



TOPOLOJİK DÖNERLİ GRUPLAR

Nurten YÜCEL

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

TEMMUZ 2019

Nurten YÜCEL tarafından hazırlanan “ TOPOLOJİK DÖNERLİ GRUPLAR” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Çetin VURAL

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Başkan: Prof. Dr. Erdal GÜNER

Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Prof. Dr. Hakan EFE

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 11/07/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Nurten YÜCEL

11/07/2019

TOPOLOJİK DÖNERLİ GRUPLAR
(Yüksek Lisans Tezi)

Nurten YÜCEL

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2019

ÖZET

Gruplardaki birleşme özelliğinin bir otomorfizma yardımıyla zayıflatılarak grupların genelleştirilmesi sayılabilecek olan dönerli gruplar [1,2] de tanımlanmıştır. Gruplarda olduğu gibi dönerli gruplarda da dönerli grubun işlemini ve ters işlemi sürekli yapan topolojiler tanımlanarak topolojik dönerli gruplar elde edilebilmektedir. Bu çalışmada da topolojik dönerli grupların bazı özellikleri ve topolojik gruplardan ayrıldığı noktalar incelenmiştir.

Bilim Kodu : 20405
Anahtar Kelimeler : Topolojik dönerli gruplar, Topolojik uzaylar, Topolojik gruplar, Dönerli gruplar
Sayfa Adedi : 93
Danışman : Prof. Dr. Çetin VURAL

TOPOLOGICAL GYROGROUPS

(M. Sc. Thesis)

Nurten YÜCEL

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2019

ABSTRACT

Gyrogroups which can be generalization of groups by via of weaking associative identitiy of groups were defined in [1,2]. Like in groups, topologies can be generated ,making continuous binary opereation of gyrogroups and inversive operation. In this thesis, some topological properties of topological gyrogroups and points separated from topological groups are studied.

ScienceCode : 20405

KeyWords : Topological groups, Topological gyrogroups, Gyrogroups, Topological spaces

PageNumber : 93

Supervisor : Prof. Dr. Çetin VURAL

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca sevgili danışmanım Prof. Dr. Çetin VURAL'dan öğrendiğim ve destek aldığım konu sadece tez konusundan ibaret değildir. Kendime olan inancımı kaybettiğim zamanda yapmam gereken bir şeyler olduğunu hatırlatan Çetin Hocam'dır. Disiplinli ve planlı olmanın, günü gününe çalışmanın ve karşılaşılan zorluklara rağmen kendinden motorlu olarak, sınıksız ve dipdiri bir şekilde koşturmayaya devam etmeyi de Çetin Hocam'dan öğrendim. Tez çalışmamdaki her paragrafın bir düzen ve ahenk içinde olup, önceki ve sonraki paragraflara bağlanması gerektiği gibi çoğu şeyin de böyle olması gerektiğini yine sevgili hocamdan öğrendim. Anlamadığım, bir sonuca varamadığım noktalarda, belki de daha fazlasında sorduğum sorulara Çetin Hocam'ın özveri ve sabrı ile cevap bulabildim. Çetin Hocam'a sonsuz teşekkür ediyorum. İnşallah hocamın benden beklentisini boşa çıkarmam.

Tez sürecinde bana karşı gösterdikleri sabır, sevgi, özveri ve destekten ötürü sevgili annem Hanım YÜCEL ve babam Cengiz YÜCEL'e tez sürecinde yanımda oldukları ve varlıklarını her daim hissettirdikleri için teşekkürü borç bilirim. Çok sevdiğim kardeşim Hasan YÜCEL'e, teyze sen daha ders mi çalışıyorsun ben de çalışmalıyım diyen en sevdiğim yeğenim Tuana' ya destekleri için teşekkür ederim. Diğer kardeşlerim Ayten YÜCEL KÖSE, Fadime YÜCEL BARUĞ ve Muhammet YÜCEL'e ve eniştem Mustafa KÖSE ' ye teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ	1
2. BAZI TANIM VE TEOREMLER.....	3
2.1. Bazı Topolojik Tanım ve Kavramlar.....	3
2.2. Gruplarla İlgili Bazı Kavramlar.....	11
3. DÖNERLİ GRUPLAR	13
4. TOPOLOJİK GRUPLAR	33
5. TOPOLOJİK DÖNERLİ GRUPLAR.....	67
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	89
KAYNAKLAR	91
ÖZGEÇMİŞ	93

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$\text{Aut}_0(G, \oplus)$	G den G ye otomorfizma grubunun bir alt grubu
$\text{Aut}(G, \oplus)$	G den G ye otomorfizmaların grubu
$\bar{A}$	A kümesinin kapanışı
A°	A kümesinin iç noktalarının kümesi
$A \times B$	A ile B kümesinin Kartezyen çarpımı
$N(x)$	x noktasının komşuluklar ailesi
(X, τ)	X topolojik uzayı

1. GİRİŞ

Cebir ve topolojinin ortak katkı ile geliştirdiği konulardan biri topolojik gruplardır. Bir gruptan topolojik grup üretildiği gibi, grup yapısına benzeyen bir cebirsel yapıdan da bir topolojik grup üretilebilmektedir. Bu cebirsel yapılardan biri de dönerli gruplardır.

Gruplarla benzer özellikleri taşıyan dönerli gruplarla ilgili yapılan çalışmaların önemli bir kısmı A. A. Ungar’a aittir. Dönerli grup tanımı Ungar tarafından 1988 yılında “ Thomas Rotation and the Parametrization of The Lorentz Transformation Group” ve 1990 yılında “Weakly Associative Groups” adıyla yayınlanan makalelerde yapılmıştır. Önemli dönerli gruplardan olan Möbius dönerli grubu ile ilgili ilk çalışmaları yapan da A. A. Ungar’dır. Möbius toplamının bir dönerli grup işlemi olduğunu inceleyen Ungar, Möbius dönerli grubuyla ilgili çalışmalara 1988 de başlamış ve bu çalışmalarına [1] ve [2]’ de yer vermiştir. Möbius toplamında olduğu gibi Einstein toplamının da bir dönerli grup işlemi olduğu A.A. Ungar tarafından 2001 senesinde “Beyond the Einstein Addition Law and its Gyroscopic Thomas precession” ismiyle yayınlanan çalışmada incelenmiştir. A.A.Ungar sonraki senelerde yaptığı dönerli gruplarla ilgili çalışmalarına [3] ‘de yer vermiş ve dönerli grupların cebirsel özellikleri araştırılmaya devam edilmiştir.

Topolojik gruplarda olduğu gibi dönerli grupların da topoloji ile ilişkisi hakkında çalışmalar yapılmaktadır. R. Lal ve Akhilesh C.Yadav sağ topolojik dönerli gruplarla ilgili araştırma yapanlardır. W. Atipontrat 2017’de yayınladığı makale [4] ile dönerli grup işlemi ile ters dönüşüm fonksiyonlarını sürekli kılan topolojiler yardımıyla dönerli grupların topolojisi hakkında çalışmalar ortaya koymuş ve topolojik dönerli grup tanımını yaparak topolojik özelliklerini incelemiştir.

Bu tezde ise, ikinci bölümde topolojik uzay, metrik uzay ve grup teorisine ait bazı kavramlar ve sonraki bölümlerde karşılaşılabilecek teorem ve önermelere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise, bir küme üzerinde tanımlı $\oplus$ işleminin grup özelliklerinden sol birim ve sol ters özelliklerine sahip olan, sol döngü özelliğini ve gruptaki birleşme özelliğinden daha zayıf bir yapı olan sol dönerli birleşme özelliğini sağlayan dönerli grup tanımı yapılmıştır. önerli grupların cebirsel özellikleri ile ilgili bazı teoremlere ve ispatlarına yer

verilmiştir. Dönerli grupla ilişkili eş dönerli grup tanımlanmış ve bazı özelliklerine yer verilerek, dönerli grupların gruplardan farklı olan 1. ve 2. sağ kısaltma kuralına değinilmiştir.

Dördüncü bölümde; [5-7] ‘den semitopolojik grup, paratopolojik grup, quasitopolojik grup ve topolojik grup tanımlanmış ve bazı örnekler verilmiştir. Beşinci bölümün ayrıldığı topolojik dönerli gruplarla karşılaştırma imkanı olması için; topolojik dönerli grupların belirtilen özelliklerine paralel olan topolojik grup özellikleri teoremlerle verilmiş ve ispatları yapılmıştır. Topolojik grupların metrikleştirilebilir olma ve tamamen düzenli olma durumuna Birkhoff- Kakutani teoreminden yararlanılarak değinilmiştir.

Beşinci bölümde ise; topolojik dönerli gruplarla ilgi W. Atipontrat’ın “ Topological Gyrogroups : Generalization of topological groups, Topology and its Applications” makalesine yer verilmiştir. Burada açık bırakılan sorulara değinilmiştir. Möbius dönerli grubu ve Einstein dönerli grubuna yer verilerek topolojik dönerli grup olmaları na yer verilmiştir.

Altıncı bölümde ise sonuç ve öneriler bulunmaktadır.

2. BAZI TANIM VE TEOREMLER

İki alt başlık bulunan bu bölümde ilk başlıkta sonraki bölümlerde ihtiyaç duyulabilecek topolojik ve metrik uzaylarla ilgili bazı kavram ve teoremler bulunmaktadır. Bunlar [13]'de yer almaktadır.

İkinci başlıkta ise gruplarla ilgili bazı temel kavramlara değinilmiştir.

2.1. Bazı Topolojik Tanım ve Teoremler

Bu başlıkta bazı topolojik ve metrik uzay kavram, tanım ve teoremleri verilecektir.

2.1.1. Tanım

X herhangi bir küme olmak üzere τ , X in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer,

(T1) $\emptyset, X \in \tau$

(T2) τ ailesinin herhangi sonlu sayıdaki elemanının arakesiti τ ailesine aittir.

(T3) τ ailesinin herhangi bir alt ailesindeki kümelerin birleşimi τ ailesindedir.

koşulları sağlanıyorsa, τ ailesine X kümesi üzerinde bir topoloji, (X, τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir.

2.1.2. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. τ ailesine ait X uzayının her A alt kümesine açık küme denir. Eğer $X - A$ kümesi τ ailesine ait ise A alt kümesine kapalı küme denir.

2.1.3. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay ve A ile N kümeleri X uzayının iki alt kümesi olsun. Eğer, $A \subseteq U \subseteq N$ olacak biçimde τ ailesine ait bir U kümesi varsa, N alt kümesine A kümesinin

bir komşuluğu denir. Yalnız bir elemandan oluşan $\{x\}$ kümesinin bir komşuluğuna ise $x \in X$ noktasının bir komşuluğu denir.

(X, τ) topolojik uzayının $x \in X$ noktasının bütün komşuluklarının oluşturduğu aileye x in komşuluklar ailesi denir ve $N(x)$ ile gösterilir.

2.1.4. Tanım

X bir topolojik uzay ve $Y \subseteq X$ olsun. $\tau_Y = \{Y \cap U : U \in \tau\}$ ailesi Y üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye τ topolojisinin Y alt kümesi üzerine indirgediği alt uzay topolojisi denir. (Y, τ_Y) ikilisine X in bir topolojik alt uzayı denir.

2.1.5. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. $\beta \subseteq \tau$ olmak üzere, eğer X in her açık alt kümesi β ailesinin bazı elemanlarının birleşimi olarak yazılabiliyorsa β ailesine τ topolojisinin bir tabanı (bazı) denir.

2.1.6. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. X in bütün komşuluklar ailesi $N(x)$ olmak üzere $M(x) \subseteq N(x)$ olsun. Eğer, her $N \in N(x)$ için $M \subseteq N$ olacak biçimde bir $M \in M(x)$ varsa $M(x)$ ailesine $x \in X$ elemanının bir komşuluk tabanıdır denir.

2.1.7. Teorem

α ve β aileleri, sırasıyla, bir X kümesi üzerindeki τ ve τ' topolojileri için birer taban olsun. $\tau' \subseteq \tau$ olması için gerek ve yeter şart her $B \in \beta$ ve her $x \in B$ için $x \in A \subseteq B$ olacak biçimde en az bir $A \in \alpha$ elemanının var olmasıdır.

2.1.8. Tanım

X ve Y topolojik uzaylar ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. $x_0 \in X$ olmak üzere $f(x_0)$ ögesinin her V komşuluğu için x_0 elemanının $f(U) \subseteq V$ olacak biçimde bir U komşuluğu varsa f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir denir.

Her $x_0 \in X$ için x_0 noktasında sürekli olan $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonuna sürekli fonksiyon denir.

2.1.9. Tanım

X ve Y topolojik uzaylar ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu X in her açık alt kümesini Y nin bir açık kümesine resmediyorsa f ye açık fonksiyon, X in her kapalı kümesini Y nin bir kapalı kümesine resmediyorsa f ye kapalı fonksiyon denir.

2.1.10. Tanım

X ve Y topolojik uzaylar olmak üzere $f : X \rightarrow Y$ bire-bir ve örten bir fonksiyon olsun. Eğer f ve f^{-1} fonksiyonları sürekli ise f dönüşümüne bir homeomorfizma denir. Aralarında bir homeomorfizma tanımlanabilen topolojik uzaylara homeomorf veya eş yapılı topolojik uzaylar denir.

2.1.11. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay olsun.

1) X in $x \neq y$ biçimindeki her x, y elemanı için, bu noktalardan en az birisinin, diğerini içermeyen en az bir komşuluğu varsa bu uzaya T_0 - uzayı denir.

2) X in $x \neq y$ biçimindeki her x, y elemanı için, x ve y nin birbirini içermeyen en az bir komşuluğu varsa X uzayına T_1 - uzayı denir.

3) X in $x \neq y$ biçimindeki her x, y elemanı $N_1 \cap N_2 \neq \emptyset$ olacak biçimde x in bir $N_1 \in N(x)$ ve y nin bir $N_2 \in N(y)$ komşuluğu varsa X uzayına T_2 - uzayı (Hausdorff uzayı) denir.

4) Her $x \in X$ ve x i içermeyen kapalı her K kümesi için K ve x in ayrık komşulukları varsa X uzayına düzgün uzay denir.

(X, τ) uzayı hem T_1 uzayı hem de düzgün ise bu uzaya T_3 uzayı denir.

5) Her $x \in X$ ve x i içermeyen her F kapalı için $f(x) = 0$ ve $f(F) = \{1\}$ olacak biçimde sürekli bir $f : X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu varsa X uzayına tamamen düzgün uzay denir.

Tamamen düzgün bir topolojik uzay, aynı zamanda T_1 uzayı ise bu uzaya $T_{3.5}$ uzayı denir.

2.1.12. Tanım

I bir indis kümesi ve her $i \in I$ için X_i bir küme olsun. $\prod_{i \in I} X_i = \{ x : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i : x(i) \in X_i \}$

$\prod_{i \in I} X_i = \{ x : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i : x(i) \in X_i \}$ kümesine X_i kümelerinin Kartezyen çarpımı denir.

$x \in \prod_{i \in I} X_i$ elemanının i deki değeri genellikle $x(i)$ yerine x_i ile gösterilir.

$$\pi_k : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_k$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots) \rightarrow \pi_k (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots) = x_k$$

fonksiyonuna $\prod_{i \in I} X_i$ kümesinin X_k kümesi üzerine projeksiyonu denir.

2.1.13. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere, X uzayının her x elemanının sayılabilir bir komşuluk tabanı varsa X uzayına birinci sayılabilir uzay denir.

Şimdi metrik uzay ile ilgili bazı tanım, kavram ve teoremlere yer verelim.

2.1.14. Tanım

Boş kümeden farklı bir X kümesi üzerinde tanımlı pozitif değerli

$$d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y)$$

fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa d ye bir sözde metrik denir.

$$(i) d(x, x) = 0$$

$$(ii) d(x, y) = d(y, x)$$

$$(iii) d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Bu durumda (X, d) ikilisine bir sözde metrik uzayı denir.

Tanımda geçen (i) özelliği yerine (i') $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ özelliği sağlanıyorsa d ye bir metrik ve (X, d) ikilisine bir metrik uzay denir.

(X, d) bir metrik uzay olsun. Her $x \in X$ ve $r > 0$ için, $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\} \subseteq X$ alt kümesi, x merkezli, r yarıçaplı açık yuvar olarak adlandırılır.

2.1.15. Teorem

Bir metrik uzayda herhangi iki açık yuvarın arakesiti boştan farklı ise bu arakesitin her elemanı için o elemanı merkez kabul eden ve arakesitin kapsadığı bir açık yuvar vardır.

İspat

(X, d) bir metrik uzay olsun. $a, b \in X$ ve r_1, r_2 pozitif gerçel sayılar olmak üzere $B(a, r_1)$ ve $B(b, r_2)$ yuvarları X uzayının herhangi iki açık yuvarı olsun. Eğer $c \in B(a, r_1) \cap B(b, r_2)$ ise, $B(c, r) \subseteq B(a, r_1) \cap B(b, r_2)$ olacak biçimde bir $r > 0$ sayısının var olduğunu görelim. $c \in B(a, r_1)$ olduğundan $d(a, c) < r_1$ dir. Öyleyse, $r_1 - d(a, c) > 0$ dir. Benzer şekilde

$r_2 - d(a, c) > 0$ dir. $r = \min\{r_1 - d(a, c), r_2 - d(a, c)\}$ olsun. $B(c, r) \subseteq B(a, r_1) \cap B(b, r_2)$ dir. Şöyle ki, $x \in B(c, r)$ alalım. d metrik olduğundan $d(x, a) \leq d(x, c) + d(c, a)$ dir. $x \in B(c, r)$ olduğu için $d(x, c) < r$ olur. Öyleyse $d(x, a) < r + d(c, a)$ olur. r sayısının tanımından $d(x, a) < r_1 - d(a, c) + d(c, a)$ olur. $d(a, c) = d(c, a)$ olduğundan, $d(x, a) < r_1$ bulunur. Öyleyse $x \in B(a, r_1)$ olur. Benzer yolla $x \in B(b, r_2)$ bulunur. Böylece $B(c, r) \subseteq B(a, r_1) \cap B(b, r_2)$ elde edilir.

2.1.16. Tanım

(X, d) bir metrik uzay olmak üzere X üzerinde tanımlanan $\beta := \{B(x, r) : x \in X, r > 0\}$ ailesi bir topoloji tabanıdır. Tabanı β olan topolojiye d metriği tarafından üretilen metrik topoloji denir ve τ_d ile gösterilir. τ_d topolojisi;

$\tau_d = \{U \subseteq X : \text{her } x \in U \text{ için } B(x, r) \subseteq U \text{ olacak biçimde bir } r > 0 \text{ var}\}$ dir.

2.1.17. Önerme

(X, d) bir metrik uzay olmak üzere τ_d, d metriği tarafından üretilen bir metrik topoloji olsun. $U \in \tau_d$ olması için gerek ve yeter şart her $x \in U$ için $x \in B \subseteq U$ olacak biçimde bir B açık yuvarının olmasıdır.

İspat

U, X in açık bir alt kümesi ve $x \in U$ olsun. U açık olduğundan $B(x, r_x) \subseteq U$ olacak biçimde olacak biçimde $B(x, r_x)$ açık yuvarı vardır.

U alt kümesinin herhangi bir x elemanı için $x \in B(y, r) \subseteq U$ olacak biçimde $r > 0$ sayısı var olsun. Öyleyse, $d(x, y) < r$ olup, $r - d(x, y) = s > 0$ dir. Öyleyse, $B(x, s) \subseteq U$ bulunur.

Şöyle ki; $z \in B(x, s)$ aldığımızda da $d(x, z) < s$ olacaktır. Üçgen eşitsizliğinden r sayısı $d(y, z) < d(y, x) + d(x, z) < d(x, y) + s = r$ olur. Böylece, $d(y, z) < r$ olur. Buradan, $z \in B(y, r)$ olup, $B(y, r) \subseteq U$ olduğundan, $z \in U$ olur. Öyleyse, $B(x, s) \subseteq U$ olup, $U \in \tau_d$ dir.

2.1.18. Teorem

(X, d) bir metrik uzay ve $x \in X$ olmak üzere $B(x, \frac{1}{n}) = \{ y \in X : d(x, y) < \frac{1}{n} \}$ açık yuvarlarının oluşturduğu $\{ B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}^+ \}$ ailesi x in bir komşuluk tabanıdır.

İspat

$U \subseteq X$ açık olmak üzere $x \in U$ olsun. U metrik topolojiye göre açık olduğundan Tanım 2.1.16 dan $B(x, r) \subseteq U$ olacak biçimde bir $r > 0$ vardır. $\frac{1}{r} \leq n_0$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}^+$ vardır. $\frac{1}{r} \leq n_0$ olduğundan $\frac{1}{n_0} \leq r$ olup, $B(x, \frac{1}{n_0}) \subseteq B(x, r)$ dir. Böylece, $B(x, \frac{1}{n_0}) \subseteq U$ olup, $\{ B(x, \frac{1}{n_0}) : n \in \mathbb{N}^+ \}$ ailesi x in bir komşuluk tabanıdır.

2.1.19. Teorem

Her metrik uzay birinci sayılabilir ve T_2 - uzayıdır.

İspat

Her $x \in X$ için $\{ B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}^+ \}$ ailesi Teorem 2.1.18 den x in bir komşuluk tabanı olduğu için X uzayı birinci sayılabilir uzayıdır.

X uzayının Hausdorff uzayı olduğunu görelim. Bunun için, X in $x \neq y$ biçimindeki x, y elemanlarını alalım. $x \neq y$ olduğu için $d(x, y) > 0$ dir. $d(x, y) = s$ diyelim. $r = \frac{s}{3}$ seçilirse $B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset$ olur. Şöyle ki; $z \in B(x, r) \cap B(y, r)$ alalım. Öyleyse; $d(x, z) < r$ olur ve

$d(y,z) < r$ olur. Üçgen eşitsizliğinden, $d(x,y) < d(x,z) + d(z,y) < r + r = 2r$ olur. Buradan $d(x,y) = s = 3r$ olduğundan $3r < 2r$ elde edilir. Bu ise bir çelişki olup, $B(x,r) \cap B(y,r) = \emptyset$ dir. Böylece X metrik uzayı bir Hausdorff uzayıdır.

2.1.20. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere, X uzayının alt kümelerinden oluşan bir $\mathcal{D}$ ailesinin birleşimi X kümesine eşitse $\mathcal{D}$ ailesine X topolojik uzayının bir örtüsüdür denir. Elemanları açık kümeler olan örtüye açık örtü denir.

$\mathcal{D}$ ailesinin bir alt ailesi X uzayını örtüyorsa, bu alt aileye $\mathcal{D}$ ailesinin bir alt örtüsü denir.

2.1.21. Tanım

X bir topolojik uzay olsun. Eğer X kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa X uzayına kompakt uzay denir.

2.1.22. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. X uzayında $X_1 \cup X_2 = X$ olacak biçimde ayrık açık X_1 ve X_2 kümeleri var ise X uzayına bağlantısız uzay ve $\{X_1, X_2\}$ kümesine de X uzayının bir parçalanışı denir. Hiçbir parçalanışı olmayan topolojik uzaya bağlantılı uzay denir.

2.1.23. Teorem (Tychonoff Teoremi)

$\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ bir topolojik uzaylar ailesi olsun. $\prod_{i \in I} X_i$ Kartezyen çarpımının kompakt olması için gerek ve yeter şart her $i \in I$ için X_i topolojik uzayının kompakt olmasıdır.

2.2. Gruplarla İlgili Bazı Kavramlar

Bu bölümde gruplarla ilgili bazı tanım ve kavramlara yer verilmiştir.

2.2.1. Tanım

S boştan farklı bir küme olmak üzere

$$\oplus : S \times S \rightarrow S$$

$$(a,b) \rightarrow a \oplus b$$

fonksiyonuna S üzerinde bir ikili işlem denir.

2.2.2. Tanım

S boştan farklı bir küme ve S kümesi üzerinde bir ikili işlem $\oplus$ olmak üzere $(S, \oplus)$ ikilisine bir magma denir.

Magmalar birim elemana sahip olabilir. Her $s \in S$ için $e \oplus s = s \oplus e = s$ olacak biçimde $e \in S$ varsa e ye $(S, \oplus)$ magmasının birimi ve S magmasına ise birimli magma denir.

$(S, \oplus)$ magmasının birim elemanı olarak $0 \in S$ kullanılacak.

2.2.3. Tanım

$(S, \oplus)$ bir magma olsun. $\oplus$ işlemi S üzerinde birleşme özelliğine sahipse, yani; her $x, y, z \in S$ için $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ eşitliği sağlanıyorsa $(S, \oplus)$ magmasına bir yarı grup denir.

2.2.4. Tanım

$(S, \oplus)$ bir birimli magma olsun. $a, b \in S$ olmak üzere x ve y bilinmeyenli $a \oplus x = b$ ve $y \oplus a = b$ denklemleri bir tek çözüme sahipse $(S, \oplus)$ magmasına bir döngü denir [3].

2.2.5. Tanım

$(G, \oplus)$ ikilisi bir yarı grup olmak üzere, eğer $\oplus$ işlemi

(G1) Her $a \in G$ için $a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$ olacak biçimde bir birim eleman $0 \in G$ vardır,

(G2) Her $a \in G$ için $a \oplus (\ominus a) = (\ominus a) \oplus a = 0$ olacak biçimde $a \in G$ nin bir ters elemanı $\ominus a \in G$ vardır.

koşullarını sağlıyorsa $(G, \oplus)$ ikilisine bir grup denir.

2.2.6. Tanım

$(G, \oplus)$ bir grup olsun. Her $a, b \in G$ için $a \oplus b = b \oplus a$ eşitliği sağlanıyorsa $(G, \oplus)$ ikilisine bir değişmeli grup denir.

2.2.7. Tanım

$(G, \oplus)$ bir grup olsun. H , G nin boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere

(A1) Her $a \in H$ için $\ominus a \in H$

(A2) Her $a, b \in H$ için $a \oplus b \in H$

özellikleri sağlanıyorsa H alt kümesine G nin bir alt grubu denir.

2.2.8. Tanım

$(G, \odot)$ ve $(G', \bullet)$ iki grup ve $f: G \rightarrow G'$ bir fonksiyon olmak üzere, Her $a, b \in G$ için $f(a \odot b) = f(a) \bullet f(b)$ oluyorsa, f fonksiyonuna bir grup homomorfizması denir. Eğer f bire-bir, örten bir fonksiyon ve bir grup homomorfizması ise f ye bir grup izomorfizması ve ayrıca G den G ye bir izomorfizmaya bir grup otomorfizması denir. G üzerindeki bütün otomorfizmaların kümesi $\text{Aut}(G, \odot)$ ile gösterilir.

3. DÖNERLİ GRUPLAR

Bu bölüm dönerli grupların cebirsel özelliklerine ayrılmıştır. Dönerli gruplarla grupların farkından bahsedilmiş ve ilgili tanım ve teoremlere yer verilmiştir. İleri bölümlerde incelenecek olan topolojik dönerli gruplarda karşılaşılabilecek kavramlar ve teoremler yer almaktadır.

3.1. Tanım

$(G, \oplus)$ bir magma olsun. Eğer $\oplus$ işlemi,

(G1) Her $a \in G$ için $0 \oplus a = a$ koşulunu sağlayan bir sol birim eleman $0 \in G$ vardır,

(G2) Her $a \in G$ için $\ominus a \oplus a = 0$ koşulunu sağlayan $a \in G$ nin bir sol tersi $\ominus a \in G$ vardır,

(G3) Her $a, b \in G$ için; öyle bir $g[a,b]: G \rightarrow G$, $g[a,b] \in \text{Aut}(G, \oplus)$ otomorfizması vardır ki,

her $c \in G$ için $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus g[a,b](c)$ sol dönerli birleşme özelliği sağlanır,

(G4) Her $a, b \in G$ için sol döngü özelliği olarak adlandırılan;

$$g[a,b] = g[a \oplus b, b] \text{ eşitliği sağlanır.}$$

özelliklerini sağlıyorsa, $(G, \oplus)$ ikilisine bir dönerli grup denir [3,4].

$g[a,b] \in \text{Aut}(G, \oplus)$ otomorfizmasına $a, b \in G$ elemanlarının ürettiği dönerli otomorfizma denir. $g: G \times G \rightarrow \text{Aut}(G, \oplus)$ dönüşümüne ise G magmasının dönerli üreteni denir [3].

(G3) de verilen sol dönerli birleşme özelliğine benzeyen ve ondan yararlanılarak tanımı yapılan sağ dönerli birleşme özelliği şöyledir; her $a, b \in G$ için; öyle bir $g[b,a]: G \rightarrow G$, $g[b,a] \in \text{Aut}(G, \oplus)$ dönerli otomorfizması vardır ki; G magmasının her c elamanı için $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus g[b,a](c))$ sağlanır.

(G4) de verilen sol döngü özelliğine benzeyen ve sol döngü özelliğinden yararlanılarak tanımlanan sağ döngü özelliği şöyledir [3].

$$g[a,b] = g[a,b \oplus a]$$

Burada grup teorisine benzer şekilde dönerli grup homomorfizması, izomorfizması ve otomorfizması [8] de şöyle tanımlanmaktadır.

$(G, \oplus^1)$ ve $(H, \oplus^2)$ birer dönerli grup ve $f : G \rightarrow H$ bir fonksiyon olsun. Eğer; her $a, b \in G$ için $f(a \oplus^1 b) = f(a) \oplus^2 f(b)$ oluyorsa f fonksiyonuna bir dönerli grup homomorfizması denir. Bire-bir ve örten dönerli grup homomorfizmasına bir dönerli grup izomorfizması denir. Eğer, $f : G \rightarrow H$ fonksiyonu; G ile H dönerli grupları arasında bir dönerli grup izomorfizması ise G ile H birbirine izomorftur denir ve $G \cong H$ ile gösterilir, ayrıca G den G ye bir dönerli grup izomorfizmasına ise bir dönerli grup otomorfizması denir [8].

3.2. Tanım

$(G, \oplus)$ bir dönerli grup olsun. Her $a, b \in G$ için $a \oplus b = g[a,b](b \oplus a)$ eşitliği sağlanıyorsa $(G, \oplus)$ ikilisine bir dönerli değişmeli dönerli grup denir [3].

Şimdi bazı dönerli grup örneklerini görelim.

3.3. Örnek

$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ kümesi kompleks açık birim disk olsun. $D \times D$ kümesi üzerinde tanımlanan,

$$\oplus_m : D \times D \rightarrow D;$$

$$(x,y) \rightarrow \oplus_m (x,y) = (x + y) (1 + \bar{x}y)^{-1}$$

ikili işlemi (Möbius toplamı) ile $(D, \oplus_m)$ ikilisi bir dönerli gruptur, fakat $(D, \oplus_m)$ ikilisi bir

grup değildir. Şöyle ki, her $x \in D$ için $0 \oplus_m x = (0 + x)(1 + \overline{0x})^{-1} = x$ olacak biçimde bir $0 \in D$ sol birim elemanı ve $-x \oplus_m x = (-x + x)(1 + \overline{-x}x)^{-1}$ olacak biçimde x in bir sol tersi $-x \in D$ vardır, fakat $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{-i}{3}$ ve $z = \frac{i}{3}$ için $x = (\frac{1}{3} \oplus_m \frac{-i}{3}) \oplus_m \frac{i}{3} \neq \frac{1}{3} \oplus_m (\frac{-i}{3} \oplus_m \frac{i}{3})$ olduğu için birleşme özelliği sağlanmaz. Buna rağmen D kümesinin her x, y, z elemanı için $x \oplus_m (y \oplus_m z) = (x \oplus_m y) \oplus_m g[x,y](z)$ olacak biçimde bir

$$g[x,y] : D \rightarrow D;$$

$$z \rightarrow g_{x,y}(z) = (1 + x\overline{y})(1 + \overline{xy})^{-1} z$$

dönerli otomorfizması vardır. Burada $(B, \oplus_m)$ dönerli grubu Möbius dönerli grubu olarak adlandırılır [1,3,4].

3.4. Örnek

c ışık hızı, $\|\mathbf{v}\|$ ise $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ vektörünün normu olmak üzere $\mathbb{R}_c^3 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{v}\| < c\}$ kümesi Einstein'ın hız kümesidir. Bu küme alışılmış topoloji ile donatılan $\mathbb{R}^3$ uzayının bir alt uzayıdır. $\mathbb{R}_c^3 \times \mathbb{R}_c^3$ uzayı üzerinde tanımlanan

$$\oplus_E : \mathbb{R}_c^3 \times \mathbb{R}_c^3 \rightarrow \mathbb{R}_c^3$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rightarrow \mathbf{u} \oplus_E \mathbf{v} = \frac{1}{1 + \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{c^2}} \left(\mathbf{u} + \frac{1}{\gamma_u} \mathbf{v} + \frac{1}{c^2} \frac{\gamma_u}{1 + \gamma_u} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mathbf{u} \right)$$

ikili işlemi Einstein toplamıdır. Burada $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}_c^3$ vektörlerinin iç çarpımı $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ olup γ_u ise tanımı aşağıda verilen c merkezli yuvar içindeki gama faktörüdür.

$$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{c^2}}}$$

$(\mathbb{R}_c^3, \oplus_E)$ ikilisi bir dönerli gruptur, fakat bir grup değildir. Şöyle ki; her $\mathbf{u} \in \mathbb{R}_c^3$ için $\mathbf{0} \oplus_E \mathbf{u} = \mathbf{u}$ olacak biçimde bir sol birim eleman $\mathbf{0} \in \mathbb{R}_c^3$ vardır, $-\mathbf{u} \oplus_E \mathbf{u} = \mathbf{0}$ olacak biçimde $\mathbf{u}$ nun bir sol tersi $-\mathbf{u} \in \mathbb{R}_c^3$ vardır. $\mathbf{u} = (1,1,0)$, $\mathbf{v} = (0,1,0)$, $\mathbf{w} = (0,0,1)$ elemanları için $(\mathbf{u} \oplus_E \mathbf{v}) \oplus_E \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \oplus_E (\mathbf{v} \oplus_E \mathbf{w})$ olduğundan birleşme özelliği sağlanmaz. Buna rağmen,

$u \oplus_E (v \oplus_E w) = (u \oplus_E v) \oplus_E g[u,v](w)$ olacak biçimde bir dönerli otomorfizma olduğu için $\oplus_E$ Einstein toplamı $\mathbb{R}_c^3$ kümesi üzerinde sol dönerli birleşme özelliğini sağlar. Burada $(\mathbb{R}_c^3, \oplus_E)$ dönerli grubu Einstein dönerli grubu olarak adlandırılır [2,3,4].

Her grup birim otomorfizma $I(x) = x$ ile sol dönerli birleşme özelliğini sağladığı için bir dönerli gruptur, fakat her dönerli grubun bir grup olamayacağı 3.3 Örnek ve 3.4 Örnek den görülebilir [4].

3.5. Teorem (İlk Dönerli Grup Teoremleri)

$(G, \oplus)$ bir dönerli grup olsun. $a, b, c \in G$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır [3].

- (1) $a \oplus b = a \oplus c$ ise $b = c$ dir. (Genel Sadeleştirme Özelliği)
- (2) G nin bir sol birim elemanı 0 ile gösterilmek üzere $g[0,a] = I$ birim otomorfizmadır.
- (3) $a \in G$ nin bir sol tersi x olsun. Bu durumda $g[x,a] = I$ birim otomorfizmadır.
- (4) Her $a \in G$ için $g[a,a] = I$ birim otomorfizmadır.
- (5) G nin her sol birimi aynı zamanda bir sağ birimdir.
- (6) G nin bir tek sol birim elemanı vardır.
- (7) Her sol ters aynı zamanda sağ terstir.
- (8) Her $a \in G$ nin bir tek sol tersi vardır ve bu sol ters $\ominus a$ olmak üzere $\ominus(\ominus a) = a$ dır.
- (9) $\ominus a \oplus (a \oplus b) = b$ (sol sadeleştirme kuralı)
- (10) Her $x \in G$ için, $g[a,b](x) = \ominus(a \oplus b) \oplus (a \oplus (b \oplus x))$ dir. (Dönerli Üreten Özelliği)
- (11) Her $a, b \in G$ için $g[a,b](0) = 0$ dır.
- (12) Her $x \in G$ için $g[a,b](\ominus x) = \ominus g[a,b](x)$
- (13) $g[a,0] = g[0,b] = I$ birim otomorfizmadır.

İspat

(1) G bir dönerli grup olduğundan (G2) den her elemanın bir sol tersi vardır. a nın bir sol tersi x olsun. $a \oplus b = a \oplus c$ olsun. $x \oplus (a \oplus b) = x \oplus (a \oplus c)$ eşitliğinde sol dönerli birleşme özelliği uygulanırsa; $(x \oplus a) \oplus g[x,a](b) = (x \oplus a) \oplus g[x,a](c)$ elde edilir. $x \oplus a = 0$ olduğundan; $0 \oplus g[x,a](b) = 0 \oplus g[x,a](c)$ olur. Buradan $g[x,a]b = g[x,a](c)$ elde edilir. $g[x,a]$ otomorfizması bire-bir olduğundan $b = c$ olur.

(2) G nin herhangi bir x elemanını alalım. 0 , G nin sol birimi olduğundan,

$a \oplus x = 0 \oplus (a \oplus x)$ dir. Sol dönerli birleşme özelliğinden;

$a \oplus x = (0 \oplus a) \oplus g[0,a](x) = a \oplus g[0,a](x)$ elde edilir. (1) den $x = g[0,a](x)$ bulunur.

O halde $g[0,a] = I$ birim otomorfizmasıdır.

(3) $a \in G$ nin bir sol tersi x olsun. (G4) den $g[x,a] = g[x \oplus a, a]$ olur. x a nın bir sol tersi olduğundan $x \oplus a = 0$ olup, $g[x \oplus a, a] = g[0, a]$ dır. (2) den $g[0, a] = I$ birim otomorfizma olduğundan $g[x, a] = g[x \oplus a, a] = g[0, a] = I$ birim otomorfizmadır.

(4) $a \in G$ alalım. (2) den $g[0, a] = I$ birim otomorfizma olduğundan ve (G4) den

$g[0, a] = g[0 \oplus a, a] = g[a, a] = I$ birim otomorfizma olur.

(5) 0 , G nin bir sol birim elemanı olsun. a , G nin herhangi bir elemanı olmak üzere;

$a \oplus 0 = a$ olduğunu görelim. (G2) den var olan a nın bir sol tersi x olsun. Sol dönerli birleşme özelliğinden; $x \oplus (a \oplus 0) = (x \oplus a) \oplus g[x,a](0)$ dır. x , a nın sol tersi olduğu için $x \oplus a = 0$ dır. (3) den $g[x,a](0) = 0$ olup,

$x \oplus (a \oplus 0) = (x \oplus a) \oplus g[x,a](0) = 0 \oplus 0 = 0 = x \oplus a$ olup, $x \oplus (a \oplus 0) = x \oplus a$

elde edilir ve (1) den $a \oplus 0 = a$ bulunur. Böylece 0 , G nin bir sağ birim elemanıdır.

(6) G nin iki sol birim elemanı 0 ve 0^* olsun. Bu sol birim elemanlarının birbirine eşit olduğunu görelim. (5) den 0 aynı zamanda sağ birim elemandır. $0 = 0^* \oplus 0 = 0^*$ elde edilir. Öyleyse $0 = 0^*$ olup, G nin bir tek sol birim elemanı vardır.

(7) $a \in G$ alalım. G bir dönerli grup olduğundan a nın bir sol tersi vardır. a nın sol tersi x olsun. x in a nın sağ tersi olduğunu görelim. Sol dönerli birleşme özelliğinden;
 $x \oplus (a \oplus x) = (x \oplus a) \oplus g[x,a](x) \dots$ (i) eşitliği elde edilir. (3) den $g[x,a](x) = I(x) = x$ dır. $x \oplus a = 0$ olduğundan (i) eşitliği; $x \oplus (a \oplus x) = 0 \oplus x = x$ olur. (5) den her sol birim aynı zamanda bir sağ birim olduğu için $x \oplus (a \oplus x) = x = x \oplus 0$ olur. Genel Sadeleştirme Özelliğinden $a \oplus x = 0$ olur ve böylece x elemanı a nın bir sağ tersidir.

(8) $a \in G$ alalım. a nın iki sol tersi x ve y olsun. (7) den x ve y sol ters elemanları sağ ters elemandır. Öyleyse; $a \oplus x = a \oplus y = 0$ dır. (1) den $x = y$ elde edilir. Öyleyse a nın bir tek sol ters elemanı vardır. (G2) den $(\ominus a) \oplus a = 0$ olduğu için $\ominus a$, a nın sol tersidir. Benzer şekilde a , $\ominus a$ nın tersi olup, $\ominus(\ominus a) = a$ olur.

(9) (8) den a nın sol tersi $\ominus a$ dir. Sol dönerli birleşme özelliği uygulandığında,
 $\ominus a \oplus (a \oplus b) = ((\ominus a) \oplus a) \oplus g[\ominus a,a](b) \dots$ (ii) eşitliği elde edilir. (3) den $g[\ominus a,a] = I$ birim otomorfizma ve dolayısıyla $g[\ominus a,a] b = b$ olup,
 $(\ominus a) \oplus a = 0$ olduğundan (ii) eşitliğinden $\ominus a \oplus (a \oplus b) = 0 \oplus b = b$ elde edilir.

(10) $x \in G$ alalım. Sol dönerli birleşme özelliği uygulandığında;

$a \oplus (b \oplus x) = (a \oplus b) \oplus g[a,b](x)$ olur. Eşitliğin her iki tarafına $\ominus(a \oplus b)$ elemanı eklenirse $\ominus(a \oplus b) \oplus (a \oplus (b \oplus x)) = \ominus(a \oplus b) \oplus ((a \oplus b) \oplus g[a,b](x))$ olup, eşitliğin sağ tarafı (9) dan $g[a,b](x)$ olur. Böylece
 $\ominus(a \oplus b) \oplus (a \oplus (b \oplus x)) = g[a,b](x)$ bulunur.

(11) (10) da verilen dönerli üreten özelliğinden, $g[a,b](x) = \ominus(a \oplus b) \oplus (a \oplus (b \oplus x))$

olup, $x = 0$ için $g[a,b](0) = \ominus(a \oplus b) \oplus (a \oplus (b \oplus 0))$ dir. 0 , G nin birim elemanı olduğundan, $b \oplus 0 = b$ olup, $g[a,b](0) = \ominus(a \oplus b) \oplus (a \oplus b)$ olur. (8) den $a \oplus b \in G$ elemanının tersi $\ominus(a \oplus b)$ olup, $\ominus(a \oplus b) \oplus (a \oplus b) = 0$ dir. Böylece $g[a,b](0) = 0$ elde edilir.

(12) $x \in G$ alalım. (8) den x in tersi $\ominus x$ ve $x \oplus (\ominus x) = 0 \in G$ olup, (11) den

$g[a,b](x \oplus (\ominus x)) = g[a,b](0) = 0$ dır. Aynı zamanda $g[a,b]$ otomorfizma olduğundan $g[a,b](x \oplus (\ominus x)) = g[a,b](x) \oplus g[a,b](\ominus x) = 0$ olur. Burada sol kısaltma kuralından sonra $\ominus g[a,b](x) \oplus \{g[a,b](x) \oplus g[a,b](\ominus x)\} = \ominus g[a,b](x) \oplus 0 = \ominus g[a,b](x)$ bulunur. $\ominus g[a,b]x \oplus \{g[a,b](x) \oplus g[a,b](\ominus x)\} = \ominus g[a,b](x)$ eşitliğinde sol taraf (9) dan $g[a,b](\ominus x)$ e eşittir. Böylece, $g[a,b](\ominus x) = \ominus g[a,b](x)$ elde edilir.

(13) G nin herhangi bir x elemanını alalım. (10) da verilen dönerli üreten özelliğinde $b = 0$ için $g[a,0](x) = \ominus(a \oplus 0) \oplus (a \oplus (0 \oplus x))$ olur. 0 , G nin sol birim elemanı olup, $0 \oplus x = x$ ve (5) den her sol birim aynı zamanda bir sağ birim olduğundan $a \oplus 0 = a$ dır. Böylece $g[a,0](x) = \ominus a \oplus (a \oplus x)$ olur. (9) da verilen sol kısaltma kuralından $\ominus a \oplus (a \oplus x) = x$ dir. Öyleyse, $g[a,0](x) = x = I(x)$ olup, $g[a,0] = I$ birim otomorfizmadır.

$g[0,a] = I$ birim otomorfizma olduğu (2) de verilmiştir.

$(G, \oplus)$ bir dönerli grup olmak üzere her sağ birim eleman aynı zamanda bir sol birim elemandır ve ayrıca sağ birim eleman bir tek olup, 0 dır.

$(G, \oplus)$ bir dönerli grup ve her $a, b \in G$ için $\ominus b \ominus a = \ominus b \oplus (\ominus a)$ olup, $\ominus(a \oplus a) = \ominus a \ominus a$ dır [3].

3.6. Teorem

$(G, \oplus)$ bir dönerli grup olsun. Her $a, b \in G$ için; $\ominus(a \oplus b) = g[a, b](\ominus b \ominus a)$ eşitliğiyle verilen toplamsal ters kuralı sağlanır [3].

İspat

$a, b \in G$ olsun. G dönerli grup olduğundan $\ominus b \ominus a \in G$ dir. Teorem 3.5. (10) dan $x \in G$ olup, $x = \ominus b \ominus a$ için; $g[a, b](\ominus b \ominus a) = \ominus(a \oplus b) \oplus (a \oplus (b \oplus (\ominus b \ominus a)))$ olur. Teorem 3.5 (9) dan $b \oplus (\ominus b \ominus a) = \ominus a$ olup, $g[a, b](\ominus b \ominus a) = \ominus(a \oplus b) \oplus (a \oplus (\ominus a))$ olur. Teorem 3.5.8 den $a \in G$ nin tersi $\ominus a$ olduğundan $a \oplus (\ominus a) = 0$ dir. Öyleyse $g[a, b](\ominus b \ominus a) = \ominus(a \oplus b) \oplus 0$ olup, $g[a, b](\ominus b \ominus a) = \ominus(a \oplus b)$ elde edilir.

3.7. Önerme

$(G, \oplus)$ bir dönerli grup olsun. Her $a, b \in G$ için; $g[a, b](b) = \ominus(\ominus(a \oplus b) \oplus a)$ ve $g[a, \ominus b](b) = \ominus(a \ominus b) \oplus a$ eşitlikleri sağlanır [3].

İspat

$a, b \in G$ alalım. Teorem 3.5 (10) da verilen eşitlikte $x = \ominus b$ için $g[a, b](\ominus b) = \ominus(a \oplus b) \oplus (a \oplus (b \oplus (\ominus b)))$ olur. $b \oplus (\ominus b) = 0$ olduğundan, $g[a, b](\ominus b) = \ominus(a \oplus b) \oplus (a \oplus 0)$ olur. $a \oplus 0 = a$ olduğundan, $g[a, b](\ominus b) = \ominus(a \oplus b) \oplus a$ olur. Teorem 3.5.(12) den $g[a, b](\ominus b) = \ominus g[a, b](b)$ olup, $\ominus g[a, b](b) = \ominus(a \oplus b) \oplus a$ olur. Buradan $g[a, b](b) = \ominus((\ominus(a \oplus b) \oplus a))$ bulunur.

Diğer eşitliğin ispatı için verilen ilk eşitlik b yerine $\ominus b$ için yeniden yazılırsa;

$g[a, \ominus b](\ominus b) = \ominus(\ominus(a \oplus (\ominus b))) \oplus a$ olur. Teorem 3.5.(12) den

$g[a, \ominus b](\ominus b) = \ominus g[a, \ominus b](b)$ dir. Böylece $\ominus g[a, \ominus b](b) = \ominus(\ominus(a \oplus (\ominus b))) \oplus a$ olur.

Buradan $g[a, \ominus b](b) = \ominus(a \oplus (\ominus b) \oplus a)$ elde edilir.

3.8. Teorem

$(G, \oplus)$ bir dönerli grup olsun. Her $a, b, c \in G$ için aşağıdaki özellikler sağlanır [3].

$$1. g[a, b \oplus c](g[b, c]) = g[a \oplus b, g[a, b](c)](g[a, b])$$

$$2. g[a, \ominus g[a, b](b)](g[a, b]) = I$$

$$3. g[\ominus a, a \oplus b](g[a, b]) = I$$

$$4. g[b, a \oplus b](g[a, b]) = I$$

İspat

1. Sol dönerli birleşme özelliğinin artarda uygulanmasıyla oluşan iki farklı denklem zincirini görelim. Şimdi birinci denklem zincirini görelim. Herhangi bir $x \in G$ alalım. Sol dönerli birleşme özelliğinden, $a \oplus \{b \oplus (c \oplus x)\} = a \oplus \{(b \oplus c) \oplus g[b, c](x)\}$ olur. Eşitliğin sağ tarafında ikinci kez sol dönerli birleşme özelliği uygulandıktan sonra $a \oplus \{b \oplus (c \oplus x)\} = \{a \oplus (b \oplus c)\} \oplus g[a, b \oplus c](g[b, c](x)) \dots$ (iii) eşitliği elde edilir.

Şimdi ikinci denklem zincirini görelim. Sol dönerli birleşme özelliğini farklı elemanlarla uygulayalım; $a \oplus \{b \oplus (c \oplus x)\} = (a \oplus b) \oplus g[a, b](c \oplus x)$ olur. $g[a, b]$ otomorfizma olduğundan $g[a, b](c \oplus x) = g[a, b]c \oplus g[a, b](x)$ olur. Buradan işlem devam ettirilirse $a \oplus \{b \oplus (c \oplus x)\} = (a \oplus b) \oplus (g[a, b](c) \oplus g[a, b](x))$ olur. Eşitliğin sağ tarafında da ikinci kez sol dönerli birleşme özelliğinin uygulanmasının ardından, böylece $a \oplus \{b \oplus (c \oplus x)\} = \{(a \oplus b) \oplus g[a, b](c)\} \oplus g[a \oplus b, g[a, b](c)](g[a, b](x))$ olur. Sol dönerli birleşme özelliğinden $(a \oplus b) \oplus g[a, b](c) = a \oplus (b \oplus c)$ olduğundan, $a \oplus \{b \oplus (c \oplus x)\} = a \oplus (b \oplus c) \oplus g[a \oplus b, g[a, b](c)](g[a, b](x)) \dots$ (IV) elde edilir. (iii) ve (IV) eşitliklerinin sol tarafları birbirine eşit olduğundan sağ tarafları da eşittir.

$\{a \oplus (b \oplus c)\} \oplus g[a, b \oplus c](g[b, c](x)) = \{a \oplus (b \oplus c)\} \oplus g[a \oplus b, g[a, b](c)](g[a, b](x))$ olup, sol kısaltma kuralından $g[a, b \oplus c](g[b, c](x)) = g[a \oplus b, g[a, b](c)](g[a, b](x))$ elde edilir. Eşitlik her $x \in G$ için sağlandığı için $g[a, b \oplus c](g[b, c]) = g[a \oplus b, g[a, b](c)](g[a, b])$ olur.

2. (1.) de verilen eşitlik $c \in G$ yerine $\ominus b$ için yeniden yazılırsa; her $x \in G$ elemanı için, $g[a, b \oplus (\ominus b)](g[b, \ominus b](x)) = g[a \oplus b, g[a, b](\ominus b)](g[a, b](x)) \dots (V)$ eşitliği elde edilir. $b \in G$ elemanını tersi $\ominus b$ olduğundan $b \oplus (\ominus b) = 0$ olmasından dolayı (V) eşitliği; $g[a, 0](g[b, \ominus b](x)) = g[a \oplus b, g[a, b](\ominus b)](g[a, b](x))$ olur. Teorem 3.5.(3) den $g(b, \ominus b) = I$ olduğundan $g[b, \ominus b](x) = x$ dir. Ayrıca Teorem 3.5.(13) den $g[a, 0](x) = I(x)$ otomorfizma olup (V) eşitliği; $I(x) = g[a \oplus b, g[a, b](\ominus b)](g[a, b](x)) \dots (VI)$ halini alır. Teorem 3.5.(12) den $g[a, b](\ominus b) = \ominus g[a, b](b)$ olduğundan (VI) eşitliğinin yeni hali $I(x) = g[a \oplus b, \ominus g[a, b](b)](g[a, b](x))$ olur. Burada sol döngü özelliği uygulanırsa; $I(x) = g[(a \oplus b) \ominus g[a, b](b), \ominus g[a, b](b)](g[a, b](x))$ elde edilir. Sol dönerli birleşme özelliğinden; $(a \oplus b) \ominus g[a, b](b) = a \oplus (b \oplus (\ominus b))$ olur. $b \oplus (\ominus b) = 0$ olduğundan $(a \oplus b) \ominus g[a, b](b) = a \oplus 0 = a$ olup, (VI) eşitliği; $I(x) = g[a, \ominus g[a, b](b)](g[a, b](x))$ olur. Her x elemanı için eşitlik sağlandığından $I = g[a, \ominus g[a, b](b)](g[a, b])$ elde edilir.

3. (1.) de verilen eşitlik $b \in G$ yerine $\ominus a$ için yeniden yazılırsa;

$g[a, (\ominus a) \oplus c](g[\ominus a, c]) = g[a \oplus (\ominus a), g[a, (\ominus a)(c)](g[a, \ominus a]) \dots (VII)$ eşitliği elde edilir. $a \in G$ nin tersi $\ominus a$ olduğundan $a \oplus (\ominus a) = 0$ dir. Böylece eşitliğin sağ tarafı; $g[0, g[a, \ominus a]c](g[a, \ominus a])$ olur. Teorem 3.5.(13) den (VII) eşitliğinin sağ tarafı; $g[0, g[a, \ominus a](c)](g[a, \ominus a]) = I$ birim otomorfizma olup, (VII) eşitliği; $g[a, \ominus a \oplus c](g[\ominus a, c]) = I$ halini alır. Şimdi $a = \ominus a$ ve $c = b$ için (VII) eşitliği $g[\ominus a, a \oplus b]g[a, b] = I$ birim otomorfizmadır.

4. (3.) de sol döngü özelliği uygulanırsa, $g[\ominus a \oplus (a \oplus b), a \oplus b] (g[a, b]) = I$ olur.

Sol dönerli birleşme özeliğinden, $\ominus a \oplus (a \oplus b) = (\ominus a \oplus a) \oplus g[\ominus a, a] (b) = b$ olur.

Buradan $g[b, a \oplus b] (g[a, b]) = I$ elde edilir.

3.9. Teorem

$(G, \oplus)$ bir dönerli grup olsun. Her $a, b, c \in G$ için $(\ominus a \oplus b) \oplus g[\ominus a, b](\ominus b \oplus c) = \ominus a \oplus c$ eşitliği sağlanır [3].

İspat

Herhangi $a, b, c \in G$ elemanlarını alalım. Her $a, b \in G$ için $g[a, b]$ otomorfizması bir homomorfizma olduğundan, $g[\ominus a, b](\ominus b \oplus c) = g[\ominus a, b](\ominus b) \oplus g[\ominus a, b](c)$ olup, $(\ominus a \oplus b) \oplus g[\ominus a, b](\ominus b \oplus c) = (\ominus a \oplus b) \oplus \{g[\ominus a, b](\ominus b) \oplus g[\ominus a, b](c)\} \dots$ (VIII) eşitliği elde edilir. Teorem 3.5 (12) den $g[\ominus a, b](\ominus b) = \ominus g[\ominus a, b](b)$ olup, sol dönerli birleşme özelliği uygulandıktan sonra (VIII) eşitliği;

$$(\ominus a \oplus b) \oplus g[\ominus a, b](\ominus b \oplus c) = \{(\ominus a \oplus b) \oplus (\ominus g[\ominus a, b](b))\} \oplus g[\ominus a \oplus b, \ominus g[\ominus a, b](b)] (g[\ominus a, b](c))$$

olur. Teorem 3.8. (2) de (VI) dan $g[\ominus a \oplus b, g[\ominus a, b](\ominus b)] (g[\ominus a, b](c)) = \text{dir}$. Böylece (VIII) eşitliği $(\ominus a \oplus b) \oplus g[\ominus a, b](\ominus b \oplus c) = \{(\ominus a \oplus b) \oplus g[\ominus a, b](\ominus b)\} \oplus c$ halini alır. Burada sağ taraftaki parantez içine sol dönerli birleşme özelliği uygulandıktan sonra $((\ominus a \oplus b) \oplus g[\ominus a, b](\ominus b)) = (\ominus a) \oplus (b \oplus (\ominus b))$ olup, $b \oplus (\ominus b) = 0$ olduğundan $((\ominus a \oplus b) \oplus g[\ominus a, b](\ominus b)) = (\ominus a) \oplus 0 = (\ominus a)$ elde edilir. Son durumda (VIII) eşitliği; $(\ominus a \oplus b) \oplus g[\ominus a, b](\ominus b \oplus c) = (\ominus a) \oplus c$ olur.

3.10. Tanım

$(G, \oplus)$ bir dönerli grup olsun. Her $a, b \in G$ için; $a \boxplus b = a \oplus g[a, \ominus b](b)$ biçiminde tanımlanan $\boxplus$ işlemine $(G, \oplus)$ dönerli grubu için eş işlemi denir. $(G, \boxplus)$ magması da eş dönerli grup olarak adlandırılır ve $(G, \oplus)$ dönerli grubuyla ilişkili eş dönerli grup denir [3].

$\boxminus$ işlemi, her $a, b \in G$ için $a \boxminus b = a \boxplus (\ominus b)$ biçiminde tanımlanmaktadır. O halde, $a \boxminus b = a \boxplus (\ominus b) = a \oplus g[a, \ominus(\ominus b)](\ominus b) = a \oplus g[a, b](\ominus b)$ olur [3].

3.11. Teorem

$(G, \oplus)$ bir dönerli grup ve $(G, \boxplus)$ ikilisi $(G, \oplus)$ dönerli grubu ile ilişkili eş dönerli grubu olsun. Her $x, y \in G$ için; $x \oplus y = x \boxplus g[x, y](y)$ eşitliği sağlanır [3].

İspat

$x, y \in G$ alalım. Tanım 3.10 dan $x \boxplus g[x, y](y) = x \oplus g[x, \ominus g[x, y](y)](g[x, y](y))$ olur.

Teorem 3.8.(2) den $g[x, \ominus g[x, y](y)](g[x, y](y)) = I(y) = y$ olur. Buradan;

$x \boxplus g[x, y](y) = x \oplus y$ bulunur.

Dönerli gruplarda, gruplardan farklı olan ve $\boxplus$ eş işleminden yararlanarak elde edilen kısaltma kuralları şöyledir [3,4].

$(G, \oplus)$ bir dönerli grup olmak üzere; her $x, y, z \in G$ için aşağıdaki özellikler sağlanır [3].

$$(1) (\ominus x) \oplus (x \oplus y) = y \quad (\text{Sol Sadeleştirme Kuralı})$$

$$(2) (x \oplus (\ominus y)) \oplus g[x, \ominus y](y) = (x \oplus (\ominus y)) \boxplus y = x \quad (1. \text{Sağ Sadeleştirme Kuralı})$$

$$(3) x \oplus g[x, y](\ominus y) \oplus y = (x \boxminus y) \oplus y = x \quad (2. \text{Sağ Sadeleştirme Kuralı})$$

3.12. Teorem

$(G, \oplus)$ bir dönerli grup olsun. $x \in G$ olmak üzere; her $a, b \in G$ için

$a \oplus x = b$ denkleminin bir tek çözümü vardır ve $x = \ominus a \oplus b$ dir.

$x \oplus a = b$ denkleminin bir tek çözümü vardır ve $x = b \boxminus a$ dir.

[3].

İspat

Herhangi $a, b \in G$ alalım. $a \oplus x = b$ denkleminde eşitliğin her iki yanına $\ominus a$ eklenirse $\ominus a \oplus (a \oplus x) = \ominus a \oplus b$ olur ve Teorem 3.5 (9) dan $\ominus a \oplus (a \oplus x) = x$ olur. Böylece $x = \ominus a \oplus b$ bulunur. O halde $\ominus a \oplus b \in G$ elemanı $a \oplus x = b$ denkleminin bir çözümüdür.

Şimdi de $x \oplus a = b$ denkleminin bir çözümünü bulalım. $x = x \oplus 0$ eşitliği $0 = a \oplus (\ominus a)$ için yeniden yazılırsa $x = x \oplus a \oplus (\ominus a)$ olur. Eşitliğin sağ tarafında sol dönerli birleşme özelliği uygulanırsa; $x = (x \oplus a) \oplus g[x,a](\ominus a)$ olur. Burada sol döngü özelliğinden $g[x,a](\ominus a) = g[x \oplus a, a](\ominus a)$ dir. Böylece eşitlik $x = (x \oplus a) \oplus g[x \oplus a, a](\ominus a)$ halini alır. $x \oplus a = b$ olduğundan, eşitlik $x = b \oplus g[b,a](\ominus a)$ olup $(G, \oplus)$ dönerli grubu için Tanım 3.10 da verilen eş işlem den $x = b \boxminus a$ olur. Böylece bu denklemlerin bir çözümü vardır. $(G, \oplus)$ bir dönerli grubu aynı zamanda bir döngü olduğundan denklemlerin bir tek çözümü vardır [3].

3.13. Teorem

$(G, \oplus)$ bir dönerli grup ve $(G, \boxplus)$ magması $(G, \oplus)$ dönerli grubuyla ilişkili eş dönerli grup olsun. Bu durumda $(G, \oplus)$ nin birim elemanı 0, $(G, \boxplus)$ magmasının da birim elemanıdır. Buna ek olarak $(G, \boxplus)$ nin herhangi bir a elemanının tersi $\boxminus a$, $(G, \oplus)$ nin a elemanının tersi olan $\ominus a$ ya eşittir. Yani; $\boxminus a = \ominus a$ dir [3].

İspat

Tanım 3.10 dan $a \boxplus 0 = a \oplus g[a,0](0)$ dır. Teorem 3.5.(13) den $g[a,0](0) = I(0) = 0$ olur. Buradan $a \boxplus 0 = a \oplus 0 = a$ dır. Benzer şekilde $0 \boxplus a = 0 \oplus g[0,a](a) = a$ dır. Böylece $(G, \boxplus)$ nin bir sağ ve sol birim elemanı $(G, \oplus)$ nin birim elemanına eşittir. $(G, \oplus)$ nin bir tek sağ ve bir tek sol birimi var ve bunlar birbirine eşit olduğundan, $(G, \oplus)$ nin birim elemanı ile $(G, \boxplus)$ nin birim elemanları eşit olup, 0 dır.

Şimdi benzer işlemleri ters eleman için yapalım. $(G, \boxplus)$ eş dönerli grubundan herhangi bir a elemanı alalım. a nın tersinin $(\ominus a)$ olduğunu görelim. Tanım 3.10 dan; eş işlem kuralından $a \boxplus (\ominus a) = a \oplus g[a,a](\ominus a)$ dir. Teorem 3.5 (4) den $g[a,a] = I$ birim otomorfizma olduğu için $g[a,a](\ominus a) = \ominus a$ dir. Öyleyse $a \boxplus (\ominus a) = a \oplus (\ominus a) = 0$ olup, $\ominus a, \boxplus$ işlemine göre a nın bir sağ tersidir. Benzer şekilde $(\ominus a) \boxplus a = 0$ dır. $\ominus a, \boxplus$ işlemine göre a nın bir sol tersidir. $(G, \boxplus)$ nin a elemanının sağ ve sol tersi $(G, \oplus)$ nin a elemanının sol tersi $\ominus a$ dır. $(G, \oplus)$ nin a elemanının sol tersi bir tek olduğundan $(G, \boxplus)$ nin a elemanının sağ ve sol tersi de bir tektir. Öyleyse $(G, \boxplus)$ nin herhangi a elemanının tersi $\boxminus a = \ominus a =$ olup, her $a, b \in (G, \boxplus)$ için $a \boxplus (\ominus b) = a \boxplus (\boxminus b) = a \boxminus b$ dir.

Elemanları G de tanımlı bütün otomorfizmaların kümesi $\text{Aut}(G, \oplus)$ fonksiyonların bileşke işlemine göre bir gruptur, bu gruba $(G, \oplus)$ nin otomorfizma grubu denir. $f, g \in \text{Aut}(G, \oplus)$

olmak üzere $f \circ g$ yerine $f g$ biçiminde gösterilecektir [3].

3.14. Teorem

$(G, \oplus)$ bir dönerli grup ve $\text{Aut}(G, \oplus)$, G nin otomorfizma grubu olsun. Her $a, b \in G$ ve her $A \in \text{Aut}(G, \oplus)$ otomorfizması için $A(g[a,b]) = g[A(a), A(b)]$ A eşitliği sağlanır [3].

İspat

$a, b, x \in G$ ve $A \in \text{Aut}(G, \oplus)$ alalım. Buradan $A(a), A(b), A g[a,b](x) \in G$ olup, A homomorfizma olduğundan $\{A(a) \oplus A(b)\} \oplus A g[a,b](x) = A\{(a \oplus b) \oplus g[a,b](x)\} \dots (*)$ eşitliği sağlanır. Bu eşitliğin sağ tarafındaki parantezin içinde sol dönerli birleşme özelliği uygulanırsa, $(a \oplus b) \oplus g[a,b](x) = a \oplus (b \oplus x)$ olur. Böylece eşitliğin yeni durumu; $\{A(a) \oplus A(b)\} \oplus A(g[a,b]) x = A(a \oplus (b \oplus x))$ halini alır. Sağ taraf, A otomorfizması bir homomorfizma olduğu için $A(a \oplus (b \oplus x)) = A(a) \oplus A(b \oplus x)$ olup, buradan $A(a \oplus (b \oplus x)) = A(a) \oplus (A(b) \oplus A(x))$ elde edilir. Burada sağ tarafta sol dönerli birleşme özelliği uygulanırsa, $A(a \oplus (b \oplus x)) = (A(a) \oplus A(b)) \oplus g[A(a), A(b)] A(x)$ olup, $(*)$ eşitliği; $(A(a) \oplus A(b)) \oplus A g[a,b](x) = (A(a) \oplus A(b)) \oplus g[A(a), A(b)] A(x)$ halini alır. Burada Teorem 3.5.(1) den $A g[a,b] x = g[A(a), A(b)] A(x)$ bulunur. Eşitlik her $x \in G$ için sağlandığından, $A g[a,b] = g[A(a), A(b)] A$ elde edilir.

3.15. Teorem

$(G, \oplus)$ bir dönerli grup ve $(G, \boxplus), (G, \oplus)$ dönerli grubuyla ilişkili eş dönerli grup olsun. Bu durumda $(G, \oplus)$ dönerli grubuyla, kendisiyle ilişkili $(G, \boxplus)$ eş dönerli grubu aynı otomorfizma grubuna sahiptir. Yani, $\text{Aut}(G, \oplus) = \text{Aut}(G, \boxplus)$ dir [3].

İspat

$\text{Aut}(G, \oplus)$ ile $\text{Aut}(G, \boxplus)$ otomorfizma gruplarının elemanları; G üzerinde tanımlı bütün otomorfizmalar olduğu için bu grupların elemanları aynı olup, her $f \in \text{Aut}(G, \oplus)$ için $fI = f$ olacak biçimde $I \in \text{Aut}(G, \oplus)$ birim otomorfizması ve $f^{-1}f = I$ olacak biçimde f nin bir sol tersi $f^{-1} \in \text{Aut}(G, \oplus)$ vardır. $\text{Aut}(G, \boxplus)$ otomorfizma grubu $\text{Aut}(G, \oplus)$ otomorfizma grubuyla aynı birim elemana sahip olup, her $g \in \text{Aut}(G, \boxplus)$ otomorfizmasının bir sol tersi $g^{-1} \in \text{Aut}(G, \boxplus)$ vardır.

Şimdi; $\text{Aut}(G, \oplus) \subseteq \text{Aut}(G, \boxplus)$ ve $\text{Aut}(G, \boxplus) \subseteq \text{Aut}(G, \oplus)$ olduklarını görelim. Önce $\text{Aut}(G, \oplus) \subseteq \text{Aut}(G, \boxplus)$ olduğunu görelim. Herhangi bir $f \in \text{Aut}(G, \oplus)$ ve herhangi $a, b \in G$ alalım. Tanım 3.10 dan $f(a \boxplus b) = f(a \oplus g[a, \ominus b]b)$ olur. f nin homomorfizma olmasını sağ tarafta uygularsak, $f(a \oplus g[a, \ominus b]b) = f(a) \oplus f(g[a, \ominus b]b)$ olur. Burada Teorem 3.14 den $f(g[a, \ominus b]) = g[f(a), \ominus f(b)]f(b)$ olup, $f(a \boxplus b) = f(a \oplus g[a, \ominus b]b) = f(a) \oplus g[f(a), \ominus f(b)]f(b)$ elde edilir. Sağ taraf Tanım 3.10 dan $f(a) \oplus g[f(a), \ominus f(b)]f(b) = f(a) \boxplus f(b)$ olur. Böylece; $f(a \boxplus b) = f(a) \boxplus f(b)$ olup, $\text{Aut}(G, \oplus) \subseteq \text{Aut}(G, \boxplus)$ elde edilir.

Şimdi $\text{Aut}(G, \boxplus) \subseteq \text{Aut}(G, \oplus)$ olduğunu görelim. $f \in \text{Aut}(G, \boxplus)$ ve $a, b \in G$ alalım. $f(a \oplus b) = f(a) \oplus f(b)$ olduğunu görelim. Bunun için önce $f(a \boxminus b) = f(a) \boxminus f(b)$ eşitliğinin sağlandığını görelim. $0 \oplus f(0) = f(0)$ dır. $0 = 0 \boxplus 0$ olduğu için $f(0) = f(0 \boxplus 0)$ olup, f fonksiyonu homomorfizma olduğundan, $f(0 \boxplus 0) = f(0) \boxplus f(0)$ olup, Tanım 3.10 dan; $f(0) \boxplus f(0) = f(0) \oplus f(0)$ elde edilir. Böylece, $f(0) = f(0) \boxplus f(0) = f(0) \oplus f(0)$ olup, $f(0) = 0$ bulunur. $a \in (G, \boxplus)$ nin tersi, $\boxminus a$ olduğundan, $a \boxplus (\boxminus a) = a \boxminus a = 0$ dır. Böylece; $0 = f(0) = f(a \boxminus a) = f(a \boxplus (\boxminus a))$ olur. f fonksiyonu bir homomorfizma olduğundan, $f(a \boxplus (\boxminus a)) = f(a) \boxplus f(\boxminus a)$ olup, $0 = f(a) \boxplus f(\boxminus a)$ bulunur. Buna göre $f(a)$ elemanının tersi $f(\boxminus a)$ dır. $f(a) \in (G, \boxplus)$ nin tersi Teorem 3.13 den $\boxminus f(a)$ olduğundan ve $(G, \boxplus)$

eş dönerli grubunun her elemanının tersi tek olduğu için $f(\boxminus a) = \boxminus f(a)$ elde edilir. $a \boxminus b = a \boxplus (\boxminus b)$ olduğu için $f(a \boxminus b) = f(a \boxplus (\boxminus b))$ olup, f homomorfizma olduğundan $f(a \boxplus (\boxminus b)) = f(a) \boxplus f(\boxminus b)$ olur. $f(\boxminus b) = \boxminus f(b)$ olduğundan, $f(a) \boxplus f(\boxminus b) = f(a) \boxplus (\boxminus f(b)) = f(a) \boxminus f(b)$ olur. Böylece, $f(a \boxminus b) = f(a) \boxminus f(b) \dots (*)$ elde edilir. Şimdi; $f(a \oplus b) = f(a) \oplus f(b)$ olduğunu görelim. 1. Sağ kısaltma kuralından $a = (a \oplus b) \boxminus b$ olup, $f(a) = f((a \oplus b) \boxminus b)$ dir. f homomorfizma olduğundan ve $(*)$ dan sağ taraf $f((a \oplus b) \boxminus b) = f(a \oplus b) \boxminus f(b)$ dir. Böylece $f(a) = f(a \oplus b) \boxminus f(b)$ olur. Burada her iki tarafa $f(b)$ eklenirse, $f(a) \oplus f(b) = (f(a \oplus b) \boxminus f(b)) \oplus f(b)$ olur. 2. sağ kısaltma kuralının uygulanmasının ardından $(f(a \oplus b) \boxminus f(b)) \oplus f(b) = f(a \oplus b)$ olur. Böylece; $f(a) \oplus f(b) = f(a \oplus b)$ elde edilir ve $\text{Aut}(G, \boxplus) \subseteq \text{Aut}(G, \oplus)$ olur.

Dönerli gruplar, grup teorisinin tamamlayıcı bir parçasıdır. Her dönerli grup, dönerli yarı direkt çarpım grubu adıyla gruplara genişletilebilir [3].

Dönerli Yarı Direkt Çarpım Gruplarını inceleyelim. Dönerli Yarı Direkt Çarpımı; grup teorisindeki yarı direkt çarpımın doğal bir genelleştirmesidir [3].

3.16. Tanım

$(G, \oplus)$ bir dönerli grup olsun. Her $a, b \in G$ için G nin bütün $g[a, b]$ otomorfizmalarını içeren $\text{Aut}(G, \oplus)$ grubunun herhangi bir alt grubuna bir dönerli otomorfizma grubu denir. $\text{Auto}(G, \oplus)$ ile gösterilir [3].

3.17. Tanım

G bir dönerli grup ve $\text{Aut}_0(G, \oplus)$ G nin bir dönerli otomorfizma grubu olmak üzere her $x, y \in G$ ve her $X, Y \in \text{Aut}_0(G, \oplus)$ için $(x, X), (y, Y) \in G \times \text{Aut}_0(G, \oplus)$ olmak üzere üzerinde $(x, X)(y, Y) = (x \oplus Xy, g[x, Xy] X Y)$ ikili işlem tanımlı olan $G \times \text{Aut}_0(G, \oplus)$ kümesine dönerli yarı direkt çarpımı denir [3].

Dönerli Yarı Direkt Çarpımının bir grup olduğunu Teorem 3.18 de görelim.

3.18. Teorem

$(G, \oplus)$ bir dönerli grup ve $\text{Aut}_0(G, \oplus)$ G nin bir dönerli otomorfizma grubu olsun. Bu durumda Tanım 3.17 de tanımlanan ikili işlem ile $G \times \text{Aut}_0(G, \oplus)$ bir gruptur [3].

İspat

Herhangi $A, B \in \text{Aut}_0(G, \oplus)$ ve $a, b \in G$ alalım. $A(b) \in G$ olup, $g[a, A(b)] \in \text{Aut}(G, \oplus)$ dir. $\text{Aut}_0(G, \oplus), \text{Aut}(G, \oplus)$ grubunun bir alt grubu olduğundan $g[a, A(b)]AB \in \text{Aut}_0(G, \oplus)$ dir. Böylece $(a, A)(b, B) = (a \oplus A(b), g[a, A(b)] AB)$ ikili işlemi kapalıdır.

(i) Birim eleman özelliği: $a, b \in G$ ve $A, B \in \text{Aut}_0(G, \oplus)$ alalım.

$(a, A)(b, B) = (a \oplus A(b), g[a, A(b)] AB) = (a, A)$ olacak şekilde $(b, B) \in G \times \text{Aut}_0(G, \oplus)$ elemanının var olup, $b = 0$ ve $B = I$ olur. Böylece $(x, X) = (0, I) \in G \times \text{Aut}_0(G, \oplus)$ dir.

(ii) Ters eleman özelliği: A^{-1} , A otomorfizmasının tersi ve $a \in G$ olmak üzere;

$(a, A) \in G \times \text{Aut}_0(G, \oplus)$ elemanın tersi; $(\ominus A^{-1}a, A^{-1})$ dır. Şöyle ki;

$(a, A)(\ominus A^{-1}a, A^{-1}) = (\ominus A^{-1}a \oplus A^{-1}a, g[\ominus A^{-1}a, A^{-1}a] A^{-1}A) = (0, I)$ dır.

iii) Birleşme özelliği: $(a_1, A_1), (a_2, A_2), (a_3, A_3) \in G \times \text{Aut}_0(G, \oplus)$ alalım. İkili işlem den, $(a_1, A_1) ((a_2, A_2) (a_3, A_3)) = (a_1, A_1)(a_2 \oplus A_2 a_3, g[a_2, A_2 a_3] A_2 A_3)$ olur. Sağ tarafta ikili işlem tekrar uygulandıktan sonra,

$$(a_1, A_1) ((a_2, A_2) (a_3, A_3)) = (a_1 \oplus A_1(a_2 \oplus A_2 a_3), g[a_1, A_1(a_2 \oplus A_2 a_3)] A_1 g[a_2, A_2 a_3] A_2 A_3)$$

elde edilir. A_1 otomorfizması bir homomorfizma olduğundan,

$$a_1 \oplus A_1(a_2 \oplus A_2 a_3) = a_1 \oplus (A_1 a_2 \oplus A_1 A_2 a_3) \text{ olup, Teorem 3.14 den;}$$

$$g[a_1, A_1(a_2 \oplus A_2 a_3)] A_1 g[a_2, A_2 a_3] A_2 A_3 = g[a_1, A_1(a_2 \oplus A_2 a_3)] g[A_1 a_2, A_1 A_2 a_3] A_1 A_2 A_3$$

bulunur. Böylece,

$$(a_1, A_1) ((a_2, A_2) (a_3, A_3)) = (a_1 \oplus (A_1 a_2 \oplus A_1 A_2 a_3),$$

$$g[a_1, A_1(a_2 \oplus A_2 a_3)] g[A_1 a_2, A_1 A_2 a_3] A_1 A_2 A_3) \dots (*)$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde, ikili işlem den

$$((a_1, A_1) (a_2, A_2)) (a_3, A_3) = (a_1 \oplus A_1 a_2, g[a_1, A_1 a_2] A_1 A_2) (a_3, A_3)$$

olur. Tekrar ikili işlem uygulandıktan sonra,

$$((a_1, A_1) (a_2, A_2)) (a_3, A_3) = ((a_1 \oplus A_1 a_2) \oplus g[a_1, A_1 a_2] A_1 A_2 a_3,$$

$$g[a_1 \oplus A_1 a_2, g[a_1, A_2 a_2] A_1 A_2 a_3] (g[a_1, A_1 a_2] A_1 A_2 A_3)) \dots (**)$$

eşitliği elde edilir. $a_1 = a, A_1 a_2 = b, A_1 A_2 a_3 = c$ için (*) ve (**) eşitlikleri yeniden yazılırsa

$$(*) \text{ eşitliği; } (a_1, A_1) ((a_2, A_2) (a_3, A_3)) = (a \oplus (b \oplus c), g[a, b \oplus c] (g[b, c] A_1 A_2 A_3))$$

olur ve (**) eşitliği;

$$((a_1, A_1) (a_2, A_2) (a_3, A_3)) = ((a \oplus b) \oplus g[a, b] c, g[a \oplus b, g[a, b] c] (g[a, b] A_1 A_2 A_3))$$

halini alırSol dönerli birleşme özelliğinden, $(a \oplus b) \oplus g[a, b] c = a \oplus (b \oplus c)$ olduğundan

ve Teorem 3.8 (1) den $g[a, b \oplus c] g[b, c] = g[a \oplus b, g[a, b] c] g[a, b]$ olduğundan; (*) ve (**) eşitlikleri birbirbirine eşittir. Böylece birleşme özelliği sağlanır.

4. TOPOLOJİK GRUPLAR

Bu bölüm topolojik gruplara ayrılmıştır. Topolojik grupların bazı cebirsel ve topolojik özellikleri irdelenmiştir. Bir topolojik grup üzerinde tanımlanan bazı fonksiyonların homeomorfizm olma durumları açıklanmış, bir topolojik grubun açık, kapalı, kompakt ya da bağ- lantılı olan alt kümelerinin sürekli fonksiyon altında topolojik özelliklerini koruyup, koru- madıklarına, topolojik grubun ayırma aksiyomlarına, bir topolojik grubun T_0 ve T_3 – uzayı olmasının eşdeğer olduğuna yer verilmiş ve Hausdorff topolojik grubun tamamen düzenli olma durumu incelenmiştir. Bir topolojik grubun metrikleştirilebilir ve birinci sayılabilir olması arasındaki ilişkiyi açıklayan Birkhoff-Kakutani teoremine ve topolojik grupların Kartezyen çarpımlarının da bir topolojik grup olma durumuna ve üzerindeki topolojiye yer verilmiştir.

4.1. Tanım

$(S, \oplus)$ bir yarı grup ve (S, τ) bir topolojik uzay olsun. Her $a \in S$ için;

$$R_a : S \rightarrow S$$

$$x \rightarrow R_a(x) = x \oplus a$$

dönüşümü sürekli ise $(S, \oplus, \tau)$ üçlüsüne bir sağ topolojik yarı grup denir [5].

Benzer şekilde; her $a \in S$ için,

$$L_a : S \rightarrow S, x \rightarrow L_a(x) = a \oplus x$$

dönüşümü sürekliyse $(S, \oplus, \tau)$ üçlüsüne ise bir sol topolojik yarı grup denir [5].

Tanım 4.1 de verilen iki dönüşüm sırasıyla sağ ve sol öteleme dönüşümleridir.

4.2. Tanım

Hem sağ hem de sol topolojik yarı grup olan $(S, \oplus, \tau)$ üçlüsüne bir yarı topolojik yarı grup denir [5].

4.3. Tanım

$(S, \oplus)$ bir yarı grup ve (S, τ) bir topolojik uzay olsun. $S \times S$ kümesi çarpım topolojisi ile donatılsın. Eğer;

$$\begin{aligned} \oplus : S \times S &\rightarrow S \\ (x,y) &\rightarrow x \oplus y \end{aligned}$$

fonksiyonu sürekli ise $(S, \oplus, \tau)$ üçlüsüne bir topolojik yarı grup denir [5].

4.4. Tanım

$(S, \oplus, \tau)$ üçlüsü bir sağ (sol) topolojik yarı grup olsun. S bir grup ise $(S, \oplus, \tau)$ üçlüsüne bir sağ (sol) topolojik grup denir [5].

Sağ (sol) topolojik grubun tanımından yararlanarak yarı topolojik grubun tanımı şöyle verilecektir.

4.5. Tanım

$(S, \oplus)$ bir grup ve (S, τ) bir topolojik uzay olmak üzere, eğer her $a \in S$ için,

$R_a : S \rightarrow S, x \rightarrow R_a(x) = x \oplus a$ sağ öteleme dönüşümü ile $R_a : S \rightarrow S, x \rightarrow R_a(x) = a \oplus x$ sol öteleme dönüşümü sürekli ise $(S, \oplus, \tau)$ üçlüsüne bir yarı topolojik grup denir [9].

4.6. Örnek

$\alpha \notin \mathbb{R}$ olmak üzere $S = \mathbb{R} \cup \{\alpha\}$ kümesi reel sayılar kümesinin tek nokta kompaktlaşması olsun. S kümesi üzerindeki ikili işlem

$$\begin{aligned} f : S \times S &\rightarrow S \\ (x,y) &\rightarrow f(x,y) = \begin{cases} x + y, & x, y \in \mathbb{R} \\ \alpha, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlansın. Bu dönüşümle S bir yarı topolojik yarı gruptur. f fonksiyonu (α, α) noktasında sürekli olmadığı için topolojik yarı grup değildir. f fonksiyonunun (α, α) noktasında sürekli olmadığını görelim. Kabul edelim ki, f fonksiyonunun (α, α) noktasında sürekli olsun. Öyleyse $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesi, $\mathbb{R}$ nin bir kompakt alt kümesi olup, α elemanın $\{\alpha\} \cup (\mathbb{R} \setminus [0,1])$ komşuluğu için, $f((\{\alpha\} \cup \mathbb{R} \setminus F_1) \times (\{\alpha\} \cup \mathbb{R} \setminus F_2)) \subseteq \{\alpha\} \cup (\mathbb{R} \setminus [0,1]) \dots (*)$ olacak biçimde $\mathbb{R}$ nin F_1 ve F_2 kompakt alt kümeleri var olup, $F_1 \subseteq [a,b]$ ve $F_2 \subseteq [c,d]$ olacak biçimde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ vardır. $x = \max \{|a|, |b|, |c|, |d|\} + 1$ denirse, $|a| < x$ olup, $-x < a < x$ olur ve buradan $-x \notin [a,b]$ elde edilir. Böylece $-x \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$ bulunur. Benzer şekilde $|d| < x$ olup $-x < d < x$ olur. Öyleyse $x \notin [c,d]$ olup, buradan $x \in \mathbb{R} \setminus [c,d]$ bulunur. (*) dan; $f(-x, x) \subseteq f((\{\alpha\} \cup \mathbb{R} \setminus F_1) \times (\{\alpha\} \cup \mathbb{R} \setminus F_2)) \subseteq \{\alpha\} \cup (\mathbb{R} \setminus [0,1])$ olup, $f(-x, x) = x + x = 0 \in \{\alpha\} \cup (\mathbb{R} \setminus [0,1])$ bulunur. Halbuki $0 \notin \{\alpha\} \cup (\mathbb{R} \setminus [0,1])$ dir. Öyleyse kabulümüz yanlış olup, f fonksiyonu (α, α) noktasında sürekli değildir [5].

4.7. Tanım

$(S, \oplus)$ bir grup, (S, τ) bir topolojik uzay olsun. $S \times S$ kümesi çarpım topolojisi ile donatılsın.

Eğer;

$$\oplus : S \times S \rightarrow S$$

$$(x, y) \rightarrow x \oplus y$$

dönüşümü sürekli ise S uzayına bir paratopolojik grup denir [5].

Tanım 4.3 ten görüleceği gibi her paratopolojik grup bir topolojik yarı gruptur.

4.8. Örnek

Reel sayılar kümesi üzerinde tabanı $\beta = \{ [a, b) : a \leq x < b \}$ olan topoloji τ olmak üzere $(\mathbb{R}, +, \tau)$ üçlüsü bir paratopolojik gruptur. Şöyle ki; $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli. Fakat, $-: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ters dönüşüm fonksiyonu sürekli değildir. Çünkü $[0, 1)$ aralığı bu topolojiye göre açık olmasına rağmen, $[0, 1)$ aralığının $-: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü altındaki ön görüntüsü $(-1, 0]$ olup, açık değildir. Çünkü $(-1, 0]$ aralığının altına β tabanından 0 ı içeren hiçbir küme yerleştirilemez [5].

4.9. Tanım

$(S, \oplus, \tau)$ üçlüsü bir yarı topolojik grup olsun. Eğer S nin her elemanını tersine eşleyen

$$\ominus : S \rightarrow S; x \rightarrow \ominus x$$

dönüşümü sürekli ise S uzayına bir quasitopolojik grup denir [5].

Şimdi topolojik grup tanımını verelim.

4.10. Tanım

$(G, \oplus)$ bir grup ve (G, τ) bir topolojik uzay olmak üzere

$$(i) \quad \oplus : G \times G \rightarrow G$$

$$(a, b) \rightarrow a \oplus b$$

$$(ii) \quad \ominus : G \rightarrow G$$

$$a \rightarrow \ominus a$$

dönüşümleri sürekli ise $(G, \oplus, \tau)$ üçlüsüne bir topolojik grup denir [5,9,10].

Bu dönüşümlerin sürekliliği $N(x)$, x noktasının komşuluklar ailesi olmak üzere komşuluklar yardımıyla şöyle ifade edilebilmektedir [9].

(i) deki dönüşümün sürekli olması için gerek ve yeter koşul $x, y \in G$ olmak üzere $x \oplus y$ elemanının her W komşuluğu için $U \oplus V \subseteq W$ olacak biçimde bir $U \in N(x)$ ve $V \in N(y)$ komşuluklarının var olmasıdır. Burada $U \oplus V = \{ u \oplus v : u \in U, v \in V \}$ dir.

(ii) deki dönüşümün sürekli olması için gerek ve yeter koşul $x \in G$ olmak üzere Θx elemanının her W komşuluğu için $\Theta U \subseteq W$ olacak biçimde bir $U \in N(x)$ komşuluğunun var olmasıdır. Burada $\Theta U = \{\Theta x : x \in U\}$ dir.

Topolojik grup tanımı şöyle de verilebilir.

$(G, \oplus)$ bir grup ve (G, τ) bir topolojik uzay olmak üzere, eğer

$$\omega : G \times G \rightarrow G$$

$$(a, b) \rightarrow \omega(a, b) = a \oplus (\Theta b)$$

dönüşümü sürekli ise $(G, \oplus, \tau)$ üçlüsüne bir topolojik grup denir.

Şimdi bazı örnekler verelim.

4.11. Örnek

G bir grup olsun. G üzerinde ayrık topoloji var olsun. Buna göre

$$\omega : G \times G \rightarrow G$$

$$(a, b) \rightarrow a \oplus (\Theta b)$$

fonksiyonu süreklidir. Böylece $(G, \oplus, \tau)$ üçlüsü bir topolojik gruptur [6,10].

G ayrık olmayan topoloji ile donatıldığında da $\omega : G \times G \rightarrow G; (a, b) \rightarrow a \oplus (\Theta b)$ fonksiyonu sürekli olup, $(G, \oplus, \tau)$ üçlüsü bir topolojik grup olur [6].

4.12. Örnek

Reel sayılar kümesi üzerindeki bilinen toplama işlemi ile bir gruptur. Reel sayılar kümesi adi (alışılmış) topoloji ile donatılsın. Buna göre

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a,b) &\rightarrow a - b \end{aligned}$$

fonksiyonu süreklidir. Böylece reel sayılar kümesi bir topolojik gruptur [10].

4.13. Teorem

G bir topolojik grup ve $a \in G$ olmak üzere aşağıdaki fonksiyonların her biri bir homeorfizmdir [5,9,10,11].

$$\begin{aligned} \text{i-)} \quad L_a : G &\rightarrow G \\ x &\rightarrow a \oplus x \quad (\text{sol öteleme dönüşümü}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii-)} \quad R_a : G &\rightarrow G \\ x &\rightarrow x \oplus a \quad (\text{sağ öteleme dönüşümü}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii-)} \quad h : G &\rightarrow G \\ x &\rightarrow \ominus x \quad (\text{ters dönüşüm}) \end{aligned}$$

İspat

Verilen fonksiyonların her birinin bire-bir, örten, sürekli ve tersinin de sürekli olduğunu görelim.

i-) Sol öteleme dönüşümü

$$L_a : G \rightarrow G$$

$$x \rightarrow a \oplus x$$

bire-birdir. Şöyle ki, $L_a(x_1) = L_a(x_2)$ eşitliğini sağlayan her $x_1, x_2 \in G$ için $a \oplus x_1 = a \oplus x_2$

eşitliğinde sol kısaltma uygulanarak $x_1 = x_2$ elde edilir.

Şimdi L_a fonksiyonunun örten olduğunu görelim. $y \in G$ alalım. $\ominus a \in G$ ve $y \in G$ olduğu için $(\ominus a) \oplus y \in G$ olur. $x = (\ominus a) \oplus y$ için $L_a(x) = a \oplus ((\ominus a) \oplus y) = (a \oplus (\ominus a)) \oplus y = y$ elde edilir. Böylece sol öteleme dönüşümü örtendir.

L_a fonksiyonu süreklidir. Şöyle ki, G topolojik grup olduğundan $\oplus : G \times G \rightarrow G$, $(x, y) \rightarrow x \oplus y$ süreklidir ve $L_a = \oplus|_{\{a\} \times G}$ olduğundan L_a süreklidir.

Son olarak L_a^{-1} fonksiyonun sürekliliğini görelim. L_a sol öteleme dönüşümü biyektif olduğu için L_a^{-1} fonksiyonu

$$L_a^{-1}: G \rightarrow G$$

$$x \rightarrow (\ominus a) \oplus x$$

fonksiyonudur. Öyleyse, $L_a^{-1} = L_{\ominus a}$ olduğundan L_a^{-1} süreklidir.

Böylece L_a sol öteleme dönüşümü biyektif, sürekli ve tersi de sürekli olduğundan homeomorfizmdir.

ii-) Sağ öteleme dönüşümünün de homeomorfizm olduğu benzer şekilde gösterilebilir.

iii-) Ters dönüşüm fonksiyonu

$$h : G \rightarrow G$$

$$x \rightarrow \ominus x$$

bire-birdir. Şöyle ki; $h(x_1) = h(x_2)$ eşitliğini sağlayan her $x_1, x_2 \in G$ için $\ominus x_1 = \ominus x_2$ eşitliğinden, G grup olduğundan her elemanın bir tek tersi olduğundan $x_1 = x_2$ elde edilir.

h fonksiyonu örtendir. Şöyle ki; $y \in G$ alalım. $\ominus y \in G$ olduğundan $x = \ominus y$ için $h(x) = y$ elde edilir. Böylece ters dönüşüm fonksiyonu örtendir.

G topolojik grup olduğundan ters dönüşüm fonksiyonu süreklidir. Ayrıca ters dönüşüm fonksiyonunun tersi $h^{-1}(x) = x^{-1} = \ominus x = h(x)$ olup, kendisine eşittir. Öyleyse tersi de süreklidir.

Böylece ters dönüşüm fonksiyonu homeomorfizmdir.

4.14. Teorem

G bir topolojik grup olsun. F ve U ; G nin sırasıyla kapalı ve açık alt kümeleri ve P herhangi bir küme olsun. Her $a \in G$ için aşağıdakiler gerçekleşir [5,9,11].

(1) $a \oplus F$, $F \oplus a$ ve $\ominus F$ kapalı kümelerdir.

(2) $U \oplus P$, $P \oplus U$ ve $\ominus U$ açık kümelerdir.

İspat

(1) G nin kapalı bir F alt kümesini alalım. Sol ve sağ öteleme ve ters dönüşüm fonksiyonları Homeomorfizm olduğundan F kapalı alt kümesinin bu homeomorfizmaların altındaki görüntüsü de kapalıdır. Yani; F nin sol öteleme fonksiyonu altındaki görüntüsü $a \oplus F$ F nin sağ öteleme fonksiyonu altındaki görüntüsü $F \oplus a$, F nin ters dönüşüm altındaki görüntüsü $F^{-1} = \ominus F$ kümesi kapalıdır.

(2) $U \oplus P = \bigcup_{p \in P} U \oplus p$ olup her $p \in P$ için $U \oplus p$ kümesi U açık alt kümesinin sağ öteleme dönüşümü;

$$R_p : G \rightarrow G$$

$$x \rightarrow x \oplus p$$

altındaki görüntüsüdür. Yani; $R_p(U) = U \oplus p$ dir. U açık küme ve sağ öteleme dönüşümü homeomorfizm olduğundan $U \oplus p$ açıktır. G bir topolojik uzay olduğundan açık kümelerin keyfi birleşimleri de açıktır. Dolayısıyla $\bigcup_{p \in P} U \oplus p$ kümesi açıktır. Benzer

şekilde $P \oplus U$ kümesinin de açık olduğu görülebilir.

4.15. Teorem

$(G, \oplus, \tau)$ bir topolojik grup ve $A, B \subseteq G$ olsun. Eğer, A ve B kompakt ise $A \oplus B$ kümesi de kompaktır [5].

İspat

A ve B kompakt alt kümeler olsun. Tychonoff teoremine göre $A \times B \subseteq G \times G$ kompaktır.

$A \times B$ kümesinin $\oplus: G \times G \rightarrow G, (x,y) \rightarrow x \oplus y$ fonksiyonu altındaki görüntüsü,

$\oplus(A \times B) = A \oplus B$ dir. $\oplus$ fonksiyonu sürekli olduğundan ve kompaktlık sürekli fonksiyonlar üzerinde korunduğundan $A \times B$ kompakt kümesinin toplam fonksiyonu altındaki ön görüntüsü olan $A \oplus B$ kümesi de kompaktır.

Benzer durum A ile B alt kümelerinin bağlantılı olmasında da geçerlidir. Yani; bir topolojik grubun A ve B alt kümeleri bağlantılı ise $A \oplus B$ kümesi de bağlantılıdır.

4.16. Teorem

G bir topolojik grup, 0 , G nin birim elemanı olmak üzere aşağıdakiler gerçekleşir [5,6,10].

(1) 0 in her U komşuluğu için $V \oplus V = 2V \subseteq U$ olacak biçimde 0 in en az bir V komşuluğu vardır.

(2) 0 in her U komşuluğu için $\ominus V \subseteq U$ olacak biçimden 0 in en az bir V komşuluğu vardır,

(3) 0 in her U komşuluğu ve her $x \in U$ için $V \oplus x \subseteq U$ olacak biçimde 0 in en az bir V komşuluğu vardır.

(4) 0 ın herhangi U ve V komşulukları için $W \subseteq U \cap V$ olacak biçimde 0 ın en az bir W komşuluğu vardır.

(5) 0 ın her U komşuluğu ve her $x \in G$ için $x \oplus V \oplus (\ominus x) \subseteq U$ olacak biçimde 0 ın en az bir V komşuluğu vardır.

İspat

(1) 0 ın herhangi bir U komşuluğunu alalım. $\oplus(0,0) = 0$ ve $\oplus : G \times G \rightarrow G$, $\oplus(x,y) = x \oplus y$ dönüşümü sürekli olduğundan $V_1 \oplus V_2 \subseteq U$ olacak biçimde $V_1, V_2 \in N(0)$ komşulukları vardır. $V_1 \cap V_2 = V$ denirse, V kümesi de 0 ın bir komşuluğu olup, $V \subseteq V_1$ ve $V \subseteq V_2$ dir. Öyleyse; $V \oplus V = 2V \subseteq V_1 \oplus V_2 \subseteq U$ olur.

(2) 0 ın herhangi bir U komşuluğunu alalım. $\ominus(0) = 0$ ve $\ominus : G \rightarrow G$, $x \rightarrow \ominus x$; ters dönüşüm fonksiyonu, sürekli olduğu için $\ominus V \subseteq U$ olacak biçimde 0 ın bir V komşuluğu vardır.

(3) G nin birimi 0 ın herhangi bir U komşuluğunu ve U nun herhangi bir x elemanını alalım. $L_x : G \rightarrow G$; $y \rightarrow x \oplus y$ sol öteleme dönüşümü olmak üzere; $L_x(0) = x \oplus 0 = x \in U$ dur. Sol öteleme dönüşümü sürekli olduğundan $f_x(V) = x \oplus V \subseteq U$ olacak biçimde bir $V \in N(0)$ vardır.

(4) Komşuluk aksiyomlarından sağlanır.

(5) G nin birim elemanı 0 ın herhangi bir U komşuluğunu ve G nin herhangi bir x elemanını alalım. $L_x : G \rightarrow G$; $y \rightarrow x \oplus y$ sol öteleme ve $R_x : G \rightarrow G$; $y \rightarrow y \oplus x$ sağ öteleme dönüşümü olmak üzere $R_{\ominus x}(L_x(0)) = R_{\ominus x}(x \oplus 0) = R_{\ominus x}(x) = x \oplus (\ominus x) = 0$ olduğu için $R_{\ominus x}(L_x(0)) \in U$ dur. Sol ve sağ sağ öteleme dönüşümleri sürekli olduğundan, bileşkeleri de sürekli olup, $R_{\ominus x}(L_x(V)) = x \oplus V \oplus (\ominus x) \subseteq U$ olacak biçimde bir $V \in N(0)$ vardır.

4.17. Tanım

X bir topolojik uzay olsun. Her $x, y \in X$ için $h_{x,y}(x) = y$ olacak biçimde bir $h_{x,y} : X \rightarrow X$ homeomorfizması varsa X uzayına homojen uzay denir [5,10].

4.18. Teorem

Topolojik gruplar homojen uzaylardır [5,6,7,10,11].

İspat

G bir topolojik grup ve $p, q \in G$ olsun. Teorem 4.13 den her $x \in G$ için L_x sol öteleme dönüşümü homeomorfizma olup, özel olarak $a = q \oplus (\ominus p)$ için $L_a : G \rightarrow G$, $L_a(y) = a \oplus y$ sol öteleme dönüşümü bir homeomorfizmadır ve $L_a(p) = a \oplus p = q \oplus (\ominus p) \oplus p = q$ olur.

4.19. Teorem

$(G, \oplus)$ bir topolojik grup olsun. 0 , G nin birim elemanı olmak üzere her $U \in \mathcal{N}(0)$ için $V \subseteq U$ olacak biçimde 0 in simetrik bir V komşuluğu vardır [5].

İspat

0 in herhangi bir U komşuluğunu alalım. $\ominus : G \rightarrow G$; ters dönüşümü homeomorfizma ve fizma ve $\ominus(0) = 0$ olduğundan $\ominus U$ kümesi de 0 in bir komşuluğudur. Böylece $\ominus U \cap U$ kümesi de 0 in bir komşuluğudur. $V = \ominus U \cap U$ diyelim. $\ominus V = U \cap \ominus U = V$ olduğundan V komşuluğu 0 in simetrik bir komşuluğudur ve $V \subseteq U$ dur.

Teorem 4.18 den topolojik gruplar homojen olduğundan topolojik gruplarda noktasal bir özellik incelenirken sadece birim eleman için bu özelliğin incelenmesi yeterlidir.

4.20. Sonuç

G bir topolojik grup ve G nin birim elemanı 0 olmak üzere; 0 ın her U komşuluğu için $W \oplus W \subseteq U$ olacak biçimde 0 ın simetrik bir W komşuluğu vardır [5].

İspat

0 ın herhangi bir U komşuluğunu alalım. Teorem 4.16 (1) den 0 ın her U komşuluğu için $V \oplus V = 2V \subseteq U$ olacak biçimde en az bir V komşuluğu vardır. Burada $V \cap (\ominus V) = W$ denirse $\ominus W = (\ominus V) \cap V = W$ olduğundan W simetrik bir kümedir. $V \cap (\ominus V) = W \subseteq V$ olduğundan, $W \oplus W = 2W \subseteq V \oplus V = 2V \subseteq U$ sağlanır. Böylece 0 ın her U komşuluğu için $W \oplus W \subseteq U$ olacak biçimde simetrik bir W komşuluğu vardır.

Teorem 4.27 de kullanılacak olan ve Sonuç 4.20 den yararlanarak elde edilen Sonuç 4.21 aşağıdaki gibi verilecektir.

4.21. Sonuç

G bir topolojik grup ve G nin birim elemanı 0 olmak üzere; 0 ın her U komşuluğu için; $W \oplus W \oplus W \subseteq U$ olacak biçimde 0 ın simetrik bir W komşuluğu vardır [5].

4.22. Teorem

$(G, \oplus, \tau)$ topolojik grubu birinci sayılabilir ise 0 ın her $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ için;

$B_{n+1} \oplus B_{n+1} \oplus B_{n+1} \subseteq B_n$ koşulunu sağlayan ve ögeleri simetrik olan simetrik bir $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ komşuluk tabanı vardır [6].

İspat

0 ın sayılabilir komşuluklar tabanı $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi olsun. $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ ailesinden yararlanarak 0 ın simetrik komşuluklarından oluşan sayılabilir bir komşuluk tabanı bulunabilir. Şöyle ki; her $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ için, $V_n = U_n \cap \Theta U_n$ ve $\Theta V_n = \Theta(U_n \cap \Theta U_n) = \Theta U_n \cap U_n = V_n$ olduğu için V_n kümesi simetrik bir kümedir. Her $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ için U_n ve ΘU_n kümeleri 0 ın bir komşuluğu olduğundan V_n kümesi de 0 ın bir komşuluğu olur. Böylece $\{V_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ ailesi 0 ın sayılabilir komşuluklarından oluşan sayılabilir bir komşuluk tabanıdır. Genelliği bozmadan $V_0 = G$ alabiliriz. Şimdi, $V_{i(n+1)} \oplus V_{i(n+1)} \oplus V_{i(n+1)} \subseteq V_{i(n)}$ olduğunu görelim. Bunun için $V_{i(n+1)} \oplus V_{i(n+1)} \oplus V_{i(n+1)} \subseteq V_{i(n)}$ koşulunu sağlayacak biçimde bir artan dizi $\{i(n) : n \in \mathbb{N}\}$ artan dizisini ele alalım. $i(1) = 1$ olsun. Teorem 4.16 dan $V_j \oplus V_j \subseteq V_{i(1)}$ olacak şekilde $j > i(1)$ pozitif j tam sayısı vardır. Benzer şekilde $V_{i(2)} \oplus V_{i(2)} \subseteq V_j$ için $i(2) > j$ pozitif tam sayısı vardır. $V_{i(2)} \oplus V_{i(2)} \oplus V_{i(2)} \subseteq V_{i(2)} \oplus V_j \subseteq V_j \oplus V_j \subseteq V_{i(1)}$ olur. Benzer şekilde $V_{i(3)} \oplus V_{i(3)} \oplus V_{i(3)} \subseteq V_{i(2)}$ olacak biçimde $i(3) > i(2)$ sayısı vardır. Öyleyse bu işlem $\{i(n) : n \in \mathbb{N}\}$ dizisi için $V_{i(n+1)} \oplus V_{i(n+1)} \oplus V_{i(n+1)} \subseteq V_{i(n)}$ şeklinde devam ettirilirse $n \in \mathbb{N}$ için $B_n = V_{i(n)}$ olarak alınır ve i_n artan bir indisi için 0 ın komşuluklarını içeren simetrik komşuluk tabanı $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ için $B_{n+1} \oplus B_{n+1} \oplus B_{n+1} \subseteq B_n$ bulunur.

4.23. Teorem

G bir sol topolojik grup ve $A \subseteq G$ olsun. Eğer, $\Theta : G \rightarrow G; x \rightarrow \Theta x$ dönüşümü sürekli ise 0 ın her U komşuluğu için $\bar{A} \subseteq A \oplus U$ olur [5].

İspat

0 ın herhangi bir U komşuluğunu alalım. $\Theta(0) = 0$ ve $\Theta : G \rightarrow G; x \rightarrow \Theta x$ dönüşümü sürekli olduğundan $\Theta V \subseteq U$ olacak biçimde $V \in N(0)$ vardır. $x \in \bar{A}$ alalım. $x \oplus V \in N(x)$ olduğu için $A \cap (x \oplus V) \neq \emptyset$ olur. Öyleyse $a \in A \cap (x \oplus V)$ olacak biçimde en az bir

$a \in A$ var olup $a = x \oplus b$ olacak biçimde $b \in V$ vardır. Buradan $x = a \oplus (\ominus b)$ olup, $x \in A \oplus (\ominus V)$ olur. $\ominus V \subseteq U$ olduğu için $x \in A \oplus (\ominus V) \subseteq A \oplus U$ bulunur. Böylece $\bar{A} \subseteq A \oplus U$ olur.

4.24. Teorem

$(G, \oplus)$ bir grup olsun. A, B ve C ; G nin alt kümeleri olmak üzere $(A \oplus B) \cap C = \emptyset$ olması için gerek ve yeter şart $A \cap (C \oplus (\ominus B)) = \emptyset$ olmasıdır [5].

İspat

$(A \oplus B) \cap C = \emptyset$ olsun. Kabul edelim ki; $A \cap (C \oplus (\ominus B)) \neq \emptyset$ olsun. Öyleyse en az bir $a \in A$ için $a = c \oplus (\ominus b)$ olacak biçimde $b \in B$ ve $c \in C$ vardır. Sol kısaltma kuralından $c = a \oplus b \in A \oplus B$ olur. Böylece $c \in C$ ve $c \in A \oplus B$ olduğundan $(A \oplus B) \cap C \neq \emptyset$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Öyleyse kabulümüz yanlış olup $A \cap (C \oplus (\ominus B)) = \emptyset$ dir.

Diğer tarafın ispatı benzer şekilde yapılabilir.

4.25. Teorem

G bir topolojik grup olsun. $F \subseteq G$ kompakt, $P \subseteq G$ kapalı alt küme ve $F \cap P = \emptyset$ olsun. Bu durumda $(V \oplus F) \cap P = \emptyset$ ve $(F \oplus V) \cap P = \emptyset$ olacak biçimde bir $V \in N(0)$ vardır [9].

İspat

Herhangi bir $x \in F$ alalım. $F \cap P = \emptyset$ olduğu için $x \in P^c$ dir. P kapalı olduğundan P^c açıktır. $x = x \oplus 0$ olup, $L_x : G \rightarrow G ; y \rightarrow x \oplus y$ fonksiyonu sol öteleme dönüşümü olmak üzere, $L_x(0) = x \oplus 0 = x \in P^c$ olur. L_x dönüşümü sürekli olduğundan, $L_x(V_x) \subseteq P^c$ olacak biçimde bir $V_x \in N(0)$ vardır. Böylece $(x \oplus V_x) \cap P = \emptyset$ dir. Her $x \in F$ için Teorem 4.16

den $W_x \oplus W_x \subseteq V_x \dots (*)$ olacak biçimde bir $W_x \in N(0)$ vardır ve $x = x \oplus 0 \in x \oplus W_x$ olduğundan $\{x \oplus W_x : x \in F\}$ ailesi F için bir açık örtüdür. F kompakt olduğundan; $S \subseteq F$ sonlu alt küme olmak üzere $F \subseteq \bigcup_{x \in S} W_x$ olur. $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ diyelim. Burada $F \subseteq S \oplus W_x$ dir. Şöyle ki; $y \in F$ aldığımızda $\{x \oplus W_x : x \in F\}$ ailesi F için bir örtü olduğundan bir $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ için, $y \in x_i \oplus W_{x_i} \subseteq S \oplus W_{x_i}$ olur. Her $x \in S$ için 0 ın W_x açık komşuluklarının arakesetine $\bigcap_{x \in S} W_x = V_1$ diyelim. V_1 kümesi de 0 ın komşuluğudur. Arakesit kümesi arakesiti alınan kümelerin alt kümesi olduğundan her $i \in I$ için $V_1 \subseteq W_{x_i}$ dir. Şimdi, $(F + V_1) \cap P = \emptyset$ olduğunu görelim. Bunun için her $y \in F$ için; $(y \oplus V_1) \cap P = \emptyset$ olduğunu görmemiz yeterlidir. $F \subseteq S \oplus W_x$ olduğundan $y = x_k \oplus w_0$ olacak biçimde $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere $w_0 \in W_{x_k}$ ve $x_k \in S$ elemanları vardır ve buradan $y \oplus V_1 \subseteq x_k \oplus w_0 \oplus V_1$ olur. Her $i \in I$ için $V_1 \subseteq W_{x_i}$ ve $w_0 \in W_{x_k}$ olduğunda; $x_k \oplus w_0 \oplus V_1 \subseteq x_k \oplus W_{x_k} \oplus W_{x_k}$ olur. $x_k \in F$ olduğu için $(*)$ dan $W_{x_k} \oplus W_{x_k} \subseteq V_{x_k}$ olup, $y \oplus V_1 \subseteq x_k \oplus V_{x_k}$ olur. Buradan, $x_k \oplus V_{x_k} = f_{x_k}(V_{x_k}) \subseteq P^c$ olduğu için; $y \oplus V_1 \subseteq y \oplus V_{x_k} \subseteq P^c$ bulunur. Böylece $(y \oplus V_1) \cap P = \emptyset$ olur. Öyleyse her $y \in F$ için $(F \oplus V_1) \cap P = \emptyset$ olur.

Benzer şekilde $V_2 = \bigcap_{i=1}^n W_{x_i}$ için $(V_2 \oplus F) \cap P = \emptyset$ olduğu görülebilir.

4.26. Teorem

G bir topolojik grup olsun. F, G nin kompakt bir alt kümesi ve P, G nin kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda $F \oplus P$ ve $P \oplus F$ kümeleri G içinde kapalıdır [5].

İspat

$F \oplus P$ kümesinin kapalı olduğunu görelim. Bunun için $(F \oplus P)^c$ kümesinin açık olduğunu görelim. Herhangi bir $y \in (F \oplus P)^c$ alalım. Öyleyse $(\ominus F \oplus y) \cap P = \emptyset$ olur. Şöyle ki;

$z \in (\ominus F \oplus y) \cap P$ olsun. Öyleyse $z \in P$ için $z = \ominus x \oplus y$ olacak biçimde bir $x \in F$ vardır. Buradan $x \oplus z = y$ olur. $x \in F$ ve $z \in P$ olduğundan $y \in F \oplus P$ olur. Bu ise $y \in (F \oplus P)^c$ olmasıyla çelişir. Öyleyse kabulümüz yanlış olup, $(\ominus F \oplus y) \cap P = \emptyset$ dir. $\ominus F \oplus y$ kompakttır. Şöyle ki; F kompakt kümesinin sürekli olan ters dönüşüm ve sağ öteleme fonksiyonlarının;

$$h : G \rightarrow G \quad R_y : G \rightarrow G$$

$$x \rightarrow \ominus x \quad x \rightarrow R_y(x) = x \oplus y$$

bileşke fonksiyonu olan $R_y \circ h$ fonksiyonunun altındaki görüntüsü $(R_y \circ h)(F) = \ominus F \oplus y$ dir. Sürekli fonksiyonların bileşkesi de sürekli olduğundan ve kompakt kümelerin sürekli fonksiyon altındaki ön görüntüsü de kompakt olduğundan $(R_y \circ h)(F) = \ominus F \oplus y$ kümesi kompakttır. O halde Teorem 4.25 den $(\ominus F \oplus y) \oplus V = \emptyset$ olacak biçimde 0 ın en az bir V açık komşuluğu vardır. Buradan Teorem 4.24 den $(y \oplus V) \cap (F \oplus P) = \emptyset$ olur. Buna göre $(y \oplus V) \subseteq (F \oplus P)^c$ elde edilir. $y \oplus V$ kümesi V açık kümesinin bir homeomorfizm olan sol öteleme dönüşümü altındaki görüntüsü olduğundan açıktır. Böylece $F \oplus P$ kapalıdır.

Benzer şekilde $P \oplus F$ nin de kapalı olduğu görülebilir.

4.27. Teorem

G bir topolojik grup ve F, G nin kompakt bir alt kümesi olsun. Bu durumda 0 ın her U komşuluğu için; her $x \in F$ için $x \oplus V \oplus (\ominus x) \subseteq U$ olacak biçimde bir V komşuluğu vardır [5].

İspat

$U, 0$ ın herhangi bir komşuluğu olsun. Sonuç 4.21 den $W \oplus W \oplus W \subseteq U \dots (*)$ olacak biçimde 0 ın simetrik bir W komşuluğu vardır. $W \in N(0)$ olduğundan, her $x \in F$ için $x = 0 \oplus x \in W \oplus x$ dir. Böylece $\{W \oplus x : x \in F\}$ ailesi F için bir açık örtüdür. F kompakt bir

küme olduğundan olduğundan $F \subseteq \bigcup_{i=1}^n W \oplus x_i$ olacak biçimde $x_1, x_2, \dots, x_n \in F$ vardır. $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ diyelim. Burada $F \subseteq W \oplus S$ dir. Şöyle ki; $x \in F$ n aldığımızda $\{W \oplus x : x \in F\}$ ailesi F için bir örtü olduğundan en az bir i_0 için, $x \in W \oplus x_{i_0} \subseteq W \oplus S$ olur. $V = \bigcap_{i=1}^n (\ominus x_i \oplus W \oplus x_i)$ diyelim. $i = 1, 2, \dots, n$ için $\ominus x_i \oplus W \oplus x_i$ kümeleri 0 ın açık komşulukları olduğundan V kümesi de 0 ın açık bir komşuluğudur. $F \subseteq W \oplus S$ olduğu için her $x \in F$ için $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere $x = w_0 \oplus x_j$ olacak biçimde $w_0 \in W$ ve $x_j \in S$ vardır. Şimdi, $x \oplus V \oplus (\ominus x) \subseteq U$ olduğunu görelim. $p \in x \oplus V \oplus (\ominus x)$ olsun. Öyleyse, $p = x \oplus v \oplus (\ominus x)$ olacak biçimde $v \in V$ vardır. $V = \bigcap_{i=1}^n (\ominus x_i \oplus W \oplus x_i)$ olduğundan $1 \leq i \leq n$ biçimindeki her i için $v \in \ominus x_i \oplus W \oplus x_i$ olup, $v \in \ominus x_j \oplus W \oplus x_j$ olur. O halde $v = \ominus x_j \oplus w_1 \oplus x_j$ olacak biçimde bir $w_1 \in W$ var olduğu görülür. Böylece $p = x \oplus v \oplus (\ominus x) = (w_0 \oplus x_j) \oplus (\ominus x_j) \oplus w_1 \oplus x_j \oplus (\ominus w_0) \oplus (\ominus x_j) = w_0 \oplus w_1 \oplus (\ominus w_0)$ elde edilir. $w_0 \in W$ olduğundan $\ominus w_0 \subseteq \ominus W$ olup, W simetrik bir küme olduğundan $\ominus w_0 \subseteq W$ dir. Böylece, $w_0 \oplus w_1 \oplus (\ominus w_0) \subseteq W \oplus W \oplus W$ olur. (*) dan aşağıdaki görülür; $w_0 \oplus w_1 \oplus (\ominus w_0) \subseteq W \oplus W \oplus W \subseteq U$ olur. Böylece $x \oplus V \oplus (\ominus x) \subseteq U$ elde edilir.

4.28. Lemma

(X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere X uzayının Hausdorff olması için gerek ve yeter koşul X in $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ köşegeninin $X \times X$ çarpım uzayında kapalı olmasıdır [13].

İspat

X uzayı Hausdorff uzayı olsun. $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ kümesinin kapalı olduğunu görelim. $\Delta^c = \{(x, y) : x \neq y\}$ kümesinin açık olduğunu görelim. Herhangi bir $w = (x_1, x_2) \in \Delta^c$ alalım. $(x_1, x_2) \in U \times V \subseteq \Delta^c$ olacak biçimde U ve V açık kümelerinin var olduğunu görelim. X uzayı Hausdorff uzayı olduğundan $x_1 \neq x_2$ biçimindeki herhangi $x_1, x_2 \in X$ elemanları için $U \cap V = \emptyset$ olacak biçimde $U \in N(x_1)$ ve $V \in N(x_2)$ açık komşulukları vardır.

$U \cap V = \emptyset$ olduğu için $U \times V \subseteq \Delta^C$ dir. Böylece herhangi $w = (x_1, x_2) \in \Delta^C$ elemanı için $(x_1, x_2) \in U \times V \subseteq \Delta^C$ olacak biçimde U ve V açık kümeleri vardır. Böylece Δ^C kümesi açık olup, Δ köşegeni kapalı olur.

Δ kapalı olsun. X uzayının Hausdorff uzayı olduğunu görelim. $x_1 \neq x_2$ olacak biçimde $x_1, x_2 \in X$ elemanlarını alalım. Böylece $w = (x_1, x_2) \in \Delta^C$ dir. Δ kümesinin kapalılığından $\Delta^C = \{(x,y) : x \neq y\}$ açıktır. Buradan $w = (x_1, x_2) \in U \times V \subseteq \Delta^C$ olacak biçimde U, V açık kümeleri vardır ki, $x_1 \in U$ ve $x_2 \in V$ olup, $U \cap V = \emptyset$ dir. Şöyle ki, $U \cap V \neq \emptyset$ olsaydı; saydı, $t \in U \cap V$ olacak biçimde en az bir $t \in X$ var olup, $(t,t) \in U \times V \subseteq \Delta^C$ olur. Bu ise Δ^C kümesinin tanımıyla çelişir. Öyleyse, $U \cap V = \emptyset$ dir. Öyleyse X Hausdorff uzayıdır.

4.29. Teorem

G bir topolojik grup olsun. Aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir [7,10,11].

- (1) G, T_0 – uzayıdır.
- (2) G, T_1 – uzayıdır.
- (3) G, T_2 – uzayıdır.
- (4) $\{U_i : i \in I\}$ ailesi, 0 ın komşuluk tabanı olmak üzere; $\bigcap_{i \in I} U_i = \{0\}$ dir.

İspat

(1) $\rightarrow$ (2)

G, T_0 uzayı olsun. $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in G$ alalım. G, T_0 uzayı olduğundan ya $y \notin P$ olacak biçimde x ın bir P açık komşuluğu vardır ya da $x \notin U$ olacak biçimde y nin bir U açık U komşuluğu vardır. Eğer, $y \notin P$ olacak biçimde x ın bir P açık komşuluğu varsa, $\ominus x \oplus P$ kümesi 0 ın açık komşuluğu olup, Teorem 4.19 dan $V \subseteq \ominus x \oplus P$ olacak biçimde 0 ın simetrik bir V komşuluğu vardır. $y \oplus V$, y nin açık bir komşuluğudur. $x \notin y \oplus V$

olduğunu görelim. Kabul edelim ki; $x \in y \oplus V$ olsun. Öyleyse $\ominus x \in \ominus V \oplus (\ominus y)$ olur. V simetrik olduğundan $\ominus V \oplus (\ominus y) = V \oplus (\ominus y)$ olup, $\ominus x \in V \oplus (\ominus y)$ dir. $V \subseteq \ominus x \oplus P$ olduğundan; $\ominus x \in V \oplus (\ominus y) \subseteq \ominus x \oplus P \oplus (\ominus y)$ olur. Yani; $\ominus x \in \ominus x \oplus P \oplus (\ominus y)$ dir. Burada $x \oplus (\ominus x) \in x \oplus (\ominus x) \oplus P \oplus (\ominus y)$ olur. $x \oplus (\ominus x) = 0$ olduğundan, $0 \in P \oplus (\ominus y)$ olur. Buradan $y \in P$ elde edilir. Bu ise $y \notin P$ olmasıyla çelişir. Öyleyse kabul yanlış olup, $x \notin y \oplus V$ dir. Böylece x in y yi içermeyen bir P komşuluğu ve y nin x i içermeyen bir $y \oplus V$ komşuluğu bulunmuş olur. $x \notin U$ olacak biçimde y nin bir U açık komşuluğunun var olma durumunda da benzer ispat yapılabilir. Böylece G bir T_1 – uzayıdır.

(2) $\rightarrow$ (3)

G, T_1 – uzayı olsun. G nin T_2 – uzayı olduğunu görmek için Lemma 4.28 den G nin köşegeninin $G \times G$ çarpım uzayında kapalı olduğunu görmemiz yeterlidir. G, T_1 – uzayı olduğu için $\{0\} \subseteq G$ kapalıdır. G topolojik grup olduğundan $f: G \rightarrow G; (x,y) \rightarrow x \oplus (\ominus y)$ dönüşümü dönüşümü süreklidir. O halde $f^{-1}(\{0\}) = \Delta = \{(x,x) : x \in G\}$ olduğundan G nin köşegeni $G \times G$ çarpım uzayında kapalı olup, G Hausdorff uzayıdır.

(3) $\rightarrow$ (4)

G, T_2 – uzayı ve $\{U_i : i \in I\}$ ailesi, 0 in bir komşuluk tabanı olsun. Kabul edelim ki; her $i \in I$ için $x \in U_i$ olacak biçimde $0 \neq x$ elemanı var olsun. $X, Hausdorff$ uzayı olduğundan $x \notin P$ olacak biçimde 0 in bir en az bir P komşuluğu vardır. $\{U_i : i \in I\}$ ailesi 0 in bir komşuluk tabanı olduğu için $x \in U_i \subseteq P$ olacak biçimde bir $i_0 \in I$ vardır. Bu ise X in Hausdorff olmasıyla çelişir. Öyleyse $x = 0$ dir.

(4) $\rightarrow$ (1)

$x \neq y$ olmak üzere $x, y \in G$ alalım. Öyleyse, $x \oplus (\ominus y) \neq 0$ dir. $\bigcap_{i \in I} U_i = \{0\}$ olduğundan en

az bir i_0 için $x \oplus (\ominus y) \notin U_{i_0}$ dir. Kısaltma kuralından $x \oplus \notin U_{i_0} \oplus y$ olur. $U_{i_0} \oplus y$ açık alt kümesi, y nin bir komşuluğudur. Böylece G, T_0 – uzayıdır.

4.30. Teorem

$(G, \oplus, \tau)$ bir topolojik grup ise düzgündür [9].

İspat

Topolojik gruplar homojen olduğu için G nin düzgünlüğü için yalnızca birim eleman 0 ın herhangi bir U komşuluğu için $\bar{V} \subseteq U$ olacak biçimde bir $V \in N(0)$ bulunduğunu görmek yeterlidir. Öyleyse 0 ın herhangi bir U açık komşuluğunu alalım. Teorem 4.20 den 0 ın $2V \subseteq U$ olacak biçimde simetrik bir V açık komşuluğu vardır. Şimdi $\bar{V} \subseteq U$ olduğunu görelim. $x \in \bar{V}$ alalım. $x \oplus V$ kümesi x in bir komşuluğu olduğundan $(x \oplus V) \cap V \neq \emptyset$ dir. Öyleyse, en az bir $y \in V$ için $y \in (x \oplus V)$ olup, V nin öyle bir $v_1 \in V$ elemanı için $y = x \oplus v_1$ olur. Kısaltma kuralından $x = y \oplus (\ominus v_1)$ olup, $y \in V$ olduğunda, buradan $x \in V \oplus (\ominus V)$ olur. V simetrik olduğundan $\ominus V = V$ olup, $x \in V \oplus (\ominus V) = V \oplus V \subseteq U$ olduğu için $x \in U$ elde edilir. Böylece $\bar{V} \subseteq U$ olup, topolojik gruplar düzgündür.

Teorem 4.29 ve Teorem 4.30 dan Sonuç 4.31 şöyle verilebilir.

4.31. Sonuç

G topolojik grubu T_0 – uzayı ise aşağıdakiler denktir [6].

i-) G, T_1 – uzayıdır.

ii-) $G, Hausdorff$ uzayıdır.

iii-) G, T_3 – uzayıdır.

Topolojik grupların tamamen düzgün olma durumunun incelendiği Teorem 4.39 ispatında yararlanılacak olan ve Teorem 4.19, Teorem 4.30 ve Teorem 4.16 dan elde edilen Sonuç 4.32 şöyle verilecektir.

4.32. Sonuç

$(G, \oplus, \tau)$ bir topolojik grup olsun. G nin birim elemanı 0 ın;

i-) Her $n \in \mathbb{N}$ için K_n komşuluğu simetriktir,

ii-) Her K_n komşuluğu için $2F \subseteq K_n$ olacak biçimde bir $F \in \{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ komşuluğu vardır,

iii-) Her $K_n \in \{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ ve her $a \in G$ için $x \oplus F \oplus (\ominus x) \subseteq K$ veya $x \oplus K \oplus (\ominus x) \subseteq F$ olacak biçimde bir $F \in \{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ komşuluğu vardır,

koşullarını sağlayan bir $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ kapalı komşuluklar ailesi vardır [12].

4.33. Teorem

G bir topolojik grup ve H , G nin bir topolojik alt grubu olsun. Bu durumda

1. $\bar{H}$, G nin alt grubudur.
2. Eğer H , G içinde açıksa, H aynı zamanda kapalıdır. [5,10].

İspat

1. $\bar{H}$ nin G nin topolojik alt grubu olduğunu görelim. Bunun için her $a, b \in \bar{H}$ elemanı için $a \oplus (\ominus b) \in \bar{H}$ olduğunu görmek yeterlidir. Herhangi bir $W \in \mathcal{N}(a \oplus (\ominus b))$ komşuluğu alalım. G topolojik grup olduğundan G nin $a \oplus (\ominus b)$ elemanının her W komşuluğu için $U \oplus (\ominus V) \subseteq W$ olacak biçimde en az bir $U \in \mathcal{N}(a)$ ve $V \in \mathcal{N}(b)$ komşulukları vardır. $a \in \bar{H}$ olduğundan her $U \in \mathcal{N}(a)$ için $U \cap H \neq \emptyset$ olup, benzer şekilde $b \in \bar{H}$ olduğu

için $V \cap H \neq \emptyset$ dir. Öyleyse $x \in U \cap H$ ve $y \in V \cap H$ olacak biçimde $x, y \in G$ vardır. $x \in U, x \in H$ ve $y \in V, y \in H$ olduğundan $x \oplus (\ominus y) \in U \oplus (\ominus V) \subseteq W$ ve H, G nin topolojik alt grubu olduğu için $x \oplus (\ominus y) \in H$ dir. Böylece $W \cap H \neq \emptyset$ olup, $a \oplus (\ominus b) \in \bar{H}$ olur. Böylece $\bar{H}$ bir altgruptur.

2. H alt grubu G içinde açık olsun. $\bar{H} = H$ olduğunu görelim. Bunun için $\bar{H} \subseteq H$ olduğunu görmek yeterlidir. $a \in \bar{H}$ olsun. H açık küme, $a \in H$ ve sol öteleme dönüşümü homeorfizm olduğundan $a \oplus H$ açık kümedir. Aynı zamanda H alt grup olduğundan $0 \in H$ olup, $a \in a \oplus H$ dır. O halde $a \oplus H$ kümesi a noktasının açık bir komşuluğudur. $a \in \bar{H}$ olup, $H \cap (a \oplus H) \neq \emptyset$ olmalıdır. O halde; $b \in H \cap (a \oplus H)$ olacak biçimde en az bir $b \in G$ vardır. Burada $b \in H$ olup, $b = a \oplus h$ olacak biçimde bir $h \in H$ vardır. Kısaltma kuralı uygulanırsa $a = b \oplus (\ominus h)$ olur. $B \in H, h \in H$ olup ve H alt grup olduğu için $\ominus h \in H$ olur. Böylece $a = b \oplus (\ominus h) \in H$ olup $H \subseteq \bar{H}$ sağlanır. O halde H kapalıdır.

4.34. Tanım

Bir $(G, \oplus)$ grubu üzerinde tanımlı bir metrik d olsun. Eğer G nin her a, x, y elemanı için; $d(x, y) = d(a \oplus x, a \oplus y)$ oluyorsa d metriğine bir sol değişmez metrik denir.

Benzer şekilde eğer $d(x, y) = d(x \oplus a, y \oplus a)$ ise d metriğine bir sağ değişmez metrik denir[7].

Teorem 4.36 ve Teorem 4.37 ve Teorem 4.38 den topolojik grupların metrikleştirilebilir olma durumunu görelim. Önce bir X topolojik uzayının metrikleştirilebilir olma tanımını verelim.

4.35. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere eğer X kümesi üzerinde öyle bir d metriği varsa ki, bu d metriği tarafından indirgenen topoloji τ ile aynı ise (X, τ) uzayına metrikleştirilebilir denir.

4.36. Teorem

Bir topolojik grubun sözde metrikleştirilebilir olması için gerek ve yeter koşul topolojik grubun birinci sayılabilir olmasıdır [6,11].

İspat

G sözde metrikleştirilebilir bir topolojik grup olsun. G üzerindeki topolojiyi üreten bir sözde metrik vardır. Öyleyse; her $x \in G$ için $\{B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi x in sayılabilir bir komşuluk tabanıdır. Böylece G topolojik grubu birinci sayılabilirdir.

G topolojik grubu birinci sayılabilir olsun. Öyleyse Teorem 4.21 den 0 ın bütün simetrik komşuluklarını içeren simetrik $\{B(n) : n \in \mathbb{N}\}$ komşuluk tabanı vardır. Öyle ki, her $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ için $B(n+1) \oplus B(n+1) \oplus B(n+1) \subseteq B(n)$ dir. Genelliği bozmadan $B(0) = G$ alabiliriz.

$G \times G$ üzerinde bir $f : G \times G \rightarrow [0, \infty)$

$$(x,y) \rightarrow f(x,y) = \begin{cases} 0, & \ominus x \oplus y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B(n) \\ 2^{-n}, & \ominus x \oplus y \in B(n) \setminus B(n+1) \end{cases}$$

fonksiyonu biçiminde tanımlansın.

$\ominus x \oplus x = 0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B(n)$ olduğundan $f(x,x) = 0$ dır. $B(n)$ kümeleri simetrik olduğundan; $\ominus x \oplus y \in B(n)$ ise $\ominus(\ominus x \oplus y) = \ominus y \oplus x \in B(n)$ olup, $f(x,y) = f(y,x)$ dir. Böylece f

fonksiyonu simetriktir. $F_{x,y} = \{ f(x_1, x_2) + \dots + f(x_k, x_{k+1}) : k \in \mathbb{N}, x_1 = x \text{ ve } x_{k+1} = y \}$ olmak üzere d fonksiyonu şöyle tanımlansın.

$$d : G \times G \rightarrow [0, \infty)$$

$$(x,y) \rightarrow \inf F_{x,y}$$

d fonksiyonun bir sözde metrik olduğunu görelim.

(i) Her $k \in \mathbb{N}$ için $f(x_k, x_{k+1}) \geq 0$ olduğundan $d(x,y) \geq 0$ dir.

(ii) Her $x \in G$ için $d(x, x) = 0$ dir.

(iii) f simetrik olduğu için d de simetriktir.

(iv) $x, y, z \in G$ olmak üzere

$$d(x,z) = \inf F_{x,z} \leq \inf (F_{x,y} + F_{y,z}) = \inf F_{x,y} + \inf F_{y,z} = d(x,y) + d(y,z)$$

O halde d fonksiyonu G topolojik uzayı üzerinde bir sözde metriktir. Ayrıca her $a \in G$ için;

$$\Theta(a \oplus x) \oplus (a \oplus y) = \Theta x \oplus y \text{ olup, } \Theta x \oplus y \in B(n) \text{ ise } \Theta(a \oplus x) \oplus (a \oplus y) \in B(n)$$

olur. Böylece $f(x,y) = f(a \oplus x, a \oplus y)$ olur. Böylece f sol değişmez olup, d sözde metriği de sol değişmezdir.

Şimdi d sözde metriği tarafından üretilen τ_d topolojisinin τ topolojisine eşit olduğunu görelim. d bir sol değişmez sözde metrik olduğundan x merkezli, r yarıçaplı açık yuvar; $B(x, r) = \{ y \in G : d(x, y) < r \} = x \oplus \{ \Theta x \oplus y \in G : d(0, \Theta x \oplus y) < r \} = x \oplus B(0, r)$ olduğundan komşuluk kontrolünü sadece birim elemanın komşuluğunda yapmak yeterli olacaktır.

$\tau_d \subseteq \tau$ olduğunu görelim. Bunun için boştan farklı her $T \in \tau_d$ için $U \subseteq T$ olacak biçimde bir $U \in \tau$ var olduğunu görelim. T boştan farklı olduğu için en az bir $x \in T$ vardır. Böylece $r \in B(x, r) \subseteq T$ olacak biçimde bir $r > 0$ sayısı vardır. $1/2^{n_0} > 0$ sağlayacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ seçelim. $x \oplus B(n_0 + 1) \subseteq B(x, 1/2^{n_0})$ olduğunu görelim. Burada,

$B(x, 1/2^{n_0}) = x \oplus B(0, 1/2^{n_0})$ olduğundan, $x \oplus B(n_0+1) \subseteq x \oplus B(0, 1/2^{n_0})$ olduğundan $B(n_0+1) \subseteq B(0, 1/2^{n_0})$ olduğunu görmek yeterli olur. Şimdi $y \in B(n_0+1)$ alalım. $y = 0 \oplus y$ olarak yazıldığında, $0 \oplus y \in B(n_0+1)$ için f fonksiyonunun tanımından; $f(0, y) \leq 2^{-n_0-1}$ olur. d sözde metriğinin tanımından da $d(0, y) \leq f(0, y) \leq 2^{-n_0-1} \leq 2^{-n_0}$ olur. Her $r > 0$ için $2^{-n_0} < r$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var olduğu için, $d(0, y) \leq f(0, y) \leq 2^{-n_0-1} \leq 2^{-n_0} < r$ olup, $y \in B(0, 1/2^{n_0})$ bulunur. Böylece, $B(n_0+1) \subseteq B(0, 1/2^{n_0}) \subseteq B(0, r)$ olur.

Şimdi $\tau \subseteq \tau_d$ olduğunu görelim. Bunun için boştan farklı herhangi bir $U \in \tau$ için $T \subseteq U$ olacak biçimde bir $T \in \tau_d$ var olduğunu görelim. U boştan farklı olduğu için en az bir $x \in U$ vardır. U, x in açık bir komşuluğu olduğundan $\ominus x \oplus U \in \mathcal{N}(0)$ dir. $\{B(n) : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi 0 in komşuluklar tabanı olduğundan, öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için $B(n_0) \subseteq \ominus x \oplus U$ olup, sol kısaltma kuralından $x \oplus B(n_0) \subseteq U$ olur. Şimdi $B(x, r) \subseteq x \oplus B(n_0) \subseteq U$ olacak biçimde bir $r > 0$ sayısının var olduğunu görelim. Bunun için $a \in B(0, 2^{-n_0})$ alalım. d nin tanımından $d(0, a) < 2^{-n_0}$ dir. Yani, $k \in \mathbb{N}$ için $x_1 = 0$ ve $x_{k+1} = a$ olmak üzere $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1} \in G$ elemanları için, d nin tanımından $d(0, x) \leq f(x_1, x_2) + \dots + f(x_k, x_{k+1}) < 2^{-n_0} \dots (1)$ olur. Burada $\ominus x_1 \oplus x_{k+1} = 0 \oplus a = a$ olup, eğer $a \in B(n)$ olduğunu görürsek ispat tamamlanır. Tümevarım yönteminden ispatlayalım. $k = 1$ olsun. Öyleyse, $f(x_1, x_2) < 2^{-n}$ ise ya $f(x_1, x_2) = 0$ olur, ya da $f(x_1, x_2) < 2^{-j}$ olacak biçimde $j > n$ doğal sayısı vardır. Böylece $f(x_1, x_2) = 0$ ise $\ominus x_1 \oplus x_2 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B(n)$ olur. $f(x_1, x_2) < 2^{-j}$ ise $\ominus x_1 \oplus x_2 \in B_j$ olur. $j > n$ olduğundan $B(j) \subseteq B(n)$ olup, $\ominus x_1 \oplus x_2 \in B(n)$ elde edilir. $k \geq 2$ olsun. $m < k$ olarak seçildiğinde, $y_1 = 0$ ve $y_{m+1} = a$ olmak üzere $y_1, y_2, \dots, y_l, y_{m+1} \in G$ elemanları için, $f(y_1, y_2) + \dots + f(y_l, y_{m+1}) < 2^{-n}$ ise, $\ominus y_1 \oplus y_{m+1} \in B(n)$ olduğunu varsayalım. Şimdi $k \in \mathbb{N}$ sayısı için $\ominus x_1 \oplus x_{k+1} \in B(n)$ olduğunu görelim. Bunun için (1) den,

$$d(x_1, x_{k+1}) < f(x_1, x_2) + \dots + f(x_k, x_{k+1}) < 2^{-n} \text{ ise her } 1 < i \leq k \text{ için;}$$

$f(x_i, x_{i+1}) < 2^{-n}$ olduğu açıktır. Buna göre her $i \in I$ için $f(x_i, x_{i+1}) \leq 2^{-n-1}$ olup, f nin tanımından

$x_i^{-1} \oplus x_{i+1} \in B(n+1)$ dir. Eğer $f(x_1, x_2) \geq 2^{-n-1}$ ise $f(x_1, x_2) = 2^{-n-1}$ ve $x_1^{-1} \oplus x_2 \in B(n)$ olur. $f(x_1, x_2) = 2^{-n-1}$ için (1) eşitsizliği $f(x_2, x_3) + \dots + f(x_k, x_{k+1}) < 2^{-n-1}$ halini alır. Burada, $x_2, x_3, \dots, x_k, x_{k+1}$ elemanları k tane olup, varsayımdan $\ominus x_2 \oplus x_{k+1} \in B(n+1)$ olur. Böylece, $x_1^{-1} \oplus x_{k+1} = (\ominus x_1 \oplus x_2) \oplus (\ominus x_2 \oplus x_{k+1}) \in B(n+1) \oplus B(n+1) \subseteq B(n)$ olur. Son olarak $f(x_1, x_2) < 2^{-n-1}$ ise $1 < i < k$ olmak üzere i sayısının olabilecek en büyük değeri için, (1) de karşımıza i nin seçimine göre 2 durum çıkar.

(i) $i = k$ veya $i = k - 1$ ise;

$f(x_1, x_2) + \dots + f(x_{k-1}, x_k) < 2^{-n-1}$ ise, varsayımdan $\ominus x_1 \oplus x_k \in B(n+1)$ olur. Buradan,

$$\ominus x_1 \oplus x_{k+1} = (\ominus x_1 \oplus x_k) \oplus (\ominus x_k \oplus x_{k+1}) \in B(n+1) \oplus B(n+1) \subseteq B(n) \text{ olur.}$$

(ii) $i < k-1$ için k, i ye bağlıysa;

$f(x_1, x_2) + \dots + f(x_{i+1}, x_{i+2}) \geq 2^{-n-1}$ olup, $f(x_{i+2}, x_{i+3}) + \dots + f(x_k, x_{k+1}) < 2^{-n-1}$ ise varsayımdan

$(\ominus x_1 \oplus x_{i+1}), (\ominus x_{i+1} \oplus x_{i+2}), (\ominus x_{i+2} \oplus x_{k+1}) \in B(n+1)$ olur. O halde, buradan;

$$(\ominus x_1 \oplus x_{i+1}) \oplus (\ominus x_{i+1} \oplus x_{i+2}) \oplus (\ominus x_{i+2} \oplus x_{k+1}) \in B(n+1) \oplus B(n+1) \oplus B(n+1) \subseteq B(n)$$

bulunur.

Böylece her k pozitif tam sayısı için $\ominus x_1 \oplus x_{k+1} \in B(n)$ olup, $\tau = \tau_d$ olur. Böylece d sözde metriğinin ürettiği τ_d topolojisi G üzerindeki topolojiye eşittir. Bu durumda G topolojik grubu sözde metrikleştirilebilir.

4.37. Teorem

d fonksiyonu bir T_0 -uzayı üzerinde sözde metrik ise d metriktir [6].

İspat

$X \neq \emptyset$ bir küme d , X kümesi üzerinde bir sözde metrik ve d nin X üzerine indirgediği topoloji topoloji τ_d olmak üzere (X, τ_d) bir T_0 -uzayı olsun. Öyleyse, birbirinden farklı her $x, y \in X$ için $x \notin B(y, r)$ veya $y \notin B(x, r)$ olacak biçimde bir $r > 0$ sayısı vardır. Öyleyse $d(x, y) > r$ olup $d(x, y) > 0$ olur. Öyleyse d bir metriktir.

Bir topolojik grubun sözde metrikleştirilebilir olduğunu topolojik grubun birinci sayılabilir olması ile açıklayan Teorem 4.36 ile bir sözde metriğin bir metrik olma durumunu irdelelim Teorem 4.37 den yararlanarak bir topolojik grubun metrikleştirilebilir olması Teorem 4.38 de şöyle verilecektir.

4.38. Teorem (Birkhoff-Kakutani Teoremi)

$(G, \oplus, \tau)$ bir topolojik grup olsun. G nin metrikleştirilebilir olması için gerek ve yeter şart G nin T_0 - uzayı ve birinci sayılabilir olmasıdır [6].

İspat

G topolojik grubu metrikleştirilebilir bir topolojik grup olsun. Metrikleştirilebilir uzaylar birinci sayılabilir ve T_0 – uzayıdır.

G grubu birinci sayılabilir olsun. Öyleyse Teorem 4.36 den G sözde metrikleştirilebilir olup, üzerinde, indirgediği topoloji G üzerindeki topoloji olan bir sol değişmez sözde metrik vardır. G , T_0 – uzayı olduğundan Teorem 4.37 den üzerinde tanımlanan sol değişmez sözde metrik bir metriktir. Öyleyse G metrikleştirilebilirdir.

4.39. Teorem

Her Hausdorff topolojik grup tamamen düzgündür [12].

İspat

$(G, \oplus, \tau)$ bir topolojik grup olsun. G nin birim elemanı 0 ın Sonuç 4.32 de verilen özellikleri sağlayan bir komşuluk ailesi $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ olsun. G nin tamamen düzgün olduğunu görelim. $F \subseteq G$ kapalı bir alt küme ve $a \in G$ olmak üzere $a \notin F$ olsun. G homojen olduğu için, $a, 0 \in G$ için $h(0) = a$ olacak biçimde G de tanımlı bir h homomorfizması vardır. h sürekli olduğu için tersi h^{-1} de sürekli olup, $h^{-1}(F)$ kümesi kapalıdır ve $0 \notin h^{-1}(F)$ dir. Böylece tamamen regülerlik için $0 \in G$ elemanı incelenebilir. $h^{-1}(F) = C$ dersek, $G \setminus C$ kümesi 0 ın açık bir komşuluğu olur. $G \setminus C = U_0$ olsun. Sonuç 4.30 dan her $n \in \mathbb{N}$ için $2U_{n+1} \subseteq U_n$ dir. $[0, 1]$ aralığındaki paydası 2 nin bir kuvveti olan rasyonel sayıların kümesini D ile gösterelim. Her $r \in D$ için, $k \leq 2^n$ olmak üzere ve $r = k / 2^n$ olacak biçimde $k, n \in \mathbb{N}^+$ sayıları vardır. Şimdi her $r \in D$ için $V(r)$ kümeleri [13] de tümevarımdan şöyle tanımlanmaktadır. $k = 1$ olsun. Öyleyse $r = 1 / 2^n$ dir, $V(1 / 2^n) = U_n$ olsun. $r = k / 2^n$ sayıları için $V(r)$ kümeleri; $k' = 2k$ ise $V(k' / 2^{n+1}) = V(k / 2^n)$ olup, $k' = 2k + 1$ ise $V(k' / 2^{n+1}) = V(1 / 2^n) \oplus V(k / 2^n)$ olacak şekilde tanımlansın. Buna göre; $m \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $0 \leq k = 2m \leq 2^n$ biçimindeki $k \in \mathbb{N}^+$ sayıları için $V(1 / 2^n) \oplus V(k / 2^n) \subseteq V(k+1 / 2^n) \dots (*)$ sağlanır. Şimdi G de tanımlı ve reel değerli bir f fonksiyonu şöyle tanımlanıyor;

$$f : G \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = \begin{cases} \inf \{r \in D : x \in V_r\} \\ 1, & x \notin V_1 \end{cases}$$

Her $r \in D$ için $0 \in V_r$ ve $\inf D = 0$ olduğu için $f(0) = 0$ dir. $V_1 = V(1 / 2^n) = U_0 = G \setminus C$ olup,

$f(C) = \{1\}$ dir. Burada her $x \in G$ için $0 \leq f(x) \leq 1$ olup, f nin sürekli olduğunu görelim.

$f(x)$ e göre karşımıza 3 durum çıkar;

1. durum; $f(x) = 1$ olacak biçimdeki $x \in G$ alalım. $y \in V(1/2^n) \oplus x$ ise $k < 2^n - 2$ olmak üzere $y \in G \setminus V(k/2^n)$ dir. Eğer, $y \in V(k/2^n)$ olsaydı, V komşuluğunun simetriğinden, $x \in V(1/2^n) \oplus y \subseteq V(1/2^n) \oplus V(k/2^n)$ olup, (*) dan $x \in \subseteq V(k+1/2^n)$ olur. Böylece f nin tanımından $f(x) < 1$ olur. Bu ise $f(x) = 1$ olmasıyla çelişir. Öyleyse $k < 2^n - 2$ olmak üzere $y \in G \setminus V(k/2^n)$ olur. Herhangi $y \in G \setminus V(k/2^n)$ elemanının f fonksiyonu altındaki ön görüntüsü $1 - (1/2^{n-1}) = (2^n - 2)/2^n \leq f(y) \leq 1$ aralığındadır. Böylece $|f(y) - f(x)| \leq 1/2^{n-1}$ olup, $1/2^{n-1} < \varepsilon$ olacak biçimde bir ε sayısı var olduğu için $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$ olur, böylece f 1. duruma göre süreklidir.

2. durum; $f(x) = 0$ olacak biçimdeki $x \in G$ alalım. f nin tanımından, $x = 0$ dır. Öyleyse; $y \in V(1/2^n) \oplus x = V(1/2^n) \oplus 0 = V(1/2^n) = U_n$ olup, $y \in U_n$ elemanı için f nin tanımından $f(y) < 1/2^n$ dir. Böylece, $|f(y) - f(x)| \leq 1/2^n < \varepsilon$ olup, f , 2. duruma göre süreklidir.

3. durum; $0 < f(x) < 1$ olacak biçimde $x \in G$ alalım. Her $k \in \mathbb{N}^+$ için $k < 2^m$, $m > n+1$ olacak biçimde $m \in \mathbb{N}^+$ sayısı vardır. $f(x) = \inf \{r \in D : x \in V_r\}$ ve D kümesi $[0,1]$ aralığında yoğun olduğu için $x \in V(k/2^n) \setminus V(k-1/2^n) \dots$ (**) olarak alınabilir. $y \in V(1/2^m) \oplus x$ ise; $y \in G \setminus V(k-2/2^m)$ dir. Şöyle ki; $y \in V(k-2/2^m)$ olsaydı, V nin simetriğinden; $x \in V(1/2^m) \oplus y \subseteq V(1/2^m) \oplus V(k-2/2^n)$ olup, (*) dan $x \in \subseteq V(k-1/2^n)$ olur. Bu ise (**) olmasıyla çelişir. Fakat, $x \in V(k/2^n)$ olarak alınırsa (*) dan $y \in V(k+1/2^m)$ olup, f fonksiyonunun tanımından, $(k-2)/2^m \leq f(y) \leq (k-1)/2^m$ bulunur. Ayrıca (**) dan; $(k-1)/2^m \leq f(x) \leq k/2^m$ olduğu için $|f(y) - f(x)| \leq 1/2^m < 1/2^n < \varepsilon$ olup, f , 3. duruma göre süreklidir.

Böylece f fonksiyonu G de süreklidir. O halde G topolojik grubu tamamen düzgündür.

Topolojik grupların tamamen düzgün olma durumu Birkhoff- Kakutani teoreminden yararlanarak da görülebilmektedir.

Şimdi topolojik grupların Kartezyen çarpımlarının kutu ve çarpım topolojileri verilecektir. Öncelikle topolojik grupların Kartezyen çarpımlarının da bir topolojik grup olduğunu görelim.

4.40. Teorem

$\{ (G_i, \oplus_i) : i \in I \}$ grupların bir ailesi olsun. $\prod_{i \in I} G_i = \{ (x_i) : i \in I \text{ için } x_i \in G_i \}$ kümesi bu ailenin çarpım kümesi olmak üzere

$$\oplus : \prod_{i \in I} G_i \times \prod_{i \in I} G_i \rightarrow \prod_{i \in I} G_i$$

$$x, y \rightarrow x \oplus y = ((x_i) \oplus_i (y_i)) \quad \dots (*)$$

ikili işlemine göre $(\prod_{i \in I} G_i, \oplus)$ ikilisi bir gruptur [6,7].

İspat

(*) da verilen $\oplus$ ikili işleminin $\prod_{i \in I} G_i$ kümesi üzerinde grup aksiyomlarını sağladığını görelim.

(i) Birim eleman özelliği

Her $x \in \prod_{i \in I} G_i$ için $x \oplus 0 = x$ olacak biçimde $0 \in \prod_{i \in I} G_i$ vardır. Şöyle ki; her $i \in I$ için, $(G_i, \oplus_i)$ grubunun birim elemanı 0_i olmak üzere $0 = (0_i) \in \prod_{i \in I} G_i$ ögesi birim eleman özelliğini sağlar.

(ii) Ters eleman özelliği

Her $x \in \prod_{i \in I} G_i$ için $x \oplus (\ominus x) = 0$ olacak biçimde $\ominus x \in \prod_{i \in I} G_i$ vardır. Şöyle ki; her $x_i \in G_i$ için $x_i \oplus_i (\ominus x_i) = 0$ olacak biçimde $\ominus x_i \in G_i$ vardır. Bu durumda böylece

$\Theta x = (\Theta x_1, \Theta x_2, \Theta x_3, \dots, \Theta x_n, \dots) = (\Theta x_i) \in \prod_{i \in I} G_i$ ögesi $x \oplus (\Theta x) = 0$ ters eleman özelliğini sağlar.

(iii) Birleşme özelliği

Her $x, y, z \in \prod_{i \in I} G_i$ için $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ birleşme özelliği sağlanır. Şöyle ki her $i \in I$ için; her $x_i, y_i, z_i \in G_i$ için, $(x_i \oplus_i y_i) \oplus_i z_i = (x_i \oplus_i y_i) \oplus_i z_i$ olup birleşme özelliği sağlandığından $(x \oplus y) \oplus z = ((x_i \oplus_i y_i) \oplus_i (z_i)) = (x_i \oplus_i (y_i \oplus_i z_i)) = x \oplus (y \oplus z)$ olur.

Böylece $(\prod_{i \in I} G_i, \oplus)$ ikilisi bir gruptur.

Aşağıdaki teorem ile $(\prod_{i \in I} G_i, \oplus)$ ikilisinin çarpım ve kutu topolojisine göre bir topolojik grup olduğu verilecektir. Önce çarpım topolojisi ile kutu topolojisi tanımlarını verelim [13].

$\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ ailesi bir topolojik uzaylar ailesi ve X_i kümelerinin Kartezyen çarpımı $X = \prod_{i \in I} X_i = \{x : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i : x(i) \in X_i\}$ olsun. X kümesi üzerinde tanımlı izdüşüm fonksiyonu,

$$\pi_k : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_k;$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots) \rightarrow \pi_k(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots) = x_k$$

olsun. İzdüşüm fonksiyonundan yararlanarak çarpım topolojisinin tanımını verelim. $i_k \in I$ olmak üzere $U_{i_k} \subseteq \tau_{i_k}$ açık alt kümeleri için $\pi_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) = \{(x_i) \in X = \prod_{i \in I} X_i, x_{i_k} \in U_{i_k}\}$ olup, $X = \prod_{i \in I} X_i$ kümesi üzerindeki bir topolojinin tabanı; her $n \in \mathbb{N}$ ve her $i_1, i_2, \dots, i_n \in I$ için $X = \prod_{i \in I} X_i$ Kartezyen çarpımının, $\{(x_i) \in X : \text{her } 1 \leq k \leq n \text{ için } x_{i_k} \in U_{i_k}\}$ türünden yazılan alt kümelerinden oluşan bir taban ise bu topolojiye çarpım topolojisi denir.

Çarpım topolojisinin tabanı daha sade şekilde şöyle ifade edilebilir. $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ ailesi bir topolojik uzaylar ailesi ve her $i \in I$ için $U_i \subseteq X_i$ açık küme olmak üzere sonlu sayıdaki

$i \in I$ için $U_i \neq X_i$ olacak biçimde $\prod_{i \in I} U_i$ türünden kümelerinin bir ailesidir. Çarpım topolojisinden farklı olarak $X = \prod_{i \in I} X_i$ Kartezyen çarpımı üzerinde başka bir topoloji olan kutu topolojisi ise her $i \in I$ için $U_i \subseteq X_i$ açık alt kümeler olmak üzere, tabanı; $\prod_{i \in I} U_i$ türünden yazılan topolojidir.

I indis kümesi sonlu ise kutu topolojisi ile çarpım topolojisi arasında bir ayırım yoktur.

4.41. Teorem

$\{ (G_i, \oplus_i, \tau_i) : i \in I \}$ topolojik grupların bir ailesi ve bu ailenin Kartezyen çarpımı $G = \prod_{i \in I} G_i$ olsun. G , Kartezyen çarpım kümesindeki üzerindeki kutu ve çarpım topolojilere göre bir topolojik gruptur [6,10].

İspat

$G = \prod_{i \in I} G_i$ kümesinin bir topolojik grup olduğunu görmek için; her $i \in I$ için G_i uzayı bir topolojik grup olduğundan,

$$\begin{aligned} \varphi_i : G_i \times G_i &\rightarrow G_i \\ (x, y) &\mapsto \varphi_i(x, y) = x \oplus (\ominus y) \end{aligned}$$

fonksiyonun sürekliliğinden faydalanarak, $\prod_{i \in I} G_i \times \prod_{i \in I} G_i$ uzayı üzerinde tanımlanan

$$\begin{aligned} \varphi : \prod_{i \in I} G_i \times \prod_{i \in I} G_i &\rightarrow \prod_{i \in I} G_i \\ f, g &\mapsto \varphi(f, g) = f \oplus (\ominus g) = f_i \oplus_i (\ominus g_i) \end{aligned}$$

fonksiyonun sürekliliğini görelim. G kümesi üzerinde çarpım topolojisi var olsun. $f_0, g_0 \in G$ olmak üzere $\varphi(f_0, g_0) = f_0 \oplus (\ominus g_0)$ noktasının herhangi bir U komşuluğunu alalım. U komşuluğu çarpım topolojisine göre açık olduğundan sadece sonlu sayıda $i \in I$ için; $U_i \neq G_i$ olmak üzere $f_0 \oplus (\ominus g_0) \in \prod_{i \in I} U_i \subseteq U$ olacak biçimde $U_i \subseteq G_i$ açıkları vardır.

$f_0 \oplus (\Theta g_0) = (f_0(i) \oplus (\Theta g_0(i)))$ olduğu için her $i \in I$ için;

$$f_0(i) \oplus (\Theta g_0(i)) = \varphi_i(f_0(i), \Theta g_0(i)) \in U_i$$

dir. φ_i sürekli olduğundan her $i \in I$ için; $V_i \oplus_i (\Theta W_i) \subseteq U_i$ olacak biçimde $f_0(i)$ ve $g_0(i)$ nin açık V_i ve W_i komşulukları vardır. $U_i = G_i$ biçimindeki her i için $V_i = G_i$, $W_i = G_i$ seçmek genelliği bozmaz. O halde $V = \prod_{i \in I} V_i$ ve $W = \prod_{i \in I} W_i$ denirse, V , f_0 in bir açık komşuluğu ve W , g_0 in açık bir komşuluğu olur ve $\varphi(V \times W) \subseteq U$ sağlanır. O halde φ fonksiyonu çarpım topolojisine göresürekli ve $(\prod_{i \in I} G_i, \oplus, \tau)$ üçlüsü çarpım topolojisine göre bir topolojik gruptur.

Şimdi de kutu topolojisine göre φ fonksiyonunun sürekliliğini görelim. Bunun için çarpım topolojisinde yaptığımız gibi $f_0, g_0 \in \prod_{i \in I} G_i$ olmak üzere $f_0 \oplus (\Theta g_0)$ noktasının herhangi bir U komşuluğunu alalım. U kutu topolojisine göre açık olduğundan;

$$f_0 \oplus (\Theta g_0) \in \prod_{i \in I} U_i \subseteq U$$

olacak biçimde $U_i \subseteq G_i$ açıkları vardır. $f_0 \oplus (\Theta g_0) = (f_0(i) \oplus (\Theta g_0(i)))$ olduğundan her $i \in I$ için; $f_0(i) \oplus (\Theta g_0(i)) = \varphi_i(f_0(i), \Theta g_0(i)) \in U_i$ dir. φ_i fonksiyonları sürekli olduğundan her $i \in I$ için $V_i \oplus_i (\Theta W_i) \subseteq U_i$ olacak biçimde $f_0(i)$ ve $g_0(i)$ nin açık V_i ve W_i komşulukları vardır. O halde $V = \prod_{i \in I} V_i$ ve $W = \prod_{i \in I} W_i$ denirse, V , f_0 in bir açık komşuluğu ve W , g_0 in bir açık komşuluğu olur ve $\varphi(V \times W) \subseteq U$ sağlanır. O halde φ fonksiyonu kutu topolojisine göre sürekli olup, $(\prod_{i \in I} G_i, \oplus, \tau)$ üçlüsü kutu topolojisine göre bir topolojik gruptur.

5. TOPOLOJİK DÖNERLİ GRUPLAR

Bu bölüm W. Atipontrat'ın “ Topological Gyrogroups : Generalization of Topological groups, Topology and its Applications” adlı makalesinin bir incelemesidir. Bu bölüm dönerli grupların topolojisine ayrılmıştır. Bir dönerli grubun topolojik uzay olmasıyla kazandığı bazı topolojik özellikler incelenmiş ve topolojik dönerli grupların topolojik gruplarla benzer ve farklı bazı özellikleri ortaya konmuştur. Ayırma aksiyomlarının topolojik dönerli gruplara etkisinden bahsedilmiştir. Bir topolojik dönerli grup üzerinde tanımlanan bazı fonksiyonların homeomorfizm olma durumları cebirsel ve topolojik açıdan incelenmiştir. Bir topolojik dönerli grubunun bazı topolojik özelliklere sahip alt kümelerinin sürekli fonksiyon altında özelliklerini koruduklarından bahsedilmiştir. Topolojik dönerli grupların premetrikleştirilebilir olduğu fakat, Birkhoff-Kakutani teoreminin topolojik gruplarda kullanılan yönteminin topolojik dönerli grupların sözde metrikleştirilebilir ve tamamen regüler olduğunu açıklamada yetersiz olduğuna yer verilmiştir. Einstein topolojik dönerli grubu ve Möbius topolojik dönerli gruplarından söz edilmiş ve topolojik dönerli grupların Kartezyen çarpımının topolojisi irdelenmiştir.

5.1. Tanım

(G, τ) bir topolojik uzay, $(G, \oplus)$ bir dönerli grup olmak üzere

$$(i) \oplus : G \times G \rightarrow G \quad (\text{ikili işlem dönüşümü})$$

$$(a,b) \rightarrow a \oplus b$$

$$(ii) \ominus(\bullet) : G \rightarrow G \quad (\text{ters dönüşüm})$$

$$a \rightarrow \ominus a$$

dönüşümleri sürekli ise $(G, \oplus, \tau)$ üçlüsüne bir topolojik dönerli grup denir [4].

Bazı topolojik dönerli grup örnekleri verelim.

5.2. Örnek

$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ kümesi kompleks açık birim diski olup, Örnek 3.3 den üzerinde tanımlı $\oplus_m$ ikili işlemiyle bir dönerli gruptur. D kümesi karmaşık sayılar uzayının bir alt kümesi olup, alışılmış topolojiye göre kompleks sayılar uzayının bir alt topolojik uzayıdır. D kümesinin topolojisi τ_D ile gösterilsin. Buna göre

$$\varphi : D \times D \rightarrow D$$

$$(x, y) \rightarrow \varphi(x, y) = x \oplus_m(-y) = (x + (-y)) / (1 + \overline{x}(-y))$$

fonksiyonu sürekli olduğundan $(D, \oplus_m, \tau)$ üçlüsü bir topolojik dönerli gruptur [4].

5.3. Örnek

Einstein'ın hız kümesini R_c^3 ele alalım. Bu küme $R_c^3 = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{v}\| < c \}$ kümesi olup c ışık hızıdır. $\|\mathbf{v}\|$ ise $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ vektörünün normudur. Örnek 3.4 den R_c^3 kümesi üzerinde tanımlı $\oplus_E$ ikili işlemi ile bir dönerli gruptur. R_c^3 kümesi standart topoloji ile donatılan $\mathbb{R}^3$ uzayının bir alt topolojik uzayıdır. R_c^3 kümesinin topolojisi τ_c ile gösterilsin. Böylece

$$\varphi : R_c^3 \times R_c^3 \rightarrow R_c^3$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rightarrow f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \oplus_E(-\mathbf{v}) = \frac{1}{1 + \frac{(\mathbf{u}, -\mathbf{v})}{c^2}} \left(\mathbf{u} + \frac{1}{\gamma_u} (-\mathbf{v}) + \frac{1}{c^2} \frac{\gamma_u}{1 + \gamma_u} (\mathbf{u}, (-\mathbf{v})) \mathbf{u} \right)$$

fonksiyonu süreklidir. Buna göre $(R_c^3, \oplus_E, \tau_c)$ üçlüsü bir topolojik dönerli gruptur [4].

5.4. Önerme

$(G, \oplus, \tau)$ üçlüsü bir topolojik dönerli grup olmak üzere

$$h : G \rightarrow G$$

$$a \rightarrow \ominus a$$

ters dönüşüm fonksiyonu bir homeomorfizmdir [4].

İspat

Verilen fonksiyonun bire-bir, örten, sürekli ve tersinin de sürekli olduğunu görelim. h fonksiyonu birebirdir. Şöyle ki, $h(x) = h(y)$ eşitliğini sağlayan her $x, y \in G$ için $\ominus x = \ominus y$ olup, G bir dönerli grup olduğundan Teorem 3.5 (8) den her elemanın bir tek tersi var olduğundan $x = y$ elde edilir.

h fonksiyonu örtendir. Şöyle ki, $y \in G$ aldığımızda G dönerli grup olduğundan $\ominus y \in G$ olup, $x = \ominus y$ alınırsa, $h(x) = h(\ominus y) = y$ olacağından $h(x) = y$ dir.

h fonksiyonunun sürekli olduğunu görelim. G bir topolojik dönerli grup olduğundan ters dönüşüm fonksiyonu süreklidir. Ayrıca bu fonksiyonun tersi Bölüm 4 de görüldüğü gibi kendisi olduğundan tersi de süreklidir. Böylece ters dönüşüm fonksiyonu bir homeomorfizmadır.

Sağ ve sol öteleme dönüşümlerinin homeomorfizma olduğunu Grup teorisinden farklı olan aşağıdaki kısaltma kurallarını kullanarak göstereceğiz.

$(G, \oplus)$ bir dönerli grup olmak üzere; her $x, y, z \in G$ için aşağıdaki özellikler sağlanır [3].

$$(1) (\ominus x) \oplus (x \oplus y) = y \quad (\text{Sol Sadeleştirme Kuralı})$$

$$(2) (x \oplus (\ominus y)) \oplus g[x, \ominus y]y = (x \oplus (\ominus y)) \boxplus y = x \quad (1. \text{Sağ Sadeleştirme Kuralı})$$

$$(3) x \oplus g[x, y](\ominus y) \oplus y = (x \boxminus y) \oplus y = x \quad (2. \text{Sağ Sadeleştirme Kuralı})$$

5.5. Teorem

$(G, \oplus, \tau)$ bir topolojik dönerli grup ve $x \in G$ olmak üzere

$$L_x : G \rightarrow G \quad (\text{sol öteleme dönüşümü})$$

$$y \rightarrow L_x(y) = x \oplus y$$

$$R_x : G \rightarrow G \quad (\text{sağ öteleme dönüşümü})$$

$$y \rightarrow R_x(y) = y \oplus x$$

dönüşümleri birer homeomorfizmdir [4].

İspat

L_x sol öteleme ve R_x sağ öteleme dönüşümlerinin bire-bir, örten, sürekli ve terslerinin de sürekli olduğunu görelim.

L_x sol öteleme dönüşümü bire-birdir. Şöyle ki, $L_x(y_1) = L_x(y_2)$ eşitliğini sağlayan her $y_1, y_2 \in G$ için $x \oplus y_1 = x \oplus y_2$ eşitliğinde Teorem 3.5 (9) da verilen sol sadeleştirme kuralı uygulandığında $(\ominus x) \oplus (x \oplus y_1) = (\ominus x) \oplus (x \oplus y_2)$ olup, $y_1 = y_2$ elde edilir.

L_x sol öteleme dönüşümünü örtendir. Şöyle ki; herhangi bir $k \in G$ alalım. $\ominus x \oplus k \in G$ olduğundan $y = \ominus x \oplus k$ nin dönüşüm altındaki görüntüsü; $L_x(y) = x \oplus (\ominus x \oplus k)$ olup, bu eşitlik Teorem 3.5. (9) den $L_x(y) = k$ dir.

Şimdi de L_x sol öteleme dönüşümünün sürekliliğini görelim. L_x sol öteleme dönüşümü; $\oplus : G \times G \rightarrow G, (x, y) \rightarrow x \oplus y$ dönüşümünün $\{x\} \times G$ kümesine kısıtlanmasıdır. $\oplus$ işlemi sürekli olduğundan kısıtlanmış fonksiyon L_x dönüşümü de sürekli dir. L_x in tersi olan

$$L_x^{-1} : G \rightarrow G$$

$$y \rightarrow L_x^{-1}(y) = \ominus x \oplus y$$

fonksiyonunun sürekliliğini görelim. Burada L_x^{-1} ters sol öteleme dönüşümü $\ominus x \in G$ için $L_{\ominus x}$ ötelemesine eşittir. $L_{\ominus x}$ sürekli olduğundan L_x^{-1} süreklidir. O halde L_x sol öteleme dönüşümü homeomorfizmdir.

R_x sağ öteleme dönüşümünün homeomorfizm olduğunu L_x sol öteleme dönüşümünden farklı olarak görelim. Sağ öteleme dönüşümü bire-birdir. Şöyle ki, $R_x(a) = R_x(b)$ eşitliğini sağla-
yan her $a, b \in G$ elemanları için $a \oplus x = b \oplus x$ eşitliğinde 1. sağ kısaltma kuralından sonra $(a \oplus x) \boxminus x = (b \oplus x) \boxminus x$ olup, $a = b$ elde edilir.

R_x sağ öteleme dönüşümü örtendir. Şöyle ki; herhangi bir $k \in G$ alalım. G bir dönerli grup olduğundan x, k elemanları için $g_{k,x}(x) \in G$ olup, $k \ominus g_{k,x}(x) = k \boxminus x \in G$ olduğundan $y = k \boxminus x$ için $R_x(y) = R_x(k \boxminus x) = (k \boxminus x) \oplus x$ olup 2. sağ kısaltma kuralından sonra $R_x(k \boxminus x) = (k \boxminus x) \oplus x = k$ olur. Böylece R_x dönüşümü örtendir.

Şimdi de R_x sağ öteleme dönüşümünün sürekli olduğunu görelim. Sağ öteleme dönüşümü $\oplus : G \times G \rightarrow G, (x, y) \rightarrow x \oplus y$ dönüşümünün $G \times \{y\}$ kümesine kısıtlanışıdır. $\oplus$ işlemi sürekli olduğundan kısıtlanmış fonksiyon olan R_x fonksiyonu da süreklidir.

Şimdi de R_x dönüşümünün tersinin sürekliliğini inceleyelim. R_x in tersi olan fonksiyon

$$R_x^{-1} : G \rightarrow G$$

$$y \rightarrow y \boxminus x$$

fonksiyonudur. Tanım 3.10 den $R_x^{-1}(x) = y \boxminus x = y \oplus g_{y,x}(\ominus x)$ dir. Teorem 3.5 (10) den $y \oplus g_{y,x}(\ominus x) = y \oplus \{\ominus(y \oplus x) \oplus (y \oplus (x \oplus (\ominus x)))\}$ olur. $x \oplus (\ominus x) = 0$ olduğundan $y \oplus g_{y,x}(\ominus x) = y \oplus (\ominus(y \oplus x)) \oplus y$ eşitliği elde edilir. Bu eşitlik sol öteleme ve sağ öteleme dönüşümleri ile ve ters dönüşüm fonksiyonundan yararlanarak şöyle yazılabilmektedir;

$$y \oplus (\ominus(y \oplus x)) \oplus y = (L_y \circ R_y \circ h \circ R_x)(y)$$

olup sağ öteleme, sol öteleme fonksiyonlarının ve ters dönüşüm fonksiyonları sürekli

olduğundan R_x^{-1} fonksiyonu da süreklidir.

5.6. Tanım

$(G, \oplus, \tau)$ bir topolojik dönerli grup olsun. A ile B kümeleri G nin alt kümeleri olmak üzere $A \oplus B$ ve $\ominus A$ kümeleri şöyle tanımlanmaktadır.

$$A \oplus B = \{ a \oplus b \mid a \in G \text{ ve } b \in G \}, \quad \ominus A = \{ \ominus a \mid a \in G \} = (\ominus)^{-1}(A)$$

Eğer $A = \ominus A$ oluyorsa A kümesine simetrik denir [4].

5.7. Teorem

$(G, \oplus, \tau)$ bir topolojik dönerli grup olsun. Her $x, y \in G$ için $g_{x,y} : G \rightarrow G$ dönerli otomorfizması bir homeomorfizmdir [4].

İspat

x, y olsun. $g_{x,y}$ bir dönerli otomorfizma olup, Teorem 3.5 (10) dan her $a \in G$ elemanı için;
 $g_{x,y}(a) = \ominus(x \oplus y) \oplus (x \oplus (y \oplus a)) = \ominus(x \oplus y) \oplus (x \oplus (y \oplus a)) = (L_{\ominus\{x+y\}} \circ L_x \circ L_y)(a)$
 dir. Sol öteleme fonksiyonu homeomorfizm olduğundan, bunların bileşkesi de homeomorfizm olup, $g_{x,y}$ bir homeomorfizmdir.

5.8. Teorem

$(G, \oplus, \tau)$ bir topolojik dönerli grup olsun. $x \in G$ ve $A \subseteq G, B \subseteq G$ olmak üzere

(1) A açık ise $\ominus A, A \oplus x$ ve $x \oplus A$ kümeleri açıktır. $\ominus A, A \oplus x$ ve $x \oplus A$ kümelerinden herhangi biri açık ise A kümesi de açıktır.

(2) A kapalı ise $\ominus A, A \oplus x$ ve $x \oplus A$ kümeleri kapalıdır. $\ominus A, A \oplus x$ ve $x \oplus A$ kümelerinden herhangi biri kapalı ise A kümesi kapalıdır.

(3) A bağlantılı ise $\ominus A$, $A \oplus x$ ve $x \oplus A$ kümeleri bağlantılıdır. $\ominus A$, $A \oplus x$ ve $x \oplus A$ kümelerinden herhangi biri bağlantılı ise A kümesi de bağlantılıdır.

(4) A kompakt ise $\ominus A$, $A \oplus x$ ve $x \oplus A$ kümeleri de kompaktır. $\ominus A$, $A \oplus x$ ve $x \oplus A$ kümelerinden herhangi biri kompakt ise A kümesi de kompaktır.

(5) A açık ise $A \oplus B$ ve $B \oplus A$ kümeleri de açıktır.

(6) A ve B kompakt ise $A \oplus B$ kümesi de kompaktır.

(7) A ve B bağlantılı ise $A \oplus B$ kümesi de bağlantılıdır.

ifadeleri doğrudur [4].

İspat

Açık, kapalı, bağlantılı, kompakt kümelerin homeomorfizma altındaki görüntüleri de sırasıyla açık, kapalı, bağlantılı, kompaktır. A kümesi açık ise A nın birer homeomorfizma olan sağ öteleme dönüşümü, sol öteleme dönüşümü ve ters dönüşüm fonksiyonu altındaki görüntüleri sırasıyla $A \oplus x$, $x \oplus A$, $\ominus A$ kümeleri açıktır. Aynı özellik A nın kapalı, bağlantılı ve kompakt olma durumunda da geçerlidir.

Şimdi $A \oplus x$, $x \oplus A$, $\ominus A$ kümelerinden herhangi biri açık olsun. Bu küme $x \oplus A$ olsun. Sol öteleme dönüşümü sürekli olduğundan açık olan $x \oplus A$ kümesinin sol öteleme dönüşümü altındaki ters görüntüsü olan A kümesi açıktır. Sağ öteleme dönüşümü ve ters dönüşüm fonksiyonu sürekli olduğu için $A \oplus x$ veya $\ominus A$ kümeleri açık ise bu kümelerin sırasıyla sağ öteleme dönüşümü ve ters dönüşüm fonksiyonu altındaki ters görüntüleri olan A kümesi açıktır.

$A \oplus x$, $x \oplus A$, $\ominus A$ kümelerinden herhangi biri kompakt olsun. Bu küme $x \oplus A$ olsun. Sol öteleme dönüşümü homeomorfizma olduğundan, sol öteleme dönüşümünün tersi

sürekli. Kompakt kümelerin sürekli fonksiyonlar altındaki görüntüsü de kompakt olduğu için, kompakt $x \oplus A$ kümesinin sol öteleme dönüşümü altındaki ters görüntüsü kompakt olur. Aynı durum sağ öteleme dönüşümü ile ters dönüşüm fonksiyonu homeomorfizma olduğu için $A \oplus x$ veya $\ominus A$ kümesinin kompakt olmasında da geçerlidir.

Benzer özellik $A \oplus x$, $x \oplus A$, $\ominus A$ kümelerinden herhangi birinin bağlantılı olmasında da sağlanır.

(5) $A, B; G$ nin alt kümeleri ve A açık olsun. $A \oplus B = \bigcup_{b \in B} \{A \oplus b : A \subseteq G \text{ ve } b \in B\}$ olup, A açık olduğu için (1) den her $b \in B$ için $A \oplus b$ açıktır. Açık kümelerin keyfi birleşimleri de açık olduğundan $A \oplus B$ açıktır.

Benzer şekilde, $B \oplus A$ kümesinin de açık olduğu görülebilir.

(6) A ve B alt kümeleri kompakt olsun. Kompakt kümelerin keyfi çarpımları da kompakt olduğundan, $A \times B \subseteq G \times G$ kompakttır. Kompakt kümelerin sürekli fonksiyonlar altındaki görüntüsü de kompakt olduğundan ve $\oplus : G \times G \rightarrow G, (x, y) \rightarrow x \oplus y$ fonksiyonu sürekli olduğundan $\oplus(A \times B) = A \oplus B$ kümesi de kompakttır.

Aynı özellik A ile B alt kümeleri bağlantılı olduğunda da geçerlidir.

5.9. Teorem

Her dönerli topolojik grup homojendir [4].

İspat

G bir dönerli topolojik grup ve $p, g \in G$ olsun. Her $a \in G$ için $L_a : G \rightarrow G$ sol öteleme dönüşümü bir homeomorfizmdir ve özel olarak $a = q \oplus (\ominus p)$ için $L_a(p) = q$ sağlanır.

[5] de dönerli alt grup şöyle tanımlanmıştır. $(G, \oplus)$ bir dönerli grup olsun. A , G nin boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere;

A1) A kümesi üzerinde tanımlı olan $\oplus|_{A \times A}$ ikili işlemi ile $(A, \oplus|_{A \times A})$ bir magmadır,

A2) Her $a, b \in A$ için, $g[a, b]$ dönerli otomorfizmasının A kümesine kısıtlanması olan $g[a, b]|_{A \times A} : A \rightarrow g[a, b](A)$ fonksiyonu bire-bir ve örten bir homomorfizmadır,

A3) $(A, \oplus|_{A \times A})$ bir dönerli gruptur,

özellikleri sağlanıyorsa A alt kümesine G nin bir dönerli alt grubu denir [4].

5.10. Teorem

$(G, \oplus)$ bir dönerli grup olsun. A , G nin boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere eğer,

A1) Her $a \in A$ için $\ominus a \in A$

(A2) Her $a, b \in A$ için $a \oplus b \in A$

koşulları sağlanıyorsa A kümesi G nin bir dönerli alt grubudur [4].

Bir topolojik dönerli grubun her alt grubu aynı zamanda bir topolojik dönerli alt gruptur.

5.11. Teorem

$(G, \oplus, \tau)$ bir topolojik dönerli grup olsun. A , G nin bir topolojik dönerli alt grubu olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanır [4].

(1) Eğer $A^\circ \neq \emptyset$ ise A açıktır.

(2) Eğer A açıksa, aynı zamanda kapalıdır.

(3) $\bar{A}$, G nin dönerli alt grubudur.

İspat

(1) $A^\circ \neq \emptyset$ olsun. Öyleyse $x \in A^\circ$ olacak biçimde en az bir $x \in G$ vardır. $A^\circ \subseteq A$, $x \in A^\circ$ ve A dönerli alt grup olduğundan olduğundan $\ominus x \oplus A^\circ \subseteq A$ dır. A nın açık olduğunu görebilmek için $A \subseteq A^\circ$ olduğunu görmek yeterlidir. $a \in A$ alalım. $L_a(L_{\ominus x}(A^\circ)) = a \oplus L_{\ominus x}(A^\circ) = a \oplus (\ominus x \oplus A^\circ)$ ve $\ominus x \oplus A^\circ \subseteq A$ ve A dönerli alt grup olduğundan $a \oplus (\ominus x \oplus A^\circ) \subseteq A$ olup, $L_a(L_{\ominus x}(A^\circ)) \subseteq A$ dır. $x \in A^\circ$ olduğundan $\ominus x \oplus x = 0 \in \ominus x \oplus A^\circ$ olup, $a \oplus 0 \in L_a(L_{\ominus x}(A^\circ))$ dır. Öte yandan sol öteleme dönüşümü bir homeomorfizma olduğundan $L_a(L_{\ominus x}(A^\circ))$ açık olup, $a \in A^\circ$ olup, $A \subseteq A^\circ$ olur ve böylece A kümesi açıktır.

(2) A açık olsun. $\bar{A} = A$ olduğunu görelim. $\bar{A} \subseteq A$ olduğunu görmek yeterlidir. $z \in \bar{A}$ alalım. A alt dönerli grup ve her $x \in G$ için R_x sağ öteleme dönüşümü açık dönüşüm olduğundan $A \oplus z$ kümesi z elemanının açık bir komşuluğu olup, $(A \oplus z) \cap A \neq \emptyset$ olur. Buradan $a_1 \oplus z = a_2$ olacak biçimde $a_1, a_2 \in A$ elemanları vardır. Sol kısaltma kuralından $z = \ominus a_1 \oplus a_2$ bulunur. Burada $a_1, a_2 \in A$ ve A alt dönerli grup olduğu için $\ominus a_1 \oplus a_2 \in A$ olur. Yani $z \in A$ elde edilir. O halde $\bar{A} \subseteq A$ olur. Bu durumda $\bar{A} = A$ olup A kümesi kapalıdır.

(3) Her $a, b \in \bar{A}$ için $a \oplus b \in \bar{A}$ ve her $a \in \bar{A}$ için $\ominus a \in \bar{A}$ olduğunu görelim. $a \in \bar{A}$ alalım. $\ominus(\ominus a) = a$, $\ominus: G \rightarrow G, x \rightarrow \ominus x$ ters dönüşüm fonksiyonu sürekli ve A, G nin dönerli alt grubu olduğu için $\ominus(\bar{A}) \subseteq \bar{A}$ olup, $\ominus a \in \bar{A} \dots (*)$ dır. $a, b \in \bar{A}$ alalım. $a \in A$ ve sol öteleme dönüşümü sürekli olduğundan, $a \oplus b \in \overline{a \oplus A}$ olur. $a \in A$ ve A kümesi G nin topolojik dönerli alt grubu olduğu için $a \oplus A \subseteq A$ dir. Buradan kapanış özelliklerinden $\overline{a \oplus A} \subseteq \bar{A}$ elde edilir. Bu durumda $a \oplus b \in \overline{a \oplus A} \subseteq \bar{A} \dots (**)$ olur. Böylece $(*)$ ve $(**)$ den $\bar{A}$ kümesi bir topolojik dönerli alt gruptur.

5.12. Lemma

$(G, \oplus, \tau)$ bir topolojik dönerli grup olsun. $A \subseteq G$ olmak üzere 0 ın her U komşuluğu için $\bar{A} \subseteq U \oplus A$ sağlanır [4].

İspat

$x \in \bar{A}$ ve 0 ın herhangi bir U komşuluğunu alalım. $h : G \rightarrow G, x \rightarrow \ominus x$ ters dönüşüm fonksiyonu ve $R_x : G \rightarrow G, y \rightarrow y \oplus x$ sağ dönüşüm fonksiyonları homeomorfizm olduğu için U komşuluğunun bu fonksiyonların bileşkesi olan $R_{x \circ h}$ altındaki görüntüsü $\ominus U \oplus x$ kümesi açık kümedir. $x \in \ominus U \oplus x$ olup $\ominus U \oplus x$ kümesi x ın bir komşuluğu olup, Buradan $(\ominus U \oplus x) \cap A \neq \emptyset$ olur. Bu durumda $a \in (\ominus U \oplus x) \cap A$ olacak biçimde en az biçimde en az bir $a \in G$ vardır. $a \in (\ominus U \oplus x)$ olduğundan $a = \ominus u \oplus x$ olacak biçimde bir $u \in U$ vardır. $(G, \oplus)$ bir dönerli grup olduğu için sol sadeleştirme kuralı uygulanırsa, $x = u \oplus a \in U \oplus A$ elde edilir. Böylece $\bar{A} \subseteq U \oplus A$ olur.

5.13. Teorem

$(G, \oplus, \tau)$ bir topolojik dönerli grup ve U , birim eleman 0 ın bir komşuluğu olmak üzere aşağıdakiler sağlanır [4].

(1) 0 ın öyle bir açık simetrik V komşuluğu vardır ki, $V \subseteq U$ ve $V \oplus V \subseteq U$

(2) 0 ın öyle bir açık bir V komşuluğu vardır ki $\ominus V \subseteq U$

İspat

(1) G topolojik dönerli grubunun birim elemanının herhangi bir U komşuluğunu alalım.

$\oplus : G \rightarrow G$ dönüşümü sürekli ve U^0 açık olduğundan $\oplus^{-1}(U^0) \subseteq G \times G$ açıktır ve

$(0,0) \in \oplus^{-1}(U^0)$ olup, $(0,0) \in U_1 \times U_2 \subseteq \oplus^{-1}(U^0) \dots (*)$ olacak biçimde $U_1, U_2 \in N(0)$

komşulukları vardır. (*) de her tarafın $\oplus : G \rightarrow G$ dönüşümü altındaki görüntüsü alınırsa $0 \in U_1 \oplus U_2 \subseteq U^0 \subseteq U$ elde edilir. U_1 ve U_2 kümeleri 0 ın açık komşulukları olduğundan $U_1 \cap U_2$ kümesi de 0 ın açık bir komşuluğudur. $\Theta : G \rightarrow G; x \rightarrow \Theta x$ fonksiyonu bir homeomorfizma ve $\Theta 0 = 0$ olduğundan $\Theta(U_1 \cap U_2)$ kümesi de 0 ın açık bir komşuluğudur.

Şimdi $V = (U_1 \cap U_2) \cap \Theta(U_1 \cap U_2)$ kümesinin simetrik olduğunu görelim. Burada; $\Theta V = \Theta((U_1 \cap U_2) \cap \Theta(U_1 \cap U_2))$ olup, $\Theta V = \Theta(U_1 \cap U_2) \cap (U_1 \cap U_2) = V$ dir. Böylece V kümesi simetrik bir kümedir. Ayrıca V kümesi 0 ın açık bir komşuluğu olup, bu küme 0 ın açık simetrik bir komşuluğudur.

Şimdi $V \oplus V \subseteq U$ olduğunu görelim.

$V \oplus V = ((U_1 \cap U_2) \cap \Theta(U_1 \cap U_2)) \oplus (U_1 \cap U_2) \cap \Theta(U_1 \cap U_2)$ olup,
 $V \oplus V = ((U_1 \cap U_2) \cap \Theta(U_1 \cap U_2)) \oplus (U_1 \cap U_2) \cap \Theta(U_1 \cap U_2) \subseteq U_1 \oplus U_2 \subseteq U$
 dir. $V \oplus V \subseteq U$ olmasından ve Lemma 5.12 den V simetrik komşuluğunun $V \subseteq U$ koşulunu sağladığını görelim. Lemma 5.12 den $\bar{V} \subseteq V \oplus V$ olur. $V \oplus V \subseteq U$ olduğu için $\bar{V} \subseteq V \oplus V \subseteq U$ olup, kapanış özelliklerinden $V \subseteq \bar{V}$ sağlandığından $V \subseteq \bar{V} \subseteq V \oplus V \subseteq U$ olup, $V \subseteq U$ olur.

(2) Ters dönüşüm fonksiyonu sürekli olduğundan birim eleman 0 ın her U komşuluğu için için öyle bir V komşuluğu vardır ki $\Theta V \subseteq U$ dir.

5.14. Sonuç

$(G, \oplus, \tau)$ bir topolojik dönerli grup ve U , birim eleman 0 ın bir koşuluğu olmak üzere $V \oplus V \oplus V \subseteq U$ olacak biçimde 0 ın bir simetrik V komşuluğu vardır.

5.15. Sonuç

$(G, \oplus, \tau)$ bir topolojik dönerli topolojik grup ve U birim eleman 0 ın bir komşuluğu olmak üzere 0 ın öyle bir açık simetrik V komşuluğu vardır ki; $V \subseteq \bar{V} \subseteq V \oplus V \subseteq U$ sağlanır [4].

İspat

Teorem 5.12(1) den 0 ın bir U komşuluğu için $V \oplus V \subseteq U$ olacak biçimde simetrik bir V açık komşuluğu vardır. V kümesi 0 ın bir komşuluğu ve aynı zamanda V, G nin bir alt kümesi olduğundan Lemma 5.14 den 0 ın her V komşuluğu için $\bar{V} \subseteq V \oplus V$ sağlanır. $V \subseteq \bar{V}$ özelliği kapanış kurallarından sağlanmakta olup, $V \subseteq \bar{V} \subseteq V \oplus V \subseteq U$ elde edilir.

5.16. Sonuç

$(G, \oplus, \tau)$ bir topolojik dönerli grup ve G nin birim elemanı 0 olsun. 0 ın her U komşuluğu için $\bar{W} \oplus \bar{W} \subseteq U$ olacak biçimde 0 ın açık bir simetrik W komşuluğu vardır [4].

İspat

0 ın her U komşuluğu için Sonuç 5.15 den 0 ın $\bar{V} \subseteq V \oplus V \subseteq U$ olacak biçimde açık simetrik bir V komşuluğu vardır. Yine Sonuç 5.15 den 0 ın komşuluğu olan V kümesi için $\bar{W} \subseteq W \oplus W \subseteq V$ olacak biçimde 0 ın W açık bir simetrik komşuluğu vardır. Böylece $\bar{W} \oplus \bar{W} \subseteq V \oplus V \subseteq U$ olur. Buradan; $\bar{W} \oplus \bar{W} \subseteq U$ olur.

Teorem 5.17 ile G, T_0 - uzayı olan bir topolojik dönerli grup ise G nin aynı zamanda bir T_3 - uzayı olduğunu; yani, topolojik dönerli gruplarda, topolojik gruplarda olduğu gibi T_0 - uzayı ile T_3 - uzayının eşdeğer olduğu verilecek.

5.17. Teorem

$(G, \oplus, \tau)$ bir topolojik dönerli grup olsun. Aşağıdaki koşullar eşdeğerdir [4].

(1) (G, τ) uzayı T_0 -uzayıdır.

(2) (G, τ) uzayı T_1 -uzayıdır.

(3) (G, τ) uzayı T_2 -uzayıdır.

(4) (G, τ) uzayı T_3 -uzayıdır.

İspat

(1) $\rightarrow$ (2)

$(G, \oplus, \tau)$ bir topolojik dönerli grup olsun. $x \neq y$ olacak biçimde $x, y \in G$ alalım. (G, τ) uzayı T_0 -uzayı olduğundan ya $y \notin U$ olacak şekilde x in bir U açık komşuluğu vardır ya da $x \notin P$ olacak biçimde y nin bir P açık komşuluğu vardır. x in y elemanını içermeyecek biçimde bir komşuluğunu seçelim. Bu komşuluk $U \subseteq G$ olsun. $y \oplus (\ominus U \oplus x)$ kümesi de y nin bir komşuluğudur. y nin x i içermeyen bir komşuluğunun var olduğunu görelim. Bu komşuluk $y \oplus (\ominus U \oplus x)$ kümesidir. $x \in y \oplus (\ominus U \oplus x)$ olsaydı; $x = y \oplus (\ominus u \oplus x)$ olacak biçimde bir $u \in U$ elemanı var olur. Burada sol kısaltma kuralı uygulandıktan sonra $\ominus y \oplus x = \ominus y \oplus (y \oplus (\ominus u \oplus x))$ olup, sol taraf Teorem 3.5 (9) dan $\ominus u \oplus x$ dir. Böylece $\ominus y \oplus x = \ominus u \oplus x$ elde edilir. $R_x((\ominus y)) = \ominus y \oplus x = R_x(\ominus u) = \ominus u \oplus x$ olur. Sağ öteleme dönüşümü bire-bir olduğundan; $\ominus y = \ominus u$ olur. Ters dönüşüm operatörü birebir olduğundan $y = u$ bulunacaktır. Böylece $y \in U$ olacaktır. Bu ise bir çelişkidir. Bu durumda $x \notin y \oplus (\ominus U \oplus x)$ dir. O halde (G, τ) uzayı T_1 uzayıdır. Böylece x in y yi içermeyen bir U komşuluğu ve y nin x i içermeyen $y \oplus (\ominus U \oplus x)$ komşuluğu bulunmuş olur. $x \notin P$ olacak biçimde y nin bir P komşuluğunun var olma durumunda da benzer ispat yapılabilir.

(2) $\rightarrow$ (4)

G nin T_3 uzayı olması için G nin T_1 uzayı ve düzgün uzay olduğunu görelim. U , 0 ın açık bir komşuluğu olsun. Sonuç 5.15 den 0 ın öyle bir V komşuluğu vardır ki $V \subseteq \bar{V} \subseteq U$ sağlanır. Bu durumda 0 ın her komşuluğunun kapsadığı kapalı bir komşuluğu elde edildi. Topolojik dönerli gruplar homojen olduğu için 0 birim elemanın kapalı komşuluğu olduğu gibi her $x \in G$ nin de her komşuluğunun kapsadığı kapalı komşuluğu vardır. O halde (G, τ) uzayı düzenlidir. (1) den (G, τ) uzayı T_1 - uzayı olduğu için (G, τ) uzayı hem T_1 hem de düzenli olup, böylece G bir T_3 - uzayıdır.

(4) $\rightarrow$ (3) $\rightarrow$ (2) $\rightarrow$ (1) gerektirmesi her topolojik uzayda sağlanır.

Şimdi topolojik dönerli grupların premetrikleştirilebilir olma durumunu inceleyelim. Önce premetriğin tanımını verelim.

5.18. Tanım

G bir küme olsun. Her $x, y \in G$ için $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ koşulunu sağlayan

$$d : G \times G \rightarrow [0, \infty)$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

fonksiyonuna G de bir premetrik denir [4].

5.19. Tanım

(G, τ) bir topolojik uzay ve d , G de bir premetrik olsun. Her $x \in G$ ve her $\varepsilon > 0$ için;

$$B(x, \varepsilon) = \{ y \in G : d(x, y) < \varepsilon \}$$
 olmak üzere $\{ B(x, \varepsilon), x \in G, \varepsilon > 0 \}$ ailesi τ için bir

taban ise G premetrikleştirilebilir denir [4].

d premetriği tarafından üretilen topoloji τ_d biçiminde gösterilecektir.

5.20. Teorem

$(G, \oplus, \tau)$ bir Hausdorff topolojik dönerli grup olsun. Eğer G nin birim elemanı 0 sayılabilir bir komşuluklar tabanına sahip ise (G, τ) premetrikleştirilebilirdir [4].

İspat

$\{U(n) : n = 0, 1, 2, \dots\}$ ailesi 0 ın sayılabilir komşuluklar tabanı olsun. $V(0) = G$ ve her $n = 0, 1, \dots$ için $V(n+1) = V(n) \cap U(n+1)$ biçiminde tanımlanan $\{V(n) \in \tau : n = 0, 1, 2, \dots\}$ $\{V(n) \in \tau : n = 0, 1, 2, \dots\}$ ailesi 0 ın azalan bir komşuluklar tabanıdır. Ayrıca G uzayı T_1 -uzayı olduğu için $\bigcap_{n=0}^{\infty} V(n) = \{0\}$ dir.

Şimdi de $d : G \times G \rightarrow [0, \infty)$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \inf \left\{ \frac{1}{2^k} : \ominus x \oplus y \in V(k) \right\}$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonunun G üzerinde bir premetrik olduğunu görelim.

(1) d fonksiyonun tanımından $d(x, y) \geq 0$ olduğu açıktır.

(2) Her $x \in G$ için $d(x, x) = 0$ olduğunu görelim. $\ominus x \oplus x \in \{0\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} V(n)$ olmak üzere; $d(x, x) = \inf \left\{ \frac{1}{2^k} : \ominus x \oplus x \in V(k) \right\} = \inf \left\{ \frac{1}{2^k} : k = 0, 1, \dots \right\} = 0$ dir.

(3) Eğer $d(x, y) = 0$ ise $x = y$ olduğunu görelim. $d(x, y) = \inf \left\{ \frac{1}{2^k} : \ominus x \oplus y \in V(k) \right\} = 0$ ise, $I \subseteq \mathbb{N}$ olacak biçimde öyle bir I kümesi vardır ki; her $k \in I$ için, $\ominus x \oplus y \in V(k)$ dir. Şimdi $\ominus x \oplus y \in \bigcap_{k \in I} V(k) = \bigcap_{k=1}^n V(k) = \{0\}$ olduğunu görelim. Bunun için $\bigcap_{k \in I} V(k) \subseteq \bigcap_{k=1}^n V(k)$ ve $\bigcap_{k=1}^n V(k) \subseteq \bigcap_{k \in I} V(k)$ olduğunu görelim.

$p \in \bigcap_{k \in I} V(k)$ olsun. Öyleyse her $k \in I$ için $p \in V(k)$ dir. Kabul edelim ki; $p \notin V(k_0)$ olacak biçimde en az bir $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Fakat I sonsuz indisli olduğundan $k > k_0$

olacak biçimde $k \in I$ vardır. Buradan, $V(k)$ azalan komşuluk tabanı olarak alındığında $V(k) \subseteq V(k_0)$ olur. Öyleyse kabulümüz yanlış olup. Her $k \in N$ için $p \in V(k)$ dır. Buradan $p \in \bigcap_{k=1}^n V(k)$ olur.

Şimdi, $\bigcap_{k=1}^n V(k) \subseteq \bigcap_{k \in I} V(k)$ olduğunu görelim. Bunun için $p \in \bigcap_{k=1}^n V(k)$ alalım. Her $k \in N$ için $p \in V(k)$ olup, $I \subseteq N$ olduğu için her $k \in I$ için $p \in V(k)$ dır. Öyleyse, $p \in \bigcap_{k \in I} V(k)$ olur. Böylece, $\ominus x \oplus y \in \bigcap_{k \in I} V(k) = \bigcap_{k=1}^{\infty} V(k) = \{0\}$ dir. Sol Kısaltma Kuralından $x = y$ dir.

Şimdi τ nun d premetriği tarafından üretilen topoloji τ_d ile aynı olduğunu gösterelim. Yani; $\tau = \tau_d$ olduğunu görelim.

$\tau \subseteq \tau_d$ olduğunu görelim. Bunun için boştan farklı her $U \in \tau$ için $T \subseteq U$ olacak biçimde bir $T \in \tau_d$ açığının var olduğunu görelim. U boştan farklı olduğu için $x \in U$ olacak biçimde en az bir $x \in G$ vardır. Öyleyse, $\ominus x \oplus U \in N(0)$ dır. 0 azalan komşuluklar tabanına sahip olduğu için öyle bir $n_0 \in N$ için $V(n_0) \subseteq \ominus x \oplus U$ olup, sol kısaltma kuralı uygulandıktan sonra $x \oplus V(n_0) \subseteq U$ olur. $B(x, \frac{1}{2^k}) \subset U$ olduğunu görelim. Bunun için $y \in B(x, \frac{1}{2^{n_0}})$ alalım. d nin tanımından $d(x, y) = \inf \{ \frac{1}{2^k} : \ominus x \oplus y \in V(k) \} < \frac{1}{2^{n_0}}$ olur. 0 azalan komşuluk tabanına sahip olduğu için en az bir $k_0 \in N$ için $\ominus x \oplus y \in V(k_0)$ ve $\frac{1}{2^{k_0}} < \frac{1}{2^{n_0}}$ olur. $\frac{1}{2^{k_0}} < \frac{1}{2^{n_0}}$ olduğu için $n_0 < k_0$ dır. Buradan $\ominus x \oplus y \in V(k_0) \subseteq V(n_0)$ olur. Böylece, $\ominus x \oplus y \in V(n_0) \subseteq U$ bulunur. Yani $\tau \subset \tau_d$ bulunur.

Şimdi $\tau_d \subseteq \tau$ olduğunu görelim. Bunun için boştan farklı her $T \in \tau_d$ için $U \subseteq T$ olacak biçimde bir $U \in \tau$ açığının var olduğunu görelim. T boştan farklı olduğu için en az bir $x \in T$ vardır. Bu durumda $x \in B(x, \frac{1}{2^{n_0}}) \subseteq T$ olacak biçimde bir $B(x, \frac{1}{2^{n_0}})$ açığı vardır. 0 bir sayılabilir komşuluk tabanına sahip olduğundan $x \oplus V(n_0+2) \subseteq B(x, \frac{1}{2^{n_0}})$ olduğunu

görmek yeterlidir. Öyleyse $y \in x \oplus V(n_0+2)$ alalım. Sol kısaltma kuralı uygulandıktan sonra $\ominus x \oplus y \in V(n_0+2)$ olur. Böylece d nin tanımından;

$$d(x,y) = \inf \left\{ \frac{1}{2^k} : \ominus x \oplus y \in V(k) \right\} \leq \frac{1}{2^{n_0+2}} < \frac{1}{2^{n_0}}$$

olup, $d(x,y) < \frac{1}{2^{n_0}}$ dir. Buradan $y \in B(x, \frac{1}{2^{n_0}})$ elde edilir. Böylece $\tau_d \subseteq \tau$ bulunur.

Böylece $\tau_d = \tau$ olur. Öyleyse 0 da sayılabilir komşuluklar tabanına sahip olan bir Hausdorff topolojik dönerli grubu premetrikleştirilebilir. $\square$

UYARI: Burada, her $a, x, y \in G$ için;

$$d(a \oplus x, a \oplus y) = \inf \left\{ \frac{1}{2^k} : \ominus(a \oplus x) \oplus (a \oplus y) \in V(k) \right\} \neq \inf \left\{ \frac{1}{2^k} : \ominus x \oplus y \in V(k) \right\}$$

olup, $d(a \oplus x, a \oplus y) \neq d(x,y)$ dir. Buna göre d premetriği sol değişmez değildir.

Bu nedenle [5] de verilen,

S1) Hausdorff ve birinci sayılabilir bir G topolojik dönerli grubu metrikleştirilebilirdir.

S2) Hausdorff topolojik dönerli grubu tamamen düzgündür.

Soruları Birkhoff – Kakutani teoreminin topolojik gruplarda kullanılan yöntemiyle cevap verilemez.

Şimdi dönerli topolojik grupların direkt çarpımlarını inceleyelim. Bir dönerli grup ailesinin Kartezyen çarpımlarının da bir dönerli grup olduğunu ve bir topolojik dönerli grup ailesinin Kartezyen çarpımının da bir topolojik dönerli grup olduğunu görelim.

Her $i \in I$ için $(G_i, \oplus_i)$ indekslenmiş dönerli grup ailesi ve bu ailenin çarpım kümesi

$$G = \prod_{i \in I} G_i = \{ (x_i) : i \in I \text{ için } x_i \in G_i \} \text{ olmak üzere}$$

$$\oplus : \prod_{i \in I} G_i \times \prod_{i \in I} G_i \rightarrow \prod_{i \in I} G_i$$

$$(x, y) \rightarrow x \oplus y = ((x_i) \oplus_i (y_i))$$

işlemi ile G bir dönerli gruptur [4].

Birim eleman ve ters eleman özelliği topolojik gruplardaki gibi görülebilir. Öyleyse $\oplus$ işleminin sol dönerli birleşme özelliğini sağladığını görelim.

Her $x, y, z \in \prod_{i \in I} G_i$ için $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus g[x, y](z)$ sol birleşme özelliği sağlanır.

Şöyle ki, her $i \in I$ için $(G_i, \oplus_i)$ dönerli grup olduğundan her $x_i, y_i, z_i \in G_i$ için;

$$(x_i \oplus_i y_i) \oplus_i z_i = (x_i \oplus_i y_i) \oplus_i g[x_i, y_i](z_i)$$

olacak biçimde $g[x_i, y_i] : G_i \rightarrow G_i$, $\text{Aut}(G_i, \oplus_i)$ otomorfizması vardır. Böylece,

$$(x \oplus y) \oplus g[x, y](z) = ((x_i \oplus_i y_i) \oplus_i g[x_i, y_i](z_i)) = (x_i \oplus_i (y_i \oplus_i z_i)) = x \oplus (y \oplus z) \text{ olacak}$$

biçimde $g[x, y] : G \rightarrow G$,

$$p = (p_i) \rightarrow g[x, y] p = (g[x_i, y_i] p_i)$$

$g[x, y] \in \text{Aut}(G_i, \oplus_i)$ otomorfizması vardır.

5.21. Teorem

$(G_i, \oplus_i, \tau_i : i \in I)$ indekslenmiş bir dönerli grup ailesi olsun. Bu durumda G_i ailesinin direkt çarpımı olan $\prod_{i \in I} G_i$ kümesi kutu ve çarpım topolojilerine göre bir topolojik dönerli gruptur [4].

İspat

$G = \prod_{i \in I} G_i$ kümesinin bir topolojik dönerli grup olduğunu görmek için; Her $i \in I$ için

G_i uzayı bir topolojik dönerli grup olduğundan,

$$\varphi_i : G_i \times G_i \rightarrow G_i$$

$$(x, y) \mapsto \varphi_i(x, y) = x \oplus (\ominus y)$$

fonksiyonun sürekliliğinden faydalanarak, $\prod_{i \in I} G_i$ uzayı üzerinde tanımlanan

$$\varphi : \prod_{i \in I} G_i \times \prod_{i \in I} G_i \rightarrow \prod_{i \in I} G_i$$

$$(f, g) \mapsto \varphi(f, g) = f \oplus (\ominus g) = (f_i \oplus_i (\ominus g_i))$$

fonksiyonun sürekliliğini topolojik gruplardakine benzer şekilde görelim. G kümesi üzerinde çarpım topolojisi var olsun. $f_0, g_0 \in G$ olmak üzere $\varphi(f_0, g_0) = f_0 \oplus (\ominus g_0)$ noktasının herhangi bir U komşuluğunu alalım. U komşuluğu çarpım topolojisine göre açık olduğundan sadece sonlu sayıda $i \in I$ için $U_i \neq G_i$ için $f_0 \oplus (\ominus g_0) \in \prod_{i \in I} U_i \subseteq U$ olacak biçimde $U_i \subseteq G_i$ açıkları vardır. $f \oplus (\ominus g) = (f_0(i) \oplus (\ominus g_0(i)))$ olduğundan her $i \in I$ için; $f_0(i) \oplus (\ominus g_0(i)) = \varphi_i(f_0(i), (\ominus g_0(i))) \in U_i$ dir. φ_i fonksiyonları sürekli olduğundan her $i \in I$ için $V_i \oplus_i (\ominus W_i) \subseteq U_i$ olacak biçimde $f_0(i)$ ve $g_0(i)$ nin açık V_i ve W_i komşulukları vardır. $U_i = G_i$ biçimindeki her i için $V_i = G_i, W_i = G_i$ seçmek genelliği bozmaz. O halde $V = \prod_{i \in I} V_i$ ve $W = \prod_{i \in I} W_i$ denirse, V, f_0 ın bir açık komşuluğu ve W, g_0 ın açık bir komşuluğu olur ve $\varphi(V \times W) \subseteq U$ sağlanır. O halde φ fonksiyonu çarpım topolojisine göre süreklidir ve $(\prod_{i \in I} G_i, \oplus, \tau)$ üçlüsü çarpım topolojisine göre bir topolojik gruptur.

Şimdi de kutu topolojisine göre

$$\varphi : \prod_{i \in I} G_i \times \prod_{i \in I} G_i \rightarrow \prod_{i \in I} G_i,$$

$$(f, g) \mapsto \varphi(f, g) = f \oplus (\ominus g) = (f_i \oplus_i (\ominus g_i))$$

fonksiyonun sürekliliğini görelim. Bunun için çarpım topolojisinde yaptığımız gibi her $f_0, g_0 \in \prod_{i \in I} G_i$ olmak üzere $f_0 \oplus (\ominus g_0)$ noktasının herhangi bir U komşuluğunu alalım. U kutu topolojisine göre açık olduğundan $f_0 \oplus (\ominus g_0) \in \prod_{i \in I} U_i \subseteq U$ olacak biçimde

$U_i \subseteq G_i$ açıkları vardır. $f_0 \oplus (\Theta g_0) = (f_0(i) \oplus (\Theta g_0(i)))$ olduğundan her $i \in I$ için; $f_0(i) \oplus (\Theta g_0(i)) = \varphi_i(f_0(i), (\Theta g_0(i))) \in U_i$ dir φ_i fonksiyonları sürekli olduğundan her $i \in I$ için $V_i \oplus_i(\Theta W_i) \subseteq U_i$ olacak biçimde $f_0(i)$ ve $g_0(i)$ nin açık V_i ve W_i komşulukları vardır. O halde $V = \prod_{i \in I} V_i$ ve $W = \prod_{i \in I} W_i$ denirse, V , f_0 ın bir açık komşuluğu ve W , g_0 ın açık bir komşuluğu olur ve $\varphi(V \times W) \subseteq U$ sağlanır. O halde kutu topolojisine göre φ fonksiyonu sürekli olup, $(\prod_{i \in I} G_i, \oplus, \tau)$ üçlüsü kutu topolojisine göre bir topolojik dönerli gruptur.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmadaki dönerli gruplar ve topolojik dönerli gruplarla ilgili bazı sonuç ve öneriler şöyledir;

1-) $(G, \oplus)$ dönerli grubu; sol birim eleman özelliği, sol ters eleman özelliği, sol dönerli birleşme özelliği ve sol döngü özelliğine sahip olduğu gibi, sol dönerli birleşme özelliğinden yararlanılarak sağ dönerli birleşme özelliği ve sol döngü özelliğinden yararlanılarak sağ döngü özelliği tanımlandığı ve her sol birim eleman sağ birim eleman ve her sol ters eleman sağ ters eleman olduğu için; sağ dönerli birleşme, sağ birim, sağ ters, sağ döngü özelliklerini sağlayan $(G, \oplus)$ magmasına bir dönerli grup denir.

2-) Topolojik gruplarda T_0 - uzayı ile T_3 - uzayı eşdeğer olduğu gibi topolojik dönerli gruplarda da aynı durum vardır.

3-) Birkhoff-Kakutani teoremi ile birinci sayılabilir bir topolojik grup metrikleştirilebilirken, topolojik dönerli gruplar üzerinde sol (sağ) değişmez bir metrik tanımlanamadığı için topolojik dönerli grupların metrikleştirilebilir olması Birkhoff-Kakutani teoreminin topolojik gruplarda kullanılan yönteminden yararlanılarak gösterilemez.

KAYNAKLAR

1. Ungar, A. A. (2008). *A Gyrovector Space Approach to Hyperbolic Geometry*. Washington: Morgan and Claypool Publishers, 1-50.
2. Ungar, A. A. (1990). Weakly Associative Groups, *Results in Mathematics*, 17 (1), 149-168.
3. Ungar, A. A. (2008). *Analytic Hyperbolic Geometry and Albert Einstein's Special Theory of Relativity*, Singapur: World Scientific Publishing, 1-39.
4. Watchareepan A. (2017). *Topological gyrogroups: Generalization of topological groups*, *Topology and its Applications* . Amsterdam: Elsevier B.V. 224, 73-82.
5. Spivak, D. (2008). *An Introducton to Topological Groups*, Kanada: Lakehead University, 1-27.
6. Dikrajan, D. (2007). *Introduction to Topological groups*, Madrid: Milan University, 20-36.
7. Arhangel'skii, A. and Tkachenko, M. (2008). *Topological groups and Related Structures*, Amsterdam: Atlantis Press/World Scientific, 1-37.
8. Suksumran, T. and Wiboonon, K. (2014). Lagrange's theorem for Gyrogroups and Cauchy Property, *Quasigroups and Related System*, 22(1), 283- 294.
9. Iturbe, K. B. (2015). *Topological Groups. Final Degree Dissertation Degree in , Mathematics*, Leioa: 1-31.
10. Hewitt, E. and Kenneth, A. Ross. (1963). *Abstract Harmonic Analysis 1*, New York: Springer INC. Publishers, 15-70.
11. Swatilenka, N. (2016). A study on Topological Groups and Their Seperation Axioms, *International Journal of Mathematic and Physical Research*, 4(2), 119-126.
12. Husain T. (1994). *Introduction to Topological Groups*, New York: Dover Publications, 1-6.
13. Yıldız, C. (2013). *Genel Topoloji* (Dördüncü Baskı). Türkiye: Gazi Kitabevi, 1 – 320.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : YÜCEL, Nurten
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 06.05.1987, Ankara
 Medeni hali : Bekar
 Telefon : 0 (312) 527 22 03
 e-mail : netrunc87@hotmail.com



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Gazi Üniversitesi/ Matematik	Devam ediyor
Lisans	Ankara Üniversitesi/ Matematik	2011
Lise	Ankara İnönü Süper Lisesi	2005

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2011-2012	Açı Dershanesi	Öğretmen
2012-2015	Milli Eğitim Bakanlığı	Öğretmen
2019-	Sakarya İşkur	Memur

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

Yücel, N. (2018, 27-28 Nisan), *Topolojik Gyrogruplar*, 13. AMG, Ankara.

Hobiler

Kitap okumak, yeni filmleri takip etmek, müzik dinlemek



GAZİ GELECEKTİR...