{A_i} \chi_A}{\chi_{A_i}} = 0 \text{ Ayrıca}$$

$$(P - P_i)(P_i f) = (P - P_i)(f \chi_{A_i}) = P(f \chi_{A_i}) - P_i(f \chi_{A_i}) = \frac{f \chi_A \cdot \chi_{A_i}}{\chi_{A_i}} - \frac{f \chi_{A_i} \cdot \chi_{A_i}}{\chi_{A_i}} = 0$$

olduğundan $i \neq j$ iken $P_i \cdot P_j = 0$ olur.

Her $f \in E$ için $Pf = \sum_{i=1}^{\infty} P_i f$ olduğunu gösterelim.

$T = Pf$ ve $T_n = \sum_{i=1}^n P_i f = f \cdot \chi_{\bigcup_{i=1}^n A_i}$ olarak alalım. $T_n \uparrow$ ve $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} Pf$ dir. Gerçekten,

$$\chi_{\bigcup_{i=1}^n A_i}(x) \leq \chi_A(x) \text{ dir.}$$

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\chi_{A_n}(x) \leq \chi_{\bigcup_{i=1}^n A_i}(x) \leq K$ olacak şekilde bir K olsun. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq i \leq n$ için $\chi_{A_n}(x) \leq K$ olur.

Her $x \in A$ için $x \in A_{n_0}$ olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla

$$\chi_{\bigcup_{i=1}^{n_0} A_i}(x) \leq K \text{ dır.}$$

$$\chi_{\bigcup_{i=1}^{n_0} A_i}(x) \leq K \Rightarrow 1 \leq K \Rightarrow \chi_A(x) \leq K$$

$$\chi_{\bigcup_{i=1}^n A_i}(x) \uparrow \chi_A(x) \text{ bulunur.}$$

Böylece her $f \in E^+$ için $f \chi_{\bigcup_{i=1}^n A_i}(x) \uparrow f \chi_A(x)$ elde edilir. Monoton yakınsaklık teoreminden her $f \in E^+$ için $Pf = \sum_{i=1}^{\infty} P_i f$ bulunur. $f^+, f^- \in E^+$ olmak üzere her $f \in E$, $f = f^+ - f^-$ olarak yazılabildiğinden $\sum_{i=1}^{\infty} P_i f = \sum_{i=1}^{\infty} P_i f^+ - \sum_{i=1}^{\infty} P_i f^- = Pf^+ - Pf^- = Pf$ elde edilir.

Kabul edelim ki F , (W_1) özelliğini sağlamasın. O zaman F nin en az bir zayıf yakınsak (y_n) dizisi var ve $\{y_n\}$ dizisi zayıf yakınsak hiçbir alt diziye sahip olmasın.

$S: E = L_1(\mu) \rightarrow F$ her $f \in E$ için $Sf = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{A_n} f dt \right) y_n$ olarak tanımlansın.

$\sum_{i=1}^n \left| \int_{A_i} f d\mu \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} |f| d\mu \leq \int_A |f| d\mu \leq \int_X |f| d\mu = \|f\|$ (y_n) zayıf yakınsak dolayısıyla norm sınırlı olduğundan aşağıdaki eşitsizlik bulunur.

$$\sum_{i=1}^n \left\| \left(\int_{A_i} f d\mu \right) y_n \right\| \leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{A_i} f d\mu \right| \cdot \|y_n\| \leq M \cdot \sum_{i=1}^n \left| \int_{A_i} f d\mu \right| \leq M \cdot \|f\|$$

$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_{A_i} f dt \right) y_n$ serisi mutlak yakınsaktır. Uzay tam olduğundan bu seri yakınsaktır. $f \in U_E$ olsun. Her $n \in N$ için λ_n olarak $\left| \int_{A_n} f d\mu \right|$ seçelim.

$S(f) \in \{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n y_n ; \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 1 \}$ bulunur.

$S(U_E) \subseteq \{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n y_n ; \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 1 \}$ elde edilir.

Önerme 2.4.4 den $S(U_E)$ de göreceli zayıf kompakt olur. Dolayısıyla S zayıf kompaktır. $W(E, F)$ bir vektör örgüsü olduğundan S ve $-S$ nin supremumu $W(E, F)$ uzayında vardır. Buna U diyelim. Her $f \in E$ için $Uf = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{A_n} f dt \right) |y_n|$ dir. Önce $UP \geq \overline{P}SP$ olduğunu gösterelim. P pozitif

operatör olduğundan P sürekli. U bir zayıf kompakt operatör olduğundan UP zayıf kompakttır.

$UP \in W(E, F)$ ve $\overline{\mp}S \leq U$ olduğundan $\overline{\mp}S(P) \leq UP$ dir.

Diğer taraftan $\overline{\mp}S(f\chi_A) = \overline{\mp}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f\chi_A d\mu\right)y_n = \overline{\mp}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n \cap A} f d\mu\right)y_n = \overline{\mp}Sf$ olduğundan $\overline{\mp}SP = \overline{\mp}S$ olur.

$UP \geq \overline{\mp}SP = \overline{\mp}S$ ve $U = S \vee (-S)$ olduğundan $UP \geq U$ dir. Ayrıca $UP \leq U$ olduğunu görmek için $f \in E$ seçelim.

$UP(f) = U(Pf) = U(f\chi_A) \leq Uf$ ($U \geq 0, f\chi_A \leq f$ olduğundan) $UP \leq U$ bulunur.

$UP \geq U$ ve $UP \leq U$ olmasından $UP = U$ olur. Ayrıca,

$SP_i f = Sf\chi_{A_i} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{A_n} f\chi_{A_i} d\mu\right)y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{A_n \cap A_i} f d\mu\right)y_n = \int_{A_i} f d\mu y_i$ eşitliğinden $SP_i f = \left(\int_{A_i} f d\mu\right) y_i$ elde edilir.

S zayıf kompakt operatör ve P_i operatörleri sürekli olduğundan SP_i zayıf kompakttır. $|SP_i| \in L^r(E, F)$ de hesaplanır. $|SP_i|$ nin varlığından, her $f \in E$ için

$|SP_i|f = \left(\int_{A_i} f d\mu\right) |y_i|$ dir. Gerçekten, her $f \in E^+$ için $\overline{\mp}(SP_i)(f) \leq |SP_i f|$ dir.

$|SP_i f| = \left|\left(\int_{A_i} f d\mu\right) y_i\right| \leq \left(\int_{A_i} f d\mu\right) |y_i|$ olduğundan $\overline{\mp}(SP_i)(f) \leq \left(\int_{A_i} f d\mu\right) |y_i|$ dir. $\overline{\mp}SP_i$ operatörlerinin başka bir üst sınırı K operatörü olsun. $K \in L^r(E, F)$ dir.

$\overline{\mp}SP_i \leq K$ ve buradan da her $f \in E^+$ için $\overline{\mp}SP_i f \leq Kf$ olur.

$\overline{\mp}SP_i f \leq Kf \Rightarrow \overline{\mp}\left(\int_{A_i} f d\mu\right) y_i \leq Kf$

$$\Rightarrow \left| \left(\int_{A_i} f d\mu \right) y_i \right| \leq K f$$

$$\Rightarrow \int_{A_i} f d\mu |y_i| \leq K f . \text{ Dolayısıyla her } f \in E \text{ için } |SP_i| f = \left(\int_{A_i} f d\mu \right) |y_i| \text{ olur.}$$

Açıktır ki $|SP_i| \in W(E, F)$ dir. Bu yüzden $U(P - P_i) + |SP_i| \in W(E, F)$ dir. $U(P - P_i) + |SP_i| \geq \overline{\mp} S(P - P_i) \overline{\mp} SP_i = \overline{\mp} SP = \overline{\mp} S$ dir. Dolayısıyla $U(P - P_i) + |SP_i| \geq U$

$UP = U$ olduğundan $|SP_i| \geq UP_i$ olur. Ayrıca $UP_i \geq |SP_i|$ olduğundan $UP_i = |SP_i|$ elde edilir. Her $f \in E$ ve her $i \in \mathbb{N}$ için $UP_i f = \left(\int_{A_i} f dt \right) |y_i|$ olur. O nedenle $Uf = UPf = U(\sum_{i=1}^{\infty} P_i f) = \sum_{i=1}^{\infty} UP_i f = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_{A_i} f dt \right) |y_i|$ olur.

$$g_n = \frac{1}{\mu(A_n)} \chi_{A_n} \in E \text{ olsun. } \|g_n\|_1 = 1 \text{ ve } Ug_n = |y_n| \text{ dir.}$$

$$Ug_n = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_{A_i} \frac{1}{\mu(A_n)} \chi_{A_n} d\mu \right) |y_n|$$

$$= \frac{1}{\mu(A_n)} \left(\int_{A_n} \chi_{A_n} d\mu \right) |y_n|$$

$$= \frac{1}{\mu(A_n)} \mu(A_n) \cdot |y_n| = |y_n|$$

$$\|g_n\|_1 = \int_E |g_n| dt = \int_E \frac{1}{\mu(A_n)} \chi_{A_n} dt = 1 \text{ olur.}$$

U zayıf kompakt, $\|g_n\|_1 = 1$ ve $Ug_n = |y_n|$ dir. Ug_n, F de göreceli zayıf kompakt bir küme olur. Dolayısıyla $\{|y_n|; n \in \mathbb{N}\}$ zayıf yakınsak alt dizi içerir. Bu mümkün değildir, kabulümüz yanlıştır.

4.2. Önerme

F Banach örgüsü için aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

(1) $F, (W_1)$ özelliğine ve sıra sürekli norma sahiptir.

- (2) Her bir E, AL uzayı için $W(E, F)$, $L^r(E, F)$ nin sıra konveks genelleştirilmiş alt örgüsüdür.
- (3) E sonsuz boyutlu AL uzayı için $W(E, F)$ bir örgü ve $L^r(E, F)$ nin sıra konveks alt kümesidir.

İspat

(1) $\Rightarrow$ (2): F sıra sürekli norma sahip olsun. F (W_1) özelliğine sahip ve E, AL uzayı olduğundan $W(E, F)$, $L^r(E, F)$ nin genelleştirilmiş alt örgüsüdür. (Bkz. Önerme 3.1)

$W(E, F)$, $L^r(E, F)$ nin sıra konveks alt kümesidir. Geçekten $R \in L^r(E, F)$, $S, T \in W(E, F)$ için $S \leq R \leq T$ olsun. $0 \leq R - S \leq T - S$ olacak şekilde $T - S \in W(E, F)$ alalım. $x'' \in E''$ $0 \leq (R - S)''(x'') \leq (T - S)''(x'') \in F$ olur. F sıra sürekli norma sahip olduğundan F, F'' içinde idealdir.

Dolayısıyla $(R - S)''(x'') \in F$ olur. $R - S$ zayıf kompakt bir operatör olur, buradan $R \in W(E, F)$ dir. Bu da istenileni verir.

(2) $\Rightarrow$ (3) : (2) önermesinden ispat açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (1) : E sonsuz boyutlu AL uzayı olsun. $W(E, F)$ bir örgü ve $L^r(E, F)$ nin sıra konveksi olsun. E sonsuz boyutlu AL uzayı olduğundan E' sonsuz boyutlu birimli AM uzayıdır. Dolayısıyla E' sıra sürekli norma sahip değildir. Önerme 3.1 den $F, (W_1)$ özelliğine sahiptir. $T: E \rightarrow F$ pozitif operatörünü göz önüne alalım. T , pozitif operatör olduğundan regülerdir. $S \in W(E, F)$, $0 \in W(E, F)$ ve $0 \leq T \leq S$ olmak üzere $W(E, F), L^r(E, F)$ nin sıra konveks alt kümesi olduğundan $T \in W(E, F)$ dir. Önerme 2.7.9 (Wickstead) (2) önermesi sağlanır. E' sıra sürekli norma sahip olmadığından F , sıra sürekli norma sahip olur.

4.3. Önerme

F , sonsuz boyutlu Dedekind tam birimli AM uzayı, E Banach örgüsü için aşağıdaki önermeler denktir.

- (1) $E', (W_1)$ özelliğine sahiptir.
- (2) $W(E, F), L^r(E, F)$ nin bir altörgüsüdür.
- (3) $W(E, F)$ bir vektör örgüsüdür.

İspat

(1) $\Rightarrow$ (2): $E', (W_1)$ özelliğine sahip olsun.

Önerme 2.7.21 den $L(E, F) = L^r(E, F)$ dir. $L^r(E, F)$ bir vektör örgüsüdür. Önerme 3.1 den $W(E, F), L^r(E, F)$ vektör örgüsüdür.

(2) $\Rightarrow$ (3) : $W(E, F), L^r(E, F)$ nin bir alt örgüsü olduğundan $W(E, F)$ bir vektör örgüsüdür.

(3) $\Rightarrow$ (1) : Kabul edelim ki $E', (W_1)$ özelliğine sahip olmasın. O zaman E' nün en az bir zayıf yakınsak dizisi (x'_n) vardır, fakat $\{|x'_n| : n \in \mathbb{N}\}$ hiçbir zayıf yakınsak alt dizi içermez. Burada $x'_n \xrightarrow{w} x' \in E'$ olsun.

F birimli AM uzayı olduğundan bir $C(X)$ ya izomorftur (Bkz. Önerme 2.5.17 (Kakutani-Bohnenblust ve M. Krein-S. Krein)). F Dedekind tam olduğundan $C(X)$ de Dedekind tam ve Önerme 2.5.18 den X , Stoneandır. $F = C(X)$ olarak kabul edelim. F sonsuz boyutlu olduğundan $C(X)$ sonsuz boyutlu, X sonsuz elemanlı. X uzayının ayrık ve hem açık hem kapalı alt kümelerinin bir dizisi vardır. Bunlara $\{A_n\}$ diyelim.

$Q_n : F \rightarrow F$ her $f \in F$ için $Q_n f = f \chi_{A_n}$ olarak tanımlansın. I_F olarak F nin özdeşlik dönüşümünü alalım.

$0 \leq Q_n \leq I_F$ ve $m \neq n$ için $Q_m \cdot Q_n = Q_m (I_F - Q_n) = (I_F - Q_m) \cdot Q_n = 0$ dir.

Gerçekten $x \in X$ olmak üzere; $(Q_n f)(x) = (f \chi_{A_n})(x) \leq f(x) = (I_F f)(x)$ dir.

Ayrıca $(Q_m \cdot Q_n)(f) = Q_m (Q_n f) = Q_m (f \chi_{A_n}) = \underbrace{f \chi_{A_m} \cdot \chi_{A_n}}_0 = 0$ olur.

$$Q_m (I_F - Q_m)(f) = Q_m (I_F f - Q_m f) = Q_m (f - f\chi_{A_m}) = f\chi_{A_m} - \underbrace{f\chi_{A_m} \cdot \chi_{A_m}}_{\chi_{A_m}} = 0 \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned} [(I_F - Q_m) Q_m](f) &= (I_F - Q_m)(Q_m f) = (I_F - Q_m)(f\chi_{A_m}) = I_F(f\chi_{A_m}) - Q_m(f\chi_{A_m}) \\ &= f\chi_{A_m} - \underbrace{f\chi_{A_m} \cdot \chi_{A_m}}_{\chi_{A_m}} = 0 \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

Her $n \in \mathbb{N}$ için $y'_n = x'_n - x'$ ve $\chi_x : X \rightarrow \mathbb{R}$ $\chi_x(x) = 1$ olmak üzere $S : E \rightarrow F$ her $x \in E$ için $S(x) = \underbrace{x'(x)\chi_x}_{R(x)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} y'_n(x)\chi_{A_n}}_{T(x)}$ olarak tanımlansın. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$y'_n = x'_n - x'$, $y'_n, 0$ a zayıf yakınsar. $T : E \rightarrow F$ $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y'_n(x)\chi_{A_n}$ olarak tanımlansın. $\sum_{n=1}^{\infty} y'_n(x)\chi_{A_n}$ serisinin kısmi toplamlar dizisini alalım ve bunu $T_n(x)$ ile gösterelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için $T_n(x) = \sum_{k=1}^n y'_k(x)\chi_{A_k} = y'_1(x)\chi_{A_1} + y'_2(x)\chi_{A_2} + \dots + y'_n(x)\chi_{A_n}$ olsun.

Keyfi $\varepsilon > 0$ verilsin. Her $n \geq n_0$ için $|y'_n(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $n_0 < n < m$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \|T_n(x) - T_m(x)\|_{\infty} &= \left\| \sum_{k=n+1}^m |y'_k(x)\chi_{A_k}| \right\|_{\infty} \\ &= \max \left\{ \left| \sum_{k=n+1}^m y'_k(x)\chi_{A_k}(a) \right| ; a \in X \right\} \\ &\leq \max \left\{ \sum_{k=n+1}^m |y'_k(x)| \cdot |\chi_{A_k}(a)| ; a \in X \right\} \\ &< \max \left\{ \sum_{k=n+1}^m \varepsilon \cdot |\chi_{A_k}(a)| ; a \in X \right\} \\ &= \varepsilon \cdot \max \left\{ \sum_{k=n+1}^m |\chi_{A_k}(a)| ; a \in X \right\} < \varepsilon \text{ olur.} \end{aligned}$$

$F = C(X)$ tam uzay ve $T_n(x)$ Cauchy dizisi olduğundan $T_n(x)$ normda yakınsaktır. $T(x) \in F$ dir. $S : E \rightarrow F$

$$S(x) = R(x) + T(x) = x'(x)\chi_x + \sum_{n=1}^{\infty} y'_n(x)\chi_{A_n}, \quad R(x) = x'(x)\chi_x$$

R rank bir operatörü olduğundan, R kompakt operatör dolayısıyla zayıf kompakt operatördür.

$T' : F' \rightarrow E'$ eşlek dönüşümünü göz önüne alalım. Her $x \in E$ ve her $y' \in F'$ için

$$\begin{aligned} \langle x, T'y' \rangle &= \langle Tx, y' \rangle = y'(\sum_{n=1}^{\infty} y'_n(x) \chi_{A_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} y' (y'_n(x) \chi_{A_n}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} y'(\chi_{A_n}) y'_n(x) \text{ dir. Dolayısıyla } T'y' = \sum_{n=1}^{\infty} y'(\chi_{A_n}) y'_n \text{ dir.} \end{aligned}$$

$U_{F'}$, F' nün kapalı birim yuvarı ve $y' \in U_{F'}$ olmak üzere;

$$\sum_{n=1}^m |y'_n(\chi_{A_n})| \leq \sum_{n=1}^m |y'_n| \chi_{A_n} \leq |y'|(\chi_X) \leq \|y'\| \leq 1 \text{ olduğundan}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m |y'_n(\chi_{A_n})| \leq 1 \text{ olur.}$$

Dolayısıyla $T'(U_{F'}) = \{\sum_{n=1}^{\infty} y'(\chi_{A_n}) y'_n : \sum_{n=1}^{\infty} |y'_n(\chi_{A_n})| \leq 1\}$ dir.

Önerme 2.4.4 ve Tanım 2.7.1. den T' zayıf kompakttır. T zayıf kompakttır. (Bkz. Önerme 2.7.6 (Gantmacher))

$S = R + T$ olduğundan $R \in W(E, F)$ ve $T \in W(E, F)$ olduğundan $S \in W(E, F)$ dir. (3) den U, S ve $-S$ nin supremumu olsun ve $U, W(E, F)$ dedir. Şimdi $Q_n U_x = |x'_n|(\chi) \chi_{A_n}$ olduğunu gösterelim.

Gerçekten $Q_n U \geq \pm Q_n S$ dir, bu nedenle $Q_n U \geq |Q_n S| \dots (*)$ Her $x \in E$ için $|Q_n S| x = |x'_n|(\chi) \chi_{A_n}$ dir. Gerçekten $S: E \rightarrow F$, $Q_n: F \rightarrow F$ olmak üzere $Q_n S: E \rightarrow F$ ve her $x \in E$ için $Q_n S x = Q_n(x'(x) \chi_X + \sum_{n=1}^{\infty} y'_n(x) \chi_{A_n}) = x'(x) \chi_X \cdot \chi_{A_n} + (\sum_{n=1}^{\infty} y'_n(x) \chi_{A_n}) \chi_{A_n} = x'(x) \chi_{A_n} + y'_n(x) \chi_{A_n}$ bulunur.

Diğer taraftan

$$\mp(Q_n S)(x) = \mp Q_n(Sx)$$

$$= \mp Q_n(x'(x) \chi_X + \sum_{n=1}^{\infty} y'_n(x) \chi_{A_n})$$

$$\begin{aligned}
&= \overline{\mp}(x'(x) \chi_x \cdot \chi_{A_n} + (\sum_{n=1}^{\infty} y'_n(x) \chi_{A_n}) \chi_{A_n}) \\
&= \overline{\mp}(x'(x) \cdot \chi_{A_n} + y'_n(x) \cdot \chi_{A_n}) \\
&= \overline{\mp} \chi_{A_n} (x'(x) + y'_n(x)) \\
&= \overline{\mp} \chi_{A_n} (x'(x) + x'_n(x) - x'(x)) \quad (y'_n = x'_n - x' \text{ olduğundan}) \\
&= \overline{\mp} \chi_{A_n} x'_n(x)
\end{aligned}$$

Dolayısıyla her $x \in E$ için $\overline{\mp}(Q_n S)(x) = \overline{\mp} \chi_{A_n} x'_n(x)$ olur.

$$\text{Buradan } |Q_n S|(x) \leq |x'_n(x)| \cdot \chi_{A_n} \leq |x'_n(x)| \cdot \chi_{A_n} \dots (1)$$

Diğer taraftan $x \in E^+$ ve $|y| \leq x$ olsun.

$$x'_n(y) \chi_{A_n} = (Q_n S)(y) \leq |Q_n S|(y) \leq |Q_n S| |y| \leq |Q_n S|(x) \text{ olur.}$$

$$x'_n(y) \chi_{A_n} \leq |Q_n S|(x) \Rightarrow \sup \{x'_n(y) \chi_{A_n} ; |y| \leq x\} \leq |Q_n S|(x)$$

$$\Rightarrow \chi_{A_n} \sup \{x'_n(y) ; |y| \leq x\} \leq |Q_n S|(x)$$

$$\Rightarrow \chi_{A_n} \cdot |x'_n(x)| \leq |Q_n S|(x) \dots (2)$$

(1) ve (2) den $|Q_n S|(x) = |x'_n(x)| \chi_{A_n}$ elde edilir.

$|Q_n S| x = |x'_i|(x) \chi_{A_i}$ dir. $|Q_n S|$ rank bir operatörü olduğundan zayıf kopmaktır. Ayrıca $(I_F - Q_n)U + |Q_n S| \in W(E, F)$ dir.

Diğer taraftan $(I_F - Q_n)U + |Q_n S| \geq \pm S$ dir. Dolayısıyla $(I_F - Q_n)U + |Q_n S| \geq U$ olur ve Q_n ler pozitif olduğundan $Q_n [(I_F - Q_n)U + |Q_n S|] \geq Q_n U$ olur.

$Q_n \leq I_F$ olduğundan $Q_n |Q_n S| \leq |Q_n S|$ elde edilir. Dolayısıyla $|Q_n S| \geq Q_n U \dots (**)$ bulunur. (*) ve (**) dan $Q_n U = |Q_n S|$ dir.

Diğer taraftan her $n \in \mathbb{N}$, $x \in E$ için $Q_n U x = |x'_n| (x) \chi_{A_n}$ olduğu çıkar.

Her $t_n \in A_n$ seçilsin ve $f \in F$ için $\delta_n(f) = f(t_n)$ olarak tanımlansın o zaman $\delta_n \in F'_+$ ve $\|\delta_n\| = 1$ dir.

Açıktır ki $Q'_n \delta_m = \begin{cases} \delta_n, m = n \\ 0, m \neq n \end{cases}$ dir.

Her $m, n \in \mathbb{N}$, $x \in E$ için $(U' \delta_n)(x) = \delta_n(Ux) = Q'_n \delta_n(Ux) = \delta_n(Q_n Ux) = |x'_n| (x)$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $U' \delta_n = |x'_n|$ olur.

U ve U' operatörlerinin zayıf kompaktlığından $\{|x'_n|; n \in \mathbb{N}\}$ zayıf yakınsak alt dizi içerir. Bu bir çelişki yaratır, dolayısıyla kabulümüz yanlıştır.

4.4. Önerme

E bir Banach örgüsü için aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

- (1) E' sıra sürekli norma sahiptir.
- (2) Her bir Dedekind tam birimli AM uzayı F için $W(E, F)$, $L^r(E, F)$ nin bir idealidir.
- (3) Sonsuz boyutlu Dedekind tam birimli AM uzayı F için $W(E, F)$, $L^r(E, F)$ nin bir idealidir.

İspat

(1) $\Rightarrow$ (2): E' sıra sürekli norma sahip olsun. E' , KB uzayıdır ve (W_1) özelliğine sahiptir.

Önerme 4.3 den $W(E, F)$, $L^r(E, F)$ nin bir vektör örgüsüdür. $S \in L^r(E, F)$ olmak üzere $|S| \leq T, T \in W(E, F)$ iken $S \in W(E, F)$ olduğunu gösterelim. Gerçekten, Önerme 2.7.9. (Wickstead) dan $0 \leq S^+ \leq T, 0 \leq S^- \leq T, S^+, S^- \in W(E, F)$ olur. Buradan $S = S^+ - S^- \in W(E, F)$ olur.

(2) $\Rightarrow$ (3): (2) önermesinden ispat açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (1): F , sonsuz boyutlu Dedekind tam birimli AM uzayı olduğu için F , sıra sürekli norma sahip değildir. Önerme 2.7.9 (Wickstead) deki (2) koşulu hipotezden vardır ve F , sıra sürekli norma sahip olamayacağından, E' sıra sürekli norma sahiptir.

Biliniyor ki genelde $W(E, F) \subset L^r(E, F)$ doğru değildir. E den F ye tanımlı bütün pozitif zayıf kompakt operatörlerin gerdiği uzayı $W^r(E, F)$ ile göstereceğiz.

4.5. Önerme

E ve F Banach örgüleri için aşağıdaki önermeler denktir.

- (1) Aşağıdaki koşullardan birisi sağlanır.
 - a) E' , sıra sürekli norma sahiptir ve F , Dedekind tamdır.
 - b) F sıra sürekli norma sahiptir.
- (2) F , Dedekind tam ve eğer $0 \leq S \leq T \in W(E, F)$ ise $S \in W(E, F)$ dir.
- (3) $W^r(E, F)$ Dedekind tam vektör örgüsüdür.
- (4) $W^r(E, F)$ içinde sıra sınırlı artan her küme supremuma sahiptir.

İspat

(1) $\Rightarrow$ (2): Kabul edelim ki a) koşulu sağlansın. E' sıra sürekli norma sahip ve F Dedekind tam olsun. $0 \leq S \leq T$ olmak üzere $T \in W(E, F)$ olmak üzere $S \in W(E, F)$ dir (Bkz. Önerme 2.7.9).

b) F sıra sürekli norma sahip olsun. Dolayısıyla F Dedekind tamdır. Önerme 2.7.9 dan $0 \leq S \leq T$ olmak üzere $T \in W(E, F)$ için $S \in W(E, F)$ olur.

(2) $\Rightarrow$ (3) : $W^r(E, F)$ pozitif zayıf kompakt operatörler tarafından gerilen zayıf kompakt operatörlerin bir alt uzayı olsun. $R \in W^r(E, F)$ olsun o zaman $R = S - T$ olacak şekilde S, T zayıf kompakt operatörleri vardır.

$0 \leq R^+ \leq |R| \leq |S - T| \leq |S| + |T| = S + T \in W(E, F)$ dir. Benzer şekilde $0 \leq R^- \leq S + T$ dir. Hipotezden $R^+ + R^- \in W(E, F)$ olur. $|R| = R^+ + R^-$ olmasından $|R| \in W(E, F)$ olur. Dolayısıyla $|R| \in W^r(E, F)$ dir. $W^r(E, F)$ bir vektör örgüsüdür.

Ayrıca $W^r(E, F)$ Dedekind tam vektör örgüsüdür.

(3) $\Rightarrow$ (4) : $W^r(E, F)$ Dedekind tam vektör örgüsü olduğundan ispat açıktır.

(4) $\Rightarrow$ (1): Kabul edelim ki (4) önermesi sağlansın. F , Dedekind tam uzaydır.

$0 \leq y_\alpha \uparrow$, $y_\alpha \leq y$ F uzayında sağlansın. $0 \leq f \in E'$ seçelim.

O zaman $f(x_0) = 1$ olacak şekilde $x_0 \in E_+$ vardır. $T_\alpha : E \rightarrow F, f \in E', y_\alpha \in F$ olmak üzere $T_\alpha = f \otimes y_\alpha$ olsun. Her $x \in E$ için $T_\alpha(x) = f(x)y_\alpha$ olarak tanımlansın. Açık olarak T_α zayıf kompakttır.

$T : E \rightarrow F, f \in E', y \in F$ için $T = f \otimes y$ olsun. Her $x \in E$ için $T(x) = f(x)y$ olarak tanımlansın. $0 \leq T_\alpha \uparrow$ ve $T_\alpha \leq T$ dir. Hipotezden $\sup \{T_\alpha\} = T_0$ olacak şekilde pozitif bir T_0 operatörü vardır. $\sup \{y_\alpha\} = T_0(x_0)$ dır.

Her α için $T_\alpha(x_0) \leq T_0(x_0)$ dır. Buradan $f(x_0)y_\alpha \leq T_0(x_0)$ bulunur ve $f(x_0) = 1$ olduğundan $y_\alpha \leq T_0(x_0) \dots \textcircled{*}$

Her α için $\{y_\alpha\}$ ların başka bir üst sınırı $z \in F$ olsun.

Her $x \in E^+$ için $f(x)y_\alpha \leq f(x).z$ dir.

$$f(x)y_\alpha \leq f(x).z \Rightarrow T_\alpha(x) \leq f \otimes z(x)$$

$$\Rightarrow T_\alpha \leq f \otimes z$$

$$\Rightarrow T_0 \leq f \otimes z$$

$$\Rightarrow T_0(x_0) \leq f(x_0).z$$

$$\Rightarrow T_0(x_0) \leq z \text{ bulunur. Bu da istenendir.}$$

Şimdi ise ya E' ya da F nin sıra sürekli norma sahip olduğunu göstermeliyiz. Kabul edelim ki ne E' ne de F sıra sürekli norma sahip olsunlar.

l_1 ve l_∞ sırasıyla E ve F nin kapalı alt örgüleri olur. (Bkz. Önerme 2.7.17-18)

$T(l_1)$, E nin kapalı alt vektör örgüsü olur. Önerme 2.7.19 dan E den l_1 e bir P pozitif projeksiyonu vardır.

$\phi_n, \phi \in (l_1)' = l_\infty$ ve her $\lambda = (\lambda_k) \in l_1$ için $\phi_n((\lambda_k)) = \lambda_n$ ve $\phi((\lambda_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ olarak tanımlansınlar.

Her $n \in \mathbb{N}$ için e_n dizisi n . terimi 1 diğer terimleri 0 olan bir dizi olmak üzere $\overline{e_n} = e_1 + e_2 + \dots + e_n \in l_\infty$ olsun.

$T_n : l_1 \rightarrow l_\infty \subset F$, her $\lambda = (\lambda_k) \in l_1$ için $T_n(\lambda) = \sum_{k=1}^n \phi_k(\lambda) \cdot \overline{e_k}$ olarak tanımlansın.

Sonlu tane sınırlı dizinin toplamı sınırlı olduğundan $T_n(\lambda) \in l_\infty \subset F$ dir.

$U_n : l_1 \rightarrow l_\infty \subset F$, her $\lambda = (\lambda_k) \in l_1$ ve $\mathbf{1} = (1, 1, 1, \dots) \in l_\infty$ için

$U_n(\lambda) = \phi(\lambda) \cdot \mathbf{1} + \sum_{k=1}^n \phi_k(\lambda) \cdot (\overline{e_k} - \mathbf{1})$ olarak tanımlansın. $U_n(\lambda) \in l_\infty \subset F$ dir.

Açıktır ki $0 \leq T_n \uparrow$ ve $0 \leq U_n \downarrow$ sağlanır. Gerçekten

Her $\lambda \in l_1^+$ için $n \leq m$ olsun. $0 \leq \sum_{k=1}^n \phi_k(\lambda) \cdot \overline{e_k} \leq \sum_{k=1}^m \phi_k(\lambda) \cdot \overline{e_k} = T_m(\lambda)$ olduğundan $T_n(\lambda) \leq T_m(\lambda)$ dir. Buradan $T_n \leq T_m$ olur.

$n \leq m$ olsun $U_n \geq U_m$ olduğunu gösterelim.

Her $\lambda \in l_1^+$ ve $n \leq m$ olsun.

$$U_n(\lambda) = \phi(\lambda) \cdot \mathbf{1} + \sum_{k=1}^n \phi_k(\lambda) \cdot (\overline{e_k} - \mathbf{1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k + \sum_{k=1}^n \phi_k(\lambda) \cdot (\overline{e_k} - \mathbf{1})$$

$$U_n(\lambda) = \phi(\lambda) \cdot \mathbf{1} + \sum_{k=1}^n \phi_k(\lambda) \cdot (\overline{e_k} - \mathbf{1})$$

$$U_m(\lambda) = \phi(\lambda) \cdot \mathbf{1} + \sum_{k=1}^m \phi_k(\lambda) \cdot (\overline{e_k} - \mathbf{1})$$

$$U_m(\lambda) = \phi(\lambda) \cdot \mathbf{1} + \sum_{k=1}^n \phi_k(\lambda) \cdot (\overline{e_k} - \mathbf{1}) + \sum_{k=n+1}^m \phi_k(\lambda) \cdot (\overline{e_k} - \mathbf{1})$$

$$U_m(\lambda) = U_n(\lambda) + \sum_{k=1}^m \phi_k(\lambda) \cdot (\overline{e_k} - \mathbf{1}) \dots \dots (\star) \text{ Diğer taraftan}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^m \phi_k(\lambda) \cdot (\overline{e_k} - \mathbf{1}) &= \phi_{n+1}(\lambda) \cdot (\overline{e_{n+1}} - \mathbf{1}) + \dots + \phi_m(\lambda) (\overline{e_m} - \mathbf{1}) \\ &= \phi_{n+1}(\lambda) \cdot \overline{e_{n+1}} - \phi_{n+1}(\lambda) \cdot \mathbf{1} + \dots + \phi_m(\lambda) \overline{e_m} - \phi_m(\lambda) \cdot \mathbf{1} \\ &= \phi_{n+1}(\lambda) \cdot \overline{e_{n+1}} + \dots + \phi_m(\lambda) \overline{e_m} - (\phi_{n+1}(\lambda) \cdot \mathbf{1} + \dots + \phi_m(\lambda) \cdot \mathbf{1}) \end{aligned}$$

Her $k \in \mathbb{N}$ için $\overline{e_k} \leq 1$ olduğundan $\phi_k(\lambda) \cdot \overline{e_k} \leq \phi_k(\lambda) \cdot \mathbf{1}$ ve buradan

$$\sum_{k=n+1}^m \phi_k(\lambda) \cdot \overline{e_k} \leq \sum_{k=n+1}^m \phi_k(\lambda) \cdot \mathbf{1}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} \phi_k(\lambda) \cdot (\overline{e_k} - \mathbf{1}) \leq 0$$

($\star$) dan $U_n(\lambda) \geq U_m(\lambda)$ olur.

Her $n, m \in \mathbb{N}$ için $T_m \leq U_n$ dır. $n > m$ için gösterelim.

$$U_n(\lambda) = \phi(\lambda) \cdot \mathbf{1} + \sum_{k=1}^n \phi_k(\lambda) \cdot (\overline{e_k} - \mathbf{1})$$

$$= \phi(\lambda) \cdot \mathbf{1} + \sum_{k=1}^m \phi_k(\lambda) \cdot (\overline{e_k} - \mathbf{1}) + \sum_{k=m+1}^n \phi_k(\lambda) \cdot (\overline{e_k} - \mathbf{1})$$

$$= \phi(\lambda) \cdot \mathbf{1} + \sum_{k=1}^m \phi_k(\lambda) \cdot \overline{e_k} - \sum_{k=1}^m \phi_k(\lambda) + \sum_{k=m+1}^n \phi_k(\lambda) \cdot \mathbf{1} - \sum_{k=m+1}^n \phi_k(\lambda) \cdot \mathbf{1}$$

$$= \phi(\lambda) \cdot \mathbf{1} + T_m(\lambda) - \sum_{k=1}^m \phi_k(\lambda) + \sum_{k=m+1}^n \phi_k(\lambda) \cdot \mathbf{1}$$

$$= T_m(\lambda) + \phi(\lambda) \cdot \mathbf{1} - \sum_{k=1}^m \phi_k(\lambda) + \sum_{k=m+1}^n \phi_k(\lambda) \cdot \mathbf{1} \text{ dir ve}$$

$$0 \leq \phi(\lambda) \cdot \mathbf{1} - \sum_{k=1}^m \phi_k(\lambda) + \sum_{k=m+1}^n \phi_k(\lambda) \cdot \mathbf{1} \text{ olduğundan } T_n \leq U_m \text{ olur.}$$

Ayrıca $T_n(\lambda) \geq 0$ olduğundan $U_m \geq 0$ olur.

P pozitif projeksiyon olduğundan $0 \leq T_n \uparrow$, $0 \leq U_n \downarrow$ olduğundan $0 \leq T_n P \uparrow$ ve $0 \leq U_n P \downarrow$ bulunur.

Diğer taraftan $W^r(E, F)$ içindeki sıra sınırlı artan her küme $W^r(E, F)$ içinde supremuma sahip olacağından $\{T_n P\}$ dizisinin bir supremumu mevcuttur. $\{T_n P\}$ lerin supremumu S olsun. Her $m, n \in \mathbb{N}$ için $T_n \leq U_m$ olduğundan $T_n P \leq U_m P$ ve $T_n P \leq S \leq U_m P$ olur.

$P: E \rightarrow l_1$ pozitif projeksiyon ve $e_k \in l_1^+$ olsun. O zaman $T_k P e_k \leq S e_k \leq U_k P e_k$ bulunur. Şimdi $\overline{e_k} = T_k P e_k$ ve $U_k P e_k = \overline{e_k}$ olduğunu gösterelim.

Gerçekten, $e_k \in l_1$ olduğundan $P e_k = e_k$ dir. $k = i$ için $e_k^i = 1$ ve $k \neq i$ için $e_k^i = 0$ olacağından $T_k P e_k = T_k (e_k) = \sum_{i=1}^k \phi_i(e_k) \overline{e_i} = \sum_{i=1}^k e_k^i \overline{e_i} = 1 \cdot \overline{e_i} = 1 \cdot \overline{e_k}$ elde edilir.

$\phi(e_k) = \sum_{i=1}^{\infty} e_k^i \cdot 1 = 1$ ve $\sum_{i=1}^k \phi_i(e_k) (\overline{e_i} - 1) = \overline{e_k} - 1$ olacağından

$U_k P e_k = U_k e_k = \phi(e_k) \cdot 1 + \sum_{i=1}^k \phi_i(e_k) (\overline{e_i} - 1) = \overline{e_k}$ elde edilir.

Dolayısıyla $S e_k = \overline{e_k}$ dir. S zayıf kompakt olduğundan $(\overline{e_k})$ dizisinin zayıf yakınsak bir alt dizisi vardır. Fakat $\{\overline{e_k} ; k \in \mathbb{N}\} \subset l_{\infty}$ uzayında hiçbir zayıf yakınsak alt diziyeye sahip değildir. Bu yüzden F uzayının da zayıf yakınsak alt dizisi yoktur. Çelişkiye düştük, kabulümüz yanlıştır.

4.6. Önerme

F , Banach örgüsü için aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

- (1) F sıra sürekli norma sahiptir.
- (2) Her E Banach örgüsü için $W^r(E, F)$ Dedekind tam vektör örgüsüdür.
- (3) $W^r(l_1(L_2[0,1]), F)$ bir vektör örgüsüdür.

İspat

(1) $\Rightarrow$ (2) : Önerme 4.5 den ispat açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (3): $l_1(L_2[0,1])$ Banach örgüsü olduğundan ispat açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (1): F nin σ -Dedekind tam olduğunu gösterelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için $y_n \in F_+$ olmak üzere her bir sıra sınırlı dik $\{y_n\}$ dizisi $y \in F_+$ ile üstten sınırlı bir dizi olsun. $\sup \{y_n; n \in \mathbb{N}\}$ nin varlığını göstermek yeterlidir. Bunun için aşağıda tanımlayacağımız operatörlerden yararlanacağız.

$r_n, [0,1]$ üzerinde n . Rademacher fonksiyonu olsun.

$S, T : E \rightarrow F$ her $(f_k) \in E = l_1(L_2[0,1])$ için $S(f_k) = \sum_{n=1}^{\infty} (\int_0^1 f_1 r_n dt) y_n$ ve $T(f_k) = (\int_0^1 f_1 dt) y$ olarak tanımlansınlar. Açık olarak S ve T anlamlıdır.

$P: E \rightarrow L_2[0,1]$ her $(f_k) \in E$ için $P(f_k) = f_1$ ve $H: L_2[0,1] \rightarrow F$ $f \in L_2[0,1]$ için $H(f) = \sum_{n=1}^{\infty} (\int_0^1 f r_n dt) y_n$ biçiminde tanımlı olsunlar.

$S = HP$ dir. Şimdi S nin zayıf kompakt bir operatör olduğunu gösterelim. $L_2[0,1]$ yansımali uzay olduğundan P sürekli operatörü zayıf kompakttır. H sürekli bir operatör olduğundan S operatörü zayıf kompakttır.

$\pm S \leq T$ dir. Gerçekten her $n \in \mathbb{N}$ için $y_n \in F_+$ olmak üzere her bir sıra sınırlı dik $\{y_n\}$ dizisi $y \in F_+$ ile üstten sınırlı bir dizi olduğundan $0 \leq \sum_{n=1}^k y_n \leq y$ dır.

$r_n(t) \leq 1$ olmasından $\int_0^1 f_1 r_n dt \leq \int_0^1 f_1 dt$ dır.

$$\int_0^1 f_1 r_n dt \leq \int_0^1 f_1 dt \Rightarrow (\int_0^1 f_1 r_n dt) y_n \leq (\int_0^1 f_1 dt) y_n \leq (\int_0^1 f_1 dt) y$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^k (\int_0^1 f_1 r_n dt) y_n \leq \sum_{n=1}^k (\int_0^1 f_1 dt) y_n = (\int_0^1 f_1 dt) \sum_{n=1}^k y_n \leq (\int_0^1 f_1 dt) y$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (\int_0^1 f_1 r_n dt) y_n \leq (\int_0^1 f_1 dt) y$ elde edilir. Dolayısıyla $S \leq T$ olur ve benzer şekilde $-S \leq T$ olduğu gösterilebilir.

T rank bir operatörü olduğundan T zayıf kompakttır. $S, T \in W(E, F)$ olduğundan $S, T \in W^r(E, F)$ dir. $-S$ ve S operatörlerinin $W^r(E, F)$ deki supremumu U olsun.

Her $0 \leq f \in L_2[0,1]$ için $\bar{f} = (f, 0, 0, 0 \dots) \in E$ olarak tanımlansın.

$U \pm S \geq 0$ ve $\bar{\chi}_{[0,1]} \geq \bar{r}_n$ olduğundan $U \bar{\chi}_{[0,1]} \geq U \bar{r}_n \geq S \bar{r}_n$ dır. Dolayısıyla $U \bar{\chi}_{[0,1]} \geq S \bar{r}_n$ dir. Bu eşitsizliklerden $(U \pm S)(\bar{\chi}_{[0,1]} \pm \bar{r}_n) \geq 0$ elde edilir.

$S \bar{r}_n = y_n$ olduğunu gösterelim. $\bar{r}_n = (r_n, 0, 0, \dots)$ elemanı $k = n$ için $r_k \cdot r_n = r_n^2$ ve $k \neq n$ için $r_k \cdot r_n = 0$ olacağından $S \bar{r}_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\int_0^1 r_k \cdot r_n dt) y_k = \left(\int_0^1 r_n^2 dt \right) y_n = 1 \cdot y_n = y_n$

$T \bar{\chi}_{[0,1]} = (\int_0^1 \chi_{[0,1]} dt) y = 1 \cdot y$ dir ve $0 \leq y_n \leq U \bar{\chi}_{[0,1]} \leq T \bar{\chi}_{[0,1]}$ olmasından $y_n \leq U \bar{\chi}_{[0,1]} \leq y$ olur.

$U \bar{\chi}_{[0,1]}, y_n$ terimleri için bir üst sınır oldu. y_n terimleri için seçilen başka bir üst sınır z için ($y = z$ alınabilir) $U \bar{\chi}_{[0,1]} \leq z$ doğru olacağından $\sup\{y_n\} = U \bar{\chi}_{[0,1]}$ olur.

F, σ -Dedekind tam uzaydır.

Ayrıca F sıra sürekli norma sahiptir. $y_n \in F_+$ terimleri dik ve supremumu y olan bir (y_n) dizisi alalım.

İspatı tamamlamamız için $\|y_n\| \rightarrow 0$ olduğunu göstermemiz gerekiyor. Bunun için operatörlerden faydalanacağız.

$$x_n = (\underbrace{r_n, r_n, r_n, \dots, r_n}_{n \text{ tane}}, 0, \dots) \in C_0(L_2[0,1]) \subseteq l_{\infty}(L_2[0,1]) = E' \text{ ve}$$

$$x_0 = (\chi_{[0,1]}, \chi_{[0,1]}, \chi_{[0,1]}, \dots) \in E' \text{ olmak üzere } S, T : E \rightarrow F \text{ her } g \in E \text{ için}$$

$$Sg = \sum_{n=1}^{\infty} g(x_n) y_n \text{ ve } Tg = g(x_0) y \text{ olarak tanımlansınlar.}$$

(x_n) terimleri dik olan bir dizi ve $L_2[0,1]$ uzayında $r_n(t) \xrightarrow{w} 0$ olduğundan $x_n \xrightarrow{w} 0$ dir.

Her bir $y' \in F', n \in \mathbb{N}$ için, $\sum_{i=1}^n |y'(y_n)| \leq \sum_{i=1}^n |y'| (y_n) \leq |y'| (y) \leq \|y'\| \cdot \|y\|$ olduğundan, $(y'(y_n)) \in l_1$ dir.

$g \in E$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
S'y'(g) &= y'(Sg) = y'(\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) y_k) \\
&= y'(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n g(x_k) y_k) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n g(x_k) y'(y_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) y'(y_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{x_k}(g) \cdot y'(y_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} x_k(g) \cdot y'(y_k) \\
&= (\sum_{k=1}^{\infty} x_k y'(y_k))(g) \text{ elde edilir. Dolayısıyla } S'y' = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot y'(y_k) \text{ olur.}
\end{aligned}$$

$$y' \in U_{F'} \text{ için, } \sum_{n=1}^{\infty} |y'(y_n)| \leq \|y'\| \cdot \|y\| \leq \|y\|$$

$S'(U_{F'}) \subset \{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n; \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq \|y\|\} = \|y\| \{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n; \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 1\}$ olur. Önerme 2.13 den S' zayıf kompakt ve buradan S zayıf kompakttır. Ayrıca $\mp S \leq T$ ve $S, T \in W^r(E, F)$ dir. U, S ve $-S$ nin supremumu olsun o zaman hipotezden $U, W^r(E, F)$ uzayındadır.

$Q_k: E \rightarrow E$ $Q_k(f_n) = (0, 0, 0, 0, \dots, \underbrace{f_k}_{k \text{ inci bileşen}}, 0, \dots)$ olarak tanımlansın.

$UQ_k(f_n) = \left(\int_0^1 f_k dt \right) (y - \sum_{i=1}^{k-1} y_i)$ olduğunu gösterelim. $Q_k \geq \mp SQ_k$ dir. $(x_n) = (x_n^k)_{k=1}^{\infty} \in E'$ ve $g = (g_n) \in E$ olmak üzere $g(x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 g_n^k \cdot x_n^k dt$ şeklinde yazılabilir.

$$Sg = \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^1 g_n^i \cdot x_n^i dt) y_n \text{ olur.}$$

$$SQ_k(f) = SQ_k(f_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^1 Q_k(f_n)^i \cdot x_n^i dt) y_n \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

$k = 1$ için $Q_1(f_n) = (f_1, 0, 0, \dots)$ ve $i = 1$ durumunda $Q_k(f_n)^i = f_1$ diğer terimler 0 dir ve $SQ_1(f_n) = (\int_0^1 f_1 \cdot r_1 dt) y_1$ dir.

$k = 2$ için $Q_2(f_n) = (0, f_2, 0, \dots)$ ve $i = 1$ için $Q_2(f_n)^1 = 0$, $i = 2$ için $Q_2(f_n)^2 = f_2$ diğer terimler 0 dır. $SQ_2(f_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^1 Q_2(f_n)^i \cdot x_n^i dt) y_n = (\int_0^1 f_2 \cdot r_2 dt) y_2$ dır.

Yani $i = k$ durumları mevcut ve $SQ_k(f_n) = \sum_{i=k}^{\infty} (\int_0^1 f_k \cdot r_k dt) y_i$ olur. $f_n = f_n \chi_{[0, \frac{1}{2^k}]}$ olarak alalım.

$SQ_k(f_n \chi_{[0, \frac{1}{2^k}]}) = \sum_{i=k}^{\infty} (\int_0^1 f_k \chi_{[0, \frac{1}{2^k}]} \cdot r_k dt) y_i$ olur. $\mp SQ_k \leq T$ olsun. $T \in L^r(E, F)$ dir.

$$\mp SQ_k(f_n \chi_{[0, \frac{1}{2^k}]}) \leq T(f_n \chi_{[0, \frac{1}{2^k}]})$$

$$\mp SQ_k(f_n \chi_{[\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}]}) \leq T\left(f_n \chi_{[\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}]}\right)$$

$$\dots SQ_k(f_n \chi_{[0, 1]}) \leq T(f_n \chi_{[0, 1]})$$

Bunları alt alta toplarsak,

$$\mp SQ_k(f_n \chi_{[0, 1]}) \leq T(f_n \chi_{[0, 1]}) = T(f_n) \text{ olur. } \pm \sum_{i=k}^{\infty} (\int_0^1 f_k dt y_i) \leq T(f_n) \dots (*) \text{ olur.}$$

$$(\int_0^1 f_k dt)(y - \sum_{i=1}^{k-1} y_i) \in F$$

$$\sum_{i=k}^n (\int_0^1 f_k \cdot r_k dt) y_i \leq \sum_{i=k}^n \left| \int_0^1 f_k \cdot r_k dt \right| y_i$$

$$\leq \sum_{i=k}^n (\int_0^1 f_k \cdot |r_k| dt) y_i$$

$$\leq \sum_{i=k}^n (\int_0^1 f_k dt) y_i \quad (|r_k| = 1)$$

$$\leq \sup \left[\sum_{i=k}^n (\int_0^1 f_k dt) y_i \right]$$

$$\begin{aligned} &\leq \sup \left[\sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 f_k \, dt \right) y_i - \sum_{i=1}^{k-1} \left(\int_0^1 f_k \, dt \right) y_i \right] \\ &\leq \int_0^1 f_k \, dt \cdot \underbrace{\sup \sum_{i=1}^n y_i}_{=y} - \int_0^1 f_k \, dt \sum_{i=1}^{k-1} y_i \end{aligned}$$

$\sum_{i=k}^n \left(\int_0^1 f_k \cdot r_k \, dt \right) y_i \leq \int_0^1 f_k \, dt (y - \sum_{i=1}^{k-1} y_i)$ olur. Eşitsizliğin her iki tarafının limitini alırsak $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=k}^n \left(\int_0^1 f_k \cdot r_k \, dt \right) y_i \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_k \, dt (y - \sum_{i=1}^{k-1} y_i)$

$SQ_k(f_n) = \sum_{i=k}^{\infty} \left(\int_0^1 f_k \cdot r_k \, dt \right) y_i \leq \int_0^1 f_k \, dt (y - \sum_{i=1}^{k-1} y_i)$ olur. Buradan

$SQ_k(f_n) \leq \left(\int_0^1 f_k \, dt \right) (y - \sum_{i=1}^{k-1} y_i)$ olur. (*) eşitsizliğinden

$\sum_{i=k}^{\infty} \left(\int_0^1 f_k \, dt \right) y_i \leq T(f_n)$ bulunur. Dolayısıyla,

$\lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=k}^s \left(\int_0^1 f_k \, dt \right) y_i \right\} \leq T(f_n)$ ve.

$\lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^s \left(\int_0^1 f_k \, dt \right) y_i - \sum_{i=1}^{k-1} \left(\int_0^1 f_k \, dt \right) y_i \right\} \leq T(f_n)$

$\left(\int_0^1 f_k \, dt \right) (y - \sum_{i=1}^{k-1} y_i) \leq T$ olur.

$|SQ_k|(f_n) = \int_0^1 f_k \, dt (y - \sum_{i=1}^{k-1} y_i)$ elde edilir. $|SQ_k| \in L^r(E, F)$ de vardır. S zayıf kompakt operatör, Q_k sürekli olduğundan $SQ_k \in W(E, F)$ dir. $|SQ_k| \leq UQ_k$ olduğundan $0 \leq UQ_k \in W^r(E, F)$ dir. Gerçekten,

$$SQ_k = \underbrace{UQ_k}_{\geq 0} - \left(\underbrace{UQ_k - SQ_k}_{\geq 0} \right) \in W^r(E, F) \text{ dir.}$$

$UQ_k \in W(E, F)$ hipotezden $|SQ_k| \in W^r(E, F)$ dir.

$U(I_E - Q_k) + |SQ_k| \geq \mp S$ olduğunu gösterelim.

$$U(I_E - Q_k)(f_n) = U(f_1, f_2, \dots, 0, f_{k+1}, \dots) + |SQ_k|f$$

$$\geq \mp S(f_1, f_2, \dots, 0, f_{k+1}, \dots) \mp S(0, 0, \dots, f_k, 0, \dots)$$

$$= \mp S(f_1, f_2, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots) = S(f_n)$$

Aynı zamanda $U(I_E - Q_k)Q_k = 0$ dır.

$$\text{Bu yüzden } |SQ_k| I \geq |SQ_k| Q_k = (U(I_E - Q_k) + |SQ_k|) Q_k \geq UQ_k$$

$UQ_k = |SQ_k|$ olur. Buradan $UQ_k(f_n) = \left(\int_0^1 f_k dt\right) \left(y - \sum_{i=1}^{k-1} y_i\right)$ eşitliği sağlanır.

$h_n = (0, 0, \dots, \underbrace{\chi_{[0,1]}}_{n.\text{terim}}, 0, \dots)$ alalım $h_n \in E$ olur. $Uh_n = y - \sum_{i=1}^{n-1} y_i \downarrow$ dir. Gerçekten

$$Uh_n = \int_0^1 \chi_{[0,1]} dt (y - \sum_{i=1}^{n-1} y_i)$$

$h_n \leq h_m$ olmak üzere

$$Uh_n = y - \sum_{i=1}^{n-1} y_i = y - (y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})$$

$$= y - (y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \dots + y_{m-1}) + y_n + y_{n+1} + \dots + y_{m-1}$$

$$= Uh_m + y_n + y_{n+1} + \dots + y_{m-1}$$

$Uh_n \geq Uh_m$ olur. U nun zayıf kompaktlığından $(y - \sum_{i=1}^{k-1} y_i)$ normda 0 a yakınsar.

$$y - \sum_{i=1}^{k-1} y_i \xrightarrow{\|\cdot\|} 0 \Rightarrow y \xrightarrow{\|\cdot\|} \sum_{i=1}^{k-1} y_i \text{ olur. } y_n = \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^{n-1} y_i \xrightarrow{\|\cdot\|} 0 \text{ olur.}$$

$n \rightarrow \infty$ iken $\|y_n\| \rightarrow 0$ dır. Önerme 2.5.6 dan F sıra sürekli norma sahip olur.

4.7. Önerme

E , Banach örgüsü için aşağıdaki önermeler denktir.

- (1) E' , sıra sürekli norma sahiptir.
- (2) F , Dedekind tam Banach örgüsü için $W^r(E, F)$ Dedekind tam vektör örgüsüdür.
- (3) $W^r(E, l_\infty(L_2[0,1]))$ vektör örgüsüdür.

İspat

(1) $\Rightarrow$ (2): Önerme 4.5 den ispat açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (3): $l_\infty(L_2[0,1])$ Dedekind tam olduğundan ve hipotezden $W^r(E, l_\infty(L_2[0,1]))$ bir vektör örgüsüdür.

(3) $\Rightarrow$ (1) $W^r(E, l_\infty(L_2[0,1]))$ vektör örgüsü ise Önerme 4.5 den ve $l_\infty(L_2[0,1])$ sıra sürekli norma sahip olmadığından E' sıra sürekli norma sahiptir.

KAYNAKLAR

1. Abromovich, Y. A., Aliprantis, C. D., “An invitation to operator theory”, *Amer. Math. Soc.*, 50 : 16-99 (2002).
2. Abromovich, Y. A., Aliprantis, C. D., “Problems in operator theory”, *Amer. Math. Soc.*, 51: 29, 87-93 (2002).
3. Aliprantis, C. D., Burkinshaw, O., “On weakly compact operators on Banach lattices”, *Proc. Amer. Math. Soc.* 83: 573-578 (1981).
4. Aliprantis, C. D., Burkinshaw, O., “Positive Operators”, *Academic Press.*, London, 3-310 (1985).
5. Chen, Z. L., Wickstead, A. W., “Vektor lattices of weakly compact operators on Banach lattices”, *Proc. Amer. Math. Soc.* 352(1): 397-412 (1999).
6. Cohn, D. L., “Measure Theory”, *Birkhäuser* , Boston, Basel, Stuttgart, 70-110 (1980).
7. Meyer, P. and Nieberg. “Banach Lattices”, *Springer-Verlag*, Berlin, Heidelberg. New York, 47-102 (1991).
8. Niculescu, C. P. “Weak compactness in Banach lattices”, *J. Operator Theory*, 6: 217-231 (1981).
9. Schmidt, K. D., “On the modules of weakly compact operators and strongly additive vector measures”, *Proc. Amer. Math. Soc.* 102: 862-866 (1988).
10. Zaanen, A. C., Lüksemburg, W. A. J., “Riesz Spaces II”, *North-Holland*, Amsterdam, 456-464 (1983).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : GENÇ, Safire Elif
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve tarihi : 25.01.1987, Niğde
e-mail : s.elifgnc@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik Bölümü	2008
Lise	Kalaba Anadolu Lisesi	2004

Yabancı Dil

İngilizce, Almanca

