



AĞIRLIKLİ GRAFLARIN DETOUR MATRİSİ

Özgür KOCAKERİMOĞLU

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

NİSAN 2021

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Özgür KOCAKERİMOĞLU

21/04/2021

AĞIRLIKLIL GRAFLARIN DETOUR MATRİSİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Özgür KOCAKERİMOĞLU

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Nisan 2021

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır. İkinci bölümde grafin esas tanım ve özelliklerinden, Detour matrisi ve indekslerden bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde yardımcı lemma ve teoremler verilmiştir. Dördüncü bölümde ağırlıklı Detour matrisi için Randić indeksinin yeniden düzenlenmiş formülü, özel graflar için Detour matrisleri ve Detour matrisinin spektral yarıçapının sınırları için bazı lemma ve teoremler elde edilmiştir. Beşinci bölüm ise sonuç bölümüdür, burada tezde yapılanlar özetlenmiştir.

Bilim Kodu : 20401
Anahtar Kelimeler : Graf teori, spektral yarıçap, Detour matrisi, Randić indeksi
Sayfa Adedi : 52
Danışman : Prof. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE

DETOUR MATRIX OF WEIGHTED GRAPHS

(M. Sc. Thesis)

Özgür KOCAKERİMOĞLU

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

April 2021

ABSTRACT

This thesis consists of five chapters. The first chapter is reserved for introduction. In the second chapter, basic definitions and properties of graph, Detour matrix and indexes are mentioned. In the third chapter, auxiliary lemma and theorems are given. In the fourth chapter, the rearranged formula of Randić index for the weighted Detour matrix, Detour matrices for special graphs and some lemmas and theorems for the boundaries of the spectral radius of the Detour matrix are obtained. The fifth part is the conclusion part, where it is summarized what has been done in the thesis.

ScienceCode : 20401
KeyWords : Graph theory, spectral radius, Detour matrix, Randić index
PageNumber : 52
Supervisor : Prof. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca her daim yanımda olan ve desteklerini esirgemeyen çok değerli hocam Prof. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE'ye, çalışmalarımda bana yardımcı olan sevgili arkadaşım Sevtap KARABİBER'e ve maddi, manevi destekleri için sevgili aileme teşekkürü borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. ESAS TANIMLAR	5
2.1. Genel Bilgiler.....	5
2.2. Graf Kavramı	8
2.3. Graflar için Bazı Matrisler	11
2.4. Detour İndeksi ve Randić İndeksi.....	18
3. YARDIMCI TEOREM VE LEMMALAR.....	21
4. AĞIRLIKLİ GRAFLARIN DETOUR MATRİSİ	27
5. SONUÇ.....	47
KAYNAKLAR	49
ÖZGEÇMİŞ	51

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 1.1. Königsberg'in yedi köprüsünün Euler çizimi.....	1
Şekil 2.1. Graf örnekleri.....	8
Şekil 2.2. Basit graf.....	10
Şekil 2.3. Bağlantılı graf	11
Şekil 2.4. Ağırlıklı graf	11
Şekil 2.5. Devir graf.....	12
Şekil 2.6. Tam graf.....	12
Şekil 2.7. İki parçalı tam graf.....	13
Şekil 2.8. Yıldız graf.....	13
Şekil 2.9. 3-Regüler graf	13
Şekil 2.10. Bidegreed graf	14
Şekil 2.11. Ağaç graf	14
Şekil 2.12. İkili ağaç graf.....	15
Şekil 2.13. G_3 grafi.....	16
Şekil 2.14. G_4 grafi.....	17
Şekil 2.15. Ağırlıklı G_5 grafi.....	18
Şekil 2.16. G_6 grafi.....	19
Şekil 4.1. G grafi.....	27
Şekil 4.2. G Yıldız grafi.....	29
Şekil 4.3. $K_{2,3}$ tam iki parçalı grafi.....	31
Şekil 4.4. G devir grafi.....	33
Şekil 4.5. G ikili ağaç.....	36
Şekil 4.6. G grafi.....	40
Şekil 4.7. G grafi.....	44

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu tezde kullanılmış, simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile aşağıda verilmiştir.

Simgeler	Açıklamalar
$G = (V, E)$	Graf
V	Noktalar kümesi
E	Kenarlar kümesi
$i \sim j$	i ile j noktalarının komşuluğu
d_i	i noktasının derecesi
$\lambda_1(G)$	G grafının en büyük özdeğeri
$ \lambda_1 (G)$	G grafının spektral yarıçapı
$A(G)$	G grafının komşuluk matrisi
$D(G)$	G grafının Detour matrisi
n	Grafın nokta sayısı
e	Grafın kenar sayısı
w_{ij}	i ile j köşeleri arasındaki kenar ağırlığı
$d(i, j)$	i ile j köşeleri arasındaki en kısa uzaklık
$L(i, j)$	i ile j köşeleri arasındaki en uzun uzaklık
C_n	n noktalı devir
K_n	n noktalı tam graf
$K_{m,n}$	İki parçalı tam graf
S_n	n noktalı yıldız graf
$\bar{x}$	Özvektör

1. GİRİŞ

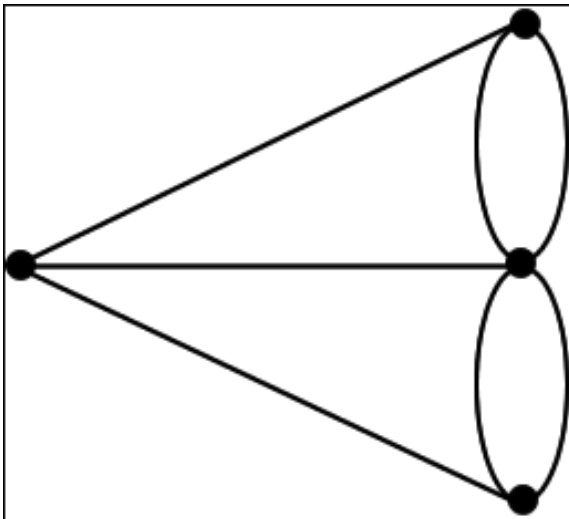
Graf Teori kullanım sahası geniş olan oldukça meşhur bir alandır ve farklı sahalardaki çoğu problemin basitleştirilerek iyi, etkin ve düzgün aşamalar ile çözülmesine olanak tanır.

Temel özetle graf, köşeler ile hepsi bu köşeleri veya sadece köşenin kendisini bağlayan kenar diye isimlendirilen çizgiler bütünüdür. Çokça graf çeşidi mevcuttur. Bunlara örnek olarak tam graf, ağaç graf, regüler graf, yıldız graf, devir graf verilebilir.

Graf Teori, meşhur matematik bilim insanı Leonhard Euler'ın 1736 senesinde “Königsberg’in Yedi Köprüsü” problemi için bulduğu çözüm yöntemi ile meydana çıkmıştır [1].

Königsberg şehri Pregel nehrinin yanına kurulmuştur ve 7 ayrı köprü ile birbirine bağlanmış 4 farklı ana bölümden oluşmaktadır. Zamanla insanlar kendilerine, aynı köprüden bir kez daha geçememek üzere tüm şehri dolaşmanın mümkün olup olmayacağı sorusunu yöneltmişlerdir. Fakat o dönem Leonhard Euler dahil hiç kimse böyle bir rota çizememiştir. Fakat Euler bu rotanın niçin mümkün olamayacağını ispatlayabilmiştir.

Euler problemi ispatlamak için kent içinde köprü köprü gezmek yerine kâğıt üzerinde köprüleri çizgiler ve şehir parçalarını da noktalar halinde ifade etmiştir. Böylece muhtemelen ilk graf diyebileceğimiz şekli çizmiştir.



Şekil 1.1. Königsberg’in yedi köprüsünün Euler gösterimi

Bu şekil üzerinden çalışmalarını sürdüren Euler bir zaman sonra bu teoremin mümkün olamayacağını anlamış ve hangi durumlarda mümkün olurdu sorusu üzerine odaklanarak problemin çözümünü “Solutio Problematis Ad Geometriam Situs Pertinentis” adlı makalesiyle yayımlamış ve graf teorisinin başlangıcını oluşturmuştur. Ayrıca topoloji-graf ilişkisini meydana çıkarmıştır [2].

Bu dolaşmanın mümkün olduğu grafların şu nitelikleri sağlaması gerektiğini savunmuştur: Bağlantılı bir grafin bütün elemanlarını bir ve sadece bir kez kullanarak dolaşmak için o grafin tek dereceli köşelerinin sayısı (eğer mevcutsa) iki olmalıdır. Tek dereceli köşeler dolaşmanın başlangıç ile bitiş köşeleri olacaktır. Grafta böyle köşeler mevcut değilse dolaşmaya herhangi bir köşeden başlanabilir [2].

Königsberg köprülerine sahip graf çizimine baktığımızda, bu şartın oluşmadığını görürüz. Çünkü tüm köşeleri tek derecelidir. Hangi köşeyi ortaya alırsak alalım, her girişe karşılık bir çıkış yolu olmaz. Dolayısıyla, Königsberg'iler, kentlerini her köprüyü bir ve sadece bir kez kullanarak gezemezler.

Graf kelimesi, ilk defa 1822 yılında J. J. Sylvester tarafından kullanılmıştır [1].

Günlük yaşamımızda çokça problemin çözümü için tercih edilen graflar; satış, pazarlama, işletme, yönetim, bilgi iletme, ekonomi, matematik, kimya, biyoloji, fizik, ulaşım, bilgisayar bilimleri, oyun teorisi, kodlama teorisi, arkeoloji, ekoloji, müzik, sanat ve sosyoloji gibi birçok sahayı kapsamaktadır. Graf Teori; kentlerde, yol bakımı, çöp toplama, mektup dağıtımı, kar temizleme, polis araçlarının devriye rotalarının belirlenmesi, elektrik sayaçlarının okunması gibi işlemlerde her yoldan veya her konuttan en az bir kere geçerek mümkün olan en kısa mesafenin belirlenmesinde kullanılarak ekonomiyi iyi yönde etkilemekte, ayrıca zaman kaybını da engellemeye yardımcı olmaktadır. Ayrıca navigasyonlarda en kısa yolun belirlenmesinde, otobüs ve metro gibi ulaşım araçlarının güzergâhının en iyi ve uygun şekilde oluşturulmasında, kanalizasyon yapılarının planlanmasında kullanılmaktadır. Bilgisayar bilimlerinde ise; bilgisayar ağları, yazılım, algoritmalar, diyagramlar, internet sayfaları, oyunlar, sosyal medya ağlarında ve daha fazla alt alanında kullanılmaktadır. Elektrik ve elektronik mühendisliğinde ise çok geniş bir kullanıma sahip olup yaygın olarak devrelerin gösterimi ve çözümü için kullanılmaktadır. Graf Teori ayrıca diğer mühendisliklerde de kullanılmaktadır.

Sonuç olarak Graf Teori birçok uygulama alanına sahip olan matematiğin çok fazla gelişmiş ve önem arz eden bir alanıdır.

Bu tezde çalışmış olduğumuz Detour matrisini 1969 senesinde Frank Harary matematik alanına kazandırmış, Ivancive ile Balaban ise 1964 senesinde moleküler bir grafin maksimum yol matrisi ismi ile kimya alanına kazandırmıştır. Randić indeksi ise 1975 yılında Milan Randić tarafından literatüre kazandırılmıştır. Sonrasında üzerine yapılan çalışmalar zamanla artmıştır [3].

Bu tez çalışmasında Detour matrisi ve ağırlıklı Detour matrisi çalışılmıştır. İlk olarak ağırlıklı graflar için Randić indeks kavramı yeniden oluşturulmuş, sonra ise bazı özel graflar için Detour matrisi incelenmiş ve bu grafların spektral yarıçapları için alt ve üst sınırlar elde edilmiştir. Son olarak Detour matrislerinden faydalanılarak genel grafların spektral yarıçapı için lemma ve teoremler elde edilmiştir.

2. ESAS TANIMLAR

Bu kısımda tezde kullanılacak lineer cebir ve graf teori konularını içeren bazı esas tanımlar verilmiştir.

2.1. Genel Bilgiler

Tanım

A , $n \times n$ boyutlu bir kare matris ve $x \neq 0$, $n \times 1$ boyutlu matris olmak üzere,

$$Ax = \lambda x \quad (2.1)$$

olacak şekilde λ skaleri mevcut olsun. (2.1) denklemi, I , $n \times n$ birim matris olmak üzere,

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (2.2)$$

şeklinde yazılabilir. (2.2) denklem sistemi aşikâr olmayan çözüme,

$$\det(A - \lambda I) = |A - \lambda I| = 0 \quad (2.3)$$

olması halinde sahiptir.

$\det(A - \lambda I)$ 'nın hesaplanması halinde λ 'ya bağlı $n - y$ inci dereceden monik bir polinom elde edilir. Bu polinoma A 'nın karakteristik polinomu denir ve $K_A(\lambda)$ biçiminde gösterilir. Yani $K_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ olur.

$K_A(\lambda) = 0$, A matrisinin karakteristik polinomu olarak adlandırılır. Bu karakteristik polinomun köklerine A matrisinin özdeğerleri adı verilir.

$K_A(\lambda) = 0$, $n - y$ inci dereceden bir denklem olduğundan cebirin esas teoremi göz önüne alındığında tam olarak n tane köke sahip olur. Bu köklerin hepsinin farklı olma zorunluluğu yoktur.

$$Ax = \lambda x \text{ veya } (A - \lambda I)x = 0 \quad (2.4)$$

denkleminde sıfıra eşit olmayan x çözümlerine A , $n \times n$ boyutlu matrisinin λ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri adı verilir. Bu tanımından özdeğer ve özvektörlerin

$$Ax_i = \lambda x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.5)$$

esas formülü elde edilir [4].

Tanım

A bir $n \times n$ boyutlu matris olmak üzere, A matrisine ait olan özdeğerler $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ olup bu matrise ait olan özdeğerlerin kümesi;

$$spek(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

biçiminde gösterilir.

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\} \quad (2.6)$$

ifadesine ise A matrisinin spektral yarıçapı adı verilir [4].

Tanım

A ve B matrisleri $n \times n$ boyutlu iki matris olmak üzere

$$B = P^{-1}AP \quad (2.7)$$

olacak biçimde tekil olmayan ($\det P \neq 0$) bir P matrisi var ise, o zaman A ve B matrislerine benzerdir denir.

Benzer matrisler denk matrislerin özel bir hali olup ve bu matrislerin determinantları aynıdır. Benzer matrisler aynı karakteristik polinoma sahiptir ve bu nedenle de aynı özdeğerlere sahiptir [4].

Tanım

$A = (a_{ij})_{n \times n}$ matrisi elemanları karmaşık sayılar olan bir kare matris olmak üzere,

$$A^T = \bar{A} \quad (2.8)$$

koşulu sağlanıyorsa, o zaman A matrisine Hermityen matris adı verilir [4].

Tanım

A , $n \times n$ boyutlu bir Hermityen matris olsun. Sıfırdan farklı bütün $x \in \mathbb{C}^n$ için

$$x^*Ax > 0 \quad (2.9)$$

koşulu sağlanıyorsa A matrisine pozitif tanımlı matris adı verilir. Eğer

$$x^*Ax \geq 0 \quad (2.10)$$

koşulu sağlanıyorsa A matrisine pozitif yarı tanımlı matris adı verilir. Pozitif tanımlı her matris aynı zamanda pozitif yarı tanımlı matristir. Eğer A tekil olmayan pozitif yarı tanımlı matris ise pozitif tanımlı matristir [5].

Tanım

Bir $A = (a_{ij})_{n \times n}$ kare matrisinin her bir elemanı negatif olmayan bir gerçel sayı ise A matrisine negatif olmayan matris adı verilir. Yani her i, j için $a_{ij} \geq 0$ olur. Negatif olmayan matrisler bu nedenle pozitif matrislerin bir üst kümesidir [6].

Tanım

Herhangi bir $n \times n$ boyutlu A matrisi için P^TAP matrisi üst blok üçgen olacak biçimde $n \times n$ boyutlu bir P matrisi bulunabiliyorsa A matrisine indirgenebilir matris adı verilir. İndirgenebilir olmayan matrise de indirgenemez matris adı verilir [6].

2.2. Graf Kavramı

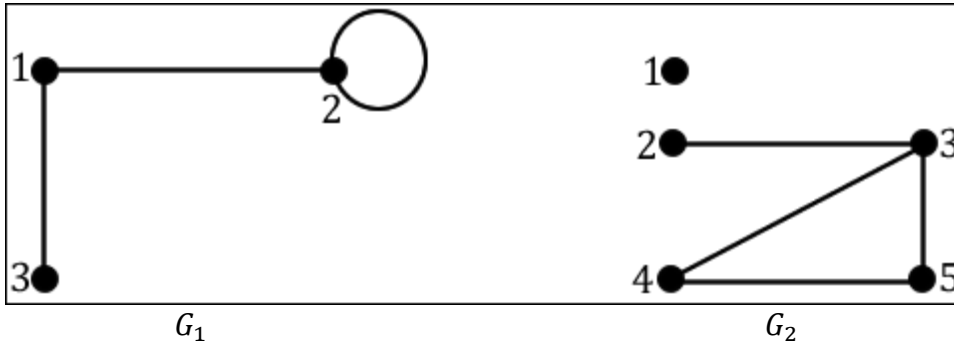
Tanım

Graf, nokta (köşe) adı ile anılan sonlu olan ve boştan farklı $V = \{1, 2, \dots, n\}$ nokta kümesi ile kenar adı ile anılan sonlu olan E kenarlar kümesinden meydana gelen (V, E) ikili yapısıdır. Gösterim olarak $G = (V, E)$ veya G ifadeleri kullanılır.

$$E = \{\{i, j\} : i, j \in V\} \text{ ya da } E = \{ij : i, j \in V\}$$

biçimindedir [7].

Graf özetle noktalar ve bu noktaları birbirine bağlayan kenarlardan oluşan bir yapıdır.



Şekil 2.1. Graf örnekleri

Şekil 2.1 de verilen G_1 ve G_2 grafları sırasıyla 3 nokta, 3 kenar ve 5 nokta, 4 kenar içerir.

Tanım

$G = (V, E)$ nin rastgele iki tane i ve j köşeleri arasında en az bir tane kenar bulunuyorsa i ve j köşelerine komşu adı verilir ve gösterimi kısaca $i \sim j$ biçimindedir [7].

Şekil 2.1 de verilen G_1 grafiğinde 1 ve 3 noktaları komşu olup $1 \sim 3$ ile şeklinde gösterilir.

Tanım

Grafın bir i köşesine etki eden kenar sayısına o köşenin derecesi adı verilir ve gösterimi d_i biçimindedir [7].

Şekil 2.1 de verilen G_1 grafi için $d_1 = 2$, $d_2 = 3$, $d_3 = 1$ ve G_2 grafi için $d_1 = 0$, $d_2 = 1$, $d_3 = 3$, $d_4 = 2$ ve $d_5 = 2$ dir.

Tanım

Başlangıç ve bitiş köşeye aynı olan kenara ilmek adı verilir [7].

Şekil 2.1 ile verilen G_1 grafi için $\{2,2\}$ bir ilmektir.

Tanım

Bir grafta herhangi bir noktaya bağlı olan kenar sayısı 0 (sıfır) ise bu noktaya izole nokta, 1 (bir) ise bu noktaya pendant nokta (uç nokta) adı verilir [7].

Şekil 2.1 ile verilen G_2 grafi için 1 bir izole nokta, G_1 grafi için 3 bir pendant noktadır.

Tanım

Bir graf sayılabilir sayıda nokta ve kenara sahip ise sonlu graf olarak, aksi durumda ise sonsuz graf olarak adlandırılır [7].

Bir G grafinin m tane kenarı ve $v_1, v_2 \dots v_n$ ile gösterilen n tane noktası olsun. Bu grafin noktalarının dereceleri toplamı kenar sayısının iki katına eşit olup matematiksel olarak

$$\sum_{i=1}^n \deg(v_i) = \sum_{i=1}^n d(v_i) = \sum_{i=1}^n d_i = 2m$$

biçiminde ifade edilebilir [7].

Bu tez çalışmasında basit ve sonlu grafları kullanacağız.

Tanım

Bir $G = (V, E)$ grafinın i ve j köşeleri arasındaki en az kenar sayısına sahip yolun uzunluğuna i ve j köşeleri arasındaki uzaklık (mesafe) adı verilir ve i ile j arasındaki mesafe $d(i, j)$ biçiminde gösterilir [7].

Tanım

Bir G grafinın her nokta çifti arasındaki maksimum uzaklığa G grafinın çapı (diameter) adı verilir ve $\text{çap}(G)$ veya $\text{diam}(G)$ biçiminde gösterilir [7].

Tanım

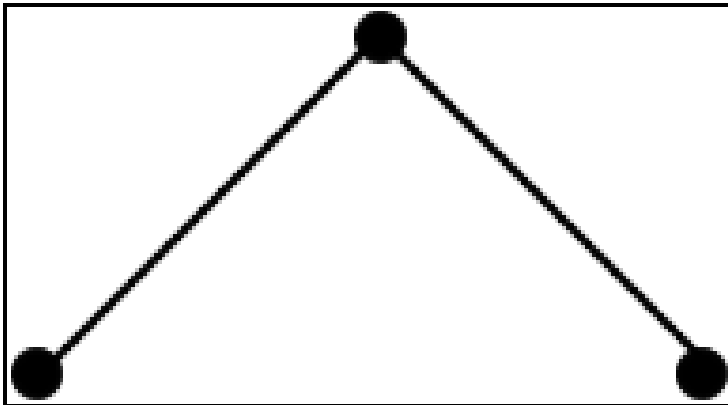
Bir G grafinın her nokta ikilisi arasındaki minimum uzaklığa G grafinın yarıçapı (radius) adı verilir ve $\text{rad}(G)$ biçiminde gösterilir [7].

Tanım

Grafta her köşenin yalnızca bir kere kullanıldığı ardışık olarak ilerleyen k köşe dizisine k -uzunluğunda yol adı verilir [7].

Tanım

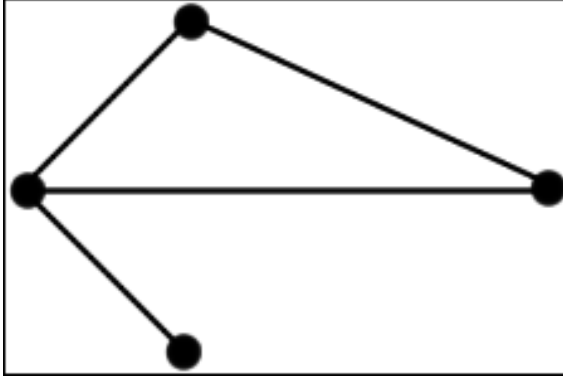
Rastgele iki noktası arasında en çok bir adet kenar bulunduran ve ilmek bulundurmeyen grafa basit graf adı verilir [7].



Şekil 2.2. Basit graf

Tanım

Rastgele iki noktası arasında bir yola sahip olan grafa bağlantılı graf adı verilir [7].



Şekil 2.3. Bağlantılı graf

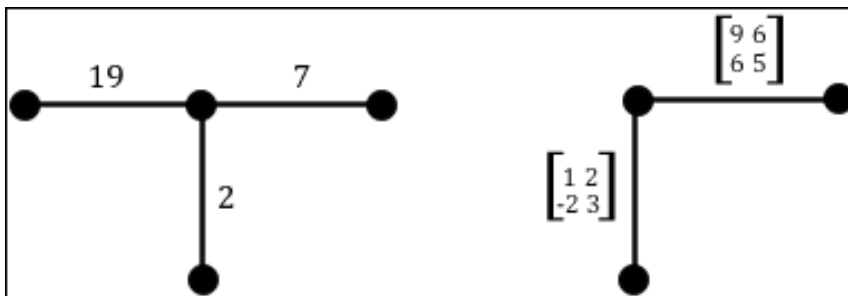
Tanım

Bir grafin her kenarına pozitif gerçel sayı ya da pozitif tanımlı kare matris işlenerek elde edilen grafa ağırlıklı graf adı verilir. Kenarın ağırlığının gösterimi w_{ij} biçimindedir.

Bir tane köşenin ağırlığının gösterimi ise;

$$w_i = \sum_{i \sim j} w_{ij}$$

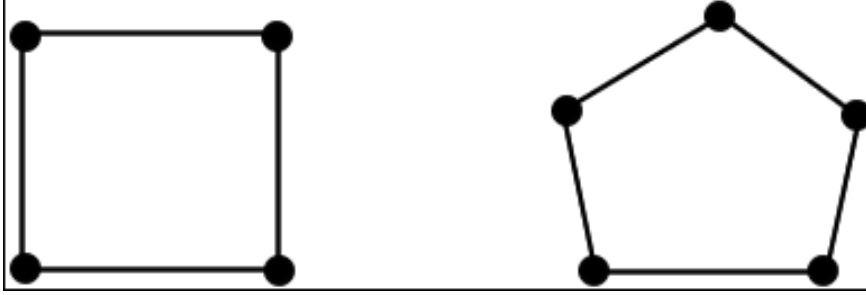
dir. Kısaca köşenin ağırlığını, o köşe ile o köşeye komşu olan köşeler arasındaki kenarların ağırlıklarının toplamı şeklinde tanımlayabiliriz [7].



Şekil 2.4. Ağırlıklı graf

Tanım

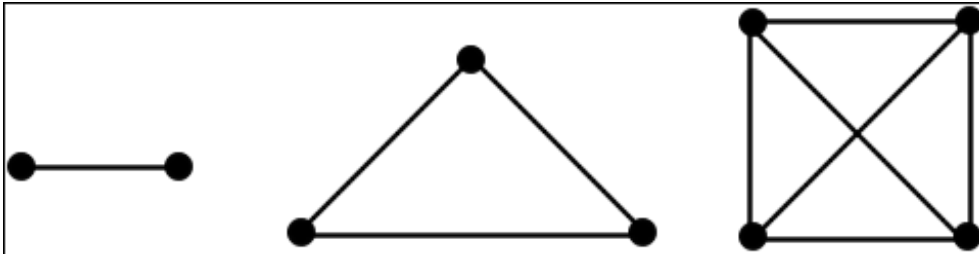
Başlangıç ile bitiş köşesi aynı yola devir adı verilir ve n köşeli bir devirin gösterimi C_n biçimindedir [7].



Şekil 2.5. Devir graf

Tanım

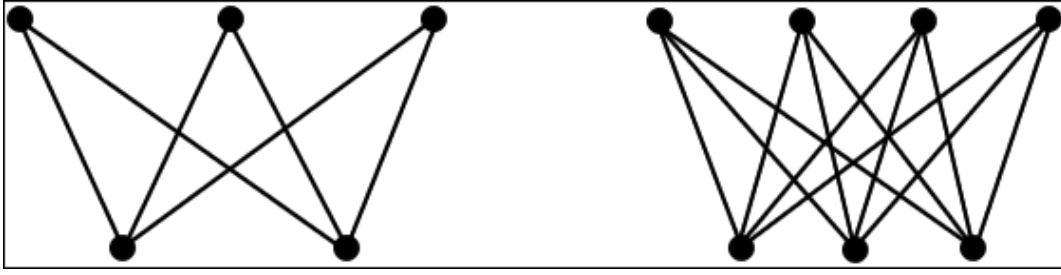
n köşeli G basit grafının rastgele iki köşesi arasında kenar bulunuyorsa bu grafa tam graf adı verilir ve gösterimi K_n biçimindedir [7].



Şekil 2.6. Tam graf

Tanım

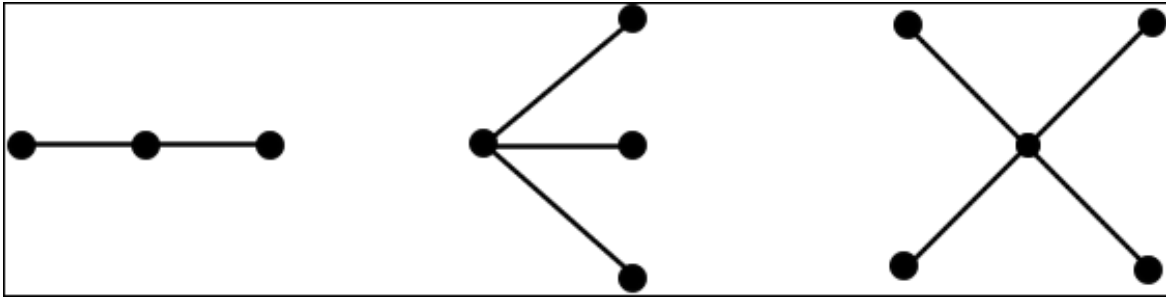
$|U| = p$ ve $|W| = r$ olsun. $V = U \cup W$ ve $U \cap W \neq \emptyset$ biçiminde gösterilsin. İki parçalı $G(V, E)$ grafında $\forall i \in U$ köşesinin derecesi $d_i = r$ ve $\forall j \in W$ köşesinin derecesi $d_j = p$ olursa bu $G(V, E)$ ye iki parçalı tam graf adı verilir ve gösterimi $K_{p,r}$ biçimindedir [7].



Şekil 2.7. İki parçalı tam graf

Tanım

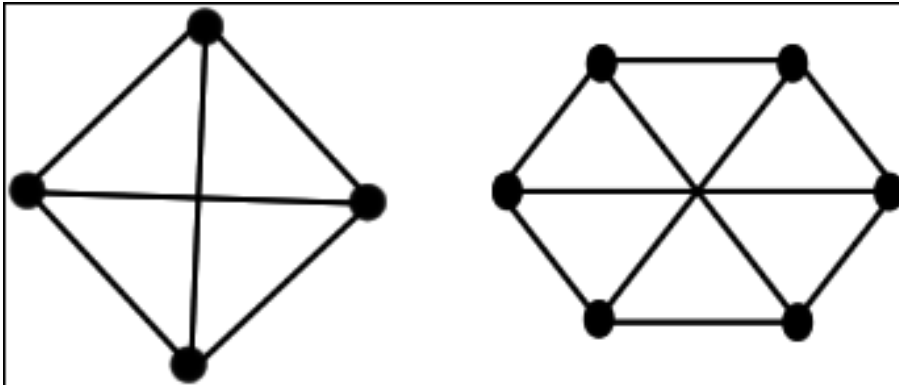
n köşeli olan iki parçalı $K_{1,n-1}$ tam grafına yıldız (star) graf adı verilir. n köşeli bir yıldız grafın gösterimi S_n biçimindedir [7].



Şekil 2.8. Yıldız graf

Tanım

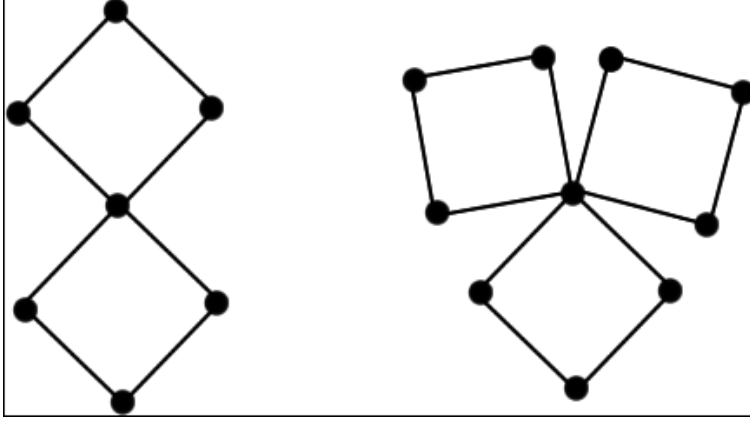
Her köşesi aynı derecede olan graflara regüler graf adı verilir. Özel bir şekilde her noktası p dereceye sahip olan grafa p –dereceli regüler graf adı verilir [7].



Şekil 2.9. 3-Regüler graf

Tanım

Köşeleri iki (2) muhtemel derece içeren graflara bidegreed graf adı verilir [7].

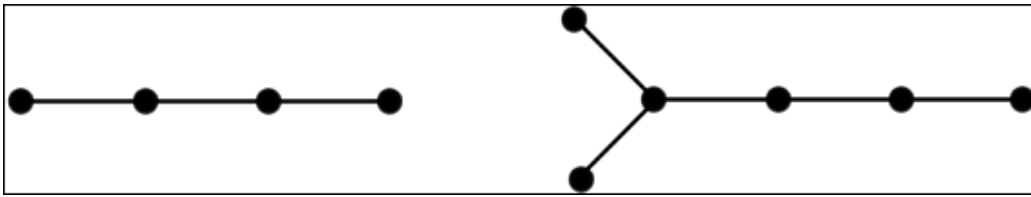


Şekil 2.10. Bidegreed graf

Şekil 2.10 da soldaki grafta altı noktanın derecesi 2, bir noktanın derecesi 4'tür. Sağdaki grafta ise dokuz noktanın derecesi 2, bir noktanın derecesi 6'dır.

Tanım

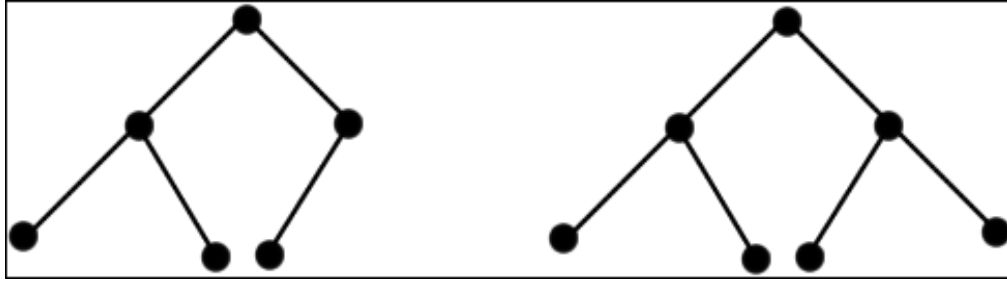
Devir içermeyen ve bağlantılı olan graflara ağaç graf veya kısa bir şekilde ağaç adı verilir. Genellikle gösterimi T biçimindedir [7].



Şekil 2.11. Ağaç graf

Tanım

Bir ağaç grafta derecesi iki (2) olan bir adet köşe bulunuyorsa ve diğer köşelerinin derecesi 1 veya 3 oluyorsa bu ağaç grafına ikili ağaç adı verilir [7].



Şekil 2.12. İkili ağaç graf

Tanım

İkili ağaç grafta derecesi 3 olan noktaya karar denir [7].

Tanım

Bir $G = (V, E)$ grafının i ve j köşeleri arasındaki maksimum kenar sayısına sahip yolun uzunluğuna i ile j köşeleri arasındaki en uzun uzaklık adı verilir. i ile j köşeleri arasındaki en uzun mesafenin kenar sayısını $L(i, j)$ biçiminde göstereceğiz [7].

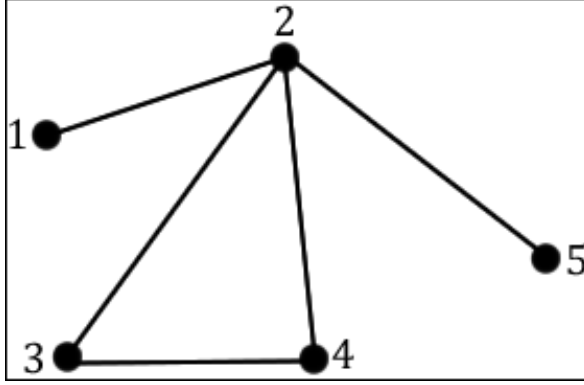
2.3. Graflar için Bazı Matrisler

Tanım

G , n köşeye sahip olan bir graf olsun. G grafının komşuluk matrisi $A(G) = (a_{ij})_{n \times n}$ biçiminde gösterilir ve elemanları

$$a_{ij} = \begin{cases} 1; & i \sim j \\ 0; & \text{diğer} \end{cases}$$

biçiminde ifade edilir. Komşuluk matrisi gerçel ve simetrik olup matrisin tüm özdeğerleri gerçeldir [7].



Şekil 2.13. G_3 grafi

Şekil 2.13 deki G_3 grafinin komşuluk matrisi;

$$A(G_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

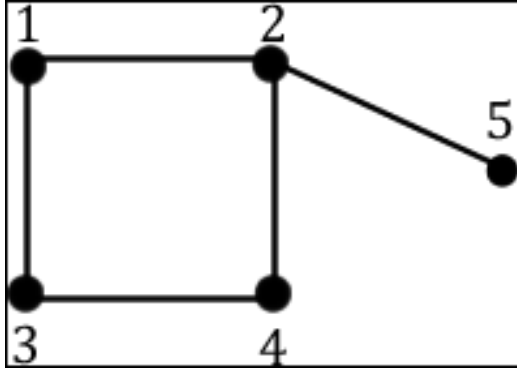
dir. Görüldüğü üzere $A(G_3)$ komşuluk matrisi $n \times n$ boyutunda gerçel simetrik bir matristir.

Tanım

G , n köşeli bağlantılı olan bir graf olsun. G grafinin $n \times n$ boyutundaki Detour matrisi $DM(G) = (d_{ij})_{n \times n}$ biçiminde gösterilip, elemanları

$$d_{ij} = \begin{cases} L(i, j) & ; i \neq j \\ 0 & ; i = j \end{cases}$$

biçiminde ifade edilir. Buradaki $L(i, j)$, i ile j köşeleri arasındaki en uzun uzaklığın kenar sayısıdır. Kısaca i ile j köşeleri arasındaki maksimum kenar sayısına sahip yolun uzunluğudur diyebiliriz [3].



Şekil 2.14. G_4 grafi

Şekil 2.14 deki G_4 grafinın Detour matrisi;

$$DM(G_4) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

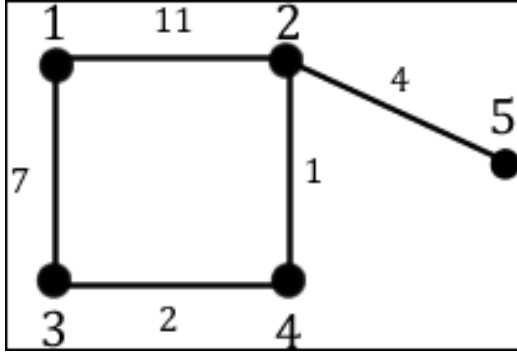
dir. Görüldüğü üzere $DM(G_4)$ Detour matrisi $n \times n$ boyutunda gerçel simetrik bir matristir.

Tanım

G , n noktaya sahip ağırlıklı, bağlantılı graf olsun. G grafinın ağırlıklı Detour matrisi $(DM)_W(G) = (d_{ij})_{n \times n}$ biçiminde gösterilmek üzere elemanları

$$d_{ij} = \begin{cases} L_W(i, j) & ; \quad i \neq j \\ 0 & ; \quad i = j \end{cases}$$

biçiminde ifade edilir. Buradaki $L_W(i, j)$, i ile j köşeleri arasındaki yolda kenarların ağırlıklarının en çok olacak biçimdeki toplamıdır. Bu yol G grafindaki en uzun yol olmak zorunda değildir [8].



Şekil 2.15. Ağırlıklı G_5 grafi

Şekil 2.15 deki G_5 grafinin Ağırlıklı Detour matrisi;

$$(DM)_w(G_5) = \begin{bmatrix} 0 & 11 & 14 & 12 & 15 \\ 11 & 0 & 18 & 20 & 4 \\ 14 & 18 & 0 & 19 & 22 \\ 12 & 20 & 19 & 0 & 24 \\ 15 & 4 & 22 & 24 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Görüldüğü üzere $(DM)_w(G_5)$ matrisi $n \times n$ boyutlu kare simetrik bir matristir.

2.4. Detour İndeksi ve Randić İndeksi

Randić indeksi ilk kez 1975 yılında Milan Randić tarafından branching (dallanma) indeksi altında tanıtılmıştır.

Tanım

G grafinın Detour matrisinin tüm elemanlarının toplamının yarısına G nin Detour İndeksi adı verilir ve gösterimi $DI(G)$ biçimindedir [8].

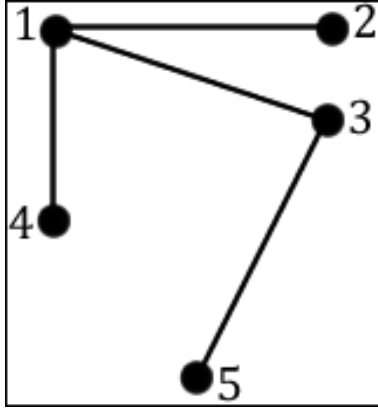
Şekil 2.14 de verilen G_4 grafi için $DI(G_4) = 28$ dir.

Tanım

G bağlantılı graf olsun. G nin Randić İndeksi;

$$R(G) = \sum_{i \sim j} \frac{1}{\sqrt{d_i d_j}}$$

biçiminde ifade edilir. Burada d_i ve d_j sırasıyla i ve j noktalarının dereceleridir [7].



Şekil 2.16. G_6 grafi

Şekil 2.16 daki G_6 grafinın Randić indeksi aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned} R = R(G_6) &= \sum_{i \sim j} \frac{1}{\sqrt{d_i d_j}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{d_1 d_2}} + \frac{1}{\sqrt{d_1 d_3}} + \frac{1}{\sqrt{d_1 d_4}} + \frac{1}{\sqrt{d_3 d_5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 1}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 1}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1}} \cong 1,692 \end{aligned}$$

Görüldüğü üzere Randić indeksi noktaların dereceleri ile ilgilidir.

3. YARDIMCI TEOREM VE LEMMALAR

Bu bölümde önce bazı esas lemmalar ve sonuçları belirtip ardından esas teoremleri vereceğiz.

Özellik

G , n köşeye sahip tam graf olsun. G grafının Detour matrisi $DM(G) = (d_{ij})_{n \times n}$ olmak üzere

$$d_{ij} = \begin{cases} d_i & ; i \neq j \\ 0 & ; i = j \end{cases}$$

biçimindedir [9].

Özellik

G , n adet nokta ve e adet kenara sahip olan basit ve yönsüz bir graf olsun. G grafının noktalarının kümesi $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ve $\forall i = 1, 2, \dots, n$ için v_i noktasının derecesi ise $d_i = \deg(v_i)$ olarak gösterilsin. $A(G)$, G grafına ait komşuluk matrisi olmak üzere $\forall n \times n$ boyutlu A matrisinde $\sigma(A)$ spektrumu A matrisinin tüm özdeğerlerinin ve özdeğerlerinin mutlak değerce en büyüğü olan $r_\sigma(A)$ spektral yarıçapının kümesidir. Gerçel ve de simetrik matris olan $A(G)$ komşuluk matrisinin n adet gerçel özdeğeri bulunur. Kısaca;

$$\lambda_i(G) \geq \lambda_{i+1}(G), i = 1, 2, \dots, n - 1 \text{ dir.}$$

$\lambda_1(G)$, G nin spektral yarıçapıdır. Yani,

$$\lambda_1(G) = r_\sigma(A) \text{ dir.}$$

$W(A)$ biçiminde ifade edilen, $n \times n$ boyutlu gerçel ve de simetrik A matrisine ait sayısal ağırlık aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$W(A) = \{x^t A x : x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 1\}. \quad (3.1)$$

Her $\sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 1$ ile $x \in \mathbb{R}^n$ için $\lambda_n(G) \leq x^t A(G) x \leq \lambda_1(G)$ olur. Ayrıca

$$\lambda_1(G) = \sup \left\{ x^t A x : x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 1 \right\}$$

ve

$$\lambda_n(G) = \{x^t A x : x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 1\} \text{ dir [10].}$$

Lemma

A , negatif olmayan $n \times n$ boyutunda bir matris olsun. A matrisinin en büyük özdeğeri $\rho(A)$ için,

$$\min_{1 \leq i \leq n} r_i \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} r_i \quad (3.2)$$

olur. Burada r_i , A matrisinin her bir satır toplamını ifade eder. Eğer ki A matrisi indirgenemez ise eşitlik, her satırdaki elemanların toplamının eşit olması (her r_i nin birbirine eşit olması) halinde sağlanır [11].

Lemma

B en büyük özdeğeri (mutlakca) ρ_1 olan $n \times n$ boyutlu bir Hermityen matris olsun. Her $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ($\bar{x} \neq \bar{0}$), $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ ($\bar{y} \neq \bar{0}$) için spektral yarıçap $|\rho_1|$ olmak üzere

$$|\bar{x}^t B \bar{y}| \leq |\rho_1| \sqrt{\bar{x}^t \bar{x}} \sqrt{\bar{y}^t \bar{y}} \quad (3.3)$$

olur. Eşitliğin var olması için gerek ve yeter koşul $\bar{x}$ in ρ_1 e karşılık gelen B matrisinin bir özdeğeri olması ve aynı zamanda bazı $\alpha \in \mathbb{R}$ skalerleri için $\bar{y} = \alpha \bar{x}$ olmasıdır [12].

Lemma

$B_1, B_2, \dots, B_k$, n – mertebeli pozitif tanımlı matrisler ve $B = \sum_{i=1}^k B_i$ olsun. Her i için $\bar{x}$, $\rho_1(B_i)$ en büyük özdeğerine karşılık gelen her B_i matrisinin özvektörü ise, $\bar{x}$ aynı zamanda $\rho_1(B)$ en büyük özdeğerine karşılık gelen B matrisinin de bir özvektörüdür [5].

Teorem

G bağlantılı, basit ve ağırlıklı graf olsun. Ayrıca ρ_1 , G grafının en büyük özdeğeri (mutlakca) olsun. ρ_1 , G grafının spektral yarıçapıdır ve

$$\rho_1 \leq \max_{i \sim j} \left\{ \sqrt{\sum_{k:k \sim i} \rho_1(w_{ik}) \sum_{k:k \sim j} \rho_1(w_{jk})} \right\} \quad (3.4)$$

biçimindedir. Burada w_{ij} , ij kenarının p mertebeli pozitif tanımlı ağırlık matrisidir. Ayrıca eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart;

- (i) G grafının regüler-ağırlıklı veya G grafının iki parçalı semiregüler-ağırlıklı bir graf olmasıdır.
- (ii) $\forall i, j$ için, w_{ij} ifadesinin $\rho_1(w_{ij})$ en büyük özdeğerine karşılık gelen ortak bir özvektöre sahip olmasıdır [5].

Lemma

G , n köşeye sahip ve e kenara sahip graf olsun. G grafının komşuluk matrisinin bir özdeğeri de λ olsun. Bu λ özdeğerine karşılık elde edilen özvektör $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^t$ ise;

$$\lambda x_i = \sum_{j, v_i \sim v_j} x_j \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ için} \quad (3.5)$$

biçimindedir [10].

Teorem

G , n köşeye sahip ve e kenara sahip basit graf olsun. d_i , v_i noktasının derecesi ve $\lambda_1(G)$ özdeğeri $A(G)$ komşuluk matrisine ait en büyük özdeğer oluyor ise

$$\lambda_1(G) \leq \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j, v_i \sim v_j} d_j} \quad (3.6)$$

biçimindedir [10].

Teorem

G , n noktalı ve $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ derece dizisine sahip bağlantılı, basit graf olsun. $\rho(G)$, G grafının spektral yarıçapı ise;

$$\rho(G) \leq \frac{d_i - 1 + \sqrt{(d_i + 1)^2 + 4(i-1)(d_1 - d_i)}}{2} \quad (3.7)$$

dir. Burada bahsedilen i , $1 \leq i \leq n$ aralığına düşmektedir. Ayrıca buradaki i için iki durum söz konusudur:

- (i) $i = 1$ ise eşitlik sadece G grafının regüler graf olması durumunda sağlanır.
- (ii) $2 \leq i \leq n$ ise eşitlik sadece G grafının ya bidegreed graf ya da regüler graf

$(d_1 = d_2 = \dots = d_{i-1} = n - 1$ ile $d_i = \dots = d_n = \delta)$ olması koşulu ile sağlanır [13].

Teorem

G , n noktalı ve $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ derece dizisine sahip olan bağlantılı basit graf olsun. $\rho(G)$ G grafının spektral yarıçapı ise;

$$\rho(G) \leq \frac{d_i - 1 + \sqrt{(d_i + 1)^2 + 4 \sum_{l=1}^{i-1} (d_l - d_i)}}{2} \quad (3.8)$$

dir. Burada bahsedilen i , $1 \leq i \leq n$ aralığına düşmektedir. Ayrıca buradaki i için iki durum söz konusudur:

- (i) $i = 1$ ise eşitlik sadece G grafinin regüler graf olması durumunda sağlanır.
- (ii) $2 \leq i \leq n$ ise eşitlik sadece G grafinin ya bidegreed graf ya da regüler graf

$(d_1 = d_2 = \dots = d_{i-1} = n - 1$ ile $d_i = \dots = d_n = \delta)$ olması koşulu ile sağlanır [14].

Teorem

$M = (m_{ij})$ köşegendeki elemanları sıfır olan ve $n \times n$ boyutlu negatif olmayan, indirgenemez olan matris olsun. Ayrıca $\rho(M)$ özdeğeri, M matrisinin en büyük özdeğeri ve $s_1, s_2, \dots, s_n$ ($s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n$) satırların toplamı ve $a = \max_{1 \leq i, j \leq n} \{m_{ij}\}$ olsun. O durumda

$$\rho(M) \leq \frac{s_i - a + \sqrt{(s_i + a)^2 + 4a(i-1)(s_1 - s_i)}}{2} \quad (3.9)$$

dir. Burada bahsedilen i , $1 \leq i \leq n$ aralığına düşmektedir. Ayrıca buradaki i için iki durum söz konusudur:

- (i) $i = 1$ ise eşitlik sadece M matrisinin bütün satır toplamlarının eşit olması durumunda sağlanır.
- (ii) $2 \leq i \leq n$ ise eşitlik sadece $s_1 = s_2 = \dots = s_{i-1} > s_i = \dots = s_n$ ile $1 \leq l \leq n$ ve

$1 \leq j \neq l \leq i - 1, m_{ij} = a$ olması koşulu ile sağlanır [15].

Sonuç

G , n noktalı basit ve bağlantılı ve de satır toplamı $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n$ olan bir graf olsun. G grafinin çapı d olmak üzere

$$\rho(D(G)) \leq \frac{s_i - d + \sqrt{(s_i + d)^2 + 4d(i-1)(s_1 - s_i)}}{2} \quad (3.10)$$

dir. Burada bahsedilen i , $1 \leq i \leq n$ aralığına düşmektedir. Ayrıca eşitlik sadece G grafinin bir uzaklık regüler grafi olması koşulu ile sağlanır [15].

Teorem

$M = (m_{ij})$ köşegen elemanları sıfır (0) olan ve $n \times n$ boyutlu negatif olmayan, indirgenemez olan matris, $\rho(M)$ özdeğeri, M matrisinin en büyük özdeğeri ve $s_1, s_2, \dots, s_n$ ($s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n$) satırların toplamı ve $a = \max_{1 \leq i, j \leq n} \{m_{ij}\}$ olsun. O durumda

$$\rho(M) \leq \frac{s_i - d + \sqrt{(s_i + d)^2 + 4d \sum_{l=1}^{i-1} (s_l - s_i)}}{2} \quad (3.11)$$

dir. Burada bahsedilen i , $1 \leq i \leq n$ aralığına düşmektedir. Ayrıca buradaki i için iki durum söz konusudur:

- (i) $i = 1$ ise eşitlik sadece M matrisinin satır toplamlarının eşit olması koşulu ile sağlanır.
- (ii) $2 \leq i \leq n$ ise eşitlik sadece $s_1 = s_2 = \dots = s_{i-1} > s_i = \dots = s_n$ ile $1 \leq l \leq n$ ve

$1 \leq j \neq l \leq i - 1, m_{ij} = a$ olması durumunda sağlanır [15].

Sonuç

G , n noktalı basit ve bağlantılı bir graf olsun. Ayrıca satır toplamı $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n$ olsun. G grafinin çapı d olmak üzere

$$\rho(M) \leq \frac{s_i - d + \sqrt{(s_i + d)^2 + 4d \sum_{l=1}^{i-1} (s_l - s_i)}}{2} \quad (3.12)$$

dir. Burada bahsedilen i , $1 \leq i \leq n$ aralığına düşmektedir. Ayrıca eşitlik yalnızca G grafinin bir uzaklık regüler grafi olması ile sağlanır [15].

4. AĞIRLIKLIL GRAFLARIN DETOUR MATRİSİ

Bu bölümde ağırlıklı Detour matrisleri için Randić indeksi tekrardan ifade edilmiş, özel bazı grafların Detour matrisi elde edilmiş ve elde edilen matrislerin en büyük özdeğerleri için alt ve üst sınırlar bulunmuştur.

Özellik

G bir ağırlıklı, bağlantılı graf olsun. G grafının ağırlıklı Detour matrisine uyarlanan Randić indeksi

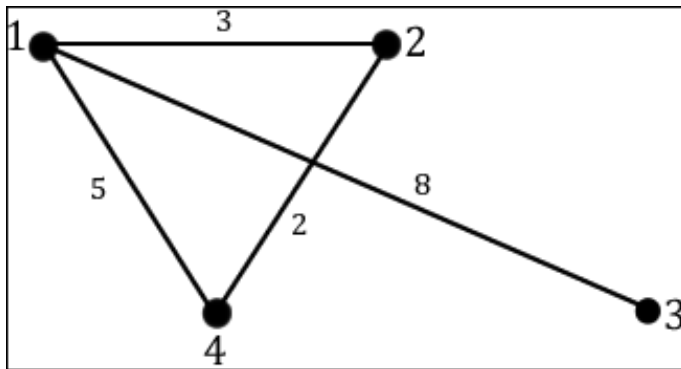
$$RI_w(G) = \sum_{i \sim j} \frac{1}{\sqrt{L_w(i)L_w(j)}}$$

biçiminde verebilir. Buradaki

$$L_w(i) = \sum_{e_k \in P(i,t)} w(e_k)$$

dir. Burada $w(e_k)$ ifadesi $t \neq i$ olacak biçimde t ile i köşeleri arasındaki yolda kenarların ağırlıklarının maksimum olacak biçimdeki toplamı olarak alınır.

Örnek



Şekil 4.1. G grafi

G grafinın ağırlıklı Detour matrisi

$$DM_W(G) = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 8 & 5 \\ 7 & 0 & 15 & 8 \\ 8 & 15 & 0 & 13 \\ 5 & 8 & 13 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Buradan

$$RI_W(G) = \frac{1}{\sqrt{L_W(1)L_W(2)}} + \frac{1}{\sqrt{L_W(1)L_W(3)}} + \frac{1}{\sqrt{L_W(1)L_W(4)}} + \frac{1}{\sqrt{L_W(2)L_W(4)}}$$

olup

$$L_W(1) = \sum_{e_k \in P(1,t)} w(e_k) = 7 + 8 + 5 = 20 \quad ; t = 2,3,4$$

$$L_W(2) = \sum_{e_k \in P(2,t)} w(e_k) = 7 + 15 + 8 = 30 \quad ; t = 1,3,4$$

$$L_W(3) = \sum_{e_k \in P(3,t)} w(e_k) = 8 + 15 + 13 = 36 \quad ; t = 1,2,4$$

$$L_W(4) = \sum_{e_k \in P(4,t)} w(e_k) = 5 + 8 + 13 = 26 \quad ; t = 1,2,3$$

ve

$$RI_W(G) = \frac{1}{\sqrt{20.30}} + \frac{1}{\sqrt{20.36}} + \frac{1}{\sqrt{20.26}} + \frac{1}{\sqrt{30.26}} \cong 0,158$$

olarak elde edilir.

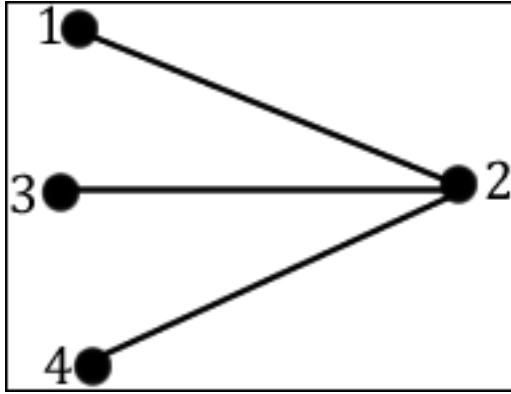
Özellik

G , n köşeli yıldız graf olsun. G grafinın Detour matrisi $DM(G) = (d_{ij})_{n \times n}$ olup

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i \sim j \\ 2 & ; i \not\sim j \\ 0 & ; i = j \end{cases} \quad (4.1)$$

biçimindedir.

Örnek



Şekil 4.2. G yıldız grafi

G yıldız grafi için Detour matrisi

$$DM(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Teorem

λ_1 , n noktalı G yıldız grafinin spektral yarıçapı için

$$n - 1 \leq \lambda_1 \leq 2n - 3 \quad (4.2)$$

dır.

İspat

Yıldız grafta $n - 1$ dereceli bir adet köşe vardır. Bu köşeyi j ile gösterelim. Bunun dışındaki diğer tüm köşeler 1 dereceli olur. 1 dereceli rastgele iki köşe olan i ile k köşelerini alalım.

$i \sim j$ olup $L(i, j) = 1$ ve $i \not\sim k$ olup $L(i, k) = 2$ olarak bulunur. Bunlardan dolayı bir S_n yıldız grafinin Detour matrisi $j = 1$ için

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edebiliriz. Tüm bunlardan

$$\min_{1 \leq i \leq n} r_i = 1(n-1) \text{ ile } \max_{1 \leq i \leq n} r_i = 2(n-2) + 1$$

olup (3.2) den dolayı

$$n-1 \leq \lambda_1 \leq 2n-3$$

sonucuna ulaşırız.

Örnek

Şekil 4.2 deki G yıldız grafinin spektral yarıçapı $\lambda_1 = 4,645$ olmak üzere $n-1 = 4-1 = 3$ ve $2n-3 = 2 \cdot 4 - 3 = 5$ olup $n-1 \leq \lambda_1 \leq 2n-3$ olarak elde edilir.

Özellik

$K_{p,r}$, n köşeli iki parçalı tam graf olsun. $K_{p,r}$ grafinin Detour matrisi

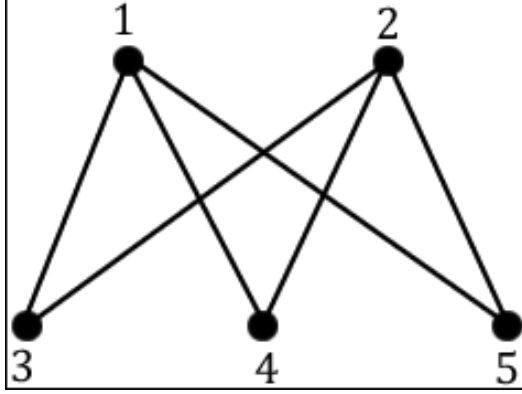
$$DM(K_{p,r}) = \begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix}$$

biçiminde blok matrisi olup $A = (a_{ij})_{p \times p}$, $B = (b_{ij})_{r \times r}$ ve $C = (c_{ij})_{p \times r}$ için

$$a_{ij} = \begin{cases} 2p-2 & ; i \not\sim j \\ 0 & ; i = j \end{cases}, \quad b_{ij} = \begin{cases} 2p & ; i \not\sim j \\ 0 & ; i = j \end{cases}, \quad c_{ij} = 2p-1 \quad (4.3)$$

biçimindedir. Her bir matris kendine özel elemanlar bulundurmakta ve farklı boyutlara sahip olmaktadır.

Örnek



Şekil 4.3. $K_{2,3}$ tam iki parçalı grafi

$K_{2,3}$ tam iki parçalı grafinin Detour matrisi

$$DM(K_{2,3}) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde blok matris olup $DM(K_{2,3}) = \begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix}$ olmak üzere $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } C = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \text{ şeklindedir.}$$

Teorem

λ_1 , bir $K_{p,r}$ tam iki parçalı grafinin spektral yarıçapı için

$$2(p-1)^2 + r(2p-1) \leq \lambda_1 \leq p(2p+2r-3) \quad (4.4)$$

dır.

İspat

n köşeli tam iki parçalı graf $K_{p,r}$ ise bu grafın Detour matrisini

$$DM(K_{p,r}) = \begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix}$$

ve

$A = (a_{ij})_{p \times p}$, $B = (b_{ij})_{r \times r}$ ve $C = (c_{ij})_{p \times r}$ olmak üzere

$$a_{ij} = \begin{cases} 2p-2 & ; i \neq j \\ 0 & ; i = j \end{cases}, \quad b_{ij} = \begin{cases} 2p & ; i \neq j \\ 0 & ; i = j \end{cases}, \quad c_{ij} = 2p-1$$

biçiminde bloklar şeklinde ifade edebiliriz. $DM(K_{p,r})$ matrisinin bloklara ayrılmış hâlimden ve de A, B, C matrislerinin yapısından ötürü A matrisinin olduğu satırda

$$\min_{1 \leq i \leq n} r_i = (p-1)(2p-2) + r(2p-1) \quad (4.5)$$

B matrisinin olduğu satırdaysa

$$\max_{1 \leq i \leq n} r_i = p(2p-1) + (r-1)2p \quad (4.6)$$

olup (4.5) ve (4.6) için (3.2) uygulanırsa iddia sağlanır.

Örnek

Şekil 4.3 deki $K_{2,3}$ iki parçalı tam grafının spektral yarıçapı $\lambda_1 = 12,937$ olmak üzere $2(2-1)^2 + 3(2.2-1) \leq 12,937 \leq 2(2.2+2.3-3)$ olup $11 \leq 12,937 \leq 14$ elde edilir.

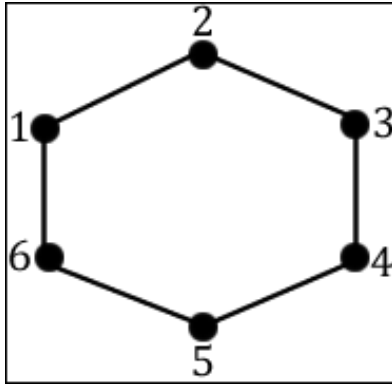
Özellik

G , n köşeli devir olsun. G grafinın Detour matrisi $DM(G) = (d_{ij})_{n \times n}$

$$d_{ij} = \begin{cases} n-1 & ; i \sim j \\ n-d(i,j) & ; i \not\sim j \\ 0 & ; i = j \end{cases} \quad (4.7)$$

biçimindedir.

Örnek



Şekil 4.4. G devir grafi

G devir grafinın Detour matrisi

$$DM(G) = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 5 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 0 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Teorem

λ_1 , bir n köşeli C_n devir grafinın spektral yarıçapı için

$$\lambda_1 = \begin{cases} 2\alpha n - \alpha(\alpha + 1) & ; \quad n \text{ tek} \\ \frac{3n^2 - 4n}{4} & ; \quad n \text{ çift} \end{cases} \quad (4.8)$$

olup burada $\alpha = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ dir.

İspat

C_n devir grafına ait Detour matrisi n nin tek ve çift olma durumlarına göre sırasıyla

$$\begin{bmatrix} 0 & n-1 & n-2 & \cdots & \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & 0 & n-1 & \cdots & \vdots & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & \vdots & \cdots & n-1 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} 0 & n-1 & n-2 & \cdots & \frac{n}{2} & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & 0 & n-1 & \cdots & \vdots & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & \vdots & \cdots & n-1 & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde ifade edilebilir. Devir grafın Detour matrisinin tüm satır ve sütun toplamaları birbirine eşit olup (3.2) kullanılırsa

$$\lambda_1 = \min_{1 \leq i \leq n} r_i = \max_{1 \leq i \leq n} r_i$$

dir. Bu nedenle Detour matrisine ait bir satırdaki elemanların toplamı r_i olmak üzere n tek olması halinde;

$$\begin{aligned} \lambda_1 = r_i &= 2(n-1) + 2(n-2) + \cdots + 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\ &= 2 \left\{ (n-1) + (n-2) + \cdots + \left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left\{ (n + n + \dots + n) - \left(1 + 2 + \dots + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) \right\} \\
&= 2n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

(4.9) de $\alpha = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ alırsak;

$$\lambda_1 = 2\alpha n - \alpha(\alpha + 1)$$

elde edilir.

n çift olması halinde;

$$\begin{aligned}
\lambda_1 = r_i &= 2(n-1) + 2(n-2) + \dots + 2 \left(n - \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \right) + \frac{n}{2} \\
&= 2 \left\{ (n-1) + (n-2) + \dots + \left(n - \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \right) \right\} + \frac{n}{2} \\
&= 2 \left\{ (n + n + \dots + n) - \left[1 + 2 + \dots + \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \right] \right\} + \frac{n}{2} \\
&= 2 \left\{ n \left(\frac{n}{2} - 1 \right) - \frac{(n^2 - 2n)}{8} \right\} + \frac{n}{2} \\
&= (n^2 - 2n) - \frac{(n^2 - 2n)}{4} + \frac{n}{2} \\
&= \frac{3(n^2 - 2n)}{4} + \frac{n}{2} \\
&= \frac{3n^2 - 4n}{4}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Sonuç olarak (4.9) ile (4.10) göz önüne alındığında ispat tamamlanır.

Örnek

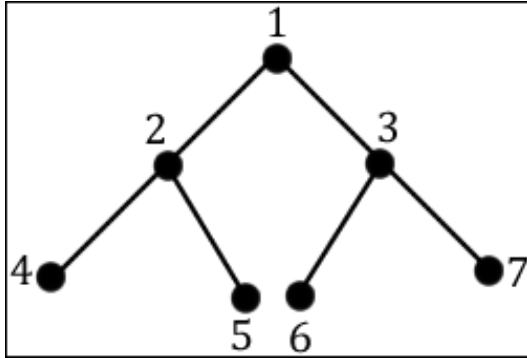
Şekil 4.4 deki G devir grafi için spektral yarıçap, $n = 6$ çift olmak üzere $\lambda_1 = \frac{3.6^2 - 4.6}{4} = 21$ olarak bulunur. Gerçekten G devir grafinin spektral yarıçapı 21 dir.

Özellik

G grafi ikili ağaç olsun. $DM(G) = (d_{ij})_{n \times n}$ G grafinin Detour matrisi olup elemanları

$$d_{ij} = \begin{cases} n_i + n_j ; & \text{eğer } i \text{ ve } j \text{ kökün farklı tarafında ise} \\ s_i + s_j ; & \text{eğer } i \text{ ve } j \text{ kökün aynı tarafında ise} \end{cases} \quad (4.11)$$

dir. Burada n_i , ikili ağacın köküne göre i köşesinin seviyesini ifade eder. k_{ij} , i ve j köşelerinin ortak karar köşesi olmak üzere s_i ise i köşesinden k_{ij} köşesine olan uzaklığı ifade eder.

Örnek

Şekil 4.5. G ikili ağaç

G ikili ağacı için Detour matrisi

$$DM(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Bu Detour matrisinin elemanları incelendiğinde özelliğin sağlandığı görülmektedir.

Lemma

G , n köşeye sahip ve e kenara sahip basit graf olsun. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$, $D(G)$ Detour matrisine ait λ özdeğerine karşılık gelen özvektör olsun.

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^n d_{ij} x_j \quad (4.12)$$

dir.

İspat

λ , $D(G)$ Detour matrisinin bir özdeğeri ve $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ bu özdeğere karşılık getirilen özvektör olmak üzere

$$Dx = \lambda x$$

$$\Rightarrow x^t Dx = \lambda x^t x$$

$$\Rightarrow 2 \sum_{i,j=1, i < j}^n d_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Her tarafın ayrı ayrı x_i ye göre türevini aldığımızda $\forall i = 1, 2, \dots, n$ için

$$2 \sum_{j=1}^n d_{ij} x_j = 2 \lambda x_i$$

$$\Rightarrow \lambda x_i = \sum_{j=1}^n d_{ij} x_j$$

eşitliğine ulaşılır. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem

G , n köşeye sahip ve e kenara sahip basit graf olsun. $\lambda_1, D(G) = (d_{ij})_{n \times n}$ Detour matrisine ait en büyük özdeğer olsun. O halde

$$\lambda_1 \leq \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \tilde{d}_j} \quad (4.13)$$

dir. Burada L_{ij} , i ve j köşeleri arasındaki en uzun uzaklık ve de $\tilde{d}_i = \sum_{j=1}^n d_{ij}$ olarak ifade edilir.

İspat

$D(G)$ Detour matrisine ait özdeğer λ ve λ özdeğerine karşılık getirilen bir birim özvektör $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ olsun. $\tilde{d}_i = \sum_{j=1}^n d_{ij}$ olup (4.12) göz önüne alındığında

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^n d_{ij} x_j$$

$$\Rightarrow \lambda^2 x_i^2 = \left(\sum_{j=1}^n d_{ij} x_j \right)^2$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n d_{ij} x_j \right)^2$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = \sum_{i=1}^n (d_{1i}^2 + d_{2i}^2 + \dots + d_{ni}^2) x_i^2 + 2 \sum_{i,j=1, i < j}^n x_i x_j (d_{1i} d_{1j} + d_{2i} d_{2j} + \dots + d_{ni} d_{nj})$$

$$\Rightarrow \lambda^2 \leq \sum_{i=1}^n \tilde{d}_i^2 x_i^2 + \sum_{i,j=1, i < j}^n (x_i^2 + x_j^2) (d_{1i} d_{1j} + d_{2i} d_{2j} + \dots + d_{ni} d_{nj})$$

Yukarıda kalan ifadenin ikinci tarafındaki x_i^2 nin katsayısı

$$\begin{array}{ccccccc}
& d_{11}d_{1i} & + & d_{21}d_{2i} & + & \cdots & + & d_{n1}d_{ni} \\
+ & d_{12}d_{1i} & + & d_{22}d_{2i} & + & \cdots & + & d_{n2}d_{ni} \\
+ & \cdots & + & \cdots & + & \cdots & + & \cdots \\
+ & d_{1,i-1}d_{1i} & + & d_{2,i-1}d_{2i} & + & \cdots & + & d_{n,i-1}d_{ni} \\
+ & d_{1,i+1}d_{1i} & + & d_{2,i+1}d_{2i} & + & \cdots & + & d_{n,i+1}d_{ni} \\
+ & \cdots & + & \cdots & + & \cdots & + & \cdots \\
+ & d_{1n}d_{1i} & + & d_{2n}d_{2i} & + & \cdots & + & d_{nn}d_{ni}
\end{array}$$

olup bu toplam $d_{1i}(\tilde{d}_1 - d_{1i}) + d_{2i}(\tilde{d}_2 - d_{2i}) + \cdots + d_{ni}(\tilde{d}_n - d_{ni})$ toplamına eşittir.

Detour matrisin tanımını düşünürsek;

$$\Rightarrow \lambda^2 \leq \sum_{i=1}^n \tilde{d}_i^2 x_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L_{ij}(\tilde{d}_j - L_{ij}) x_i^2$$

$$\Rightarrow \lambda^2 \leq \sum_{i=1}^n \left[\tilde{d}_i^2 + \sum_{j=1}^n L_{ij}(\tilde{d}_j - L_{ij}) \right] x_i^2$$

$$\Rightarrow \lambda^2 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \tilde{d}_j x_i^2$$

$$\Rightarrow \lambda^2 \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \tilde{d}_j \sum_{i=1}^n x_i^2$$

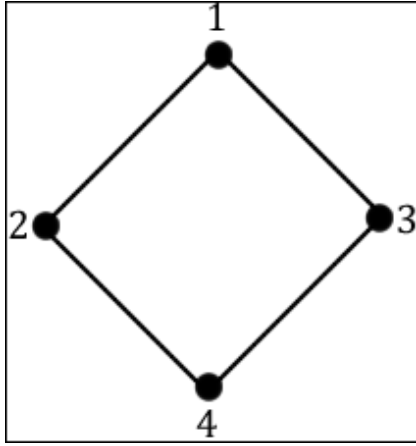
$$\Rightarrow \lambda \leq \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \tilde{d}_j}$$

ve λ keyfi seçildiğinden

$$\lambda_1 \leq \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \tilde{d}_j}$$

ifadesine ulaşılır.

Örnek



Şekil 4.6. G grafi

G grafinın Detour matrisi

$$DM(G) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

G grafinın spektral yarıçapı $\lambda_1 = 8$ olup

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \tilde{d}_j = 3^2 \cdot 8 + 3^2 \cdot 8 + 2^2 \cdot 8 = 176$$

dir. Buradan

$$\sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n L_{ij}^2 \tilde{d}_j} = \sqrt{176} = 13,26$$

olup $\lambda_1 < 13,26$ olarak elde edilir.

Teorem

G , n köşeye sahip graf ve G grafının $D(G) = D = (d_{ij})_{n \times n}$ ile ifade edilen Detour matrisi, $\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \dots, \tilde{d}_n$ uzaklıklarının toplamı ($\tilde{d}_p = \sum_{i=1}^n d_{pi}$) ve $k = \min_{1 \leq p \leq n} \tilde{d}_p$ olarak alınsın. D matrisinin en büyük özdeğeri $\rho(D)$ olsun. O halde

$$\rho(D) \geq \frac{(1-i)(k+2\tilde{d}_k) \mp 2\sqrt{-\frac{k^2}{2}(12+5i)-2k(\tilde{d}_k(1+2i)+\tilde{d}_l(1+i))-2i\tilde{d}_k\tilde{d}_l}}{2(\tilde{d}_k-k(i-1))} \quad (4.14)$$

biçimdedir.

İspat

$i = 1$ veya $\tilde{d}_k = \tilde{d}_l = k$ olması halinde eşitsizlik doğru olur. (3.9) dan eşitlik sadece G regüler graf olması koşulu ile elde edilir. $\tilde{d}_k \neq k$ ile $\tilde{d}_l \neq k$ olduğunu varsayalım.

$$2 \leq i \leq n,$$

G grafının Detour matrisi $D(G)$, $\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$ biçiminde yazılabilir. Burada D_{11} matrisi, $(i-1) \times (i-1)$ ve D_{22} matrisi, $(n-i+1) \times (n-i+1)$ boyutludur.

$$U = \begin{bmatrix} xI_{i-1} & 0 \\ 0 & I_{n-i+1} \end{bmatrix} \text{ ve } U^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x}I_{i-1} & 0 \\ 0 & I_{n-i+1} \end{bmatrix}, x > 0$$

I_{i-1} , $(i-1) \times (i-1)$ boyutlu bir birim matris ve I_{n-i+1} , $(n-i+1) \times (n-i+1)$ boyutlu bir birim matristir.

$$B = U^{-1}DU = \begin{bmatrix} D_{11} & \frac{1}{x}D_{12} \\ xD_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$$

D ve B matrisleri benzerdir. Karakteristik kökleri aynıdır. Bu nedenle

$\rho(G) = \lambda_1(D) = \lambda_1(B)$ olur.

B nin satır toplamlarına $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ diyelim.

$1 \leq l \leq i - 1$ için

$$r_l = \sum_{j=1}^{i-1} d_{lj} + \frac{1}{x} \sum_{j=i}^n d_{lj}$$

$$\Rightarrow r_l = \frac{1}{x} \sum_{j=1}^n d_{lj} - \frac{1}{x} \sum_{j=1}^{i-1} d_{lj} + \sum_{j=1}^{i-1} d_{lj}$$

$$\Rightarrow r_l = \frac{1}{x} \sum_{j=1}^n d_{lj} + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \sum_{j=1}^{i-1} d_{lj}$$

$$\Rightarrow r_l = \frac{1}{x} \tilde{d}_l + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \sum_{j=1}^{i-1} d_{lj} \quad (4.15)$$

$i \leq k \leq n$ için

$$r_k = x \sum_{j=1}^{i-1} d_{kj} + \sum_{j=i}^n d_{kj}$$

$$\Rightarrow r_k = x \sum_{j=1}^n d_{kj} - x \sum_{j=1}^{i-1} d_{kj} + \sum_{j=1}^{i-1} d_{kj}$$

$$\Rightarrow r_k = x \sum_{j=1}^n d_{kj} + (1 - x) \sum_{j=1}^{i-1} d_{kj}$$

$$\Rightarrow r_k = x \tilde{d}_k + (1 - x) \sum_{j=1}^{i-1} d_{kj} \quad (4.16)$$

buradan

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{i-1} d_{lj} &\leq (i-2)k, \quad 1 \leq l \leq i-1 \\ \sum_{j=1}^{i-1} d_{kj} &\leq (i-1)k, \quad i \leq k \leq n \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$1 \leq l \leq i-1 \text{ için } \tilde{d}_l = \min_l \sum_{a=1}^{i-1} d_{la}$$

$$i \leq k \leq n \text{ için } \tilde{d}_k = \min_k \sum_{a=i}^n d_{ka}$$

olduğundan (4.17) ifadesi (4.15) ve (4.16) da yerine yazıldığında

$$r_l \leq \frac{1}{x} \tilde{d}_l + \left(1 - \frac{1}{x}\right) (i - 2) k, \quad 1 \leq l \leq i - 1$$

$$r_k \leq x \tilde{d}_k + (1 - x)(i - 1) k, \quad i \leq k \leq n$$

ifadesine ulaşılır. Tüm bunlardan

$$\max\{r_1, r_2, \dots, r_n\} \leq \max\left\{\frac{1}{x} \tilde{d}_l + \left(1 - \frac{1}{x}\right) (i - 2) k, x \tilde{d}_k + (1 - x)(i - 1) k\right\}.$$

$$\frac{1}{x} \tilde{d}_l + \left(1 - \frac{1}{x}\right) (i - 2) k = x \tilde{d}_k + (1 - x)(i - 1) k$$

eşitliği çözülür ise

$$x = \frac{-k \pm 2 \sqrt{\frac{k^2}{4}(5 - 12i) - ik(\tilde{d}_k + \tilde{d}_l) + k(2\tilde{d}_k + \tilde{d}_l) + \tilde{d}_k \tilde{d}_l}}{2(\tilde{d}_k - k(i - 1))} \quad (4.18)$$

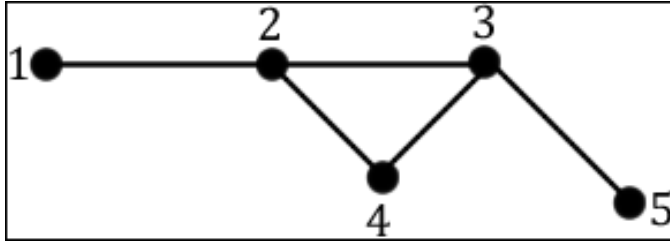
elde edilir.

$x > 0$ ile $i \geq 2$ olmak üzere

$\rho(D) \geq k + (x - 1)(i - 1)$ de (4.18) eşitliği ilgili yere yazıldığında,

$$\rho(D) \geq \frac{(1-i)(k+2\tilde{d}_k) \mp 2 \sqrt{-\frac{k^2}{2}(12+5i) - 2k(\tilde{d}_k(1+2i) + \tilde{d}_l(1+i)) - 2i\tilde{d}_k\tilde{d}_l}}{2(\tilde{d}_k - k(i-1))}$$

ifadesine ulaşılır.

ÖrnekŞekil 4.7. G grafi

G grafinın Detour matrisi

$$DM(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

G grafinın spektral yarıçapı $\lambda_1 = 9,772$ ve $\tilde{d}_1 = 11$, $\tilde{d}_2 = 8$, $\tilde{d}_3 = 8$, $\tilde{d}_4 = 10$, $\tilde{d}_5 = 11$ olarak bulunur.

Eğer $i = 4$ alınırsa, $k = 8$, $\tilde{d}_k = 8$, $\tilde{d}_l = 8$ için $x = 0,655$ olup bu değerleri

$$\lambda_1 \geq k + (x - 1)(i - 1)$$

ifadesinde yerine yazarsak

$$\lambda_1 \geq 8 + (0,655 - 1)(4 - 1) = 6,965$$

elde edilir.

Eğer $i = 5$, $k = 8$, $\tilde{d}_k = 8$ ve $\tilde{d}_l = 8$ alınırsa ise $x = 1,08$ bulunur.

Bu değerleri tekrar

$$\lambda_1 \geq k + (x - 1)(i - 1)$$

ifadesinde yerine yazarsak

$$\lambda_1 \geq 8 + (1,08 - 1)(5 - 1) = 8,32$$

elde edilir.

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında ilk olarak ağırlıklı Detour matrisinin Randić indeksi hesaplanmıştır. Ayrıca basit ve bağlantılı grafların Detour matrisinin en büyük özdeğeri için alt ve üst sınırlar bulunmuştur. Daha sonra bu sınırlar bazı özel graflara ve genel graflara uyarlanmıştır. Ve bulunan bu sınırlar, teoremlerde ifade edilen sınırları ispatlamaktadır. Hâlâ Detour matrisinin en büyük (mutlakca) özdeğeri için sınırlar ile ilgili çalışmalarımız devam etmektedir.

KAYNAKLAR

1. Diestel, R. (2005). *Graph theory* (Third edition). New York: Springer, 173, 1-3.
2. Euler, L. (1736). Solutio problematis ad geomatriam situs pertinentis. *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, 8, 128-140.
3. Harary, F. (1969). *Graph Theory* (First edition). Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company.
4. Taşçı, D. (2011). *Lineer cebir* (Dördüncü Baskı). Ankara: Gazi Yayınevi.
5. Das, K., and Bapat, R. B. (2008). A sharp upper bound on the spectral radius of weighted graphs. *Discrete Mathematics*, 308(15), 3180-3186.
6. Cardon, D., and Tuckfield, B. (2011). The Jordan Canonical form for a class of zero-one matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, 435, 2942-2954.
7. Büyükköse, Ş., Gök Kaya, G. (2019). *Graf teoriye giriş* (İkinci Baskı). Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık, 12-56.
8. Nikolić, S., Trinajstić, A., Juric, A., and Mihalic, Z. (1996). The Detour matrix and the Detour index of weighted graphs, *Croatica Chemica Acta*, 69(4), 1577-1591.
9. Janežič, D., Miličević A., Nikolić S., and Trinajstić N. (2015). *Graph-Theoretical Matrices in Chemistry* (First published). Chemical Rubber Company.
10. Bhunia, P., Bag, S., and Paul, K. (2019). Bounds for eigenvalues of the adjacency matrix of a graph. *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, 22(4), 415-431.
11. Minc, H. (1988). *Nonnegative matrices* (First edition). New York: John and Sons, 62-126.
12. Horn, R. A., and Johnson, C. R. (1985). *Matrix analysis* (First edition). New York: Cambridge University Press, 34-57.
13. Shu, J., and Wu, Y. (2004). Sharp upper bounds on the spectral radius of graphs. *Linear Algebra and Its Applications*, 377, 241-248.
14. Liu, C. A., and Weng, C. W. (2013). Spectral radius and degree sequence of a graph. *Linear Algebra and Its Applications*, 438(8), 3511-3515.
15. Chen, Y., Lin, H., and Shu, J. (2013). Sharp upper bounds on the distance spectral radius of a graph. *Linear Algebra and Its Applications*, 439(9), 2659-2666.



GAZİ GELECEKTİR...