



**BİR TOPLAMSAL TİP LİNEER POZİTİF
OPERATÖRLER DİZİSİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ**

Ali Fuat DENİZ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

TEMMUZ 2019

Ali Fuat DENİZ tarafından hazırlanan “BİR TOPLAMSAL TİP LİNEER POZİTİF OPERATÖRLER DİZİSİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. İsmet YÜKSEL

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Başkan: Prof. Dr. Birol ALTIN

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Özge DALMANOĞLU

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı, Başkent Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 30/07/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Ali Fuat DENİZ

29/08/2019

BİR TOPLAMSAL TİP LİNEER POZİTİF
OPERATÖRLER DİZİSİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Ali Fuat DENİZ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2019

ÖZET

Bu tezde, Ciupa tarafından tanımlanan toplamsal tip operatörler dizisinin yaklaşım özellikleri araştırılmıştır. Giriş bölümünde operatörlerin ortaya çıkışı anlatılmıştır. İkinci bölümde temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde operatörler dizisinin merkezi momentleri, yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızına ait sonuçlar çalışılmıştır. Dördüncü bölümde bu operatörler dizisine ait Voronovskaja tip teorem incelenmiştir. Sonuç bölümünde ise öneri olarak bu operatörlerin parametrik genelleştirmelerinin çalışılabileceği ifade edilmiştir.

Bilim Kodu : 20404

Anahtar Kelimeler : Szasz operatörler, Krovkin teoremi, Voronovskaja tip teorem,

Sayfa Adedi : 73

Danışman : Prof. Dr. İsmet YÜKSEL

APPROXIMATION PROPERTIES BY A SUMMATION TYPE
LINEAR POSITIVE OPERATORS SEQUENCE

(M. Sc. Thesis)

Ali Fuat DENİZ

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2019

ABSTRACT

In this thesis, the approximation properties of the series of the summational type operators defined by Ciupa was investigated. The first chapter, construction of operators is explained. In the second chapter, basic definition and concepts are given. In the third chapter, central moments of the sequence of operators, approximation properties and results of the rate of approximation were studied. In the fourth chapter, Voronovskaja type theorem was investigated for the sequence of operators. In the conclusion chapter that parametric generalizations of these operators can work is stated

Science Code : 20404

Key Words : Szasz operator, Krovkin terorem, Voronovskaja type teorem

Page Number : 73

Supervisor : Prof. Dr. İsmet YÜKSEL

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında bilgi, görüş ve desteklerini sunan değerli hocam Prof. Dr. İsmet YÜKSEL'e, bana büyük destek olan sevgili aileme en içten duygularıyla teşekkürlerimi sunuyorum.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	5
2.1. Sonlu Aralıkta Sürekli Fonksiyonlar Uzayı	5
2.2. Lineer Pozitif Operatörler	8
2.3. Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin Yakınsaklık Koşulları	9
2.4. Ağırlıklı Uzaylar	14
2.5. ρ – Normunda Korovkin Teoreminin Varlığı	15
2.6. Lineer Pozitif Operatör Dizisi ile Fonksiyonlara Yaklaşımın Hızı.....	21
3. BİR POZİTİF LİNEER OPERATÖR DİZİSİ İÇİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ	27
3.1. P_n Operatörlerinin Tanımı	27
3.2. Momentler	32
3.3. P_n Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri	57
4. (P_n) OPERATÖRLER DİZİSİ İÇİN VORONOVSKAJA TİP TEOREM.....	63
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	69

Sayfa

KAYNAKLAR	71
ÖZGEÇMİŞ	73

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

$L(f, x)$	L operatörünün f fonksiyonuna uygulanması
$f_n \Rightarrow f$	f_n fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması
$P_k(x)$	Appell polinomu
$\rho(x)$	Ağırlık fonksiyonu
$B\rho(\mathbb{R})$	$ f(x) \leq M_f \rho(x)$ şartını sağlayan fonksiyonlar uzayı
$\omega(f; \delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$C_\rho(\mathbb{R})$	$B\rho(\mathbb{R})$ uzayındaki sürekli fonksiyonların alt uzayı
$C_\rho^*(\mathbb{R})$	$\left\{f \in C_\rho(\mathbb{R}) : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} \in \mathbb{R}\right\}$ alt uzayı
$\ f\ _\rho$	$B\rho$ uzayında tanımlanan norm
$\ L\ _{C_\rho \rightarrow B\rho}$	$C_\rho[0, \infty)$ normlu uzayından $B\rho[0, \infty)$ normlu uzayına dönüşüm yapan L operatörünün normu
$B_p[0, \infty)$	$ f(x) \leq M_f e^{px}$ şartını sağlayan fonksiyonlar uzayı
$C_p[0, \infty)$	$B_p[0, \infty)$ uzayındaki sürekli fonksiyonların alt uzayı
$C_p^*[0, \infty)$	$\left\{f \in C_p[0, \infty) : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{e^{px}} \in \mathbb{R}\right\}$ alt uzayı
$\ f\ _p$	$B_p[0, \infty)$ uzayında tanımlanan norm

1. GİRİŞ

Fonksiyonlar teorisinin en çok uygulaması olan dalı yaklaşım teorisidir. Yaklaşım teorisinin amacı, belli özelliklere sahip fonksiyon uzayının elemanlarının bu uzayın bir alt uzayından olan iyi özelliklere sahip fonksiyonlar cinsinden bir gösterimini elde etmektir. Burada iyi özelliklere sahip fonksiyonlar genelde iyi bilinen, polinomlar veya rasyonel fonksiyonlar olarak alınmaktadır.

Fonksiyon uzaylarında "sürekli fonksiyonlara yaklaşım" problemi ilk defa Weierstrass tarafından ele alınmıştır. Bundan dolayı yaklaşım teorisinde en önemli teoremlerden biri Weierstrass yaklaşım teoremidir. 1885 yılında Weierstrass $[a,b]$ aralığında sürekli her f fonksiyonuna bir polinomla yaklaşılabileceğini ifade etmiştir [1]. Ancak Weierstrass bu polinomların ne tür polinomlar olduğu ve polinomların bulunma koşulları hakkında herhangi bir bilgi vermemiştir. Daha sonra birçok matematikçi bu teoremden ifade edilen polinomları açık bir şekilde elde etmişlerdir. Bu polinomların açık bir formu 1912 yılında Bernstein tarafından

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

biçiminde verilmiştir [2].

Bu çalışmalar Analiz ve fonksiyonlar teorisinde yer alan ve matematiğin birçok dalıyla ilişkili olan araştırma konularından biri de lineer pozitif operatörlerle yaklaşım konusunu ortaya çıkarmıştır. İlk olarak 1951 yılında Bohmann toplam biçimindeki lineer pozitif bir operatörler dizisinin $[0,1]$ kapalı aralığında sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsaması için yalnızca üç koşulu gerçeklemesi gerektiğini ifade ve ispat etmiştir [3]. Daha sonra 1953 yılında Korovkin, Bohmann'ın elde ettiği bu teoremi genel bir lineer pozitif operatörler dizisine taşımıştır [4]. Bohmann ve Korovkin teoremleri lineer pozitif operatörler teorisinin gelişmesine büyük katkı sağlamıştır. Bu teoremler ışığında birçok yeni lineer pozitif operatörler dizisi tanımlanarak yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Lineer pozitif operatörler dizisinin tanımlanmasında en genel yöntemlerden biri de doğurucu fonksiyonları ürettiği polinomların kullanılmasıdır [5].

Ayrıca, $[0, \infty)$ aralığında ağırlıklı yaklaşım özellikleri de incelenebilmektedir. Sınırsız aralıklarda yaklaşım problemi, ağırlıklı uzaylarda araştırılmıştır. Ağırlıklı uzaylarda yaklaşım koşulları ve Korovkin tip teorem Gadjiev tarafından verilmiştir [6,7].

$[0, \infty)$ aralığı üzerinde tanımlı üstel büyüyen sürekli fonksiyonlara yaklaşmak için $|z| < R$, $R > 1$, diskinde $g(1) \neq 0$ şartını sağlayan bir

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

analitik fonksiyonu olmak üzere $g(u)e^{ux}$ doğurucu fonksiyonun ürettiği

$$g(u)e^{ux} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x) u^k$$

eşitliğini sağlayan $p_k(x)$ Appell polinomlarıyla

$$A_n(f; x) = \frac{e^{-nx}}{g(1)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (1.1)$$

biçiminde tanımlanan operatörlerin yaklaşım özellikleri çalışılmıştır [8].

Bu operatörler tanımında $g(z) \equiv 1$ alınırsa, Szasz-Mirakjan operatörleri olarak bilinen

$$S_n(f; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

operatörlerine indirgenir [9-11].

Bu tezde, Eş. 1.1 de verilen operatörlerin tanımından esinlenerek $g(u) \cosh(ux)$ doğurucu fonksiyonunun belirlediği polinomlar yardımıyla tanımlanan bir toplamsal tip (P_n) lineer pozitif operatörler dizisi ele alınmıştır. Bu operatörler

$$g(u) \cosh(ux) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x) u^k$$

eşitliğini sağlayan

$$p_k(x) = \sum_{v=0}^k a_v \frac{x^{k-v}}{(k-v)!} \frac{1 + (-1)^{k-v}}{2}$$

polinomları ile üretilen

$$P_n(f; x) = \frac{1}{g(1) \cosh(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) f\left(\frac{k}{n}\right)$$

şeklinde tanımlanarak yaklaşım özellikleri incelenmiştir [12-14].

Bu operatörler dizisinde $g(u) = \cosh u$ ve $g(u) \equiv 1$ alındığında sırasıyla [13] ve [15] de çalışılan

$$L_n(f; x) = \frac{1}{\cosh 1 \cosh(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_{2k}(nx) f\left(\frac{2k}{n}\right)$$

ve

$$L_n^*(f; x) = \frac{1}{\cosh(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^{2k}}{(2k)!} f\left(\frac{2k}{n}\right)$$

operatörler dizileri elde edilir.

Bu tez, birinci bölümü giriş bölümü olmak üzere beş bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölüm temel kavramlar ve lineer pozitif operatörlerin tanımı ve özelliklerine ilişkin bilgiler verilmiştir. Daha sonra yaklaşım teorisinde merkezi rol oynayan teoremlerden biri

olan Weierstrass teoremi ve Korovkin teoremi ifade edilmiştir. Yaklaşım koşulları ve Korovkin teoreminin ispatıyla ilgili tanım ve teoremlere değinilmiştir.

Üçüncü ve dördüncü bölümde Cuipa tarafından tanımlanan bir P_n operatörler dizisinin yaklaşım özellikleri ile Voronovskaja tip teorem incelenmiştir.

Beşinci bölümde de elde edilen sonuçlar ve öneriler yer almaktadır.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

2.1. Sonlu Aralıkta Sürekli Fonksiyonlar Uzayı

2.1.1. Tanım (Noktasal süreklilik)

$A \subset \mathbb{R}$ ve $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık en az bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilir öyle ki $|x - t| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ oluyorsa f fonksiyonuna a noktasında süreklidir denir [16].

2.1.2. Tanım (Düzgün süreklilik)

$A \subset \mathbb{R}$ ve $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ bulunabilir ki $|x - t| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her $x, t \in A$ için $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$ oluyorsa f fonksiyonu A üzerinde düzgün süreklidir denir [16].

2.1.3. Tanım

X bir lineer uzay olsun. $\| \cdot \|: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için;

- i) Her $x \in X$ için $\|x\| \geq 0$,
- ii) Her $x \in X$ için $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- iii) Her $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $x \in X$ için $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,
- iv) Her $x, y \in X$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

şartlarını sağlıyorsa $\| \cdot \|$ fonksiyonu X üzerinde *norm* denir. Eğer bir Lineer uzay üzerinde norm tanımlanmışsa bu uzaya *Normlu uzay* denir [16].

2.1.4. Örnek

$[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve aralığın tüm noktalarında sürekli olan fonksiyonların uzayı $C[a, b]$ ile gösterilmektedir [16].

$C[a, b]$ uzayından olan her bir f fonksiyonu için sonlu bir

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

sayısı vardır. Bunun bir norm olduğu gösterebilir. Gerçekten

$$i) \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \geq 0$$

ii) Eğer f uzayın sıfırı ise yani $[a, b]$ aralığında $f \equiv 0$ ise o zaman bu fonksiyonun maksimumu aynı aralıkta sıfırdır. Diğer yandan eğer $\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| = 0$ ise o zaman $f \equiv 0$ olur.

iii) α keyfi reel sayı olmak üzere

$$\max_{a \leq x \leq b} |\alpha f(x)| = |\alpha| \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|,$$

iv) f ve g , $[a, b]$ de sürekli iki fonksiyon olmak üzere $\forall x \in [a, b]$ için

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$

olduğundan

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) + g(x)| \leq \max_{a \leq x \leq b} (|f(x)| + |g(x)|) \leq \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |g(x)|$$

dir. Böylece norm aksiyomları sağlanır.

$C[a, b]$ uzayında norm;

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

ile gösterilir.

Bu uzayda yakınsaklığın düzgün yakınsaklık olduğu da gösterilebilir. Kabul edilsin ki $C[a, b]$ uzayında olan bir (f_n) fonksiyonlar dizisi $[a, b]$ aralığında f fonksiyonuna düzgün yakınsasın. Bu takdirde keyfi $\varepsilon > 0$ verildiğinde öyle bir $N = N(\varepsilon)$ bulunur ki $n \geq N$ olduğunda her $x \in [a, b]$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği, $f(x) \in C[a, b]$ olduğu ve

dolayısı ile $|f_n - f| \in C[a, b]$ dir. Weierstrass teoreminden dolayı öyle bir $x^* \in [a, b]$ vardır ki $f_n - f$ fark fonksiyonunun x^* daki değeri $[a, b]$ nin diğer noktalarındaki değerinden büyüktür. Ayrıca $x^* \in [a, b]$ olduğundan

$$|f_n(x^*) - f(x^*)| = \max_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

sağlanır ve

$$\|f_n - f\|_{C[a, b]} < \varepsilon$$

$$(n > N(\varepsilon))$$

olur.

$C[a, b]$ de olan (f_n) dizisi $C[a, b]$ uzayının normuna göre yakınsak olsun. Bu durumda keyfi pozitif ε sayısına göre öyle bir $N(\varepsilon)$ bulunur ki $n \geq N$ olan tüm bir n ler için

$$\max_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

bundan dolayı $[a, b]$ de tüm x ler için

$$|f_n(x^*) - f(x^*)| < \varepsilon, n \geq N$$

eşitsizliği sağlanır. Sonuç olarak, $C[a, b]$ uzayının normuna göre yakınsama, düzgün yakınsamadır.

Düzgün yakınsama;

$$f_n \rightrightarrows f, \quad n \rightarrow \infty$$

şeklinde gösterilir.

2.1.5. Teorem (Weierstrass):

Her $\varepsilon > 0$ ve $f \in C[a, b]$ için öyle bir p polinomu vardır ki, her $x \in [a, b]$ için $|p(x) - f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır [16].

Başka bir ifade ile $[a, b]$ aralığında sürekli her f fonksiyonu için $f(x)$ 'e, $[a, b]$ aralığında düzgün yakınsayan bir $\{p(x)\}$ polinom dizisi vardır.

2.2. Lineer Pozitif Operatörler

2.2.1. Tanım

X ve Y normlu fonksiyon uzayları olsun. X den alınan her f fonksiyonuna Y de bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralına X den Y ye operatör denir. $f \in X$ ve x, g nin tanım kümesine ait olmak üzere $g(x) = L(f; x)$ biçiminde gösterilir [17].

2.2.2. Tanım

$L: X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. Her $f_1, f_2 \in X$ ve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$L(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2; x) = \alpha_1 L(f_1; x) + \alpha_2 L(f_2; x)$$

eşitliği sağlanıyor ise L ye lineer operatör denir [17].

2.2.3. Tanım

$L: X \rightarrow Y$ lineer operatör olmak üzere kabul edelim ki

$$X^+ = \{f \in X: f(t) \geq 0\}$$

ve

$$Y^+ = \{g \in Y: g(x) \geq 0\}$$

olsun. Eğer, X uzayında tanımlanan L lineer operatörü, X^+ kümesindeki her bir f fonksiyonunu Y^+ kümesinde bir fonksiyona dönüştürüyor ise L operatörüne lineer pozitif operatör denir [17].

L lineer pozitif operatör ise $L(X^+) \subset Y^+$ sağlanır. Yani $f(t) \geq 0$ olduğunda $L(f; x) \geq 0$ olur.

2.2.4. Önerme

$L: X \rightarrow Y$ lineer pozitif operatör olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur [17].

i) $f, g \in X$ olmak üzere $\forall t$ için $f(t) \leq g(t)$ ise $L(f; x) \leq L(g; x)$ dir. Buna L lineer pozitif operatörünün “monotonluk özelliği”denir.

ii) $|L(f; x)| \leq L(|f|; x)$.

2.3. Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin Yakınsaklık Koşulları

1951 yılında H. Bomann, toplam şeklinde lineer pozitif operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonuna yaklaşması problemini incelemiştir [3].

H. Bohmann göstermiştir ki $x \in [0,1]$, $0 \leq \alpha_{n,k} \leq 1$ ve $k < r$ için $\alpha_{n,k} < \alpha_{n,r}$ olduğunda

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f(\alpha_{n,k}) p_{n,k}(x); p_{n,k}(x) \geq 0$$

lineer pozitif operatörler dizisinin, $n \rightarrow \infty$ için $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonuna düzgün yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter koşul üç tanedir. Bunlar $i = 0,1,2,3$ için $e_i(t) = t^i$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(e_0) - e_0\|_{C[0,1]} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(e_1) - e_1\|_{C[0,1]} = 0$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(e_2) - e_2\|_{C[0,1]} = 0$$

şeklinde ifade edilirler.

Aşıkardır ki Bohmann' ın araştırdığı operatörlerin değeri, f fonksiyonunun $[0,1]$ aralığının dışındaki değerlerden bağımsızdır.

1953 yılında P. P. Korovkin, H. Bohmann' ın teoremini daha genel bir halde vermiştir.

1953 yılında P. P. Korovkin sürekli fonksiyonların sonlu aralıkta lineer pozitif operatörlerin yardımıyla yaklaştırılmasına ilişkin aşağıdaki teoremi vermiştir. P. P. Korovkinin kendi adıyla verilen bu teorem bu konudaki çalışmalara büyük katkı sağlamıştır.

2.3.1. Teorem (P.P Korovkin)

$f \in C[a, b]$ ve tüm reel eksenlerde sınırlı

$$(|f(x)| < M_f) \tag{2.1}$$

olsun. Eğer $L_n(f; x)$ lineer pozitif operatörler dizisi $\forall x \in [a, b]$ için

$$i) L_n(e_0) \Rightarrow e_0,$$

$$ii) L_n(e_1) \Rightarrow e_1,$$

ve

$$iii) L_n(e_2) \Rightarrow e_2$$

koşullarını sağlıyorsa bu durumda $[a, b]$ aralığında

$$L_n(f) \Rightarrow f$$

dir [17].

İspat

Kabul edelim ki $f \in C[a, b]$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Sürekli fonksiyonların tanımından bir

$\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabilir ki

$$|t - x| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

sağlanır. $|t - x| \geq \delta$ olduğunda ise Eş. 2.1 den ve üçgen eşitsizliğinden

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq 2M_f \quad (2.2)$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$|t - x| \geq \delta \Rightarrow \frac{|t - x|}{\delta} \geq 1$$

olacağından

$$\frac{(t - x)^2}{\delta^2} \geq 1 \quad (2.3)$$

dir. Eş. 2.2 ve 2.3 den

$$|f(t) - f(x)| \leq 2M_f \leq 2M_f \frac{(t - x)^2}{\delta^2}$$

yazılabilir. O halde

$$|t - x| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

$$|t - x| \geq \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| \leq 2M_f \frac{(t - x)^2}{\delta^2}$$

elde edilir. Dolayısıyla her $t, x \in [a, b]$ için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + 2M_f \frac{(t - x)^2}{\delta^2} \quad (2.4)$$

eşitsizliği yazılır. Eğer i), ii) , iii) koşullarını sağlayan (L_n) operatör dizisinin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - f\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliğini de sağladığı gösterilirse ispat tamamlanır.

Lineerlikten ;

$$\begin{aligned} |L_n(f(t); x) - f(x)| &= |L_n(f(t); x) - f(x) + L_n(f(x); x) - L_n(f(x); x)| \\ &= |L_n(f(t) - f(x)); x) + f(x)(L_n(1; x) - 1)| \end{aligned}$$

dir. Burada üçgen eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq |L_n(f(t) - f(x)); x)| + |f(x)| |(L_n(1; x) - 1)|$$

yazılabilir.

Diğer taraftan lineer pozitif operatörler monoton artan ve

$$f(t) - f(x) \leq |f(t) - f(x)|$$

sağlayacağından

$$|L_n(f(t) - f(x)); x)| \leq |L_n(|f(t) - f(x)|; x)|$$

olur. Operatör pozitif ve $|f(t) - f(x)| \geq 0$ olduğundan

$$|L_n(f(t) - f(x)); x)| \leq L_n(|f(t) - f(x)|; x)$$

dir. O halde

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq L_n(|f(t) - f(x)|; x) + |f(x)| |(L_n(1; x) - 1)|$$

olduğu gösterilmiş olur. Eş. 2.1 den

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq L_n(|f(t) - f(x)|; x) + M_f |(L_n(1; x) - 1)|$$

yazılabilir. (L_n) monoton artan olduğundan Eş. 2.4 ün kullanılması ile

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| < L_n \left(\varepsilon + 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2}; x \right) + M_f |(L_n(1; x) - 1)| \quad (2.5)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
L_n\left(\varepsilon + 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2}; x\right) &= L_n(\varepsilon; x) + L_n\left(2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2}; x\right) \\
&= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} L_n(t^2 - 2tx + x^2; x) \\
&= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} [L_n(t^2; x) - x^2 + 2x^2 - 2xL_n(t; x) + x^2 L_n(1; x) - x^2] \\
&= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} [(L_n(t^2; x) - x^2) + 2x(x - L_n(t; x)) + x^2(L_n(1; x) - 1)]
\end{aligned}$$

yazılabilir. Son bulunan ifadenin Eş. 2.5 de kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
|L_n(f(t); x) - f(x)| &< \varepsilon L_n(1; x) + M_f |(L_n(1; x) - 1)| \\
&+ \frac{2M_f}{\delta^2} [(L_n(t^2; x) - x^2) + 2x(x - L_n(t; x)) + x^2(L_n(1; x) - 1)]
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada i) , ii) ve iii) koşullarının kullanılmasıyla limit alındığında

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

bulunur. O halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |L_n(f(t); x) - f(x)| = 0$$

dır.

Görüldüğü gibi Korovkin teoremi bu konudaki çalışmalara büyük katkı sağlamıştır. Çünkü verilen operatörün sadece $1, t, t^2$ ifadelerini sırasıyla $1, x, x^2$ ye düzgün yakınsaması, sonlu aralıkta sürekli bütün fonksiyonların bu operatör yardımıyla yakınsamasını söylememize yetmektedir.

2.3.2. Teorem (Korovkin Teoremi)

(L_n) lineer pozitif operatörler dizisi olsun. $\alpha_n(x)$, $\beta_n(x)$ ve $\gamma_n(x)$, $[a, b]$ de düzgün olarak sıfıra yakınsak olmak üzere her $x \in [a, b]$ için

$$L_n(1; x) = 1 + \alpha_n(x),$$

$$L_n(t; x) = x + \beta_n(x)$$

ve

$$L_n(t^2; x) = x^2 + \gamma_n(x)$$

koşulları sağlanıyorsa bu durumda (L_n) operatörler dizisi, $[a, b]$ aralığı üzerinde f fonksiyonuna düzgün olarak yakınsar. Burada f , $[a, b]$ de sürekli, a da soldan, b de sağdan sürekli ve $\mathbb{R}$ de sınırlı bir fonksiyondur [18,19].

Korovkin teoremi sonlu aralıklarda sağlanmasına rağmen sonsuz aralıkta sağlanmaz. Sınırsız bölgelerde Korovkin teoreminin sağlanmadığını ve hangi koşullar altında problemin sağlandığını 1976 yılında A. D. Gadjiev [7,20] de vermiştir.

2.4. Ağırlıklı Uzaylar

2.4.1. Tanım

ρ fonksiyonu, $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde sürekli artan reel değerli ve

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \rho(x) = \infty$$

ve

$$\rho(x) \geq 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

koşullarını sağlıyorsa $\mathbb{R}$ üzerinde ağırlık fonksiyonu olarak adlandırılır [17].

2.4.2 .Örnek

$p > 0$ reel sayı olmak üzere $\rho_p(x) = e^{px}$ ve $\rho(x) = 1 + x^2$ birer ağırlıklı fonksiyon olur.

Şimdi de ağırlıklı uzay tanımını verelim.

$$|f(x)| \leq M_f \rho(x), M_f > 0$$

eşitsizliğini sağlayan reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonların kümesini $B_\rho(\mathbb{R})$ ile $B_\rho(\mathbb{R})$ uzayındaki sürekli fonksiyonların kümesini $C_\rho(\mathbb{R})$ ile gösterelim. Bu uzaylar

$$\|f\|_p = \sup \left\{ \frac{|f(x)|}{\rho(x)} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

normu ile birer normlu uzay olur. $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayının

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlarının kümesini $C_\rho^*(\mathbb{R})$ ile gösterelim. $C_\rho^*(\mathbb{R})$ uzayı $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayının bir alt uzayı olur [17].

2.5. ρ –Normunda Korovkin Teoreminin Varlığı

2.5.1. Teorem

$\rho(x) = 1 + x^2$ olmak üzere $L_n: C_\rho(\mathbb{R}) \rightarrow B_\rho(\mathbb{R})$ lineer pozitif operatör dizisi verilsin.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(e_0) - e_0\|_\rho = 0, \quad (2.6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(e_1) - e_1\|_\rho = 0 \quad (2.7)$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(e_2) - e_2\|_\rho = 0 \quad (2.8)$$

şeklindeki şartlarını sağlasınlar. Bu durumda $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayında öyle bir f^* fonksiyonu bulabiliriz ki $n \rightarrow \infty$ için

$$\|L_n(f^*) - f^*\|_\rho \geq 1$$

elde edilir [17].

İspat

L_n operatörler dizisini aşağıdaki şekilde tanımlayalım,

$$L_n(f; x) = \begin{cases} f(x) + \frac{1+x^2}{1+2n^2} [f(x+1) - f(x)], & |x| \leq n \\ f(x), & |x| > n \end{cases}$$

L_n ler lineer pozitif operatörler olduğu açıktır. Diğer taraftan

$$\rho(x) = 1 + x^2$$

ve

$$|x| \leq n$$

için

$$L_n(\rho; x) = \rho(x) + \frac{1+x^2}{1+2n^2} [\rho(x+1) - \rho(x)]$$

$$= 1 + x^2 + \frac{1+x^2}{1+2n^2} [(x+1)^2 - x^2]$$

$$= 1 + x^2 + \frac{1+x^2}{1+2n^2} [1 + 2x]$$

$$\leq 1 + x^2 + 2 + x^2$$

$$\leq 3(1 + x^2)$$

$$= 3\rho(x)$$

elde edilir. Böylece L_n , her bir n için $C_\rho(\mathbb{R})$ dan $B_\rho(\mathbb{R})$ ye tanımlıdır. Şimdi Eş. 2.6, Eş. 2.7 ve Eş. 2.8 şartlarına bakalım. $L_n(1; x) = 1$ olduğundan Eş. 2.6 gerçekleşir.

$$L_n(t; x) = x + \frac{1+x^2}{1+2n^2} [x + 1 - x]$$

den

$$L_n(t; x) - x = \frac{1 + x^2}{1 + 2n^2}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\sup_{|x| \leq n} \frac{|L_n(t; x) - x|}{1 + x^2} = \frac{1}{1 + 2n^2}$$

olup Eş. 2.7 şartı sağlanır. Son olarak Eş. 2.8 koşulunun sağlandığını gösterelim.

$$L_n(t^2; x) = x^2 + \frac{1 + x^2}{1 + 2n^2} [(1 + x)^2 - x^2]$$

$$= x^2 + \frac{1 + x^2}{1 + 2n^2} [(1 + x)^2 - x^2]$$

$$= x^2 + \frac{1 + x^2}{1 + 2n^2} [1 + 2x]$$

gerçekleşir. Bu durumda

$$\sup_{|x| \leq n} \frac{|L_n(t^2; x) - x^2|}{1 + x^2} = \frac{1 + 2n}{1 + 2n^2}$$

elde edilir. Buradan Eş. 2.8 ün gerçeğlendiği görülür.

Şimdi

$$f^*(x) = x^2 \cos \pi x$$

fonksiyonunu göz önüne alalım $f^* \in C_\rho$ dur ve $x \leq n$ için

$$L_n(f^*; x) = f^*(x) + \frac{1 + x^2}{1 + 2n^2} [(1 + x)^2 \cos \pi(1 + x) - x^2 \cos \pi x]$$

$$= f^*(x) - \frac{1 + x^2}{1 + 2n^2} ((1 + x)^2 + x^2) \cos \pi x$$

olur. Dolayısıyla

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|L_n(f^*; x) - f^*(x)|}{1 + x^2} = \sup_{|x| \leq n} \frac{1 + 2x + 2x^2}{1 + 2n^2} |\cos \pi x| = \frac{1 + 2n + 2n^2}{1 + 2n^2}$$

sağlanır. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n f^* - f^*\|_\rho = 1$$

gerçekleşir. Bu da ispatı tamamlar.

2.5.2. Teorem

(L_n) lineer pozitif operatör dizisi, φ bir artan fonksiyon olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(\varphi^v; x) - \varphi^v\|_\rho = 0, \quad v = 0, 1, 2$$

şeklindeki üç şartı sağlıyorsa her $f \in C_\rho^*[0, \infty)$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n f - f\|_\rho = 0$$

dır [17].

O halde $L_n: C_\rho^*(\mathbb{R}) \rightarrow B_\rho(\mathbb{R})$ biçiminde tanımlanan operatörler için ağırlıklı yaklaşım çalışılabilir.

2.5.3. Tanım

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^n,$$

$t = 0$ da bir analitik fonksiyon olmak üzere

$$A(t)e^{xt} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x) \frac{t^k}{k!}$$

eşitliği ile tanımlanan $p_k(x)$ polinomlarına Appell polinomları denir [21].

2.5.4. Tanım

Bir $f(z)$ fonksiyonunun hem z_0 noktasında hem de z_0 noktasının bir komşuluğunda bulunan her z noktasında türevi mevcutsa f fonksiyonuna z_0 noktasında analitik fonksiyon denir [22].

2.5.5. Tanım

$n \geq 1$ olmak üzere p_n , n - inci dereceden bir polinom ve f ile g de $x = 0$ noktasında n - inci dereceden türevlenebilen fonksiyonlar olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x) = 0$$

olmak üzere

$$f(x) = p_n(x) + x^n g(x)$$

yazılabiliyorsa p_n polinomuna $x = 0$ noktasında f fonksiyonu tarafından üretilen Taylor polinomu denir [16].

2.5.6. Teorem (Taylor Teoremi)

Bir f fonksiyonu a ve x noktalarını içeren bir açık aralıkta $(n+1)$ - inci mertebeden diferansiyellenebilir olsun. Buradan

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n(x)$$

Burada c , a ile x arasında bir sayı olmak üzere

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$$

dir [23].

İspat

Tanımdan

$$R_n(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$t = a$ yazılırsa

$$F(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

olur. Eşitliğin her iki tarafının t değişkenine göre türevi alınırsa

$$F'(t) = -f'(t) - f''(t)(x-t) + f'(t) - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + f''(t)(x-t) -$$

$$\dots - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

olur. Şimdi

$$G(t) = F(t) - \left(\frac{x-t}{x-a}\right)^{n+1} F(a)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Burada

$$G(a) = 0 \text{ ve } G(x) = F(x) = 0 \text{ dir.}$$

Rolle teoreminden a ile x arasında bir c sayısı vardır ki

$$G'(c) = 0$$

olur. Buradan

$$0 = G'(c) = F'(c) + (n+1) \frac{(x-c)^n}{(x-a)^{n+1}} F(a)$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n + (n+1)\frac{(x-c)^n}{(x-a)^{n+1}}F(a)$$

dir. O halde

$$F(a)(n+1)\frac{(x-c)^n}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

olup

$F(a) = R_n(x)$ olduğundan

$$F(a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = R_n(x)$$

elde edilir.

2.6 Lineer Pozitif Operatör Dizisi ile Fonksiyonlara Yaklaşımın Hızı

Normlu bir uzay $X(D)$ olsun. $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ ve $\lambda \in \Lambda$ olmak üzere

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \|L_\lambda(f) - f\|_{X(D)} = 0$$

olacak şekilde normda yakınsaklık varsa, bu durumda

$$\lambda \rightarrow \lambda_0 \text{ iken } (\alpha_\lambda) = (\|L_\lambda(f) - f\|_{X(D)})$$

ifadesi bir sıfır ailesidir. Yani;

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \alpha_\lambda = 0$$

dır. Eğer

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \beta_\lambda = 0$$

ve

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{\alpha_\lambda}{\beta_\lambda} = 0$$

olacak şekilde bir (β_λ) ailesi bulunabilirse, bu durumda

$$(\|L_\lambda(f) - f\|_{X(D)}) = (\alpha_\lambda) = (o(\beta_\lambda))$$

olur.

Burada $L_\lambda(f) - f$ farkının sıfıra yakınsama hızının ve dolayısıyla $L_\lambda(f)$ operatör ailesinin f fonksiyonuna yakınsama hızının (β_λ) ailesinin sıfıra yakınsama hızından daha hızlı olduğu görülmektedir. Bu ise yaklaşımlar teorisinin ikinci temel probleminin çözümü için yukarıdaki koşulları sağlayan uygun bir (β_λ) sıfır ailesinin bulunması gerektiğini gösterir. Böyle bir sıfır ailesini bulma yollarından biride süreklilik modülleridir [26].

2.6.1. Tanım

$f \in C[a, b]$ olsun. $\delta > 0$ için

$$\omega(f; \delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |t-x| \leq \delta}} |f(t) - f(x)|$$

biçiminde tanımlanan $\omega(f; \delta)$ fonksiyonuna f fonksiyonunun süreklilik modülü denir [24].

Süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$i) \omega(f; \delta) \geq 0,$$

$$ii) \delta_1 \leq \delta_2 \text{ ise } \omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2),$$

$$iii) \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(f; \delta) = 0,$$

$$iv) \text{ Her } m \in \mathbb{N} \text{ için } \omega(f; m\delta) \leq m\omega(f; \delta),$$

v) Her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(f; \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(f; \delta)$,

vi) $|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|)$

ve

vii) $|f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1\right) \omega(f; \delta)$,

İspat

i) Süreklilik modülünün tanımından açıktır.

ii) $\delta_1 \leq \delta_2$ için

$\{|f(t) - f(x)|: t, x \in [a, b] \text{ ve } |t - x| \leq \delta_1\}$

kümesi

$\{|f(t) - f(x)|: t, x \in [a, b] \text{ ve } |t - x| \leq \delta_2\}$

kümesinin bir alt kümesi olduğundan, bölge büyüdükçe alınan supremum büyüceği özelliğinden ispat açıktır.

iii) f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli olduğundan aynı zamanda düzgün

süreklidir. Yani keyfî $\varepsilon > 0$ için en az bir $\eta > 0$ vardır öyle ki $|t - x| < \eta$ koşulunu sağlayan her $x, t \in [a, b]$ için $|f(t) - f(x)| < \varepsilon/2$ olur. Eğer $\delta < \eta$ seçilirse süreklilik modülünün tanımına göre

$$\omega(f; \delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |t-x| \leq \delta}} |f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

olup buradan

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta) = 0$$

bulunur.

iv) Süreklilik modülünün tanımından $m \in \mathbb{N}$ için

$$\omega(f; m\delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |t-x| \leq m\delta}} |f(t) - f(x)|$$

eşitliği yazılabilir. Eğer

$$|t - x| \leq m\delta$$

ise

$$x - m\delta \leq t \leq x + m\delta$$

olmak üzere $t = x + mh$ seçimiyle $|h| \leq \delta$ için

$$\omega(f; m\delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x + mh) - f(x)|$$

eşitliği elde edilir. Diğer yandan

$$\sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x + mh) - f(x)| = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} \left| \sum_{k=0}^{m-1} [f(x + (k+1)h) - f(x + kh)] \right|$$

olup eşitliğin sağ tarafına üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x + mh) - f(x)| \leq \sum_{k=0}^{m-1} \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x + (k+1)h) - f(x + kh)|$$

$$\leq \omega(f; \delta) + \omega(f; \delta) + \cdots + \omega(f; \delta)$$

$$= m\omega(f; \delta)$$

elde edilir.

v) $\lambda \in \mathbb{R}^+$ sayısının tam kısmı $[\lambda]$ ile gösterilsin. Tam değer fonksiyonun tanımı gereğince

$$[\lambda] \leq \lambda < [\lambda] + 1$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik ve $\omega(f; \delta)$ fonksiyonunun monoton artan özelliğini gözönünde bulundurulursa

$$\omega(f; \lambda\delta) \leq \omega(f; ([\lambda] + 1)\delta)$$

eşitsizliği elde edilir. $[\lambda]$ pozitif bir tamsayı olduğundan elde edilen son eşitsizliğin sağ tarafına bu tanımdaki iv) özelliği uygulanırsa

$$\omega(f; ([\lambda] + 1)\delta) \leq ([\lambda] + 1)\omega(f; \delta)$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için

$$[\lambda] + 1 \leq \lambda + 1$$

olduğundan dolayı

$$\omega(f; ([\lambda] + 1)\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(f; \delta)$$

olur. Buradan

$$\omega(f; \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(f; \delta)$$

ifadesi elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

vi) $\omega(f; \delta)$ ifadesinde δ yerine $|t - x|$ yazılırsa

$$|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|)$$

olduğu açıktır.

vii) (vi) özelliğinden

$$|f(t) - f(x)| \leq \omega\left(f; \frac{|t - x|}{\delta} \delta\right)$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikte v) özelliği kullanılırsa

$$|f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t - x|}{\delta} + 1 \right) \omega(f; \delta)$$

olur. Böylelikle ispat tanımlanır.

3. (P_n) OPERATÖLER DİZİSİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde $[0, \infty)$ aralığında üstel büyüyen sürekli fonksiyonlara bir (P_n) operatörler dizisinin yaklaşım özellikleri incelenecektir.

3.1. P_n Operatörlerinin Tanımı

$p \geq 0$ için $\rho_p(x) = e^{px}$ ağırlık fonksiyonu olsun.

$$|f(x)| \leq M_f \rho_p(x)$$

eşitsizliğini sağlayan $[0, \infty)$ üzerinde sürekli fonksiyonların uzayını $C_p[0, \infty)$ ile gösterelim. Bu uzay

$$\|f\|_p = \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|f(x)|}{\rho_p(x)}$$

normu ile bir normlu uzaydır.

$C_p[0, \infty)$ uzayında

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\rho_p(x)} < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların uzayını da $C_p^*[0, \infty)$ ile gösterelim.

P_n operatörleri; $|z| < R$, $R > 1$, diskinde $g(1) \neq 0$ şartını sağlayan

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

analitik fonksiyonunun yardımıyla

$$g(u) \cosh(ux) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x) u^k \quad (3.1)$$

eşitliğini sağlayan

$$p_k(x) = \sum_{v=0}^k a_v \frac{x^{k-v}}{(k-v)!} \frac{1 + (-1)^{k-v}}{2}$$

polinomları ile üretilen

$$P_n(f; x) = \frac{1}{g(1) \cosh(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (3.2)$$

biçiminde tanımlanır [14].

P_n operatörlerinin pozitifliği;

3.1.1. Teorem

P_n operatörlerinin pozitif olması için gerekli ve yeterli koşulun her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{a_n}{g(1)} \geq 0$$

olmasıdır [25].

İspat

İlk olarak

$0 \leq x < \infty$ ve $k, n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{p_k(nx)}{g(1) \cosh(nx)} \geq 0$$

olması için gerekli ve yeterli koşulun $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{a_n}{g(1) \cosh(nx)} \geq 0$$

olması gerektiğini göstereceğiz.

$0 \leq x < \infty$ ve $k, n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{p_k(nx)}{g(1)} \geq 0$$

olduğunda $[0, \infty)$ üzerinde P_n operatörü bir pozitif operatör olur.

Kabul edelim ki P_n operatörü $[0, \infty)$ üzerinde bir pozitif operatör olsun. Bu durumda

$0 \leq x < \infty$ ve $k, n \in \mathbb{N}$ için $\frac{p_k(nx)}{g(1)} \geq 0$ olduğunu göstereceğiz.

Her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$g_0^n(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ -nt + 1, & 0 < t \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} < t, \end{cases}$$

pozitif fonksiyonu için

$$P_n(g_0^n, x) = \frac{a_n}{g(1)\cosh(nx)} \geq 0$$

olur. Her bir $k, n \in \mathbb{N}$ için

$$g_k^n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq (k-1)/n, \\ nt - k + 1, & \frac{k-1}{n} < t \leq k/n, \\ -nt + k + 1, & \frac{k}{n} < t \leq \frac{k+1}{n}, \\ 0, & \frac{k+1}{n} < t, \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan pozitif fonksiyonu için de

$$P_n(g_k^n, x) = \frac{a_n}{g(1)\cosh(nx)} \geq 0$$

olur.

O halde $0 \leq x < \infty$ ve $k, n \in \mathbb{N}^+$ için

$$\frac{a_n}{g(1)\cosh(nx)} \geq 0$$

olup her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{a_n}{g(1)} \geq 0$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

P_n operatörlerinin varlığı;

3.1.2. Önerme

$r, p \in \mathbb{R}$ ve $r > p$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$P_n: C_p[0, \infty) \rightarrow C_r[0, \infty)$$

bir operatör tanımlar.

İspat

Eş. 3.1 de tanımlanan Mac Laurin serisinin katsayısı olan $p_k(x)$ polinomu

$$p_k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=R} \frac{g(u)\cosh ux}{u^{k+1}} du$$

biçiminde tanımlıdır. Her iki tarafın modülü alındığında

$$|p_k(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|u|=R} \frac{|g(u)||\cosh ux|}{|u|^{k+1}} |du|$$

eşitsizliği elde edilir.

$|u| = R$ eğrisinde $u = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ için

$$|du| = R d\theta$$

ve

$$|\cosh ux| \leq |e^{ux}| = e^{Rx}$$

dir. $|g(x)| \leq M_g$ olacak şekilde bir $M_g > 0$ reel sayısı var olduğundan

$$|P_k(x)| \leq \frac{1}{2\pi} M_g \frac{e^{Rx}}{R^{k+1}} \int_0^{2\pi} R d\theta = M_g \frac{e^{Rx}}{R^k}$$

olur.

$f \in C_p[0, \infty)$ fonksiyonu için ve her $x \in [0, \infty)$ için

$$|f(x)| \leq M_f e^{px}$$

olacak şekilde bir $M_f > 0$ reel sayısı vardır.

Bu durumda $u = e^{\frac{p}{n}}$ için Eş. 3.1 den

$$g\left(e^{\frac{p}{n}}\right) \cosh\left(e^{\frac{p}{n}} x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x) e^{\frac{p}{n}k}$$

eşitliği ile

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} M_g \frac{e^{Rx}}{R^k} M_f e^{p\frac{k}{n}} = M_f M_g e^{Rx} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e^{\frac{p}{n}}}{R}\right)^k$$

yazılır. Bu seri $\frac{e^{\frac{p}{n}}}{R} < 1$ için yakınsaktır. Dolayısıyla operatörler $n > \frac{p}{\ln R}$ ler için tanımlıdır.

O halde herhangi bir $f \in C_p[0, \infty)$ için

$$|P_n(f; x)| \leq \frac{M_f}{\cosh nx} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(nx)}{g(1)} e^{p\frac{k}{n}} \right|$$

eşitsizliği ve $u = e^{\frac{p}{n}}$ için Eş. 3.1

$$g\left(e^{\frac{p}{n}}\right) \cosh\left(e^{\frac{p}{n}} x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x) e^{\frac{p}{n} k}$$

yardımıyla

$$|P_n(f; x)| \leq \frac{M_f}{g(1)} g\left(e^{\frac{p}{n}}\right) \frac{\cosh\left(e^{\frac{p}{n}} x\right)}{\cosh nx}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\frac{\cosh\left(nxe^{\frac{p}{n}}\right)}{\cosh nx} = e^{nx\left(\frac{p}{n}-1\right)} \frac{1 + e^{-2nxe^{\frac{p}{n}}}}{1 + e^{-2nx}} < 2e^{nx\left(\frac{p}{n}-1\right)}$$

eşitsizliği ve $t > 0$ için $h(t) = \frac{e^t - t}{t}$ fonksiyonunun artanlığından

$$n \left(\frac{e^{\frac{p}{n}} - 1}{p} \right) \leq \frac{e^p - 1}{p}$$

olup

$$r = \frac{e^p - 1}{p} > p$$

için

$$|P_n(f; x)| \leq \frac{M_f}{g(1)} g\left(e^{\frac{p}{n}}\right) 2e^{x\left(\frac{e^p - 1}{p}\right)} \leq Me^{rx}$$

olur. Böylece önermenin ispatı tamamlanır.

3.2. Momentler

Bu bölümde, Eş. 1.2 de verilen operatörlerin yaklaşım özelliklerini elde etmek için Korovkin tip teorem kullanacağız. Öncelikle test fonksiyonları elde edebilmek için 3.2.1. Lemma yardımcı sonuçları bulalım.

3.2.1. Lemma

Eş. 3.1 ifadesinde verilen $g(u) \cosh(ux) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x)u^k$ ile üretilen $p_k(x)$ Appell polinomları için aşağıdaki eşitlikler gerçekleşir.

$$i) \sum_{k=0}^{\infty} k p_k(nx) = g'(1) \cosh(nx) + nx g(1) \sinh(nx),$$

$$ii) \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k(nx) = \{g''(1) + g'(1) + n^2 x^2\} \cosh(nx)$$

$$+ \{2nx g'(1) + nx g(1)\} \sinh(nx),$$

$$iii) \sum_{k=0}^{\infty} k^3 p_k(nx) = \{g'''(1) + 3g''(1) + (3n^2 x^2 + 1)g'(1) + 3n^2 x^2 g(1)\} \cosh(nx)$$

$$+ \{3nx g''(1) + 6nx g'(1) + (n^3 x^3 + nx)g(1)\} \sinh(nx)$$

ve

$$iv) \sum_{k=0}^{\infty} k^4 p_k(nx) = \{g^{(4)}(1) + 6g'''(1) + (6x^2 + 7)g''(1) + (18n^2 x^2 + 1)g'(1) + (x^4 + 7x^2)g(1)\} \cosh(nx) + \{4nx g^{(3)}(1) + 18nx g''(1) + (4n^3 x^3 + 14nx)g'(1) + (6n^3 x^3 + nx)g(1)\} \sinh(nx).$$

İspat

i) Eş. 3.1 ifadesinde verilen

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(x)u^k = g(u) \cosh(ux)$$

eşitliğinde her iki tarafının u değişkenine göre türevi alınırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k(x)ku^{k-1} = g'(u) \cosh(ux) + xg(u) \sinh(ux) \quad (3.3)$$

olur. Bu eşitlikte $u = 1$ ve x yerine nx yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty} kp_k(nx) = g'(1) \cosh(nx) + nxg(1) \sinh(nx) \quad (3.4)$$

elde edilir.

ii) Eş. 3.3 ifadesinde her iki tarafın u değişkenine göre türevi alınır

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} p_k(x)k(k-1)u^{k-2} \\ = g''(u) \cosh(ux) + xg'(u) \sinh(ux) + xg'(u) \sinh(ux) + x^2g(u) \cosh(ux) \end{aligned} \quad (3.5)$$

bulunur. Bu eşitlikte $u = 1$ ve x yerine nx yazılırsa

$$\sum_{k=2}^{\infty} p_k(nx)k(k-1) = \{g''(1) + n^2x^2g(1)\} \cosh(nx) + 2nxg'(1) \sinh(nx) \quad (3.6)$$

dir. $\sum_{k=1}^{\infty} k^2p_k(nx)$ serisinde $k^2 = k(k-1) + k$ eşitliği kullanılırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2p_k(nx) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k(nx) + \sum_{k=1}^{\infty} kp_k(nx)$$

olur. Bu eşitlikte Eş. 3.4 ile Eş. 3.6 ifadeleri yerlerine yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2p_k(nx) = \{g''(1) + g'(1) + n^2x^2g(1)\} \cosh(nx)$$

$$+ \{2nxg'(1) + nxg(1)\} \sinh(nx)$$

eşitliği elde edilir.

iii) Eş. 3.5 eşitliğinde her iki tarafın u değişkenine göre türevi alınır

$$\sum_{k=3}^{\infty} p_k(x)k(k-1)(k-2)u^{k-3}$$

$$\begin{aligned}
&= g'''(u) \cosh(ux) + xg''(u) \sinh(ux) + xg''(u) \sinh(ux) + x^2g'(u) \cosh(ux) \\
&+ xg''(u) \sinh(ux) + x^2g'(u) \cosh(ux) + x^2g'(u) \cosh(ux) + x^3g(u) \sinh(ux) \quad (3.7)
\end{aligned}$$

olur, buradan

$$\sum_{k=3}^{\infty} p_k(x)k(k-1)(k-2)u^{k-3} = \{g'''(u) + 3x^2g'(u)\} \cosh(ux)$$

$$+ \{3xg''(u) + x^3g(u)\} \sinh(ux)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $u = 1$ ve x yerine nx yazılırsa

$$\sum_{k=3}^{\infty} p_k(nx)k(k-1)(k-2) = \{g'''(1) + 3n^2x^2g'(1)\} \cosh(nx)$$

$$+ \{3n x g''(1) + n^3 x^3 g(1)\} \sinh(nx) \quad (3.8)$$

dir.

$\sum_{k=1}^{\infty} k^3 p_k(nx)$ serisinde $k^3 = k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) + k$ eşitliği kullanılarak

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^3 p_k(nx) = \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)p_k(nx) + 3 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k(nx) + \sum_{k=1}^{\infty} k p_k(nx)$$

buluruz. Eş. 3.4, Eş. 3.6 ve Eş. 3.8 den yerlerine yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^3 p_k(nx) = \{g'''(1) + 3g''(1) + (3n^2x^2 + 1)g'(1) + 3n^2x^2g(1)\} \cosh(nx)$$

$$+ \{3n x g''(1) + 6n x g'(1) + (n^3 x^3 + n x)g(1)\} \sinh(nx)$$

elde edilir.

iv) Eş. 3.7 de her iki tarafının u değişkenine göre türevi alınır

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=4}^{\infty} p_k(x)k(k-1)(k-2)(k-3)u^{k-4} \\
&= g^{(4)}(u) \cosh(ux) + xg^{(3)}(u) \sinh(ux) + xg^{(3)}(u) \sinh(ux) + x^2g''(u) \cosh(ux) \\
&+ xg^{(3)}(u) \sinh(ux) + x^2g''(u) \cosh(ux) + x^2g''(u) \cosh(ux) + x^3g'(u) \sinh(ux) \\
&+ xg^{(3)}(u) \sinh(ux) + x^2g''(u) \cosh(ux) + x^2g''(u) \cosh(ux) + x^3g'(u) \sinh(ux) \\
&+ x^2g''(u) \cosh(ux) + x^3g'(u) \sinh(ux) \\
&+ x^3g'(u) \sinh(ux) + x^4g(u) \cosh(ux) \tag{3.9}
\end{aligned}$$

olur, buradan

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=4}^{\infty} p_k(x)k(k-1)(k-2)(k-3)u^{k-4} = \{g^{(4)}(u) + 6x^2g''(u) + x^4g(u)\} \cosh(ux) \\
&+ \{4xg^{(3)}(u) + 4x^3g'(u)\} \sinh(ux)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte $u = 1$ ve x yerine nx yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=4}^{\infty} p_k(nx)k(k-1)(k-2)(k-3) = \{g^{(4)}(1) + 6x^2g''(1) + x^4g(1)\} \cosh(nx) \\
&+ \{4nxg^{(3)}(1) + 4n^3x^3g'(1)\} \sinh(nx) \tag{3.10}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\sum_{k=1}^{\infty} k^4 p_k(nx)$ serisinde

$$k^4 = k(k-1)(k-2)(k-3) + 6k(k-1)(k-2) + 7k(k-1) + k$$

eşitliği kullanılarak

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^4 p_k(nx) = \sum_{k=4}^{\infty} k(k-1)(k-2)(k-3)p_k(nx) + 6 \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)p_k(nx)$$

$$+7 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k(nx) + \sum_{k=1}^{\infty} kp_k(nx)$$

yazılır. Eş. 3.4, Eş. 3.6, Eş. 3.8 ve Eş. 3.10 daki ifadeler yerlerine yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^4 p_k(nx) = \{g^{(4)}(1) + 6g'''(1) + (6x^2 + 7)g''(1) + (18n^2x^2 + 1)g'(1)$$

$$+(x^4 + 7x^2)g(1)\} \cosh(nx)$$

$$+\{4nxg^{(3)}(1)+18nxg''(1) + (4n^3x^3 + 14nx)g'(1) + (6n^3x^3 + nx)g(1)\} \sinh(nx)$$

elde edilir.

Bu yardımcı sonuçları kullanarak P_n operatörlerine ait test fonksiyonlarını elde edelim.

3.2.2. Lemma

$i = 0,1,2,3,4$ için $e_i(t) = t^i$ olmak üzere Eş. 3.2 de tanımlanan P_n operatörleri $x \in [0, \infty)$ için aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

$$i) \quad P_n(e_0; x) = 1,$$

$$ii) \quad P_n(e_1; x) = \frac{1}{n} \frac{g'(1)}{g(1)} + x \tanh(nx),$$

$$iii) \quad P_n(e_2; x) = x^2 + \frac{x}{n} \tanh(nx) \left[\frac{2g'(1)+g(1)}{g(1)} \right] + \frac{1}{n^2} \left[\frac{g''(1)+g'(1)}{g(1)} \right],$$

$$iv) \quad P_n(e_3; x) = \frac{1}{n^3} \frac{g^{(3)}(1)}{g(1)} + \frac{3x}{n^2} \frac{g''(1)}{g(1)} \tanh(nx) + \frac{3}{n^3} \frac{g''(1)}{g(1)} + \frac{(3x^2n^2+1)}{n^3} \frac{g'(1)}{g(1)}$$

$$+ \frac{6x}{n^2} \frac{g'(1)}{g(1)} \tanh(nx) + \frac{3x^2}{n} + \frac{n^3x^3 + nx}{n^3} \tanh(nx)$$

ve

$$\begin{aligned}
v) P_n(e_4; x) &= \frac{1}{n^4} \frac{g^{(4)}(1)}{g(1)} + \frac{4x}{n^3} \frac{g^{(3)}(1)}{g(1)} \tanh(nx) + \frac{6}{n^4} \frac{g^{(3)}(1)}{g(1)} + \frac{(6x^2n^2+7)}{n^4} \frac{g''(1)}{g(1)} \\
&+ \frac{18x}{n^3} \frac{g''(1)}{g(1)} \tanh(nx) + \frac{(18x^2n^2+1)}{n^4} \frac{g'(1)}{g(1)} \\
&+ \frac{(4n^3x^3+14nx)}{n^4} \frac{g'(1)}{g(1)} \tanh(nx) \\
&+ \frac{(n^4x^4+7n^2x^2)}{n^4} + \frac{(6n^3x^3+nx)}{n^4} \tanh(nx).
\end{aligned}$$

İspat

i)

$e_0(t) = t^0 = 1$ ve $x \in [0, \infty)$ için Eş. 3.2 eşitliğinde tanımlanan P_n operatörlerinden

$$\begin{aligned}
P_n(e_0; x) &= \frac{1}{g(1) \cosh(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \\
&= \frac{1}{g(1) \cosh(nx)} g(1) \cosh(nx) \\
&= 1
\end{aligned}$$

elde edilir.

ii)

$e_1(t) = t^1 = t$ ve $x \in [0, \infty)$ için 3.2.1. Lemma i) den

$$\begin{aligned}
P_n(e_1; x) &= \frac{1}{g(1) \cosh(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \cdot \frac{k}{n} \\
&= \frac{1}{g(1) \cosh(nx)} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \cdot k \\
&= \frac{1}{ng(1) \cosh(nx)} \cdot (g'(1) \cosh(nx) + nxg(1) \sinh(nx))
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n} \frac{g'(1)}{g(1)} + x \tanh(nx)$$

elde edilir.

iii)

$e_2(t) = t^2$ ve $x \in [0, \infty)$ için 3.2.1. Lemma ii) den

$$\begin{aligned} P_n(e_2; x) &= \frac{1}{g(1) \cosh(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \cdot \frac{k^2}{n^2} \\ &= \frac{1}{g(1) \cosh(nx)} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \cdot k^2 \\ &= \frac{1}{n^2 g(1) \cosh(nx)} [g''(1) \cosh(nx) + 2nx g'(1) \sinh(nx) \\ &\quad + n^2 x^2 g(1) \cosh(nx) + g'(1) \cosh(nx) + nx g(1) \sinh(nx)] \\ &= \frac{1}{n^2} \frac{g''(1)}{g(1)} + \frac{2x}{n} \frac{g'(1)}{g(1)} \tanh(nx) + x^2 + \frac{1}{n^2} \frac{g'(1)}{g(1)} + \frac{x}{n} \tanh(nx) \\ &= x^2 + \frac{x}{n} \tanh(nx) \left[\frac{2g'(1)+g(1)}{g(1)} \right] + \frac{1}{n^2} \left[\frac{g''(1)+g'(1)}{g(1)} \right] \end{aligned}$$

dir.

iv)

$e_3(t) = t^3$ ve $x \in [0, \infty)$ için 3.2.1. Lemma iii) den

$$\begin{aligned} P_n(e_3; x) &= \frac{1}{g(1) \cosh(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \cdot \frac{k^3}{n^3} \\ &= \frac{1}{g(1) \cosh(nx)} \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \cdot k^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n^3 g(1) \cosh(nx)} [g^{(3)}(1) \cosh(nx) + 3nx g''(1) \sinh(nx) \\
&+ 3g''(1) \cosh(nx) + g'(1) \cosh(nx)(3n^2 x^2 + 1) + 6nx g'(1) \sinh(nx) \\
&+ 3n^2 x^2 g(1) \cosh(nx) + g(1) \sinh(nx)(n^3 x^3 + nx)] \\
&= \frac{1}{n^3} \frac{g^{(3)}(1)}{g(1)} + \frac{3x}{n^2} \frac{g''(1)}{g(1)} \tanh(nx) + \frac{3}{n^3} \frac{g''(1)}{g(1)} + \frac{(3x^2 n^2 + 1)}{n^3} \frac{g'(1)}{g(1)} \\
&+ \frac{6x}{n^2} \frac{g'(1)}{g(1)} \tanh(nx) + \frac{3x^2}{n} + \frac{n^3 x^3 + nx}{n^3} \tanh(nx)
\end{aligned}$$

elde edilir.

v)

$e_4(t) = t^4$ ve $x \in [0, \infty)$ için 3.2.1. Lemma iv) den

$$\begin{aligned}
P_n(e_4; x) &= \frac{1}{g(1) \cosh(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \cdot \frac{k^4}{n^4} \\
&= \frac{1}{g(1) \cosh(nx)} \frac{1}{n^4} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \cdot k^4 \\
&= \frac{1}{n^4 g(1) \cosh(nx)} [g^{(4)}(1) \cosh(nx) + 4nx g^{(3)}(1) \sinh(nx) \\
&+ 6g^{(3)}(1) \cosh(nx) + (6n^2 x^2 + 7)g''(1) \cosh(nx) \\
&+ 18nx g''(1) \sinh(nx) + (18n^2 x^2 + 1)g'(1) \cosh(nx) \\
&+ (4n^3 x^3 + 14nx)g'(1) \sinh(nx) + (n^4 x^4 + 7n^2 x^2)g(1) \cosh(nx) \\
&+ (6n^3 x^3 + nx)g(1) \sinh(nx)] \\
&= \frac{1}{n^4} \frac{g^{(4)}(1)}{g(1)} + \frac{4x}{n^3} \frac{g^{(3)}(1)}{g(1)} \tanh(nx) + \frac{6}{n^4} \frac{g^{(3)}(1)}{g(1)} + \frac{(6x^2 n^2 + 7)}{n^4} \frac{g''(1)}{g(1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{18x}{n^3} \frac{g''(1)}{g(1)} \tanh(nx) + \frac{(18x^2n^2 + 1)}{n^4} \frac{g'(1)}{g(1)} \\
& + \frac{(4n^3x^3 + 14nx)}{n^4} \frac{g'(1)}{g(1)} \tanh(nx) \\
& + \frac{(n^4x^4 + 7n^2x^2)}{n^4} + \frac{(6n^3x^3 + nx)}{n^4} \tanh(nx)
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.2.3. Tanım

(P_n) operatörler dizisi için

$$\varphi_{n,r}(x) = P_n((t-x)^r; x), r = 0,1,2,3,4.$$

biçiminde tanımlanan ifadeler r – *inci* merkezi momentler denir.

3.2.4. Lemma

P_n operatörlerinin merkezi momentleri aşağıdaki gibidir.

$$i) P_n((t-x); x) = -x(1 - \tanh(nx)) + \frac{1}{n} \frac{g'(1)}{g(1)},$$

$$ii) P_n((t-x)^2; x) = [1 - \tanh(nx)] \left[2x^2 - \frac{x}{n} \left(\frac{2g'(1)}{g(1)} + 1 \right) \right] + \frac{x}{n} + \frac{1}{n^2} \left[\frac{g''(1) + g'(1)}{g(1)} \right],$$

$$iii) P_n((t-x)^3; x) = \frac{1}{n^3} \left(\frac{g^{(3)}(1)}{g(1)} + 3 \frac{g''(1)}{g(1)} + (3x^2n^2 + 1) \frac{g'(1)}{g(1)} + (n^3x^3 + nx) \tanh(nx) \right)$$

$$+ \frac{1}{n^2} \left(3x \frac{g'(1)}{g(1)} (1 - 2\tanh(nx)) \right)$$

$$+ \frac{1}{n} \left(3x^2(1 - \tanh(nx)) + 3x^2 \frac{g'(1)}{g(1)} (1 - 2\tanh(nx)) \right) - x^3(4 - 3\tanh(nx))$$

ve

iv)

$$P_n((t-x)^4; x)$$

$$= (1 - \tanh(nx)) \left[8x^4 - \frac{x^3}{n} \left(12 + 16 \frac{g'(1)}{g(1)} \right) + \frac{x^2}{n^2} 4 \left(1 + 6 \frac{g'(1)}{g(1)} + 3 \frac{g''(1)}{g(1)} \right) \right. \\ \left. - \frac{x}{n^3} \left(1 + \frac{14g'(1) + 18g''(1) + 4g^{(3)}(1)}{g(1)} \right) \right] + 3 \frac{x^2}{n^2} + \frac{x}{n^3} \left(1 + \frac{10g'(1) + 6g''(1)}{g(1)} \right) \\ + \frac{1}{n^4} \left(\frac{g'(1) + 7g''(1) + 6g^{(3)}(1) + g^{(4)}(1)}{g(1)} \right)$$

İspat

i) $x \in [0, \infty)$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\varphi_{n,1}(x) = P_n(t-x; x)$$

$$= P_n(e_1; x) - xP_n(e_0; x)$$

$$= \frac{1}{n} \frac{g'(1)}{g(1)} + x \tanh(nx) - x \cdot 1$$

$$= -x(1 - \tanh(nx)) + \frac{1}{n} \frac{g'(1)}{g(1)}$$

elde edilir.

ii)

$$P_n((t-x)^2; x) = P_n(t^2 - 2tx + x^2; x)$$

$$= P_n(e_2; x) - 2xP_n(e_1; x) + x^2P_n(e_0; x)$$

$$\begin{aligned}
&= x^2 + \frac{x}{n} \tanh(nx) \left[\frac{2g'(1) + g(1)}{g(1)} \right] + \frac{1}{n^2} \left[\frac{g''(1) + g'(1)}{g(1)} \right] \\
&\quad - \frac{2x}{n} \frac{g'(1)}{g(1)} - 2x^2 \tanh(nx) - x^2 \cdot 1 \\
&= 2x^2 + \frac{2x}{n} \frac{g'(1)}{g(1)} [\tanh(nx) - 1] + \frac{x}{n} \tanh(nx) + \frac{1}{n^2} \frac{g''(1)}{g(1)} + \frac{1}{n^2} - 2x^2 \tanh(nx) \pm \frac{x}{n} \\
&= 2x^2(1 - \tanh(nx)) - \frac{2x}{n} \frac{g'(1)}{g(1)} [1 - \tanh(nx)] + \frac{x}{n} (1 - \tanh(nx)) \\
&\quad + \frac{1}{n^2} \left[\frac{g''(1) + g'(1)}{g(1)} \right] + \frac{x}{n} \\
&= [1 - \tanh(nx)] \left[2x^2 - \frac{x}{n} \left(\frac{2g'(1)}{g(1)} + 1 \right) \right] + \frac{x}{n} + \frac{1}{n^2} \left[\frac{g''(1) + g'(1)}{g(1)} \right]
\end{aligned}$$

olur.

iii)

$$\begin{aligned}
P_n((t-x)^3; x) &= P_n(t^3 - 3t^2x + 3tx^2 - x^3; x) \\
&= P_n(e_3; x) - 3xP_n(e_2; x) + 3x^2P_n(e_1; x) - x^3P_n(e_0; x) \\
&= \frac{1}{n^3} \frac{g^{(3)}(1)}{g(1)} + \frac{3x}{n^2} \frac{g''(1)}{g(1)} \tanh(nx) + \frac{3}{n^3} \frac{g''(1)}{g(1)} + \frac{(3x^2n^2 + 1)}{n^3} \frac{g'(1)}{g(1)} \\
&\quad + \frac{6x}{n^2} \frac{g'(1)}{g(1)} \tanh(nx) + \frac{3x^2}{n} + \frac{n^3x^3 + nx}{n^3} \tanh(nx) \\
&\quad - 3x \left(\frac{1}{n^2} \frac{g''(1)}{g(1)} + \frac{2x}{n} \frac{g'(1)}{g(1)} \tanh(nx) + x^2 + \frac{1}{n^2} \frac{g'(1)}{g(1)} + \frac{x}{n} \tanh(nx) \right) \\
&\quad + 3x^2 \left(\frac{1}{n} \frac{g'(1)}{g(1)} + x \tanh(nx) \right) - x^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n^3} \left(\frac{g^{(3)}(1)}{g(1)} + 3 \frac{g''(1)}{g(1)} + (3x^2n^2 + 1) \frac{g'(1)}{g(1)} + (n^3x^3 + nx) \tanh(nx) \right) \\
&+ \frac{1}{n^2} \left(3x \frac{g'(1)}{g(1)} (1 - 2\tanh(nx)) \right) \\
&+ \frac{1}{n} \left(3x^2(1 - \tanh(nx)) + 3x^2 \frac{g'(1)}{g(1)} (1 - 2\tanh(nx)) \right) - x^3(4 - 3\tanh(nx))
\end{aligned}$$

dir.

iv)

$$\begin{aligned}
P_n((t-x)^4; x) &= P_n(t^4 - 4t^3x + 6t^2x^2 - 4tx^3 + x^4; x) \\
&= P_n(e_4; x) - 4xP_n(e_3; x) + 6x^2P_n(e_2; x) - 4x^3P_n(e_1; x) + x^4P_n(e_0; x) \\
&= \frac{1}{n^4} \frac{g^{(4)}(1)}{g(1)} + \frac{4x}{n^3} \frac{g^{(3)}(1)}{g(1)} \tanh(nx) + \frac{6}{n^4} \frac{g^{(3)}(1)}{g(1)} + \frac{(6x^2n^2 + 7)}{n^4} \frac{g''(1)}{g(1)} \\
&+ \frac{18x}{n^3} \frac{g''(1)}{g(1)} \tanh(nx) + \frac{(18x^2n^2 + 1)}{n^4} \frac{g'(1)}{g(1)} \\
&+ \frac{(4n^3x^3 + 14nx)}{n^4} \frac{g'(1)}{g(1)} \tanh(nx) + \frac{(n^4x^4 + 7n^2x^2)}{n^4} \\
&+ \frac{(6n^3x^3 + nx)}{n^4} \tanh(nx) - 4x \frac{1}{n^3} \frac{g^{(3)}(1)}{g(1)} - 12 \frac{x^2}{n^2} \frac{g''(1)}{g(1)} \tanh(nx) \\
&- \frac{12x}{n^3} \frac{g''(1)}{g(1)} - \frac{(12x^3n^2 + 4x)}{n^3} \frac{g'(1)}{g(1)} - \frac{24x^2}{n^2} \frac{g'(1)}{g(1)} \tanh(nx) \\
&- \frac{12x^3}{n} - \frac{4n^3x^4 + 4nx^2}{n^3} \tanh(nx) \\
&+ 6x^4 + \frac{6x^3}{n} \tanh(nx) \left[\frac{2g'(1) + g(1)}{g(1)} \right] + \frac{6x^2}{n^2} \left[\frac{g''(1) + g'(1)}{g(1)} \right] \\
&- 4 \frac{x^3}{n} \frac{g'(1)}{g(1)} - 4x^4 \tanh(nx) + x^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 8x^4 - 8x^4 \tanh(nx) + \frac{x^3}{n} \left(4 \frac{g'(1)}{g(1)} \tanh(nx) + 6 \tanh(nx) - 12 \frac{g'(1)}{g(1)} - 12 \right. \\
&\quad \left. + 12 \frac{g'(1)}{g(1)} \tanh(nx) + 6 \tanh(nx) - 4 \frac{g'(1)}{g(1)} \right) \\
&\quad + \frac{x^2}{n} \left(6 \frac{g''(1)}{g(1)} + 18 \frac{g'(1)}{g(1)} + 7 - 12 \frac{g''(1)}{g(1)} \tanh(nx) \right. \\
&\quad \left. - 24 \frac{g'(1)}{g(1)} \tanh(nx) - 4 \tanh(nx) + 6 \frac{g''(1)}{g(1)} + 6 \frac{g'(1)}{g(1)} \right) \\
&\quad + \frac{x}{n^3} \left(4 \frac{g^{(3)}(1)}{g(1)} \tanh(nx) + 18 \frac{g''(1)}{g(1)} \tanh(nx) + 14 \frac{g'(1)}{g(1)} \tanh(nx) + \tanh(nx) \right. \\
&\quad \left. - 4 \frac{g^{(3)}(1)}{g(1)} + 4 \frac{g^{(3)}(1)}{g(1)} - 12 \frac{g''(1)}{g(1)} - 4 \frac{g'(1)}{g(1)} \right) \\
&\quad + \frac{1}{n^4} \left(\frac{g^{(4)}(1)}{g(1)} + 7 \frac{g''(1)}{g(1)} + \frac{g'(1)}{g(1)} + 6 \frac{g^{(3)}(1)}{g(1)} \right) \\
&\quad \pm 1 \pm 10 \frac{g'(1)}{g(1)} \pm 6 \frac{g''(1)}{g(1)} \\
&= 8x^4(1 - \tanh(nx)) - 12 \frac{x^3}{n} (1 - \tanh(nx)) - 16 \frac{x^3}{n} \frac{g'(1)}{g(1)} (1 - \tanh(nx)) \\
&\quad + 4 \frac{x^2}{n^2} (1 - \tanh(nx)) - 24 \frac{x^2}{n^2} \frac{g'(1)}{g(1)} (1 - \tanh(nx)) + 12 \frac{x^2}{n^2} \frac{g''(1)}{g(1)} (1 - \tanh(nx)) \\
&\quad + 3 \frac{x^2}{n^2} - \frac{x}{n^3} (1 - \tanh(nx)) - 14 \frac{x}{n^3} \frac{g'(1)}{g(1)} (1 - \tanh(nx)) \\
&\quad - 18 \frac{x}{n^3} \frac{g''(1)}{g(1)} (1 - \tanh(nx)) - 4 \frac{x}{n^3} \frac{g^{(3)}(1)}{g(1)} (1 - \tanh(nx)) \\
&\quad + \frac{x}{n^3} + 10 \frac{x}{n^3} \frac{g'(1)}{g(1)} + 6 \frac{x}{n^3} \frac{g''(1)}{g(1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{n^4} \left(\frac{g'(1) + 7g''(1) + 6g^{(3)}(1) + g^{(4)}(1)}{g(1)} \right) \\
& = (1 - \tanh(nx)) \left[8x^4 - \frac{x^3}{n} \left(12 + 16 \frac{g'(1)}{g(1)} \right) + \frac{x^2}{n^2} 4 \left(1 + 6 \frac{g'(1)}{g(1)} + 3 \frac{g''(1)}{g(1)} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{x}{n^3} \left(1 + \frac{14g'(1) + 18g''(1) + 4g^{(3)}(1)}{g(1)} \right) \right] + 3 \frac{x^2}{n^2} + \frac{x}{n^3} \left(1 + \frac{10g'(1) + 6g''(1)}{g(1)} \right) \\
& \quad + \frac{1}{n^4} \left(\frac{g'(1) + 7g''(1) + 6g^{(3)}(1) + g^{(4)}(1)}{g(1)} \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikte,

$$a_1 = 8,$$

$$a_2 = 12 + 16 \frac{g'(1)}{g(1)},$$

$$a_3 = 4 \left(1 + 6 \frac{g'(1)}{g(1)} + 3 \frac{g''(1)}{g(1)} \right),$$

$$a_4 = 1 + \frac{14g'(1) + 18g''(1) + 4g^{(3)}(1)}{g(1)},$$

$$a_5 = 3,$$

$$a_6 = 1 + \frac{10g'(1) + 6g''(1)}{g(1)}$$

ve

$$a_7 = \frac{g'(1) + 7g''(1) + 6g^{(3)}(1) + g^{(4)}(1)}{g(1)}$$

denilirse

$$P_n((t-x)^4; x) = (1 - \tanh(nx)) \left[a_1 x^4 - a_2 \frac{x^3}{n} + a_3 \frac{x^2}{n^2} - a_4 \frac{x}{n^3} \right] + a_5 \frac{x^2}{n^2} + a_6 \frac{x}{n^3} + a_7 \frac{1}{n^4}$$

yazılır.

3.2.5. Lemma

Her $r, n \in \mathbb{N}$ ve her $x \geq 0$ için

$$x^r(1 - \tanh(nx)) \leq \frac{2^{1-r}}{n^r} r!$$

eşitsizliği gerçekleşir.

İspat

$r, n \in \mathbb{N}$ ve $x \geq 0$ olsun.

$$x^r(1 - \tanh(nx)) = \left(1 - \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}}\right) = \frac{2x^r}{e^{2nx} + 1} \leq \frac{2x^r}{e^{2nx}}$$

dir.

$$\frac{2x^r}{e^{2nx}} = f(x)$$

denilirse

$$f'(x) = \frac{2rx^{r-1}e^{2nx} - 2ne^{2nx}2x^r}{e^{4nx}}$$

olup $f'(x) = 0$ eşitliğinden f fonksiyonu $x = \frac{r}{2n}$ noktasında maksimum değerini alır. Bu durumda

$$x^r(1 - \tanh(nx)) \leq \left(\frac{r}{e}\right)^r \frac{2}{(2n)^r}$$

eşitsizliği yazılır. Diğer taraftan

$$e^x = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!}$$

eşitliğinde

$$e^x \geq \frac{x^r}{r!}$$

olup

$$\frac{x^r}{e^x} \leq r!$$

olur. $x = r$ için

$$\frac{r^r}{e^r} \leq r!$$

olduğundan

$$\left(\frac{r}{e}\right)^r \leq r!$$

bulunur. Buradan

$$x^r(1 - \tanh(nx)) \leq \left(\frac{r}{e}\right)^r \frac{2}{(2n)^r} \leq \frac{2}{(2n)^r} r! = \frac{2^{1-r}}{n^r} r!$$

eşitsizliği elde edilir.

3.2.6. Lemma

$n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0, \infty)$ için aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan M ve $M_1(x)$ pozitif sayıları vardır

$$i) \quad P_n((t-x)^2; x) \leq \frac{3x}{n} + \frac{1}{n^2} M$$

ve

$$ii) \quad P_n((t-x)^4; x_0) \leq M_1(x) \frac{1}{n^2}.$$

İspat

i)

3.2.4. Lemma ii) den

$$\begin{aligned} P_n((t-x)^2; x) &= [1 - \tanh(nx)] \left[2x^2 - \frac{x}{n} \left(\frac{2g'(1)}{g(1)} + 1 \right) \right] + \frac{x}{n} + \frac{1}{n^2} \frac{g''(1) + g'(1)}{g(1)} \\ &= x[1 - \tanh(nx)] \left[2x - \frac{2}{n} \frac{g'(1)}{g(1)} \right] + \frac{x}{n} \tanh(nx) + \frac{1}{n^2} \frac{g''(1) + g'(1)}{g(1)} \end{aligned}$$

yazılır. 3.2.5. Lemmadan

$$x(1 - \tanh(nx)) \leq \frac{1}{n}$$

eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} P_n((t-x)^2; x) &\leq \frac{1}{n} \left(2x - \frac{2}{n} \frac{g'(1)}{g(1)} \right) + \frac{x}{n} + \frac{1}{n^2} \frac{g''(1) + g'(1)}{g(1)} \\ &= \frac{3x}{n} + \frac{1}{n^2} \frac{g''(1) - g'(1)}{g(1)} \\ &\leq \frac{3x}{n} + \frac{1}{n^2} \frac{g''(1) + g'(1)}{g(1)} \end{aligned}$$

elde edilir. g bir analitik fonksiyon ve $n \in N$ için $\frac{a_n}{g(1)} \geq 0$, $\frac{g''(1)}{g(1)} \geq 0$ ve $\frac{g'(1)}{g(1)} \geq 0$

olduğundan $\frac{g''(1) + g'(1)}{g(1)} = M$ denilirse

$$P_n((t-x)^2; x) \leq \frac{3x}{n} + \frac{1}{n^2} M$$

eşitsizliği elde edilir.

ii)

3.2.4. Lemma ve 3.2.5. Lemmayı kullanarak

$$P_n((t-x_0)^4; x_0) \leq a_1 \frac{2^{-3}}{n^4} 4! - a_2 \frac{2^{-2}}{n^4} 3! + a_3 \frac{2^{-1}}{n^4} 2! - a_4 \frac{1}{n^4} + a_5 \frac{x_0^2}{n^2} + a_6 \frac{x_0}{n^3} + a_7 \frac{1}{n^4}$$

$$\leq M_1(x_0) \frac{1}{n^2}$$

eşitsizliği elde edilir.

3.2.7. Lemma

$n \in N$, $p > 0$ ve $x \in [0, \infty)$ için aşağıdaki eşitlikler gerçekleşir.

$$i) P_n(e^{pt}; x) = \frac{g\left(e^{\frac{p}{n}}\right) \cosh\left(nxe^{\frac{p}{n}}\right)}{g(1) \cosh nx},$$

$$ii) P_n(te^{pt}; x) = \frac{1}{g(1) \cosh nx} \frac{e^{\frac{p}{n}}}{n} \left[g'\left(e^{\frac{p}{n}}\right) \cosh\left(nxe^{\frac{p}{n}}\right) + g\left(e^{\frac{p}{n}}\right) nx \sinh\left(nxe^{\frac{p}{n}}\right) \right]$$

ve

$$iii) P_n(t^2 e^{pt}; x) = \frac{1}{g(1) \cosh nx} \frac{e^{\frac{p}{n}}}{n^2} \left\{ \cosh\left(nxe^{\frac{p}{n}}\right) \left[g'\left(e^{\frac{p}{n}}\right) + e^{\frac{p}{n}} g''\left(e^{\frac{p}{n}}\right) \right] \right.$$

$$\left. + n^2 x^2 g\left(e^{\frac{p}{n}}\right) e^{\frac{p}{n}} \right] + \sinh\left(nxe^{\frac{p}{n}}\right) \left[2nxe^{\frac{p}{n}} g'\left(e^{\frac{p}{n}}\right) + nx g\left(e^{\frac{p}{n}}\right) \right] \right\}.$$

İspat

i)

Eş. 3.2 ifadesinde verilen operatör tanımından

$$P_n(e^{pt}; x) = \frac{1}{g(1) \cosh(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) e^{p \frac{k}{n}} \quad (3.11)$$

yazılır. Eş. 3.1 ifadesinde verilen

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(x) u^k = g(u) \cosh(ux)$$

eşitliğinde u yerine $e^{\frac{p}{n}}$, x değişkeni yerine nx yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) e^{\frac{pk}{n}} = g\left(e^{\frac{p}{n}}\right) \cosh\left(nxe^{\frac{p}{n}}\right) \quad (3.12)$$

olur. Eş. 3.11 ve Eş. 3.12 den

$$P_n(e^{pt}; x) = \frac{g\left(e^{\frac{p}{n}}\right) \cosh\left(nxe^{\frac{p}{n}}\right)}{g(1) \cosh nx}$$

olur.

ii)

$$P_n(te^{pt}; x) = \frac{1}{g(1) \cosh(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \frac{k}{n} e^{\frac{pk}{n}} \quad (3.13)$$

yazılır. Eş. 3.3 de u yerine $e^{\frac{p}{n}}$, x değişkeni yerine nx yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k(nx) k \left(e^{\frac{p}{n}}\right)^{k-1} = g'\left(e^{\frac{p}{n}}\right) \cosh\left(nxe^{\frac{p}{n}}\right) + nx g\left(e^{\frac{p}{n}}\right) \sinh\left(nxe^{\frac{p}{n}}\right)$$

olur. Bu eşitliğin her iki tarafı $\frac{e^{\frac{p}{n}}}{n}$ ile çarpılırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k(nx) \frac{k}{n} \left(e^{\frac{p}{n}}\right)^k = \frac{e^{\frac{p}{n}}}{n} \left(g'\left(e^{\frac{p}{n}}\right) \cosh\left(nxe^{\frac{p}{n}}\right) + nx g\left(e^{\frac{p}{n}}\right) \sinh\left(nxe^{\frac{p}{n}}\right) \right) \quad (3.14)$$

olur. Eş. 3.13 ve Eş. 3.14 den

$$P_n(te^{pt}; x) = \frac{1}{g(1) \cosh(nx)} \frac{e^{\frac{p}{n}}}{n} \left[g' \left(e^{\frac{p}{n}} \right) \cosh \left(nxe^{\frac{p}{n}} \right) + g \left(e^{\frac{p}{n}} \right) nx \sinh \left(nxe^{\frac{p}{n}} \right) \right]$$

bulunur.

iii)

$$P_n(t^2 e^{pt}; x) = \frac{1}{g(1) \cosh(nx)} \sum_{k=1}^{\infty} p_k(nx) \left(\frac{k}{n} \right)^2 e^{p \frac{k}{n}} \quad (3.15)$$

$$\frac{k^2}{n^2} = \frac{k(k-1)}{n^2} + \frac{k}{n^2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k(x) k^2 u^k = \sum_{k=2}^{\infty} p_k(x) k(k-1) u^k + \sum_{k=1}^{\infty} p_k(x) k u^k \quad (3.16)$$

yazılır. Bu eşitliğin her iki tarafı $\frac{1}{n^2}$ ile çarpılıp u yerine $e^{\frac{p}{n}}$, x değişkeni yerine nx yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k(x) \left(\frac{k}{n} \right)^2 e^{\frac{p_k}{n}} = \sum_{k=2}^{\infty} p_k(nx) \frac{k(k-1)}{n^2} e^{\frac{p_k}{n}} + \sum_{k=1}^{\infty} p_k(nx) \frac{k}{n^2} e^{\frac{p_k}{n}}$$

olur. Eş. 3.3 ve Eş. 3.5 den

$$P_n(t^2 \cdot e^{pt}; x) = \frac{1}{g(1) \cosh nx} \cdot \frac{e^{\frac{p}{n}}}{n^2} \left\{ \cosh \left(nxe^{\frac{p}{n}} \right) \left[g' \left(e^{\frac{p}{n}} \right) + e^{\frac{p}{n}} g'' \left(e^{\frac{p}{n}} \right) + n^2 x^2 g \left(e^{\frac{p}{n}} \right) e^{\frac{p}{n}} \right] \right. \\ \left. + \sinh \left(nxe^{\frac{p}{n}} \right) \left[2nxe^{\frac{p}{n}} g' \left(e^{\frac{p}{n}} \right) + nx g \left(e^{\frac{p}{n}} \right) \right] \right\}$$

elde edilir.

3.2.8. Lemma

$n \in N$ ve $x \in [0, \infty)$ için

$$\begin{aligned}
P_n((t-x)^2 e^{pt}; x) &= \frac{1}{g(1) \cosh nx} \left\{ x^2 g\left(e^{\frac{p}{n}}\right) \cosh\left(nxe^{\frac{p}{n}}\right) \left(e^{\frac{p}{n}} - 1\right)^2 \right. \\
&+ 2x^2 e^{\frac{p}{n}} g\left(e^{\frac{p}{n}}\right) e^{-nxe^{\frac{p}{n}}} + \cosh\left(nxe^{\frac{p}{n}}\right) \left[\frac{1}{n^2} g'\left(e^{\frac{p}{n}}\right) e^{\frac{p}{n}} + \frac{1}{n^2} e^{\frac{2p}{n}} g''\left(e^{\frac{p}{n}}\right) - \frac{2x}{n} e^{\frac{p}{n}} g'\left(e^{\frac{p}{n}}\right) \right] \\
&+ \sinh\left(nxe^{\frac{p}{n}}\right) \left[\frac{2x}{n} e^{\frac{2p}{n}} g'\left(e^{\frac{p}{n}}\right) + \frac{x}{n} e^{\frac{p}{n}} g\left(e^{\frac{p}{n}}\right) \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

dir.

Bu lemmanın ispatı operatörün lineerliğinden açıktır.

3.2.9. Lemma

$p > 0$, $r > p$ ve $n_0 > \frac{p}{\ln r - \ln p}$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı olsun. Her $x \geq 0$ ve $n \geq n_0$ için

$$e^{-rx} P_n((t-x)^2 e^{pt}; x) \leq M_{p,r} \frac{x+1}{n}$$

eşitsizliğini sağlayan p ve r sayılarına bağlı bir pozitif $M_{p,r}$ reel sayısı vardır.

İspat

$n \in N$, $n \neq 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$ olacak şekilde

$$p_n = n \left(e^{\frac{p}{n}} - 1 \right) \quad (3.17)$$

dizisi tanımlansın. Bu durumda $x \geq 0$ için

$$\frac{\cosh\left(nxe^{\frac{p}{n}}\right)}{\cosh nx} = \frac{e^{nxe^{\frac{p}{n}}} + e^{-nxe^{\frac{p}{n}}}}{e^{nx} + e^{-nx}} < \frac{2e^{nxe^{\frac{p}{n}}}}{e^{nx}} = 2e^{x.p_n}, \quad (3.18)$$

$$\frac{\sinh\left(nxe^{\frac{p}{n}}\right)}{\cosh nx} = \frac{e^{nxe^{\frac{p}{n}}} - e^{-nxe^{\frac{p}{n}}}}{e^{nx} + e^{-nx}} < \frac{e^{nxe^{\frac{p}{n}}}}{e^{nx}} = e^{x.p_n}$$

ve

$$\frac{x^2}{\cosh nx} \leq \frac{2}{n^2} \quad (3.19)$$

eşitsizlikleri yazılabilir.

$$p < p_n < pe^{\frac{p}{n}} < pe^p \quad (3.20)$$

ve $n_0 > \frac{p}{\ln r - \ln p}$ olduğundan $n \geq n_0$ için

$$e^{\frac{p}{n_0}} < e^{\ln \frac{r}{p}} = \frac{r}{p} \quad \text{ve} \quad r > pe^{\frac{p}{n_0}} > p_{n_0} > p_n \quad (3.21)$$

olur. 3.2.7. Lemma ve Eş. 3.18 den

$$P_n(e^{pt}; x) \leq \frac{g\left(\frac{p}{n}\right)}{g(1)} 2e^{xp_n}$$

ve

$$\|P_n(e^{pt}; \cdot)\|_r \leq \sup_{x \in [0, \infty)} e^{-rx} \frac{g\left(\frac{p}{n}\right)}{g(1)} 2e^{xp_n} = \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{g\left(\frac{p}{n}\right)}{g(1)} 2e^{x(p_n - r)}$$

elde edilir. 3.2.8. Lemma ve Eş. 3.18 den

$$\begin{aligned} P_n((t-x)^2 e^{pt}; x) &\leq \frac{1}{g(1)} \{x^2 g\left(\frac{p}{n}\right) 2e^{xp_n} + \frac{p_n^2}{n^2} + 2x^2 \frac{g\left(\frac{p}{n}\right)}{\cosh nx} e^{\frac{p}{n} - nx e^{\frac{p}{n}}} \\ &+ 2e^{p_n x} \frac{1}{n^2} g'\left(\frac{p}{n}\right) e^{\frac{p}{n}} + 2e^{p_n x} \frac{1}{n^2} e^{\frac{2p}{n}} g''\left(\frac{p}{n}\right) \\ &+ \frac{2x}{n} e^{p_n x} e^{\frac{2p}{n}} g'\left(\frac{p}{n}\right) + e^{p_n x} \frac{x}{n} e^{\frac{p}{n}} g\left(\frac{p}{n}\right)\} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. g bir analitik fonksiyon ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{a_n}{g(1)} \geq 0$ olduğundan

$$\frac{g\left(\frac{p}{n}\right)}{g(1)} \leq M_1, \quad \frac{g'\left(\frac{p}{n}\right)}{g(1)} \leq M_2, \quad \frac{g''\left(\frac{p}{n}\right)}{g(1)} \leq M_3$$

olacak şekilde M_1 , M_2 ve M_3 pozitif sabitleri bulunabilir.

Eş. 3.19 den

$$\begin{aligned} P_n((t-x)^2 e^{pt}; x) &\leq 2M_1 x^2 \frac{p_n^2}{n^2} e^{p_n x} + 4M_1 \frac{1}{n^2} e^{\frac{p}{n} - nx e^{\frac{p}{n}}} + 2M_2 \frac{1}{n^2} e^{p_n x} e^{\frac{p}{n}} \\ &+ 2M_3 \frac{1}{n^2} e^{p_n x} e^{\frac{2p}{n}} + 2M_2 \frac{x}{n} e^{p_n x} e^{\frac{2p}{n}} + M_1 \frac{x}{n} e^{p_n x} e^{\frac{p}{n}} \end{aligned}$$

olur. $r > 0$ ve $x \geq 0$ için

$$\begin{aligned} e^{-rx} P_n((t-x)^2 e^{pt}; x) &\leq 2M_1 \frac{x^2}{n^2} e^{(p_n-r)x} p_n^2 + 4 \frac{1}{n^2} M_1 e^p e^{-rx} + 2M_2 \frac{1}{n^2} e^{(p_n-r)x} e^p \\ &+ 2M_3 \frac{1}{n^2} e^{2p} e^{(p-r)x} + 2M_2 \frac{x}{n} e^p e^{x(p_n-r)} + M_1 \frac{x}{n} e^p e^{(p_n-r)x} \end{aligned}$$

olur. Son eşitsizlik düzenlenirse

$$\begin{aligned} e^{-rx} P_n((t-x)^2 e^{pt}; x) &\leq \frac{x}{n} e^{x(p_n-r)} \left(2M_1 \frac{x}{n} p_n^2 + 2M_2 e^{2p} + M_1 e^p \right) \\ &+ \frac{2}{n^2} e^{x(p_n-r)} (M_2 e^p + M_3 e^{2p}) + 4 \frac{1}{n^2} M_1 e^{p-rx} \end{aligned}$$

yazılır. Eş. 3.20 de $p < p e^{\frac{p}{n}}$ olduğundan

$$\frac{x}{n} p_n^2 < \frac{x}{n} p^2 e^{\frac{2p}{n}} < x p^2 e^{2p}$$

olup, buradan

$$\begin{aligned} e^{-rx} P_n((t-x)^2 e^{pt}; x) &\leq \frac{x}{n} e^{(p_n-r)x} (2M_1 x p^2 e^{2p} + 2M_2 e^{2p} + M_1 e^p) \\ &+ \frac{2}{n^2} e^{x(p_n-r)} (M_2 e^p + M_3 e^{2p}) + 4 \frac{1}{n^2} M_1 e^p \end{aligned}$$

olur. $n \geq n_0$ için $r - p_n \geq r - p_{n_0} > 0$ olduğundan ve $x \geq 0$ için

$$xe^{-x(r-p_n)} \leq xe^{-x(r-p_{n_0})} \leq \frac{1}{r-p_{n_0}}$$

olup, buradan

$$\begin{aligned} e^{-rx} P_n((t-x)^2 e^{pt}; x) &\leq \frac{1}{n} \frac{1}{r-p_{n_0}} (2M_1 x p^2 e^{2p} + 2M_2 e^{2p} + M_1 e^p) \\ &+ \frac{2}{n^2} (M_2 e^p + M_3 e^{2p}) + 4 \frac{1}{n^2} M_1 e^p \\ &= \frac{x}{n} \frac{2M_1 p^2 e^{2p}}{r-p_{n_0}} + \frac{1}{n} \frac{1}{r-p_{n_0}} (2M_2 e^{2p} + M_1 e^p) + \frac{2}{n^2} (M_2 e^p + M_3 e^{2p} + 2M_1 e^p) \\ &< M_{p,r} \frac{x+1}{n} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $M_{p,r}$ sayısı p ve r sayılarına bağlı bir pozitif sabit sayıdır.

3.2.10. Lemma

$p > 0, r > p$ ve $n_0 > \frac{p}{\ln r - \ln p}$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı ve bir $f \in C_p^*[0, \infty)$ için

$$\|P_n f\|_r \leq M_{p,r} \|f\|_p$$

eşitsizliğini sağlayan p ve r sayılarına bağlı bir pozitif $M_{p,r}$ reel sayısı vardır.

İspat

$x \in [0, \infty)$ için 3.2.7. Lemma ve Eş. 3.18 den $n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} e^{-rx} |P_n(f; x)| &= \frac{e^{-rx}}{\cosh(nx)} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(nx)}{g(1)} f\left(\frac{k}{n}\right) e^{-k\frac{p}{n}} e^{k\frac{p}{n}} \right| \\ &\leq \|f\|_p e^{-rx} P_n(e^{pt}; x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|f\|_p e^{-rx} \frac{1}{g(1) \cosh(nx)} g\left(e^{\frac{p}{n}}\right) \cosh\left(nx e^{\frac{p}{n}}\right) \\
&\leq \|f\|_p e^{-rx} \frac{g\left(e^{\frac{p}{n}}\right)}{g(1)} 2e^{p_n x} \\
&= \|f\|_p \frac{g\left(e^{\frac{p}{n}}\right)}{g(1)} 2e^{(p_n - r)x} \\
&\leq M_{p,r} \|f\|_p
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.3. P_n Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri

$C_p^1[0, \infty) = \{f \in C_p^*[0, \infty): f' \in C_p^*[0, \infty)\}$ fonksiyon uzayını tanımlayalım. $h \geq 0, \delta \geq 0$ ve $f \in C_p^*[0, \infty)$ için $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$ ve süreklilik modülünü

$$\omega(f, C_p; \delta) = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \|\Delta_h f\|_p$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

3.3.1. Teorem

$p > 0, r > p$ ve $n_0 > \frac{p}{\ln r - \ln p}$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı olsun. Her $f \in C_p^1[0, \infty)$ için

$$e^{-rx} |P_n(f; x) - f(x)| \leq M_{p,r}^* \|f'\|_p \sqrt{\frac{x+1}{n}}$$

eşitsizliğini sağlayan p ve r sayılarına bağlı bir pozitif $M_{p,r}^*$ reel sayısı vardır.

İspat

$x \in [0, \infty)$ olsun. Her $f \in C_p^1[0, \infty)$ ve $t \in [0, \infty)$ için

$$f(t) - f(x) = \int_x^t f'(u) du$$

yazılır. Eşitliğin her iki yanına P_n operatörleri uygulandığında $P_n(1; x) = 1$ olduğundan

$$P_n(f; x) - f(x) = P_n\left(\int_x^t f'(u) du; x\right)$$

olup, $r > p$ için

$$e^{-rx}|P_n(f; x) - f(x)| \leq e^{-rx} P_n\left(\int_x^t f'(u) du; x\right)$$

eşitsizliği yazılabilir. Fakat

$$\left|\int_x^t f'(u) du\right| \leq \|f'\|_p \left|\int_x^t e^{pu} du\right| = \|f'\|_p |e^{pt} - e^{px}| \leq \|f'\|_p (e^{pt} + e^{px}) |t - x|$$

olduğundan

$$e^{-rx}|P_n(f; x) - f(x)| \leq \|f'\|_p e^{-rx} [P_n(|t - x|e^{pt}; x) + e^{px} P_n(|t - x|; x)] \quad (3.22)$$

olur.

3.2.6. Lemma i) ve Cauchy eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} P_n(|t - x|; x) &= \frac{1}{g(1)\cosh nx} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \left| \frac{k}{n} - x \right| \\ &\leq \frac{1}{g(1)\cosh nx} \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \left(\frac{k}{n} - x \right)^2} \\ &= \sqrt{P_n((t - x)^2; x)} \leq \sqrt{\frac{3x}{n} + \frac{1}{n^2} M} \end{aligned}$$

dir. Benzer olarak

$$e^{-rx}P_n(|t-x|e^{pt};x) = \frac{e^{-rx}}{g(1)\cosh nx} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx) \left| \frac{k}{n} - x \right| e^{p\frac{k}{n}}$$

$$\leq \sqrt{e^{-rx}P_n(e^{pt};x)} \sqrt{e^{-rx}P_n((t-x)^2e^{pt};x)}$$

dir. 3.2.7. Lemma ve Eş. 3.18 dan $n \geq n_0$ için

$$e^{-rx}P_n(e^{pt};x) = e^{-rx} \frac{g\left(e^{\frac{p}{n}}\right)}{g(1)} \cdot \frac{\cosh\left(nxe^{\frac{p}{n}}\right)}{\cosh nx} \leq \frac{g\left(e^{\frac{p}{n}}\right)}{g(1)} 2e^{x(p_n-r)} < 2 \frac{g\left(e^{\frac{p}{n}}\right)}{g(1)}$$

elde edilir. 3.2.9. Lemma kullanılarak

$$e^{-rx}P_n(|t-x|e^{pt};x) \leq \sqrt{2 \frac{g\left(e^{\frac{p}{n}}\right)}{g(1)}} \sqrt{M_{p,r} \frac{x+1}{n}}$$

olur. Eş.3.22 ya tekrar dönersek $r > p > 0$ ve g sınırlı fonksiyonu için

$$e^{-rx}|P_n(f;x) - f(x)| \leq \|f'\|_p \sqrt{2 \frac{g\left(e^{\frac{p}{n}}\right)}{g(1)}} \sqrt{M_{p,r} \frac{x+1}{n}} + \|f'\|_p \sqrt{\frac{3x}{n} + \frac{1}{n^2}} M . e^{x(p-r)}$$

$$\leq \|f'\|_p M_{p,r}^* \sqrt{\frac{x+1}{n}}$$

eşitsizliği elde edilir

3.3.2. Teorem

$r > p > 0$ ve $n_0 > \frac{p}{\ln r - \ln p}$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı olsun. Her $f \in C_p^1[0, \infty)$ ve $x \in [0, \infty)$ için

$$e^{-rx}|P_n(f;x) - f(x)| \leq A_{p,r}\omega\left(f, C_p; \sqrt{\frac{x+1}{n}}\right)$$

eşitsizliğini sağlayan p ve r sayılarına bağlı bir pozitif $A_{p,r}$ reel sayısı vardır.

İspat

$f \in C_p^*[0, \infty)$ yi Steklov anlamında kullanacağız.

$$f_h(x) = \frac{1}{h} \int_0^h f(x+u)du, \quad x \geq 0, h > 0$$

dir. $f_h \in C_p^1[0, \infty)$,

$$\|f - f_h\|_p \leq \omega(f, C_p; h)$$

ve

$$\|f'_h\|_p \leq \frac{1}{h} \omega(f, C_p; h)$$

olduğundan her $n \in \mathbb{N}, x \geq 0$ ve her $h > 0$ için

$$e^{-rx}|P_n(f; x) - f(x)| \leq e^{-rx}\{|P_n(f - f_h; x)| + |P_n(f_h; x) - f_h(x)| + |f_h(x) - f(x)|\}$$

dir. 3.2.10. Lemmadan

$$e^{-rx}|P_n(f; x) - f(x)| \leq M_{p,r}\|f - f_h\|_p \leq M_{p,r}\omega(f, C_p; h)$$

elde edilir.

f_h fonksiyonu için 3.3.1. Teorem kullanılırsa

$$e^{-rx}|P_n(f_h; x) - f_h(x)| \leq \|f'_h\|_p M_{p,r}^* \sqrt{\frac{x+1}{n}} \leq M_{p,r}^* \frac{1}{h} \omega(f, C_p; h) \sqrt{\frac{x+1}{n}}$$

olur. Buradan

$$e^{-rx}|P_n(f; x) - f(x)| \leq M_{p,r}\omega(f, C_p; h) + M_{p,r}^* \frac{1}{h} \omega(f, C_p; h) \sqrt{\frac{x+1}{n}}$$

$$+w_r(x)|f_h(x) - f(x)|$$

$$\leq \omega(f, C_p; h)(M_{p,r} + 1) + M_{p,r}^* \cdot \frac{1}{h} \omega(f, C_p; h) \sqrt{\frac{x+1}{n}}$$

$$= \omega(f, C_p; h) \left(M_{p,r} + 1 + M_{p,r}^* \cdot \frac{1}{h} \sqrt{\frac{x+1}{n}} \right)$$

olur.

3.3.3. Sonuç

Her $x \geq 0$ için ve $f \in C_p^*[0, \infty)$ için 3.3.2. Teoremden

$$h = \sqrt{\frac{x+1}{n}}$$

olacak şekilde tanımlanırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(f; x) = f(x)$$

limiti gerçekleşir ve $[0, a]$ kapalı aralığında düzgün yakınsak olur.

4. (P_n) OPERATÖRLER DİZİSİ İÇİN VORONOVSKAJA TİP TEOREM

Bu kısımda (P_n) operatörler dizisi için Voronovskaja tip teorem incelenecektir.

4.1.1. Lemma

Her $x \in [0, \infty)$ için

$$i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nP_n(t - x; x) = \frac{g'(1)}{g(1)}$$

ve

$$ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nP_n((t - x)^2; x) = x$$

dir.

İspat

i)

$$1 - \tanh(nx) = \frac{2}{(e^{2nx} + 1)}$$

olduğundan 3.2.4. Lemmadan

$$nP_n(t - x; x) = \frac{-2nx}{e^{2nx} + 1} + \frac{g'(1)}{g(1)}$$

dir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nP_n(t - x; x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-2nx}{e^{2nx} + 1} + \frac{g'(1)}{g(1)} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-2nx}{e^{2nx} + 1} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{g'(1)}{g(1)} \right) = \frac{g'(1)}{g(1)}$$

olur.

ii)

3.2.4. Lemmadan

$$nP_n((t-x)^2; x) = \frac{2nx}{e^{2nx} + 1} \left[2x^2 - \frac{x}{n} \left(1 + 2 \frac{g'(1)}{g(1)} \right) \right] + x + \frac{1}{n} \cdot \frac{g''(1) + g'(1)}{g(1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nP_n((t-x)^2; x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2nx}{e^{2nx} + 1} \left[2x^2 - \frac{x}{n} \left(1 + 2 \frac{g'(1)}{g(1)} \right) \right] \right)$$

$$+ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{n} \cdot \frac{g''(1) + g'(1)}{g(1)} \right)$$

$$= x$$

bulunur.

4.1.2. Lemma

Her $x \in [0, \infty)$ ve $\varphi(\cdot; x) \in C_p[0, \infty)$ fonksiyonu için

$$\lim_{t \rightarrow x} \varphi(t; x) = 0$$

olsun. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\varphi(t; x); x) = 0$$

dir.

İspat

$r > p > 0$ olsun. Her $x \geq 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$e^{-rx} P_n(\varphi(t; x); x) = \frac{e^{-rx}}{g(1) \cosh(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \varphi\left(\frac{k}{n}; x\right) \quad (4.1)$$

eşitliği yazılabilir.

$\lim_{t \rightarrow x} \varphi(t; x) = 0$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta(\varepsilon)$ pozitif sayısı bulunabilir ki

$|t - x| < \delta$ olduğunda

$$|\varphi(t; x)| < \varepsilon/2 \quad (4.2)$$

olur. Ayrıca burada $M_2 \equiv M_2(p)$ pozitif reel sayısı vardır ki her $t \geq 0$ için

$$e^{-pt} |\varphi(t; x)| \leq M_2 \quad (4.3)$$

eşitsizliği sağlanır.

Eş. 4.1 eşitliğinden

$$\begin{aligned} e^{-rx} P_n(\varphi(t; x); x) &\leq \frac{e^{-rx}}{g(1) \cosh(nx)} \sum_{|k/n-x| < \delta} P_k((nx)) \left| \varphi\left(\frac{k}{n}; x\right) \right| \\ &+ \frac{e^{-rx}}{g(1) \cosh(nx)} \sum_{|k/n-x| \geq \delta} P_k((nx)) \left| \varphi\left(\frac{k}{n}; x\right) \right| := S_1 + S_2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

eşitsizliği yazılabilir. Eş.4.2 ve Eş 4.3 den

$$S_1 < \frac{\varepsilon}{2} \frac{e^{-rx}}{g(1) \cosh(nx)} \sum_{|k/n-x| < \delta} P_k(nx) < \frac{\varepsilon}{2} e^{-rx} P_n(1, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.5)$$

ve

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{e^{-rx}}{g(1) \cosh(nx)} \sum_{|k/n-x| \geq \delta} P_k((nx)) \left| \varphi\left(\frac{k}{n}; x\right) \right| e^{-pk/n} e^{pk/n} \\ &\leq M_2 \frac{e^{-rx}}{g(1) \cosh(nx)} \sum_{|k/n-x| \geq \delta} P_k((nx)) e^{pk/n} \end{aligned} \quad (4.6)$$

olur.

Fakat $\left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta$ ise buradan $1 \leq \frac{1}{\delta^2} \left(\frac{k}{n} - x \right)^2$ olup 3.2.10. Lemmadan $n_0 > p/(\ln r - \ln p)$ olmak üzere $n \geq n_0$, için

$$\begin{aligned} S_2 &\leq M_2 \frac{1}{\delta^2} \frac{e^{-rx}}{g(1) \cosh(nx)} \sum_{|k/n-x| \geq \delta} P_k(nx) \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 e^{pk/n} \\ &\leq M_2 \frac{e^{-rx}}{\delta^2} P_n((t-x)^2 e^{pt}; x) \leq M_2 \frac{1}{\delta^2} M_{p,r} \frac{x+1}{n} \end{aligned} \quad (4.7)$$

eşitsizliği yazılır. Eş. 4.4- Eş. 4.7 eşitsizlikleri göz önüne alınarak x, δ, ε sayıları için öyle bir $n_0 = n_0(x, \varepsilon, \delta, M_2, p, r)$ doğal sayısı bulunabilir ki $n \geq n_0$ için $S_2 < \varepsilon/2$ olur.

Dolayısıyla her $n \geq n_0$ için

$$e^{-rx} P_n(\varphi(t; x); x) < \varepsilon$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-rx} P_n(\varphi(t; x); x) = 0$$

olup

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\varphi(t; x); x) = 0$$

limiti gerçekleşir.

4.1.3. Teorem

Her $f \in C_p^2[0, \infty) = \{f \in C_p^*[0, \infty) : f', f'' \in C_p^*[0, \infty), p > 0\}$ ve her $x \in [0, \infty)$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\{P_n(f; x) - f(x)\} = \frac{x}{2} f''(x) + f'(x) \frac{g'(1)}{g(1)}$$

limiti gerçekleşir.

İspat

$f \in C_p^2[0, \infty)$ olsun. $f(t)$ fonksiyonunun $x \in [0, \infty)$ noktasında Taylor formülü

$$f(t) = f(x) + (t-x)f'(x) + \frac{1}{2}(t-x)^2f''(x) + g(t; x)(t-x)^2 \quad (4.8)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $g(t; x)$ kalan terimi Peano formunda olup, $g(\cdot; x) \in C_p^*[0, \infty)$ ve $\lim_{t \rightarrow x} g(t; x) = 0$ dır.

Eş. 4.8 eşitliğinin her iki tarafına P_n operatörü uygulanırsa $P_n(e_0; x) = 1$ olduğu için

$$\begin{aligned} P_n(f; x) - f(x) &= f'(x)P_n(t-x; x) + \frac{1}{2}f''(x)P_n((t-x)^2; x) \\ &+ P_n(g(t; x)(t-x)^2; x) \end{aligned} \quad (4.9)$$

eşitliği yazılır.

Cauchy eşitsizliğinden

$$P_n(g(t; x)(t-x)^2; x) \leq \{P_n(g^2(t; x); x)\}^{1/2} \{P_n((t-x)^4; x)\}^{1/2}$$

yazılır.

4.1.2. Lemmanın koşullarını sağlayan $\varphi(t; x) = g^2(t; x)$, $t \geq 0$ fonksiyonu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(g^2(t; x); x) = 0$$

bulunur. Buradan 3.2.6. Lemma ii) den

$$nP_n(g(t; x)(t-x)^2; x) \leq \{P_n(g^2(t; x); x)\}^{1/2} \left(n^2 M_1(x) \frac{1}{n^2} \right)^{1/2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nP_n(g(t; x)(t-x)^2; x) = 0 \quad (4.10)$$

dır. Eş. 4.9 ve Eş. 4.10 sonuçları ile 4.1.1. Lemma kullanılarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\{P_n(f; x) - f(x)\} = f'(x) \frac{g'(1)}{g(1)} + \frac{x}{2} f''(x)$$

sonucu elde edilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

$[0, \infty)$ aralığı üzerinde tanımlı üstel büyüyen sürekli fonksiyonlara yaklaşmak için $|z| < R$, $R > 1$, diskinde $g(1) \neq 0$ şartını sağlayan bir

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

analitik fonksiyonu ile $g(u)e^{ux}$ doğurucu fonksiyonun ürettiği

$$g(u)e^{ux} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x) u^k$$

eşitliğini sağlayan $p_k(x)$ polinomları yardımıyla

$$P_n(f; x) = \frac{1}{g(1) \cosh(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) f\left(\frac{k}{n}\right)$$

tanımlanan bir (P_n) lineer pozitif operatörler dizisinin pozitifliği, varlığı ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Bu operatörlerin yaklaşım hızı süreklilik modülü yardımıyla

$$e^{-rx} |P_n(f; x) - f(x)| \leq A_{p,r} \omega\left(f, C_p; \sqrt{\frac{x+1}{n}}\right)$$

eşitsizliğini gerçeklemektedir.

Voronovskaja tip sonuç ise her $f \in C_p^2[0, \infty)$ ve $x \in [0, \infty)$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\{P_n(f; x) - f(x)\} = \frac{x}{2} f''(x) + f'(x) \frac{g'(1)}{g(1)}$$

biçimindedir [14].

Bu operatörlerin parametrik genelleştirilmeleri çalışılabilir.

KAYNAKLAR

1. Weierstrass, K. (1885). Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen reeller Argumente (Third edition). Berlin: *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 633-639, 789-805.
2. Bernstein, S.N. (1912). Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. *Mathematical Communications*, 2(13) 1-2.
3. Bohmann, H. (1951). On approximation of continuous and analytic functions. *Arkiv Für Mathematik*, 2(3), 43-56.
4. Korovkin, P. P. (1953). On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. *Doklady Akademii Nauk*, 90, 961-964.
5. İçöz G. (2008). Doğurucu fonksiyonlar içeren lineer pozitif operatörlerin yaklaşım özellikleri. Ankara, *Ankara Üniversitesi*.
6. Gadjiev, A. D. (1976). On Korovkin Type Theorems. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 20(5), 995-998.
7. Gadjiev, A. D. (1974). The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets, and theorems analogous to that of P. P. Korovkin. *Doklady Akademii Nauk*, 218(5), 1001-1004.
8. Jakimovski, A., Leviatan D. (1969). Generalized Szász operators for the approximation in the infinite interval, *Mathematica (Cluj)*, 34: 1-103.
9. Mirakjan, G.M. (1941). "Approximation of Continuous Functions with the Aid of Polynomials", *Doklady Akademii Nauk*, 31: 201-205.
10. Favard, J. (1944). "Sur les Multiplicateurs d'interpolation", *Journal De Mathematiques Pures Et Appliquees*, 23(9): 219-247.
11. Szász, O. (1950). "Generalization of S. Bernstein's Polynomials to the Infinite Interval", *Journal Of Research Of The National Bureau Of Standards*, 45: 239-245.
12. Ciupa A. (2002). A positive linear operator for approximation in exponential weight spaces, *Mathematical Analysis and Approximation Theory, the 5th Romanian-German Seminar on Approximation Theory and Its Applications (RoGer, 2002)*, Burg, Sibiu, pp. 85–96.
13. Ciupa A. (2003). Approximation by a generalized Szász type operator. *Journal of Computational Analysis and Applications* 5(4), 413–424.
14. Ciupa A. (2006). A voronovskaya-type theorem for a positive linear operator. *Hindawi Publishing Corporation*, 1-7.

15. M. Le'sniewicz and L. Rempulska. (1997). Approximation by some operators of the Szasz-irakjan type in exponential weight spaces. *Glasnik Matematički. Serija III*, 32(52), 57–69.
16. Balcı, M. (2009). Matematik Analiz 2. Ankara, *Balcı Yayınları*, 6. Basım.
17. Hacısalıhoğlu, H.H., ve Hacıyev, A. (1995). Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı (Birinci Baskı). Ankara, *Ankara Üniversitesi Basımevi*, 1-100.
18. Korovkin, P. P.(1960). Linear Operators and Approximation Theory. *Hindustan Publishing Corporation*, (İndia), Delhi, 1-66.
19. Altomare, F. and Campiti, M. (1994). Korovkin Type Approximation Theory and Its Applications. *Walter de Gruyter*, Berlin-New York, 195-352.
20. Gadjiev, A. D. (1976). Theorems of the type of P.P. Korovkin type theorems. *Math. Zametki* 20 (5): 781-786 English Translated in Math. Notes 20 (5-6): 996-998.
21. Yılmaz, B.(2014). Some Properties of Appell Polynomials, Gazimağusa. North Cyprus, *Eastern Mediterranean University*.
22. Başkan, T. (2010). Kompleks Fonksiyonlar Teorisi. Bursa: *Nobel Yayıncılık*, 27-86.
23. Argün, Z. ve Uyar, A. (2015). Tek Değişkenli Analiz. Ankara, *Gazi Kitabevi*.
24. Altomare, F. and Campiti, M. (1993). Korovkin-type approximation theory and its applications (Third edition). *Walter de Gruyter*, New York, 627.
25. B. Wood, Generalized (1969). Szasz operators for the approximation in complex domain, *SiAM Journal On Applied Mathematics*, 17(4), 790-801.
26. Tanberkan H. (2013). Lineer pozitif operatörler ve süreklilik modülleri. Ankara, *Ankara Üniversitesi*.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : DENİZ, Ali Fuat
 Uyruğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 20.07.1981, Yerköy
 Medeni hali : Evli
 Telefon : 0 (312) 584 24 14
 Faks :
 e-mail : afdeniz@gmail.com



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik A.B.D	Devam Ediyor
Yüksek lisans	Başkent Üniversitesi / Matematik Öğr.	2006
Lisans	Selçuk Üniversitesi / Matematik	2003
Lise	Yerköy Y.D.Ağ. Lisesi	1999

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2008-Halen	Ziraat Bankası	Memur

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

-

Hobiler

Saz, Yürüyüş, Hat



GAZİ GELECEKTİR..