

**HOMOJEN OLMAYAN KATI ÖZLÜ BİR ORTAMDA
SAÇILMA PROBLEMİNİN
TEKLİĞİ**

İsmail SULAN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**NİSAN 2007
ANKARA**

İsmail SULAN tarafından hazırlanan HOMOJEN OLMAYAN KATI ÖZLÜ
BİR ORTAMDA SAÇILMA PROBLEMİNİN TEKLİĞİ adlı bu tezin Yüksek
Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Adil MISIR
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği/oy çokluğu ile MATEMATİK Anabilim
Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: : Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR

Üye : Prof. Dr. Baki İrfan YAŞAR

Üye : Doç. Dr. Ogün DOĞRU

Üye : Yrd. Doç. Dr. Meryem KAYA

Üye : Yrd. Doç. Dr. Adil MISIR

Tarih : 09 / 04 / 2007

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

İsmail SULAN

**HOMOJEN OLMAYAN KATI ÖZLÜ BİR ORTAMDA SAÇILMA
PROBLEMİNİN TEKLİĞİ
(Yüksek Lisans Tezi)**

İsmail SULAN

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Nisan 2007

ÖZET

Bu tez çalışmasında, homojen olmayan bir ortamda akustik geçiş problemine ve bir katı öze sahip homojen olmayan bir ortamda akustik geçiş problemine ait teklik teoremleri incelenmiştir.

Bilim Kodu	: 204.1.138
Anahtar Kelimeler	: Saçılma problemi, akustik dalgalar, far-field pattern
Sayfa Adedi	: 47
Tez Yöneticisi	: Yrd. Doç. Dr. Adil MISIR

**UNIQUENESS OF SCATTERING PROBLEM IN AN INHOMOGENEOUS
MEDIUM WITH RIGID CORE**

(M.Sc. Thesis)

İsmail SULAN

**GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

April 2007

ABSTRACT

In this thesis study, the uniqueness theorems are studied about acoustic transmission problem in an inhomogeneous medium and acoustic transmission problem in an inhomogeneous medium with a rigid core.

Science Code : 204.1.138
Key Words : scattering problem, acoustic waves, far-field pattern
Page Number : 47
Adviser : Asist. Prof. Dr. Adil MISIR

TEŞEKKÜR

Bu çalışmalarımın her aşamasında yakın ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren ve hiçbir yardımını esirgemeyen değerli hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Adil MISIR'a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmalarım süresince her zaman yanımda olan, bana manevi destek veren aileme de teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
3. HOMOJEN OLMAYAN ORTAMDA SAÇILMA PROBLEMİ.....	9
3.1. Problemin Ortaya Konması.....	9
3.2. Çözümün Tekliği.....	16
4. KATI ÖZLÜ GEÇİRGEN ORTAM İÇİN SAÇILMA PROBLEMİ	34
4.1. Problemin Ortaya Konması.....	34
4.2. Çözümün Tekliği.....	36
KAYNAKLAR	45
ÖZGEÇMİŞ	47

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
∂D	D bölgesinin sınırı
$\bar{D}$	D bölgesinin (kümesinin) kapanışı
$\bar{Z}$	Z kompleks sayısının eşleniği
$\mathbb{R}^n$	n boyutlu Euclid uzayı
$C^k(D)$	D de tanımlı olan k-inci mertebeye kadar kısmi türevleri var ve sürekli reel veya kompleks değerli fonksiyonların normlu uzayı
o	Landau sembolü
Im	Bir kompleks sayısının imajiner kısmı
Δ	Laplace operatörü
∇	Gradient operatörü
H	Hilbert uzayı
$\text{Sup}(A)$	A kümesinin supremumu
$Y^\perp$	Y kümesinin diki
$\partial^*(D)$	D bölgesinin indirgenmiş sınırı
$\ell_n(D)$	D kümesinin Lebesgue ölçüsü
$[Y]$	Y kümesini içeren tüm alt uzayların kesişimi
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	İç çarpım operatörü

1. GİRİŞ

Ters saçılım problemi matematiğin yeni inceleme alanlarından sayılmaktadır. Bu inceleme alanının temelleri 1960'ların ortalarında Rus matematikçi Tikhanov tarafından atılmıştır. 2.Dünya Savaşı'nda radar ve sonarın başarılı bir şekilde kullanılması bilim adamlarında daha çok obje tanımlayabilme arzusu uyandırdı. Bu olay onların ters saçılma problemi üzerine eğilmelerinde büyük etki yaptı.

Yalnız bu problemin anlaşılması uzun zaman aldı. Bilgisayarların işlem kapasitesinin sınırlı olması bu alandaki fiziksel kazancın da sınırlı olmasına neden oldu.

Tikhanov ve ABD'den Keith Miller tarafından yapılan çalışmalar, bilgisayarlı hesaplama imkanlarının da yardımıyla ters saçılım problemin hızlı bir şekilde gelişmesine neden oldu. Daha sonra ters saçılım probleminin çözümü için Colton ve Kirsch tarafından şu anda lineer sampling metod olarak bilinen bir yöntem kuruldu. Colton, Piana, Potthast ve Kirsch tarafından bu metod kullanılır hale getirildi.

Bu yöntemde önce D bölgesi, ızgara şeklinde bölünmüş karelerin içine alındı. Daha sonra bu kareler üzerinde seçilen bir z noktası bölgenin sınırına yaklaştırılarak noktanın yeri tespit edildi. Bu şekilde D nin sınırı tespit edilmeye çalışıldı.

Son yıllarda süper bilgisayarlarında yardımıyla ters saçılım problemi, tanımlanamayan objelerin modellenmesinde büyük fayda sağladı. Özellikle günümüzde teleskopla görmenin mümkün olmadığı bazı gök cisimlerinin şeklinin bulunması, tıpta ultrason ve tomografi, askeri radar sistemleri, define ve mayın taraması gibi pek çok konu ters saçılım probleminin uygulama alanına girmektedir [1].

Ülkemizde saçılım, ters saçılım ve geçiş problemleri üzerinde çalışan isimlerin başında İbrahim Ethem ANAR, Mithat İDEMEN ve İbrahim AKDUMAN gibi isimler gelmektedir. Söz konusu problemlere ait temel bilgileri ve temel sonuçları İbrahim Ethem ANAR 2005 yılında yazmış olduğu Kısmi Diferensiyel Denklemler kitabında toplamıştır. Bu tez çalışmamda karşıma çıkan saçılma, ters saçılma ve geçiş problemlerine ait bir çok temel kavramı ve bunların detaylarını [2] den faydalanarak öğrendiğimi belirtmek isterim.

Bu tez çalışması 4 bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde bu tez çalışmasında kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde ters saçılma problemi ve far-field pattern fonksiyonu tanımlanarak bölgenin sınırının far-field pattern ile tek olarak belli olduğu incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ise geçirgen olmayan katı öze sahip bir bölge için geçiş problemi tanımlanmıştır. Daha sonra bu bölgede tanımlanan iki katı özün çakışık olduğu gösterilerek problemin tekliği incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde bazı temel kavramlar ile saçılma teorisinin bazı önemli teoremleri verilecektir.

2.1. Tanım

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ve $p \in \mathbb{R}$ ($p \geq 1$) olmak üzere; Ω da

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$$

şeklinde tanımlı ölçülebilir $u(x)$ fonksiyonlarının uzayı $L_p(\Omega)$ ile gösterilir.

2.2. Tanım

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ kümesi üzerinde tanımlı bir u fonksiyonu için,

$$K = \{x \mid u(x) \neq 0\}$$

kümesi verilsin.

$\bar{K} \subset \Omega$ ise $\bar{K}$ ya u nun Ω daki kompakt desteği denir.

2.3. Tanım

Kompakt destekleri $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ te olan ve Ω da her mertebeden türevlenebilen fonksiyonların kümesi $C_0^\infty(\Omega)$ ile gösterilir.

2.4. Tanım

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ olsun. $1 \leq p < \infty$ ve $k \in \mathbb{Z}$ ($k > 0$) olmak üzere k ve daha küçük mertebeden türevleri $L_p(\Omega)$ da olan fonksiyonların uzayı $W^{k,p}(\Omega)$ ile gösterilir.

Özel olarak ,

$$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$$

şeklinde gösterilir.

2.5. Tanım

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ olmak üzere $C_0^\infty(\Omega)$ nın $W^{k,p}(\Omega)$ daki kapanışı $W_0^{k,p}(\Omega)$ ile gösterilir.

Özel olarak,

$$W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$$

şeklinde gösterilir.

2.6. Tanım

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ve $u(x)$, Ω da ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere;

$$L_{2_{\text{loc}}}(\Omega) = \left\{ u \in \Omega \mid \int_K |u(x)|^2 < \infty, \forall K \subset \Omega \right\}$$

şeklinde tanımlıdır.

2.7. Tanım

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ olmak üzere; iki veya daha düşük mertebeden türevleri $L_{2_{loc}}(\Omega)$ uzayında bulunan fonksiyonların uzayı $H_{loc}^2(\Omega)$ ile gösterilir.

2.8. Tanım

$$F: C_0^\infty \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(\phi) = \int_{\Omega} f \phi \, dx$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona, f fonksiyonuna karşılık gelen dağılım denir.

2.9. Tanım

Bir $A \subset E$ kümesinin Lebesgue dış ölçüsü

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_k p_k} \sum_k m(p_k)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada (p_k) $\mathbb{R}^n$ de açık aralıklar dizisini göstermektedir.

$A \subset E$ kümesinin Lebesgue iç ölçüsü

$$\mu_*(A) = 1 - \mu^*(E - A)$$

şeklinde tanımlıdır ve

$$\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$$

dır.

Eğer,

$$\mu_*(A) = \mu^*(A)$$

ise A ya Lebesgue ölçülebilirdir denir. O zaman $\mu_*(A)$ veya $\mu^*(A)$ ya da A nın Lebesgue ölçüsü denir.

2.10. Tanım [3]

f , Ω üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in \Omega$ için

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna Lipschitz şartını sağlıyor denir.

2.11. Tanım [3]

Eğer f fonksiyonu her $x_0 \in \Omega$ için m defa sürekli diferansiyellenebilir ise f ye $C^m(\Omega)$ sınıfındandır denir. Eğer f , Ω Lipschitz şartını sağlıyor ise Ω ya Lipschitzyandır denir.

2.12. Tanım [4]

$n \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ ve d de $\mathbb{R}^n$ nin bilinen metriği olsun. $|A|$ ile A kümesinin çapını gösterelim. Yani;

$$|A| = \sup \{d(x,y): x,y \in A\}$$

olsun.

Eğer $X \subseteq \mathbb{R}^n$ verildiğinde her bir $i \in \mathbb{N}$ için

$$0 < |A_i| \leq \delta$$

olduğunda

$$X \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

olacak şekilde $\{A_i: i \in \mathbb{N}\}$ kümelerinin sayılabilir bir koleksiyonu varsa o zaman $\{A_i: i \in \mathbb{N}\}$ kümesine X in bir δ - örtüsüdür denir

2.13. Tanım [4]

$n \in \mathbb{N}$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $s \geq 0$ ve $\delta > 0$ için X kümesinin s - boyutlu Hausdorff ölçüsü $D^s(X)$ ile gösterilir ve

$$D^s(X) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} |A_i|^s : \{A_i\}, X \text{ in bir } \delta\text{-örtüsü} \right\}$$

olmak üzere

$$D^s(X) = \lim_{\delta \rightarrow 0} D^s_\delta(X)$$

şeklinde tanımlıdır.

2.14. Tanım

Bir (X,d) metrik uzayının sayılabilir yoğun bir alt uzayı varsa bu uzaya ayrılabilir uzay denir.

2.1. Teorem

Bir H Hilbert uzayının boş olmayan bir alt kümesi Y olsun. $[Y]$ uzayının H içinde yoğun olması için gerek ve yeter koşul,

$$Y^\perp = \{x \in H : x \perp Y\} = \{0\}$$

olmasıdır.

2.2. Teorem (Holmgren Teklik Teoremi) [5]

$u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ fonksiyonu D bölgesinin dışında Helmholtz denkleminin bir çözümü olsun, öyle ki u fonksiyonu, ∂D nin yüzey elementi üzerinde sıfır Cauchy verisine sahip olsun. Bu durumda u özdeş olarak sıfır fonksiyonudur.

3. HOMOGEN OLMAYAN ORTAMDA TERS SAÇILMA PROBLEMİ

Bu bölümde homogen olmayan bir ortamda saçılma ve ters saçılma problemi ile far-field pattern fonksiyonu tanımlanarak bölgenin sınırının far-field pattern fonksiyonu ile tek olarak belli olduğu incelenmiştir.

3.1. Problemin Ortaya Konması

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ geçirgen bir bölge ve $\partial\Omega$, C^2 sınıfından olsun.

- ρ_Ω ile Ω bölgesinin yoğunluk fonksiyonunu,
- c_Ω ile Ω bölgesindeki ses dalgasının hız fonksiyonunu,
- ρ ile Ω bölgesinin dışında kalan bölgenin yoğunluğunu,
- c ile $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ daki ses dalgasının hızını,
- k ile $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ daki dalga sayısını,
- k_0 ile Ω daki dalga sayısı fonksiyonunu,
- u^i ile başlangıç dalga (olay dalga, gelen dalga) fonksiyonunu,
- u^s ile saçılan dalga fonksiyonunu,
- v ile kırılmaya uğrayarak Ω bölgesine geçen dalga fonksiyonunu,
- ν ile $\partial\Omega$ yüzeyinin birim dış normalini,
- $\vec{d}$ ile gelen dalganın doğrultu vektörünü gösterelim.

$x \in \mathbb{R}^3$ kaynağına sahip u^i başlangıç dalgası,

$$\lambda = \frac{\rho}{\rho_\Omega} \neq 1$$

olmak üzere ρ_Ω yoğunluklu Ω bölgesine girerken kırılmaya uğrayarak, v dalgasını ve saçılmaya uğrayarak u^s dalgasını oluşturur.

Buna göre;

$$u(x) = u^i(x) + u^s(x); \quad \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \text{ da} \quad (3.1)$$

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad ; \quad \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \text{ da} \quad (3.2)$$

$$u = 0; \quad \partial \Omega \text{ da} \quad (3.3)$$

$$\lim_{|x|=r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - i k u^s \right) = 0 \quad (3.4)$$

şartlarını sağlayan u dalga fonksiyonunu bulma problemine saçılma problemi denir.

Burada özel olarak dalga sayısı $k > 0$ ve $|\vec{d}| = 1$ olmak üzere

$$u^i(x) = e^{ik\vec{x} \cdot \vec{d}}$$

şeklinde tanımlıdır.

Eş.3.1 u^i ve u^s nin super pozisyonu,

Eş.3.2 Helmholtz denklemi,

Eş.3.4 ise Sommerfeld yayılma şartı veya radyasyon yayılma şartı olarak bilinmektedir.

$$u^i(x) = e^{ik\vec{x} \cdot \vec{d}}$$

başlangıç dalga fonksiyonunun birinci ve ikinci basamaktan kısmi türevlerini alırsak

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \text{ ve}$$

$$\vec{d} = (d_1, d_2, d_3) \text{ için}$$

$$u^i(x) = u^{ik(x_1 d_1 + x_2 d_2 + x_3 d_3)}$$

olup,

$$\frac{\partial u^i}{\partial x_1} = i k d_1 \cdot e^{ik \vec{x} \cdot \vec{d}}$$

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial x_1^2} = -k^2 d_1^2 \cdot e^{ik \vec{x} \cdot \vec{d}}$$

bulunur.

Benzer şekilde

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial x_2^2} = -k^2 d_2^2 \cdot e^{ik \vec{x} \cdot \vec{d}}$$

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial x_3^2} = -k^2 d_3^2 \cdot e^{ik \vec{x} \cdot \vec{d}}$$

olur.

Bunları Helmholtz denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \Delta u^i + k^2 u^i &= -k^2 (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2) e^{ik \vec{x} \cdot \vec{d}} + k^2 u^i \\ &= -k^2 |\vec{d}|^2 u^i + k^2 u^i \\ &= -k^2 u^i + k^2 u^i = 0 \end{aligned}$$

olur.

Buna göre u^i başlangıç dalga fonksiyonu Helmholtz denklemini sağlar.
Eş.3.2 de

$$u = u^i + u^s$$

yazarsak.

$$\begin{aligned} \Delta(u^i + u^s) + k^2(u^i + u^s) &= 0 \\ \Rightarrow \Delta u^i + \Delta u^s + k^2 u^i + k^2 u^s &= 0 \text{ (Laplace operatörünün lineerlik özelliği)} \\ \Rightarrow \underbrace{(\Delta u^i + k^2 u^i)}_{=0} + (\Delta u^s + k^2 u^s) &= 0 \\ \Rightarrow \Delta u^s + k^2 u^s &= 0 \end{aligned}$$

elde ederiz.

O halde hem u , hem u^i ve hem de u^s Helmholtz denklemini sağlayan fonksiyonlardır.

Helmholtz denkleminin temel çözümü olarak bilinen

$$\mathcal{O}(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}, \quad (x \neq y)$$

fonksiyonu yardımıyla saçılan dalga fonksiyonu,

$$u^s(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \cdot \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left(u(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} e^{-ik\hat{x}y} - e^{-ik\hat{x}y} \cdot \frac{\partial u(y)}{\partial n(y)} \right) ds(y) \right\} + o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad r=|x| \rightarrow \infty$$

şeklinde yazılabilir [6].

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left(u(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} e^{-ik\hat{x}y} - e^{-ik\hat{x}y} \cdot \frac{\partial u(y)}{\partial n(y)} \right) ds(y)$$

ifadesine far-field pattern veya scattering amplitude denir ve $u_{\infty}(\hat{x}, d)$ veya $A(\alpha', \alpha, k)$ ile gösterilir.

Burada

$$\hat{x} = \alpha' = \frac{x}{|x|}, \quad \alpha = d$$

dır.

O zaman

$$u^s = \frac{e^{ikr}}{r} A(\alpha', \alpha, k) + o\left(\frac{1}{r}\right) \quad (3.5)$$

şeklinde yazılır.

Bu halde

$$u = e^{ik\hat{x}\hat{\alpha}} + A(\alpha', \alpha, k) \frac{e^{ikr}}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r = |x| \rightarrow \infty, \quad \alpha' = \frac{x}{r}$$

olur. Eğer k sabitse $A(\alpha', \alpha, k)$ kısaca $A(\alpha', \alpha)$ şeklinde gösterilebilir.

Şimdi Ω içine iletilen v dalga fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$\Delta v + k_0^2 v = 0; \quad \Omega \text{ da} \quad (3.6)$$

$$u = v; \quad \partial \Omega \text{ da} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda \frac{\partial v}{\partial \nu} \quad \partial \Omega \text{ da} \quad (3.8)$$

sağlanır. Burada

$$k_0^2 = \frac{k^2 c^2}{c_0^2} \text{ ve}$$

$$\lambda = \frac{\rho}{\rho_\Omega}, \quad (c_0 = c_\Omega)$$

ile bellidir ve,

$$k_0^2 \neq k^2 \text{ ve}$$

$$\lambda \neq 1$$

dir.

Ω nın sınırını da S ile göstereceğiz. Yani,

$$\partial \Omega = S$$

dir.

Bu durumda ters saçılım problemi; k ve $A(\alpha', \alpha, k)$ far-field patterni verildiğinde bölgenin S sınırının bulunması problemidir.

3.1. Lemma (Rellich Lemma) [6]

$\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ da u Helmholtz denkleminin bir çözümü olsun. O zaman

$u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|x|=r} |u(x)|^2 ds = 0 \Rightarrow u=0 \quad (3.9)$$

dır.

3.1. Teorem [6]

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ bir bölge ve bu bölgenin C^2 sınıfından olan $\partial\Omega$ sınırı her noktada dış normale sahip olsun.

$u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$ radyasyon yayılma şartını sağlasın.

O zaman;

$$\operatorname{Im} \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds \geq 0 \text{ ise}$$

$$u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \quad (3.10)$$

dır.

3.2. Lemma [6]

$u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$ Helmholtz denklemini ve radyasyon yayılma şartını sağlasın.

Eğer;

$$A(\alpha', \alpha) = 0 \text{ ise}$$

$$u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \quad (3.11)$$

dır.

3.2. Çözümün Tekliği

$B_i, \mathbb{R}^3$ te düzgün S sınırına sahip kapalı bir bölge ve B_e de basit irtibatlı, sınırlı olmayan bir dış bölge olmak üzere aşağıdaki geçiş problemini ele alalım.

$$(\nabla^2 + k_e^2) u_e(p) = 0 \quad ; p \in B_e \quad (3.12)$$

$$(\nabla^2 + k_i^2) u_i(p) = 0 \quad ; p \in B_i \quad (3.13)$$

$$u(p) = u_i(p) \quad ; p \in S \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n_p} = \rho \frac{\partial u_i}{\partial n_p} \quad ; p \in S \quad (3.15)$$

$$u(p) = u_e(p) + u_{inc}(p) \quad ; p \in B_e \quad (3.16)$$

$$r_p \left(\frac{\partial u_e}{\partial r_p} - ik_e u_e \right) \rightarrow 0 \quad ; r_p \rightarrow \infty \quad (3.17)$$

R.E Kleinmann ve P.A. Martin 1988 de bu problemin çözümünün tekliği için aşağıdaki teoremi incelemişlerdir.

3.2. Teorem [7]

$k_e \in \mathbb{R}^+$ veya $\text{Im}(k_e) > 0$,

$\rho \neq 0$ ve $\text{Im}(\rho \overline{k_e}) \geq 0$ ve $\text{Im}(\overline{\rho} k_e \overline{k_i^2}) > 0$

olmak üzere Eş.3.12 – Eş.3.17 ile belirtilen geçiş problemi en fazla bir çözüme sahiptir.

İspat

V_e ve V_i , $u_{inc} \equiv 0$ olan homogen geçiş problemini sağlarlar. B_i tamamen S_R nin içinde ve $B_{e,R}$, B_i ile S_R arasındaki bölge olmak üzere;

$$S_R = \{p \in B_e : r_p = R\},$$

$$B_{e,R} = \{p \in B_e : r_p < R\},$$

$$r_p = |\vec{OP}|$$

olsun.

V_e ve $\bar{V}_e$ ye $B_{e,R}$ de iki defa 1. Green özdeşliğini uygularsak

$$\int_{\partial B_{e,R}} V_e \cdot \frac{\partial \bar{V}_e}{\partial n} ds = \int_{B_{e,R}} V_e \Delta \bar{V}_e dx + \int_{B_{e,R}} \underbrace{\nabla V_e \cdot \nabla \bar{V}_e}_{=|\nabla V_e|^2} dx$$

$$\Delta \bar{V}_e = -k_e^2 \bar{V}_e$$

olduğu göz önüne alınıp, Eş.3.14 ve Eş.3.15 den

$$\int_{S_R} V_e \cdot \frac{\partial \bar{V}_e}{\partial n} ds + \int_{\partial B_i} V_i \bar{\rho} \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial n} ds = \int_{B_{e,R}} \left\{ |\nabla V_e|^2 + V_e \left(-k_e^2 \bar{V}_e \right) \right\} dx$$

$$\Rightarrow \int_{S_R} V_e \frac{\partial \bar{V}_e}{\partial n} ds = \int_{B_{e,R}} \left\{ |\nabla V_e|^2 - \underbrace{k_e^2 \bar{V}_e^2}_{=|V_e|^2} \right\} dx - \int_{\partial B_i} \bar{\rho} V_i \cdot \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial n} ds$$

elde edilir.

Birinci Green Özdeşliğinden

$$\int_{\partial B_i} \bar{\rho} V_i \cdot \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial n} ds = \int_{B_i} \bar{\rho} \left\{ |\nabla V_i|^2 - \bar{k}_i^2 \underbrace{|\bar{V}_i|^2}_{=|V_i|^2} \right\} dx$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\int_{S_R} V_e \frac{\partial \bar{V}_e}{\partial n} ds = \int_{B_{e,R}} \left\{ |\nabla V_e|^2 - \bar{k}_e^2 |V_e|^2 \right\} dx - \int_{B_i} \bar{\rho} \left\{ |\nabla V_i|^2 - \bar{k}_i^2 |V_i|^2 \right\} dx$$

olur.

Eşitliğin her iki tarafını k_e ile çarpıp imajinerini alırsak

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left\{ k_e \int_{S_R} V_e \frac{\partial \bar{V}_e}{\partial n} ds \right\} &= \operatorname{Im}(k_e) \int_{B_{e,R}} \left\{ |\nabla V_e|^2 + |k_e V_e|^2 \right\} dx \\ &+ \operatorname{Im}(\bar{\rho} \bar{k}_e) \int_{B_i} |\nabla V_i|^2 dx + \operatorname{Im}(\bar{\rho} k_e \bar{k}_i^2) \int_{B_i} |V_i|^2 dx \end{aligned} \quad (3.18)$$

elde edilir.

Eğer, $\operatorname{Im}(k_e) > 0$ ise $R \rightarrow \infty$ için V_e sönümlü olduğundan Eş.3.18 in sol tarafı sıfıra gider. Teoremde verilen şartlardan V_e ve V_i aşıkarak 0'dır. O zaman homojen problemin aşıkarak çözümü vardır. Bundan dolayı homojen olmayan problem en fazla bir çözüme sahiptir.

Şimdi benzer bir problemi daha farklı bir şekilde ifade edelim.

$V_i, \mathbb{R}^3$ te bir bölge $V_e = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ olmak üzere S, V_i yi içine alan bir yüzey ve

$$\overline{V_i} = V_i \cup S$$

$$\overline{V_e} = V_e \cup S$$

olsun. Ayrıca;

$$x \in V_e \rightarrow x \in S, u(x) \rightarrow u^+(x) \text{ ve } \frac{\partial u(x)}{\partial n} \rightarrow \frac{\partial u^+(x)}{\partial n}$$

$$x \in V_i \rightarrow x \in S, u(x) \rightarrow u^-(x) \text{ ve } \frac{\partial u(x)}{\partial n} \rightarrow \frac{\partial u^-(x)}{\partial n}$$

olsun.

$$\rho, k: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$$

sırasıyla sürekli diferansiyellenebilir lokal yoğunluk ve lokal dalga sayısı fonksiyonları olsunlar öyle ki;

$$x \in \overline{V_i} \text{ için } \rho(x) = \rho_i(x) \text{ ve } k(x) = k_i(x)$$

$$x \in V_e \text{ için } \rho(x) = \rho_e \text{ ve } k(x) = k_e$$

olsun.

Burada ρ_e ve k_e kompleks sabitlerdir. O zaman;

$$u(x) \in C^2(V_i) \cap C^1(\overline{V_i}) \text{ ve } u^s(x) \in C^2(V_e) \cap C^1(\overline{V_e}) \text{ için}$$

$$(\Delta + k^2(x))u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (3.19)$$

$$(\Delta + k^2(x))u^s(x) = 0, \quad x \in V_e \quad (3.20)$$

$$\rho_e \cdot u^+(x) - \rho_i(x) \cdot u^-(x) = 0, \quad x \in S \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial u^+(x)}{\partial n} - \frac{\partial u^-(x)}{\partial n} = 0, \quad x \in S \quad (3.22)$$

$$\lim_{|x|=r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u^s(x)}{\partial r} - i k_e u^s(x) \right) = 0 \quad (3.23)$$

şeklinde tanımlanan geçiş problemi için teklik teoremi Adil MISIR tarafından 2005 yılında aşağıdaki şekilde incelenmiştir.

3.3. Teorem [8]

$$\text{Im}(k_e) > 0, \quad m(x) = \frac{k_e}{\rho_e} \rho_i(x) \quad (3.24)$$

olsun. Eğer;

$$\text{Im}(m(x)) < 0, \quad \text{Im}(k_i^2(x) \cdot \overline{m(x)}) \leq 0, \quad x \in V_i \quad (3.25)$$

ve $u(x) \in C^2(V_i) \cap C^1(\overline{V_i})$ için

$$\text{Im} \left\{ k_e \int_{V_i} u(x) \nabla \left(\frac{m(x)}{k_e} \right) \cdot \nabla \overline{u(x)} dx \right\} \leq 0 \quad (3.26)$$

ise Eş.3.19-Eş.3.23 ile belirtilen saçılma problemi en çok bir çözüme sahiptir.

İspat

Kabul edelim ki $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ Eş.3.19-Eş.3.23 probleminin aşıkâr olmayan iki çözümünü olsun. Bu durumda

$$w(x) = u_1(x) - u_2(x)$$

şeklinde tanımlanan w fonksiyonu aşağıdaki problemi sağlar.

$$(\Delta + k^2(x))w(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (3.27)$$

$$(\Delta + k_e^2(x))w(x) = 0, \quad x \in V_e \quad (3.28)$$

$$\rho_e w^+(x) - \rho_i(x) w^-(x) = 0, \quad x \in S \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial w^+(x)}{\partial n} - \frac{\partial w^-(x)}{\partial n} = 0, \quad x \in S \quad (3.30)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial w^s(x)}{\partial r} - ik_e w^s(x) \right) = 0 \quad (3.31)$$

$$\Sigma_R = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = R\} \text{ ve}$$

R , Σ_R , tamamen S yüzeyini içine alacak kadar büyük olsun. w ve $\bar{w}$ fonksiyonlarına

$$\Omega = \Sigma_R \setminus \bar{V}_i$$

üzerinde 1. Green özdeşliğini uygularsak

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w(x) \Delta \bar{w}(x) dx &= \int_{\partial\Omega} w(y) \frac{\partial \bar{w}(y)}{\partial n} ds(y) - \int_{\Omega} \underbrace{\nabla w(x) \nabla \bar{w}(x)}_{=|\nabla w(x)|^2} dx \\ \Rightarrow \int_{\Omega} \left(w(x) \Delta \bar{w}(x) + |\nabla w(x)|^2 \right) dx &= \int_S w^+(y) \frac{\partial \bar{w}^+(y)}{\partial n} ds(y) + \int_{\Sigma_R} w(y) \frac{\partial \bar{w}(y)}{\partial n} ds(y) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Ω da $\Delta \bar{w} = -k_e^2 \bar{w}$ olduğunu göz önüne alırsak Eş.3.32 ifadesi

$$\int_{\Sigma_R} w \frac{\partial \overline{w(y)}}{\partial R} ds(y) = \int_S \frac{\rho_i(x)}{\rho_e} \overline{w^-(y)} \frac{\partial \overline{w^-(y)}}{\partial n} ds(y) + \int_{\Omega} \overline{k_e^2} \underbrace{\overline{w(x)} w(x)}_{=|w(x)|^2} dx - \int_{\Omega} |\nabla w(x)|^2 dx \quad (3.33)$$

haline gelir.

Eş.3.33 de sağ tarafın 1. integraline 1.Green özdeşliğini uygularsak

$$\begin{aligned} \int_S \frac{\rho_i(x)}{\rho_e} \overline{w^-(y)} \frac{\partial \overline{w^-(y)}}{\partial n} ds(y) &= \int_{V_i} \frac{\rho_i(x)}{\rho_e} w \Delta \overline{w} dx + \int_{V_i} \nabla \left(\frac{\rho_i(x)}{\rho_e} w \right) \cdot \nabla \overline{w} dx \\ &= - \int_{V_i} \overline{k_i^2(x)} \frac{\rho_i(x)}{\rho_e} |w|^2 dx + \int_{V_i} \frac{\rho_i(x)}{\rho_e} |\nabla w|^2 dx + \int_{V_i} w(x) \nabla \left(\frac{\rho_i(x)}{\rho_e} \right) \cdot \nabla \overline{w(x)} dx \end{aligned} \quad (3.34)$$

olur.

Son ifadeyi Eş.3.33 de yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \int_S w(y) \frac{\partial \overline{w(y)}}{\partial R} ds(y) &= \int_{\Omega} \overline{k_e^2} |w|^2 dx - \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx - \int_{V_i} \overline{k_i^2(x)} \frac{\rho_i(x)}{\rho_e} |w|^2 dx + \\ &\quad \int_{V_i} \frac{\rho_i(x)}{\rho_e} |\nabla w|^2 dx + \int_{V_i} w(x) \nabla \left(\frac{\rho_i(x)}{\rho_e} \right) \cdot \nabla \overline{w(x)} dx \end{aligned} \quad (3.35)$$

elde edilir.

Eş.3.35 ün her iki tarafını k_e ile çarpıp imajinerini alırsak

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left(k_e \int_{\Sigma_R} w(y) \frac{\partial \overline{w(y)}}{\partial R} ds(y) \right) &= \operatorname{Im} \left(k_e \cdot \overline{k_e^2} \right) \int_{V_e} |w|^2 dx - \operatorname{Im}(k_e) \cdot \int_{V_e} |\nabla w(x)|^2 dx \\ &\quad - \int_{V_i} \operatorname{Im} \left(\overline{k_i^2} \cdot k_e \frac{\rho_i(x)}{\rho_e} \right) |w(x)|^2 dx + \int_{V_i} \operatorname{Im} \left(k_e \frac{\rho_i(x)}{\rho_e} \right) |\nabla w(x)|^2 dx \\ &\quad + \operatorname{Im} \left(k_e \int_{V_i} w(x) \nabla \left(\frac{\rho_i(x)}{\rho_e} \right) \cdot \nabla \overline{w(x)} dx \right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

elde edilir.

w sönümlü olduğundan Eş.3.36 ün sol tarafı $R \rightarrow \infty$ için 0'dır. O zaman sağ tarafta 0 olur.

$$\text{Im}(k_e) > 0 \Rightarrow \text{Im}(k_e \overline{k_e^2}) < 0$$

olur.

Eş.3.24 den Eş.3.36 nın sağ tarafı

$$\begin{aligned} & \text{Im}(k_e \overline{k_e^2}) \int_{V_i} |w|^2 dx - \text{Im}(k_e) \int_{V_e} |\nabla w(x)|^2 dx - \int_{V_i} \text{Im}(\overline{k_i^2} \cdot m(x)) |w(x)|^2 dx \\ & + \int_{V_i} \text{Im}(m(x)) |\nabla w(x)|^2 dx + \text{Im} \left(k_e \int_{V_i} w(x) \nabla \left(\frac{m(x)}{k_e} \right) \nabla \overline{w(x)} dx \right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

haline gelir.

Eş.3.25 ve Eş.3.26 dan Eş.3.37 ifadesinin sıfır olması için

$$w = 0$$

olmalıdır. O zaman

$$u_1 - u_2 = 0$$

$$\Rightarrow u_1 = u_2$$

olur.

3.4. Teorem [9]

Eş.3.1-Eş.3.7 ile belirtilen geçiş probleminde $\partial\Omega$ sınırı, $\forall \alpha, \alpha' \in S^2$ için $A(\alpha', \alpha)$ far-field patterni ile tek olarak bellidir.

İspat

Bu ispata, Eş.3.1-Eş.3.8 denklemlerini yeniden ele alarak başlayacağız.

$$\ell u = \nabla u(a \nabla u) + b^2 u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (3.38)$$

şeklinde bir operatör tanımlayarak başlayalım. Burada ;

$$a(x) = \begin{cases} a^+ = \lambda; & x \in \Omega \\ a^- = 1; & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \end{cases} \quad (3.39)$$

$$b^2(x) = \begin{cases} \lambda k_0^2; & x \in \Omega \\ k^2; & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \end{cases} \quad (3.40)$$

olarak tanımlansın.

O zaman

$u=v$; $S=\partial\Omega$ da

$$a^- \frac{\partial u}{\partial \nu} = a^+ \frac{\partial v}{\partial \nu}; \quad S=\partial\Omega \quad \text{da} \quad (3.41)$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\ell u = \begin{cases} \Delta v + k_0^2 v = 0; & x \in \Omega \\ \Delta u + k^2 u = 0; & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \end{cases}$$

olur.

Kabul edelim ki (S_1, λ_1, k_1^2) ve (S_2, λ_2, k_2^2) aynı far-field patterne sahip iki konfigrasyon olsun ($S_1 \neq S_2$). Buradan bir çelişki elde edeceğiz.

Burada S_j ve k_j^2 sırasıyla $j=1,2$ için sınırı ve Ω_j bölgesinde ki dalga sayısını, k^2 de $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_j$ deki dalga sayısını gösteriyor. $u_j(x, \alpha)$, Eş.3.1-Eş.3.8 veya (S_j, λ_j, k_j^2) , $j=1,2$ ile temsil edilen Eş.3.38-Eş.3.41 in aşikar olmayan bir çözümü olsun.

$$\Omega_{12} = \Omega_1 \cup \Omega_2 \text{ ve}$$

$$\Omega'_{12} = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_{12}}$$

olarak tanımlansın.

$A(\alpha', \alpha)$ far-field patterni iki konfigrasyonu da sağlıyorsa Lemma 3.2 den

$$u_1(x) = u_2(x), \quad x \in \Omega'_{12}$$

sonucu çıkar.

Şimdi $\phi \in W_0^{1,1}(\mathbb{R}^3)$ için

$$\int_{\mathbb{R}^3} (a_j \nabla u_j \nabla \phi - b_j^2 u_j \phi) dx \tag{3.42}$$

integraline bakalım.

Burada

$$a_j = \begin{cases} a_j^+ = \lambda_j; & x \in \Omega_j \\ a_j^- = 1; & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_j \end{cases}$$

$$b_j^2 = \begin{cases} \lambda_j k_j^2; & x \in \Omega_j \\ k^2; & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_j \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır..

$x \in \Omega_j$ için Eş.3.42 integrali

$$\int_{\Omega_j} (\lambda_j \nabla v_j \nabla \phi - \lambda_j k_j^2 v_j \phi) dx = \lambda_j \left(\int_{\Omega_j} (\nabla v_j \nabla \phi - k_j^2 v_j \phi) dx \right)$$

olur.

Birinci Green Teoreminden

$$\int_{\Omega_j} \nabla v_j \nabla \phi dx = \int_{\partial \Omega_j} \phi \frac{\partial v_j}{\partial \nu} ds - \int_{\Omega_j} \phi \Delta v_j dx$$

yazılırsa

$$\begin{aligned} & \lambda_j \left(\int_{\partial \Omega_j} \phi \frac{\partial v_j}{\partial \nu} ds - \int_{\Omega_j} \phi \Delta v_j dx - \int_{\Omega_j} k_j^2 \phi v_j dx \right) \\ &= \lambda_j \int_{\partial \Omega_j} \phi \underbrace{\frac{\partial v_j}{\partial \nu}}_{=0} ds + \cancel{\lambda_j \int_{\Omega_j} k_j^2 v_j \phi dx} - \cancel{\lambda_j \int_{\Omega_j} k_j^2 v_j \phi dx} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

$x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_j$ için Eş.3.42 integrali 1. Green Teoremiyle

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_j} (\nabla u_j \nabla \phi - k^2 u_j \phi) dx &= \int_{\partial(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_j)} \phi \frac{\partial u_j}{\partial \nu} ds - \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_j} \phi \Delta u_j dx - \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_j} k^2 u_j \phi dx \\
&= \int_{\partial(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_j)} \phi \underbrace{\frac{\partial u_j}{\partial \nu}}_{=0} ds + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_j} \phi k^2 u_j dx - \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_j} k^2 u_j \phi dx}_{=0} = 0
\end{aligned}$$

olur. Ω'_{12} de

$$a_1 = a_2 = a^- = 1 \text{ ve}$$

$$b_1^2 = b_2^2 = k^2 \text{ olduğundan}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_{12}} (a_1 \nabla u_1 \nabla \phi - b_1^2 u_1 \phi) dx &= \int_{\Omega_{12}} (a_2 \nabla u_2 \nabla \phi - b_2 u_2 \phi) dx = 0 \\
\int_{\Omega_{12}} (a_1 \nabla u_1 \nabla \phi - b_1^2 u_1 \phi) dx - \int_{\Omega_{12}} (a_2 \nabla u_2 \nabla \phi - b_2 u_2 \phi) dx &= 0
\end{aligned} \tag{3.43}$$

olur.

$j=1,2$ için

$$\ell_j u_j = \nabla(a_j \nabla u_j) + b_j^2 u_j$$

iki diferansiyel operatör olsun. Bunların Green fonksiyonları

$$G_j(x, y) = \frac{e^{ik_0|y|}}{4\pi|y|} \cdot u_j(x, \alpha') + o\left(\frac{1}{|y|}\right), \quad y \rightarrow \infty, \quad \alpha' = \frac{-y}{|y|}$$

şeklinde tanımlanır [10].

$G_j(x, y)$ kompakt kümelerde x e bağlı bir fonksiyondur.

$\phi \in W_0^{1,1}(\mathbb{R}^3)$ ve $y \in \Omega'_{12}$ için

$$w(y) = \int_{\Omega_{12}} [a_1 \nabla_x G_1(x, y) \cdot \nabla_x \phi - b_1^2 G_1(x, y) \phi] dx \\ - \int_{\Omega_{12}} [a_2 \nabla_x G_2(x, y) \cdot \nabla_x \phi - b_2^2 G_2(x, y) \phi] dx$$

şeklinde tanımlarsak $a_j(x)$ ve $b_j^2(x)$ in tanımından ve [11] dan

$$w(y) = o\left(\frac{1}{|y|}\right), \quad |y| \rightarrow \infty \text{ ve}$$

$$(\Delta_y + k^2)w(y) = 0, \quad \Omega'_{12} \text{ de}$$

olur.

$y \in \Omega'_{12}$ için

$$w(y) = 0$$

olur.

O zaman

$$\int_{\Omega_{12}} [a_1 \nabla_x G_1(x, y) \cdot \nabla_x \phi - a_2 \nabla_x G_1(x, y) \nabla_x \phi] dx = \int_{\Omega_{12}} [b_1^2 G_1(x, y) \phi - b_2^2 G_2(x, y) \phi] dx$$

olur.

$S_1 \neq S_2$ olsun. $\overline{\Omega_2}$ nin dışında S_1 üzerinde bir t noktası seçelim. ve t merkezli $B(t)$ yuvarını $B(t) \subset \Omega'_2$ olacak şekilde oluşturalım.

$$(\Omega_{12} \cap B(t)) \cup ((\Omega_{12} \setminus B(t))) = \Omega_{12}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{12} \cap B(t)} [a_1 \nabla_x G_1(x, y) \cdot \nabla_x \phi - a_2 \nabla_x G_2(x, y) \nabla_x \phi] dx = \\ & - \int_{\Omega_{12} \setminus B(t)} [a_1 \nabla_x G_1(x, y) \cdot \nabla_x \phi - a_2 \nabla_x G_2(x, y) \nabla_x \phi] dx + \\ & \int_{\Omega_{12}} [b_1^2 G_1(x, y) \phi - b_2^2 G_2(x, y) \phi] dx \end{aligned}$$

olur.

$w(y) = 0$ olduğundan sağ taraf sınırlıdır. O zaman sol taraf da sınırlı olur.

Yani

$$\int_{\Omega_{12} \cap B(t)} [a_1 \nabla_x G_1(x, y) \cdot \nabla_x \phi - a_2 \nabla_x G_2(x, y) \nabla_x \phi] dx < \infty \quad (3.44)$$

olur.

Eş.3.44 integrali Ω'_{12} de tanımlı değildir. $y \in \Omega'_{12}$ için $\phi(x, y)$ test fonksiyonunu

$$\phi(x, y) \in W_0^{1,1}(\mathbb{R}^3)$$

$$\phi(x, y) = \frac{\eta(x)}{|x - y|}, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

olmak üzere $\eta(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ parçalı fonksiyonunu

$$0 \leq \eta(x) \leq 1$$

ve $\eta(x)$, Ω_{12} nin bir komşuluğunda 1 değerini alacak şekilde seçelim.

$B(t)$ yuvarında, orijini t noktasında ve $x_3 = 0$ düzlemi S_1 e t de teğet olan bir $\{(x_1, x_2, x_3)\}$ yerel koordinat sistemi tanımlayalım. Bu koordinat sisteminde

$$y = (0, 0, y_3) \in \Omega'_{12} \cap B(t)$$

olarak seçelim. O zaman $y \rightarrow x$ iken Green fonksiyonu

$$G_1(x, y) \sim \frac{1}{4\pi a^-} \left[\frac{1}{r} + \frac{p}{R} \right], \quad y \in \Omega'_{12} \cap B(t), \quad y \rightarrow x$$

şeklinde asimtotik davranış gösterir [11].

Burada

$$p = \frac{a^- - a_1^+}{a^- + a_1^+} = \frac{1 - \lambda_1}{1 + \lambda_1}$$

$$r = |x - y|$$

$$R = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (|x_3| + |y_3|)^2}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Eğer $x \in \Omega_{12}$ ve $y \in \Omega'_{12}$ ise $y_3 > 0$ ve $x_3 < 0$ olur. O zaman

$$\nabla_x G_1(x, y) \sim \frac{1}{4\pi a^-} \left[-\frac{x - y}{|x - y|^3} - p \frac{(x_1 - y_1, x_2 - y_2, -(|x_3| + |y_3|))}{R^3} \right] \text{ ve}$$

$$\begin{aligned}\nabla_x G_1(x, y) \nabla_x \phi(x, y) &\sim \frac{1}{4\pi a^-} \left[-\frac{x-y}{|x-y|^3} + \frac{p(x_1 - y_1, x_2 - y_2, -(|x_3| + |y_3|))}{R^3} \right] \cdot \left[\frac{x-y}{|x-y|^3} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi a^-} \frac{1}{|x-y|^4} \left[1 + \frac{p|x-y|}{R} \right]\end{aligned}$$

olur.

Benzer şekilde $G_2(x, y)$, $y \rightarrow x$ iken

$$G_2(x, y) \sim \frac{1}{4\pi a^- |x-y|}$$

şeklinde asimtotik davranışa sahiptir [11].

O zaman

$$a_2 \nabla_x G_2(x, y) \cdot \nabla_x \phi(x, y) \sim \left[-\frac{x-y}{4\pi |x-y|^3} \right] \cdot \left[-\frac{x-y}{|x-y|^3} \right] = \frac{1}{4\pi |x-y|^4}$$

haline gelir.

$y \rightarrow t$ iken

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_{12} \cap B(t)} \left[(a_1 \nabla_x G_1(x, y) \cdot \nabla_x \phi(x, y) - a_2 \nabla_x G_2(x, y) \cdot \nabla_x \phi(x, y)) \right] dx \\ &\sim \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_{12} \cap B(t)} \frac{1}{|x-y|^4} \left[\frac{a_1^+}{a^-} + \frac{p a_1^+ |x-y|}{a^- R} - 1 \right] dx\end{aligned}\tag{3.45}$$

olur.

Eğer

$$z=y=(0,0,y_3)\in \Omega'_{12}\cap B(t)$$

alınırsa

$$|x-y| = R$$

olur.

$y \rightarrow t$ iken Eş.3.44 integrali

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{12}\cap B(t)} \left[(a_1 \nabla_x G_1(x, y) \cdot \nabla_x \phi(x, y) - a_2 \nabla_x G_2(x, y) \cdot \nabla_x \phi(x, y)) \right] dx \\ & \sim \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_{12}\cap B(t)} \frac{1}{|x-y|^4} \left[\frac{a_1^+}{a^-} + \frac{a_1^+(a^- - a_1^+)}{a^-(a^- + a_1^+)} - 1 \right] dx \end{aligned} \quad (3.46)$$

Eş.3.44 ten sol tarafın sınırlı olduğunu biliyoruz. O zaman sağ taraf ta sınırlıdır.

Bu ise ancak

$$\frac{a_1^+}{a^-} + \frac{a_1^+(a^- - a_1^+)}{a^-(a^- + a_1^+)} - 1 = 0$$

olmasıyla mümkündür. Bu denklemin çözümünden

$$a^- = a_1^+$$

çıkar. Bu da bir çelişkidir. O zaman

$$S_1 \equiv S_2$$

olur.

4. KATI ÖZLÜ GEÇİRGEN ORTAM İÇİN SAÇILIM PROBLEMİ

Bu kısımda kendisi geçirgen fakat özü geçirgen olmayan bir bölge için akustik (ses) dalgalarının çok katlı engelde saçılım problemini inceleyeceğiz. Özellikle özün sert veya ses geçirmez olduğu durumlar üzerinde duracağız. Problemi ortaya koyduktan sonra özün, far-field patterni tarafından tek türlü tanımlı olduğunu inceleyeceğiz.

4.1. Problemin Ortaya Konması

Kabul edelim ki S_0 , $\mathbb{R}^3$ te C^2 sınıfından sonlu bir yüzey ve S_1 de tamamen S_0 ın içinde kalan ve $S_0 \cap S_1 = \emptyset$ olacak şekilde C^2 sınıfından başka bir yüzey(öz sınırı) olsun. S_0 ın dışını Ω^+ ile, S_0 ve S_1 yüzeylerinin arasında kalan bölgeyi de Ω^- ile gösterelim.

$$|\vec{d}| = 1$$

olmak üzere;

- k ile Ω^+ bölgesindeki dalga sayısını ($k>0$),
- k_0 ile Ω^- bölgesindeki dalga sayısını ($k_0>0$),
- ρ_{Ω^+} ile Ω^+ nın yoğunluğunu,
- ρ_{Ω^-} ile Ω^- nın yoğunluk fonksiyonunu,
- ν ile dış birim normal vektörünü gösterelim

Geçirgen S_0 yüzeyi ile geçirgen olmayan S_1 yüzeyinin oluşturduğu time-independent (zamandan bağımsız) akustik dalga saçılım problemi aşağıdaki şekilde formülize edilir.

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = 0, \quad x \in \Omega^+ \quad (4.1)$$

$$\Delta v(x) + k_0^2 v(x) = 0, \quad x \in \Omega^- \quad (4.2)$$

$$u(x) = v(x), \quad x \in S_0 \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = \lambda \frac{\partial v(x)}{\partial \nu}, \quad x \in S_0 \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial v(x)}{\partial \nu} = 0, \quad x \in S_1 \quad (4.5)$$

Eş.4.5. Neuman sınır şartı olarak bilinir.

Burada $\frac{\partial}{\partial \nu}$ dış normal vektörü doğrultusundaki türevi belirtiyor. k ve k_0 sırasıyla dış bölgedeki ve iç bölgedeki dalga sayılarını, λ sabiti ise

$$\lambda = \frac{\rho_{\Omega^+}}{\rho_{\Omega^-}} \neq 1$$

dir.

Burada λ dış bölgenin ve iç bölgenin yoğunlukları oranını gösteriyor. Ayrıca

$$u^i(x) = e^{ikx\vec{d}}$$

$\vec{d}$ doğrultusuna sahip başlangıç dalga fonksiyonunu ve $u^s(x)$ de saçılan dalga fonksiyonunu göstermek üzere, u nun Ω^+ daki super position hali

$$u(x) = u^i(x) + u^s(x)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

S_r , r yarıçaplı orijin merkezli küre olmak üzere, u^s de sommerfeld yayılma şartını sağlar. Yani

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} \left| \frac{\partial u^s}{\partial \nu} - iku^s \right|^2 ds = 0 \quad (4.6)$$

dır.

Bundan başka u^s için

$$\frac{e^{ik|x|}}{|x|} \cdot \left\{ u_{\infty}(\hat{x}) + o\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow \infty \quad (4.7)$$

şeklinde asimtotik davranışa sahibiz. Burada

$$\hat{x} = \frac{x}{|x|}$$

ve u_{∞} far-field pattern fonksiyonudur. u_{∞} , $\vec{d}$ geliş doğrultusuna ve Ω^- deki k_0 dalga sayısına bağlı olduğundan $u_{\infty}(\cdot, d, k_0)$ ile ifade edilir.

4.2. Çözümün Tekliği

4.1. Teorem [12]

Eş.4.1-Eş.4.5 ile belirtilen sınır değer problemi için saçıcı S_0 ve Ω^+ daki dalga sayısı k biliniyor olsun. Ω_1 ve Ω_2 , Ω^- deki her $k_0 \in [a, b]$, $0 < a < b$ ve $u^i(\cdot, d, k_0)$ için aynı far-field patterne sahip iki öz olsun. Ayrıca

$k_0 \neq \tilde{k}_0$ için

$$u^i(., d, k_0) \neq u^i(., d, \tilde{k}_0)$$

olsun.

O zaman Ω_1 ve Ω_2 özleri çakışıktır. Yani;

$$\Omega_1 \equiv \Omega_2$$

dir.

İspat

İspatın temel kısmı Green Teoremi'nin düzgün olmayan versiyonudur. Önce biz düzgün olmayan alanlarda Eş.4.1-Eş.4.5'nin (zayıf) çözümleri için bir notasyon tanımlayacağız.

4.1. Tanım [12]

$u \in H_{loc}^2(\Omega') \cap H^1(\Omega'_R)$ olsun. Eğer u fonksiyonu Eş.4.5 i sağlar ve

$$\int_{\Omega'} (\mu \nabla u \nabla \varphi - \kappa^2 u \varphi) dx = 0, \quad \forall \varphi \in H_{loc}^2 \cap H_0^1(\Omega')$$

ise u fonksiyonuna Eş.4.1 – Eş.4.5 in zayıf çözümüdür denir.

Burada

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega^+ \text{ ise} \\ \lambda, & x \in \Omega^- \text{ ise} \end{cases}$$

$$\kappa^2 = \begin{cases} k^2, & x \in \Omega^+ \text{ ise} \\ \lambda k_0^2, & x \in \Omega^- \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır.

Burada

$$\Omega' = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega,$$

H^1 , H_{loc}^2 ve H_0^1 sobolev uzayları,

$$H^1(\Omega'_R) \equiv H^1(\Omega \cap B_R)$$

B_R orijin merkezli ve yeterince büyük R yarıçaplı bir yuvardır.

Ayrıca aşağıdaki notasyonları kullanacağız.

$$\Omega_{12} = \Omega_1 \cup \Omega_2$$

$$\Omega^{12} = \Omega_1 \cap \Omega_2$$

$$\Omega_3 = \Omega_{12} \setminus \Omega^{12}$$

$$\Gamma_1 = \partial\Omega_1$$

$$\Gamma_2 = \partial\Omega_2$$

$$\Gamma_3 = \partial\Omega_3$$

$$\Gamma_{12} = \partial\Omega_{12}$$

$$\Gamma^{12} = \partial\Omega^{12}$$

$$\Gamma'_1 = \Gamma_1 \setminus \Omega_2$$

$$\Gamma'_2 = \Gamma_2 \setminus \Omega_1$$

$\tilde{\Omega}_1$, $\Omega_1 \setminus \Omega^{12}$ nin bağlı bir parçası şeklinde tanımlansın.

(u_j, v_j) , $j=1,2$ aynı far-field patterne sahip Eş.4.1-Eş.4.5 in Ω_j ye tekabül eden çözümleri olsunlar. Yani,

$$u_{1\infty}=u_{2\infty}$$

olsun. Lemma 3.2 den Ω^+ da

$$u_1 \equiv u_2$$

olur.

Eş.4.3 teki sınır koşulu ve Holmgren teklik teoreminden

$$v_1(x)=v_2(x):=V(x), \quad x \in \Omega \setminus \Omega_{12} \quad (4.8)$$

V fonksiyonu Ω_3 ve $\Omega \setminus \Omega_{12}$ de Eş.4.2 nin çözümü olduğundan $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ hariç geri kalan yerde analitik olarak süreklidir. Çünkü hem v_1 hem de v_2 bu bölgelerde tanımlı ve Eş.4.2 nin çözümleridir. Yalnız $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ de V yüzey üzerinde diferansiyellenebilir olmayabilir. Dolayısıyla V burada analitik olarak sürekli olmayabilir.

V , Ω_3 ün Γ_3 sınırında Eş.4.5 ile belirtilen Neuman sınır koşul şartını sağlar. Yalnız burada Ω_3 genel olarak düzgün değildir. Hatta Ω_3 Lipschitz bile değildir. Bundan dolayı ispatı tamamlamak için genelleştirilmiş Green formülüne ihtiyacımız var. Sonucu tespit etmeden önce bazı tanımları verelim.

Şimdi düzgün olmayan sınırdaki normalin tanımına ihtiyacımız var.

$x, v \in \mathbb{R}^n$ sabit elemanlar ve

$$v \neq 0$$

olsun.

$$A^{\pm} := \{y: \pm (y-x) \cdot \nu > 0\} \text{ ve}$$

$$A^0 := \{y: (y-x) \cdot \nu = 0\}$$

olarak tanımlayalım.

4.2. Tanım [12]

$D \subset \mathbb{R}^n$ de bir bölge olsun. ν birim vektörü $x \in \partial D$ de ∂D nin Federer anlamında normalidir. Eğer;

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{-n} \ell_n(D \cap B_{\rho}(x) \cap A^+) = 0$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{-n} \ell_n(D' \cap B_{\rho}(x) \cap A^+) = 0 \text{ ise.}$$

Burada

$\ell_n: \mathbb{R}^n$ de Lebesgue ölçüsü

$B_{\rho}(x)$: x merkezli ρ yarıçaplı yuvar.

$$D' = \mathbb{R}^n \setminus D$$

dir.

Bunları kullanarak biz düzgün olmayan bir D bölgesinde indirgenmiş sınırı tanımlayabiliriz.

4.3. Tanım [12]

Federer anlamında normali mevcut olan $x \in \partial D$ noktalarının kümesine D nin indirgenmiş sınırı denir. $\partial^* D$ ile gösterilir.

$$\partial^* D = \{x \in \partial D \mid x \text{ } \partial D \text{ de Federer anlamında normale sahip}\}$$

Bu tanımla ilgili aşağıdaki lemma oldukça kullanışlıdır.

4.1. Lemma [13]

D sonlu çaplı bir küme ve ∂D sınırı $(n-1)$ boyutlu Hausdorff ölçüsüne sahip ise $(n-1)$ boyutlu Hausdorff ölçüsüne göre Federer anlamında normal hemen hemen her yerde tanımlıdır.

4.2. Teorem (Düzgün olmayan bölge için Green Teoremi) [14]

Ω_3 sonlu çaplı bir bölge ve ψ , Ω_3 de tanımlı 1. türevleri var ve ölçülebilir, 1. türevlerinin pürüzlü izleri Ω_3 ün indirgenmiş Γ_3^* sınırında toplanabilir olan ve $(n-1)$ boyutlu Hausdorff ölçüsüne uyan bir fonksiyon olsun. O zaman

$$\int_{\Omega_3} \nabla \psi(x) dx = \int_{\Gamma_3^*} \psi(x) \nu(x) ds(x) \quad (4.9)$$

dir.

Burada $\nu(x)$, Γ_3^* ün dış birim normalidir.

Şimdi

$$\psi := V_1 \nabla \overline{V_2} - \overline{V_2} \nabla V_1 \quad (4.10)$$

fonksiyonunu dikkate alalım. Burada V_j ($j=1,2$) Ω_3 e doğru yayılan içteki k_{0_j} dalga sayısına karşılık gelen Eş.4.2 nin aşıkâr olmayan çözümleridir.

Yani,

$$\Delta V_1 + k_{0_1} V_1^2 = 0 \text{ ve}$$

$$\Delta V_2 + k_{0_2} V_2^2 = 0$$

dır.

Aynı zamanda Helmholtz denkleminin düzgün sınırlı bölgelerdeki çözümleri gibi

$$V_j \in H_1(\Omega_3)$$

dir.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_3} \nabla \psi dx &= \int_{\Omega_3} (\nabla V_1 \nabla \bar{V}_2 + V_1 \Delta \bar{V}_2 - \nabla \bar{V}_2 \nabla V_1 - \bar{V}_2 \Delta V_1) dx \\ &= \int_{\Omega_3} \nabla V_1 \nabla \bar{V}_2 dx + \int_{\Omega_3} (V_1 \Delta \bar{V}_2 - \bar{V}_2 \Delta V_1) dx - \int_{\Omega_3} \nabla \bar{V}_2 \nabla V_1 dx \\ &= \langle \nabla V_1, \nabla V_2 \rangle + \int_{\Omega_3} (V_1 \Delta \bar{V}_2 - \bar{V}_2 \Delta V_1) dx - \langle \nabla \bar{V}_2, \nabla \bar{V}_1 \rangle \\ &= \langle \nabla V_1, \nabla V_2 \rangle + \int_{\Omega_3} (V_1 \Delta \bar{V}_2 - \bar{V}_2 \Delta V_1) dx - \langle \overline{\nabla V_1}, \overline{\nabla V_2} \rangle \\ &= \cancel{\langle \nabla V_1, \nabla V_2 \rangle} + \int_{\Omega_3} (V_1 \Delta \bar{V}_2 - \bar{V}_2 \Delta V_1) dx - \cancel{\langle \nabla V_1, \nabla V_2 \rangle} \\ &= \int_{\Omega_3} (V_1 \Delta \bar{V}_2 - \bar{V}_2 \Delta V_1) dx \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\Delta \overline{V_2} = -\overline{k_{0_2}^2} \overline{V_2} \text{ ve}$$

$$\Delta V_1 = -k_{0_1}^2 V_1$$

olduğu göz önüne alınırsa son integral

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_3} V_1 \left(-\overline{k_{0_2}^2} \overline{V_2} \right) dx - \int_{\Omega_3} \overline{V_2} \left(-k_{0_1}^2 V_1 \right) dx &= k_{0_1}^2 \int_{\Omega_3} V_1 \overline{V_2} dx - \overline{k_{0_2}^2} \int_{\Omega_3} V_1 \overline{V_2} dx \\ &= k_{0_1}^2 \langle V_1, V_2 \rangle - \overline{k_{0_2}^2} \langle V_1, V_2 \rangle = \left(k_{0_1}^2 - \overline{k_{0_2}^2} \right) \langle V_1, V_2 \rangle \end{aligned} \quad (4.11)$$

halini alır.

Eş.4.9 un sağ tarafını açarsak.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3^*} \psi(x) v(x) ds(x) &= \int_{\Gamma_3^*} \left(V_1 \nabla \overline{V_2} - \overline{V_2} \nabla V_1 \right) v(x) ds(x) \\ &= \int_{\Gamma_3^*} \left(V_1 \nabla \overline{V_2} v(x) - \overline{V_2} \nabla V_1 v(x) \right) ds(x) = \int_{\Gamma_3^*} \left(V_1 \frac{\partial \overline{V_2}}{\partial v(x)} - \overline{V_2} \frac{\partial V_1}{\partial v(x)} \right) ds(x) \\ &= \int_{\Gamma_3^*} \left(V_1 \frac{\partial \overline{V_2}}{\partial v(x)} \right) ds(x) - \int_{\Gamma_3^*} \left(\overline{V_2} \frac{\partial V_1}{\partial v(x)} \right) ds(x) \\ &= \int_{\Gamma_3^*} \left(\overline{V_1} \frac{\partial V_2}{\partial v(x)} \right) ds(x) - \int_{\Gamma_3^*} \left(\overline{V_2} \frac{\partial V_1}{\partial v(x)} \right) ds(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Eş.4.5 Neuman sınır şartından dolayı $\frac{\partial V_1}{\partial v(x)}$ ve $\frac{\partial V_2}{\partial v(x)}$ 0'a eşit olduğundan

son integral 0'dır. Bundan dolayı Eş.4.11 integrali 0 olur.

$$\left(k_{0_1}^2 - \overline{k_{0_2}^2} \right) \langle V_1, V_2 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle V_1, V_2 \rangle = 0$$

olur.

Bu da V_j ($j=1,2$) fonksiyonlarının $L_2(\Omega_3)$ Hilbert uzayında ortogonal olduklarını gösterir. V_1 ve V_2 0'dan farklı olduğundan bu durum $L_2(\Omega_3)$ ün ayrılabilir olmasıyla çelişir. O zaman

$$\Omega_1 \equiv \Omega_2$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

1. Colton D., Coyle J., Monk, P., Recent Developments in Inverse Acoustic Scattering Theory, ***Society for Industrial and Applied Mathematics***, 42(3):369-414 (2000)
2. Anar, İ. E., Kısmi Diferansiyel Denklemler, ***Palme***, Ankara, 187-463 (2005)
3. Reddy, B. D., Introductory Functional Analysis and Boundary-Value Problems, ***John Wiley & Sons, Inc.***, New York, 162 (1987)
4. Patty, C.W., Foundations of Topology, ***PWS-Kent Publ. Co.***, Boston, 221 (1993)
5. Colton D., Kress, R., Integral Equation Methods in Scattering Theory ***John Wiley & Sons Inc.***, New York, 194 (1983)
6. Colton, D., Kress, R., Invers Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory, ***Springer-Verlag***, 20-32 (1992)
7. Kleinman, R.E., Martin, P.A., On Single Integral Equations for the Transmission Problem of Acoustics, ***Siam J. Appl. Math.***, 48(2):307-325 (1998)
8. Mısıır, A., On Compact Integral Equation for the Acosstic Scattering Problem in a Penetrable In Homogeneous Medium, ***Selçuk J.Appl. Math.***, 6(1) : 3-12(2005)
9. Yan. G., Inverse Scattering for Transmission Problem, ***Computers and Mathematics with Application***, 44:439-444 (2002)
10. Ramm, A. G., On Completeness of the Products of Harmonic Functions, ***Proc. Amer. Math. Soc.***, 98:46 (1986)
11. Ramm, A. G., Fundamental Solution to Some Eliptic Equations with Discontinuous Senior Coefficients and an Inequality for those Sollutions, ***Math. Inequalities and Applic.***, 1(1):99-104 (1998)
12. Pang, P.Y.H, Yan, G., Uniqueness of Inverse Scattering Problem for a Penetrable Obstacle with Rigid Core, ***Applied Mathematics Letters***, 14:155-158 (2001)
13. Volpert, A., Hudjaev, S., Analysis in Classes of Discontinuous Functions and Equations of of Mathematical Physics, ***MartinusNijhoff***, Dordrecht, 181 (1985)

14. Ramm, A. G., Uniqueness Theorems for Invers Obstacle Scattering Problems in Lipschitz Domains, ***Appl. Anal.***, 59: 377-383 (1995)

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : SULAN, İsmail
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 15.02.1979 Nazilli
 Medeni hali : Bekar
 Telefon : 0 (312) 3677492
 Faks : _
 e-mail : ismailsulan@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Gazi Üniversitesi Matematik Eğitimi	2001
Lise	Nazilli A.Ö.Lisesi	1997

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2001-2003	Muş Çöğürlü İ.Ö.O.	Öğretmen
2003-	Nahit Menteşe Lisesi	Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

—

Hobiler

Kitap okuma, Bilgisayar teknolojileri, Basketbol