



**STURM LIOUVILLE FARK OPERATÖRLER SİSTEMİNİN SPEKTRAL
ÖZELLİKLERİ**

Bahar YÜKSEL

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

KASIM 2017

Bahar YÜKSEL tarafından hazırlanan “STURM LIOUVILLE FARK OPERATÖRLER SİSTEMİNİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Esra KIR ARPAT

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.



Başkan: Prof. Dr. İbrahim BÜYÜKYAZICI

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

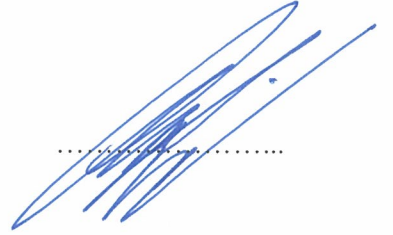
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.



Üye: Doç. Dr. Adil MISIR

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.



Tez Savunma Tarihi: 01/11/2017

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Hadi GÖKÇEN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Bahar YÜKSEL

01/11/2017

STURM LIOUVILLE FARK OPERATÖRLER SİSTEMİNİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Bahar YÜKSEL

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Kasım 2017

ÖZET

Son yıllarda, özellikle klasik moment problemi, mühendislik, ekonomi ve diğer alanların bazı problemleri için yapılan modelleme çalışmalarındaki gelişmelerle fark operatörlerinin spektral analizinin yapılması önem kazanmıştır. Sturm-Liouville denklemi ve onun diskre analogu olan fark denklemlerinin spektral analizi hem selfadjoint hem non-selfadjoint durumda Naimark, Berezanski, Guseinov, Leviton, Marchenko gibi bilim adamlarının araştırma konusu olmuştur. Bu çalışmada Sturm-Liouville fark ifadesi yardımıyla $\ell_2(N, \mathbb{C}^\ell)$ uzayında üretilen L operatörünün spektral özellikleri incelenmiştir. L operatörünün resolventi, özdeğerleri ve spektral tekillikleri hesaplanmıştır.

Bilim Kodu : 20404

Anahtar Kelimeler : Fark denklemi, özdeğer, özfonksiyon, spektral tekillikler, resolvent

Sayfa Adedi : 43

Danışman : Doç. Dr. Esra KIR ARPAT

SPECTRAL PROPERTIES OF A SYSTEM OF STURM-LIOUVILLE DIFFERENCE
OPERATORS

(M. Sc. Thesis)

Bahar YÜKSEL

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

November 2017

ABSTRACT

In recent years, it has become more and more important to conduct spectral analysis of difference operators, especially in modeling studies for some problems of classical moment problem, engineering, economics and other fields. The spectral analysis of the Sturm-Liouville equation and its discrete analytic differential equations have been the subject of research by scientists such as Naimark, Berezanski, Guseinov, Leviton, Marchenko in both selfadjoint and non-selfadjoint situations. In this work, the spectral properties of the L operator generated in the $\ell_2(N, \mathbb{C}^\ell)$ space with the help of the Sturm-Liouville difference statement are examined. The resolvent, eigenvalues and spectral singularities of the L operator are calculated.

Scide Code : 20404
Key Words : Difference equation, eigenvalue, eigenfunction, spectral singularities, resolvent
Page Number : 43
Supervisor : Assoc. Prof. Esra KIR ARPAT

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamı yaptığım süre boyunca yardım ve desteğini esirgemeyen, ilminden faydalandığım, birlikte çalışmaktan onur duyduğum çok değerli danışman hocam Doç. Dr. Esra KIR ARPAT 'a, hep yanımda olan aileme ve her zaman her konuda beni destekleyen hayatımı birleştirmek üzere olduğum Fırat CANLIKARAKAYA 'ya teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Analizin Temel Tanımları	3
3. SKALER FARK DENKLEMLERİ.....	9
3.1. Temel Tanım ve Sonuçlar	9
3.2. Birinci Basamaktan Lineer Fark Denklemleri	16
3.3. İkinci Basamaktan Fark Denklemleri.....	17
3.4. Homogen Olmayan Denklemler İçin Özel Çözümler	19
3.4.1. Belirsiz katsayılar yöntemi.....	20
3.4.2. Parametrelerin değişimi yöntemi	20
5. L NİN ÖZDEĞERLERİ VE SPEKTRAL TEKİLLİKLERİ.....	31
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	39
KAYNAKLAR	41
ÖZGEÇMİŞ	43

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

 $\mathbb{N}_0$
 $\{0, 1, \dots\}$
 L^*
 L operatörünün adjointi

 $\llbracket x \rrbracket$
 x reel sayısının tam değeri

 $\sigma_d(L)$
 L operatörünün diskret (nokta) spekturumu

 $\sigma_{ss}(L)$
 L operatörünün spektral tekilliklerinin kümesi

 $\mathbb{C}$

Kompleks sayılar kümesi

 $\mathbb{N}$

Pozitif doğal sayılar kümesi

 $\mathbb{R}$

Reel sayılar kümesi

 $\mathbb{Z}$

Tam sayılar kümesi

 $W(y, z)$
 y ve z fonksiyonlarının Wronskian'ı

 $\mathcal{H}$

Hilbert uzayı

 Δ

Delta türev operatörü

 λ

Spektral parametre

1. GİRİŞ

Fonksiyonel analiz ve matematiksel fizik gibi birçok alanda, bir diferensiyel operatörün özdeğerlerinin, resolventinin ve spektral tekilliklerinin bulunması problemi çok önemlidir.

Hilbert uzaylarında tanımlı, lineer, sınırlı, selfadjoint operatörlerin spektral özellikleri ile ilgili günümüze kadar pek çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalarda operatör sınırsız ve non-selfadoint olarak ortaya çıkmaktadır.

Non-selfadjoint diferensiyel denklemler yardımıyla tanımlanan operatörlerin spektral analizi ilk kez Naimark (1960) tarafından incelenmiştir. Bu Çalışma da q kompleks değerli bir fonksiyon, $h \in \mathbb{C}$ ve λ bir spektral parametre olmak üzere $L_2(\mathbb{R}_+)$ uzayında

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, 0 \leq x < \infty$$

$$y'(0) - hy(0) = 0$$

sınır değer problemi gözönüne alınmış olup sürekli spektrumu özdeğer ve spektral tekilliklerden oluştuğu görülmüştür.

Son yıllarda mühendislik, ekonomi ve diğer alanların bazı problemleri için yapılan modelleme çalışmalarındaki gelişmelerle fark operatörlerinin spektral analizinin yapılması önem kazanmıştır.

Bairamov ve Çelebi (1999) tarafından yapılan çalışmada (p_n) ve (q_n) kompleks terimli diziler ve λ bir kompleks parametre olmak üzere $\ell_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^2)$ uzayında,

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(2)} - y_n^{(2)} + p_n y_n^{(1)} = \lambda y_n^{(1)} \\ y_{n-1}^{(1)} - y_n^{(1)} + q_n y_n^{(2)} = \lambda y_n^{(2)} \end{cases}$$

denklem sistemi ve $y_0^{(1)} = 0$ sınır koşulu yardımı ile üretilen Dirac operatörünün, $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$\sup[(|p_n|) + (|q_n|) \exp(\varepsilon \sqrt{n})] < \infty$$

koşulu altında sonlu sayıda sonlu katlı özdeğerlere ve spektral tekilliklere sahip olduğu gösterilerek bu operatör için bir spektral açılım verilmiştir [3].

Bu tezde $(\Lambda^{(j)}y^{(j)})_n = \lambda y_n^{(j)}$ Sturm-Liouville fark denkleminin ve $y(0) = 0$ koşulu yardımıyla $\ell_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^l)$ uzayında üretilen operatörü gözönüne alınacaktır. Operatörün resolventi, özdeğerleri ve spektral tekillikleri cümlesi bulunacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, spektral analizin bazı temel tanımları ve önemli teoremleri ifade edildikten sonra, sonlu Sturm-Liouville fark operatörler sisteminin spektral özellikleri incelenecektir.

2.1. Analizin Temel Tanımları

2.1.1. Tanım

X boş olmayan kompleks normlu bir uzay, $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ lineer bir operatör olsun. $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ operatörüne A operatörünün *resolvent operatörü* ya da kısaca *resolventi* denir [6].

2.1.2. Tanım

$R_\lambda(A)$ mevcut, sınırlı ve tanım kümesi X uzayında yoğun ise $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına A operatörünün *regüler değeri* denir. A operatörünün regüler değerlerinden oluşan kümeye ise A operatörünün *resolvent kümesi* adı verilir [6].

2.1.3. Tanım

$R_\lambda(A)$ mevcut olmayacak şekildeki λ kompleks sayılarının kümesine A operatörünün *diskret spektrumu* ya da *nokta spektrumu* adı verilir [6].

2.1.4. Tanım

$R_\lambda(A)$ mevcut, sınırsız ve $R_\lambda(A)$ operatörünün tanım kümesi X uzayında yoğun olacak şekildeki λ kompleks sayılarının oluşturduğu kümeye A operatörünün *sürekli spektrumu* denir [6].

2.1.5. Tanım

X bir kompleks vektör uzay ve $A: X \rightarrow X$ lineer bir operatör olsun. λ kompleks sayısı için $A.x = \lambda.x$ denkleminin aşıkâr olmayan bir $x \in X$ çözümü varsa λ sayısına A

operatörünün *özdeğeri* denir. Bu x çözümüne ise A operatörünün λ özdeğerine karşılık gelen *özfonksiyonu* adı verilir [6].

2.1.6. Tanım

Bir A operatörünün resolventinin çekirdeğinin kutup noktası olup, sürekli spektrumda bulunan ve A operatörünün özdeğeri olmayan noktalara A operatörünün *spektral tekillikleri* adı verilir [8].

2.1.7. Tanım

Bir $y: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için Δ *fark operatörü* veya y *nin birinci basamaktan farkı* $\Delta y(n) = y(n+1) - y(n)$ şeklinde tanımlanır. Burada $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$ doğal sayılar cümlesi ve $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesidir.

Buna göre y *nin ikinci basamaktan farkı* ($\Delta^2 y$)

$$\Delta^2 y(n) = \Delta(\Delta y(n)) = y(n+2) - 2y(n+1) + y(n) \quad (2.1)$$

böyle devam ederek y *nin k yıncı basamaktan farkı* ($\Delta^k y$)

$$\Delta^k y(n) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} y(n+k-j) \quad (2.2)$$

şeklinde hesaplanır. Burada $k \geq j$ olmak üzere

$$\binom{k}{j} = \frac{k(k-1)\dots(k-j+1)}{j!}$$

dir [4].

2.1.1. Teorem

Δ fark operatörü lineerdir yani

$$\Delta(ax(n) + by(n)) = a\Delta x(n) + b\Delta y(n) \quad (2.3)$$

dir. Burada a ve b sabitlerdir [4].

İspat

$$\begin{aligned} \Delta(ax(n) + by(n)) &= ax(n+1) + by(n+1) - ax(n) - by(n) \\ &= a(x(n+1) - x(n)) + b(y(n+1) - y(n)) \\ &= a\Delta x(n) + b\Delta y(n) \end{aligned}$$

Örnek

$$\begin{aligned} \Delta(3n^2 - 4n + 1) &= 3\Delta n^2 - 4\Delta n + \Delta 1 \\ &= 3((n+1)^2 - n^2) - 4((n+1) - n) \\ &= 6n - 1 \end{aligned}$$

2.1.8. Tanım

E öteleme operatörü;

$$Ey(n) = y(n+1) \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanıma göre

$$E^k y(n) = y(n+k) \quad (2.5)$$

dır. Ayrıca a ve b sabitleri için

$$E(ax(n) + by(n)) = aEx(n) + bEy(n) \quad (2.6)$$

dir. Yani E operatörü lineerlik özelliğine sahiptir. Δ ve E operatörleri arasında

$\Delta = E - I$ ilişkisi vardır. Burada I özdeşlik operatörüdür. Yani $Iy(n) = y(n)$ [4].

2.1.2. Teorem

$$(a) \quad \forall k, l \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \dots\} \text{ için } \Delta^k \Delta^l = \Delta^l \Delta^k = \Delta^{k+l}$$

$$(b) \quad \Delta(x(n)y(n)) = y(n)\Delta x(n) + x(n+1)\Delta y(n)$$

$$(c) \quad \Delta\left(\frac{x(n)}{y(n)}\right) = \frac{y(n)\Delta x(n) - x(n)\Delta y(n)}{y(n)y(n+1)} \quad y(n) \neq 0$$

dir [4].

İspat

$$(a) \quad \Delta^k \Delta^l = (E - I)^k (E - I)^l$$

$$= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j E^{k-j} \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} (-1)^j E^{l-j}$$

$$= \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} (-1)^j E^{l-j} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j E^{k-j}$$

$$= \Delta^l \Delta^k$$

$$\Delta^l \Delta^k = \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} (-1)^j E^{l-j} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j E^{k-j} = \Delta^{k+l}$$

$$(b) \quad \Delta(x(n)y(n)) = x(n+1)y(n+1) - x(n)y(n)$$

$$= x(n+1)y(n+1) - x(n)y(n) - x(n+1)y(n) + x(n+1)y(n)$$

$$= [x(n+1) - x(n)]y(n) + x(n+1)[y(n+1) - y(n)]$$

$$= y(n)\Delta x(n) + x(n+1)\Delta y(n).$$

$$\begin{aligned}
(c) \quad \Delta \left(\frac{x(n)}{y(n)} \right) &= \frac{x(n+1)}{y(n+1)} - \frac{x(n)}{y(n)} \\
&= \frac{x(n+1)y(n) - x(n)y(n+1)}{y(n)y(n+1)} \\
&= \frac{x(n+1)y(n) - x(n)y(n+1) - y(n)x(n) + y(n)x(n)}{y(n)y(n+1)} \\
&= \frac{[x(n+1) - x(n)]y(n) - x(n)[y(n+1) - y(n)]}{y(n)y(n+1)} \\
&= \frac{y(n)\Delta x(n) - x(n)\Delta y(n)}{y(n)Ey(n)}
\end{aligned}$$

Örnek

$$y(n) = a^n \quad \text{ise} \quad \Delta y(n) = (a - 1)a^n, n \in \mathbb{N}$$

$$y(n) = \sin(an) \quad \text{ise} \quad \Delta y(n) = 2 \sin \frac{a}{2} \cos a \left(n + \frac{1}{2} \right), n \in \mathbb{N}$$

$$y(n) = \cos(an) \quad \text{ise} \quad \Delta y(n) = -2 \sin \frac{a}{2} \sin a \left(n + \frac{1}{2} \right), n \in \mathbb{N}$$

$$y(n) = \log(an) \quad \text{ise} \quad \Delta y(n) = \log \left(1 + \frac{1}{n} \right), n \in \mathbb{Z}^+$$

2.1.3. Teorem

k yncı dereceden $p(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_k$ polinomu için

$$\Delta^k p(n) = a_0(k!) \tag{2.7}$$

$$\Delta^{k+i} p(n) = 0, \quad i \geq 1 \tag{2.8}$$

dir. Burada $a_0 \neq 0, a_1, a_2, \dots, a_k$ katsayıları reel sabitlerdir [4].

İspat

$p(n) = a_0n^k + a_1n^{k-1} + \dots + a_k$ polinomunun birinci basamaktan farkı

$$\begin{aligned}\Delta p(n) &= [a_0(n+1)^k + a_1(n+1)^{k-1} + \dots + a_k] - [a_0n^k + a_1n^{k-1} + \dots + a_k] \\ &= a_0kn^{k-1} + \text{derecesi } k-1 \text{ den küçük terimler}\end{aligned}$$

ve ikinci basamaktan farkı

$$\Delta^2 p(n) = a_0k(k-1)n^{k-2} + \text{derecesi } k-2 \text{ den küçük terimler}$$

biçimindedir. Bu şekilde devam edilirse k yıncı adımda

$$\Delta^k p(n) = a_0k(k-1) \dots 1n^{k-k} = a_0k!$$

bulunur. Burada $\forall i \geq 1$ için $\Delta^{k+i}p(n) = 0$ olur.

Örnek

$p(n) = 6n^3 - 4n + 1$ polinomunun dördüncü basamağa kadar farklarını hesaplayınız.

$$\Delta p(n) = 6.3.n^2 + 6.3.n + 2$$

$$\Delta^2 p(n) = 6.3.2.n + 6.3.2$$

$$\Delta^3 p(n) = 6.3.2.1$$

$$\Delta^4 p(n) = 0.$$

3. SKALER FARK DENKLEMLERİ

3.1. Temel Tanım ve Sonuçlar

3.1.1. Tanım

$n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$ bağımsız değişken ve y bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$F(n, y(n), y(n+1), \dots, y(n+k)) = 0 \quad (3.1)$$

eşitliğine bir $k - inci$ basamaktan fark denklemi denir. $E = \Delta + I$ operatörü gözönüne alınırsa Eş. 3.1 fark denklemi

$$G(n, y(n), \Delta y(n), \dots, \Delta^k y(n)) = 0 \quad (3.2)$$

formunda yazılabilir. Eş. 3.1 denklemi

$$y(n+k) = f(n, y(n), y(n+1), \dots, y(n+k-1)) \quad (3.3)$$

ya da

$$\Delta^k y(n) = g(n, y(n), \Delta y(n), \dots, \Delta^{k-1} y(n)) \quad (3.4)$$

ya da

$$\Delta^k y(n) = g(n, y(n), y(n+1), \dots, y(n+k-1)) \quad (3.5)$$

formunda ise *normal fark denklem* adını alır [4].

Örnek

Bir $S \subset \mathbb{N}$ cümlesi üzerinde tanımlı olan

$$\Delta y(n) + 3y(n) = 0 \quad (3.6)$$

$$\Delta^2 y(n) + 2\Delta y(n) + y(n) = 0 \quad (3.7)$$

$$\Delta^2 y(n) - ny(n) = 2n + 7 \quad (3.8)$$

$$y(n)\Delta^3 y(n) = \frac{1}{2} \quad (3.9)$$

$$(\Delta y(n))^2 + y^2(n) = -1 \quad (3.10)$$

fark denklemlerini gözönüne alalım. Burada S kümesi, bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısından başlayan ardışık doğal sayıların sonlu ya da sonsuz bir cümlesidir. Bu denklemlerin hepsinde bağımsız değişken n ve bilinmeyen fonksiyon y dir.

Fark denklem literatüründe $y(n)$ yerine sık sık y_n sembolü kullanılabilmektedir. Buna göre $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$ olup yukarıdaki denklemlerin eşdeğerleri sırasıyla,

$$y_{n+1} + 2y_n = 0 \quad (3.11)$$

$$y_{n+2} = 0 \quad (3.12)$$

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + (1 - n)y_n = 2n + 7 \quad (3.13)$$

$$y_n y_{n+3} - 3y_n y_{n+2} + 3y_n y_{n+1} - y_n^2 = \frac{1}{2} \quad (3.14)$$

$$(y_{n+1} - y_n)^2 + y_n^2 = -1 \quad (3.15)$$

dir [4].

3.1.2. Tanım

Bir fark denkleminde bilinmeyen fonksiyonun mevcut en büyük ve en küçük argümentlerinin farkına o denklemin *basamağı* denir.

Örneğin, $y(n+3) - 4y(n+2) + 5y(n+1) = 0$ ve $y(n+4) + y(n)y(n+2) = 1$ denklemlerinin basamakları sırasıyla, $n+3 - (n+1) = 2$ ve $n+4 - n = 4$ dür.

$y(n+4) = n(n-2)$ ise sıfırıncı basamaktan bir denklemdir. Yani açık olarak bir fonksiyondur [4].

3.1.3. Tanım

$\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı bir $y(n)$ fonksiyonu, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$F(n, y(n), y(n+1), \dots, y(n+k)) = 0 \quad (3.16)$$

denklemini sağlıyorsa o zaman $y(n)$ fonksiyonuna $\mathbb{N}$ üzerinde Eş. 3.16 denkleminin bir çözümü denir. k . basamaktan bir fark denklemin, $\Psi(n, y, c_1, \dots, c_k) = 0$ veya $y = \varphi(n, c_1, c_2, \dots, c_k)$ şeklinde k tane $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ keyfi sabit içeren çözümüne *genel çözüm* adı verilir. Genel çözümden elde edilen çözümlere de *özel çözüm* denir [4].

Örnek

$$y(n) = 1 - \frac{5}{n}, n = 1, 2, \dots$$

fonksiyonunu birinci basamaktan

$$(n+1)y(n+1) + ny(n) = 2n - 9, n = 1, 2, \dots \quad (3.17)$$

fark denkleminin bir çözümüdür. Gerçekten, $y(n)$ ve $y(n+1) = 1 - \frac{5}{n+1}$,

Eş. 3.17 denkleminde yazılırsa

$$(n+1)\left(1 - \frac{5}{n+1}\right) + n\left(1 - \frac{5}{n}\right) \equiv 2n - 9$$

özdeşliği bulunur. Bu da $y(n)$ fonksiyonunun her $n = 1, 2, \dots$ için Eş. 3.17 denklemini sağladığını gösterir.

Örnek

Üçüncü basamaktan

$$y(n+3) - 8y(n+2) + 21y(n+1) - 18y(n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.18)$$

fark denkleminin genel çözümü

$$y(n) = c_1 3^n + c_2 n 3^n + c_3 2^n$$

dir. Burada c_1, c_2 ve c_3 keyfi sabitlerdir.

3.1.4. Tanım

k . basamaktan bir fark denkleminin bir özel çözümünü bulmak için o çözüme ait

$$y(n_0 + i) = \alpha_i, \quad 0 \leq i \leq k - 1 \quad (3.19)$$

ya da

$$\Delta^i y(n_0) = \alpha_i, \quad 0 \leq i \leq k - 1 \quad (3.20)$$

biçiminde ilk k tane ardışık değerin belirtilmesi gereklidir. Burada $n_0 \in \mathbb{N}$ ve $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ reel sabitlerdir. Eş. 3.19 ya da Eş. 3.20 koşullarına *başlangıç koşulları* adı verilir. k yıncı basamaktan bir fark denklemi ve Eş. 3.19 ya da Eş. 3.20 başlangıç koşullarından meydana gelen probleme bir *başlangıç değer problemi* denir [4].

3.1.5. Tanım

$a_1(n), a_2(n), \dots, a_k(n)$ katsayıları ile $g(n)$, $n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve $[n_0, \infty) = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\}$ üzerinde $a_k(n) \neq 0$ olmak üzere

$$y(n+k) + a_1(n)y(n+k-1) + \dots + a_k(n)y(n) = g(n) \quad (3.21)$$

biçimindeki bir denkleme k yıncı *basamaktan lineer fark denklem* denir. Bu denklem $y(n) \equiv 0$ olduğu zaman *homogen denklem*, aksi durumda *homogen olmayan denklem* olarak adlandırılır. Buna göre k yıncı basamaktan bir *lineer homogen fark denklem*

$$y(n+k) + a_1(n)y(n+k-1) + \cdots + a_k(n)y(n) = 0 \quad (3.22)$$

şeklinde. Ayrıca bütün $a_i(n)$ katsayıları $a_i(n) \equiv a_i$ şeklinde sabitse, Eş. 3.21 denklemine *sabit katsayılı*, aksi durumda *değişken katsayılı fark denklemi* denir [4].

3.1.6. Tanım

$f_1(n), f_2(n), \dots, f_r(n)$ fonksiyonları $n \geq n_0$ için tanımlı olsunlar. Her $n \geq n_0$ için

$$c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) + \cdots + c_r f_r(n) = 0 \quad (3.23)$$

olacak biçimde hepsi birden sıfır olmayan $c_1, c_2, \dots, c_r$ sabitleri var ise bu durumda $\{f_1(n), f_2(n), \dots, f_r(n)\}$ cümlesine $[n_0, \infty)$ üzerinde *lineer bağımlıdır* denir. Eş. 3.23 eşitliği her $n \geq n_0$ için sadece ve sadece $c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0$ durumunda sağlanıyorsa $\{f_1(n), f_2(n), \dots, f_r(n)\}$ cümlesine $[n_0, \infty)$ üzerinde *lineer bağımsızdır* denir [4].

Örnek

$\{2^n, n2^n, n^2 2^n\}$ cümlesi $[1, \infty)$ üzerinde lineer bağımsızdır. Gerçekten,

$$c_1 2^n + c_2 n 2^n + c_3 n^2 2^n = 0, n = 1, 2, \dots$$

eşitliği 2^n ile bölünürse,

$$c_1 + c_2 n + c_3 n^2 = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

bulunur. Bu ise en fazla iki tane $n \geq 1$ değeri için doğrudur. O halde her $n \geq 1$ için

eşitliğin sağlanması ancak ve ancak $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ durumunda mümkündür.

3.1.7. Tanım

$y_1(n), y_2(n), \dots, y_r(n)$ fonksiyonlarının $W(n)$ ile gösterilen *Casoratyanı*

$$W(n) = \det \begin{pmatrix} y_1(n) & y_2(n) & \dots & y_r(n) \\ y_1(n+1) & y_2(n+1) & \dots & y_r(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(n+r-1) & y_2(n+r-1) & \dots & y_r(n+r-1) \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır [4].

Lemma (Abel Lemması)

$y_1(n), y_2(n), \dots, y_r(n)$ fonksiyonları

$$y(n+k) + a_1(n)y(n+k-1) + \dots + a_k(n)y(n) = 0 \quad (3.22)$$

homogen denkleminin çözümleri ve $W(n)$ onların Casoratyanı olsun. Bu durumda $n \geq n_0$ için

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a_k(i) \right) W(n_0)$$

dır [4].

Örnek

Üçüncü basamaktan homogen

$$y(n+3) + 2y(n+2) - 9y(n+1) - 18y(n) = 0$$

fark denkleminin $(-3)^n, (-2)^n, 3^n$ çözümleri bir temel cümle oluştururlar. Gerçekten

onların Casoratyanı

$$W(n) = \det \begin{pmatrix} (-2)^n & (-3)^n & 3^n \\ (-2)^{n+1} & (-3)^{n+1} & 3^{n+1} \\ (-2)^{n+2} & (-3)^{n+2} & 3^{n+2} \end{pmatrix}$$

şeklinde olup $n = 0$ noktasında

$$W(n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 3 \\ 4 & 9 & 9 \end{pmatrix} = -30 \neq 0$$

dır.

3.1.1. Teorem

$$y(n+k) + a_1(n)y(n+k-1) + \dots + a_k(n)y(n) = 0 \quad (3.22)$$

homogen denkleminin k tane lineer bağımsız çözümü $y_1(n), y_2(n), \dots, y_k(n)$ olsun.

Denklemin genel çözümü

$$y(n) = c_1 y_1(n) + \dots + c_k y_k(n)$$

dir. Burada $c_1, c_2, \dots, c_k$ keyfi sabitlerdir [4].

Örnek

İkinci basamaktan homogen

$$y(n+2) - 6y(n+1) + 9y(n) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

fark denkleminin bağımsız çözümleri 3^n ve $n3^n$ olduğundan, genel çözüm

$$y(n) = 3^n(c_1 + c_2 n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

dır. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir. Diğer denklemin

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 9$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü aşağıdaki şekilde hesaplanır: $n = 0$ ve $n = 1$ için

$$y(n) = 3^n(c_1 + c_2n), n = 0, 1, 2, \dots \text{ denkleminde,}$$

$$c_1 = 1, \quad 3(c_1 + c_2) = 9$$

elde edilir. Buradan $c_1 = 1$ ve $c_2 = 2$ olup

$$y(n+2) - 6y(n+1) + 9y(n) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ve

$$y(n) = 3^n(c_1 + c_2n), n = 0, 1, 2, \dots$$

başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$y(n) = 3^n(1 + 2n), n = 0, 1, 2, \dots$$

dir.

3.2. Birinci Basamaktan Lineer Fark Denklemleri

Birinci basamaktan lineer homogen olmayan

$$y(n+1) = a(n)y(n) + g(n), \quad n \geq n_0 \geq 0 \quad (3.24)$$

fark denklemi ve

$$y(n_0) = y_0 \quad (3.25)$$

başlangıç koşulundan meydana gelen başlangıç değer problemini gözönüne alalım. Burada $a(n)$ katsayıları ve $g(n), [n_0, \infty)$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyon olup $\forall n \geq n_0$ için $a(n) \neq 0$ dır [4].

3.2.1. Teorem

$$y(n+1) = a(n)y(n), \quad n \geq n_0 \geq 0$$

homogen fark denklemi ve Eş. 3.25 başlangıç koşulundan oluşan problemin tek çözümü

$$y(n) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right) y_0 \quad (3.26)$$

olup Eş. 3.24 ve Eş. 3.25 başlangıç değer probleminin çözümü

$$y(n) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right) y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i) \right) g(r)$$

dir.

3.3. İkinci Basamaktan Fark Denklemleri

a_1, a_2 katsayıları reel sabitler ve $a_2 \neq 0$ olmak üzere ikinci basamaktan sabit katsayılı lineer homogen

$$y(n+2) + a_1 y(n+1) + a_2 y(n) = 0 \quad (3.26)$$

fark denklemini ele alalım. Bu denklem için λ^n şeklinde bir çözüm aranır

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0 \quad (3.27)$$

bulunur. Bu denkleme Eş. 3.26 fark denkleminin *karakteristik denklemi* denir. Eş. 3.27 denkleminin λ_1, λ_2 köklerine *karakteristik kökler* adı verilir. Eş. 3.26 homogen fark denkleminin genel çözümü, λ_1, λ_2 köklerine bağlı olarak üç farklı durumda hesaplanır.

Durum 1. λ_1 ve λ_2 kökleri reel ve farklı ise bu durumda $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n\}$ cümlesi Eş. 3.26 denkleminin bir temel cümlesidir. Eş. 3.26 denkleminin genel çözümü

$$y(n) = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n \quad (3.28)$$

şeklindedir. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

Durum 2. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ olsun. Bu durumda Eş. 3.26 denkleminin bir temel cümlesi $\{\lambda^n, n\lambda^n\}$ olup genel çözüm

$$y(n) = (c_1 + c_2 n)\lambda^n \quad (3.29)$$

dir. Burada c_1, c_2 keyfi sabitlerdir.

Durum 3. $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ve $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ olsun; burada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\beta \neq 0$ dır. Bu durumda Eş. 3.26 denkleminin bir temel cümlesi $\{r^n \cos n\theta, r^n \sin n\theta\}$ dır. Burada

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

dır. Eş. 3.26 in genel çözümü

$$y(n) = r^n(c_1 \cos n\theta + c_2 \sin n\theta) \quad (3.30)$$

şeklindedir. Burada c_1, c_2, A ve B keyfi sabitlerdir [4].

Örnek

$$y(n+2) - 6y(n+1) + 5y(n) = 0$$

denklemini ele alalım. Bu denkleme ilişkin karakteristik denklem

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

olup karakteristik kökler $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_2 = 5$ dir. Bu durumda genel çözüm

$$y(n) = c_1 + c_2 5^n \text{ dir. Burada } c_1 \text{ ve } c_2 \text{ keyfi sabitlerdir.}$$

Örnek

$y(n+2) - 6y(n+1) + 9y(n) = 0$ denklemini ele alalım. Buna ilişkin karakteristik kökler $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ olup genel çözüm $y(n) = (c_1 + c_2 n)3^n$ dir. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

Örnek

$$y(n+2) + y(n) = 0, y(0) = 0, y(1) = 1$$

başlangıç değer problemi verilsin. Karakteristik denklem $\lambda^2 + 1 = 0$ olup karakteristik kökler $\lambda_{1,2} = \pm i$ dir. Buradan genel çözüm

$$y(n) = A \cos\left(\frac{n\pi}{2} - B\right)$$

dir. Burada A ve B keyfi sabitlerdir. Başlangıç koşulları uygulanırsa $A \cos B = 0$ ve $A \cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = 1$ bulunur. İlk denklemden $B = \frac{\pi}{2}$ ve ikinci denklemden $A = 1$ dir.

Buradan istenen çözüm

$$y(n) = \cos\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

dir [4].

3.4. Homogen Olmayan Denklemler İçin Özel Çözümler

k yncı basamaktan sabit katsayılı lineer homogen olmayan

$$y(n+k) + a_1 y(n+k-1) + \dots + a_k y(n) = g(n) \quad (3.31)$$

denklemini gözönüne alınsın. Burada $a_1, a_2, \dots, a_k$ katsayıları reel sabitler ve $a_k \neq 0$ dir. Bu denklemin bir özel çözümü için önce belirsiz katsayılar yöntemi ve daha sonra parametrelerin değişim yöntemi verilmektedir [4].

3.4.1. Belirsiz katsayılar yöntemi

Belirsiz katsayılar yöntemine göre önce Eş. 3.32 denkleminin homogen

$$y(n+k) + a_1y(n+k-1) + \dots + a_ky(n) = 0 \quad (3.32)$$

denkleminin genel çözümü bulunur. Sonra $g(n)$ in belli durumları için özel çözüm olabilecek aday $y_p(n)$ çözümleri oluşturulur. Aday çözümler ile genel çözümdeki terimler karşılaştırılır. Varsa benzerliklerin yok edilmesi için aday çözümler n nin en küçük kuvvetleri ile çarpılır. Böylece özel çözüm şekli kesinleştirilmiş olur.

Belli $g(n)$ durumları ve karşılık gelen $y_p(n)$ aday çözümleri şu şekildedir:

$$g(n) = a^n \text{ ise } y_p(n) = Aa^n$$

$$g(n) = n^k \text{ ise } y_p(n) = A_0 + A_1n + \dots + A_kn^k$$

$$g(n) = n^ka^n \text{ ise } y_p(n) = (A_0 + A_1n + \dots + A_kn^k)a^n$$

$$g(n) = \sin bn \text{ veya } g(n) = \cos bn \text{ ise } y_p(n) = A \sin bn + B \cos bn$$

$$g(n) = a^n \sin bn \text{ veya } g(n) = a^n \cos bn \text{ ise } y_p(n) = (A \sin bn + B \cos bn)a^n$$

3.4.2. Parametrelerin değişimi yöntemi

Parametrelerin değişim yöntemi k yıncı basamaktan sabit katsayılı veya değişken katsayılı homogen olmayan denklemlerin bir özel çözümünü bulmak için $g(n)$ nin belli bir türden olup olmadığına bakılmaksızın uygulanabilen bir yöntemdir. Bu yüzden parametrelerin değişimi en genel yöntem olarak bilinir. Bu yöntemin uygulanma biçimi ikinci basamaktan lineer değişken katsayılı homogen olmayan

$$y(n+2) + a_1(n)y(n+1) + a_2(n)y(n) = g(n) \quad (3.33)$$

denklemini için açıklanmaktadır; burada $a_1(n), a_2(n)$ katsayıları ve $g(n)$, $[0, \infty)$ üzerinde tanımlı fonksiyonlar olup her $n \geq 0$ için $a_2(n) \neq 0$ dir. Önce (3.33) ye

ilişkin

$$y(n+2) + a_1(n)y(n+1) + a_2(n)y(n) = 0 \quad (3.34)$$

homogen denkleminin genel çözümü

$$y_h(n) = c_1 y_1(n) + c_2 y_2(n) \quad (3.35)$$

şeklinde bulunur. Burada $y_1(n)$ ve $y_2(n)$, Eş. 3.34 ün lineer bağımsız çözümleridir. Buradan Eş. 3.33 nin bir özel çözümü

$$y_p(n) = c_1(n)y_1(n) + c_2(n)y_2(n) \quad (3.36)$$

dir. Burada $c_1(n)$ ve $c_2(n)$ aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\Delta c_1(n)y_1(n+1) + \Delta c_2(n)y_2(n+1) = 0, \quad (3.37)$$

$$\Delta c_1(n)y_1(n+2) + \Delta c_2(n)y_2(n+2) = g(n) \quad (3.38)$$

Eş. 3.37 ve Eş. 3.38 denklemlerinden,

$$\Delta c_1(n) = \frac{-g(n)y_2(n+1)}{W(n+1)}$$

$$\Delta c_2(n) = \frac{g(n)y_1(n+1)}{W(n+1)}$$

dir. Burada $W(n)$, $y_1(n)$ ve $y_2(n)$ in Casoratyanıdır. Buradan

$$c_1(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{-g(i)y_2(i+1)}{W(i+1)}$$

$$c_2(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{g(i)y_1(i+1)}{W(i+1)}$$

Bunlar Eş. 3.36 de yerlerine konursa Eş. 3.33 nin bir özel çözümü

$$y_p(n) = y_1(n) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{-g(i)y_2(i+1)}{W(i+1)} + y_2(n) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{g(i)y_1(i+1)}{W(i+1)}$$

şeklinde bulunur.

Şimdi, bu yöntemi k . basamaktan lineer değişken katsayılı homogen olmayan

$$y(n+k) + a_1(n)y(n+k-1) + \dots + a_k(n)y(n) = g(n) \quad (3.39)$$

denklemini için anlatalım. Önce buna ilişkin

$$y(n+k) + a_1(n)y(n+k-1) + \dots + a_k(n)y(n) = 0 \quad (3.40)$$

homogen denklemin genel çözümü

$$y_h(n) = c_1y_1(n) + c_2y_2(n) + \dots + c_ky_k(n)$$

şeklinde bulunur. Burada $y_1(n), y_2(n), \dots, y_k(n)$ homogen denklemin lineer bağımsız çözümleridir. Buradan Eş. 3.39 in bir özel çözümü

$$y_p(n) = c_1(n)y_1(n) + c_2(n)y_2(n) + \dots + c_k(n)y_k(n)$$

dir. Burada $c_1(n), c_2(n), \dots, c_k(n)$ bilinmeyenleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{cases} \Delta c_1(n)y_1(n+1) + \Delta c_2(n)y_2(n+1) + \dots + \Delta c_k(n)y_k(n+1) = 0 \\ \Delta c_1(n)y_1(n+2) + \Delta c_2(n)y_2(n+2) + \dots + \Delta c_k(n)y_k(n+2) = 0 \\ \vdots \\ \Delta c_1(n)y_1(n+k-1) + \Delta c_2(n)y_2(n+k-1) + \dots + \Delta c_k(n)y_k(n+k-1) = 0 \\ \Delta c_1(n)y_1(n+k) + \Delta c_2(n)y_2(n+k) + \dots + \Delta c_k(n)y_k(n+k) = g(n) \end{cases}$$

sisteminden $\Delta c_1(n), \Delta c_2(n), \dots, \Delta c_k(n)$ bulunur ve daha sonra bunların sırası ile ters farkları alınarak $c_1(n), c_2(n), \dots, c_k(n)$ elde edilir [4].

Örnek

Parametrelerin değişimi yöntemi yardımıyla

$$y(n+2) - 7y(n+1) + 6y(n) = n$$

denkleminin bir özel çözümünü bulalım. Bu denkleme ilişkin

$$y(n+2) - 7y(n+1) + 6y(n) = 0$$

homogen denkleminin genel çözümü

$$y_h(n) = c_1 + c_2 6^n$$

dir. O halde verilen bir denklemin bir özel çözümü

$$y_p(n) = c_1(n) + c_2(n)6^n$$

dir. Burada $c_1(n)$ ve $c_2(n)$

$$\begin{cases} \Delta c_1(n) + \Delta c_2(n)6^{n+1} = 0 \\ \Delta c_1(n) + \Delta c_2(n)6^{n+2} = n \end{cases}$$

sistemini sağlarlar. Buradan

$$\Delta c_1(n) = \frac{-n}{5}$$

$$\Delta c_2(n) = \frac{n}{30} 6^{-n}$$

dir. Bunların ters farkları alınırsa sırasıyla

$$c_1(n) = \Delta^{-1} \left(-\frac{n}{5} \right) = \sum_{i=0}^{n-1} -\frac{i}{5} = -\frac{1}{5} \sum_{i=0}^{n-1} i = -\frac{1}{10} n(n-1)$$

$$c_2(n) = \Delta^{-1} \left(\frac{n6^{-n}}{30} \right) = \frac{1}{30} \sum_{i=0}^{n-1} i6^{-i} = -\frac{n}{25}6^{-n} - \frac{1}{125}6^{-n}$$

elde edilir. Böylece bir özel çözüm

$$y_p(n) = -\frac{n^2}{10} + \frac{3n}{50} - \frac{1}{125}$$

şeklinde bulunur [4].

Şimdi Sturm-Liouville fark ifadesi yardımıyla $\ell_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^\ell)$ uzayında L operatörü aşağıdaki biçimde üretilsin.

Burada $\ell_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^\ell)$

$$y_n^{(j)} = \left\{ \begin{pmatrix} y_n^{(1)} \\ y_n^{(2)} \\ \vdots \\ y_n^{(l)} \end{pmatrix} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

biçimindeki bütün kompleks vektör dizilerinin Hilbert uzayını gösterebilir. Buradaki norm

$$\|y_n^{(j)}\| = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left\{ |y_n^{(1)}|^2 + |y_n^{(2)}|^2 + \cdots + |y_n^{(l)}|^2 \right\}$$

biçimindedir.

$$(\wedge^{(j)} y^{(j)})_n := a_{n-1}^{(j)} y_{n-1}^{(j)} + q_n^{(j)} y_n^{(j)} + a_n^{(j)} y_{n+1}^{(j)}, n \in \mathbb{N}, j = 1, 2, \dots, l$$

Sturm-Liouville fark ifadeler sistemini göz önüne alınsın. Burada

$$q_n^{(j)}(z) = \left\{ \begin{bmatrix} q_n^{(1)}(z) & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & q_n^{(2)}(z) & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & q_n^{(l)}(z) \end{bmatrix} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

biçimindedir.

L , $\ell_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^\ell)$ uzayında aşağıdaki biçimde üretilmektedir.

$$\{(\wedge^{(j)} y^{(j)})_n\}_{n \in \mathbb{N}} := \begin{pmatrix} (\wedge^{(1)} y^{(1)})_n \\ . \\ . \\ . \\ (\wedge^{(l)} y^{(l)})_n \end{pmatrix}_{n \in \mathbb{N}} = \begin{pmatrix} a_{n-1}^{(1)} y_{n-1}^{(1)} + q_n^{(1)} y_n^{(1)} + a_n^{(1)} y_{n+1}^{(1)} \\ . \\ . \\ . \\ a_{n-1}^{(l)} y_{n-1}^{(l)} + q_n^{(l)} y_n^{(l)} + a_n^{(l)} y_{n+1}^{(l)} \end{pmatrix}_{n \in \mathbb{N}}$$

Burada $q_n^{(j)}$ kompleks değerli diziler olduğundan L non-selfadjoint operatördür.

$(\wedge^{(j)} y^{(j)})_n = \lambda y_n^{(j)}$ denkleminin ürettiği operatörün spektral özellikleri incelenecektir.

Bunun için L operatörünün resolventi, özdeğerleri ve spektral tekillikleri cümlesi bulunacaktır.

4. L NİN JOST ÇÖZÜMÜ

Aşağıdaki fark denklemler sistemi gözönüne alınsın.

$$\begin{pmatrix} (\wedge^{(1)} y^{(1)})_n \\ \vdots \\ (\wedge^{(l)} y^{(l)})_n \end{pmatrix}_{n \in \mathbb{N}} = \begin{pmatrix} a_{n-1}^{(1)} y_{n-1}^{(1)} + q_n^{(1)} y_n^{(1)} + a_n^{(1)} y_{n+1}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{n-1}^{(l)} y_{n-1}^{(l)} + q_n^{(l)} y_n^{(l)} + a_n^{(l)} y_{n+1}^{(l)} \end{pmatrix}_{n \in \mathbb{N}} = \begin{pmatrix} \lambda y_n^{(1)} \\ \vdots \\ \lambda y_n^{(l)} \end{pmatrix}_{n \in \mathbb{N}} \quad (4.1)$$

Burada $(a_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$ ve $(q_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$ kompleks diziler, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n^{(j)} \neq 0$ ve λ kompleks

parametredir.

Eş. 4.1 denklemi aşağıdaki Sturm-Liouville formunda yazılabilir.

$$\Delta(a_{n-1}^{(j)} \Delta y_{n-1}^{(j)}) + h_n^{(j)} y_n^{(j)} = \lambda y_n^{(j)}$$

Burada $h_n^{(j)} = a_{n-1}^{(j)} + a_n^{(j)} + q_n^{(j)}$ ve Δ ileri fark operatörüdür. Yani

$$\Delta y_n^{(j)} = y_{n+1}^{(j)} - y_n^{(j)}, \quad n \in \mathbb{N}, j = 1, 2, \dots, \ell \quad \text{dir.}$$

$\{a_n^{(j)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ve $\{q_n^{(j)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $j = 1, 2, \dots, \ell$ dizileri

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(|1 - a_n^{(j)}| + |q_n^{(j)}|) < \infty \quad j = 1, \dots, \ell \quad (4.2)$$

koşulu sağlansın. Ayrıca Eş. 4.1 denkleminin $\lambda = 2 \cos z$ için

$E_n(z).e^{-inz} := I$, $z \in \bar{\mathbb{C}}_+ := \{z: z \in \mathbb{C}, \text{Im} z \geq 0\}$ koşulunu sağlayan çözümü

$E_n(z)$ ile gösterilsin. Eş. 4.2 koşulu altında $E_n(z)$ çözümü aşağıdaki gösterime sahiptir [1].

$$E_n(z) = \{e_n^{(j)}(z)\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ \begin{bmatrix} e_n^{(1)}(z) & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & e_n^{(2)}(z) & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & e_n^{(l)}(z) \end{bmatrix} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \quad (4.3)$$

Burada $\lambda = 2 \cos z$ $z \in \bar{\mathbb{C}}_+$ için

$$e_n^{(j)}(z) = \alpha_n^{(j)} e^{inz} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} K_{n,m}^{(j)} e^{imz} \right] \quad n \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, \ell \quad (4.4)$$

ve

$$\alpha_n^{(j)} = \left\{ \prod_{k=n}^{\infty} a_k^{(j)} \right\}^{-1}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (4.5)$$

$$K_{n1}^{(j)} = -\sum_{k=n-1}^{\infty} q_k^{(j)}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (4.6)$$

$$K_{n2}^{(j)} = -\sum_{k=n-1}^{\infty} \left(1 - \left(a_k^{(j)} \right)^2 \right) + \sum_{k=n-1}^{\infty} q_k^{(j)} + \sum_{s=k-1}^{\infty} q_s^{(j)}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (4.7)$$

$$K_{n,m-2}^{(j)} = \sum_{k=n-1}^{\infty} \left(1 - \left(a_k^{(j)} \right)^2 \right) K_{k-1,m}^{(j)} \sum_{k=n-1}^{\infty} \alpha_k^{(j)} K_{k,m-1}^{(j)}, \quad m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (4.8)$$

Eş. 4.8 kullanılarak tümevarım yoluyla aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left| K_{n,m}^{(j)} \right| \leq c \sum_{k=n-\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} \left(\left| 1 - a_k^{(j)} \right| + \left| q_k^{(j)} \right| \right) \quad n \in \mathbb{N} \quad j = 1, 2, \dots, \ell \quad (4.9)$$

Burada $c > 0$ sabit ve $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$, $\frac{m}{2}$ nin tam kısmıdır.

Böylece $e_n^{(j)}(z)$, $n \in \mathbb{N}, j = 1, 2, \dots, \ell$ $\mathbb{C}_+ := \{z: z \in \mathbb{C}, \text{Im} z > 0\}$ da z ye göre

analitiktir, $\bar{\mathbb{C}}_+$ da süreklidir ve aşağıdaki asimptotik bağıntıyı sağlar.

Önerme

$$e_n^{(j)}(z) = \alpha_n^{(j)} e^{inz} [1 + o(1)], \quad n \in \mathbb{N} \quad z = \xi + i\tau \quad \tau \rightarrow \infty \quad (4.10)$$

İspat

(i) $\text{Im} z = 0$ olsun $\Rightarrow |e^{imz}| = 1$

$$e_n^{(j)}(z) = \alpha_n^{(j)} e^{inz} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} K_{n,m}^{(j)} e^{imz} \right]$$

$$e_n^{(j)}(z) e^{-inz} = \alpha_n^{(j)} + \alpha_n^{(j)} \sum_{m=1}^{\infty} |K_{n,m}^{(j)}| |e^{imz}|$$

$$e_n^{(j)}(z) = e^{inz} \alpha_n^{(j)} [1 + o(1)] , \text{Im} z = 0 , \quad |z| \rightarrow \infty$$

(ii) $\text{Im} z > 0$ olsun $\Rightarrow e^{imz}$ fonksiyonu azalan

$$|K_{n,m}^{(j)}| |e^{imz}| \leq |K_{n,m}^{(j)}|$$

Eş. 3.2 , Eş. 3.9 da yazılırsa $|K_{n,m}^{(j)}| \leq \infty$ olup $K_{n,m}^{(j)} \in \ell_1$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\infty} |K_{n,m}^{(j)} e^{imz}| = \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{|z| \rightarrow \infty} |K_{n,m}^{(j)} e^{imz}|$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{|z| \rightarrow \infty} |K_{n,m}^{(j)}| |e^{imz}|$$

$$= o(1) \quad |z| \rightarrow \infty \quad \text{Im} z > 0$$

olur. O halde

$$e_n^{(j)}(z) = e^{inz} \alpha_n^{(j)} [1 + o(1)] \quad \text{Im} z > 0 , |z| \rightarrow \infty$$

bulunur.

Dolayısıyla (i) ve (ii) den ispat tamamlanır.

Ayrıca $S_0(z) = 0$, $S_1(z) = I$ başlangıç koşullarını sağlayan Eş. 3.1 in diğer çözümü $S_n(z)$ olmak üzere $S_n(z)$ çözümü

$$S_n(z) = \{s_n^{(j)}(z)\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ \begin{bmatrix} s_n^{(1)}(z) & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & s_n^{(2)}(z) & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & s_n^l(z) \end{bmatrix} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

biçimindedir. Burada $s_0^{(j)}(z) = 0$, $s_1^{(j)}(z) = 1$ dir.

Eş. 4.1 sisteminin $y^{(j)} = \{y_n^{(j)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ve $u^{(j)} = \{u_n^{(j)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ $j = 1, 2, \dots, \ell$ iki çözümünün Wronskian'ı

$$W[y^{(j)}, u^{(j)}] = a_n^{(j)} [y_n^{(j)} \Delta u_n^{(j)} - \Delta y_n^{(j)} u_n^{(j)}] = a_n^{(j)} [y_n^{(j)} u_{n+1}^{(j)} - y_{n+1}^{(j)} u_n^{(j)}]$$

biçiminde tanımlanır [9].

5. L NİN ÖZDEĞERLERİ VE SPEKTRAL TEKİLLİKLERİ

Önerme

$$(R(L)\varphi)_n := \sum_{m \in \mathbb{N}} G_{n,m}(z) \varphi_m$$

dir. Burada

$$G_{n,m}(z) = \frac{1}{a_0} \begin{cases} S_n(z)E_m(z)A^{-1}(z), m = n-1, n-2, \dots \\ S_m(z)E_n(z)A^{-1}(z), m = n, n+1, \dots \end{cases}$$

$(G_{n,m}(z), L$ nin Green Fonksiyonu)

$$\varphi = \{\varphi_m\}_{m \in \mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^\ell), n \in \mathbb{N}$$

$z \in \Omega$ ve $A(z) \neq 0$ dir.

İspat

$$\Delta(a_{n-1}^{(j)} \Delta y_{n-1}^{(j)}) + h_n^{(j)} y_n^{(j)} - \lambda y_n^{(j)} = g_n^{(j)} \quad (5.1)$$

denkleminin çözümü aransın.

$$\Delta(a_{n-1}^{(j)} \Delta y_{n-1}^{(j)}) + h_n^{(j)} y_n^{(j)} - \lambda y_n^{(j)} = 0 \text{ homogen denkleminin çözümü bulunsun.}$$

Eş. 5.1 denkleminin iki çözümü $S = \{S_n^{(j)}\}$ ve $E = \{E_n^{(j)}\}$ alınsın.

$$\begin{aligned} W[S, E] &= a_n^{(j)} [S_n^{(j)} E_{n+1}^{(j)} - S_{n+1}^{(j)} E_n^{(j)}] = a_0^{(j)} S_0^{(j)} E_1^{(j)} - a_0^{(j)} S_1^{(j)} E_0^{(j)} \\ &= -a_0^{(j)} E_0^{(j)} \neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan S ve E çözümleri lineer bağımsızdır. Dolayısıyla S ve E homogen denklemin temel çözümler sistemini oluşturur.

Yani keyfi çözüm, bunların lineer kombinasyonu olarak yazılır.

Homogen denklemin genel çözümü $\tilde{y} = cS_n^{(j)} + dE_n^{(j)}$ biçiminde olsun. Lineer denklemin çözümü $y_n^{(j)} = c_n S_n^{(j)} + d_n E_n^{(j)}$ biçiminde aransın. $\Delta y_n^{(j)}$ ifadesinin açılımında $c_n S_{n+1}^{(j)} + d_n E_{n+1}^{(j)}$ ifadelerini ekleyip çıkartılarak

$$\begin{aligned}\Delta y_n^{(j)} &= c_{n+1} S_{n+1}^{(j)} + d_{n+1} E_{n+1}^{(j)} - c_n S_n^{(j)} - d_n E_n^{(j)} \\ &= (c_{n+1} - c_n) S_{n+1}^{(j)} + (d_{n+1} - d_n) E_{n+1}^{(j)} + c_n (S_{n+1}^{(j)} - S_n^{(j)}) \\ &\quad + d_n (E_{n+1}^{(j)} - E_n^{(j)})\end{aligned}$$

bulunup

$$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ için } (c_{n+1} - c_n) S_{n+1}^{(j)} - (d_{n+1} - d_n) E_{n+1}^{(j)} = 0 \text{ olmak üzere}$$

$$\Delta y_n^{(j)} = c_n (S_{n+1}^{(j)} - S_n^{(j)}) + d_n (E_{n+1}^{(j)} - E_n^{(j)})$$

elde edilir.

$$\Delta y_{n-1}^{(j)} = c_{n-1} (S_n^{(j)} - S_{n-1}^{(j)}) + d_{n-1} (E_n^{(j)} - E_{n-1}^{(j)})$$

$$a_{n-1}^{(j)} \Delta y_{n-1}^{(j)} = a_{n-1}^{(j)} c_{n-1} (S_n^{(j)} - S_{n-1}^{(j)}) + a_{n-1}^{(j)} d_{n-1} (E_n^{(j)} - E_{n-1}^{(j)})$$

$$\begin{aligned}\Delta (a_{n-1}^{(j)} \Delta y_{n-1}^{(j)}) &= a_n^j c_n (S_{n+1}^{(j)} - S_n^{(j)}) + a_n^j d_n (E_{n+1}^{(j)} - E_n^{(j)}) \\ &\quad - a_{n-1}^{(j)} c_{n-1} (S_n^{(j)} - S_{n-1}^{(j)}) - a_{n-1}^{(j)} d_{n-1} (E_n^{(j)} - E_{n-1}^{(j)})\end{aligned}$$

eşitliği Eş. 5.1 denkleminde yazılırsa

$$g_n^{(j)} = a_n^j c_n S_{n+1}^{(j)} - a_n^j c_n S_n^{(j)} + a_n^j d_n E_{n+1}^{(j)} - a_n^j d_n E_n^{(j)} - a_{n-1}^{(j)} c_{n-1} S_n^{(j)}$$

$$\begin{aligned}
& +a_{n-1}^{(j)}c_{n-1}S_{n-1}^{(j)} - a_{n-1}^{(j)}d_{n-1}E_n^{(j)} + a_{n-1}^{(j)}d_{n-1}E_{n-1}^{(j)} + q_n^{(j)}c_nS_n^{(j)} + q_n^{(j)}d_nE_n^{(j)} \\
& +a_n^jc_nS_n^{(j)} + a_n^jd_nE_n^{(j)} + a_{n-1}^{(j)}c_nS_n^{(j)} + a_{n-1}^{(j)}d_nE_n^{(j)} - \lambda c_nS_n^{(j)} - \lambda d_nE_n^{(j)} \\
& = c_n \left(a_n^jS_{n+1}^{(j)} + q_n^{(j)}S_n^{(j)} - \lambda S_n^{(j)} \right) + d_n \left(a_n^jE_{n+1}^{(j)} + q_n^{(j)}E_n^{(j)} - \lambda E_n^{(j)} \right) - a_{n-1}^{(j)}c_{n-1}S_n^{(j)} \\
& +a_{n-1}^{(j)}c_{n-1}S_{n-1}^{(j)} - a_{n-1}^{(j)}d_{n-1}E_n^{(j)} + a_{n-1}^{(j)}d_{n-1}E_{n-1}^{(j)} + a_{n-1}^{(j)}c_nS_n^{(j)} + a_{n-1}^{(j)}d_nE_n^{(j)} \\
& = -c_n \left(a_{n-1}^{(j)}S_{n-1}^{(j)} \right) - d_n \left(a_{n-1}^{(j)}E_{n-1}^{(j)} \right) - a_{n-1}^{(j)}c_{n-1}S_n^{(j)} + a_{n-1}^{(j)}c_{n-1}S_{n-1}^{(j)} \\
& - a_{n-1}^{(j)}d_{n-1}E_n^{(j)} + a_{n-1}^{(j)}d_{n-1}E_{n-1}^{(j)} + a_{n-1}^{(j)}c_nS_n^{(j)} + a_{n-1}^{(j)}d_nE_n^{(j)} \\
& = S_{n-1}^{(j)}(-c_n a_{n-1}^{(j)} + c_{n-1} a_{n-1}^{(j)}) + E_{n-1}^{(j)} \left(-d_n a_{n-1}^{(j)} + d_{n-1} a_{n-1}^{(j)} \right) \\
& + S_n^{(j)} \left(-c_{n-1} a_{n-1}^{(j)} + c_n a_{n-1}^{(j)} \right) + E_n^{(j)} \left(-d_{n-1} a_{n-1}^{(j)} + d_n a_{n-1}^{(j)} \right) \\
& = -a_{n-1}^{(j)} \left[(c_n - c_{n-1})S_{n-1}^{(j)} + (d_n - d_{n-1})E_{n-1}^{(j)} \right] \\
& \quad + a_{n-1}^{(j)} \left[(c_n - c_{n-1})S_n^{(j)} + (d_n - d_{n-1})E_n^{(j)} \right]
\end{aligned}$$

O halde $(c_n - c_{n-1})S_{n-1}^{(j)} + (d_n - d_{n-1})E_{n-1}^{(j)} = \frac{-g_n^{(j)}}{a_{n-1}^{(j)}}$ bulunur. Burada,

$$(c_n - c_{n-1})S_n^{(j)} + (d_n - d_{n-1})E_n^{(j)} = 0$$

$$(c_n - c_{n-1})S_{n-1}^{(j)} + (d_n - d_{n-1})E_{n-1}^{(j)} = \frac{-g_n^{(j)}}{a_{n-1}^{(j)}}$$

denklem sisteminden,

$$c_n - c_{n-1} = \frac{-g_n^{(j)}E_n^{(j)}}{a_{n-1}^{(j)}(S_n^{(j)}E_{n-1}^{(j)} - S_{n-1}^{(j)}E_n^{(j)})} \quad (5.2)$$

$$d_n - d_{n-1} = \frac{g_n^{(j)} S_n^{(j)}}{a_{n-1}^{(j)} (S_n^{(j)} E_{n-1}^{(j)} - S_{n-1}^{(j)} E_n^{(j)})} \quad (5.3)$$

bulunur. Eş. 5.2 den,

$$c_1 - c_0 = \frac{-g_1^{(j)} E_1^{(j)}}{a_0^{(j)} (S_1^{(j)} E_0^{(j)} - S_0^{(j)} E_1^{(j)})}$$

⋮

$$c_n - c_{n-1} = \frac{-g_n^{(j)} E_n^{(j)}}{a_{n-1}^{(j)} (S_n^{(j)} E_{n-1}^{(j)} - S_{n-1}^{(j)} E_n^{(j)})}$$

olup eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$c_n = c_0 - \sum_{k=1}^n \frac{-g_k^{(j)} E_k^{(j)}}{a_{k-1}^{(j)} (S_k^{(j)} E_{k-1}^{(j)} - S_{k-1}^{(j)} E_k^{(j)})}$$

elde edilir. Benzer şekilde Eş. 5.3 uyarınca

$$d_{n+1} - d_n = \frac{g_{n+1}^{(j)} S_{n+1}^{(j)}}{a_n^{(j)} (S_{n+1}^{(j)} E_n^{(j)} - S_n^{(j)} E_{n+1}^{(j)})}$$

⋮

$$d_m - d_{m-1} = \frac{g_m^{(j)} S_m^{(j)}}{a_{m-1}^{(j)} (S_m^{(j)} E_{m-1}^{(j)} - S_{m-1}^{(j)} E_m^{(j)})}$$

olup eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$d_m - d_n = \sum_{k=n+1}^m \frac{g_k^{(j)} S_k^{(j)}}{a_{k-1}^{(j)} (S_k^{(j)} E_{k-1}^{(j)} - S_{k-1}^{(j)} E_k^{(j)})}$$

bulunur. Burada

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{g_k^{(j)} S_k^{(j)}}{a_{k-1}^{(j)} (S_k^{(j)} E_{k-1}^{(j)} - S_{k-1}^{(j)} E_k^{(j)})} < \infty$$

olduğundan $m \rightarrow \infty$ için

$$\sum_{k=n+1}^m \frac{g_k^{(j)} S_k^{(j)}}{a_{k-1}^{(j)} (S_k^{(j)} E_{k-1}^{(j)} - S_{k-1}^{(j)} E_k^{(j)})}$$

toplamının limiti mevcut olup $\lim_{m \rightarrow \infty} d_m = t$ olacak şekilde sonlu bir t sayısı vardır.

Dolayısıyla

$$d_n = t - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{g_k^{(j)} S_k^{(j)}}{a_{k-1}^{(j)} (S_k^{(j)} E_{k-1}^{(j)} - S_{k-1}^{(j)} E_k^{(j)})}$$

elde edilir. Bulunan c_n ve d_n katsayıları $y_n^{(j)}$ çözümünde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} y_n^{(j)} &= c_n S_n^{(j)} + d_n E_n^{(j)} \\ &= c_0 S_n^{(j)} - \sum_{k=1}^n \frac{g_k^{(j)} E_k^{(j)} S_n^{(j)}}{a_{k-1}^{(j)} (S_k^{(j)} E_{k-1}^{(j)} - S_{k-1}^{(j)} E_k^{(j)})} + t E_n^{(j)} \\ &\quad - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{g_k^{(j)} S_k^{(j)} E_n^{(j)}}{a_{k-1}^{(j)} (S_{k-1}^{(j)} E_k^{(j)} - S_k^{(j)} E_{k-1}^{(j)})} \end{aligned}$$

olur. Burada $y_n^{(j)} \in \ell_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^\ell)$ olup $E_n^{(j)} \notin \ell_2$ olduğundan $t = 0$ bulunur. $y(0) = 0$ koşulunun sağlanması için de $c_0(0) = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla

$$y_n^{(j)} = - \sum_{k=1}^n \frac{g_k^{(j)} E_k^{(j)} S_n^{(j)}}{a_{k-1}^{(j)} (S_k^{(j)} E_{k-1}^{(j)} - S_{k-1}^{(j)} E_k^{(j)})} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{g_k^{(j)} S_k^{(j)} E_n^{(j)}}{a_{k-1}^{(j)} (S_{k-1}^{(j)} E_k^{(j)} - S_k^{(j)} E_{k-1}^{(j)})}$$

olarak yazılır. O halde Green fonksiyonu,

$$G_{n,k}(z) = \begin{cases} \frac{S_n(z)E_k(z)}{a_0 A(z)}, & k < n \\ \frac{S_k(z)E_n(z)}{a_0 A(z)}, & k > n \end{cases}$$

Resolvent operatörü de

$$R_z(L)g_n = \sum_{k=1}^{\infty} G_{n,k}(z) g_k, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

biçimindedir.

Önerme

L operatörünün özdeğerler cümlesi $\sigma_d(L) = \{ \lambda : \lambda = 2 \cos z, z \in \Omega_0, A(z) = 0 \}$

biçimindedir. Burada

$$A(z) = \det E_n(z), \quad \Omega_0 = \{ z : z = \xi + i\tau, 0 \leq \xi \leq 2\pi, \tau > 0 \}, \Omega = \Omega_0 \cup [0, 2\pi].$$

İspat

$$M := \{ \lambda : \lambda = 2 \cos z, z \in \Omega_0, A(z) = 0 \}$$

(i) $M \subset \sigma_d(L)$ olduğu ispatlansın.

$\lambda_0 \in M$ olsun. $\lambda_0 = 2 \cos z_0, z_0 \in \Omega_0, A(z_0) = 0$ dir.

$A(z)$ nin tanımından $\det E_n(z_0) = 0$ olup $\exists n_i$ için $e_n^{(j)}(z_0) = 0$ dır. Herbir e_n fonksiyonu ℓ_2 de olup özfonksiyonlardır. Bu durumda λ_0 özfonksiyonlara karşılık gelen özdeğerdir. Bu da $\lambda_0 \in \sigma_d(L)$ olduğunu gösterir. O halde $\forall \lambda_0 \in M$ için $\lambda_0 \in \sigma_d(L)$ olup $M \subset \sigma_d(L)$ dir.

(ii) $\sigma_d(L) \subset M$ olduğu ispatlansın.

$z_0 \in \sigma_d(L)$ ve z_0 a karşılık gelen özfonksiyon $U_n^{(j)}(x, z_0)$ olsun. Bu durumda $U_n^{(j)}(x, z_0) \neq 0$ dır.

$$\begin{aligned} W[U_n, S_n] &= a_n^{(j)} [U_n^{(j)} S_{n+1}^{(j)} - U_{n+1}^{(j)} S_n^{(j)}] \\ &= \lim_{n \rightarrow 0} a_0^{(j)} [U_0^{(j)} S_1^{(j)} - U_1^{(j)} S_0^{(j)}] = 0 \quad (S_1^{(j)} = 1 \quad S_0^{(j)} = 0) \end{aligned}$$

bulunur. O halde U ve S lineer bağımlıdır. Yani $U = cS$ ($c \neq 0$) dır.

$$\begin{aligned} W[U_n, E_n] &= W[cS_n, E_n] \\ &= a_n^{(j)} [cS_n^{(j)} E_{n+1}^{(j)} - cS_{n+1}^{(j)} E_n^{(j)}] \\ &= \lim_{n \rightarrow 0} a_0^{(j)} [cS_0^{(j)} E_1^{(j)} - cS_1^{(j)} E_0^{(j)}] \quad (S_0^{(j)} = 0 \quad S_1^{(j)} = 1) \\ &= -a_0^{(j)} cE_0^{(j)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W[E_n, U_n] &= a_n^{(j)} [E_n^{(j)} U_{n+1}^{(j)} - E_{n+1}^{(j)} U_n^{(j)}] \\ &= a_n^{(j)} [E_n^{(j)} cS_{n+1}^{(j)} - E_{n+1}^{(j)} cS_n^{(j)}] \\ &= \lim_{n \rightarrow 0} a_0^{(j)} [E_0^{(j)} cS_1^{(j)} - E_1^{(j)} cS_0^{(j)}] \quad (S_0^{(j)} = 0 \quad S_1^{(j)} = 1) \\ &= c a_0^{(j)} E_0^{(j)} \end{aligned}$$

$$-a_0^{(j)} c E_0^{(j)} = c a_0^{(j)} E_0^{(j)} \quad (c \neq 0)$$

eşitliğinden $E_n^{(j)}(0, z_0) = 0$ elde edilir. $E_n(x, z_0)$ özfonksiyondur. Ayrıca E_n^j denklem sisteminin bir çözümü olduğundan $E_n^j \in \ell_2$ dir. O halde z_0 buna karşılık gelen özdeğerdir. Dolayısıyla $z_0 \in M$ olur.

Tanım

Bir A operatörünün resolventinin çekirdeğinin kutup noktası olup, sürekli spektrumda bulunan ve A operatörünün özdeğeri olmayan noktalara A operatörünün *spektral tekillikleri* adı verilir [8].

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Klasik moment probleminin ve doğrusal olmayan diskret denklemlerin çözümlerinin bulunması, fark denklemlerinin spektral analizinin incelenmesini gerektirmiştir. Bu nedenle fark denklemleri ile sonsuz Jakobi matrislerinin spektral analizi literatürde incelenmektedir. Hem fark denklemlerini hem de spektral analizi buluşturan problemler çalışılmaya değerdir. Son 20 yılın konusu olan bu problemler, orjinal çalışmalara açıktır.

KAYNAKLAR

1. Adıvar, M. and Bairamov, E. (2001). Spectral Properties of Non-selfadjoint Difference Operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 261, 461-478.
2. Agarwal, R.P. (2000). *Difference Equation and Inequalities. Theory, Methods and Applications*. New-York: Pure and Applied Mathematics.
3. Bairamov, E. and Celebi, A.O. (1999). Spectrum and spectral expansion for the non-selfadjoint discrete Dirac operators. *Quarterly Journal Mathematics*, 2(50), 371-384.
4. Bereketoğlu, H. ve Kutay, V. (2012). *Fark Denklemleri*. Ankara: Gazi Kitabevi, 1-66.
5. Kır, E. (2011). Spectral Properties of a Finite System of Sturm-Liouville Difference Operators. *Journal of Difference Equations and Applications*, 17(3), 255-266.
6. Lusternik, L.A. and Sobolev, V.J. (1974). *Elements of Functional Analysis*. New York: Haltsted Press.
7. Lyance, V.E. (1967). A differential operator with spectral singularities I, II, *American Mathematical Society Transactions*, 2, 185-225, 227-283.
8. Naimark, M.A. (1960). Investigation of the spectrum and expansion in eigenfunctions of a non-selfadjoint operator of second order on a semi-axis, *American Mathematics Society Transactions*, 2(16), 103-193.
9. Naimark, M.A. (1968). *Linear Differential Operators I, II*. New-York: Ungar.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : YÜKSEL, Bahar
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 26.06.1991, Ankara
 Medeni hali : Bekar
 Telefon : 0 (501) 209 79 97
 E-posta : baharyuksel91@gmail.com



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik	Devam Ediyor
Lisans	Anadolu Üniversitesi/İşletme	2016
Lisans	Ankara Üniversitesi /Matematik	2014
Lise	Prof. Dr. Şevket Raşit Hatipoğlu Lisesi	2009

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2017- Halen	Yankı Özel Öğretim Kursu	Matematik Öğretmeni
2016- 2017	Özel Başkent Vatan Temel Lisesi	Matematik Öğretmeni
2014- 2015	Açı Dershanesi	Geometri Öğretmeni
2011- 2013	Türkiye Eğitim Gönüllüleri Vakfı	Gönüllü

Yabancı Dili

İngilizce

Yayınlar

-

Hobiler

Bisiklet, Kitap, Resim



GAZİ GELECEKTİR..