



**ÇOK DEĞİŞKENLİ SÜREÇLERDE KONTROL DIŞI SİNYALİN
KAYNAĞININ BELİRLENMESİ**

Zümre ÖZDEMİR GÜLER

**DOKTORA TEZİ
İSTATİSTİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

TEMMUZ 2020

Zümre ÖZDEMİR GÜLER tarafından hazırlanan “ÇOK DEĞİŞKENLİ SÜREÇLERDE KONTROL DIŞI SİNYALİN KAYNAĞININ BELİRLENMESİ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi İstatistik Ana Bilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Mehmet Akif BAKIR

İstatistik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Başkan: Doç. Dr. Semra TÜRKAN

İstatistik Ana Bilim Dalı, Hacettepe Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Doç. Dr. Rukiye DAĞALP

İstatistik Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Doç. Dr. Filiz KARDİYEN

İstatistik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Doç. Dr. Hülya OLMUŞ

İstatistik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 22/07/2020

Jüri tarafından kabul edilen bu çalışmanın Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Zümre ÖZDEMİR GÜLER

22/07/2020

ÇOK DEĞİŞKENLİ SÜREÇLERDE KONTROL DIŞI SİNYALIN KAYNAĞININ BELİRLENMESİ

(Doktora Tezi)

Zümre ÖZDEMİR GÜLER

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2020

ÖZET

İlişkili kalite değişkenlerinin söz konusu olduğu çok değişkenli süreç kontrolünde, süreç dağılımının davranışını izlemek için çeşitli koşullar için geliştirilmiş çok değişkenli kontrol grafikleri mevcuttur. Bunların en bilinenlerinden birisi çok değişkenli dağılımın ortalama vektöründeki farklılaşmayı yakalamada kullanılan Hotelling T^2 kontrol grafiğidir. Ancak, Hotelling T^2 gibi geleneksel yöntemler çok değişkenli dağılım fonksiyonunun normal olmasını gerektirir ve genellikle dağılım ortalamasındaki görece büyük kaymaları yakalamakta başarılıdır. Çok değişkenli süreç kontrolü durumunda dağılım parametre vektöründeki anlamlı farklılaşmayı yakalamak kadar, bu kaymaya temelde neden olan marjinal dağılımın hangi değişken/değişkenlere ait olduğunun bilinmesi de önemlidir. Bu konuda geliştirilmiş çeşitli yöntemler olmakla birlikte, kaymaya neden olan değişkeni belirlemede değişken sayısının artması bu yaklaşımları yetersiz kılabilmektedir. Bu noktadan hareketle çalışmada çok değişkenli süreç kontrolünde geleneksel yöntemlerin kısıtlarını ve yetersizliklerini ortadan kaldırmak amacıyla, bağımsız bileşenler analizi, destek vektör makineleri ve hibrit bağımsız bileşenler analizi-destek vektör makineleri temelinde özgün bir yaklaşımla ele alınmıştır. Buna uygun olarak analizler çok değişkenli normal dağılıma uyan ve uymayan senaryolarda üretilen süreçler için simülasyon çalışması yapılarak gerçekleştirilmiştir. Sonuçlar önerilen yöntemlerin geleneksel yöntemlerin kısıt ve eksikliklerine karşılık önemli üstünlüklerinin olduğunu göstermektedir.

Bilim Kodu : 20508
Anahtar Kelimeler : Çok Değişkenli İstatistiksel Süreç Kontrolü, Bağımsız Bileşenler Analizi, Destek Vektör Makineleri
Sayfa Adedi : 138
Danışman : Prof. Dr. Mehmet Akif BAKIR

DETERMINATION OF THE SOURCE OF OUT OF CONTROL SIGNALS IN
MULTIVARIATE STATISTICAL PROCESSES

(Ph. D. Thesis)

Zümre ÖZDEMİR GÜLER

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2020

ABSTRACT

Multivariate statistical process control charts are widely used to detect shifts in processes where more than one inter-related quality variables. Shewhart type control charts, like Hotelling T^2 control chart, which has an important place in the literature, capable to detect the change in the process mean. However, traditional methods have constraints such that the change in small shifts cannot be detected and requires the assumption of normality. Although traditional methods can detect shifts in the process, it is not sufficient to determine the variables or variables that cause shifts. From this point of view, in the multivariate process control has been handled with a unique approach on the basis of independent components analysis, support vector machines and hybrid independent components analysis-support vector machines in order to eliminate the constraints and deficiencies of traditional methods. Accordingly, the analyzes were carried out by simulation studies were carried out for the data generated in one scenario for Gaussian and in three different scenarios for the non-Gaussian processes. The results show that the proposed methods have significant advantages over the constraints and shortcomings of traditional methods.

Science Code : 20508

Key Words : Multivariate Statistical Process Control, Independent Component Analysis, Support Vector Machines

Page Number : 138

Supervisor : Prof. Mehmet Akif BAKIR

TEŞEKKÜR

Akademik hayata adım attığım ilk günden itibaren sadece bu tez çalışmasında değil tüm çalışmalarında engin bilgi ve tecrübeleriyle bana her zaman yol gösteren, her anımda yanımda olan, her zaman emeklerinin hakkını verebilme kaygısıyla yoluma devam edeceğim çok kıymetli hocam Prof. Dr. Mehmet Akif BAKIR'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Hem meslek hem de özel hayatımda hiçbir konuda desteğini benden esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Filiz KARDİYEN'e ihtiyaç duyduğum her an paylaştığı derin bilgiler ve cesaret veren yaklaşımları için çok teşekkür ederim. Hocalarımla birlikte tez izleme komitemde yer alarak çalışmalarına değerli fikirleriyle katkı sunan saygıdeğer hocam Doç. Dr. Rukiye DAĞALP'e ayrıca teşekkürü bir borç bilirim. Tez çalışmamın tümünde emeğini ve desteğini benden esirgemeyen birlikte çalışmaktan hep mutluluk duyacağım sevgili dostum Arş.Gör. Atacan ERDİŞ'e de teşekkür etmek isterim.

Hayatımın bütün zorlu dönemlerinde olduğu gibi bu dönemde de kıymetli desteklerini benden esirgemeyen ve bana sonsuz anlayış gösteren canım annem Melek ÖZDEMİR ile canım babam Kemalettin ÖZDEMİR'e ve bugünlere gelmemde büyük emeği olan, yol gösteren canım ağabeyim Emre ÖZDEMİR'e ne kadar teşekkür etsem azdır.

Tez çalışmam süresince kendi sağlık problemleriyle mücadele etmesinin yanında bana destek olabilmek için elinden gelen çabayı gösteren sevgili kayınvalidem Mine GÜLER'e de çok teşekkür ederim.

Birlikte başlayıp birlikte bitirdiğimiz bu zorlu maratonda beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan, koşulsuz sevgi ve desteğiyle yanımda olan, cesaretlendiren sevgili yol arkadaşım, canım eşim Mehmet Atilla GÜLER'e ve yolculuğumuzun son dönemecinde hayatımıza katılarak bize şans getiren, geleceğe umutla bakmamızı sağlayan, moral kaynağımız canım kızımız Güzin İpek GÜLER'e gösterdikleri sabır ve anlayışları için teşekkür ederim. Bu tez çalışmasını hayatının ilk senesinde onunla geçirmekten çaldığım her anın somut bir karşılığı olarak, kayıp zamanları ziyadesiyle telafi etmek dileğiyle canım kızım İpek'e ithaf ediyorum.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	ix
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xiii
1. GİRİŞ.....	1
2. KAVRAMSAL ÇERÇEVE	9
2.1. İstatistiksel Süreç Değişkenliği.....	9
2.2. İstatistiksel Süreç Kontrolü.....	10
2.3. İstatistiksel Süreç Kontrol Grafikleri.....	14
2.4. Çok Değişkenli İstatistiksel Süreç Kontrolü.....	16
2.5. Çok Değişkenli Süreç Kontrolünde Kontrol Dışı Kaynağın Durumunun Belirlenmesi.....	19
3. ÖNERİLEN YÖNTEMLER	23
3.1. Bağımsız Bileşenler Analizi	23
3.1.1. Bağımsız bileşenler analizinde varsayım ve kısıtlamalar	25
3.1.2. Bağımsız bileşenler analizi için yapılması gereken ön hazırlıklar.....	29
3.1.3. Bağımsız bileşenler analizinin matematiksel çerçevesi	32
3.1.4. Bağımsız bileşenler analizinde kullanılan algoritmalar	35
3.1.5. Çok değişkenli istatistiksel süreç kontrolünde bağımsız bileşenler analizi yaklaşımı	36
3.2. Destek Vektör Makineleri.....	40
3.2.1. Doğrusal olarak ayrılabilen veriler için destek vektör makineleri	41

	Sayfa
3.2.2. Doğrusal olarak ayırlamayan veriler için destek vektör makineleri	45
3.2.3. Doğrusal olmayan destek vektör makineleri	49
3.2.4. Çok değişkenli süreç kontrolünde destek vektör makineleri yaklaşımı	52
3.3. Hibrit Bağımsız Bileşenler Analizi ve Destek Vektör Makineleri Yaklaşımı	56
4. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI VE BULGULAR	63
4.1. Veri Üretme Süreci	63
4.1.1. Normal dağılıma uyan veri üretme süreci	63
4.1.2. Normal dağılıma uymayan veri üretme süreci	64
4.2. Performans Analizi	65
4.3. Bulgular	68
4.3.1. Çok değişkenli normal dağılıma uyan sürece ilişkin bulgular	68
4.3.2. Çok değişkenli normal dağılım sürecine uygulanan yöntemlerin performanslarının karşılaştırılması	82
4.3.3. Çok değişkenli gamma dağılımına uyan sürece ilişkin bulgular	85
4.3.4. Çok değişkenli gamma dağılım sürecine uygulanan yöntemlerin performanslarının karşılaştırılması	116
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	125
KAYNAKLAR	131
ÖZGEÇMİŞ	137

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 3.1. Sıklıkla kullanılan kernel fonksiyonları.....	51
Çizelge 4.1. Gamma dağılımına uyan senaryolar ve ilgili marjinal dağılım parametreleri.....	65
Çizelge 4.2. Çok değişkenli normal dağılıma uyan süreçlerde I^2 kontrol grafiği ile elde edilen ARL değerleri.....	68
Çizelge 4.3. Çok değişkenli normal dağılıma uyan süreçte değişkenlerin BBA yaklaşımı ile hesaplanan I^2 üzerindeki katkı değerleri (*100)	71
Çizelge 4.4. Çok değişkenli normal dağılıma uyan süreçte PoC kontrol grafiği ile elde edilen ARL değerleri	72
Çizelge 4.5. Çok değişkenli normal dağılıma uyan süreçte DVM yaklaşımı ile hesaplanan PoC değerlerinin farklı değişim kombinasyonlarından elde edilen ortalamaları	75
Çizelge 4.6. Çok değişkenli normal dağılıma uyan süreçlerde $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafiği ile elde edilen ARL değerleri.....	77
Çizelge 4.7. Çok değişkenli normal dağılıma uyan süreçte Hibrit BBA-DVM yaklaşımı ile hesaplanan $I^2 - \text{PoC}$ değerlerinin farklı değişim kombinasyonlarından elde edilen ortalamaları.....	80
Çizelge 4.8. Çok değişkenli normal dağılıma uyan süreçte T^2 , I^2 , PoC ve $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafikleri için elde edilen ARL değerleri	83
Çizelge 4.9. Çok değişkenli gamma dağılımına uyan süreçlerde I^2 kontrol grafiği ile elde edilen ARL değerleri.....	86
Çizelge 4.10. Gamma_1 durumunda değişkenlerin BBA yaklaşımı ile hesaplanan I^2 istatistiği üzerindeki katkı değerleri (*100).....	89
Çizelge 4.11. Gamma_2 durumunda değişkenlerin BBA yaklaşımı ile hesaplanan I^2 istatistiği üzerindeki katkı değerleri (*100).....	90
Çizelge 4.12. Gamma_3 durumunda değişkenlerin BBA yaklaşımı ile hesaplanan I^2 istatistiği üzerindeki katkı değerleri (*100).....	92
Çizelge 4.13. Çok değişkenli gamma dağılımına uyan süreçlerde PoC kontrol grafiği ile elde edilen ARL değerleri	93
Çizelge 4.14. Gamma_1'de DVM yaklaşımı ile hesaplanan PoC değerlerinin farklı değişim kombinasyonlarından elde edilen ortalamaları	96

Çizelge	Sayfa
Çizelge 4.15. Gamma_2’de DVM yaklaşımı ile hesaplanan PoC değerlerinin farklı değişim kombinasyonlarından elde edilen ortalamaları	99
Çizelge 4.16. Gamma_3’te DVM yaklaşımı ile hesaplanan PoC değerlerinin farklı değişim kombinasyonlarından elde edilen ortalamaları	102
Çizelge 4.17. Çok değişkenli gamma dağılımına uyan süreçlerde I^2 – PoC kontrol grafiği ile elde edilen ARL değerleri	104
Çizelge 4.18. Gamma_1’te Hibrit BBA-DVM yaklaşımı ile hesaplanan I^2 – PoC değerlerinin farklı değişim kombinasyonlarından elde edilen ortalamaları	108
Çizelge 4.19. Gamma_2’de Hibrit BBA-DVM yaklaşımı ile hesaplanan I^2 – PoC değerlerinin farklı değişim kombinasyonlarından elde edilen ortalamaları	111
Çizelge 4.20. Gamma_3’te Hibrit BBA-DVM yaklaşımı ile hesaplanan I^2 – PoC değerlerinin farklı değişim kombinasyonlarından elde edilen ortalamaları	114
Çizelge 4.21. Gamma_1’de oluşturulan I^2 , PoC ve I^2 – PoC kontrol grafikleri için elde edilen ARL değerleri	117
Çizelge 4.22. Gamma_2’de oluşturulan I^2 , PoC ve I^2 – PoC kontrol grafikleri için elde edilen ARL değerleri	120
Çizelge 4.23. Gamma_3’te oluşturulan I^2 , PoC ve I^2 – PoC kontrol grafikleri için elde edilen ARL değerleri	122

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 3.1. BBA yaklaşımına ilişkin akış şeması	39
Şekil 3.2. Doğrusal olarak ayrılabilen veriler için DVM örneği.....	42
Şekil 3.3. Doğrusal olarak ayrılamayan veriler için DVM	46
Şekil 3.4. Doğrusal olmayan DVM.....	49
Şekil 3.5. Örneklerin özellik uzayına haritalanması	50
Şekil 3.6. DVM yaklaşımına ilişkin akış şeması	56
Şekil 3.7. Hibrit BBA-DVM yaklaşımına ilişkin akış şeması	61
Şekil 4.1. Çok değişkenli normal dağılıma uyan süreçte I^2 kontrol grafiği ile elde edilen ARL değerlerinin kayma miktarına göre değişimi	69
Şekil 4.2. Çok değişkenli normal dağılıma uyan süreçte PoC kontrol grafiği ile elde edilen ARL değerlerinin kayma miktarına göre değişimi	73
Şekil 4.3. Çok değişkenli normal dağılıma uyan süreçte $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafiği ile elde edilen ARL değerlerinin kayma miktarına göre değişimi	78
Şekil 4.4. Çok değişkenli normal dağılıma uyan süreçte T^2 , I^2 , PoC ve $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafiklerinden elde edilen ARL değerlerinin kayma miktarına göre değişimi: (a) $\rho_1 = 0,3$, (b) $\rho_2 = 0,5$, (c) $\rho_3 = 0,8$	84
Şekil 4.5. Çok değişkenli gamma dağılımına uyan süreçlerde I^2 kontrol grafiği ile elde edilen ARL değerlerinin kayma miktarına göre değişimi: (a) Gamma_1, (b) Gamma_2, (c) Gamma_3.....	87
Şekil 4.6. Çok değişkenli gamma dağılımına uyan süreçlerde PoC kontrol grafiği ile elde edilen ARL değerlerinin kayma miktarına göre değişimi: (a) Gamma_1, (b) Gamma_2, (c) Gamma_3.....	94
Şekil 4.7. Çok değişkenli gamma dağılımına uyan süreçlerde $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafiği ile elde edilen ARL değerlerinin kayma miktarına göre değişimi: (a)Gamma_1, (b)Gamma_2, (c)Gamma_3	106
Şekil 4.8. Gamma_1'de oluşturulan I^2 , PoC ve $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafiklerine ilişkin ARL değerlerinin kayma miktarına göre değişimi: (a) $\rho_1 = 0,3$, (b) $\rho_2 = 0,5$, (c) $\rho_3 = 0,8$	118

Şekil**Sayfa**

- Şekil 4.9. Gamma_2’de oluşturulan I^2 , PoC ve $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafiklerine ilişkin ARL değerlerinin kayma miktarına göre değişimi: (a) $\rho_1 = 0,3$, (b) $\rho_2 = 0,5$, (c) $\rho_3 = 0,8$ 121
- Şekil 4.10. Gamma_3’te oluşturulan I^2 , PoC ve $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafiklerine ilişkin ARL değerlerinin kayma miktarına göre değişimi: (a) $\rho_1 = 0,3$, (b) $\rho_2 = 0,5$, (c) $\rho_3 = 0,8$ 124

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
θ_2	Gamma dağılımı ölçek parametresi
α	I. Tip hata
β	II. Tip hata
$I^2 - \text{PoC}$	Hibrit BBA-DVM yöntemine ilişkin süreç izleme istatistiği
σ_{ij}	i. ve j. değişkenler arasındaki kovaryans
I^2	BBA yöntemine ilişkin süreç izleme istatistiği
T^2	Hotelling T^2 süreç izleme istatistiği
δ	Kayma miktarı
μ_0	Çok değişkenli normal dağılım hedef ortalama vektörü
Σ_0	Çok değişkenli normal dağılım hedef var-kov matrisi
ρ_1	Değişkenler arasındaki düşük korelasyon katsayısı
ρ_2	Değişkenler arasındaki orta korelasyon katsayısı
θ_1	Gamma dağılımı şekil parametresi
σ_i^2	i. değişkenin varyansı
σ_i	i. değişkenin standart sapması
ρ_3	Değişkenler arasındaki yüksek korelasyon katsayısı
PoC	DVM yöntemine ilişkin süreç izleme istatistiği

Kısaltmalar	Açıklamalar
AKS	Alt kontrol sınırı
ARL	Ortalama işletim uzunluğu
BBA	Bağımsız bileşenler analizi

Kısaltmalar**Açıklamalar****ÇİSK**

Çok değişkenli istatistiksel süreç kontrolü

DVM

Destek vektör makineleri

EWMA

Üstel ağırlıklı hareketli ortalama

FOC

Sinyal işleme koşulu

İSK

İstatistiksel süreç kontrolü

KSA

Kör sinyal ayrıştırma

MTY

Mason, Tracy, Young

NOC

Normal işleme koşulu

OÇ

Orta Çizgi

ÖDA

Özdeğer ayrıştırması

TBA

Temel bileşenler analizi

ÜKS

Üst kontrol sınırı

1. GİRİŞ

İstatistiksel Süreç Kontrolü (İSK) bir prosesin hedeflenen dağılım parametrelerine sahip çıktı verip vermediğini izleme faaliyetidir. İSK yöntemleri, tanımlanabilir ve/veya sistematik nedenlere dayanan değişkenliğin yol açtığı kontrol dışı durumu yakalamayı amaçlar. Günümüzde sanayide, iki veya daha fazla ilgili kalite süreci özelliğinin eş zamanlı izleme veya kontrolünün gerekli olduğu pek çok durum vardır. Birbirleriyle ilişkili iki veya daha çok değişkenle ilgilenilen İSK problemlerinin tamamı Çok Değişkenli İstatistiksel Süreç Kontrolü (ÇİSK) olarak bilinir. ÇİSK, İSK'nın en hızlı gelişen alanlarından biridir.

İSK'daki araştırmaların çoğunda grafiksel yöntemler kullanılır. Bu bağlamda, çok değişkenli kontrol grafikleri kontrol dışı durumu tespit etmek için İSK'da kullanılan güçlü bir araçtır. Jackson (1991) herhangi birçok değişkenli kalite kontrol prosedürünün dört şartı yerine getirmesi gerektiğini vurgulamıştır. Bunlardan ilki “süreç kontrol altında mı?” sorusuna cevap verilmesidir. İkinci olarak, “kontrol dışı durumun yanlış tanımlanması” olayı için genel bir olasılık belirlenmelidir. Üçüncüsü, değişkenler arasındaki ilişki dikkate alınmalıdır. Son olarak, prosedürler “süreç kontrol dışındaysa, problem nedir?” sorusunu cevaplamaya uygun olmalıdır. Jackson'ın bahsettiği bu dördüncü koşul ÇİSK'teki önemli problem alanlarından biridir ve bu tez bu hususu merkeze alarak yapılan bir çalışmadır.

Geleneksel İSK yöntemleri, birbirini takip eden gözlem vektörlerinin bağımsız olduğu varsayımına dayanmaktadır. Ancak son yıllarda teknolojik gelişmelerin hızla ilerlemesi niteliksel ve niceliksel verilere kolaylıkla ulaşabilmeyi sağlamaktadır ve dolayısıyla süreçlerin çok boyutlu modellenmesine neden olmaktadır. Bu durumda süreçte yer alan değişkenler genellikle birbirleri ile ilişkili olmakta ve değişkenler arasındaki ilişkiler sürecin tanımlanmasında önemli bir rol üstlenmektedir. Üretim süreçlerinde kalite karakteristiklerinin izlenmesi aralarındaki bağımlılık yapısından dolayı eşanlı olarak gerçekleştirilmelidir. İki veya daha fazla kalite karakteristiğinin eşzamanlı kontrolünün gerekli olduğu durumlarda, kalite karakteristiklerini birbirinden bağımsız olarak incelemek yanıltıcı sonuçlara neden olabilmektedir. Woodall ve Montgomery (1999), genelde süreçlerde birbiriyle ilişkili çok sayıda değişken olduğundan, bu alanda daha fazla araştırma yapılması gerektiğini vurgulamışlardır. Birbiriyle ilişkili iki veya daha fazla kalite

karakteristiğinin eşzamanlı kontrol edilmesi ve izlenmesi için ÇİSK yöntemlerinin geliştirilmesi önem arz etmektedir.

ÇİSK'te, kontrol dışı durumun saptanmasının yanı sıra, kontrol dışı duruma sebep olan değişkenin tespit edilmesi de önemli bir problem alanıdır. Literatürde bu konuyu ele alan birçok çalışma bulunmaktadır.

Bu çalışmalardan ilki Alt (1985) tarafından önerilen Bonferroni sınırlarıdır. Hayter ve Tsui (1994), bir simülasyon çalışması ile değişkenlerin her biri için eş zamanlı kontrol aralıklarına ilişkin bir prosedür ile Bonferroni tipi kontrol sınırlarını genişletmişlerdir. Ancak bu yöntemin yalnızca iki kalite karakteristiği olması durumunda uygulanabilmesi ve kontrol dışına çıkan noktaların sırasının belirlenememesi gibi dezavantajları vardır. Eliptik kontrol bölgesinin yorumlanması problemine Chua ve Montgomery (1992) de diskriminant analize dayalı prosedürler geliştirerek başka bir çözüm getirmiştir.

Mason, Tracy ve Young (1995) tanı amacıyla T^2 ayrıştırmasını kullanmışlardır. Ancak bu yaklaşım, kapsamlı hesaplamalar ve ayrıntılı ayrıştırmalar gerektirdiğinden değişken sayısının artması durumunda hesaplama açısından zorluk yaşanmasına sebep olmaktadır ve kökten tanı koymada sınırlı bir yeterliliğe sahiptir. T^2 istatistiğini her bir değişkenin katkısını yansıtabilecek şekilde bileşenlerine ayırmak üzerine geliştirilen bir diğer kullanışlı yaklaşım Runger ve ark. (1996b) tarafından önerilmiştir. Daha sonra Mason ve ark. (1997) hesaplama yükünü büyük ölçüde azaltan bir algoritma önermişlerdir.

Üretim süreçlerinin güvenle yürütülebilmesi için süreçteki kontrol dışı sinyalin hızlı bir şekilde tespit edilmesi, süreçteki bu kontrol dışı durumun kaynağının belirlenmesi ve süreçteki sorunun giderilmesi önemlidir. Bununla birlikte, tek bir üretim biriminde yüzlerce değişken izlenebilir ve bu değişkenler birim zamanda defalarca kaydedilebilir. Böyle durumlarda eğer sürece uygun bir izleme tekniği kullanılmazsa bu verilerden sınırlı sayıda bilgi elde edilir. Bu nedenle, süreç değişkenlerini çok boyutlu bir uzaydan az boyutlu uzaya taşıyarak verinin önemli özelliklerini ve anahtar değişkenleri tanımlayabilecek yöntemlerin geliştirilmesi gerekir.

Çok boyutlu ve ilişkili süreç değişkenlerini analiz etmek için Temel Bileşenler Analizi (TBA) gibi çok değişkenli istatistiksel yöntemleri kullanan birçok izleme algoritması

önerilmiştir. Bu bağlamda ilk olarak Jackson (1959) çok değişkenli bir süreci izlemek amacıyla temel bileşenler için T^2 kontrol grafiğini önermiştir. Daha sonra Jackson ve Mudholkar (1979) ve Jackson (1980) TBA'yı ÇİSK'in bir aracı olarak incelemişlerdir. Ayrıca ÇİSK'te TBA kullanımının çeşitli uzantıları geliştirilmiştir. Örneğin, parçalı (batch) süreçleri izlemek için çok-yönlü TBA-Kısmi En Küçük Kareler (PLS) (Wold ve ark., 1987); çok büyük süreçleri izlemek için çok-katlı TBA-PLS (Macgregor ve ark., 1994); bir TBA modelindeki süreç dinamikleri için dinamik TBA (Ku ve ark., 1995) gibi birçok çeşitli yöntem önerilmiştir. Literatürde ayrıca sinyal izlemeye dayalı olarak geliştirilen TBA yaklaşımları da mevcuttur. Bakshi (1998) tarafından geliştirilen dalga analizine dayalı çok ölçekli TBA bu yaklaşımlardan biridir. Kano ve ark. (2001), temel bileşenlerin yönündeki değişimi izleyen hareketli TBA prosedürünü önermişlerdir.

Proses sistemlerinde izlenen değişkenlerin bağımsız olmadığı durumlar bulunmaktadır. Böyle durumlarda, süreçteki gözlenen değişkenler, çok değişkenli analizde gizli (latent) değişkenler olarak da bilinen, doğrudan ölçülemeyen bağımsız değişkenlerin kombinasyonları olabilir. Gözlenen değişkenlerin altında yatan bu faktör ya da bileşenleri ortaya çıkarmak için bağımsız bileşenler analizi (BBA) tekniği kullanılır.

TBA ve BBA'nın her ikisi de gözlenen süreç değişkenlerinin doğrusal dönüşümleridir. Her iki yöntemde de elde edilen bileşenler basitçe gözlenen değişkenlerin ağırlıkları olarak tanımlanabilir. BBA, TBA'nın kullanışlı bir uzantısı gibi görünse de bir yöntem diğerinin özel veya genel hali değildir. Kullanım amaçları başta olmak üzere birçok yönleriyle birbirlerinden farklılaşırlar.

TBA, korelasyonsuz bileşenleri, BBA ise tamamen istatistiksel olarak bağımsız olan bileşenleri bulur. Burada "istatistiksel bağımsızlık" ve "korelasyonsuzluk" kavramları arasındaki ilişkiyi bilmek önemlidir. İstatistiksel bağımsızlık, korelasyonsuzluktan daha kesindir çünkü değişkenlerin bağımsız olduğu biliniyorsa aralarında korelasyon olmadığı söylenebilir ancak bunun tersi doğru olmayabilir. TBA ile veriler korelasyonsuz hale getirilebilir ancak aralarında korelasyon olmayan verinin aynı zamanda bağımsız olduğu söylenemez. Oysa BBA ile bileşenler tamamen birbirinden bağımsız hale gelecek şekilde tahmin edilir. TBA'daki ortogonalite kısıtından dolayı değişkenlerin en fazla ikinci mertebeden istatistiklerine kadar bilgi sağlanır; BBA da ise ortogonalite kısıtı olmadığından daha yüksek mertebeden istatistikler ile daha fazla bilgiye ulaşılabilir. Dolayısıyla eğer amaç

süreçte boyut indirgemek ise TBA kullanmak faydalı olacaktır. Ancak eğer amaç daha az boyuttan ziyade daha anlamlı boyutlar elde etmek ise BBA'yı kullanmak daha iyi bir tercih olacaktır.

Kano ve ark. (2003), TBA ve Bağımsız Bileşenler Analizi (BBA) bileşenlerini İSK grafiklerine uygulayarak, BBA'ya dayalı yeni bir istatistiksel süreç kontrolü yöntemi önermişler ve izleme sonuçlarını karşılaştırmışlardır. Elde edilen sonuçlar, süreç değişkenleri normal olmayan bir dağılım izlediğinde BBA bileşenlerinin TBA bileşenlerinden daha etkili olduğunu göstermiştir. BBA tekniğinin normal olmayan bir süreci izleyebildiği söylene bile, bileşenler İSK grafikleri ile bireysel olarak izlendiğinde yanlış alarm verebilir. Bu nedenle, Lee ve ark. (2004) süreci izlemek için BBA tabanlı üç izleme istatistiği geliştirmiştir. Ayrıca, Lee, Qin ve Lee (2006) orjinal BBA algoritmasının, hem çıkarılan bağımsız bileşen sayısının hem de bağımsız bileşenlerin uygun sırasının önceden belirlenememesi gibi dezavantajlarının üstesinden gelebilmek için değiştirilmiş bir BBA önermişlerdir. Yoo ve ark. (2004) süreç izleme için çok yönlü BBA tabanlı bir izleme şeması geliştirmişlerdir. Lu ve ark. (2006) mühendislikte süreç kontrolü ve İSK'yı entegre etmek için BBA uygulamışlardır. Ge ve Song (2007) hata tespiti amacıyla normal ve normal olmayan bilgileri çıkarmak için TBA- BBA yöntemi önermişlerdir. Hsu, Che ve Liu (2010) ise BBA'ya ve düzeltilmiş aykırı gözlemlere dayanan bir süreç izleme şeması geliştirmişlerdir.

Geleneksel kontrol grafikleri için kontrol sınırlarının tasarımı genellikle kalite özelliklerinin çok değişkenli normal bir dağılım izlediği varsayımına dayanır. Bununla birlikte, bu durum gerçek hayatta geçerli olmayabilir. Literatürde bu probleme çözüm getirmek üzere, sınıflandırma problemleri için yaygın olarak kullanılan ve dağılım varsayımı gerektirmeyen Destek Vektör Makinesi (DVM) yaklaşımının kullanıldığı birçok başarılı uygulama mevcuttur. Bunlardan biri Sun ve Tsung (2003) tarafından önerilen kernel uzaklığına dayalı çok değişkenli kontrol grafikleridir. Önerilen bu kontrol grafiklerindeki kernel uzaklığı DVM kullanılarak hesaplanmıştır. Çalışma ile önerilen yöntemin, kalite karakteristikleri çok değişkenli normal dağılıma uymadığında geleneksel izleme yöntemlerinden daha iyi performans sergilediği gösterilmiştir.

Chongfuangprinya ve ark. (2011)'nin çalışmasında, çok değişkenli süreç izlemeyi geliştirmek için, bir DVM algoritması, bir bootstrap yöntemi ve bir kontrol grafiği tekniği

birleştirilerek yeni bir ÇİSK grafiği önerilmiştir. Önerilen grafikte, izleme istatistiği olarak, bir DVM algoritmasından tahmin edilen sınıflandırma olasılıkları kullanmıştır. SVM-PoC olarak adlandırılan bu grafiğin kontrol sınırları bootstrap yöntemi ile tahmin edilen PoC istatistiklerinin çeyreklikleri ile elde edilir. Bu çalışmanın sonucunda da geliştirilen SVM - PoC grafiğinin, normal olmayan durumlarda diğer ÇİSK grafiklerine göre daha iyi performans sergilediği gösterilmiştir. Ayrıca küçük kaymalara olan hassasiyeti arttırmak için, SVM-PoC grafiğinin üstel ağırlıklı hareketli ortalama (EWMA) versiyonu geliştirilmiştir.

DVM yaygın olarak kullanılan denetimli öğrenme algoritmalarından biridir ve normal olmayan dağılımlardan yüksek boyutlu verileri etkin bir şekilde işleyebilir (Hastie ve Tibshirani, 1998).

Yüksek boyutlu verilerle çalışırken DVM'ye dayalı başarılı bir süreç izleme yaklaşımı geliştirmek için öncelikle özellik çıkarımı yapan yöntemlerden faydalanmak gerekir. Örneğin, Liu (2009), DVM uygulamadan önce yüksek boyutlu mikro dizi verilerinin boyutunu indirgemek için yeni bir dalgacık özelliği çıkarma tekniği önermiştir. Bunun dışında literatürde iyi bilinen özellik çıkarımı yöntemlerinden BBA ile denetimli öğrenme algoritmalarından DVM'nin birlikte ele alındığı yaklaşımlar da geliştirilmiştir.

Hsu ve ark. (2010), BBA ve DVM'nin entegre edilmesine dayanan yeni bir yöntem geliştirmişlerdir. Önerilen yöntem ile TBA-DVM ile karşılaştırılmış ve çok değişkenli süreçlerdeki kaymayı tespit etme oranı açısından daha üstün olduğu sonucu elde edilmiştir. Bunun nedeni BBA'nın daha yüksek mertebeden istatistikleri dikkate almasıdır. BBA bu özelliğiyle DVM'nin hataları algılaması için daha yararlı bilgiler sağlayabilir.

Shao ve ark. (2012) çalışmalarında, çok değişkenli bir süreçte, kaymaya neden olan kalite değişkenlerini belirlemek için BBA ve DVM'yi birleştiren bir hibrid tasarım önermişlerdir. Önerilen hibrid BBA-DVM yaklaşımında, ilk olarak bağımsız bileşenleri üretebilmek için ÇİSK grafiğindeki Hotelling T^2 değerlerine BBA uygulanmıştır. BBA ile elde edilen bağımsız bileşenler daha sonra sınıflandırma işlemini gerçekleştirmek için DVM'nin girdi değişkenleri olarak kullanılmıştır. Ayrıca bu çalışmada, çeşitli süreç tasarımlarının performansı araştırılmış ve tipik sınıflandırma yöntemleri ile karşılaştırılmıştır. Önerilen

yaklaşım kullanılarak, çok değişkenli bir süreçte kaymaya sebep olan kalite değişken/değişkenlerinin doğru ve güvenilir bir şekilde belirlenebileceği gösterilmiştir.

ÇİSK'te kullanılan süreci izlemek için kullanılan en önemli istatistiksel araçlar çok değişkenli kontrol grafikleridir. Literatürde çok değişkenli dağılımın ortalama vektöründeki farklılaşmayı tespit etmek amacıyla kullanılan en bilinen çok değişkenli kontrol grafiği Hotelling T^2 kontrol grafiğidir. Geleneksel çok değişkenli kontrol grafikleri çok değişkenli süreç dağılım fonksiyonunun normal dağılıma uyması gibi varsayımlara dayanır. Ayrıca Hotelling T^2 gibi geleneksel Shewhart tipi kontrol grafikleri süreç ortalama vektöründe meydana gelen kayma miktarına karşı duyarlıdır. ÇİSK'de süreçte meydana gelen kaymayı tespit etmek kadar, bu kaymaya sebep olan değişken/değişkenlerin tanımlanması da önemlidir. Bu konuya ilişkin geliştirilen birçok yaklaşım vardır. Ancak ilgilenilen değişken sayısı arttığında kaymaya neden olan değişken/değişkenleri tanımlamada bu yaklaşımların kullanılması hesaplama açısından zorluk yaratabilir. Bu bağlamda çalışmada, ÇİSK'te dağılım ortalama vektöründeki anlamlı farklılaşmayı yakalamak ve bu farklılaşmanın temelinde yatan marjinal dağılımın ait olduğu değişken/değişkenleri tanımlamak amacıyla geleneksel yöntemlerin (normallik varsayımı gerektirmesi, kayma miktarına olan duyarlılığı ve değişkenler arasındaki bağımlılık yapısı vb) gibi kısıtları göz önünde bulundurularak farklı yöntemler önerilmiştir. Bu yöntemlerden biri olan BBA, aralarında güçlü bağımlılık yapısı olan değişkenlerin olduğu birçok değişkenli süreçte gözlenen değişkenlerin temelinde yer alan bileşenleri olabildiğince bağımsız olacak şekilde ortaya çıkartarak, değişkenler arasındaki korelasyon yapısından kaynaklanacak bilgi karmaşıklığının giderilmesini sağlar. Çalışma kapsamında tarafımızca önerilen bir diğer yaklaşım, herhangi bir varsayım veya kısıtlama gerektirmeksizin iyi bir sınıflandırma yöntemi olan DVM'dir. DVM'nin kullanılması özellikle normal olmayan süreçler için elverişlidir. Son olarak, veriler arasındaki bağımlılık yapısını koruyarak öz nitelik ayırıştırması yapan BBA ile normallik varsayımını gerektirmeyen bir sınıflandırıcı olan DVM'nin birleştirilmesi ile dağılımın ortalama parametresinde gerçekleşecek kaymayı daha hızlı yakalayabilen karma bir prosedür olan BBA-DVM yöntemi yine tarafımızca geliştirilmiştir.

İSK'da kullanılan yöntemlerin kontrol dışı sinyali yakalama performansı Ortalama İşletim Uzunluğu (ARL) ile belirlenir. ARL, süreçte herhangi bir farklılaşma gerçekleşmeden önce çekilmesi gereken gözlem sayısının beklenen değeridir. Başka bir deyişle, iki sinyal arasındaki ortalama örneklem sayısıdır. Bu bağlamda çalışma kapsamında önerilen

yöntemler ve geleneksel yöntemlerden biri olan Hotelling T^2 kontrol grafiği, ARL değerleri ile performansları açısından karşılaştırılmışlardır. Kaymaya sebep olan değişken veya değişkenlerin tespit edilmesi için her yöntemin farklı değişim kombinasyonlarından elde edilen test istatistiklerinin fark kare toplamalarına dayalı yeni ölçütler geliştirilmiştir. Bu ölçütler modeldeki değişkenler arasındaki ilişki düzeyi (korelasyon) ve ortalama vektöründe yaratılan kayma miktarı faktörleri bakımından değerlendirilmiştir. Sonuç olarak çalışmada önerilen yaklaşımların normal ve normal olmayan çok değişkenli süreçlerde ortalama vektöründe gerçekleşen bir kayma sebebiyle süreçte oluşan kontrol dışı durumu hızlıca belirleyebildiği ve sinyale neden olan değişken/değişkenleri doğru bir şekilde tespit edebildiği gösterilmiştir.

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde literatür taraması yapılmıştır. Kavramsal çerçevenin yer aldığı ikinci bölümde istatistiksel süreç değişkenliği, ÇİSK, ÇİSK'te kontrol dışı durumun tespit edilmesi ve ÇİSK'te kontrol dışı durumun kaynağının tespit edilmesi konuları ele alınmıştır. Bu çalışma ÇİSK'te süreç ortalamasında gerçekleşen kaymanın tespit edilmesinde kullanılan geleneksel yöntemler karşısında BBA ve DVM'nin daha iyi bir alternatif olduğu düşüncesi üzerine kuruludur. Bunun yanında, çalışmada belirtilen iki alternatif yöntemden hareketle hibrit BBA-DVM adı altında bir yöntem daha geliştirilmiştir. Süreç ortalamasındaki kaymanın belirlenmesinin yanında geleneksel yöntemlerin değişime sebep olan değişken/ değişkenlerin belirlenmesi konusunda pratik bir yol sunmadığı bilinmektedir. Buna karşılık tezde ele alınan üç alternatif yöntem bu açıdan da geliştirilerek literatüre katkı sunulması hedeflenmiştir. Çalışmanın üçüncü bölümü bu yöntemlerin teorik ve matematiksel altyapısını içermektedir. Simülasyon çalışması ve bulguların yer aldığı dördüncü bölümde ilk olarak veri üretme süreci açıklanmıştır. Bu çalışmada çok değişkenli normal dağılıma uyan ve uymayan iki farklı veri üretme süreci tasarlanmıştır. Buna ek olarak, yöntemlerin performans analizleri ortaya konulmuş, yapılan simülasyon çalışmalarının bulguları sunulmuş ve yorumlanmıştır. Beşinci ve son bölümde çalışmaya ilişkin sonuçlar tartışılmış ve geliştirilen öneriler özetlenmiştir.

2. KAVRAMSAL ÇERÇEVE

Bu bölümde çalışmanın temelini oluşturan teorik bilgilere yer verilmiştir. Bu bağlamda öncelikle istatistiksel süreç değişkenliği kavramsal açıdan anlatılmış, daha sonra çok değişkenli istatistiksel süreç kontrolünde kontrol dışı durumun saptanması ve kontrol dışı durumun kaynağının belirlenmesi problemleri açıklanmıştır.

2.1. İstatistiksel Süreç Değişkenliği

İktisadi ya da finansal krizler, politika değişiklikleri, kültürel ve teknolojik değişiklikler gibi dışsal olaylar, uygulamalarda ele alınan gözlem serilerinin bazı özelliklerinin değişmesine sebep olabilir. Günlük hayatta pek çok fiziksel, ekonomik ve endüstriyel sürecin önemi, bu sistemlerde herhangi bir değişiklik olduğunda ne olacağı konusunda kaçınılmaz bir soruyu beraberinde getirir. Değişime uğrayan süreçlerde, bu değişimin modelleme üzerindeki olumsuz yansımaları dikkate alınarak, yaratacağı etkinin azaltılması veya yok edilmesi gerekir.

Gözlem serilerinde değişim olduğunda, bu değişim göz ardı edilerek analizlere devam edilirse yanlış sonuçlar elde edilebilir. Bu nedenle, serilerde bir farklılaşma olup olmadığının tespit edilmesi, eğer bir farklılaşma söz konusu ise farklılaşmanın gerçekleştiği noktanın tahmin edilmesi, farklılaşmaya sebep olan değişken/değişkenlerin belirlenmesi ve seride başka bir değişim olup olmadığının tespit edilmesi için sürecin izlenmesi gibi problemlerin dikkate alınması gerekir.

Endüstriyel süreçlerde amaç, üretilen ürünlerin kalite değişkenlerinin süreç dağılımının hedeflenen parametrelerine uygun olmasını sağlamaktır. Bazen süreç durağan bir şekilde işliyorken bile rastgele ve kontrol edilemez kaynaklardan ortaya çıkan “doğal değişkenliğe” uğrayabilir. Süreçteki doğal değişkenlik giderilemez ve sadece şansa bağlı bu değişkenliğin olduğu sürecin kontrol altında olduğu kabul edilir. Öte yandan, süreçte operatör hatası, makinenin yanlış ayarlanması gibi rastgele olmayan, tanımlanabilir kaynaklardan ortaya çıkan değişkenlik örnekleriyle de karşılaşılabilir. Bu tür değişkenliğe “özel değişkenlik” denir ve bu durumda çalışan bir sürecin kontrol dışında olduğu söylenir. Bir üretim süreci ne kadar uzun süre kontrol altında çalışırsa o kadar başarılıdır ve bu dönemde süreçten kabul

edilebilir ürün elde edildiği varsayılır. Ancak, süreçte kalite değişkenlerinin hedeflenen dağılım parametrelerinden anlamlı derecede sistematik bir farklılaşma da söz konusu olabilir. Bu durumda sorunun düzeltilebilmesi için bu farklılaşmanın hızlı bir şekilde yakalanması gerekir. Kontrol dışı durumun saptanması gecikirse, çok sayıda arızalı veya uygun olmayan ürünler üretilir ve bu da önemli derece israf ve maliyet artışına sebep olur.

2.2. İstatistiksel Süreç Kontrolü

İSK, bir ürünün önemli özelliklerinin gözlendiği, değerlendirildiği ve belirli standart değerlerle karşılaştırıldığı istatistiksel bir araçtır. İSK'nın amacı, süreçteki değişkenliğin azaltılması ve üretim boyunca karşılaşılan kontrol dışı durumların kaynaklarını izole etmektir (Walpole ve ark., 2012).

İSK'da süreçteki değişkenliğin azaltılarak süreci iyileştirmek amacıyla kullanılan kalite araçlarına kontrol grafikleri denir (Montgomery, 2009). Süreç kontrol grafikleri, süreç davranışını görüntülemeye yarayan istatistiksel temelli çizelgelerdir. Grafiklerin genel teorisi 1920'lerde Walter A. Shewhart tarafından geliştirilmiştir (Mitra, 1998). Grafiklere ilişkin pek çok temel özellik Shewhart grafikleri için sunulmuş olsa da literatürde geliştirilen farklı grafikler de vardır. Bir kontrol grafiği, ilgilenilen kalite değişkeninin zamana veya zamanla ilgili olabilecek farklı bir sıralı bilgiye göre değişiminin istatistiksel ilkelere göre izlenmesine imkan sağlayan grafiksel gösterimdir (Staphenhurst, 2005). Bu bağlamda, kontrol grafiklerinin üretim sürecinden ardışık olarak örnekleme yoluyla seçilen ürünlerin ilgili kalite değişkeni değerlerinin bir zaman serisi grafiği olduğu söylenebilir. Kontrol grafikleri, İSK'da sürecin kontrol altında veya kontrol dışında olduğu davranışı hakkında bilgi veren istatistiksel araçlardır. Kontrol grafikleri, sürecin izlenmesine, süreçteki değişkenliğin tespit edilmesine ve giderilmesine yardımcı olurlar. Aynı zamanda, üretim sürecinin müşteri isteklerini temsil eden spesifikasyon sınırlarına uygun olup olmadığını da gösterirler.

Süreç kontrolünde kullanılan en önemli istatistiksel araç olan kontrol grafikleri süreçteki farklılaşmayı en kısa sürede yakalayacak şekilde tasarlanır. Tipik bir kontrol grafiğinin üç temel bileşeni vardır: Orta Çizgi (OÇ), Üst Kontrol Sınırı (ÜKS) ve Alt Kontrol Sınırı (AKS). Kontrol grafiğinde işaretlenen noktalar (süreçte ilgilenilen kalite değişkenine ait

süreç izleme istatistikleri) ve sürecin örneklem ortalaması (OÇ), AKS ve ÜKS arasında rastgele dağıldığı sürece prosesin kontrol altında olduğu kabul edilir. Eğer grafikte işaretlenen bir nokta kontrol sınırlarını aşıyorsa ya da grafikte işaretlenen noktalar rastgele olamayan, tanımlanabilir bir örüntü sergiliyorsa (ard arda gelen 14 noktanın 12'sinin OÇ'nin üzerinde kalması gibi) sürecin kontrol dışında olduğu söylenir (Mitra,1998).

Bir sürecin kontrol grafikleri ile izlenmesi öncelikle sürecin kontrol altında olduğu durumu incelemeyi, daha sonra buradan edinilen bilgi ile süreçteki kontrol dışı durumların belirlenmesini içerir. Buradan hareketle, sürecin kontrol grafikleriyle izlenmesi iki farklı evrede gerçekleştirilir. Evre 1, verilerin geçmişe yönelik analizini gösterir. Bu evrede parametre tahmini, grafiğe ilişkin bileşenlerin elde edilmesi, grafiğin tasarlanması gibi işlemler yapılır. Evre 2'de ise Evre 1'de elde edilen grafik parametreleri kullanılarak kontrol dışı durumların saptanmasını sağlayan ileriye yönelik yapılan analizlerden oluşur.

Kontrol grafikleri genellikle süreçten çekilen veriler aracılığıyla sürecin gerçekten kontrol altında olduğuna karar verilmesinin ardından kontrol sınırlarının oluşturulması ve daha sonra çekilecek olan verilerin bu sınırlar ile izlenmesi yaklaşımına dayalı olarak geliştirilir. ϕ , ilgilenilen bir kalite değişkenini olmak üzere; $\hat{\phi}$, ϕ 'nin tahmin edicisidir. Buna göre, $E(\hat{\phi})$ ve $\sigma(\hat{\phi})$ sırasıyla $\hat{\phi}$ 'nin ortalamasını ve standart sapmasını göstermektedir. Bu durumda kontrol grafiğindeki AKS, OÇ, ve ÜKS Eş.2.1'deki gibi hesaplanabilir (Mitra, 1998).

$$\begin{aligned} \text{AKS} &= E(\hat{\phi}) - \delta \sigma(\hat{\phi}) \\ \text{OÇ} &= E(\hat{\phi}) \\ \text{ÜKS} &= E(\hat{\phi}) + \delta \sigma(\hat{\phi}) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Burada δ , OÇ'den en fazla kaç standart sapma kadar uzaklaşılabileceğini gösteren değerdir. $\delta = 3$ olduğunda, “ 3σ kontrol sınırları” olarak bilinen özel sınırlar elde edilir.

Belirlenen kontrol sınırlarının, ilgilenilen kalite değişkeninin değerlendirilmesi amacıyla kullanılması iki çeşit hata meydana getirir. Bunlar; sürecin kontrol altındayken kontrol dışında görünme olasılığını gösteren 1. tip hata (α) ve süreç kontrol dışındayken kontrol

altında görünme olasılığını gösteren 2. Tip hata (β)'dır ve Eş. 2.2'deki gibi birer koşullu olasılık olarak ifade edilir:

$$\begin{aligned} P(\text{süreç kontrol dışında} | \text{süreç kontrol altında}) &= \alpha \\ P(\text{süreç kontrol altında} | \text{süreç kontrol dışında}) &= \beta \end{aligned} \quad (2.2)$$

Herhangi bir özel neden olmaksızın süreç izleme istatistiği kontrol sınırlarını aştığında 1. tip hata (α) meydana gelir. Bu durum hatalı sinyal alınmasına neden olur. 1. tip hata söz konusu iken, sinyal alınmasına rağmen herhangi bir düzeltici faaliyete ihtiyaç duyulmayabilir. Süreçte giderilebilir bir sorun varsa ve kontrol grafiği bu değişkenliği doğal değişkenliğin bir parçası olarak değerlendirip, sinyal vermiyorsa 2. Tip hata (β) oluşur. Bu durumda da aslında düzeltilmesi gereken bir problemin gözden kaçmasına neden olur (Bissel, 1994).

Normal dağılıma uyan bir süreçte çizilen tipik bir kontrol grafiğinde, kontrol sınırları süreç dağılımının hedeflenen ortalamasından $\pm 3\sigma$ uzak olacak şekilde belirlenir. Örnek istatistiği normal dağıldığında ve 3σ kontrol sınırları dikkate alındığında 1. Tip hata olasılığı, süreçte izlenen bir noktanın AKS'nin altında olma olasılığı (0,00135) ile ÜKS'nin üzerinde olması olasılığının (0,00135) toplam değeri olan 0,0027'dir. Başka bir deyişle, 3σ kontrol sınırları ile izlenen bir süreç kontrol altındayken, süreçteki 10000 noktadan yaklaşık 27 tanesinin kontrol sınırlarını aştığı söylenebilir. Bu problemin üstesinden gelebilmek için kontrol sınırlarını büyütme bir çözüm sağlayabilir ancak bu da süreç ortalamasında meydana gelen gerçek bir kaymanın gözden kaçmasına ve dolayısıyla 2. Tip hata olasılığının artmasına sebep olabilir.

Kontrol grafiklerinde, AKS ve ÜKS'den farklı olarak ikaz sınırları da kullanılabilir. İkaz sınırları normal dağılım varsayımı altında OÇ'nin $\pm 2\sigma$ uzağına çizilir. Süreç izleme istatistiği değerleri kontrol sınırları dışına çıkmadığı halde ikaz sınırlarını aşıyorsa sürecin şimdilik kontrol altında olduğu fakat kontrol dışına çıkmaya aday olduğu şeklinde yorum yapılabilir (Mitra, 1998).

Kontrol grafiklerinin performansının olabildiğince doğru şekilde ölçülmesi, kalite süreçlerinin istatistiksel olarak izlenmesi açısından önemlidir. Grafiklerde bir veya daha fazla karar kuralının geçerli olması, hipotez testi gibi yapılacak anlık incelemelerden ziyade grafiğin genel performansını değerlendirebilecek başka ölçütlere ihtiyaç duyulmasını gerektirir. Bu noktada, kontrol grafiğinin performansını değerlendirmek amacıyla Ortalama İşletim Uzunluğu (ARL) kullanılır. ARL, kontrol dışı durum gerçekleşinceye kadar süreçten çekilecek ortalama örnek gözlem sayısıdır.

Bir kontrol grafiğinde iki farklı sinyal meydana gelir:

1. Süreç kontrol altındayken, bir noktanın rastgele kontrol sınırları dışına düşmesi ile gerçekleşen yanlış sinyal
2. Süreç gerçekte kontrol dışındayken, örneklem noktasının kontrol sınırlarının dışına düşmesi ile gerçekleşen doğru sinyal

Hipotez testi bağlamında yanlış sinyal alma olasılığı I. Tip hata (α) olarak adlandırılır. Doğru sinyal alma olasılığı ise hipotez testindeki testin gücü ($1 - \beta$) kavramına karşılık gelir. Sürecin başlangıçtaki kontrol altında olması durumundan kontrol dışı duruma geçene kadar ki çekilen örneklem sayısına işletim uzunluğu denir. İşletim uzunluğu bir rastgele değişkendir. İlk sinyalle karşılaşana kadar seçilen örneklem sayısı bir geometrik rastgele değişken olduğundan, ARL'nin bu geometrik rastgele değişkenin beklenen değeri olduğu söylenebilir.

Sürecin kontrol altında olduğu durumda hesaplanan ARL, ARL_0 ile gösterilir ve Eş. 2.3'teki gibi hesaplanır:

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} \quad (2.3)$$

Süreç kontrol altında iken α olasılıkla ortalama ARL_0 defa da bir kontrol dışı sinyalle karşılaşma beklenir.

Sürecin kontrol dışında olduğu durumda hesaplanan ARL ise ARL_1 ile gösterilir ve Eş. 2.4'te gösterildiği gibi elde edilir:

$$ARL_1 = \frac{1}{1-\beta} \quad (2.4)$$

Süreçte bir değişkenlik söz konusu olduğunda, tasarlanan kontrol grafiğinin bu farklılaşmayı ortalama olarak ARL_1 örneklem sonra yakalaması beklenir.

İyi performans gösteren bir kontrol grafiği için ARL_0 değerinin büyük, ARL_1 değerinin ise küçük olması gerekir. Bunun aynı anda gerçekleşmesi zordur. ARL_0 değeri büyükse ARL_1 değeri de büyük olur ya da bunun aksi de doğrudur. Bu sorunun üstesinden gelebilmek için kontrol grafiğinin performansı değerlendirilirken ARL_0 belirli bir değere sabitlenirken, ARL_1 değeri küçültülmeye çalışılır. ARL_1 değerinin küçültülmesi, kontrol grafiğinin süreçteki kaymayı erkenden yakalamasını ve sürecin fazla gecikmeden kontrol altına alınmasını sağlar.

2.3. İstatistiksel Süreç Kontrol Grafikleri

Süreç kontrol grafikleri, süreçte izlenen kalite değişkenin türüne göre değişir. Buna göre, kontrol grafikleri, niceliksel ve niteliksel özellikleri incelemek üzere iki şekilde gruplandırılabilir. Niceliksel özellik, sayısal olarak ifade edilebilen kalite değişkenlerini, niteliksel özellik ise sayısal bir değerle gösterilemeyen kalite değişkenleri ile ilgilenir. Niceliksel kontrol grafiklerinden $\bar{X}$, R ve $|S|$ Shewhart tipi kontrol grafikleri uygulamalarda en sık kullanılan grafiklerdir (Chen,1998). Niteliksel özellikler için geliştirilmiş Shewhart tipi kontrol grafikleri ise hatalı ürün oranı (p), hatalı ürün sayısı (np), hata sayısı (c) ve birim başına düşen hata sayısı (u) için oluşturulan grafiklerdir. Shewhart kontrol grafiklerine ek olarak CUSUM ve EWMA gibi sürecin yorumlanmasında tamamlayıcı olan başka grafikler de mevcuttur.

Süreç ortalamasını izlemek için yaygın şekilde kullanılan araçlardan biri Shewhart $\bar{X}$ kontrol grafiğidir. Bu kontrol grafiği kullanılırken, hedeflenen bir süreç ortalama değerine ya da sürecin kontrol altında olduğu durumda tahmin edilen ortalama değerine ihtiyaç duyulur. Süreç izleme istatistiği olarak m ardışık zaman noktasında n çapında alınan örneklemelerden ölçülen örneklem ortalamaları hesaplanır ve bu değerler örnek sırasına veya zamana karşı grafikte işaretlenir. Kontrol altındaki sürecin hedef ortalaması μ_0 ve standart sapması olmak üzere süreç ortalamasını izlemek için $H_0 : \mu = \mu_0$ sıfır hipotezi $H_1 : \mu = \mu_1$ alternatif hipotezine karşın test edilir. δ sabit bir değer olmak üzere kontrol sınırları Eş. 2.5'te verilen denklem ile hesaplanır:

$$\mu_0 \pm \delta \sigma_0 \quad (2.5)$$

Sürecin hedef parametreleri bilinmediğinde onların yerine tahmincileri kullanılabilir. Kontrol altında olan süreçten tahmin edilen ortalama değeri ve incelenen istatistiğin standart sapması sırasıyla $\bar{X}$ ve $\sigma_{\bar{X}}$ ile gösterilsin. Buna göre kontrol sınırları Eş. 2.6'da gösterildiği gibidir:

$$\bar{X} \pm \delta \sigma_{\bar{X}} \quad (2.6)$$

Burada $\sigma_{\bar{X}} = \sigma / \sqrt{n}$ 'dir. σ sürecin standart sapmasını, n ise örnek çapını göstermektedir. Dolayısıyla, örnek hacminin, incelenen istatistiğin standart sapması üzerinde etkili olduğu söylenebilir. $\sigma_{\bar{X}}$, $\sqrt{n}$ ile ters orantılıdır. Kontrol sınırları standart sapmanın belirli bir katı kadar (δ) uzağa yerleştikten örnek çapı büyüdükçe kontrol sınırları arasındaki mesafe daralır. Aksi halde, örnek çapı küçüldükçe de kontrol sınırları birbirinden uzaklaşır. Sonuç olarak, örnek çapının artırılması, sürece ilişkin daha fazla bilgiye ulaşılmasını ve süreç izleme istatistiğindeki değişkenliğin azalmasını sağlar. Değişkenliğin azalması grafikte meydana gelebilecek hataların önlenmesi açısından önemlidir (Mitra, 1998).

2.4. Çok Değişkenli İstatistiksel Süreç Kontrolü

Endüstride giderek artan İSK uygulamaları, kalite düzeyindeki değişiklikleri hızlı bir şekilde tespit edebilen yöntemlerin geliştirilmesini gerekli kılmıştır. Bu amaçla geliştirilen yöntemlerden biri kontrol grafikleridir. Kontrol grafikleri, bir süreçteki kontrol dışı sinyalin tespit edilmesi ve bu sinyalin özel nedenlerinin tanımlanmasında yaygın olarak kullanılan istatistiksel araçlardır.

İSK problemleri çoğu zaman birden fazla değişkenin birlikte kontrol edilmesini gerektirebilir. Bu durumda takip edilebilecek prosedürlerden birisi her bir kalite değişkenini ayrı kontrol grafikleriyle izlemektir. Ancak değişkenler arasında bir bağımlılık yapısı söz konusu olduğunda bu yöntem hatalı sonuçlara yol açabilir. Dolayısıyla, çok değişkenli süreçlerde izleme yapabilmek için kullanılacak çok değişkenli süreç izleme yöntemlerinin geliştirilmesine ihtiyaç vardır.

ÇİSK grafikleri, süreç ortalama vektöründeki ve süreç varyans kovaryans matrisindeki kaymanın kontrolü olmak üzere iki farklı amaçla geliştirilmiştir. Süreç ortalama vektörünün kontrolünde birkaç değişkenin ilişkili olduğu kalite kontrol problemlerindeki ilk çalışmalar Hotelling (1947) tarafından yapılmıştır. Hotelling T^2 kontrol grafiği tek değişkenli $\bar{x}$ kontrol grafiğinin çok değişkenli formu olarak kabul edilir. Bunun dışında MEWMA ve MCUSUM kontrol grafikleri de süreç ortalamasındaki kaymayı tespit etmek amacıyla kullanılır. Süreç varyans-kovaryans matrisinin kontrolünde ise genelleştirilmiş örneklem varyansı $|S|$ kontrol grafiği yaygın olarak kullanılan birçok değişkenli kontrol grafiğidir.

Bu çalışmada çok değişkenli bir sürecin ortalama vektöründe gerçekleşen anlamlı farklılaşmaya ilişkin izleme problemleri ele alınmıştır ve bu bağlamda önerilen yöntemlerin performansları geleneksel Shewhart yöntemlerinden en popüler olan Hotelling T^2 kontrol grafiği ile karşılaştırılmıştır.

Önsel örnek çapı m olan, her biri n çapındaki bir örneklemden oluşan i . değişkenin j . gözlemindeki $p \times 1$ boyutlu vektör $\mathbf{x}_{ij}$ ($i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, m$) olsun. $\mathbf{x}_{ij}$ 'nin, ortalama

vektörü μ_0 ve kovaryans matrisi Σ_0 olan p değişkenli normal dağılıma sahip olduğu varsayılır.

$(\mathbf{x}_{ij} \sim N_p(\mu_0, \Sigma_0))$. Süreç parametrelerinin bilindiği ya da tahmin edilebilir olduğu durumlarda $H_0 : \mu = \mu_0$ sıfır hipotezini, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ alternatif hipotezine karşı test etmek için kullanılacak test istatistiği aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\chi_0^2 = n(\bar{\mathbf{x}} - \mu_0)^T \Sigma_0^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \mu_0) \quad (2.9)$$

burada, $\bar{\mathbf{x}}$, kalite değişkenlerinin ortalama vektörüdür. Kontrol grafiğindeki ÜKS, $\text{ÜKS} = \chi_{\alpha, p}^2$ olmak üzere hesaplanan test istatistiği bu sınırı aşıyorsa H_0 hipotezi reddedilir ve sürecin kontrol dışında olduğuna karar verilir.

Uygulamada, sürecin kontrol altında olduğu durumda alınan m büyüklüğündeki önsel örneklerin analizinden μ ve Σ 'yı tahmin etmek gerekir (Montgomery,2009). Her bir örnekten, örnek ortalama ve varyansları aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\bar{x}_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{ijk} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, p \\ j = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (2.10)$$

$$s_{ij}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_{ijk} - \bar{x}_{ij})^2 \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, p \\ j = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (2.11)$$

Burada x_{ijk} , k . örneklemden i . kalite değişkeninin j . gözlemidir. k . örneklemden j . ve h . kalite değişkenleri arasındaki kovaryans ise Eş.2.12'deki gibidir:

$$s_{jhk} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_{ijk} - \bar{x}_{ij})(x_{ihk} - \bar{x}_{ih}) \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, p \\ j, h = 1, 2, \dots, m \text{ ve } j \neq h \end{cases} \quad (2.12)$$

Daha sonra tüm m büyüklüğündeki önsel örneğe ilişkin genel ortalamaların elde edilmesi için $\bar{x}_{ij}$, s_{ij}^2 ve s_{jhk} istatistiklerinin ortalaması alınır:

$$\bar{\bar{x}}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \bar{x}_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2.13)$$

$$\bar{s}_i^2 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m s_{ij}^2 \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2.14)$$

$\bar{x}_i$ 'ler, $\bar{\bar{x}}$ vektörünün elemanlarıdır. $p \times p$ boyutlu örnek varyans-kovaryans matrisinin ortalaması S ise Eş.2.15'teki gibi oluşturulur:

$$S = \begin{bmatrix} \bar{s}_1^2 & \bar{s}_{12} & \bar{s}_{13} & \cdots & \bar{s}_{1p} \\ & \bar{s}_2^2 & \bar{s}_{23} & \cdots & \bar{s}_{2p} \\ & & \bar{s}_3^2 & & \vdots \\ & & & \ddots & \bar{s}_p^2 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Örnek varyans-kovaryans matrisi ortalaması S süreç kontrol altındayken Σ 'nın yansız tahmin edicisidir. Öyleyse, süreç ortalama vektörü μ ve süreç kovaryans matrisi Σ 'nin bilinmediği durumlarda bu parametrelerin yerine süreç kontrol altındayken elde edilen $\bar{\bar{x}}$ ve S tahmin edicileri kullanılarak Eş. 2.16'da verilen test istatistiği elde edilir:

$$T^2 = n(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\bar{\mathbf{x}}})^T S^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\bar{\mathbf{x}}}) \quad (2.16)$$

Bu şekliyle yöntem genellikle Hotelling T^2 kontrol grafiği olarak adlandırılır (Montgomery, 2009). Alt (1985), çok değişkenli kalite kontrol uygulamalarında kontrol grafiğinin kullanımına göre kontrol sınırlarını dikkatle seçmek gerektiğini belirtmiştir. Kontrol grafiği yönteminin iki aşaması vardır. Bunlardan ilki m adet önsel örnek çekildiğinde sürecin kontrol altında olup olmadığını test eden ve buna göre örnek istatistikleri $\bar{\bar{x}}$ ve S 'nin hesaplandığı Evre I'dir. Diğeri ise gelecekteki üretimi izleyen Evre II'dir. Evre I'deki amaç, Evre II'de kullanılacak kontrol sınırlarını belirleyebilmek için kontrol altında seyreden bir gözlem seti elde etmektir. T^2 istatistiği düzeltilmiş F dağılımına sahiptir ve böylece Evre I'de kullanılacak ÜKS:

$$\ddot{ÜKS} = \frac{p(m-1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha, p, mn-m-p+1} \quad (2.17)$$

olarak belirlenir.

Evre II için $\ddot{ÜKS}$ Eş.2.18'deki gibi elde edilir:

$$\ddot{ÜKS} = \frac{p(m+1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha, p, mn-m-p+1} \quad (2.18)$$

şeklinde oluşturulur. T^2 kontrol grafiği için AKS her iki aşamada da 0 (sıfır)'dır. μ ve Σ çok sayıda önsel örnek çekilen süreçten tahmin edildiğinde hem Evre I hem de Evre II'de kontrol sınırı olarak $\ddot{ÜKS} = \chi_{\alpha, p}^2$ kullanılır. Lowry ve Montgomery (1995), birçok durumda kesin Evre II kontrol sınırlarının Ki-Kare sınırlarına iyice yakınsamasından önce çok sayıda önsel örnek çekmek gerektiğini göstermişlerdir. Ayrıca, örnek büyüklükleri $n = 3, 5, 10$ ve $p = 2, 3, 4, 5, 10, 20$ adet kalite değişkenleri için önerilen en küçük m değerini gösteren tablolar sunmuşlardır. Buna göre önerilen m değeri her zaman 20 önsel örnekten ve genellikle 50 örnekten daha büyüktür. Jensen ve ark. (2006), önerilen bu örnek büyüklüklerinin çok küçük olduğunu gözlemlemişlerdir ve Evre II sınırları tahmin edilirken örnek büyüklüğünün en az 200 olması gerektiğini savunmuşlardır.

2.5. Çok Değişkenli Süreç Kontrolünde Kontrol Dışı Kaynağın Durumunun Belirlenmesi

Çok değişkenli proses kontrolünde dağılım farklılaşmasının yakalanması kadar, buna kaynaklık eden marjinal değişkenin ne olduğunun bilinmesi de önemlidir. Dağılım değişmesinin belirlenmesine ilişkin çok sayıda yaklaşım söz konusu iken, kaynaklık eden değişken/değişkenlerin belirlenmesi bağlamında nispeten sınırlı sayıda çalışma mevcuttur.

Bunlardan ilki kalite karakteristiklerinin bireysel $\bar{x}$ kontrol grafiği ile izlenmesidir ancak bu başarılı bir yöntem değildir (Montgomery, 2009). Bu yöntemin başarılı olmamasının sebebi değişkenler arasındaki bağımlılık yapısının dikkate alınmamasıdır. Çok değişkenli bir süreçteki değişkenlerin arasında bağımlılık olmasına rağmen, tek değişkenli bireysel kontrol

grafiklerinde bağımsız olarak ele alınmaları hatalı sonuçlara neden olabilir. Alt (1985), $\bar{x}$ kontrol grafiklerini Bonferroni tipi kontrol sınırlarıyla kullanmayı önermiştir (yani, $\bar{x}$ kontrol grafiğinin kontrol sınırı hesaplamasındaki $Z_{\alpha/2}$ yerine $Z_{\alpha/(2p)}$ kullanmıştır). Bu yaklaşım tek değişkenli kontrol grafiklerinin eş zamanlı olarak kullanılmasıyla ortaya çıkan yanlış alarm sayısını azaltır. Hayter ve Tsui (1994), tam eş zamanlı güven aralıkları için bir yaklaşım önererek bu fikri genişletmişlerdir. Bu yaklaşım, normallik varsayımının geçerli olmadığı durumlarda da kullanılabilir. Jackson (1980), orijinal değişkenlerin doğrusal kombinasyonları olan p tane temel bileşene dayalı kontrol grafiklerinin kullanılmasını önerir. Bu yaklaşımın dezavantajı, temel bileşenlerin orijinal bileşenlere göre her zaman net bir yorum sunamamasıdır. Bununla birlikte, özellikle temel bileşenlerin orijinal değişkenler açısından bir yorumu olduğu durumlarda, kontrol dışı sinyalin tespit edilmesinde etkili oldukları söylenebilir.

Kontrol dışı sinyalin tanımlanmasına yönelik bir diğer kullanışlı yaklaşım T^2 istatistiğini her bir değişkenin katkısını yansıtacak şekilde bileşenlerine ayırmaktır. Bu yaklaşım Runger, Alt ve Montgomery (1996b) tarafından önerilmiştir. T^2 , istatistiğin şu anki değeri ve $T_{(i)}^2$, i . değişken hariç tüm kalite değişkenleri için hesaplanan test istatistiği olmak üzere i . değişkenin tüm istatistikler üzerindeki katkısı şu şekilde ifade edilebilir:

$$d_i = T^2 - T_{(i)}^2 \quad (2.19)$$

Kontrol dışı bir sinyal üretildiğinde, d_i ($i = 1, 2, \dots, p$) değerleri hesaplanır ve d_i 'nin nispeten büyük olduğu değişkenlerin sinyale sebep olduğu yorumu yapılır. d_i ayrıştırma istatistikleri ile kalite değişkenlerinden hangisinde kayma olduğu hakkında bilgi sağlanabilir.

Literatürde kontrol dışı sinyallerin yorumlanmasına ilişkin başka birçok yöntem geliştirilmiştir. Örneğin Murphy (1987) ve Chua ile Montgomery (1992), gözlemleri gruplara ayırmak için diskriminant analize dayalı prosedürler geliştirmişlerdir.

Bu konuda bilinen en yaygın kullanılan yöntem Mason, Tracy, Young (MTY) ayrıştırmasıdır. Mason, Tracy ve Young (1995) de tanı amacıyla T^2 ayrıştırmasını

kullanmışlardır. Ancak bu yaklaşım, d_i ayrıştırmasına göre daha kapsamlı hesaplamalar ve daha ayrıntılı ayrıştırmalar gerektirir. Dolayısıyla kalite değişkenlerinin boyutu arttığında hesaplama açısından zorlaşır ve kökten tanı koymada sınırlı bir kabiliyete sahiptir. MTY'ye göre ayrıştırılan bileşenler, koşullu ve koşulsuz olmak üzere ikiye ayrılır. Bir T^2 ayrıştırması Eş. 2.20'deki gibi yazılabilir:

$$T^2 = T_1^2 + T_{2,1}^2 + T_{3,21}^2 + \dots + T_{p,12\dots j-1}^2 \quad (2.20)$$

Bu modelde T_j^2 ile gösterilen terimler koşulsuz bileşenleri; $T_{j,12\dots j-1}^2$ ile gösterilen terimler ise koşullu bileşenleri ifade etmektedir. Ancak $\mathbf{X}_1^T = [x_1, x_2, \dots, x_p]$ olarak gösterilen $\mathbf{X}_1$ gözlem vektörünün ilk iki bileşeni $\mathbf{X}_2^T = [x_2, x_1, \dots, x_p]$ olacak şekilde değiştirildiğinde; iki vektörün de T^2 değerleri eşittir. Çünkü T^2 değeri gözlem vektörünün ortalama vektörüne olan istatistiksel uzaklığıdır ve vektörün bileşenlerinin yer değişimlerine karşı duyarsızdır.

$$T^2(x_1, x_2, \dots, x_p) = T^2(x_2, x_1, \dots, x_p) \quad (2.21)$$

Bununla birlikte $\mathbf{X}_2^T = [x_2, x_1, \dots, x_p]$ vektörünün ayrıştırması Eş. 2.20'ten sadece ilk iki terim bakımından farklılık göstermektedir:

$$T^2(x_2, x_1, \dots, x_p) = T_2^2 + T_{1,2}^2 + T_{3,12}^2 + \dots + T_{p,12\dots p-1}^2 \quad (2.22)$$

$\mathbf{X}$ vektörünün bileşenleri için türetilen her sıralama için aynı T^2 değeri elde edilmekle birlikte, bu değer p adet bağımsız terime ayrıştırılmasında farklılık göstermektedirler. $p!$ olası bölünmeyle birlikte, her bölünmedeki ayrıştırma için p adet terim gerektiğinden, T^2 'nin MTY ayrıştırmasında $p \times p!$ olası terim üretmektedir (Mason ve Young, 2002).

x_j , gözlem vektörünün j . bileşeni, $\bar{x}_j$ ve s_j^2 ise sırasıyla bu bileşenin ortalama ve varyans değerleri olmak üzere herhangi bir ayrıştırmadaki koşulsuz terim aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$T_j^2 = \frac{(x_j - \bar{x}_j)^2}{s_j^2} \quad (2.23)$$

Benzer şekilde koşullu terimler de Eş. 2.24'te gösterildiği şekilde elde edilecektir.

$$T_{j.1,2,\dots,j-1}^2 = \frac{(x_j - \bar{x}_{j.1,2,\dots,j-1})^2}{s_{j.1,2,\dots,j-1}^2} \quad (2.24)$$

Çalışmanın bu bölümünde kavramsal çerçevesi açıklanan geleneksel yöntemlerin normallik varsayımını gerektirmesine dair kısıtı, değişkenler arasındaki korelasyon yapısını dikkate almaması ve süreçteki kaymaya neden olan değişken ya da değişkenlerin belirlenmesine yönelik eksiklikleri, ÇİSK'te alternatif yöntemlerin tartışılmasına neden olmuştur. Çalışmanın üçüncü bölümünde bu yöntemler ele alınacaktır.

3. ÖNERİLEN YÖNTEMLER

BBA ve DVM, ÇİSK'te değişim noktasının belirlenmesi konusunda geleneksel yöntemler karşısında kullanılan alternatif yaklaşımlar arasında yer alır. Çalışmada bu iki yönteme ek olarak bu tezde önerilen hibrit BBA-DVM yönteminin performansı simülasyonla üretilen veriler üzerinden değerlendirilmiştir. Bu nedenle simülasyon çalışmasından önce sıralanan üç yöntemin esasları açıklanmaktadır.

3.1. Bağımsız Bileşenler Analizi

Günümüzde, bilgisayar teknolojisindeki hızlı gelişmeler nedeniyle her gün milyonlarca veri kaydedilir ve bunlardan çok fazla değişken elde edilebilir. Veri seti ne kadar büyük olursa, parametre tahminleri o kadar doğru olur. Buna karşılık hesaplama yapmak zorlaşır. Bu nedenle ÇİSK yapılmadan önce veri sayısının çok fazla olduğu durumda boyut indirgeme yöntemlerinden faydalanılarak işlemler daha hızlı ve pratik hale getirilebilir. Bu bağlamda literatürde yer alan çalışmalarda genellikle TBA kullanılmıştır. Örneğin, Jackson (1959), TBA ile bileşenleri ortaya çıkaran T^2 kontrol grafiğini geliştirmiştir. Ancak daha sonra normal olmayan süreçlerle başa çıkmak için bir diğer özellik çıkarma tekniği olan BBA önerilmiştir. BBA, temel olarak çok boyutlu verilerden esas bilgilerin ortaya çıkarılmasını sağlayan istatistiksel bir yöntemdir.

BBA, bir dizi gözlemlenen verinin altında yatan esas kaynakları ortaya çıkaran bir analiz olması sebebiyle çeşitli bilim insanlarının ve mühendislerin ilgisini çekmektedir. BBA, konuşma sinyali işleme, iletişim, tıbbi görüntü işleme, finans mühendisliği ve benzeri sinyal işleme uygulamaları için oldukça elverişli bir yöntemdir.

BBA, verileri asıl bilgi kaynaklarına ayırmak için kullanılan bir tür Kör Sinyal Ayırıştırma (KSA) yöntemidir. BBA genellikle klasik kokteyl partisi problemi üzerinden açıklanır. Kokteyl partisi probleminde, üç kişinin aynı anda konuştuğu bir odada, farklı yerlerde üç mikrofon olduğu varsayılır. Mikrofonlar üç ses sinyali kaydeder. t zaman indeksi olmak üzere, kaydedilen ses sinyalleri sırasıyla $x_1(t)$, $x_2(t)$ ve $x_3(t)$ ile gösterilsin. Kaydedilmiş ses sinyallerinin her biri, $s_1(t)$, $s_2(t)$ ve $s_3(t)$ olmak üzere üç konuşmacının yaydığı konuşma

sinyallerinin ağırlıklı toplamı olacaktır. Bu durum aşağıdaki doğrusal denklemlerle ifade edilebilir:

$$x_1(t) = a_{11}s_1(t) + a_{12}s_2(t) + a_{13}s_3(t) \quad (3.1)$$

$$x_2(t) = a_{21}s_1(t) + a_{22}s_2(t) + a_{23}s_3(t) \quad (3.2)$$

$$x_3(t) = a_{31}s_1(t) + a_{32}s_2(t) + a_{33}s_3(t) \quad (3.3)$$

burada $a_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ konuşmacıların mikrofonlara olan uzaklığını temsil eden parametrelerdir.

Matris notasyonu ile gösterilirse, p değişken sayısı, d kaynak sayısı ve t zaman indeksi olmak üzere, gözlenen değişkenler vektörü $\mathbf{x} = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_p(t)]$, orijinal kaynaklar

vektörü $\mathbf{s} = [s_1(t) \ s_2(t) \ \dots \ s_d(t)]$ ve karıştırma matrisi $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \dots & a_{dp} \end{bmatrix}$ ile

gösterilebilir. Gözlenen değişkenler ile orijinal kaynaklar arasındaki doğrusal ilişki, böylece matris formunda Eş. 3.4'teki gibi ifade edilebilir:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s} \quad (3.4)$$

Kokteyl parti problemi, karıştırma matrisi ($\mathbf{A}$) ve orijinal konuşma sinyallerine (orijinal kaynaklar ($\mathbf{s}$)) ilişkin herhangi bir bilgi olmaksızın, sadece kaydedilen ses sinyallerine (gözlenen değişkenlere($\mathbf{x}$)) ait bilgi kullanılarak orijinal konuşma sinyallerinin tahmin edilebilmesi biçiminde tanımlanır. Aslında, $\mathbf{A}$ biliniyor olsa, basitçe yukarıdaki doğrusal eşitliklerin tersleri alınarak, doğrusal denklemler çözülebilir. Ancak, ne $\mathbf{A}$ ne de $\mathbf{s}$ hakkında herhangi bir bilgi olmadığından problem oldukça zorlaşmaktadır.

Bu problemi çözmek için bir yaklaşım, hem $\mathbf{A}$ matrisini hem de $\mathbf{s}$ 'yi tahmin etmek için $\mathbf{x}$ sinyallerinin istatistiksel özellikleri hakkında bazı bilgileri kullanmak olacaktır. Örneğin, $s_i(t)$ 'nin her t zamanında istatistiksel olarak bağımsız olduğu varsayılır. BBA bu bağımsızlık bilgilerine dayanarak $\mathbf{A}$ 'yı tahmin etmek için kullanılabilir ve $\mathbf{s}$ orjinal sinyallerini, onların doğrusal karışımları olan $\mathbf{x}$ 'lerden ayırmaya izin verir.

BBA, başlangıçta kokteyl partisi problemine benzer problemlerle başa çıkmak için geliştirilmiştir. Ancak daha sonra BBA'ya olan ilginin artmasıyla bu yöntemin başka uygulamalar için de kullanılabildiği görülmüştür. BBA'nın kullanıldığı bazı uygulamalar aşağıda sıralanmıştır (Hyvärinen ve ark., 2001):

- Bir elektroensefalogram (EEG) tarafından verilen beyin aktivitesinin elektriksel kayıtlarıyla ilgilenildiğinde, BBA bağımsız bileşenlere erişim sağlayarak beyin aktivitesi hakkında ilginç bilgiler ortaya çıkarabilir.
- Sosyal bilimlerde (özellikle ekonometride) altta yatan ve bilinmeyen bağımsız sebeplerin bulunması temel bir meseledir. BBA, bunların belirlenmesinde ekonometrik bir araç olarak kullanılabilir.
- BBA'nın başka bir uygulaması da özellik çıkarımıdır. Sinyal işlemede temel bir sorun, sıkıştırma ve gürültüden arındırma gibi işlemlere yönelik olarak BBA, görüntü, ses veya başka tür veriler için en uygun gösterimleri bulmada kullanılabilir.

Bahsi geçen bu uygulamaların tümü aslında ortak bir matematiksel çerçeve ile BBA'nın kullanımına uygun olacak şekilde formüle edilebilir.

3.1.1. Bağımsız bileşenler analizinde varsayım ve kısıtlamalar

BBA'da birtakım kısıtlamalar söz konusudur. Bunlardan ilki bağımsızlık varsayımıdır. Buna göre bağımsız bileşenlerin istatistiksel olarak bağımsız olduğu varsayılır. Farklı sinyaller farklı fiziksel işlemlerden (örneğin, konuşan farklı kişilerden) geliyorsa BBA bu sinyallerin istatistiksel olarak bağımsız olduğu varsayımı üzerine kuruludur. Aslında bu varsayım BBA'nın dayandığı temel prensiptir. Modelin tahmin edilebilirliğini tespit etmek için bu varsayım yeterlidir. Bu nedenle BBA, birçok farklı alandaki uygulamalar için güçlü bir yöntemdir.

Genel olarak, $i \neq j$ olmak üzere, eğer y_i 'nin değeri hakkındaki bir bilgi, y_j 'nin değeri hakkında herhangi bir bilgi vermiyorsa $y_1, y_2, \dots, y_n$ rastgele değişkenleri bağımsızdır. Matematiksel olarak, bağımsızlık olasılık yoğunlukları ile tanımlanabilir. $y_i, i = 1, 2, \dots, n$ 'nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu, $p(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ve y_i 'nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu $p_i(y_i)$ olmak üzere, $p(y_1, y_2, \dots, y_n)$ aşağıdaki şekilde çarpanlarına ayrıştırılabilirse $y_1, y_2, \dots, y_n$ bağımsızdır.

$$p(y_1, y_2, \dots, y_n) = p_1(y_1) p_2(y_2) \dots p_n(y_n) \quad (3.5)$$

BBA, gözlenen verileri (orjinal sinyal karışımlarını) istatistiksel olarak birbirinden bağımsız sinyallere ayırır. BBA ile her biri farklı bir fiziksel işlem tarafından üretilmiş bileşenler ortaya çıkarılarak istenen sinyal/sinyaller elde edilir.

BBA'daki bir diğer kısıtlama ise normal dağılmama varsayımdır. Bağımsız bileşenler normal olmayan dağılımlara sahip olmalıdır. Sezgisel olarak, normal dağılımlarının “çok basit” olduğu söylenebilir. Bunun nedeni, normal dağılıma sahip verilerin yüksek dereceden kümülanlarının sıfır olmasıdır. BBA modelinin tahmin edilmesi için daha yüksek mertebeden kümülanlar kullanıldığından, gözlemlerin normal dağılımdan gelmesi durumunda BBA uygulamak imkansızlaşır. Baz alınan modelde, bağımsız bileşenlerin dağılımları hakkında herhangi bir bilgi olmadığı varsayılır. Eğer bağımsız bileşenlerin dağılım bilgisi biliniyorsa problem büyük ölçüde basitleşecektir.

İki bağımsız bileşen s_1 ve s_2 'nin ortak dağılımının normal olduğu varsayıldığında, ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu Eş. 3.6'daki gibi yazılır:

$$p(s_1, s_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{s_1^2 + s_2^2}{2}\right) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\|s\|^2}{2}\right) \quad (3.6)$$

Karıştırma matrisi $\mathbf{A}$ 'nın ortogonal olduğu varsayılırsa $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ olur ve x_1 ve x_2 gözlemlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu Eş. 3.7'deki gibi olur:

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{A}^T \mathbf{x}\|^2}{2}\right) |\det \mathbf{A}^T| \quad (3.7)$$

$\mathbf{A}$ 'nın ortogonalliğinden dolayı, $\|\mathbf{A}^T \mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2$ ve $|\det \mathbf{A}| = 1$ 'dir (eğer $\mathbf{A}$ ortogonal ise $\mathbf{A}^T$ 'nin de ortogonal olacağı unutulmamalıdır). Öyleyse, x_1 ve x_2 değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu yeniden Eş.3.8'deki gibi yazılabilir:

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2}\right) \quad (3.8)$$

Bu durumda ortogonal karışım matrisi $\mathbf{A}$ 'nın ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunda hiç yer almadığı ve dolayısıyla ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu değiştirmedeği söylenebilir. Yani orijinal kaynakların ve gözlem değerlerinin dağılımları aynıdır. Bu nedenle, karışım matrisinin değişkenlerin gözlenen değerlerinden elde edilmesinin bir yolu yoktur. $\mathbf{A}$ matrisinin normal dağılıma uyan değişkenler için tahmin edilememesi, ortak normal değişkenlerin bağımsız olması ile ilgilidir. Bu nedenle, bileşenlerin bağımsızlığı hakkındaki bilgiler bizi beyazlatmanın ötesine geçiremez. Dolayısıyla, normal dağılan bağımsız bileşenler söz konusu olduğunda, BBA modeli yalnızca ortogonal bir dönüşüme kadar tahmin edilebilir. Başka bir deyişle, $\mathbf{A}$ matrisi, normal dağılan bağımsız bileşenler için tanımlanamaz. Normal değişkenler ile yapılabilecek tek şey verilerin beyazlatılmasıdır.

BBA modeli tahmin edilirken, modeldeki bazı bileşenlerin normal dağılıma uyduğu, bazılarının ise normal dağılıma uymadığı durumda, normal olmayan tüm bileşenler tahmin edilebilir, ancak normal bileşenler birbirinden ayrılamaz. Başka bir deyişle, tahmin edilen bileşenlerin bazıları, normal bileşenlerin rastgele doğrusal kombinasyonları olacaktır. Yalnızca bir normal bileşen olması durumunda, tek normal bileşenin karıştırılabileceği başka bir normal değişken olmayacağından model tahmin edilebilir.

BBA'daki bir diğer kısıtlama ise bilinmeyen karışım matrisinin kare matris olduğu varsayımdır. Ayrıca karıştırma matrisinin *tersinir* olduğu varsayılır. Eğer tersinir değilse, ihmal edilebilecek gereksiz karışımlar vardır ki bu durumda matris kare olmaz. Bağımsız bileşenlerin sayısı gözlenen değişkenlerin sayısına eşit veya daha küçüktür. Bağımsız bileşen

sayısının gözlenen değişken sayısına eşit olması tahminleri oldukça basitleştirir. Hesaplama açısından kolaylık sağlayabilmek için bağımsız bileşen sayısı gözlenen değişken sayısına eşit alınarak **A** matrisi daha kolay tahmin edilir ve tersi alınabilir. **A** matrisinin tersi **B** matrisi olmak üzere, bağımsız bileşenler aşağıdaki şekilde basitçe elde edilebilir:

$$\mathbf{s} = \mathbf{B}\mathbf{x} \quad (3.9)$$

BBA’da bahsi geçen kısıtlamalar dışında birtakım belirsizlikler de söz konusudur. **A** ve **s** matrisinin bilinmiyor olması bağımsız bileşenlerin varyansları ve dereceleri hakkında belirsizliğe yol açar.

s_j kaynaklarından birinin herhangi bir α_j sabit değeri ile çarpıldığı ve a_{ij} parametresinin aynı α_j sabit değeri ile bölüldüğü bir durum Eş. 3.10’daki biçimde ifade edilebilir:

$$x_i = \sum_j \left(a_{ij} \frac{1}{\alpha_j} \right) (s_j \alpha_j) \quad (3.10)$$

Bu durumda a_{ij} ’yi bölen α_j sabiti ile s_j ’yi çarpan α_j sabiti sadeleşir ve böylece bağımsız bileşenlerin büyüklükleri sabit bir değer haline gelir. Her bir bağımsız bileşenin rastgele bir değişken olduğu göz önünde bulundurulursa, yapılan bu sadeleştirme işleminin en doğal yolu her bir bağımsız bileşenin birim varyansa sahip olduğunu varsaymaktır.

$$\text{Var}(s) = E(s^2) - (E(s))^2 = 1 \quad (3.11)$$

BBA’da bileşenlerin sıralaması yoktur. Herhangi bir **P** matrisi için $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} = \mathbf{I}$ olduğundan, $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s}$ denklemi $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{s}$ şeklinde yazılabilir. Ancak, eşitliğin sağ tarafı $\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}$ ve sol tarafı $\mathbf{P}\mathbf{s}$ iki farklı yapı olarak düşünüldüğünde, $\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}$ matrisi BBA algoritmaları ile çözülen yeni ve bilinmeyen bir karışım matrisi halini alırken, $\mathbf{P}\mathbf{s}$ matrisinin elemanları orijinal bağımsız bileşenlerdir. Bağımsız bileşenlerin sıralaması her seferinde farklılaşacağından $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}$ ’nin modelde yer alması $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s}$ ile aynı sonucu vermeyecektir.

3.1.2. Bağımsız bileşenler analizi için yapılması gereken ön hazırlıklar

BBA uygulanmadan önce veri üzerinde merkezileştirme ve beyazlatma gibi ön hazırlık işlemleri yapmak gerekir.

Genelleme kaybı olmaksızın, hem gözlenen değişkenlerin hem de bağımsız bileşenlerin sıfır ortalamaya sahip olduğu varsayılır. Bu varsayım, teori ve algoritmaları basitleştirmesi açısından önemlidir. Sıfır ortalama varsayımı sağlanmıyorsa, bu varsayımın sağlanabilmesi için *Merkezileştirme* denilen bir ön işlem yapılmalıdır. Merkezileştirme, gözlenen değişkenlerin örnek ortalamalarının kendisinden çıkartılmasıyla ortalamasını sıfır yapmaktır. Bu gözlem değerlerinin $(\mathbf{x}^T)$, BBA uygulanmadan önce aşağıdaki eşitlik ile önceden işlendiği anlamına gelir.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^T - E(\mathbf{x}^T) \quad (3.12)$$

Bu durumda, eğer $E(\mathbf{x}) = 0$ ise, $\mathbf{s} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$ bilgisinden hareketle bağımsız bileşenler de sıfır ortalamaya sahip olurlar:

$$E(\mathbf{s}) = \mathbf{A}^{-1}E(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.13)$$

Diğer taraftan, karıştırma matrisi bu ön işlemten etkilenmez. Dolayısıyla karıştırma matrisinin tahminini etkilemeksizin bu işlem her zaman yapılabilir.

Beyazlatma sürecinin açıklanabilmesi için öncelikle kovaryans, korelasyon ve ilişkisizlik kavramlarından bahsedilmelidir.

Kovaryans iki rastgele değişken arasındaki ilişkinin yapısının bir ölçüsüdür. İki bağımlı rastgele değişken arasındaki ilişkinin pozitif ya da negatif olup olmadığını gösterir. X ve Y gibi iki rastgele değişken istatistiksel olarak bağımsız olduklarında, kovaryansları sıfır olur. Kovaryans yalnızca iki rastgele değişken arasındaki doğrusal ilişkiyi tanımlamaktadır. X ve Y arasındaki kovaryans sıfır olsa bile, X ve Y doğrusal olmayan bir ilişkiye sahip olabilir ki bu da rastgele değişkenlerin bağımsız olmasını gerektirmez (Walpole ve ark., 2012). X ve Y rastgele değişkenlerinin kovaryansı:

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \quad (3.14)$$

şeklinde tanımlanır. $Cov(X, Y)$, her ne kadar X ve Y rastgele değişkenleri arasındaki ilişkinin yapısı hakkında bilgi sağlasa da ilişkinin gücü hakkında herhangi bir anlam ifade etmemektedir. Kovaryansın büyüklüğü hem X 'i hem de Y 'yi ölçmek için kullanılan ölçü birimine bağlı olacaktır. Kovaryansın ölçekten bağımsız bir türü korelasyon katsayısıdır (Walpole ve ark., 2012). X ve Y rastgele değişkenlerinin korelasyon katsayısı ise aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)} \sqrt{Var(Y)}} \quad (3.15)$$

$Corr(X, Y)$, X ve Y rastgele değişkenlerinin ölçü birimlerinden bağımsızdır. X ve Y rastgele değişkenleri bağımsız olduğunda, $E(XY) = E(X)E(Y)$ olacağından, kovaryansları sıfır ($Cov(X, Y) = 0$) olur. Kovaryansları sıfır olan iki rastgele değişkenin korelasyonları da sıfırdır. İlişkisizlik korelasyonun sıfır olmasıyla aynı şeydir ve bağımsızlıktan daha zayıf bir özelliktir. Çünkü, eğer rastgele değişkenler bağımsızlarsa aynı zamanda ilişkisiz ($Corr(X, Y) = 0$) oldukları söylenebilir. Ancak tersi her zaman doğru değildir. Yani, ilişkisiz olan iki değişkenin aynı zamanda bağımsız oldukları söylenemez.

Beyazlık, ilişkisizlikten biraz daha güçlü bir özelliktir. Sıfır-ortalamaya sahip rastgele bir değişkenin ($\mathbf{x}$) beyazlığı, gözlemlerinin ilişkisiz ve varyanslarının 1'e eşit olduğu anlamına gelir. Başka bir deyişle, $\mathbf{x}$ 'in kovaryans matrisi birim matrise eşittir:

$$E(\mathbf{xx}^T) = \mathbf{I} \quad (3.16)$$

Sonuç olarak, beyazlatma, gözlenen değişkenin herhangi bir $\mathbf{V}$ matrisi ile doğrusal olarak çarpılmasıyla ortalaması sıfır varyansı bir olacak şekilde dönüştürülmesidir.

$$\mathbf{z} = \mathbf{Vx} \quad (3.17)$$

Eş. 3.17'den faydalanılarak beyazlatılmış olan yeni bir $\mathbf{z}$ vektörü elde edilir. Beyazlatmaya bazen küreselleştirme de denir. Beyazlatma için kullanılan yöntemlerden biri, kovaryans matrisinin özdeğer ayrıştırmasıdır (ÖDA). $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}(\mathbf{xx}^T)$ 'nin özvektörlerinin ortogonal matrisi Eş. 3.18'de gösterilir:

$$\mathbf{E}(\mathbf{xx}^T) = \mathbf{E}\mathbf{D}\mathbf{E}^T \quad (3.18)$$

burada $\mathbf{D}$ özdeğerlerin köşegen matrisidir ($\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$). Buradan beyazlatma matrisi Eş. 3.19'daki gibi elde edilir:

$$\mathbf{V} = \mathbf{E}\mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{E}^T \quad (3.19)$$

$\mathbf{D}^{-1/2}$ matrisi basit bir bileşensel işlem olarak $\mathbf{D}^{-1/2} = \text{diag}(d_1^{-1/2}, \dots, d_n^{-1/2})$ ile hesaplanabilir. BBA modelindeki verilerin beyazlatılmasıyla yeni bir karışım matrisi $\tilde{\mathbf{A}}$ tanımlanabilir:

$$\mathbf{z} = \mathbf{V}\mathbf{A}\mathbf{s} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{s} \quad (3.20)$$

Beyazlık ya da ilişkisizlik bağımsızlıktan daha zayıf olduğundan BBA modelinin tahmini için tek başına yeterli değildir. Beyazlatılan $\mathbf{z}$ *ortogonal* bir dönüştürme matrisi olan $\mathbf{U}$ ile çarpılarak bağımsız bileşenlere ulaşılır:

$$\mathbf{y} = \mathbf{U}\mathbf{z} \quad (3.21)$$

$\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ 'nin herhangi bir ortogonal dönüşümü olabileceğinden, beyazlatma yalnızca bağımsız bileşenlerin ortogonal bir dönüşümünü verir ve bu çoğu uygulamada yeterli değildir. Öte yandan, beyazlatma BBA'da bir ön hazırlık adımı olarak oldukça faydalıdır. Bu nedenle bir beyazlatma işlemi ile BBA probleminin ancak yarısı çözülebilir. Beyazlatma, herhangi bir BBA algoritmasından çok daha basit ve standart bir prosedür olduğundan, sorunun karmaşıklığı bu yolla azaltılmış olur.

3.1.3. Bağımsız bileşenler analizinin matematiksel çerçevesi

BBA (Jutten ve Herault, 1991; Girolami, 1999), kaynakların doğrusal kombinasyonları olarak ifade edilen gözlenen verilerin, istatistiksel olarak bağımsız bileşenlere dönüştürülmesi için kullanılan bir sinyal işleme tekniğidir. Sadece bilinmeyen kaynakların karışımı olan gözlenen verilerin bilgilerine dayanarak, bağımsız kaynakların tahmin edilebilmesi yönüyle güçlü ve faydalı bir istatistiksel araçtır.

d tane bilinmeyen bağımsız bileşenlerin $s_1, s_2, \dots, s_d$ doğrusal kombinasyonu olarak verilen p tane ölçüm değişkeni $x_1, x_2, \dots, x_p$ olduğu varsayılın ($p \geq d$). $\mathbf{X} = [\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots, \mathbf{x}(n)] \in R^{p \times n}$ veri matrisi, $\mathbf{S} = [\mathbf{s}(1), \mathbf{s}(2), \dots, \mathbf{s}(n)] \in R^{d \times n}$ bağımsız bileşenler matrisi, $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_d] \in R^{p \times d}$ karıştırma matrisi olarak adlandırılan, bilinmeyen, tam ranklı bir matris, $\mathbf{E} \in R^{p \times d}$ artıklar matrisi ve n örnek sayısı olmak üzere bağımsız bileşenler ile ölçüm değişkenleri arasındaki ilişki Eş.3.22'deki gibi yazılabilir:

$$\mathbf{X} = \mathbf{AS} + \mathbf{E} \quad (3.22)$$

Burada bağımsız bileşenler ve gözlenen değişkenleri sıfır ortalamaya sahiptir ve $p \geq d$ olduğu varsayılır. $p = d$ olduğunda artıklar matrisi sıfır matris olur ve bu durumda model yeniden aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\mathbf{X} = \mathbf{AS} \quad (3.23)$$

BBA'nın temel problemi, gözlenen ölçüm veri matrisi $\mathbf{X}$ 'ten $\mathbf{S}$ orijinal bileşenleri matrisi ve $\mathbf{A}$ karıştırma matrisini ($\mathbf{S}$ ya da $\mathbf{A}$ matrislerine ait hiçbir bilgi olmaksızın) tahmin etmektir. Bu nedenle, BBA'nın amacı ayrıştırma matrisi $\mathbf{W} \in R^{d \times p}$ 'yi tahmin etmektir. Böylece, tahmin edilen orijinal kaynakların ($\hat{\mathbf{S}}$) elemanları mümkün olduğunca birbirinden bağımsız olacak şekilde Eş. 3.24'teki formül ile elde edilebilir:

$$\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{WX} \quad (3.24)$$

$p = d$ olduğunda, tahmin edilen $\mathbf{A}$ matrisinin tersi $\mathbf{W}$ matrisini verir. Matematiksel açıdan kolaylık sağlamak için, bağımsız bileşenlerin birim varyansa sahip olduğu kabul edilir.

BBA uygulanmadan önce merkezileştirme ve beyazlatma (küreselleştirme) işlemleri yapılır. p boyutlu bir rastgele vektör olan $\mathbf{x}(k)$ 'yi dikkate alırsak; k . örnekte kovaryans $\mathbf{R}_x = E(\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k))$ 'dir. $\mathbf{R}_x$ 'in ÖDA'sı Eş. 3.25'teki gibi yapılır:

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^T \quad (3.25)$$

Beyazlatma dönüşümü ise aşağıdaki şekilde yapılır:

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{Q}\mathbf{x}(k) \quad (3.26)$$

burada $\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}^{-1/2}\mathbf{U}^T$ 'dir. Bu dönüşüm altında $\mathbf{R}_z = E(\mathbf{z}(k)\mathbf{z}^T(k))$ birim matristir. Dönüşümden sonra aşağıdaki eşitlik sağlanabilir:

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{Q}\mathbf{x}(k) = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{s}(k) = \mathbf{B}\mathbf{s}(k) \quad (3.27)$$

Eşitlikteki $\mathbf{B}$ ortogonal bir matristir ve Eş. 3.28'deki ilişkiyle elde edilir:

$$E\{\mathbf{z}(k)\mathbf{z}^T(k)\} = \mathbf{B}E\{\mathbf{s}(k)\mathbf{s}^T(k)\}\mathbf{B}^T = \mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{I} \quad (3.28)$$

Böylece keyfi olarak tam-ranklı $\mathbf{A}$ matrisini tahmin etme problemi, daha basit olan $\mathbf{B}$ ortogonal matrisini bulma problemine indirgenmiş olur. Böylece, bağımsız bileşenler ($\mathbf{s}(k)$) aşağıdaki formül yardımıyla tahmin edilir:

$$\hat{\mathbf{s}}(k) = \mathbf{B}^T\mathbf{z}(k) = \mathbf{B}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) \quad (3.29)$$

$\mathbf{W}$ ve $\mathbf{B}$ arasındaki ilişki ise Eş. 3.30'daki gibi ifade edilebilir:

$$\mathbf{W} = \mathbf{B}^T \mathbf{Q} \quad (3.30)$$

$\mathbf{B}$ 'yi hesaplamak için, her sütun vektörü $\mathbf{b}_i$ 'ye bir başlangıç değeri atanır ve her iterasyonda bu değer güncellenir. Böylece, i . bağımsız bileşen $\hat{\mathbf{s}}_i = (\mathbf{b}_i)^T \mathbf{z}$ normallikten oldukça uzaklaşır. Hyvärinen ve Oja (2000) merkezi limit teoremini kullanarak normal olmamanın bağımsızlığı temsil ettiğini göstermişlerdir. Normal olmamanın iki temel ölçütü: basıklık (kurtosis) ve negentropi (negentropy)'dir. Basıklık, aykırı değerlere duyarlıdır. Öte yandan, negentropi, entropinin teorik bilgisine dayanır. Entropi, bir rastgele değişkendeki ortalama belirsizliğin ölçüsüdür. Olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(y)$ olan, rastgele değişken y 'nin diferansiyel entropisi H aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$H(y) = -\int f(y) \log f(y) dy \quad (3.31)$$

Normal dağılımdan gelen bir değişken, eşit varyanslı bütün rastgele değişkenler arasında en büyük entropiye sahiptir. Normal değişken için sıfır olan bir normal olmama ölçütü elde etmek için, negentropi J aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$J(y) = H(y_{gauss}) - H(y) \quad (3.32)$$

Eşitlikteki y_{gauss} , y ile aynı varyansa sahip bir normal rastgele değişkendir. Negentropi, negatiftir ve y 'nin normallikten ne kadar uzaklaştığını ölçer. Negentropiyi etkili olarak tahmin etmek için, Hyvärinen ve Oja (2000) daha basit bir yaklaşım geliştirmişlerdir:

$$J(y) \approx [E\{G(y)\} - E\{G(v)\}]^2 \quad (3.33)$$

Burada y 'nin ortalamasının sıfır, varyansının bir olduğu varsayılır. v , ortalaması 0 varyansı 1 olan normal değişkendir ve G kuadratik olmayan herhangi bir fonksiyondur. Hyvärinen ve Oja (2000)'de G için birkaç fonksiyon önerilmiştir:

$$G_1(u) = \frac{1}{a_1} \log \cosh(a_1 u) \quad (3.34)$$

$$G_2(u) = \exp(-a_2 u^2 / 2) \quad (3.35)$$

$$G_3(u) = u^4 \quad (3.36)$$

Burada $1 \leq a_1 \leq 2$ ve $a_2 \approx 1$ 'dir. Bu fonksiyonlar arasından G_1 , iyi bir alternatiftir (Lee ve ark., 2004).

3.1.4. Bağımsız bileşenler analizinde kullanılan algoritmalar

Bağımsız bileşenlerin elde edilmesinde hesaplama karmaşıklıklarını ortadan kaldırabilmek ve işlemleri hızlandırabilmek için geliştirilen çeşitli algoritmalar mevcuttur. Bu algoritmalarından yaygın olarak kullanılan bazıları: Cardoso ve ark. (1993) tarafından önerilen Özmatrislerin Ortak Yaklaşım ile Köşegenleştirilmesi (JADE- Joint Approximation Diagonalization of Eigenmatrices), Amari ve ark. (1996) tarafından geliştirilen Infomax, Belouchrani'nin (1997) önerdiği İkinci-Derece Kör Tanımlama algoritması (SOBI- Second Order Blind Identification) ve Hyvärinen ve Oja'nın (2000) sunduğu sabit nokta algoritması (FastICA- fixed point algorithm) biçiminde sıralanabilir.

JADE algoritması, beyazlatma ve ortak köşegenleştirme işlemlerinin yapılmasını gerektirir. Temelde, öz matrisleri mümkün olduğunca köşegen matris haline getiren ortonormal değişimin bulunmasına dayanır. Bunu yaparken dördüncü dereceden kümülanlardan faydalanır. Infomax algoritması, entropinin maksimize edilmesine dayanır ve bağımsız bileşenlerin hesaplanması için doğal bir gradyan form sunar (Sahonero-Alvarez ve Calderon, 2017). SOBI algoritması, sinyallerin zaman-korelasyon yapısını bozmak için gecikmeli korelasyon matrisi gibi ikinci dereceden istatistikleri kullanır. SOBI algoritması ile beyazlatmada, gecikmeli korelasyon matrislerinin hesaplanması ve ortak köşegenleştirme işlemleri yapılmalıdır. FastICA algoritması, bağımsız bileşenleri birer birer arar ve böylece yakınsama hızlıca gerçekleşir. Bu algoritma, bağımsız bileşenleri tahmin etmek için basıklık ölçüsünü kullanır (Langlois ve ark., 2010). Beyazlatma genellikle algoritma başlamadan önce yapılır (Hyvärinen ve Oja, 2000).

BBA algoritmalarının etkinlik ve hızları farklı koşullar altında değişiklik gösterebilir. Bu bağlamda literatürde bu algoritmaları performansları açısından karşılaştıran birçok çalışma

mevcuttur. Bu çalışmada diğer algoritmalara göre hızlı sonuç veren ve pratik çalışmalarda genellikle tercih edilen FastICA algoritması kullanılmıştır.

FastICA algoritması ile $\mathbf{B}$ ortogonal matrisinin bir sütunu hesaplanır ve buradan bir bağımsız bileşen tahmin edilir. Bu algoritmanın işleyişi aşağıdaki adımlarda özetlenebilir (Lee ve ark., 2004):

1. Tahmin edilecek bağımsız bileşen sayısı “ r ” seçilir. Sayaç başlatılır $i \leftarrow 1$.
2. Birim norm’a sahip bir rastgele başlangıç vektörü $\mathbf{b}_i$ tanımlanır.
3. $\mathbf{b}_i \leftarrow E\{\mathbf{z}g(\mathbf{b}_i^T \mathbf{z})\} - E\{g'(\mathbf{b}_i^T \mathbf{z})\}\mathbf{b}_i$ burada g , (3.34), (3.35) ve (3.36) numaralı eşitliklerden seçilen G fonksiyonunun birinci dereceden türevi; g' ise ikinci dereceden türevidir.
4. Ortogonalizasyon yapılır: $\mathbf{b}_i \leftarrow \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_j) \mathbf{b}_j$
5. Normalleştirilir: $\mathbf{b}_i \leftarrow \frac{\mathbf{b}_i}{\|\mathbf{b}_i\|}$
6. Eğer $\mathbf{b}_i$ yakınsamamışsa, adım 3’e geri dönülür.
7. Eğer $\mathbf{b}_i$ yakınsamışsa, $\mathbf{b}_i$ vektörü çıktı olarak alınır. Daha sonra, eğer $i \leq r$ ise $i \leftarrow i+1$ ’e geçilir ve adım 2’den devam edilir.

Algoritma tarafından verilen en son vektör $\mathbf{b}_i$ ($i=1, \dots, m$) dik karıştırma matrisi $\mathbf{B}$ ’nin sütunlarından birine eşittir. $\mathbf{B}$ hesaplandıktan sonra $\hat{\mathbf{s}}(k)$ ve ayrıştırma matrisi $\mathbf{W}$ sırasıyla Eş. 3.29 ve Eş. 3.30 numaralı denklemlerden elde edilebilir.

3.1.5. Çok değişkenli istatistiksel süreç kontrolünde bağımsız bileşenler analizi yaklaşımı

Bu çalışmada, çok değişkenli süreç izleme amacıyla BBA’ya dayalı bir kontrol grafiği önerilmiştir. Bu kontrol grafiğinin oluşturulmasında Lee ve ark. (2004)’ün önerdiği BBA’ya dayalı kontrol grafiğinden esinlenilmiştir.

Lee ve ark. (2004)'de $\mathbf{W}$ ayrıştırma matrisi baskın ve dışlanmış olmak üzere ikiye ayrılır ve buna bağlı olarak I^2 , I_e^2 ve Hata Tahmininin Karesi (SPE) olmak üzere üç farklı süreç izleme istatistiği önerilir. $\mathbf{W}$ ayrıştırma matrisinin ayrıştırılmasındaki amaç temel bileşenler analizinde olduğu gibi bağımsız bileşenleri sıralamaktır. Ancak BBA'da bileşenlerin sıralanması kolay değildir ve bunu yapmanın herhangi bir standart kriteri yoktur. Literatürde BBA ile elde edilen bileşenlerin sıralamasının belirlemek için birçok yöntem önerilmiştir. Bileşenleri sıralamak için önerilen yöntemler sadece veri yapılandırma kriteri olan hata kareleri ortalamasına dayanır ve değişken sayısı arttığında hesaplaması oldukça karmaşık hale gelir. Bu tezde BBA'ya dayalı süreç izleme istatistiği, $\mathbf{W}$ ayrıştırma matrisini ikiye ayırmaksızın dikkate alıp tek bir I^2 değeri olarak elde edilmiştir. Böylece k örneklem için tahmin edilen bağımsız bileşenlerin kareleri toplamı ile ifade edilen I^2 süreç izleme istatistiği Eş.3.37'de verildiği gibi hesaplanır:

$$I^2(k) = \hat{\mathbf{s}}(k)^T \hat{\mathbf{s}}(k) \quad (3.37)$$

Kontrol sınırları ise bağımsız bileşenlerin dağılım bilgisi olmadığı için yeniden örnekleme yöntemi ile tespit edilmiştir. Önerilen kontrol grafiğinde izleme istatistikleri kontrol sınırını aşıyorsa sürecin kontrol dışında olduğu aksi halde kontrol altında olduğu tespit edilir.

Süreç izleme grafikleri süreçte neyin yanlış olduğunun ya da hangi süreç değişkenin kaymaya sebep olduğunun bilgisini vermezler. Ancak, istatistiksel izleme yöntemleriyle kayma tespit edildikten sonra, değişkenlerin BBA modeli ile elde edilen test istatistiği üzerindeki katkıları bulunarak kaymaya sebep olan değişkenler tespit edilebilir.

ÇİSK'te karşılaşılan bir diğer zorluk olan süreçteki kaymaya sebep olan değişken/değişkenlerin tanımlanması problemi, Lee ve ark. (2004)'te katkı grafikleri ile değerlendirilmiştir. Ancak, süreçte çok sayıda değişken olduğunda süreç izleme istatistiklerine katkıda bulunan değişkenleri tanımlamak zordur. Bu çalışmada değişkenlerin süreç üzerindeki katkılarını hesaplamak için öncelikle Runger ve ark. (1996b) tarafından aslında T^2 kontrol grafikleri için önerilen d_i farklarının I^2 istatistiklerine uyarlanmış hali Eş. 3.38'deki gibi elde edilir:

$$d_i = I^2 - I_{(i)}^2 \quad (3.38)$$

Burada i indisi ilgili değişkeni, I^2 , tüm değişkenlerin dahil olduğu süreçteki izleme istatistiğini ve $I_{(i)}^2$ ise i . değişken hariç tüm süreç değişkenleri için hesaplanan süreç izleme istatistiğinin değerini göstermektedir. Daha sonra, hesaplanan d_i farklarının kareleri toplamı alınarak değişkenlerin test istatistiği üzerindeki katkıları incelenir. i . değişkenin genel istatistiğe göreceli katkısını temsil eden bu fark kare toplamının nispeten büyük olduğu değişken veya değişkenlerin süreçteki kaymaya sebep olduğu söylenir.

Çalışmada önerilen ÇİSK'te BBA yaklaşımına dayalı prosedürün adımları aşağıdaki gibidir:

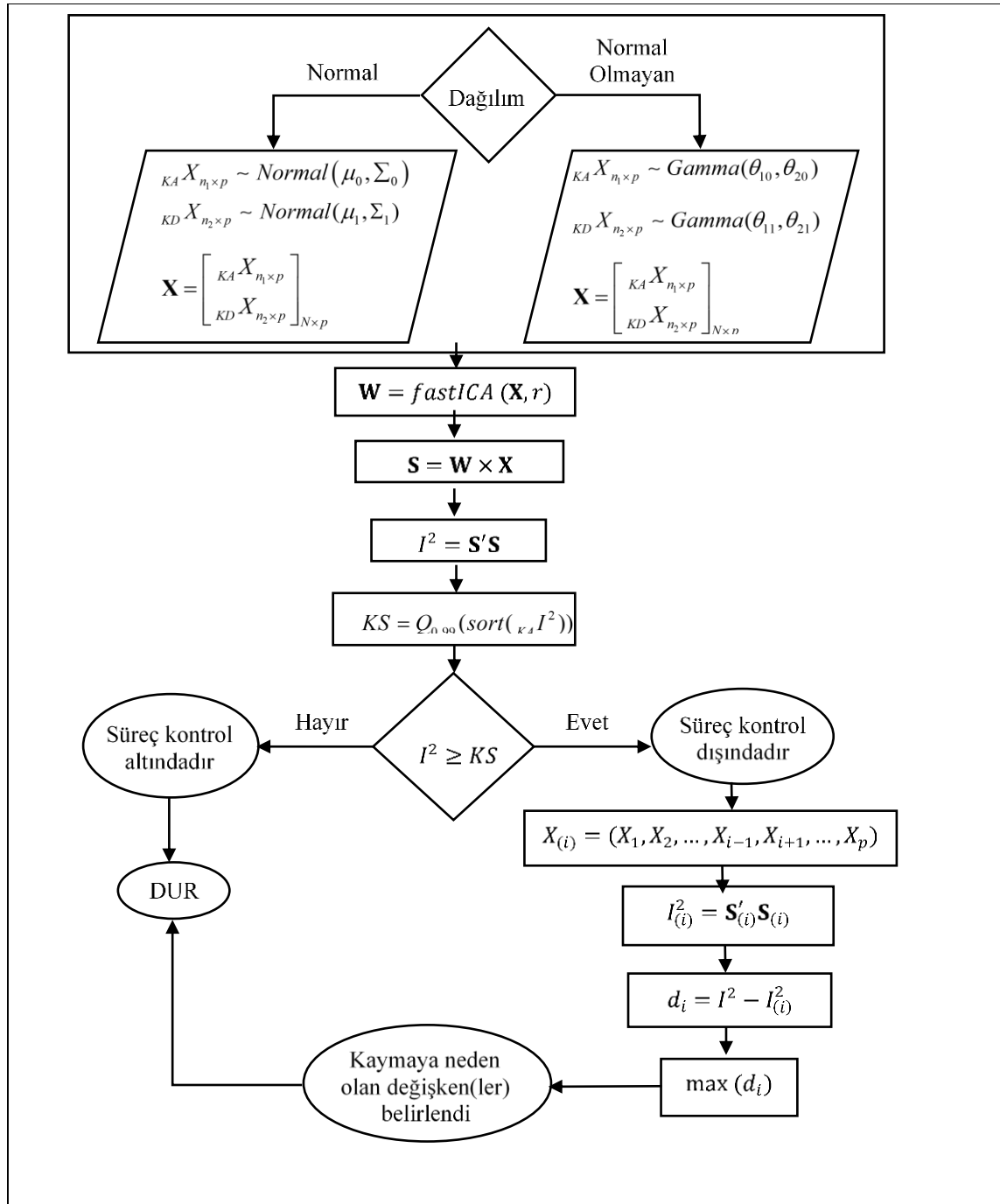
1. İlk n_1 gözlem değeri kontrol altında, sonraki n_2 gözlem değeri kontrol dışında olacak şekilde örneklem büyüklüğü toplam $N(n_1 + n_2 = N)$ olan, p değişkenli $\mathbf{X}$ gözlenen değişkenler matrisi üretilir.
2. $\mathbf{X}$ veri setine fastICA algoritması uygulanarak ayrıştırma matrisi $\mathbf{W}$ elde edilir.
3. $\mathbf{W}$ ayrıştırma matrisi ile $\mathbf{X}$ gözlenen değişkenler matrisi çarpılarak bağımsız bileşenler matrisi $\mathbf{S}$ tahmin edilir.
4. $\mathbf{S}$ bağımsız bileşenlerinin kareleri toplamı alınarak süreç izleme istatistiği I^2 elde edilir.
5. Gözlenen değişkenlerin kontrol altındaki kalan kısmı için hesaplanan I^2 istatistiklerinden yeniden örnekleme yöntemi ile elde edilen örneklerin ortalamasının %99'luk çeyrekliğine karşılık gelen değer kontrol sınırı olarak belirlenir.
6. Süreç izleme istatistiği I^2 'nin kontrol sınırını aşması durumunda sürecin kontrol dışında olduğu kararı verilir, aksi durumda süreç kontrol altındadır.

Süreç kontrol altındaysa yani süreçte herhangi bir kayma söz konusu değilse algoritma sonlandırılır. Eğer süreç kontrol dışındaysa algoritmaya süreçteki kaymaya sebep olan değişken ya da değişkenleri bulmak için aşağıdaki şekilde devam edilir:

7. Süreçteki her bir değişken adım 1'de üretilen $\mathbf{X}$ gözlem değişkenleri matrisinden teker teker çıkarılarak adım 2'den adım 4'e kadar işlemler tekrarlanır ve $I_{(i)}^2$, i . değişkenin dahil edilmediği süreç izleme istatistikleri elde edilir.

8. Adım 4'te elde edilen, tüm değişkenlerin dahil olduğu I^2 test istatistiği ile adım 7'de elde edilen $I_{(i)}^2$ test istatistikleri arasındaki farkların (d_i) kare toplamı elde edilir.
9. Diğer değişken/değişkenlere göre nispeten daha büyük olan değişken/değişkenlerin süreçteki kaymaya sebep olduğu sonucuna varılır.

BBA yaklaşımına dayalı prosedürün akış şeması ise Şekil 3.1'de gösterilmiştir.



Şekil 3.1. BBA yaklaşımına ilişkin akış şeması

3.2. Destek Vektör Makineleri

Klasik istatistikte, doğru model formunun bilindiği varsayılarak model parametrelerinin belirlenmesi amaçlanır. İstatistiksel öğrenme teorisinde ise model formunun bilinmediği kabul edilir ve doğru olabilecek modeller arasından en iyi modelin bulunması amaçlanır (Tolun, 2008). DVM, Vapnik ve Chervonenkis (1968) tarafından temeli atılan ve aynı zamanda Vapnik-Chervonenkis teorisi olarak bilinen istatistiksel öğrenme teorisine dayalı güçlü bir makine öğrenmesi yöntemidir. DVM, örüntü tanıma (sınıflandırma), regresyon ve yoğunluk tahmin problemleri için geliştirilmiş ve pratik uygulamaları gösterilmiş denetimli öğrenme algoritmasıdır.

DVM, sınıflandırma problemindeki ayırıcı fonksiyonları “öğrenme” ve regresyon problemlerindeki “tahmin etme” yeteneklerine sahip olarak geliştirilen nispeten yeni bir yöntemdir. Bu yöntem örneklem verisi az sayıda olsa bile iyi bir genelleme yeteneğine sahiptir (Foody ve Mathur, 2004). Klasik istatistiksel yöntemlerde deneysel veri seti üzerindeki hata kareleri toplamını veya hatanın mutlak değerini minimize etmek yerine, test veri seti üzerindeki hatayı minimize etme esası üzerine kurulan yapısal riski minimize etmeye çalışır. Bu sayede, hakkında herhangi bir bilgiye sahip olunmayan bir modelde bile iyi performans sergilediği gösterilmiştir (Vapnik, 1995).

DVM başlangıçta doğrusal ayrıştırılabilen verileri birbirinden en uygun şekilde ayırmak için tasarlanmış ve daha sonra çok boyutlu ve doğrusal olmayan biçimde ayrılan verilerin sınıflandırılmasına yönelik de geliştirilmiştir. Temel olarak sınıfları birbirinden en doğru şekilde ayırabilen hiper düzlemin (karar sınırlarının) belirlenmesi prensibine dayanmaktadır (Vapnik, 1995). En basit sınıflandırma işleminde, DVM doğrusal ayırma düzlemleri arasından karar sınırları arasındaki mesafenin (marjın) maksimum olduğu doğrusal ayırma hiper düzlemini bulmayı amaçlar. Bu durumda öğrenme problemi kısıtlı doğrusal olmayan optimizasyon problemi şeklinde tasarlanabilir. Problem aslında doğrusal kısıtlar altında karesel formda yazılan amaç fonksiyonunun maksimize edildiği kuadratik optimizasyon problemidir (Kecman, 2001). Öte yandan, gerçek hayatta karşılaştığımız problemlerin çoğunda veriler doğrusal olarak ayrılamayabilir. Böyle durumlarda DVM, girdi uzayında doğrusal olarak ayrılamayan eğitim verilerini doğrusal olmayan bir dönüşüm ile çok boyutlu özellik uzayına taşır. Bu dönüşüm, polinomial, sigmoid ve radyal olarak simetrik fonksiyonlara sahip doğrusal olmayan haritalandırma fonksiyonları ile kolayca yapılabilir.

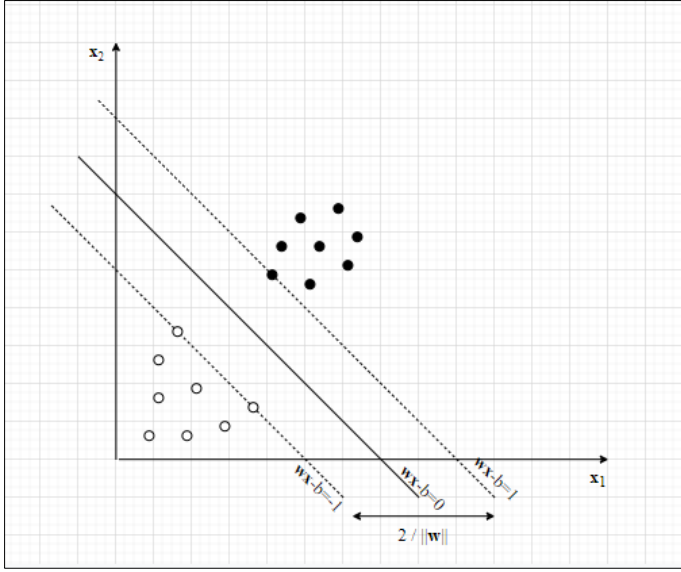
Yapılan dönüşümün ardından, DVM, doğrusal olarak ayrılabilen durumlardaki işlem adımlarını uygulayarak bu yeni özellik uzayında verileri ayırmak için optimum doğrusal ayırma hiper düzlemini bulmaya çalışır.

DVM’de, istatistik, makine öğrenmesi ve yapay sinir ağlarından pek çok yöntem birleştirilerek algoritmalar oluşturulur. DVM’ler günümüzde yüz tanıma sistemlerinden ses analizine kadar birçok sınıflandırma probleminde kullanılmaktadır. DVM’nin birçok özelliği teorik ve mühendislik uygulamalarında giderek artan bir ilgi görmektedir. DVM, doğrusal ve doğrusal olmayan sınıflandırma, fonksiyon tahmini ve yoğunluk tahmini gibi bir çok problemi çözmek için kullanılır. Ayrıca DVM, kernel tabanlı yöntemlerdeki pek çok güncel tartışmaya yön veren güçlü bir yöntemdir. Bunların yanında DVM sadece iki sınıflı sınıflandırma probleminin çözümü için değil çok sınıflı sınıflandırma probleminin çözümü için de geliştirilmiştir.

Örüntü tanıma problemlerinde DVM’nin teorik alt yapısı; doğrusal olarak ayrılabilen veriler için DVM, doğrusal olarak ayrılamayan veriler için DVM ve doğrusal olmayan DVM olmak üzere üç ana başlıkta incelenebilir.

3.2.1. Doğrusal olarak ayrılabilen veriler için destek vektör makineleri

DVM’de tanımlanan en basit model, maksimum marjlı bir sınıflandırıcı oluşturmak için doğrusal bir ayırıcı hiper düzlemi kullanan modeldir. Burada veri seti doğrusal olarak ayrılabilir ve DVM’nin bu en ilkel formu optimal ayırıcı hiper düzlemi bulmaya çalışan doğrusal bir fonksiyondur. Doğrusal olarak ayrılabilen veri setine ilişkin bir örnek Şekil (3.2)’deki gibi gösterilebilir:



Şekil 3.2. Doğrusal olarak ayrılabilen veriler için DVM örneği

$\mathbf{x} \in R^p$, p boyutlu uzayda herhangi bir örnek (girdi değişkeni) ve $y_i \in \{-1, +1\}$ çıktı değişkenlerinin ait olduğu sınıf etiketleri olmak üzere, $(\mathbf{x}_1, y_1), \dots, (\mathbf{x}_N, y_N)$, N tane gözlemden oluşan eğitim veri seti aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$D = \{(\mathbf{x}_i, y_i), i = 1, \dots, N\} \quad (3.39)$$

Tanımlanan eğitim veri setini doğrusal olarak ayırabilen birden çok hiper düzlem söz konusudur. DVM’de amaç, $(\mathbf{x}_i, y_i)$ eğitim veri setinin bilinmeyen etiketlerini ve sınıflandırma hatasını minimize eden tek bir optimum ayırıcı hiper düzlemi bulmaktır. Doğrusal olarak ayrılabilir verilerin sınıflandırılmasında, eğitim hatası (deneysel risk) minimize edilerek tüm ayırma hiper düzlemleri arasından maksimum marja sahip olan belirlenir.

D eğitim veri setinin doğrusal olarak ayrılabilmesi için N adet bağımsız özdeş dağılan (iid) örnek içeren eğitim veri seti için optimum ağırlık vektörü $\mathbf{w} \in R^p$ ve eşik değeri (sapma değeri) b olmak üzere aşağıdaki eşitsizliklerin sağlanması gerekir:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}\mathbf{x}_i + b &\geq +1 \quad \text{ise} \quad y_i = +1 \\ \mathbf{w}\mathbf{x}_i + b &\leq -1 \quad \text{ise} \quad y_i = -1 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Eş. 3.40'ta verilen eşitsizlikler Eş. 3.41'deki gibi genelleştirilebilir:

$$y_i (\mathbf{w}\mathbf{x} + b) \geq 1, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.41)$$

Buradan iki vektör arasındaki optimum hiper düzleme ilişkin doğrunun denklemi Eş.3.42'deki şekilde elde edilir:

$$\mathbf{w}\mathbf{x} + b = 0 \quad (3.42)$$

Sınıfları birbirinden ayıran hiper düzlemler arasındaki mesafeye *marj* denir. M ile gösterilen marj genişliği aşağıdaki şekilde hesaplanabilir:

$$M = \frac{2}{\|\mathbf{w}\|} \quad (3.43)$$

DVM ile Eş. 3.43'te verilen eşitlik maksimize edilerek, deneysel risk en aza indirilir. Böylece sınıfların birbirinden en uzak olduğu yerde yanlış sınıflandırma ortadan kaldırılmış olur. M 'nin maksimum olabilmesi için, $\mathbf{w}$ 'nun normu olan $\|\mathbf{w}\|$ minimize edilmelidir. Bu nedenle, doğrusal olarak ayrılabilen bir durum için aşağıdaki kuadratik optimizasyon problemi çözülerek, en uygun hiper-düzlem bulunabilir (Kecman, 2001):

$$\begin{aligned} \text{Min } & \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 \\ & y_i (\mathbf{w}\mathbf{x} + b) \geq 1, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.44)$$

Bu optimizasyon problemi primal uzayda $\mathbf{w}$ ve b parametrelerine göre çözülebilir. Ancak problemin dual formunu çözmek, primal model ile aynı sonucu vereceğinden ve sadece Lagrange çarpanı α_i 'ye bağlı olduğundan daha akılcı bir yol olacaktır. Bu nedenle Eş.3.44'teki primal model, dual modele dönüştürülür. Bu dönüştürme işlemi için ilk olarak Lagrange çarpanlarından faydalanılır. Lagrange çarpanları kısıtlı optimizasyon problemini, kısıtsız optimizasyon problemine dönüştürür. Ayrıca doğrusal olmayan problemler için primal modelin dual modele dönüştürülmesinde Khun-Tucker optimallik koşulları sağlanmalıdır.

Bu optimizasyon problemi için kullanılacak Lagrange çarpanları aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$L(\mathbf{w}, b, \alpha) = \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 - \sum_{i=1}^N \alpha_i [y_i (\mathbf{w}\mathbf{x} + b) - 1] \quad (3.45)$$

Burada α_i Lagrange çarpanıdır ve her zaman pozitifdir ($\alpha_i \geq 0$).

$L(\mathbf{w}, b, a)$ fonksiyonunun Lagrange çarpanlarına (α_i) göre minimum noktası, $\mathbf{w}$ ve b değerlerine göre ise maksimum noktası bulunmalıdır. $L(\mathbf{w}, b, a)$ fonksiyonunun bu eyer noktalarını ($\mathbf{w}^*, b^*, a^*$) bulabilmek için fonksiyonun $\mathbf{w}$ ve b değerlerine (primal değişkenlere) göre türevleri alınır ve sıfıra eşitlenir. Bu eşitlikler çözülerek aşağıdaki kısıt fonksiyonları bulunur:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} = 0 \Rightarrow \mathbf{w}^* = \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i \mathbf{x}_i \quad \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, N \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i = 0 \quad \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, N \quad (3.47)$$

Eş. 3.41'deki eşitsizlik, Lagrange çarpanları yönteminin genelleştirilmiş bir formu olan Karush-Khun-Tucker (KKT) teoremi ile $\alpha_i \neq 0$ olduğu noktalarda aşağıdaki şekilde dönüştürülür (Karush, 1939; Khun ve Tucker, 1951):

$$\alpha_i [y_i (\mathbf{w}\mathbf{x} + b) - 1] = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.48)$$

Eş. 3.46 ve Eş. 3.47 numaralı denklemlerin Eş. 3.44'te verilen primal modelde yerine yazılmasıyla aşağıdaki Dual Lagrange fonksiyonu $L(\alpha)$ elde edilir:

$$L(\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{ij} \alpha_i \alpha_j y_i y_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) \quad (3.49)$$

Optimum hiper düzlemi elde edebilmek için Dual Lagrange $L(\alpha)$, α_i 'lere göre maksimize edilir. Burada elde edilen ve sifıra eşit olmayan Lagrange çarpanları ($\alpha_i \neq 0$) Eş. 3.48'da yerine konularak en uygun hiper düzlem oluşturulur. Sonuç olarak standart kuadratik optimizasyon problemi aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned} \text{Max } L(\alpha) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N y_i y_j \alpha_i \alpha_j \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle \\ \alpha_i &\geq 0, i = 1, \dots, N \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i &= 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

Eğer $\alpha_i > 0$ ise, karşılık gelen veri noktaları destek vektör olarak adlandırılır. Buradan, normal vektör için en uygun çözüm aşağıda verildiği gibidir:

$$\mathbf{w}^* = \sum_{i=1}^{N_{DV}} \alpha_i y_i \mathbf{x} \quad (3.51)$$

burada N_{DV} , destek vektörlerin sayısıdır. Herhangi bir destek vektör $(\mathbf{x}_k, y_k)$ seçilerek, $b^* = y_k - \mathbf{w}^* \mathbf{x}_k$ elde edilebilir. $(\mathbf{w}^*, b^*)$ belirlendikten sonra, ayırma fonksiyonu Eş.3.52'deki gibi olacaktır:

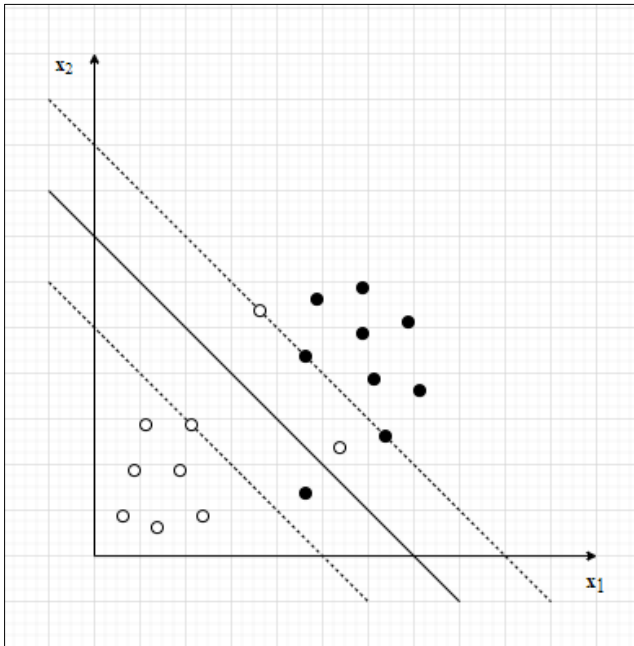
$$f(\mathbf{x}) = \text{sgn} \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i y_i (\mathbf{x}^T \mathbf{x}) + b^* \right) \quad (3.52)$$

burada $\text{sgn}(\cdot)$ işaret fonksiyonudur.

3.2.2. Doğrusal olarak ayrılamayan veriler için destek vektör makineleri

Uygulamalarda her zaman doğrusal olarak ayrılabilir veriye ulaşmak kolay değildir. Doğrusal olarak ayrılamayan veri olması durumunda ise Eş.3.44'teki primal modelde $y_i (\mathbf{w} \mathbf{x} + b) \geq 1, i = 1, \dots, N$ kısıtları sağlanamaz ve verilerin çakışması (üst üste binmesi) durumu söz konusu olur. Böyle durumlarda veriler doğru şekilde sınıflandırılmaz ve yanlış sınıflandırılan eğitim girdi verisi $\mathbf{x}_i$ 'ye karşılık gelen α_i 'ler üst sınırdaki yer alır. Bu veri

noktasının doğru şekilde sınıflandırılabilmesi için karşılık gelen α_i değeri artırılarak karar sınırı üzerinde daha güçlü bir etki yaratılmaya çalışılır ve böylece tüm eğitim verilerinin DV olarak seçilmesine sebep olunur (Kecman, 2001). Bu problemin üstesinden gelebilmek için, optimum hiper-düzlem seçilirken, marjın genişliğine karar vermek için verilerin belirli bir hata ile yanlış sınıflandırılmasına izin verilir. Burada amaç, aynı sınıfta yer alan verileri mümkün olduğunca bir arada (hiper-düzlemin aynı tarafında) bulunduracak şekilde ayıran ve yanlış sınıflandırma hatasını minimum yapacak olan optimum hiper düzlemi bulmaktır. Doğrusal olarak ayrılamayan veri setine ilişkin bir örnek Şekil 3.3'te gösterilmiştir:



Şekil 3.3. Doğrusal olarak ayrılamayan veriler için DVM

Doğrusal olarak ayrılabilen durumda ayırıcı hiper-düzlemi kullanan model ile maksimum marjlı bir sınıflandırıcı oluşturulurken, doğrusal olarak ayrılamayan durumda yumuşak marjlı sınıflandırıcı oluşturulur. Yumuşak marj sınıflandırıcısı oluşturulurken, maksimum marj sınıflandırıcısındaki optimizasyon problemine negatif olmayan bir aylak değişken ($\xi_i, i = 1, \dots, N$) eklenir ve bir önceki bölümde anlatılan optimum marj algoritması doğrusal olmayan forma dönüştürülür (Cortes ve Vapnik, 1995). Eklenen bu aylak değişkenle Eş.3.40 ve Eş.3.41'de gösterilen maksimum marj sınıflandırıcısındaki karar sınırlarının kısıtları, yumuşak marj sınıflandırıcısı için sırasıyla Eş.3.53 ve Eş.3.54'te görüldüğü gibi değişecektir:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}\mathbf{x} + b \geq +1 - \xi_i \quad \text{ise} \quad y_i = +1 \\ \mathbf{w}\mathbf{x} + b \leq -1 + \xi_i \quad \text{ise} \quad y_i = -1, \quad \xi_i \geq 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$y_i(\mathbf{w}\mathbf{x} + b) \geq 1 - \xi_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad \xi_i \geq 0 \quad (3.54)$$

Doğrusal ayrılamayan verilerin olduğu bu durumda, marj genişliği maksimize edilirken, yanlış sınıflandırma hataları toplamından oluşan bir maliyet fonksiyonunun da minimize edilmesi beklenir. Yumuşak marj sınıflandırıcı da optimizasyon probleminin amaç fonksiyonunda $\|\mathbf{w}\|$ dışında bir de hatalara ilişkin üst sınır minimize edilmeye çalışılır.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + C \sum_{i=1}^N \xi_i \\ & y_i(\mathbf{w}\mathbf{x} + b) \geq 1 - \xi_i, \quad \xi_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.55)$$

Burada C uç değerlere verilen cezayı temsil eden, kullanıcı tarafından belirlenen bağımsız bir parametredir. C değerinin büyük olması uç değerlere verilen yüksek cezayı simgelerken, küçük olması yanlış sınıflandırma hatalarının sayısındaki artış anlamına gelir.

Verilerin doğrusal olarak ayrılamaması durumunda yanlış sınıflandırma hatasına müsaade edilmesi sonucunda iki tür destek vektör oluşur: hiper-düzlemler üzerine düşen destek vektörler ve marjın yanlış tarafına düşen destek vektörler. Yumuşak marj sınıflandırıcısında optimizasyon probleminin çözümü Eş.3.55’de verilen kısıt altında Lagrange fonksiyonunun eyer noktası tarafından belirlenir. İlgili Lagrange fonksiyonu aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$L(\mathbf{w}, b, \xi, \alpha, \beta) = \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + C \sum_{i=1}^N \xi_i - \sum_{i=1}^N \alpha_i \{y_i(\mathbf{w}\mathbf{x} + b) - 1 + \xi_i\} - \sum_{i=1}^N \beta_i \xi_i \quad (3.56)$$

Burada α_i ve β_i değerleri Lagrange çarpanlarıdır. Maksimum marj sınıflandırıcısında olduğu gibi $L(\mathbf{w}, b, \xi, \alpha, \beta)$ fonksiyonunun α_i ve β_i ’ye göre minimum noktası, $\mathbf{w}$, b ve ξ değerlerine göre ise maksimum noktası elde edilmelidir. $L(\mathbf{w}, b, \xi, \alpha, \beta)$ fonksiyonunun bu eyer noktalarını bulabilmek için bu kez fonksiyonun $\mathbf{w}$, b ve ξ değerlerine göre türevleri

alınır ve sıfıra eşitlenir. Bu eşitlikler çözülerek Eş. 3.57, Eş. 3.58 ve Eş. 3.59'daki kısıtlar ortaya konulur:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}^*} = 0 \Rightarrow \mathbf{w}^* = \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i \mathbf{x} \quad \alpha_i \geq 0, i=1, \dots, N \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial L}{\partial b^*} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i = 0 \quad \alpha_i \geq 0, i=1, \dots, N \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi^*} = 0 \Rightarrow \alpha_i + \beta_i = C \quad (3.59)$$

KKT karşılıklı koşulu ise aşağıdaki gibidir:

$$\alpha_i [y_i (\mathbf{w}\mathbf{x} + b) - 1 + \xi_i] \geq 0, \quad i=1, \dots, N \quad (3.60)$$

b eşik değeri KKT karşılıklı koşulu kullanılarak hesaplanır. Sonuç olarak, optimizasyon problemi, sadece Lagrange çarpanının üst sınırı olan ceza parametresi C 'de yapılan bir düzeltme ile çözülür.

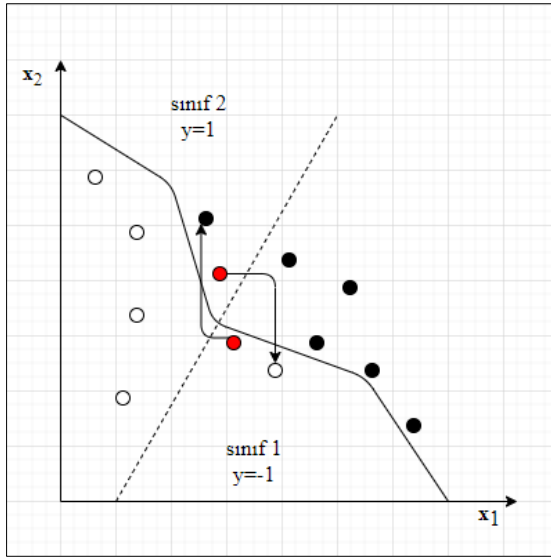
$$\begin{aligned} \text{Max } L(\alpha) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j y_i y_j (\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j) \\ \sum_{i=1}^N y_i \alpha_i &= 0, \quad 0 \leq \alpha_i \leq C, \quad i=1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.61)$$

Sıfırdan büyük Lagrange çarpanları ($\alpha_i > 0$) yine destek vektörlerdir. Maksimum marj sınıflandırıcısından farklı olarak α_i 'ler için belirlenen bir C üst sınırı vardır. Bu üst sınır aynı zamanda aylak değişkenlerin toplamını ($\sum \xi_i$) etkiler. Sonuç olarak yumuşak marj sınıflandırıcısında ayırıcı fonksiyon aşağıdaki gibi olur:

$$f(\mathbf{x}) = \text{sgn} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{w}^* \mathbf{x} + b = \sum_{i=1}^N y_i \alpha_i \mathbf{x}^T \mathbf{x} + b^* \right) \quad (3.62)$$

3.2.3. Doğrusal olmayan destek vektör makineleri

Uygulama verilerinde her zaman doğrusal olarak ayrılan hiper düzlem bulunamayabilir. Doğrusal sınıflandırıcıların bazı kısıtlamaları vardır. Bu kısıtlamalar sadece verilerin örtüşmesiyle ilgili değildir. Verileri belirli bir hata ile doğrusal ayıran hiper düzlemden daha iyi ayıran doğrusal olmayan hiper düzlemler vardır (Kecman, 2001). Doğrusal olmayan DVM’de, doğrusal olarak ayrılamayan veriler, DVM ile oluşturulan doğrusal olmayan bir hiper düzlem ile sınıflandırılır. Doğrusal olarak ayrılmayan verilere ilişkin bir örnek Şekil 3.4’te gösterilmektedir:

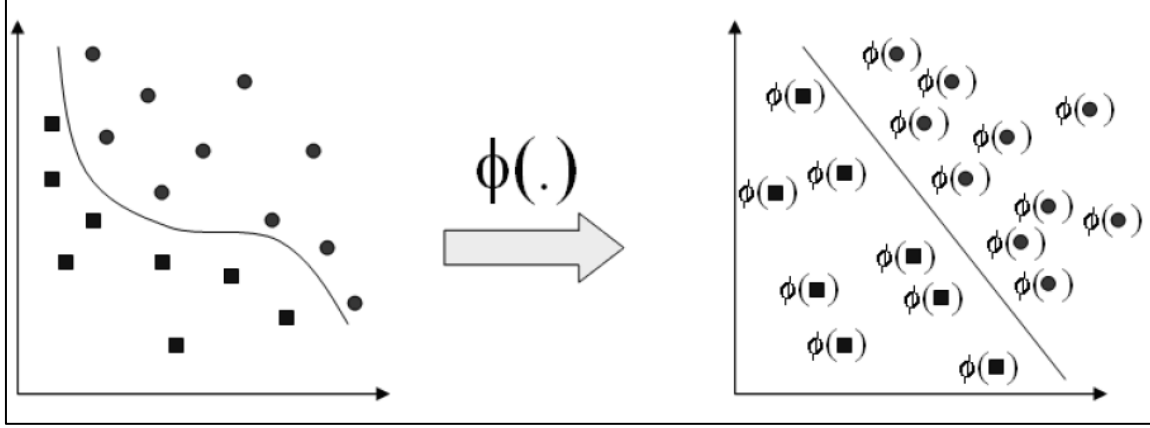


Şekil 3.4. Doğrusal olmayan DVM

Şekil 3.4’te gösterilen örnek belirli bir hata ile doğrusal olarak ayrılabilen bir örnektir. Görselde, kesikli çizgi ile gösterilen doğrunun en iyi doğrusal hiper-düzlem olmasına rağmen iki adet veri noktasını yanlış sınıflandırdığı görülmektedir. Oysa ki şekilde de görüldüğü üzere doğrusal olmayan ayırıcı düzlem kullanıldığında sınıflandırma hatasız bir şekilde yapılabilir.

Verilerin orijinal girdi uzayında doğrusal olarak ayrılamaması durumunda, DVM ilk olarak orijinal girdi uzayındaki doğrusal olmayan problemleri daha yüksek boyutlu bir özellik uzayına dönüştürür. Doğrusal olarak ayrılamayan verilerin girdi uzayından yüksek boyutlu özellik uzayına haritalanmasındaki amaç düşük boyutlu girdi uzayında çözülmesi zor olan karmaşık problemlerin daha kolay çözülebileceği yüksek boyutlu bir özellik uzayına

taşınmasıdır (Şekil 3.5). DVM düşük boyutlu girdi uzayındaki doğrusal olmayan problemleri yüksek boyutlu özellik uzayına haritalayarak doğrusallaştırır (Boser ve ark., 1992). Bu doğrusal olmayan dönüşüm adımından sonra, çözülecek optimizasyon problemi, doğrusal olarak ayrılabilir sınıflar için ayırıcı bir hiper düzlemin hesaplanmasıyla aynı olacaktır.



Şekil 3.5. Örneklerin özellik uzayına haritalanması (Liao, 2008)

Doğrusal olmayan verilerin düşük boyutlu girdi uzayından çok boyutlu özellik uzayına haritalanması işlemi Eş. 3.63'teki denklem ile ifade edilebilir:

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p \xrightarrow{\Phi} \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d, \quad d > p \quad (3.63)$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{z} = [\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N]$$

Buradaki $\Phi(\cdot)$, girdi uzayındaki $\mathbf{x}$ vektörünü özellik uzayındaki $\mathbf{z}$ vektörüne dönüştüren önceden belirlenmiş sabit bir fonksiyondur. Girdi uzayı $\mathbf{x}$ girdi vektörünün $\mathbf{x}_i$ ($i = 1, \dots, N$) bileşenlerinden, özellik uzayı ise $\mathbf{z}$ vektörünün $\mathbf{z}_i$ bileşenlerinden oluşur. Bu şekilde yapılan bir haritalama ile doğrusal DVM uygulandığında $\mathbf{z}_i$ bileşenlerinin doğrusal olarak ayrılması beklenir ve böylece optimizasyon problemi çözülebilir.

Girdi uzayından özellik uzayına yapılan dönüşümden sonra ayırıcı hiper düzlemin fonksiyonu ve $\mathbf{w}$ vektörü aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{w}\mathbf{z} + b \quad (3.64)$$

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^N y_i \alpha_i \mathbf{z}_i \quad (3.65)$$

$\mathbf{w}$ vektörü Eş. 3.63'te yerine yazılırsa Eş. 3.66'daki fonksiyona ulaşılır:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N y_i \alpha_i (\mathbf{z}_i \cdot \mathbf{z}) + b \quad (3.66)$$

Haritalama ile doğrusal olarak ayırlamayan verilerin özellik uzayında doğrusal olarak ayrılması sağlanır. Ancak, özellik uzayının boyutu arttıkça iç çarpım $(\mathbf{z}_i \cdot \mathbf{z})$ 'nin hesaplanması zorlaşır. Bu zorluğun üstesinden gelebilmek için kernel fonksiyonlarından faydalanılır. $(\mathbf{z}_i \cdot \mathbf{z})$ iç çarpımı aşağıdaki şekilde kernel fonksiyonu (K) ile ortaya koyulur:

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \mathbf{z} \cdot \mathbf{z}_i \quad (3.67)$$

Kernel fonksiyonu girdi uzayının bir fonksiyonudur. Dolayısıyla özellik uzayındaki $(\mathbf{z}_i \cdot \mathbf{z})$ iç çarpımı yerine girdi uzayındaki eğitim verileri için belirlenen $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)$ fonksiyonu kullanılır. Böylece önceden seçilen bir kernel fonksiyonu ile yüksek boyutlu bir uzayda çalışmanın zorluğu ortadan kaldırılır. Özellik uzayındaki iç çarpımın yerine kullanılabilecek birçok kernel fonksiyon alternatifi bulunmaktadır. r, γ ve g kernel parametreleri olmak üzere iyi bilinen bazı kernel fonksiyonları Çizelge 3.1'de gösterilmektedir.

Çizelge 3.1. Sıklıkla kullanılan kernel fonksiyonları

Fonksiyon Adı	Fonksiyon
Doğrusal Kernel Fonksiyon	$K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j$
g . Dereceden Polinomiyal Kernel Fonksiyon	$K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = (\gamma \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j + r)^g, \quad \gamma > 0$
Radyal Bazlı Kernel Fonksiyon	$K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \exp\left\{-\gamma \ \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\ ^2\right\}, \quad \gamma > 0$
Sigmoid Kernel	$K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \tanh(\gamma \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j + r), \quad \gamma > 0$

Özellik uzayındaki Lagrange fonksiyonu Eş. 3.68'deki gibidir:

$$L(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j y_i y_j \mathbf{z}_i^T \mathbf{z}_j \quad (3.68)$$

Özellik uzayındaki iç çarpım için seçilen uygun Kernel fonksiyonu $L(\alpha)$ 'da yerine yazılırsa amaç fonksiyonu ve kısıtlar aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} \text{Max } L(\alpha) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j y_i y_j K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i &= 0, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.69)$$

Böylece, ayırıcı fonksiyonu Eş. 3.70'deki şekli alır:

$$f(\mathbf{x}) = \text{sgn} \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i y_i \cdot K(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_i) + b \right) \quad (3.70)$$

3.2.4. Çok değişkenli süreç kontrolünde destek vektör makineleri yaklaşımı

DVM, aynı anda genelleme hatasını en aza indiren ve geometrik marjı maksimuma çıkaran bir dışbükey optimizasyon problemini çözerek hiper düzlemi elde etmek için geometrik özellikleri kullanır (Burges,1998).

$y_i \in \{-1, 1\}$ olduğu bir $(\mathbf{x}_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$ eğitim veri seti ile birlikte bir test veri seti olan $\mathbf{z}$ verildiğinde, karar fonksiyonu Eş. 3.71'den elde edilir:

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i K(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}) + b \quad (3.71)$$

Burada α_i , maliyet kısıtlaması altında kuadratik programlamayla çözülebilen bir Lagrange çarpanı, b ise Eş. 3.72'den elde edilebilen modeldeki parametredir:

$$\alpha_i \left\{ y_i \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j y_j K(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i) + b \right) - 1 \right\} = 0 \quad (3.72)$$

Eş. 3.73’de, K radyal tabanlı kernel fonksiyonudur ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \exp\left(-\gamma \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2\right) \quad (3.73)$$

burada γ bir kernel parametresidir (Shawe-Taylor ve Cristianini, 2000).

DVM modelinden sınıflandırma olasılıklarını elde etmek için, sadece DVM modeli değil, aynı zamanda $f(\mathbf{z})$ ’nin olasılık formlarına dönüşümü için ekstra bir sigmoid fonksiyonunun eğitilmesi gerekir. Platt (2000), olasılıklar için A ve B gibi iki parametrelili, parametrik bir sigmoid fonksiyon modelini kullanmıştır. I kontrol altındaki gözlem sayısını ve O kontrol dışındaki gözlem sayısını göstermek üzere, eğitim verileri kullanılarak, A ve B aşağıdaki optimizasyon problemiyle çözülebilir:

$$\text{Min} \left\{ -\sum_{i=1}^n (q_i \log(p_i) + (1 - q_i) \log(1 - p_i)) \right\} \quad (3.74)$$

Burada q_i olasılığı Eş. 3.75’te olduğu şekilde tanımlanır:

$$q_i = \begin{cases} \frac{I+1}{I+2}, & y_i = +1 \\ \frac{1}{O+2}, & y_i = -1 \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.75)$$

p_i ise aşağıdaki eşitlikte tanımlandığı gibidir:

$$p_i = \frac{1}{1 + \exp(Af(\mathbf{x}_i) + B)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.76)$$

Eş. 3.76'yı en aza indirgeyen A ve B parametreleri belirlendikten sonra, bir test veri seti olan $\mathbf{z}_i$ 'nin olasılık tahmini (PoC) Eş. 3.77'den elde edilebilir:

$$\text{PoC}_i = \frac{1}{1 + \exp(Af(\mathbf{z}_i) + B)} \quad (3.77)$$

DVM'nin hem normal hem de normal olmayan durumlarda kontrol altındaki ve kontrol dışı gözlemler arasında başarılı bir ayırım yapabileceği görülebilir (Chongfuangprinya ve ark., 2011).

Bu çalışmada, çok değişkenli bir süreçteki kaymayı tespit etmek ve tanımlamak için Chongfuangprinya ve ark. (2011)'den esinlenilerek PoC kontrol grafikleri oluşturulmuştur. Ancak burada söz konusu çalışmadan farklı olarak hesaplama kolaylığı sağlamak amacıyla yanlış sınıflandırma olasılıkları süreç izleme istatistiği olarak kullanılmıştır. Normalde izleme istatistiğinin olasılık dağılımı bilindiğinde kontrol grafiğinde yer alan kontrol sınırları genel olarak kullanıcı tarafından belirlenen bir değer (örneğin 1. Tip hata) ile belli bir olasılık dağılımına dayanarak elde edilebilir. PoC kontrol grafiğinde izleme istatistiklerinin dağılımı bilinmediğinden kontrol sınırı bootstrap yöntemi ile belirlenir. Bootstrap yaygın kullanılan, ana kütle dağılımı bilinmediğinde istatistiksel tahmin yürütmeye dayalı bir yeniden örnekleme yöntemidir (Efron ve Tibshirani, 1994).

PoC kontrol grafiğinde süreç izleme istatistikleri elde edilen bu kontrol sınırı ile izlenir. Süreç izleme istatistiklerinin kontrol sınırını aşması durumunda sürecin kontrol dışında olduğuna, aksi halde sürecin kontrol altında olduğuna karar verilir ve böylelikle süreçte kayma olup olmadığı tespit edilmiş olur. Eğer izlenen süreçte bir kayma söz konusuysa, bu kaymanın sebepleri araştırılır ve süreçteki kaymanın tanımlanması problemine geçilir.

Süreçteki kaymanın tanımlanması için “-1” veya “+1” etiketlerine karşılık gelen sınıflandırma olasılıklarının ortalamalarına bakılır. Farklı değişim senaryolarına karşılık gelen bu ortalamalar karşılaştırılır. En büyük ortalama değerine karşılık gelen değişim kombinasyonuna bakılarak hangi değişken/değişkenlerin kaymaya sebep olduğu belirlenir.

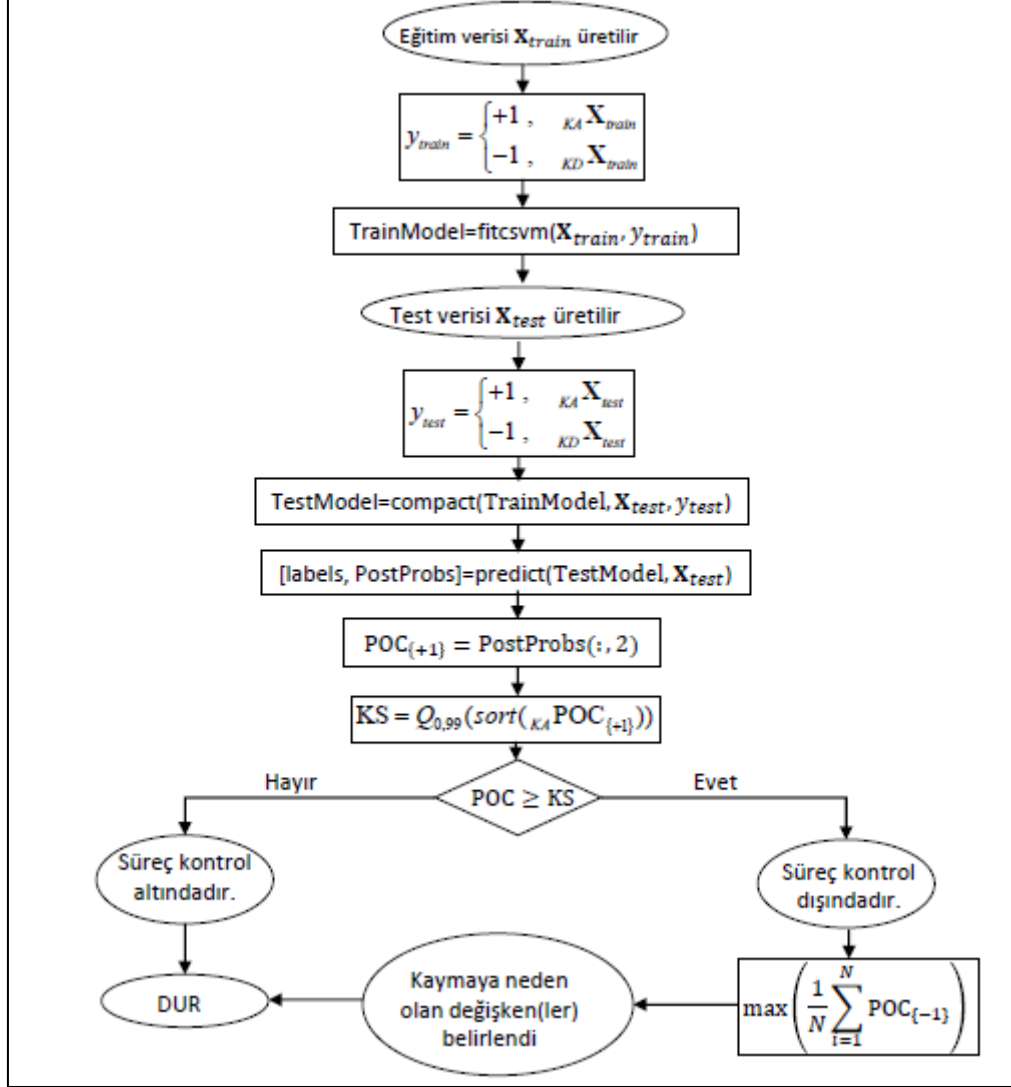
Bu çalışmada yürütülen DVM'ye dayalı çok değişkenli süreç izleme prosedürünün adımları aşağıdaki gibidir:

1. İlk n_1 gözlemi kontrol altında, sonraki n_2 gözlemi kontrol dışında olacak şekilde örnek büyüklüğü N ($N = n_1 + n_2$) olan $\mathbf{X}_{train}$ veri seti üretilir.
2. $\mathbf{X}_{train}$ veri setine uygun olacak şekilde kontrol altındaki veriye “+1”, kontrol dışındaki veriye “-1” değerini atayan $\mathbf{y}_{train}$ etiket vektörü oluşturulur.
3. $(\mathbf{X}_{train}, \mathbf{y}_{train})$ eğitim veri seti olmak üzere DVM modeli eğitilir.
4. Adım 1'deki $\mathbf{X}_{train}$ 'e benzer şekilde yeni bir veri seti olarak $\mathbf{X}_{test}$ verisi üretilir.
5. Adım 2'de olduğu gibi $\mathbf{X}_{test}$ verisine uygun olacak şekilde $\mathbf{y}_{test}$ etiket değişkeni oluşturulur.
6. $(\mathbf{X}_{test}, \mathbf{y}_{test})$ test veri seti adım 3'te eğitilen DVM modeli ile test edilir ve sınıflandırma olasılıkları (Sonsal Olasılıklar) elde edilir.
7. Sınıflandırma olasılıkları matrisinde “+1”e karşılık gelen yanlış sınıflandırma olasılıkları süreç izleme istatistiği (PoC) olarak seçilir.
8. (PoC) değerlerinin kontrol altında üretilen kısımdan bootstrap yöntemi ile elde edilen örneklerin ortalamalarının %99'luk çeyrekliğine karşılık gelen değeri kontrol sınırı olarak belirlenir.
9. (PoC) süreç izleme istatistiği değeri kontrol sınırını aşıyorsa sürecin kontrol dışında olduğu kararı verilir.

Sürecin kontrol altında olduğu kararı verilirse algoritma sonlandırılır. Ancak süreç kontrol altında değilse süreçteki kaymaya sebep olan değişken/değişkenleri tespit etmek için algoritmaya aşağıdaki şekilde devam edilir:

10. Adım 1'den adım 6'ya kadar olan işlemler süreçteki kaymanın yaratıldığı farklı kombinasyonlar için tekrarlanır.
11. Adım 6'da farklı değişim kombinasyonlarıyla oluşturulan Sonsal Olasılıklar matrisinin kontrol dışında olma olasılıklarının ortalamaları elde edilir.
12. En büyük ortalama değerine karşılık gelen değişim kombinasyonu süreçteki kaymanın kaynağını tanımlar.

DVM yaklaşımına dayalı çok değişkenli süreç izleme prosedürünün akış şeması ise Şekil 3.6'da gösterilmiştir.



Şekil 3.6. DVM yaklaşımına ilişkin akış şeması

3.3. Hibrit Bağımsız Bileşenler Analizi ve Destek Vektör Makineleri Yaklaşımı

Çalışmanın bu kısmında ÇİSK’de daha önceki bölümlerde açıklanan, özellik çıkarımı yapan BBA yöntemi ile iyi bir sınıflandırma yöntemi olan DVM birleştirilerek karma bir mekanizma oluşturulmuştur. Önerilen hibrid yaklaşım süreçteki kaymanın tespit edilmesi ve kaymaya sebep olan değişken ya da değişkenlerin tahmin edilmesinde izleme istatistiğine gömülü bilgilerin önemli olabileceği temeline dayalı olarak geliştirilmiştir. Burada amaç, BBA’nın yüksek dereceden istatistikleri dikkate alması ile DVM’nin süreçteki kontrol dışı

durumu tespit edebilmesi için daha yararlı bilgilere ulaşmasını sağlamaktır. Bu bağlamda, öncelikle süreçteki değişkenlerin yanı sıra BBA ile elde edilen I^2 test istatistiği DVM'ye girdi vektörü olarak dikkate alınır. Daha sonra DVM ile elde edilen sınıflandırma olasılıkları $(I^2 - \text{PoC})$ süreç izleme istatistiğini hesaplamak için kullanılır.

Hibrid BBA-DVM yöntemi iki aşamadan oluşur. İlk aşamada dikkate alınan veriler eğitilerek sınıflandırma modeli oluşturulur, ikinci aşamada eğitilen model test edilir. Birinci aşama, sürecin kontrol altında olduğunu temsil eden normal işlem koşulu (NOC) ve sürecin kontrol dışında olduğunu temsil eden sinyal işlem koşulu (FOC) veri setlerini dikkate alan hibrid BBA-DVM yaklaşımı için referans olabilecek bilgi üretilir (Hsu ve ark., 2010). NOC eğitim veri setinin geliştirilmesi için ilk adım NOC veri setinin ölçeklendirilmesidir. Ölçeklendirme, süreçte herhangi bir kayma olmaksızın elde edilen, $\mathbf{x}_{normal}$, NOC veri setinin merkezileştirilmesi ve beyazlatılmasına dayanır ve ölçeklendirilmiş veri seti $\mathbf{z}_{normal}$ olarak gösterilir. Daha sonra FastICA algoritması düzenlenir. Değişken sayısı bağımsız bileşen sayısına eşit olmak üzere, $\mathbf{z}_{normal}$ için FastICA algoritması kullanılarak, ayrıştırma matrisi $\mathbf{W}_{normal}$ ve ona karşılık gelen ortogonal ayrıştırma matrisi $\mathbf{B}_{normal}$ elde edilir. Böylece, yeniden oluşturulmuş sinyaller $\hat{\mathbf{s}}_{normal} = \mathbf{B}_{normal}^T \mathbf{z}_{normal}$ ile verilir. Daha sonra ayrıştırma matrisi $\mathbf{W}_{normal}$ elde edilir. $\mathbf{W}_{normal}$ ile $\mathbf{B}_{normal}$ arasındaki ilişki aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\mathbf{B}_{normal} = (\mathbf{W}_{normal} \mathbf{Q}^{-1})^T \quad (3.78)$$

Dolayısıyla, bağımsız bileşenler aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\hat{\mathbf{s}}_{normal} = \mathbf{B}_{normal}^T \mathbf{z}_{normal} \quad (3.79)$$

t örneğindeki izleme istatistiği şöyledir:

$$I_{normal}^2(t) = \hat{\mathbf{s}}_{normal}^T(t) \hat{\mathbf{s}}_{normal}(t) \quad (3.80)$$

FOC veri seti de ilk olarak ölçeklendirilir ve ölçeklendirilen veri seti $\mathbf{z}_{fault}$ olarak gösterilir.

FOC altındaki bağımsız bileşenler aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\hat{\mathbf{s}}_{fault} = \mathbf{B}^T \mathbf{z}_{fault} \quad (3.81)$$

FOC altındaki t örneğindeki izleme istatistiği ise şöyledir:

$$I_{fault}^2(t) = \hat{\mathbf{s}}_{fault}^T(t) \hat{\mathbf{s}}_{fault}(t) \quad (3.82)$$

NOC ($\mathbf{x}_{normal}$) ve FOC ($\mathbf{x}_{fault}$) veri setleri ayrı ayrı geliştirildikten sonra, hem veri setleri hem de veri setlerinden elde edilen I_{normal}^2 ve I_{fault}^2 izleme istatistikleri birleştirilerek, sırasıyla, $\mathbf{x}_{train}$ ve I_{train}^2 eğitim verileri oluşturulur. Eğitim verilerine, NOC durumu için +1, FOC durumu için -1 değerini alan $\mathbf{y}_{train}$ etiket vektörü de dahil edilerek, $\mathbf{X}_{train} = [\mathbf{x}_{train}, I_{train}^2, \mathbf{y}_{train}]$ BBA-DVM'de girdi değişkeni olarak dikkate alınırlar.

Birinci aşamada eğitilen BBA-DVM modeli ikinci aşamada test edilir. Bunun için öncelikle yeni test verileri elde edilir ve eğitim verilerinde olduğu gibi ölçeklendirme tekrar uygulanır. Ölçeklenen veri seti $\mathbf{z}_{new}$ olarak gösterilir. $\mathbf{z}_{new}$ 'lere ilişkin bağımsız bileşenler ($\hat{\mathbf{s}}_{new}$) Eş. 3.83'teki gibi elde edilir:

$$\hat{\mathbf{s}}_{new} = \mathbf{B}^T \mathbf{z}_{new} \quad (3.83)$$

t örneğindeki izleme istatistiği şöyledir:

$$I_{new}^2(t) = \hat{\mathbf{s}}_{new}^T(t) \hat{\mathbf{s}}_{new}(t) \quad (3.84)$$

BBA-DVM için test girdi vektörü ise aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\mathbf{X}_{test} = [\mathbf{x}_{test}, I_{test}^2, \mathbf{y}_{test}] \quad (3.85)$$

Ayrırma fonksiyonu aşağıda gösterilmiştir:

$$f(\mathbf{X}_{test}) = \text{sgn}\left(\sum_{i=1} \alpha_i y_i \cdot K(\mathbf{X}_{train,i} \cdot \mathbf{X}_{test}) + b^*\right) \quad (3.86)$$

$$\mathbf{X}_{test} \in \begin{cases} +1 & \text{eğer } f(\mathbf{X}_{test}) > 0 \\ -1 & \text{eğer } f(\mathbf{X}_{test}) < 0 \end{cases} \quad (3.87)$$

$\mathbf{X}_{test} \in +1$ olması sürecin NOC koşulu altında olduğunu gösterir, $\mathbf{X}_{test} \in -1$ olması ise sürecin FOC koşulunda olduğunu göstermektedir.

Önerilen hibrid BBA-DVM yöntemi ile $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafikleri oluşturulmuştur. Diğer tüm kontrol grafiklerinde olduğu gibi $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafiği için de izleme istatistiği ve kontrol sınırı gibi iki temel bileşene ihtiyaç vardır. İzleme istatistiği olarak, DVM yaklaşımı ile gözlem değerlerinin kontrol dışında olma olasılıklarının tahminleri kullanılır. DVM modelinden sınıflandırma olasılıklarını elde etmek için Eş.3.77'den faydalanılır. İzleme istatistiğinin dağılımı bilinmediğinden $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafiği için kontrol sınırı da diğer yöntemlerde olduğu gibi bootstrap yöntemi ile elde edilir. $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafiğinde test istatistikleri, elde edilen bu kontrol sınırı ile izlenir. Süreçte kayma olup olmadığı izleme istatistik değerlerinin kontrol sınırını aşması durumuna göre tespit edilmiş olur. Süreçte bir kayma olduğu tespit edilirse, bu kaymanın sebepleri araştırılır ve süreçteki kaymanın tanımlanması problemine geçilir.

Süreçteki kaymanın tanımlanması için gözlem değerlerinin kontrol dışında (PoC_{-1}) olma olasılıklarının ortalamalarına bakılır. Farklı değişim senaryolarına karşılık gelen bu ortalama değerleri karşılaştırılır. En büyük ortalamaya sahip olan değişim kümesine bakılarak hangi değişken/değişkenlerin kaymaya sebep olduğu belirlenir.

Önerilen hibrid BBA-DVM yöntemi ile süreç izleme algoritması aşağıdaki gibidir:

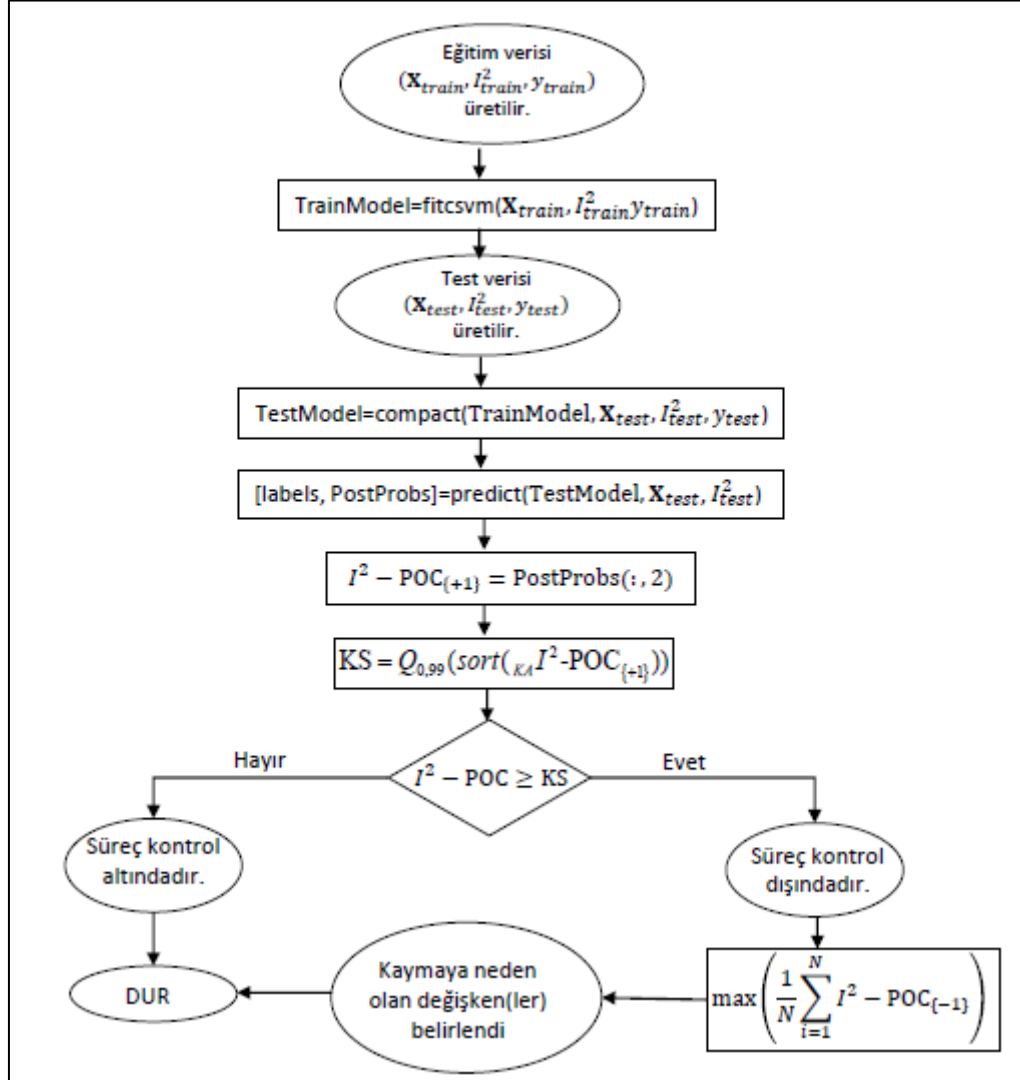
1. İlk n_1 gözlemi kontrol altında, sonraki n_2 gözlemi kontrol dışında olacak şekilde örnek büyüklüğü $N(n_1 + n_2 = N)$ olan $\mathbf{X}_{train}$ veri seti üretilir.

2. $\mathbf{X}_{train}$ veri setine uygun olacak şekilde kontrol altındaki veriye “+1”, kontrol dışındaki veriye “-1” değerini atayan $\mathbf{y}_{train}$ etiket vektörü oluşturulur.
3. $\mathbf{X}_{train}$ veri setine fastICA algoritması uygulanarak ayrıştırma matrisi $\mathbf{W}_{train}$ elde edilir.
4. $\mathbf{W}_{train}$ ayrıştırma matrisi ile $\mathbf{X}_{train}$ gözlenen değişkenler matrisi çarpılarak eğitim veri seti için bağımsız bileşenler matrisi $\mathbf{S}_{train}$ tahmin edilir.
5. $\mathbf{S}_{train}$ bağımsız bileşenlerinin kareleri toplamı alınarak süreç izleme istatistiği I_{train}^2 elde edilir.
6. $(\mathbf{X}_{train}, I_{train}^2, \mathbf{y}_{train})$ eğitim veri seti olmak üzere DVM modeli eğitilir.
7. Adım 1’den adım 5’e kadar tüm işlemler yeniden yapılarak test veri setinin bileşenleri hesaplanır.
8. Elde edilen $(\mathbf{X}_{test}, I_{test}^2, \mathbf{y}_{test})$ test veri seti adım 6’da eğitilen DVM modeli ile test edilir ve sınıflandırma olasılıkları (Sonsal Olasılıklar) elde edilir.
9. Sınıflandırma olasılıkları matrisinde “-1”e karşılık gelen yanlış sınıflandırma olasılıkları süreç izleme istatistiği (PoC) olarak seçilir.
10. $I^2 - \text{PoC}$ değerlerinin kontrol altında üretilen kısımdan bootstrap yöntemi ile elde edilen örneklerin ortalamalarının %99’luk çeyrekliğine karşılık gelen değeri kontrol sınırı olarak belirlenir.
11. $I^2 - \text{PoC}$ süreç izleme istatistiği değeri kontrol sınırını aşıyorsa sürecin kontrol dışında olduğu kararı verilir.

Sürecin kontrol altında olduğu kararı verilirse algoritma sonlandırılabilir. Ancak süreç kontrol altında değilse süreçteki kaymaya sebep olan değişken/değişkenleri tespit etmek için algoritmaya aşağıdaki şekilde devam edilir:

12. Adım 1’den adım 8’e kadar olan işlemler süreçteki kaymanın yaratıldığı farklı kombinasyonlar için tekrarlanır.
13. Adım 8’de farklı değişim kombinasyonlarıyla oluşturulan sonsal olasılıklar matrisinin birinci sütununun ortalamaları elde edilir.
14. En büyük ortalama değerine karşılık gelen değişim kombinasyonu süreçteki kaymanın kaynağını tanımlar.

Hibrit BBA-DVM yaklaşımına dayalı çok değişkenli süreç izleme prosedürünün akış şeması ise Şekil 3.7’de gösterilmiştir.



Şekil 3.7. Hibrit BBA-DVM yaklaşımına ilişkin akış şeması

4. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI VE BULGULAR

4.1. Veri Üretme Süreci

Çalışmada veri üretme süreci çok değişkenli normal dağılıma uyan ve normal dağılıma uymayan süreçler için iki çeşit senaryo üzerine kurgulanmıştır. Çok değişkenli normal dağılıma uymayan süreçlere örnek olması için, süreç verileri süreçteki değişkenlerin marjinal dağılımları gamma dağılımına uyacak şekilde belirlenerek t-Capula yöntemi ile üretilmiştir. Çalışma 3 değişkenli süreç için gerçekleştirilmiştir. Her iki senaryoda da kayma miktarı $\delta = \{0,0; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0\}$ olmak üzere 7 farklı düzeyde ele alınmıştır. Çok değişkenli normal dağılıma uyan süreç ortalamasındaki kayma $\mu_0 + \delta\sigma_0$ olarak üretilirken; çok değişkenli gamma dağılımına uyan süreçte şekil parametresinde $(\theta_1 + \delta)$ ve/veya ölçek parametresinde $(\theta_2 + \delta)$ kaymalar yaratılmıştır. Bütün analitik yaklaşımlar MATLAB programı yardımı ile gerçekleştirilmiştir. Önerilen yöntemlerin performans karşılaştırmaları için hesaplanan ARL değerleri için 10000; süreçteki kontrol dışı durumun kaynağını belirlemek için ise 2000 simülasyon çalışması yapılmıştır.

4.1.1. Normal dağılıma uyan veri üretme süreci

Çok değişkenli normal dağılıma uyan süreçte veriler hedef ortalama vektörü μ_0 ve hedef

varyans-kovaryans matrisi $\Sigma_0 = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \end{bmatrix}$ olan çok değişkenli normal dağılıma uyacak

şekilde üretilmiştir. Burada değişkenlerin varyansı birbirine eşit ve 1 olarak kabul edilmiştir ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 1$). Değişkenler arasındaki ilişki durumunu incelemek amacıyla, değişkenler arasındaki korelasyon katsayıları düşük ($\rho_1 = 0,3$), orta ($\rho_2 = 0,5$) ve yüksek ($\rho_3 = 0,8$) olmak üzere 3 farklı düzeyde ele alınmıştır. Değişkenler arasındaki korelasyon katsayıları birbirine eşit olacak şekilde kovaryans değerlerine yansıtılmış ($\sigma_{ij} = \rho_h \sigma_i \sigma_j$ ($i \neq j, h=1,2,3$)) ve bu bağlamda değişkenler arasındaki farklı ilişki düzeylerini temsil eden 3 farklı varyans-kovaryans matrisi oluşturulmuştur:

$$\Sigma_0 = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0,3 & 1 & \\ 0,3 & 0,3 & 1 \end{bmatrix} & , \rho_1 \\ \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0,5 & 1 & \\ 0,5 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} & , \rho_3 \\ \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0,8 & 1 & \\ 0,8 & 0,8 & 1 \end{bmatrix} & , \rho_3 \end{cases} \quad (4.1)$$

Çok değişkenli normal dağılım durumunda süreç ortalamasındaki kayma $\mu_0 + \delta\sigma$ olarak üretilmiştir.

4.1.2. Normal dağılıma uymayan veri üretme süreci

Çok değişkenli normal dağılmayan süreçlere örnek olması açısından kullanılacak süreç verileri üretilirken t-Copula yöntemi kullanılmıştır. Bu bağlamda süreçte dikkate alınan 3 değişkenin marjinal dağılımları $X_i \sim \text{Gamma}(\theta_1, \theta_2)$, $i = 1, 2, 3$ olarak belirlenmiştir. Kalite değişkenlerinin dağılım özellikleri belirlenirken, çok değişkenli ve normal dağılıma uygun olmayan süreçleri temsil etmesi amacıyla marjinal dağılımların çarpık özellik göstermesine dikkat edilmiştir. Gamma dağılımı parametrelerinden θ_1 , şekil parametresi; θ_2 ise ölçek

parametresidir. Gamma dağılımının çarpıklık değeri $\left(\frac{2}{\sqrt{\theta_1}} \right)$, θ_1 parametresine bağlıdır. Bu

nedenle, θ_1 arttıkça dağılım özelliklerinin normal dağılıma yaklaştığı söylenebilir. Ayrıca, Gamma dağılımının $[0, \infty]$ aralığında tanımlı olması nedeniyle senaryo verilerinin hedef vektörü ve kontrol bölgesi açısından birbirine yakın ve mantıklı sonuçlar vermesi amacıyla kontrol altındaki süreç için gamma dağılım parametreleri her senaryo için birbirine eşit alınmıştır ($\theta_1 = 0,5; \theta_2 = 0,5$). Normal dağılıma uymayan veri üretilirken gamma dağılımının parametrelerindeki kayma durumlarına göre üç farklı simülasyon senaryosu oluşturulmuştur (Gamma_1, Gamma_2, Gamma_3). Senaryoların ilkinde sadece θ_1 , ikincisinde sadece θ_2 , üçüncüsünde ise hem θ_1 hem de θ_2 parametrelerinde kayma

yaratılacak biçimde veriler üretilmiştir. Simülasyon senaryolarında kalite değişkenlerinin marjinal dağılım parametreleri Çizelge 4.2’de sunulmaktadır.

Çizelge 4.1. Gamma dağılımına uyan senaryolar ve ilgili marjinal dağılım parametreleri

Senaryo Adı	Şekil Parametresi	Ölçek Parametresi
Gamma_1	$\theta_1 + \delta$	θ_2
Gamma_2	θ_1	$\theta_2 + \delta$
Gamma_3	$\theta_1 + \delta$	$\theta_2 + \delta$

4.2. Performans Analizi

Önerilen yöntemler ile elde edilen kontrol grafiklerinin değişim noktasının tespitine ilişkin performansları, ortalama işletim uzunluğu (ARL) ile karşılaştırılmıştır. ARL, süreçte kayma meydana gelinceye kadar çekilmesi beklenen ortalama örnek sayısı olarak tanımlanabilir. Süreçteki kaymanın ilk kez ortaya çıkmasına kadar çekilen örnek sayısı bir geometrik rastgele değişken olduğundan, ARL, bu geometrik rastgele değişkenin beklenen değeridir.

Kontrol grafiğinde kayma, süreç kontrol altında olduğu halde rastgele bir noktanın kontrol sınırını aşması ile gerçekleşebileceği gibi, sürecin gerçekten kontrol dışında olması halinde de meydana gelebilir. Süreç gerçekte kontrol altındayken, kontrol dışı sinyal alma olasılığı hipotez testi bağlamında I. Tip hata olarak adlandırılır:

$$P(\text{Kontrol dışında sinyal alma} \mid \text{Süreç kontrol altında}) = \alpha$$

Süreç zaten kontrol dışındayken, kontrol sınırlarını aşan bir sinyal alma olasılığı ise yine hipotez testi bağlamında testin gücü $(1 - \beta)$ kavramına denk gelir:

$$P(\text{Kontrol dışı sinyal alma} \mid \text{Süreç kontrol dışında}) = 1 - \beta$$

Dolayısıyla ARL, kontrol grafiğinde yanlış sinyal ve doğru sinyal alma durumlarına göre iki farklı şekilde hesaplanır: süreç kontrol altındayken Eş. 2.3 ile hesaplanan ARL_0 ve süreç

kontrol dışındayken Eş. 2.4 ile hesaplanan ARL_1 . Başka bir ifadeyle, süreç kontrol altındayken, ARL_0 defa da bir kontrol dışında bir sinyalle karşılaşma olasılığı α 'dır. Süreç kontrol dışında iken, ARL_1 defa da bir kontrol dışında bir sinyal alma olasılığı ise $1 - \beta$ kadardır.

Kontrol grafikleri ARL performansları açısından değerlendirilirken ARL_0 değerinin büyük, ARL_1 değerinin ise küçük olması beklenir. ARL_0 değerinin büyük olması kontrol altındaki süreçteki kaymanın olabildiğince geç gerçekleşmesi ya da hiç gerçekleşmemesini ifade etmesi açısından önemlidir. ARL_1 değerinin küçük olması ise yöntemin süreçteki kaymayı daha erken yakalayabildiği anlamına gelmektedir. ARL değerlerinin yer aldığı tablolar bu açıklamaya uygun olarak yorumlanmıştır.

Yöntemler ayrıca süreçteki kaymaya neden olan değişken/değişkenlerin tanımlanması bakımından da incelenmiştir. Bu bağlamda BBA yönteminde değişkenlerin süreç izleme istatistiği üzerindeki katkısını gösteren değerler dikkate alınırken, DVM ve hibrit BBA-DVM yöntemlerinde farklı kombinasyonlarda kayma yaratılan süreçlerden elde edilen sınıflandırma olasılıklarının ortalamaları ile değerlendirilmiştir.

Simülasyon çalışmalarında 3 değişkenli ($p=3$) süreç dikkate alınmıştır. Süreçteki kaymalar, sinyale sebep olan değişkenlerin $2^p - 1 = 7$ farklı olası kombinasyon kümesine göre veriye adapte edilmesiyle gerçekleştirilmiştir. $(1,1,1), (1,1,0), (1,0,1), (1,0,0), (0,1,1), (0,1,0), (0,0,1)$ notasyonları veri setlerine uygulanan 7 olası değişim kombinasyonunu simgelemek üzere kullanılmıştır. Burada, "0" sürecin *kontrol altında* olduğunu (kayma yaratılmayan değişken/değişkenleri), "1" sürecin *kontrol dışında* olduğunu (kayma yaratılan değişken/değişkenleri) temsil etmektedir. Örneğin, $(1,1,0)$, birinci (x_1) ve ikinci (x_2) değişkenlerin ortalamasında kayma gerçekleştiği ancak üçüncü (x_3) değişkende gerçekleşmediği anlamına gelmektedir.

BBA yaklaşımıyla çok değişkenli normal dağılıma uyan süreçte, süreç ortalama vektöründeki değişimin kaynağının belirlenmesi problemine getirilen çözüme ilişkin sonuçlar Çizelge 4.2'de, çok değişkenli gamma dağılımına uyan süreçlere ilişkin sonuçlar

ise Çizelge 4.10-12 arasında sunulmuştur. Çizelgede koyu olarak belirtilen değişken/değişkenlerin süreçteki kaymanın kaynağı olduğu söylenebilir. Bu değerlerin hem diğer değişken/değişkenlere göre hem de ARL_0 durumunda elde edilen I^2 değerine göre daha büyük olması süreç izleme istatistiği üzerindeki katkısının da büyük olduğunu gösterir. Yapılan tespitlerin doğruluğu, çizelgenin ikinci sütununda yer alan değişim kombinasyonları ile karşılaştırılarak sağlanabilir. Şöyle ki, koyu olan değerlerin karşılık geldiği sütundaki değişken/değişkenlerin aynı satırdaki değişim kombinasyonuna bakıldığında aynı koşulların sağlandığı görülebilir. Bu da gerçekte süreçte yaratılan kayma ile yöntemin belirlediği kayma durumunun birbiriyle örtüştüğünü ortaya koymaktadır. Örneğin, Çizelge 4.2'ye bakıldığında $\delta = 1,0$ ve $\rho = 0,3$ iken (1,1,0) satırındaki değerlerden koyu olanlar (31,60; 26,87) karşılık geldiği sütunda x_1 ve x_2 değişkenlerini göstermektedir. Dolayısıyla süreçteki kaymayı gerçekte olduğu gibi x_1 ve x_2 değişkenlerinin yarattığı tespit edilmiş olur.

DVM ve hibrit BBA-DVM yöntemlerinde ise süreçteki kaymaya sebep olan değişken/değişkenler tespit edilirken BBA yönteminden farklı olarak süreç izleme istatistiği olarak ilgilenilen POC değerlerinin her bir değişim kombinasyonuna ilişkin ortalama değerleri kullanılmıştır. Başka bir deyişle bu yöntemler ile kaynak belirleme problemi BBA yöntemindeki gibi değişken bazında değil doğrudan değişim kombinasyonları temel alınarak incelenir. DVM yöntemi ile çok değişkenli normal dağılıma uyan süreçte değişimin kaynağının tanımlanması problemine getirilen çözüme ilişkin sonuçlar Çizelge 4.4'te, çok değişkenli gamma dağılımına uyan süreçlere ilişkin elde edilen sonuçlar Çizelge 4.14-16 arasında gösterilmiştir. Aynı probleme ilişkin hibrit BBA-DVM yöntemine ilişkin sonuçlar ise çok değişkenli normal dağılım için Çizelge 4.7'de, çok değişkenli gamma dağılımı için ise Çizelge 4.18-20 arasında yer almaktadır. Çizelgelerde koyu olarak gösterilen değerlerin karşılık geldiği durumun diğer durumlara göre süreç izleme istatistiğine en büyük katkıyı sağladığı ve sinyalin kaynağını temsil ettiği ifade edilebilir. Buna göre sütun bazında bakıldığında *en büyük* ortalama değere karşılık gelen kombinasyon türü kaymaya sebep olan değişken/değişkenleri tanımlamaya yardımcı olur. Çizelgede köşegen elemanların ilgili satır ve sütunda en büyük olması, süreçteki kaymaya neden olan değişken/değişkenlerin doğru belirlendiğinin bir göstergesidir.

4.3. Bulgular

Simülasyon sonucunda elde edilen bulgular; öncelikle süreç dağılım türüne göre daha sonra önerilen BBA, DVM ve hibrit BBA-DVM yöntemlerine göre ve son olarak tüm yöntemlerin farklı dağılım senaryoları bazında karşılaştırmalarını içerecek şekilde ele alınmıştır.

4.3.1. Çok değişkenli normal dağılıma uyan sürece ilişkin bulgular

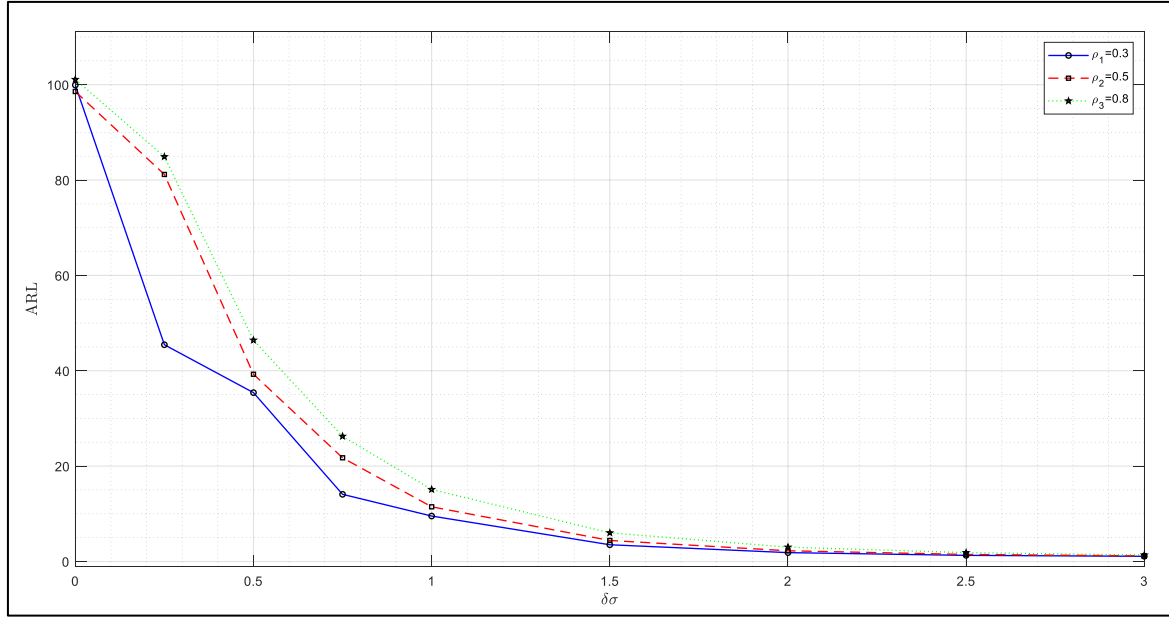
Çalışmanın bu bölümünde yöntemlerin performansları çok değişkenli normal dağılım ile gerçekleştirilen veri üretme sürecine yönelik bulgular, çizelgeler ve şekiller yardımıyla gösterilmiştir.

Senaryo 1a (Veri üretme süreci: Çok değişkenli normal dağılım, Yöntem: BBA, ARL)

Çizelge 4.2 ve Şekil 4.1’de çok değişkenli normal dağılım süreci için oluşturulan senaryoya ilişkin $ARL_0 = 100$ olmak üzere BBA yaklaşımı ile elde edilen I^2 kontrol grafiklerine ilişkin ARL_1 değerleri verilmiştir. ARL_1 değerleri üzerine korelasyon yapısının etkisini görebilmek için her bir senaryoda ARL_1 değerleri düşük, orta ve yüksek korelasyonlara karşın hesaplanmıştır ($\rho_1 = 0,3; \rho_2 = 0,5; \rho_3 = 0,8$). I^2 kontrol grafiği özellikle ortalama vektöründe $1,5\sigma$ ve ötesi kaymalarda iyi performans göstermektedir. Daha küçük kaymalarda ise T^2 kontrol grafiğine nazaran daha iyi performans sergilemektedir (Çizelge 4.8). Diğer yandan değişkenler arası korelasyon katsayısı büyüdükçe I^2 kontrol grafiğinin performansında nispeten bir kötüleşme meydana gelmektedir.

Çizelge 4.2. Çok değişkenli normal dağılıma uyan süreçlerde I^2 kontrol grafiği ile elde edilen ARL değerleri

Normal Dağılım ($\mu_0 + \delta\sigma; \Sigma_0$)			
$\delta\sigma$	$\rho_1 = 0,3$	$\rho_2 = 0,5$	$\rho_3 = 0,8$
0,00	99,92	98,57	101,10
0,25	45,45	81,17	84,89
0,50	35,41	39,27	46,42
0,75	14,08	21,74	26,26
1,00	9,52	11,46	15,10
1,50	3,50	4,40	6,00
2,00	1,85	2,24	3,00
2,50	1,28	1,47	1,85
3,00	1,08	1,17	1,35



Şekil 4.1. Çok değişkenli normal dağılıma uyan süreçte I^2 kontrol grafiği ile elde edilen ARL değerlerinin kayma miktarına göre değişimi

Senaryo 1b (Veri üretme süreci: Çok değişkenli normal dağılım, Yöntem: BBA, Kaynak belirleme)

Çizelge 4.3'teki değerler Eş. 3.38 ile hesaplanan I^2 istatistiklerine dayalı fark kare toplamlarıdır. Bu tabloda ρ_i ($i=1,2,3$) değerlerinde $\delta\sigma$ miktarlarına göre proses ortalamasındaki standart sapma cinsinden kaymalarda üçüncü bölümde tanımlanan yöntemle göre dağılım farklılaşmasına kaynaklık eden değişken/değişkenlerin belirlenmesi gösterilmektedir. $ARL_0=100$ durumunda I^2 değerleri yaklaşık 19,5 olarak elde edilmiştir. Her bir ρ_i ($i=1,2,3$) değeri altında 3 değişken için 7 farklılaşma kombinasyonu söz konusudur. Bu kombinasyonlar tablonun 2. sütununda yer almaktadır. ARL_1 değerlerinden $ARL_0=100$ durumunda hesaplanan I^2 değerine göre ($\approx 19,5$) farklılaşan değer değişimin kaynağının söz konusu değişken olduğunu göstermektedir. Örneğin, kayma miktarı $0,5\sigma$ olduğunda $\rho_1=0,3$ için (1,1,1) değerine karşılık gelen $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ sütunları dikkate alınsın. Değerlerin hepsi de (21,79; 21,77; 21,92) $I^2=19,5$ değerinden yaklaşık olarak eşit uzaklıkta farklılaşmıştır. Bu kontrol dışı durumun her üç değişkenin marjinal dağılımlarının ortalamasındaki kaymadan ileri geldiğini ortaya koyar. Kayma miktarı $2,5\sigma$ olduğunda $\rho_3=0,8$ için (1,0,1) durumuna karşılık gelen değerlere bakıldığında $\mathbf{x}_1(133,60)$ ve

$\mathbf{x}_3(163,79)$ 'un $I^2=19,5$ değerinden oldukça fazla farklılaştığı, ancak $\mathbf{x}_2(16,21)$ değerinin ise $ARL_0=100$ durumunda hesaplanan I^2 değerini aşmadığı görülmektedir. Dolayısıyla, süreçteki sinyal $\mathbf{x}_1$ ve $\mathbf{x}_3$ değişkenlerinin marjinal dağılımlarının ortalamasındaki farklılaşmadan kaynaklanır.

Ortalama vektöründeki kayma miktarı arttıkça kontrol dışı duruma neden olan değişkene ilişkin I^2 değeri de hızlı bir biçimde yükselmekte ve değişkenin kaynağını belirlemek kolaylaşmaktadır. $0,5\sigma$ gibi küçük kaymalarda bile proses ortalama vektöründeki kaymaya neden olan değişken kolayca belirlenebilmektedir. Tüm korelasyon değerlerinde benzer sonuçlar elde edilmiş olup korelasyon matrisi yapısının I^2 değerleri üzerinde bir etkisi olmadığı ve dolayısıyla kaynak değişkeni belirlemede herhangi bir farklılık (zorluk/kolaylık) ortaya çıkarmadığı görülmektedir.

Çizelge 4.3. Çok değişkenli normal dağılıma uyan süreçte değişkenlerin BBA yaklaşımı ile hesaplanan I^2 üzerindeki katkı değerleri (*100)

Normal Dağılım ($\mu_0 + \delta\sigma$; Σ_0)										
		$\rho_1 = 0,3$			$\rho_2 = 0,5$			$\rho_3 = 0,8$		
$\delta\sigma$	($\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$)	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$
0,0	(0,0,0)	19,52	19,58	19,52	19,53	19,56	19,59	19,42	19,48	19,54
0,5	(1,1,1)	21,79	21,77	21,92	21,86	21,95	21,87	21,79	21,91	21,92
	(1,1,0)	21,87	21,84	19,55	21,83	21,80	19,46	21,86	21,87	19,50
	(1,0,1)	22,00	19,58	21,79	21,90	19,53	21,75	21,81	19,54	21,89
	(1,0,0)	21,84	19,49	19,45	21,88	19,43	19,55	21,92	19,48	19,45
	(0,1,1)	19,47	21,91	21,78	19,47	21,87	21,81	19,55	21,88	21,93
	(0,1,0)	19,53	21,84	19,50	19,47	21,82	19,48	19,46	21,77	19,43
	(0,0,1)	19,51	19,51	21,82	19,51	19,53	21,96	19,54	19,52	21,85
1,0	(1,1,1)	24,00	33,71	27,25	31,19	27,75	34,16	29,74	34,95	26,14
	(1,1,0)	31,60	26,87	18,02	28,13	26,45	22,90	31,93	25,99	19,65
	(1,0,1)	24,84	20,25	34,31	32,50	20,90	26,51	26,76	21,75	32,62
	(1,0,0)	36,35	16,22	16,97	35,34	16,83	19,93	30,56	18,08	17,02
	(0,1,1)	17,03	24,51	30,74	17,49	27,88	31,03	17,53	27,41	22,15
	(0,1,0)	19,26	34,00	22,27	17,15	31,49	19,32	20,63	30,91	20,68
	(0,0,1)	17,09	19,83	28,73	16,76	20,90	31,17	16,66	20,60	32,29
1,5	(1,1,1)	52,41	55,77	47,97	67,63	53,56	47,13	52,30	46,69	42,58
	(1,1,0)	51,88	45,40	17,86	53,53	54,59	18,18	43,90	59,25	18,55
	(1,0,1)	44,05	21,96	46,83	48,98	16,19	44,37	41,95	19,81	51,53
	(1,0,0)	48,94	19,37	23,73	44,62	20,37	19,65	52,49	17,25	15,71
	(0,1,1)	17,81	48,10	46,41	24,04	51,48	44,42	20,61	39,26	47,29
	(0,1,0)	21,34	49,25	24,87	20,74	42,07	18,24	17,33	55,82	24,32
	(0,0,1)	17,57	17,66	50,52	20,17	20,04	52,96	19,70	20,35	52,03
2,0	(1,1,1)	75,27	73,70	96,01	65,14	103,56	67,25	75,04	79,04	87,52
	(1,1,0)	77,48	87,56	16,69	83,73	101,20	17,07	77,65	80,70	21,50
	(1,0,1)	67,90	19,39	79,30	73,22	16,70	70,45	73,31	17,18	77,10
	(1,0,0)	81,76	18,86	22,00	63,67	18,77	20,55	104,37	17,68	17,02
	(0,1,1)	27,33	75,79	72,74	14,73	69,91	65,26	20,65	86,08	74,76
	(0,1,0)	20,52	67,95	18,54	17,06	63,32	19,86	18,77	92,35	22,56
	(0,0,1)	18,81	19,05	87,38	21,06	19,37	61,84	17,75	16,53	77,19
2,5	(1,1,1)	146,65	138,81	132,24	127,01	146,67	108,13	143,65	136,96	150,48
	(1,1,0)	116,43	137,00	18,30	138,55	143,82	15,66	137,82	140,01	21,46
	(1,0,1)	137,58	18,75	133,76	155,75	20,35	131,11	133,60	16,21	163,79
	(1,0,0)	132,58	22,46	17,51	120,01	19,41	17,61	133,97	24,52	19,69
	(0,1,1)	17,89	101,21	138,91	18,31	131,11	128,50	18,63	117,11	142,87
	(0,1,0)	17,95	131,83	18,47	21,70	153,98	20,19	18,22	158,97	26,60
	(0,0,1)	20,83	19,33	151,56	19,61	19,86	116,97	17,22	16,05	136,11
3,0	(1,1,1)	227,72	184,61	198,29	211,96	216,32	211,40	247,42	223,87	217,79
	(1,1,0)	210,11	226,97	18,40	230,60	214,04	26,39	188,75	238,70	19,99
	(1,0,1)	207,19	20,23	230,26	228,15	21,23	242,74	231,84	20,34	202,28
	(1,0,0)	235,08	19,77	16,23	194,83	17,19	20,86	252,31	16,96	19,48
	(0,1,1)	23,24	226,54	219,48	19,04	225,80	221,79	18,85	204,22	253,65
	(0,1,0)	20,04	207,46	18,95	18,15	246,98	22,26	22,04	202,72	20,30
	(0,0,1)	22,02	13,48	190,69	18,46	21,36	269,23	23,32	16,04	212,92

Senaryo 2a (Veri üretme süreci: Çok değişkenli normal dağılım, Yöntem: DVM, ARL)

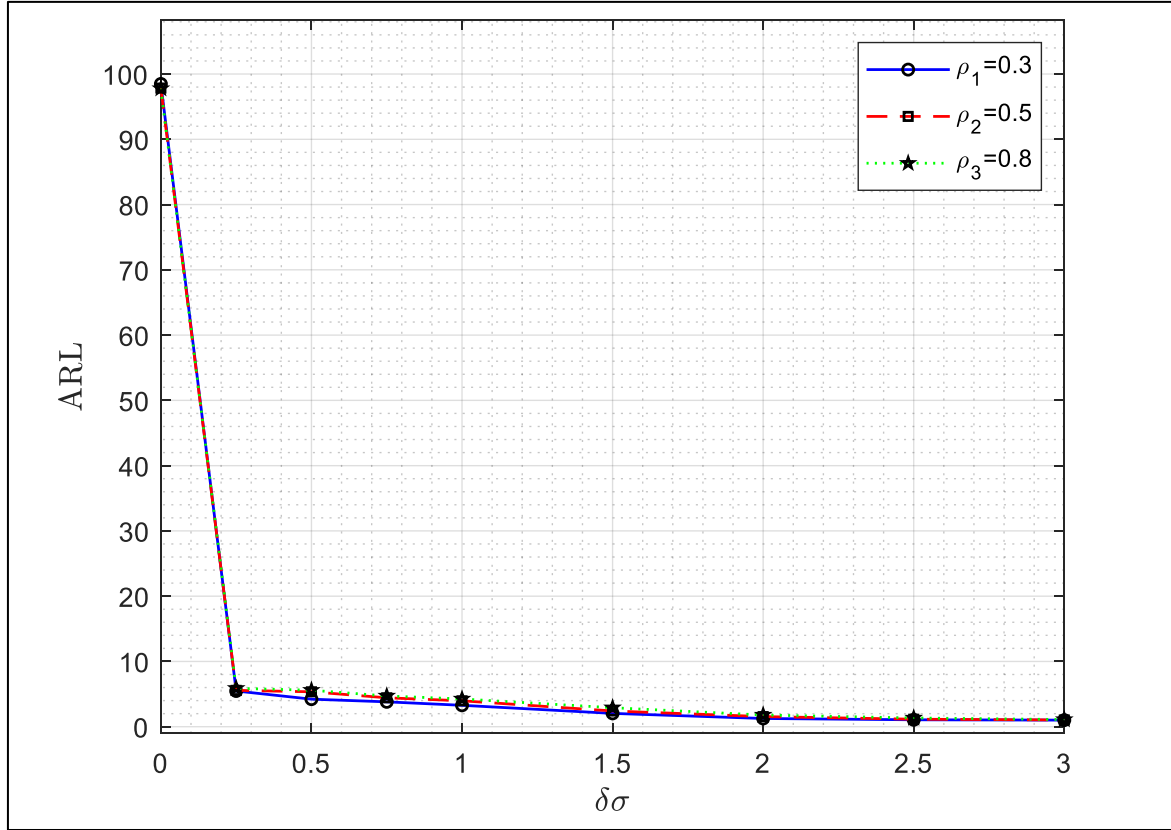
Çizelge 4.4'te çok değişkenli normal dağılım süreci için $ARL_0 = 100$ olmak üzere çeşitli kayma miktarları ve süreç ortalama vektöründen $\delta\sigma$ kadar kaymalara göre DVM yaklaşımı ile elde edilen PoC kontrol grafiklerine ilişkin ARL_1 değerleri verilmiştir. Tabloda yer alan $\rho_1 = 0,3$, $\rho_2 = 0,5$ ve $\rho_3 = 0,8$ değerleri sırasıyla, değişkenler arasındaki düşük, orta ve yüksek ilişkiyi temsil etmektedir. Çizelgeye bakıldığında, çok değişkenli normal bir sürecin

ortalama vektöründe $\delta = 0,75\sigma$ ve üzerinde meydana gelen kaymalarda PoC kontrol grafiğinin iyi performans sergilediği görülmektedir. Örneğin, değişkenler arasındaki korelasyon $\rho_1 = 0,3$ olduğunda süreç ortalama vektöründe $\delta = 1,5\sigma$ kadar bir kayma olduğunda, PoC kontrol grafiğinin bu kaymayı 2 örneklemden sonra yakalayabileceği söylenebilir. PoC kontrol grafiğinden elde edilen değerler Çizelge 4.1’de verilen değerlerle karşılaştırıldığında, PoC kontrol grafiğinin süreçteki kontrol dışındaki sinyali I^2 kontrol grafiğine göre daha erken yakaladığı belirtilebilir. Ayrıca, küçük kayma miktarlarında hem T^2 hem de I^2 kontrol grafiklerinden daha iyi performans göstermektedir (Çizelge 4.7).

Çizelge 4.4. Çok değişkenli normal dağılıma uyan süreçte PoC kontrol grafiği ile elde edilen ARL değerleri

Normal Dağılım ($\mu_0 + \delta\sigma; \Sigma_0$)			
$\delta\sigma$	$\rho_1 = 0,3$	$\rho_2 = 0,5$	$\rho_3 = 0,8$
0,00	98,48	97,85	97,77
0,25	5,47	5,57	5,88
0,50	4,22	5,35	5,59
0,75	3,81	4,43	4,71
1,00	3,28	3,97	4,25
1,50	2,04	2,41	2,91
2,00	1,26	1,55	1,79
2,50	1,06	1,15	1,34
3,00	1,01	1,03	1,10

Şekil 4.2’de, Çizelge 4.4’teki ARL değerlerinin süreç ortalama vektöründeki kayma miktarlarına göre değişimi grafiksel olarak gösterilmiştir.



Şekil 4.2. Çok değişkenli normal dağılıma uyan süreçte PoC kontrol grafiği ile elde edilen ARL değerlerinin kayma miktarına göre değişimi

Senaryo 2b (Veri üretme süreci: Çok değişkenli normal dağılım, Yöntem: DVM, Kaynak belirleme)

Çizelge 4.5'te çok değişkenli normal dağılıma ilişkin süreç ortalama vektöründeki kaymaya sebep olan değişken/değişkenlerin belirlenmesi amacıyla DVM yaklaşımı ile elde edilen PoC istatistiklerinin ortalamaları yer almaktadır. Burada süreçteki kaymaya sebep olan değişken/değişkenler tespit edilirken, süreç izleme istatistiğinin ortalama değerleri BBA yöntemindeki gibi değişkenler bazında değil değişim kombinasyonları temel alınarak incelenir. Çizelgede koyu olarak gösterilen ortalama değerlerin karşılık geldiği duruma bakılarak süreçteki kaymanın kaynağı belirlenir. Buna göre sütun bazında bakıldığında en büyük ortalama değere karşılık gelen kombinasyon türünde 1 değerini alan değişken/değişkenlerin kaymaya sebep olan değişken/değişkenleri tanımladığı söylenebilir. Çizelgede köşegen elemanların ilgili satır ve sütunda en büyük olması, farklılaşmanın kaynağının doğru bir şekilde tespit edildiğinin göstergesidir. Elde edilen bulgulara bakıldığında çok değişkenli normal dağılım koşulları altında üretilen veri sürecinde DVM

yaklaşımının $0,5\sigma$ ve ötesindeki kayma miktarlarından itibaren süreç ortalama vektöründeki değişime sebep olan değişken/değişkenleri belirleyebildiği görülmektedir. Örneğin, $\delta = 0,5\sigma$ ve $\rho_1 = 0,3$ olduğu durumda $(1,0,0)$ kombinasyonuna ilişkin sütundaki en yüksek değerin 2,016 olduğu belirlenmiştir. Bu değerin karşılık geldiği satırda da $(1,0,0)$ durumuna denk geldiği yani süreç ortalamasında gerçekleşen kaymanın sadece x_1 değişkeninden kaynaklandığı söylenebilir. Bir başka örnek vermek gerekirse, $\delta = 1,5\sigma$ ve $\rho_2 = 0,5$ olması durumunda, $(1,0,1)$ kombinasyonu için hesaplanan en büyük ortalama değerin 5,009 olduğu gözlemlenmektedir. Bu değerin karşılık geldiği satırda da üçüncü değişim kombinasyonu olan $(1,0,1)$ 'e denk geldiği ve dolayısıyla süreçteki kaymada x_1 ve x_3 değişkenlerinin etkili olduğu belirtilebilir. Çizelgedeki diğer koyu değerler de benzer şekilde yorumlanabilir.

Çizelge 4.5. Çok değişkenli normal dağılıma uyan süreçte DVM yaklaşımı ile hesaplanan PoC değerlerinin farklı değişim kombinasyonlarından elde edilen ortalamaları

Normal Dağılım ($\mu_0 + \delta\sigma$; Σ_0)																						
		$\rho_1 = 0,3$							$\rho_2 = 0,5$							$\rho_3 = 0,8$						
$\delta\sigma$		(1,1,1)	(1,1,0)	(1,0,1)	(1,0,0)	(0,1,1)	(0,1,0)	(0,0,1)	(1,1,1)	(1,1,0)	(1,0,1)	(1,0,0)	(0,1,1)	(0,1,0)	(0,0,1)	(1,1,1)	(1,1,0)	(1,0,1)	(1,0,0)	(0,1,1)	(0,1,0)	(0,0,1)
0	0	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	
0,5	(1,1,1)	2,042	2,019	2,025	2,008	2,021	2,010	2,008	2,036	2,020	2,016	2,007	2,015	2,008	2,005	2,018	2,013	2,018	2,012	2,016	2,011	2,010
	(1,1,0)	2,024	2,044	2,004	2,010	2,005	2,008	2,001	2,010	2,061	2,004	2,019	2,002	2,015	2,004	2,012	2,165	2,001	2,063	2,001	2,041	2,014
	(1,0,1)	2,020	2,005	2,049	2,012	2,006	2,003	2,020	2,015	2,002	2,057	2,023	2,003	2,013	2,014	2,009	2,002	2,217	2,057	2,003	2,020	2,049
	(1,0,0)	2,007	2,009	2,009	2,016	2,001	2,001	2,002	2,006	2,013	2,012	2,028	2,004	2,002	2,002	2,003	2,051	2,065	2,179	2,019	2,004	2,005
	(0,1,1)	2,023	2,004	2,005	2,002	2,038	2,011	2,014	2,024	2,001	2,002	2,004	2,069	2,015	2,015	2,011	2,001	2,002	2,016	2,204	2,049	2,057
	(0,1,0)	2,011	2,011	2,003	2,002	2,016	2,013	2,002	2,004	2,011	2,003	2,003	2,020	2,033	2,002	2,008	2,054	2,011	2,003	2,046	2,157	2,004
	(0,0,1)	2,009	2,003	2,014	2,001	2,014	2,002	2,017	2,007	2,007	2,017	2,002	2,014	2,003	2,029	2,005	2,011	2,056	2,004	2,048	2,005	2,164
1,0	(1,1,1)	2,587	2,283	2,250	2,064	2,253	2,087	2,074	2,446	2,220	2,183	2,063	2,167	2,065	2,056	2,291	2,152	2,157	2,076	2,158	2,069	2,084
	(1,1,0)	2,284	2,650	2,047	2,165	2,046	2,141	2,003	2,192	2,820	2,027	2,199	2,023	2,193	2,002	2,083	4,402	2,066	2,620	2,073	2,595	2,027
	(1,0,1)	2,304	2,046	2,649	2,147	2,050	2,003	2,173	2,192	2,031	2,784	2,175	2,020	2,003	2,162	2,098	2,059	4,459	2,543	2,065	2,021	2,576
	(1,0,0)	2,092	2,162	2,196	2,294	2,001	2,001	2,003	2,063	2,198	2,203	2,487	2,002	2,002	2,002	2,044	2,572	2,548	4,043	2,033	2,033	2,031
	(0,1,1)	2,317	2,046	2,062	2,002	2,676	2,156	2,159	2,189	2,022	2,020	2,005	2,734	2,163	2,169	2,098	2,062	2,060	2,021	4,371	2,567	2,548
	(0,1,0)	2,092	2,195	2,002	2,001	2,185	2,296	2,001	2,075	2,212	2,001	2,002	2,216	2,498	2,002	2,037	2,577	2,032	2,036	2,586	4,062	2,033
	(0,0,1)	2,099	2,002	2,166	2,002	2,166	2,001	2,241	2,061	2,002	2,166	2,002	2,193	2,002	2,398	2,037	2,027	2,533	2,030	2,602	2,026	4,106
1,5	(1,1,1)	4,897	3,137	3,115	2,313	3,152	2,306	2,326	4,081	2,835	2,841	2,254	2,834	2,281	2,281	3,336	2,550	2,513	2,341	2,539	2,345	2,302
	(1,1,0)	3,182	4,561	2,254	2,637	2,229	2,559	2,016	2,742	5,015	2,186	2,675	2,183	2,735	2,033	2,275	7,470	3,126	3,988	3,137	3,934	2,838
	(1,0,1)	3,233	2,279	4,614	2,593	2,256	2,015	2,605	2,768	2,175	5,009	2,728	2,193	2,038	2,721	2,300	3,115	7,424	3,887	3,190	2,830	4,043
	(1,0,0)	2,376	2,654	2,626	3,288	2,037	2,020	2,018	2,271	2,748	2,714	3,835	2,060	2,037	2,025	2,185	4,322	4,195	6,979	3,089	2,930	2,848
	(0,1,1)	3,147	2,274	2,266	2,021	4,405	2,528	2,587	2,762	2,172	2,187	2,033	4,973	2,744	2,731	2,270	3,174	3,069	2,850	7,361	3,932	4,024
	(0,1,0)	2,398	2,735	2,031	2,017	2,739	3,381	2,013	2,264	2,743	2,059	2,031	2,752	3,935	2,028	2,157	4,141	3,034	2,810	4,214	6,914	2,841
	(0,0,1)	2,364	2,038	2,672	2,016	2,633	2,015	3,350	2,272	2,063	2,846	2,036	2,792	2,032	4,079	2,149	3,004	4,131	2,837	4,152	2,984	6,995
2,0	(1,1,1)	6,885	4,602	4,494	2,712	4,435	2,694	2,723	6,167	3,854	4,099	2,736	3,821	2,701	2,726	5,183	3,540	3,506	3,267	3,488	3,393	3,208
	(1,1,0)	4,588	6,815	2,827	3,332	2,806	3,350	2,134	3,631	7,253	2,928	3,490	2,869	3,665	2,331	2,766	9,049	6,373	6,336	6,455	6,453	6,085
	(1,0,1)	4,420	2,859	6,793	3,327	2,835	2,155	3,343	3,596	2,994	7,240	3,581	2,920	2,359	3,638	2,670	6,313	9,079	6,461	6,426	5,965	6,221
	(1,0,0)	3,058	3,614	3,642	5,082	2,333	2,127	2,131	2,867	3,910	3,868	5,963	2,608	2,283	2,287	2,643	6,801	6,882	8,783	6,348	5,886	5,912
	(0,1,1)	4,459	2,819	2,781	2,163	6,788	3,324	3,339	3,661	3,033	3,050	2,405	7,104	3,506	3,577	2,700	6,167	6,184	5,806	9,126	6,233	6,279
	(0,1,0)	3,096	3,544	2,340	2,141	3,620	5,046	2,155	2,836	3,858	2,584	2,286	3,991	5,998	2,335	2,608	6,823	6,493	5,767	6,594	8,837	5,779
	(0,0,1)	2,977	2,310	3,601	2,120	3,662	2,106	5,193	2,807	2,589	3,903	2,325	3,872	2,332	6,177	2,735	6,393	6,995	6,085	6,910	5,937	8,807

Çizelge 4.5. (Devam) Çok değişkenli normal dağılıma uyan süreçte DVM yaklaşımı ile hesaplanan PoC değerlerinin farklı değişim kombinasyonlarından elde edilen ortalamaları

2,5	(1,1,1)	8,542	5,758	6,040	3,290	5,837	3,267	3,352	7,728	5,783	5,661	3,855	5,732	3,915	3,825	6,960	5,616	5,695	5,236	5,829	5,259	5,237
	(1,1,0)	6,278	8,226	4,655	4,366	4,588	4,353	3,019	5,062	8,614	5,053	4,853	5,052	4,847	3,750	3,615	9,764	8,677	8,401	8,603	8,348	8,330
	(1,0,1)	6,236	4,583	8,267	4,293	4,649	2,839	4,335	4,970	5,046	8,614	4,886	5,068	3,849	4,990	3,457	8,602	9,715	8,309	8,608	8,363	8,503
	(1,0,0)	4,491	5,111	5,033	6,898	3,674	2,685	2,683	4,117	5,639	5,643	7,678	4,517	3,612	3,690	3,966	8,851	8,826	9,604	8,607	8,485	8,428
	(0,1,1)	6,286	4,652	4,519	2,834	8,291	4,220	4,360	5,179	5,270	5,106	3,976	8,586	4,855	5,000	3,314	8,658	8,546	8,283	9,737	8,437	8,383
	(0,1,0)	4,395	5,038	3,653	2,611	4,909	6,734	2,687	4,065	5,536	4,663	3,674	5,524	7,688	3,665	4,032	8,811	8,722	8,411	8,831	9,622	8,262
	(0,0,1)	4,320	3,743	5,086	2,688	4,829	2,600	6,694	4,221	4,748	5,805	3,755	5,830	3,729	7,723	4,062	8,623	8,755	8,378	8,681	8,376	9,584
3,0	(1,1,1)	9,291	7,377	7,697	4,697	7,326	4,376	4,308	8,842	7,427	7,314	5,262	7,317	5,594	5,432	8,166	7,525	7,549	7,172	7,505	7,292	7,377
	(1,1,0)	7,967	9,176	6,813	5,475	6,715	5,634	4,690	6,422	9,401	7,069	6,424	6,957	6,032	5,882	4,648	9,938	9,529	9,443	9,588	9,436	9,471
	(1,0,1)	7,579	6,574	9,231	5,477	6,258	4,463	5,365	6,615	7,181	9,383	6,354	7,318	6,007	6,246	4,853	9,602	9,935	9,412	9,594	9,506	9,406
	(1,0,0)	6,290	6,772	6,645	8,068	5,956	4,191	4,119	6,233	7,526	7,408	8,708	7,035	6,065	5,976	5,692	9,653	9,668	9,898	9,561	9,491	9,467
	(0,1,1)	7,683	6,630	6,467	4,581	9,180	5,514	5,600	6,438	7,211	7,078	5,886	9,430	6,063	6,330	4,737	9,628	9,597	9,452	9,939	9,469	9,495
	(0,1,0)	6,485	6,466	5,974	4,190	6,505	7,983	4,239	5,925	7,517	6,794	5,812	7,386	8,749	5,763	5,299	9,628	9,585	9,512	9,691	9,904	9,491
	(0,0,1)	6,475	5,883	6,746	4,316	6,823	4,273	8,052	6,276	6,992	7,467	5,755	7,502	5,925	8,775	5,626	9,536	9,626	9,447	9,607	9,537	9,894

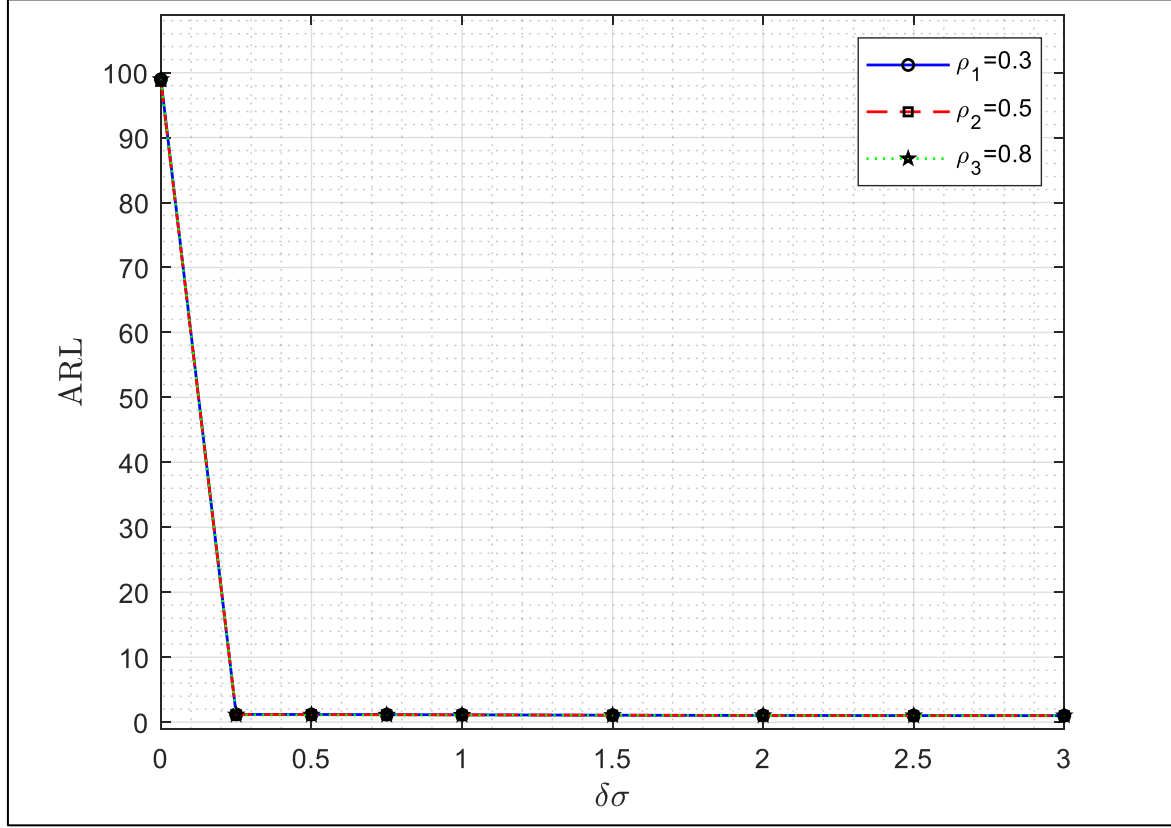
Senaryo 3a (Veri üretme süreci: Çok değişkenli normal dağılım, Yöntem: Hibrit BBA-DVM, ARL)

Çizelge 4.6’da çok değişkenli normal dağılan süreç için $ARL_0=100$ durumunda hibrit BBA-DVM yaklaşımı ile elde edilen $I^2 - PoC$ kontrol grafiklerine ilişkin ARL_1 değerleri sunulmuştur. Çizelgede değişkenler arasındaki korelasyon yapısının ARL_1 değerleri üzerindeki etkisini göstermek üzere, değişkenler arasındaki korelasyonlar düşük ($\rho_1 = 0,3$), orta ($\rho_2 = 0,5$) ve yüksek ($\rho_3 = 0,8$) olacak şekilde ayrı ayrı dikkate alınmıştır. Hibrit BBA-DVM yöntemi ile elde edilen $I^2 - PoC$ kontrol grafiğinin süreç ortalama vektöründe gerçekleşen $0,25\sigma$ ve üzerindeki kaymalarda çok iyi performans sergilediği gözlemlenmektedir. Örneğin, süreç ortalama vektöründe $\delta = 0,25\sigma$ birimlik bir kayma söz konusu olduğunda bile değişkenler arasındaki her üç korelasyon değeri için de $I^2 - PoC$ kontrol grafiğinin süreçteki kaymayı ilk örneklemden sonra hemen yakalayabildiği görülmektedir. Dolayısıyla $I^2 - PoC$ kontrol grafiğinin süreçteki tüm kaymalara karşın iyi çalışan bir kontrol grafiği olduğu söylenebilir. Ayrıca, geleneksel T^2 kontrol grafiği ile bu çalışmada önerilen I^2 ve PoC kontrol grafikleri ile de karşılaştırıldığında $I^2 - PoC$ kontrol grafiğinin süreç ortalama vektöründe gerçekleşen kaymayı diğer yöntemlere göre daha erken yakalayabildiği ve bu anlamda diğer yöntemlerden çok daha iyi performans sergilediği söylenebilir. Ayrıca, değişkenler arasındaki korelasyon değerlerinin de yöntemin performansını etkilemediği ve dolayısıyla süreç ortalamasında meydana gelen bir kayma yüksek korelasyonlu bir veri yapısında bile $I^2 - PoC$ kontrol grafiği ile yakalanabilir.

Çizelge 4.6. Çok değişkenli normal dağılıma uyan süreçlerde $I^2 - PoC$ kontrol grafiği ile elde edilen ARL değerleri

Normal Dağılım ($\mu_0 + \delta\sigma; \Sigma_0$)			
$\delta\sigma$	$\rho_1 = 0,3$	$\rho_2 = 0,5$	$\rho_3 = 0,8$
0,00	98,97	98,67	98,95
0,25	1,19	1,18	1,13
0,50	1,18	1,16	1,12
0,75	1,16	1,14	1,11
1,00	1,13	1,12	1,09
1,50	1,07	1,07	1,06
2,00	1,03	1,03	1,03
2,50	1,01	1,01	1,01
3,00	1,00	1,00	1,00

Şekil 4.3'te, Çizelge 4.6'da sunulan ARL_1 değerlerinin farklı kayma miktarlarına karşılık değişimi gösterilmektedir.



Şekil 4.3. Çok değişkenli normal dağılıma uyan süreçte I^2 – PoC kontrol grafiği ile elde edilen ARL değerlerinin kayma miktarına göre değişimi

Senaryo 3b (Veri üretme süreci: Çok değişkenli normal dağılım, Yöntem: Hibrit BBA-DVM, Kaynak belirleme)

Çizelge 4.7'da çok değişkenli normal dağılımdan belirlenen senaryo için hibrit BBA-DVM yaklaşımı ile elde edilen I^2 – PoC süreç izleme istatistiklerinin, süreç ortalama vektöründe kaymayı gerçekleştiren değişim kombinasyonlarına göre hesaplanan ortalama değerleri sunulmuştur. Burada süreçteki kaymaya sebep olan değişken/değişkenler Çizelge 4.5'te olduğu gibi değişkenler bazında değil değişim kombinasyonları temel alınarak tespit edilir. Koyu olarak gösterilen ortalama değerleri karşılık geldiği değişim kombinasyonuna göre süreçteki kaymanın kaynağı olan değişken/değişkenler belirlenir. Buna göre sütun bazında bakıldığında en büyük ortalama değere karşılık gelen kombinasyon türü kaymaya sebep olan değişken/değişkenleri tanımlamaya yardımcı olur. Elde edilen bulgulara bakıldığında çok

değişkenli normal dağılıma uyan bir süreçte hibrit BBA-DVM yaklaşımının en küçük kayma miktarından ($\delta = 0,5\sigma$) itibaren süreç ortalama vektöründeki değişime sebep olan değişken/değişkenleri belirleyebildiği anlaşılmaktadır. Çizelgeye göre, $\delta = 1,0\sigma$ ve $\rho_2 = 0,5$ olduğu durumda (0,1,1) durumuna karşılık gelen sütundaki en yüksek değerin 6,006 olduğu ve bu değerin karşılık geldiği satırda da (0,1,1) durumuna denk geldiği yani süreç ortalamasında meydana gelen kaymanın $\mathbf{x}_2$ ve $\mathbf{x}_3$ değişkenlerinden kaynaklandığı söylenebilir. Öte yandan, $\delta = 2,5\sigma$ ve $\rho_1 = 0,3$ olması durumunda, (1,0,1) değişim kombinasyonu için hesaplanan en büyük ortalama değerin 16,618 olduğu görülmektedir. Bu değerin karşılık geldiği satırda da üçüncü değişim kombinasyonu olan (1,0,1)'e denk geldiği ve dolayısıyla süreçteki kaymada $\mathbf{x}_1$ ve $\mathbf{x}_3$ değişkenlerinin etkili olduğu belirtilebilir. Çizelgedeki diğer koyu değerler de benzer şekilde yorumlanabilir.

Çizelge 4.7. Çok değişkenli normal dağılıma uyan süreçte Hibrit BBA-DVM yaklaşımı ile hesaplanan $I^2 - \text{PoC}$ değerlerinin farklı değişim kombinasyonlarından elde edilen ortalamaları

Normal Dağılım ($\mu_0 + \delta\sigma$; Σ_0)																						
		$\rho_1 = 0,3$							$\rho_2 = 0,5$							$\rho_3 = 0,8$						
$\delta\sigma$		(1,1,1)	(1,1,0)	(1,0,1)	(1,0,0)	(0,1,1)	(0,1,0)	(0,0,1)	(1,1,1)	(1,1,0)	(1,0,1)	(1,0,0)	(0,1,1)	(0,1,0)	(0,0,1)	(1,1,1)	(1,1,0)	(1,0,1)	(1,0,0)	(0,1,1)	(0,1,0)	(0,0,1)
0	0	3,999	3,999	3,999	3,999	3,999	3,999	3,999	3,999	3,999	3,999	3,999	3,999	3,999	3,999	3,999	3,999	3,999	3,999	3,999	3,999	
0,5	(1,1,1)	4,131	4,067	4,062	4,027	4,062	4,021	4,021	4,079	4,054	4,050	4,022	4,036	4,022	4,013	4,048	4,045	4,036	4,022	4,043	4,030	4,024
	(1,1,0)	4,063	4,114	4,014	4,032	4,014	4,033	4,004	4,041	4,152	4,007	4,042	4,009	4,033	4,009	4,019	4,521	4,002	4,138	4,002	4,123	4,031
	(1,0,1)	4,060	4,014	4,120	4,035	4,015	4,004	4,026	4,048	4,005	4,158	4,045	4,005	4,005	4,052	4,032	4,002	4,537	4,159	4,004	4,032	4,148
	(1,0,0)	4,020	4,037	4,053	4,056	4,004	4,002	4,002	4,017	4,052	4,049	4,108	4,009	4,006	4,005	4,006	4,138	4,167	4,424	4,032	4,006	4,007
	(0,1,1)	4,068	4,014	4,012	4,006	4,127	4,034	4,034	4,044	4,007	4,005	4,015	4,164	4,039	4,044	4,025	4,005	4,003	4,038	4,522	4,130	4,126
	(0,1,0)	4,030	4,049	4,004	4,002	4,039	4,057	4,003	4,021	4,051	4,012	4,003	4,051	4,078	4,004	4,010	4,139	4,030	4,006	4,132	4,432	4,010
	(0,0,1)	4,026	4,004	4,041	4,005	4,053	4,004	4,056	4,019	4,010	4,057	4,004	4,037	4,005	4,094	4,017	4,025	4,131	4,006	4,148	4,010	4,440
1,0	(1,1,1)	5,551	4,663	4,677	4,172	4,654	4,171	4,216	5,179	4,560	4,546	4,156	4,513	4,187	4,175	4,693	4,492	4,430	4,246	4,411	4,258	4,242
	(1,1,0)	4,761	5,585	4,134	4,326	4,142	4,414	4,002	4,433	5,918	4,062	4,476	4,047	4,440	4,005	4,218	9,234	4,111	5,244	4,096	5,132	4,035
	(1,0,1)	4,757	4,131	5,607	4,376	4,144	4,002	4,385	4,423	4,075	5,992	4,493	4,060	4,006	4,455	4,185	4,101	9,162	5,343	4,108	4,035	5,366
	(1,0,0)	4,249	4,407	4,420	4,742	4,006	4,005	4,002	4,168	4,505	4,509	5,197	4,003	4,003	4,003	4,107	5,343	5,361	8,436	4,061	4,050	4,046
	(0,1,1)	4,778	4,127	4,138	4,003	5,563	4,354	4,367	4,420	4,059	4,062	4,007	6,006	4,464	4,466	4,219	4,120	4,121	4,043	9,241	5,227	5,231
	(0,1,0)	4,242	4,456	4,008	4,004	4,377	4,662	4,003	4,167	4,470	4,002	4,002	4,522	5,163	4,004	4,106	5,259	4,053	4,050	5,249	8,614	4,056
	(0,0,1)	4,255	4,003	4,431	4,006	4,419	4,006	4,651	4,172	4,002	4,529	4,005	4,505	4,003	5,116	4,077	4,045	5,374	4,039	5,315	4,044	8,587
1,5	(1,1,1)	9,699	6,551	6,598	4,651	6,563	4,685	4,750	8,479	5,929	5,890	4,687	5,927	4,632	4,611	7,051	5,541	5,603	5,043	5,594	5,063	5,088
	(1,1,0)	6,555	9,413	4,645	5,345	4,611	5,279	4,044	5,582	10,193	4,468	5,629	4,466	5,592	4,091	4,675	14,940	6,227	8,127	6,380	8,003	5,553
	(1,0,1)	6,590	4,630	9,346	5,341	4,561	4,038	5,287	5,544	4,461	10,171	5,562	4,426	4,090	5,486	4,625	6,142	15,006	7,928	6,170	5,560	8,220
	(1,0,0)	5,013	5,645	5,644	7,005	4,132	4,056	4,054	4,661	5,929	5,726	8,329	4,162	4,081	4,087	4,398	8,324	8,597	14,309	5,863	5,379	5,547
	(0,1,1)	6,586	4,584	4,616	4,051	9,402	5,259	5,272	5,521	4,417	4,427	4,068	10,383	5,562	5,565	4,704	6,002	6,191	5,478	14,974	8,154	8,302
	(0,1,0)	4,958	5,640	4,117	4,052	5,676	6,968	4,052	4,660	5,754	4,170	4,080	5,756	8,284	4,077	4,450	8,360	6,090	5,473	8,630	14,178	5,392
	(0,0,1)	4,898	4,124	5,481	4,047	5,496	4,057	6,769	4,648	4,163	5,789	4,070	5,800	4,072	8,315	4,388	6,208	8,486	5,517	8,533	5,481	14,161
2,0	(1,1,1)	14,204	9,189	9,395	5,564	9,406	5,520	5,581	12,572	8,300	8,327	5,528	8,544	5,720	5,632	10,555	8,645	8,517	7,742	8,538	7,633	7,512
	(1,1,0)	9,709	13,790	6,080	6,751	5,885	6,821	4,388	7,710	14,589	6,252	7,355	6,144	7,530	4,804	5,649	18,180	12,336	12,942	12,932	12,647	11,631
	(1,0,1)	9,556	6,011	13,641	6,918	6,152	4,374	6,990	7,671	6,363	14,472	7,528	6,459	4,803	7,459	5,560	12,465	18,177	12,869	12,499	11,449	12,889
	(1,0,0)	6,430	7,657	7,517	10,312	4,990	4,342	4,327	6,029	8,095	8,340	12,079	5,548	4,749	4,770	5,434	13,817	13,708	17,649	12,357	11,245	11,336
	(0,1,1)	9,400	6,122	5,945	4,390	13,618	6,968	6,911	7,714	6,389	6,414	4,836	14,556	7,701	7,639	5,594	12,426	12,474	11,475	18,192	12,407	12,910
	(0,1,0)	6,725	7,829	5,019	4,379	7,755	10,474	4,364	6,056	8,307	5,564	4,763	8,319	12,341	4,751	5,656	13,860	12,465	11,545	13,799	17,640	11,561
	(0,0,1)	6,645	5,042	7,688	4,369	7,561	4,355	10,176	5,948	5,606	8,238	4,771	8,241	4,665	12,295	5,693	12,568	14,046	11,667	14,011	11,751	17,654

Çizelge 4.7. (Devam) Çok değişkenli normal dağılıma uyan süreçte Hibrit BBA-DVM yaklaşımı ile hesaplanan I^2 – PoC değerlerinin farklı değişim kombinasyonlarından elde edilen ortalamaları

2,5	(1,1,1)	17,014	12,317	12,074	6,831	12,138	6,535	6,992	15,637	11,780	11,956	7,641	11,719	7,459	7,911	13,973	13,077	13,074	11,828	13,014	11,928	11,645
	(1,1,0)	12,988	16,708	9,573	8,889	9,549	8,952	5,853	10,503	17,238	10,388	10,143	10,307	10,207	7,594	7,120	19,488	16,910	16,656	16,979	16,594	16,229
	(1,0,1)	13,002	9,543	16,698	9,066	9,668	5,917	8,697	10,581	10,395	17,368	10,190	10,495	7,473	10,072	7,249	17,005	19,475	16,922	16,943	16,472	16,639
	(1,0,0)	10,049	10,898	10,876	13,634	8,099	5,700	5,538	8,993	11,919	11,936	15,434	10,070	7,526	7,713	8,267	17,669	17,545	19,264	17,083	16,503	16,474
	(0,1,1)	13,202	9,440	9,431	5,865	16,762	8,786	8,996	10,377	9,975	10,294	7,378	17,363	10,066	9,848	6,806	17,027	16,879	16,170	19,490	16,576	16,568
	(0,1,0)	10,021	10,773	8,302	5,644	10,946	13,676	5,653	9,340	11,851	9,909	7,544	11,961	15,473	7,490	8,236	17,629	16,932	16,254	17,639	19,244	16,286
	(0,0,1)	10,145	8,506	11,148	5,766	11,039	5,712	13,587	9,115	9,586	11,962	7,426	11,940	7,573	15,467	8,111	16,837	17,647	16,478	17,616	16,379	19,244
3,0	(1,1,1)	18,659	14,998	15,310	8,808	15,156	8,417	8,609	17,714	14,525	14,511	9,970	14,515	9,842	9,962	16,421	15,880	15,955	15,288	15,977	15,466	15,291
	(1,1,0)	15,970	18,386	13,123	10,629	13,153	11,044	8,504	13,495	18,841	14,134	12,713	14,397	12,662	11,441	9,778	19,890	19,043	18,855	19,206	18,791	18,815
	(1,0,1)	15,874	13,253	18,438	11,134	13,324	8,802	11,002	13,168	14,289	18,837	12,408	13,985	11,195	12,526	9,576	19,149	19,879	18,940	19,102	18,914	18,866
	(1,0,0)	13,899	14,456	14,351	16,284	12,501	8,770	8,658	13,117	15,459	15,651	17,582	14,276	11,515	11,590	11,171	19,316	19,372	19,793	19,020	18,781	18,716
	(0,1,1)	15,971	13,314	13,373	8,951	18,405	11,008	11,034	13,270	14,502	14,319	11,516	18,806	12,720	12,858	9,623	19,154	19,114	18,929	19,885	18,868	18,710
	(0,1,0)	13,736	14,118	12,704	8,900	14,379	16,206	8,983	13,147	15,640	14,365	11,997	15,614	17,533	11,715	11,108	19,270	19,027	18,700	19,317	19,801	18,728
	(0,0,1)	13,948	12,559	14,303	8,749	14,269	9,049	16,156	12,970	14,269	15,769	11,727	15,738	11,641	17,647	11,138	19,041	19,311	18,799	19,304	18,880	19,782

4.3.2. Çok değişkenli normal dağılım sürecine uygulanan yöntemlerin performanslarının karşılaştırılması

Çizelge 4.8’de ve Şekil 4.4’te süreç dağılımının ortalama parametresinden uzaklaşma miktarını temsil eden $\delta\sigma$ ’nın farklı değerleri için $ARL_0=100$ olmak üzere çok değişkenli normal dağılıma uyan sürece ilişkin elde edilen T^2 , I^2 , PoC ve $I^2 - PoC$ kontrol grafiklerinden hesaplanan ARL_1 değerleri gösterilmektedir.

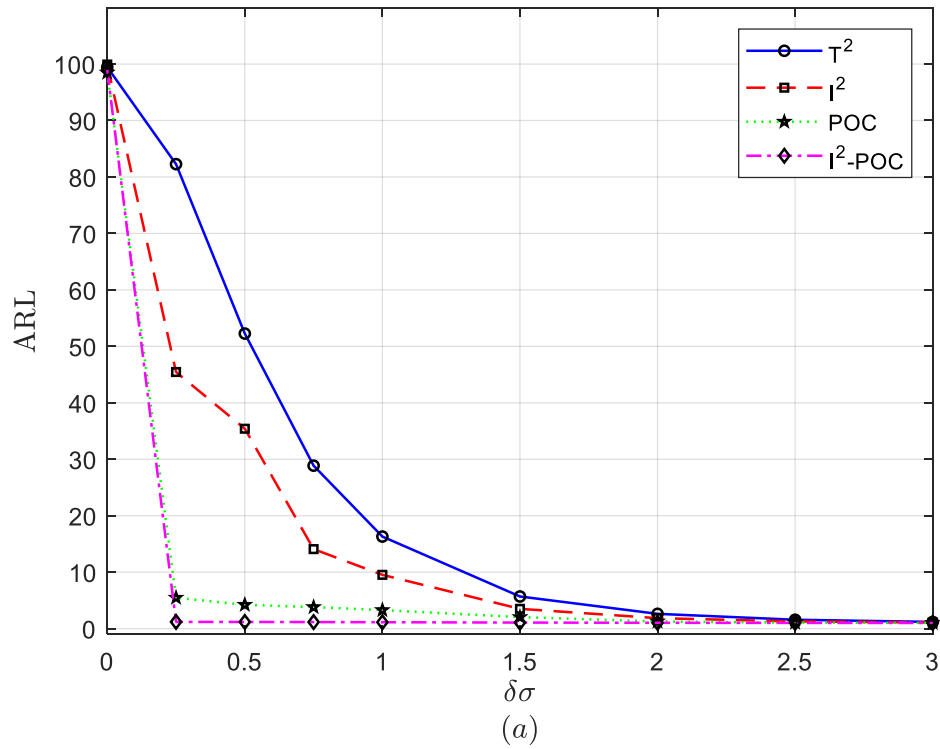
Bir tür Shewhart tipi kontrol grafiği olan Hotelling T^2 kontrol grafiğinin süreçteki nispeten büyük kaymaları yakalayabilme performansının iyi olmasının yanı sıra küçük kaymaları yakalayabilme yeteneği iyi değildir. Çizelge 4.8’de de görüleceği üzere T^2 kontrol grafiği küçük kayma miktarlarında büyük ARL_1 değerlerine sahiptir. Bunun temel nedeni, Shewhart tipi kontrol grafiklerinin hafızasız olması başka bir deyişle son örneklem bilgisinin kullanmasıdır. Çizelge 4.8’e bakıldığında T^2 kontrol grafiğine alternatif olarak önerilen I^2 , PoC ve $I^2 - PoC$ kontrol grafiklerinden $ARL_0=100$ olması koşulu ile elde edilen ARL_1 değerlerinin T^2 kontrol grafiğinden elde edilen ARL_1 değerlerinden daha küçük olduğu görülmektedir. Başka bir deyişle, önerilen yöntemlerin süreç ortalamasında meydana gelen bir kaymayı geleneksel yöntemle göre daha erken yakalayabilmektedir. Özellikle $I^2 - PoC$ kontrol grafiğinin süreç ortalamasındaki küçük kaymaları yakalamakta daha etkin olduğu söylenebilir.

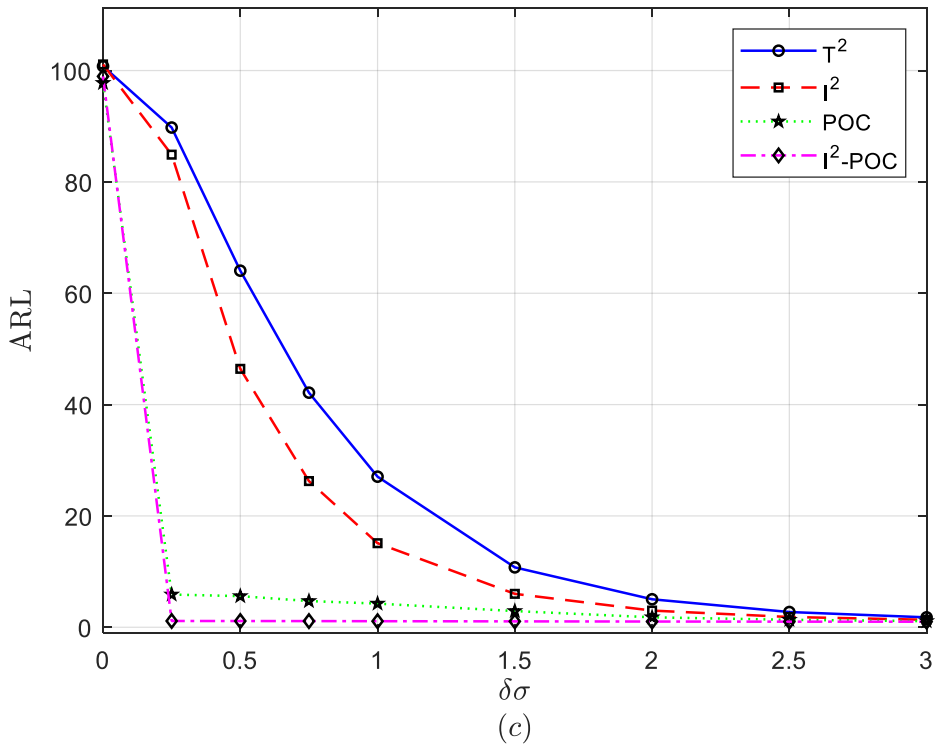
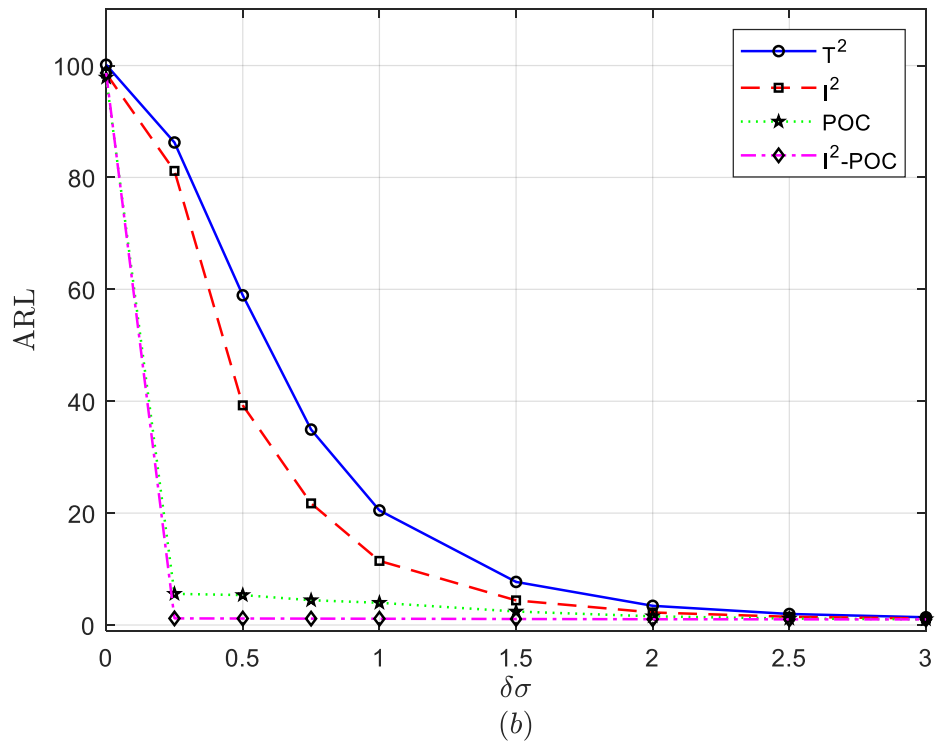
Değişkenler arasındaki korelasyon yapısı bağlamında değerlendirildiğinde, korelasyon katsayısı büyüdükçe T^2 ve I^2 kontrol grafiklerinin performanslarında nispeten bir kötüleşme gözlemlenirken, PoC ve $I^2 - PoC$ kontrol grafiklerinin performanslarının değişkenler arasındaki korelasyon yapısından etkilenmediği görülmektedir. Dolayısıyla, PoC ve $I^2 - PoC$ kontrol grafiklerinin çok değişkenli normal dağılan süreçlerin ortalama vektöründe bir kayma gerçekleştiğinde değişkenler arasındaki tüm korelasyon yapılarında iyi çalıştığı söylenebilir. Ayrıca, $I^2 - PoC$ kontrol grafiği çok değişkenli normal dağılıma uyan süreçlerin ortalamasında gerçekleşen tüm kayma miktarlarında başarılı bir performans sergilemiştir.

Çizelge 4.8. Çok değişkenli normal dağılıma uyan süreçte T^2 , I^2 , PoC ve $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafikleri için elde edilen ARL değerleri

Normal Dağılım ($\mu_0 + \delta\sigma$; Σ_0)												
$\delta\sigma$	$\rho_1 = 0,3$				$\rho_2 = 0,5$				$\rho_3 = 0,8$			
	T^2	I^2	PoC	$I^2 - \text{PoC}$	T^2	I^2	PoC	$I^2 - \text{PoC}$	T^2	I^2	PoC	$I^2 - \text{PoC}$
0,00	99,46	99,92	98,48	98,97	100,14	98,57	97,85	98,67	100,78	101,10	97,77	98,95
0,25	82,27	45,45	5,47	1,19	86,25	81,17	5,57	1,18	89,76	84,89	5,88	1,13
0,50	52,26	35,41	4,22	1,18	58,93	39,27	5,35	1,16	64,05	46,42	5,59	1,12
0,75	28,86	14,08	3,81	1,16	34,93	21,74	4,43	1,14	42,14	26,26	4,71	1,11
1,00	16,30	9,52	3,28	1,13	20,48	11,46	3,97	1,12	27,05	15,10	4,25	1,09
1,50	5,69	3,50	2,04	1,07	7,70	4,40	2,41	1,07	10,76	6,00	2,91	1,06
2,00	2,62	1,85	1,26	1,03	3,43	2,24	1,55	1,03	5,03	3,00	1,79	1,03
2,50	1,57	1,28	1,06	1,01	1,97	1,47	1,15	1,01	2,74	1,85	1,34	1,01
3,00	1,18	1,08	1,01	1,00	1,38	1,17	1,03	1,00	1,78	1,35	1,10	1,00

Çizelge 4.8’de sunulan ARL_1 değerleri farklı korelasyon yapılarına göre (a) $\rho_1 = 0,3$, (b) $\rho_2 = 0,5$ ve (c) $\rho_3 = 0,8$ olmak üzere Şekil 4.4’te grafiksel olarak gösterilmiştir.





Şekil 4.4. Çok değişkenli normal dağılıma uyan süreçte T^2 , I^2 , PoC ve $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafiklerinden elde edilen ARL değerlerinin kayma miktarına göre değişimi: (a) $\rho_1 = 0,3$, (b) $\rho_2 = 0,5$, (c) $\rho_3 = 0,8$

4.3.3. Çok değişkenli gamma dağılımına uyan sürece ilişkin bulgular

Çalışmanın bu bölümünde yöntemlerin performansları çok değişkenli gamma dağılımı ile gerçekleştirilen veri üretme sürecine yönelik bulgular, çizelgeler ve şekiller yardımıyla gösterilmiştir.

Senaryo 4a (Veri üretme süreci: Çok değişkenli gamma dağılım, Yöntem: BBA, ARL)

Çizelge 4.9’da çok değişkenli gamma dağılımına uyan sürece göre oluşturulan üç senaryo (Gamma_1, Gamma_2, Gamma_3) için $ARL_0 = 100$ koşulu altında BBA yaklaşımı ile elde edilen I^2 kontrol grafiklerine ilişkin ARL_1 değerleri yer almaktadır. Gamma_1 senaryosunda süreçteki kayma sadece θ_1 parametresinde, Gamma_2 senaryosunda süreçteki kayma sadece θ_2 parametresinde, Gamma_3 senaryosunda ise süreçteki kayma hem θ_1 hem de θ_2 parametresinde yaratılmıştır. Çizelgedeki ρ_i ($i = 1, 2, 3$) değerleri sırasıyla değişkenler arasındaki düşük, orta ve yüksek korelasyonu simgelemektedir ve değişkenler arasındaki korelasyon yapısının ARL_1 değerleri üzerindeki etkisini değerlendirmek amacıyla çizelgeye dahil edilmiştir.

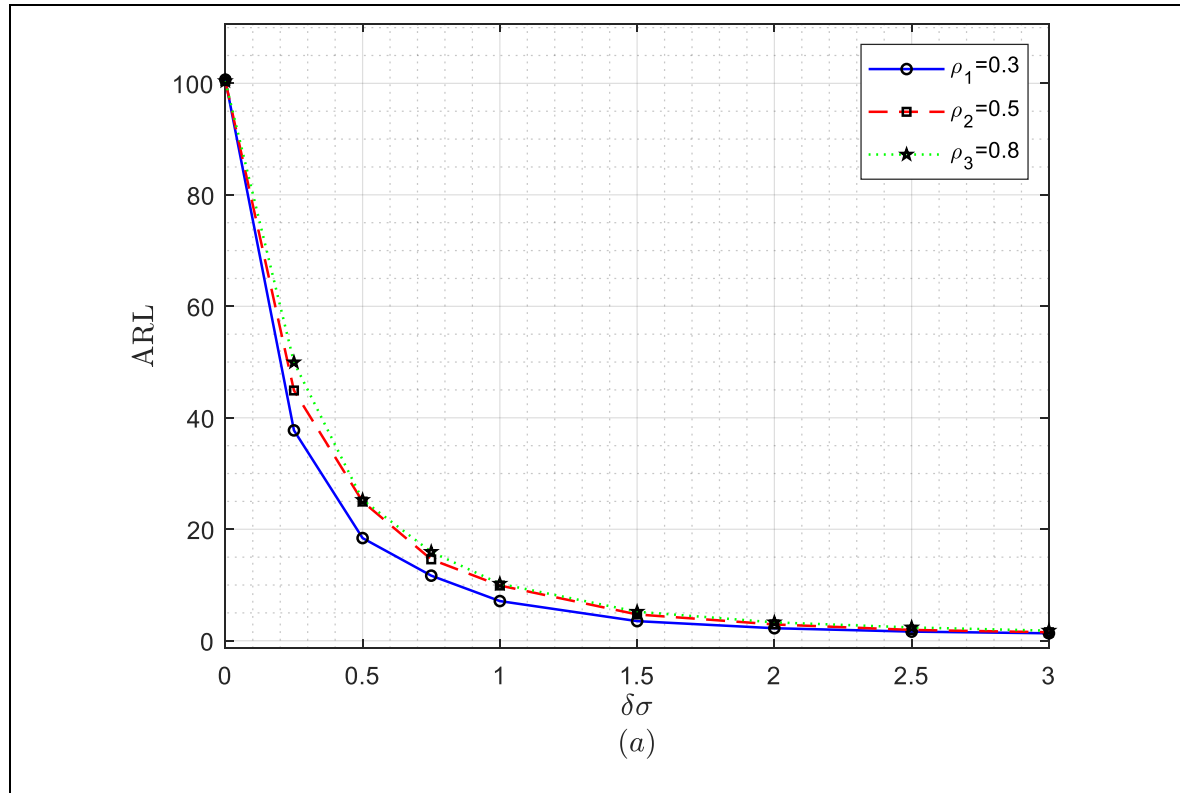
Çizelgeye göre I^2 kontrol grafiğinin en iyi performansı, kaymanın süreç dağılımının hem θ_1 hem de θ_2 parametrelerinde gerçekleştiği Gamma_3 senaryosunda sergilediği söylenebilir. Kayma miktarı $\delta = 2,0\sigma$ ’nın üzerinde olduğunda Gamma_1 senaryosu Gamma_2 senaryosuna göre daha iyi performans gösterirken, kayma miktarı $\delta = 2,0\sigma$ ve daha küçük olduğunda Gamma_2 senaryosunun Gamma_1 senaryosundan daha iyi olduğu gözlemektedir. Örneğin, $\rho_1 = 0,3$ için süreçte yaratılan $\delta = 3,0\sigma$ ’lık bir kaymayı I^2 kontrol grafiği Gamma_1 senaryosunda $1,34 \cong 1$ örneklemden sonra yakalarken, Gamma_2 senaryosunda $1,84 \cong 2$ örneklemden sonra yakalayabilmektedir. I^2 kontrol grafiğinin performansının Gamma_1 ve Gamma_2 süreçlerinde gösterdiği bu farklılığın nedeni, θ_1 ve θ_2 parametrelerindeki bireysel farklılaşmaların gamma dağılımının ortalama ($\theta_1 \theta_2$) ve varyansı ($\theta_1 \theta_2^2$) üzerindeki etkileridir.

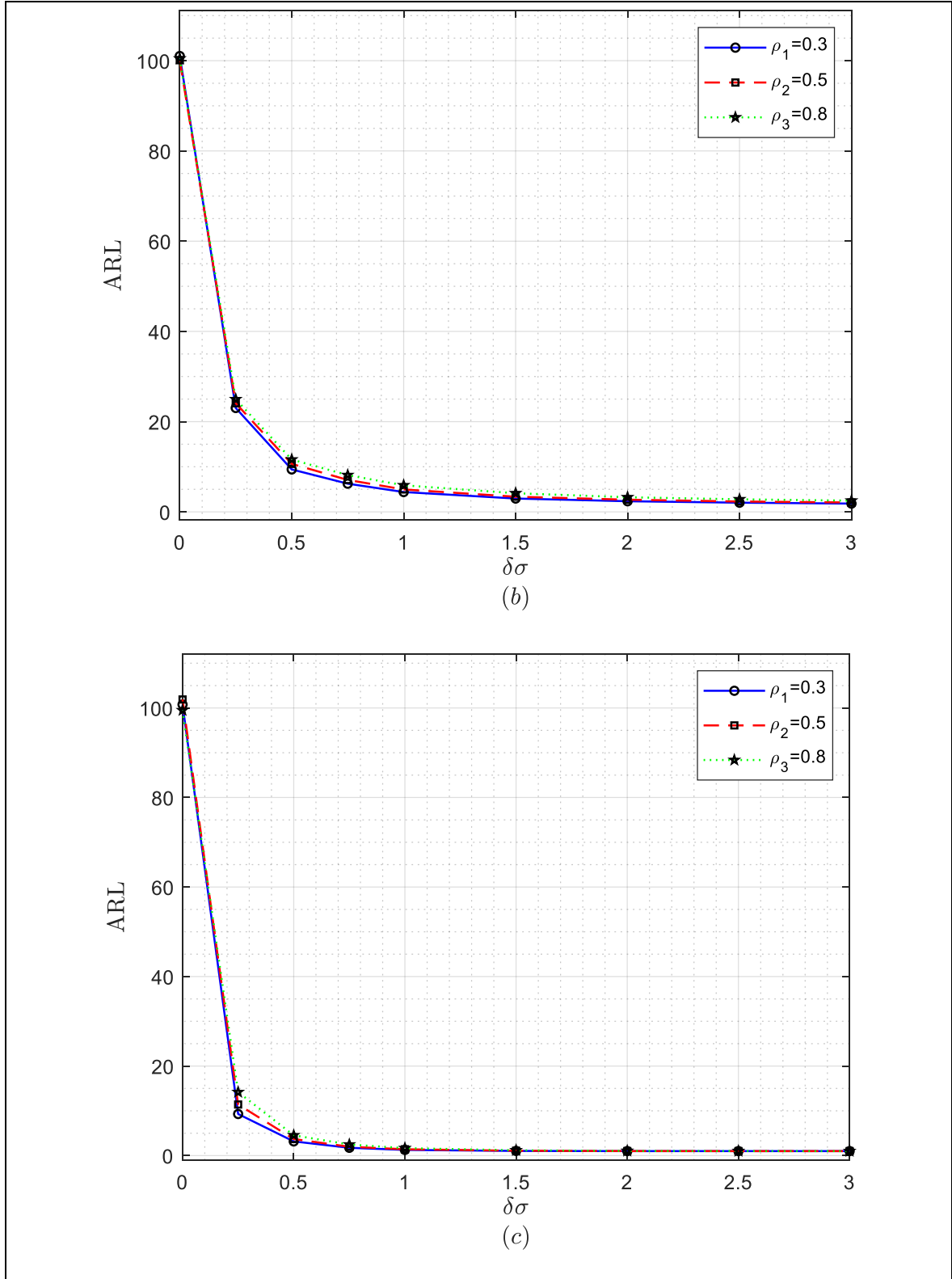
Değişkenler arasındaki korelasyon katsayısı büyüdükçe Gamma_1 ve Gamma_2 senaryolarında I^2 kontrol grafiğinin performansında nispeten kötüleşme söz konusu iken, Gamma_3 senaryosunda değişkenler arasındaki korelasyon katsayısının I^2 kontrol grafiğinin performansını etkilemediği görülmektedir.

Çizelge 4.9. Çok değişkenli gamma dağılımına uyan süreçlerde I^2 kontrol grafiği ile elde edilen ARL değerleri

	Gamma_1 ($\theta_1 + \delta; \theta_2$)			Gamma_2 ($\theta_1; \theta_2 + \delta$)			Gamma_3 ($\theta_1 + \delta; \theta_2 + \delta$)		
δ	$\rho_1 = 0,3$	$\rho_2 = 0,5$	$\rho_3 = 0,8$	$\rho_1 = 0,3$	$\rho_2 = 0,5$	$\rho_3 = 0,8$	$\rho_1 = 0,3$	$\rho_2 = 0,5$	$\rho_3 = 0,8$
0,0	100,67	100,40	100,40	101,03	100,11	100,47	100,76	101,90	99,49
0,25	37,74	44,90	49,95	23,03	24,07	24,96	9,29	11,41	14,18
0,50	18,42	24,97	25,26	9,41	10,64	11,60	3,17	3,70	4,53
0,75	11,68	14,60	15,95	6,25	7,08	8,15	1,74	1,97	2,47
1,00	7,12	9,91	10,23	4,40	4,97	5,89	1,27	1,41	1,66
1,50	3,52	4,72	5,21	2,96	3,36	4,13	1,04	1,08	1,18
2,00	2,25	2,93	3,30	2,36	2,70	3,24	1,00	1,01	1,04
2,50	1,64	1,94	2,39	2,04	2,30	2,79	1,00	1,00	1,01
3,00	1,34	1,53	1,81	1,84	2,08	2,49	1,00	1,00	1,00

Şekil 4.5'te de Çizelge 4.9'daki sonuçların grafiksel gösterimi yer almaktadır. Benzer yorumlar Şekil 4.5'e bakılarak da yapılabilir.





Şekil 4.5. Çok değişkenli gamma dağılımına uyan süreçlerde I^2 kontrol grafiği ile elde edilen ARL değerlerinin kayma miktarına göre değişimi: (a) Gamma_1, (b) Gamma_2, (c) Gamma_3

Senaryo 4b (Veri üretme süreci: Çok değişkenli gamma dağılım, Yöntem: BBA, Kaynak Belirleme)

Çizelge 4.10'da Gamma_1'de Eş. 3.39 ile elde edilen I^2 istatistiklerine dayalı fark kare toplamaları gösterilmektedir. Bu değerler değişkenler arasındaki korelasyon katsayıları $\rho_i (i=1,2,3)$ için süreç dağılımının ölçek parametresindeki (θ_1) δ büyüklüklerindeki farklılaşmalara sebep olan değişken/değişkenlerin belirlenmesi amacıyla elde edilmiştir. $ARL_0=100$ olduğu süreç dağılımında herhangi bir kaymanın olmadığı durumda I^2 değerleri yaklaşık 2,7 olarak hesaplanmıştır. Her bir korelasyon katsayısı altında 3 değişken için incelenen 7 farklı değişim kombinasyonu çizelgenin 2. sütununda yer almaktadır. ARL_0 durumunda hesaplanan I^2 değerine göre farklılaşan ARL_1 değeri süreç dağılımını ölçek parametresinde meydana gelen kaymaya sebep olan değişken/değişkenleri gösterir. Örneğin, $\rho_2=0,5$ ve kayma miktarı $\delta=1,0$ olduğunda (0,1,0) değişim kombinasyonuna karşılık gelen $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ sütunlarına bakıldığında, ikinci değerin (7,57) ARL_0 durumunda hesaplanan 2,7 değerinden uzaklaştığı ancak diğer değerlerin 2,7 değerini aşmadığı görülmektedir. Öyleyse buradan süreç dağılımının ölçek parametresindeki farklılaşmaya sadece $\mathbf{x}_2$ değişkenin kaynaklık ettiği sonucu çıkarılır. Gamma dağılımının ölçek parametresinde yaratılan kayma miktarı arttıkça kontrol dışı duruma sebep olan değişken/değişkenlere ilişkin fark kare toplamı değerleri de hızla artar ve farklılaşmanın kaynağının tespit edilmesi kolaylaşır. $\rho_1=0,3$ olduğu durumda kayma miktarının $\delta=3,0$ için (1,1,0) değerine karşılık gelen $\mathbf{x}_1$ (54,51) ve $\mathbf{x}_2$ (55,81) değişkenlerine ait fark kare toplamalarının ARL_0 durumundaki $I^2=2,7$ değerinden yaklaşık olarak eşit uzaklıkta ve fazla farklılaştığı, $\mathbf{x}_3$ (2,71) değişkeninin fark kare toplamının ise bu değeri aşmadığı görülmektedir. Dolayısıyla, söz konusu koşullar altında süreç dağılımının ölçek parametresinde yaratılan kaymaya sebep olan değişkenlerin $\mathbf{x}_1$ ve $\mathbf{x}_2$ olduğu söylenebilir.

Çizelgeye bakıldığında, Gamma_1'de BBA yaklaşımının küçük kaymalarda bile $(0,5\sigma)$ 'dan itibaren kayma miktarı arttıkça) sinyale sebep olan değişken/değişkenleri doğru bir şekilde belirlediği anlaşılmaktadır. Çizelgede gösterilen diğer koyu değerler incelendiğinde de benzer sonuçlar elde edilebilir.

Çizelge 4.10. Gamma_1 durumunda değişkenlerin BBA yaklaşımı ile hesaplanan I^2 istatistiği üzerindeki katkı değerleri (*100)

Gamma_1 ($\theta_1 + \delta; \theta_2$)										
		$\rho_1 = 0,3$			$\rho_2 = 0,5$			$\rho_3 = 0,8$		
δ	$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$
0,0	(0,0,0)	2,70	2,68	2,70	2,65	2,64	2,69	2,62	2,66	2,62
0,5	(1,1,1)	4,35	4,24	4,41	4,34	4,34	4,31	4,28	4,37	4,33
	(1,1,0)	4,26	4,24	2,62	4,25	4,19	2,68	4,29	4,34	2,58
	(1,0,1)	4,25	2,66	4,23	4,21	2,64	4,29	4,33	2,60	4,25
	(1,0,0)	4,34	2,67	2,62	4,29	2,71	2,65	4,32	2,62	2,65
	(0,1,1)	2,62	4,31	4,24	2,67	4,26	4,37	2,65	4,34	4,28
	(0,1,0)	2,76	4,36	2,62	2,62	4,37	2,68	2,64	4,33	2,62
	(0,0,1)	2,65	2,75	4,25	2,68	2,63	4,29	2,63	2,68	4,37
1,0	(1,1,1)	7,59	7,53	7,70	7,70	7,56	7,43	7,55	7,60	7,46
	(1,1,0)	7,85	7,72	2,62	7,48	7,52	2,62	7,52	7,48	2,70
	(1,0,1)	7,57	2,68	7,48	7,58	2,71	7,58	7,53	2,75	7,45
	(1,0,0)	7,58	2,63	2,71	7,42	2,67	2,68	7,68	2,67	2,67
	(0,1,1)	2,66	7,50	7,68	2,68	7,47	7,61	2,64	7,52	7,75
	(0,1,0)	2,64	7,66	2,65	2,72	7,57	2,61	2,59	7,46	2,60
	(0,0,1)	2,68	2,62	7,45	2,63	2,61	7,52	2,68	2,72	7,55
1,5	(1,1,1)	13,30	12,82	13,27	13,37	13,19	13,36	13,14	13,27	13,51
	(1,1,0)	13,50	13,27	2,70	13,38	13,21	2,66	13,28	13,05	2,74
	(1,0,1)	13,23	2,69	13,15	13,23	2,71	13,31	13,25	2,68	13,31
	(1,0,0)	13,38	2,69	2,63	13,24	2,67	2,68	13,06	2,74	2,66
	(0,1,1)	2,61	13,02	13,34	2,61	13,09	13,41	2,67	13,23	13,48
	(0,1,0)	2,63	13,18	2,68	2,63	13,18	2,63	2,59	13,21	2,65
	(0,0,1)	2,69	2,66	13,26	2,65	2,74	13,51	2,69	2,67	13,26
2,0	(1,1,1)	22,06	22,51	22,39	22,18	22,07	22,29	22,34	22,25	22,13
	(1,1,0)	22,31	22,29	2,65	22,45	22,55	2,64	22,15	22,57	2,68
	(1,0,1)	22,11	2,67	22,42	22,17	2,66	22,28	22,42	2,65	21,97
	(1,0,0)	22,81	2,74	2,61	22,41	2,59	2,73	22,65	2,63	2,69
	(0,1,1)	2,69	22,06	22,48	2,68	22,81	22,13	2,72	22,60	22,27
	(0,1,0)	2,71	22,42	2,63	2,66	22,03	2,63	2,70	22,41	2,69
	(0,0,1)	2,71	2,67	21,95	2,66	2,75	22,49	2,67	2,59	22,48
2,5	(1,1,1)	35,64	35,42	36,13	35,62	35,77	35,55	35,423	36,036	35,819
	(1,1,0)	36,20	35,53	2,69	35,68	35,33	2,68	35,084	35,369	2,741
	(1,0,1)	35,43	2,68	35,90	36,45	2,66	36,23	36,078	2,657	35,673
	(1,0,0)	35,89	2,69	2,65	35,54	2,68	2,66	35,603	2,669	2,630
	(0,1,1)	2,59	35,76	35,87	2,75	36,08	35,73	2,663	35,627	36,055
	(0,1,0)	2,66	35,80	2,66	2,65	36,33	2,60	2,622	36,146	2,602
	(0,0,1)	2,78	2,68	35,80	2,72	2,65	35,66	2,656	2,639	35,656
3,0	(1,1,1)	54,93	54,89	54,64	54,67	53,64	54,83	54,530	54,408	55,043
	(1,1,0)	54,51	55,81	2,71	53,97	55,09	2,63	54,553	54,625	2,635
	(1,0,1)	54,63	2,64	54,74	54,67	2,61	54,15	54,511	2,690	54,840
	(1,0,0)	54,72	2,64	2,68	54,49	2,71	2,59	54,318	2,647	2,667
	(0,1,1)	2,64	55,26	55,32	2,67	54,26	55,35	2,684	55,666	55,067
	(0,1,0)	2,62	54,52	2,70	2,63	55,45	2,78	2,599	54,304	2,653
	(0,0,1)	2,59	2,63	55,59	2,64	2,66	54,67	2,711	2,625	55,360

Çizelge 4,11’de Gamma_2 senaryosundaki I^2 süreç izleme istatistiklerinden elde edilen fark kare toplamaları sunulmuştur. Bu değerler ile süreç dağılımının şekil parametresinde (θ_2) gerçekleşen δ büyüklüklerindeki farklılaşmalara sebep olan değişken/değişkenler belirlenir. Çizelgeye bakıldığında, BBA yaklaşımının Gamma_2 koşullarında da Gamma_1’de olduğu gibi $\delta = 0,5$ kadar küçük kayma miktarında dahi sinyal kaynağını doğru bir şekilde tespit edebildiği görülmektedir. $\delta = 1,0$ ve $\rho_1 = 0,3$ iken (1,0,1) değişim kombinasyonuna karşılık gelen, koyu ile belirtilen katkı değerleri 167,20 ve 154,12 sırasıyla

$\mathbf{x}_1$ ve $\mathbf{x}_3$ 'ü temsil etmektedir ve $I^2 = 2,7$ 'den uzaklaşmışlardır. $\mathbf{x}_2$ 'yi temsil eden 2,71'in ise ARL_0 durumunda hesaplanan değerden farklılaştığı söylenemez. Öyleyse süreçteki kaymaya $\mathbf{x}_1$ ve $\mathbf{x}_3$ değişkenleri sebep olmuştur. Benzer şekilde, $\delta = 3,0$ ve $\rho_3 = 0,8$ iken $(0,1,0)$ değişim kombinasyonu ile elde edilen değerlerden $\mathbf{x}_2$ 'ye karşılık gelen 1421,78 değerinin ARL_0 durumunda hesaplanan $I^2 = 2,7$ değerini fazlasıyla aştığı, $\mathbf{x}_1$ 'e karşılık gelen 2,71 ve $\mathbf{x}_3$ 'e karşılık gelen 2,71 değerlerinin ise I^2 değerinden uzaklaşmadığı görülmektedir. Böylece süreç dağılımının şekil parametresinde gerçekleşen kaymaya sebep olan değişkenin $\mathbf{x}_2$ olduğu tespit edilmiş olur.

Çizelge 4.11. Gamma_2 durumunda değişkenlerin BBA yaklaşımı ile hesaplanan I^2 istatistiği üzerindeki katkı değerleri (*100)

Gamma_2 ($\theta_1; \theta_2 + \delta$)										
		$\rho_1 = 0,3$			$\rho_2 = 0,5$			$\rho_3 = 0,8$		
δ	$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$
0,0	(0,0,0)	2,65	2,66	2,64	2,67	2,63	2,61	2,67	2,67	2,66
0,5	(1,1,1)	11,77	11,80	11,50	11,89	11,24	12,45	12,06	11,92	11,65
	(1,1,0)	11,81	11,65	2,72	11,62	12,53	2,66	12,08	11,76	2,64
	(1,0,1)	11,71	2,62	11,97	12,11	2,64	11,79	12,19	2,68	12,57
	(1,0,0)	11,42	2,69	2,71	12,15	2,64	2,68	11,48	2,75	2,72
	(0,1,1)	2,66	12,47	12,66	2,75	10,91	11,69	2,62	12,34	11,65
	(0,1,0)	2,61	11,65	2,65	2,69	11,78	2,59	2,69	11,71	2,54
	(0,0,1)	2,70	2,65	11,87	2,65	2,71	11,82	2,69	2,68	11,94
1,0	(1,1,1)	47,80	49,83	52,55	55,61	52,77	53,33	50,01	54,26	54,16
	(1,1,0)	52,19	53,25	2,62	52,10	52,17	2,70	52,97	49,48	2,68
	(1,0,1)	51,41	2,59	50,06	51,65	2,60	51,20	50,83	2,59	48,90
	(1,0,0)	55,86	2,53	2,61	51,84	2,61	2,62	52,94	2,66	2,64
	(0,1,1)	2,66	49,21	52,61	2,65	52,47	49,98	2,68	50,39	53,31
	(0,1,0)	2,77	50,45	2,67	2,64	53,53	2,69	2,68	50,37	2,61
	(0,0,1)	2,67	2,65	52,54	2,67	2,65	50,29	2,61	2,65	53,87
1,5	(1,1,1)	173,22	158,86	156,06	160,03	151,86	153,76	163,41	164,27	165,31
	(1,1,0)	163,73	159,92	2,71	153,94	160,99	2,79	154,98	161,37	2,69
	(1,0,1)	167,20	2,71	154,12	163,65	2,61	159,08	152,01	2,67	161,09
	(1,0,0)	158,05	2,63	2,69	158,65	2,55	2,66	160,11	2,64	2,68
	(0,1,1)	2,74	155,22	154,23	2,68	165,33	150,34	2,72	157,13	162,88
	(0,1,0)	2,74	153,18	2,71	2,64	156,72	2,67	2,68	165,98	2,59
	(0,0,1)	2,70	2,71	154,43	2,57	2,58	157,25	2,62	2,68	171,21
2,0	(1,1,1)	377,91	377,66	406,04	384,24	394,68	393,91	413,72	397,09	370,09
	(1,1,0)	368,96	384,01	2,64	404,59	390,29	2,75	400,63	406,74	2,67
	(1,0,1)	388,97	2,63	391,54	375,26	2,74	383,58	388,47	2,61	392,22
	(1,0,0)	372,01	2,61	2,68	376,92	2,60	2,68	387,69	2,66	2,67
	(0,1,1)	2,64	399,95	373,49	2,69	390,76	371,67	2,70	384,85	400,42
	(0,1,0)	2,62	378,18	2,61	2,67	394,18	2,69	2,62	414,19	2,76
	(0,0,1)	2,65	2,67	396,76	2,73	2,63	389,84	2,71	2,80	396,49

Çizelge 4.11. (Devam) Gamma_2 durumunda değişkenlerin BBA yaklaşımı ile hesaplanan I^2 istatistiği üzerindeki katkı değerleri (*100)

2,5	(1,1,1)	816,79	795,78	810,30	799,35	766,88	815,79	787,11	782,81	862,39
	(1,1,0)	796,46	756,54	2,71	760,54	736,63	2,62	808,12	781,98	2,69
	(1,0,1)	817,03	2,64	766,92	790,41	2,64	788,61	807,61	2,61	829,40
	(1,0,0)	788,86	2,65	2,74	802,88	2,71	2,61	774,57	2,64	2,65
	(0,1,1)	2,68	866,82	831,94	2,68	796,35	809,09	2,59	831,21	752,64
	(0,1,0)	2,72	776,64	2,71	2,65	848,88	2,64	2,61	797,60	2,61
	(0,0,1)	2,80	2,66	763,11	2,62	2,67	785,90	2,62	2,67	800,75
3,0	(1,1,1)	1541,38	1472,67	1504,50	1608,49	1489,32	1529,26	1495,08	1437,53	1433,03
	(1,1,0)	1423,07	1363,79	2,65	1551,35	1429,48	2,63	1542,93	1507,07	2,67
	(1,0,1)	1451,77	2,72	1419,65	1510,05	2,64	1551,99	1431,81	2,65	1460,18
	(1,0,0)	1411,41	2,69	2,68	1533,59	2,74	2,70	1444,91	2,62	2,67
	(0,1,1)	2,70	1489,45	1440,31	2,61	1509,41	1515,26	2,61	1341,34	1462,71
	(0,1,0)	2,62	1511,35	2,63	2,66	1414,09	2,61	2,71	1421,78	2,71
	(0,0,1)	2,66	2,66	1528,56	2,68	2,62	1561,45	2,66	2,65	1441,77

Çizelge 4.12’de, ρ ’nun alacağı farklı değerler için süreç dağılımının hem ölçek hem de şekil parametrelerinde farklı kayma miktarlarına (δ) ve değişim kombinasyonlarına ($\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$) göre belirlenen Gamma_3 senaryosunda elde edilen I^2 istatistiklerine ilişkin katkı değerleri görülmektedir. Gamma_3 durumunda da Gamma_1 ve Gamma_2 senaryolarında olduğu gibi BBA yaklaşımının tüm kayma miktarlarında sinyal kaynağını doğru bir şekilde belirlediği söylenebilir. $\delta = 1,5$ ve $\rho_3 = 0,8$ olduğunda (1,1,0) duruma karşılık gelen değerlere bakıldığında, $\mathbf{x}_1$ (2881,46) ve $\mathbf{x}_2$ (2899,93) değerlerinin ARL_0 durumunda hesaplanan yaklaşık 2,7 değerinden oldukça uzağa düştüğü, $\mathbf{x}_3$ ’e karşılık gelen 2,65 değerinin ise 2,7 değerini aşmadığı görülmektedir. Buradan, süreç dağılımının hem ölçek hem de şekil parametrelerinde gerçekleşen değişimin kaynağının $\mathbf{x}_1$ ve $\mathbf{x}_2$ değişkenleri olduğu sonucu çıkarılabilir. Çizelgede sunulan diğer koyu değerler incelenerek benzer sonuçlar elde edilebilir.

Çizelge 4.12. Gamma_3 durumunda değişkenlerin BBA yaklaşımı ile hesaplanan I^2 istatistiği üzerindeki katkı değerleri (*100)

Gamma_3 ($\theta_1 + \delta; \theta_2 + \delta$)										
		$\rho_1 = 0,3$			$\rho_2 = 0,5$			$\rho_3 = 0,8$		
δ	(x_1, x_2, x_3)	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
0,0	(0,0,0)	2,64	2,71	2,65	2,67	2,67	2,62	2,65	2,68	2,71
0,5	(1,1,1)	37,90	38,26	38,59	37,34	37,41	37,84	36,51	38,29	37,37
	(1,1,0)	39,14	39,52	2,63	39,75	37,07	2,68	37,52	38,67	2,73
	(1,0,1)	38,46	2,57	37,88	37,95	2,75	38,12	37,32	2,56	37,42
	(1,0,0)	37,13	2,68	2,60	38,36	2,79	2,71	39,87	2,70	2,67
	(0,1,1)	2,73	38,23	38,28	2,63	37,52	38,52	2,62	37,77	38,21
	(0,1,0)	2,63	38,25	2,67	2,60	36,93	2,68	2,68	37,94	2,64
	(0,0,1)	2,62	2,68	38,77	2,74	2,62	38,04	2,67	2,69	38,57
1,0	(1,1,1)	455,80	457,51	446,18	444,91	447,42	447,77	452,54	448,21	444,18
	(1,1,0)	443,50	449,52	2,69	462,14	454,08	2,68	450,42	440,44	2,61
	(1,0,1)	448,09	2,63	456,41	452,78	2,63	441,46	437,21	2,59	440,05
	(1,0,0)	460,39	2,69	2,67	450,06	2,68	2,65	460,14	2,69	2,65
	(0,1,1)	2,67	446,67	453,03	2,66	451,07	438,97	2,63	449,62	457,53
	(0,1,0)	2,65	447,86	2,67	2,59	445,70	2,69	2,67	450,31	2,67
	(0,0,1)	2,64	2,71	451,87	2,71	2,61	461,36	2,63	2,67	460,35
1,5	(1,1,1)	2911,40	2901,15	2910,53	2889,20	2889,06	2912,78	2840,65	2926,03	2864,27
	(1,1,0)	2865,47	2899,25	2,68	2928,34	2883,86	2,65	2881,46	2899,93	2,65
	(1,0,1)	2848,87	2,67	2855,36	2862,45	2,66	2870,31	2851,94	2,73	2945,82
	(1,0,0)	2854,69	2,61	2,73	2921,65	2,61	2,67	2857,30	2,61	2,63
	(0,1,1)	2,63	2893,28	2951,31	2,68	2857,14	2909,09	2,61	2926,26	2904,95
	(0,1,0)	2,65	2953,55	2,67	2,72	2902,26	2,61	2,65	2830,21	2,67
	(0,0,1)	2,75	2,65	2864,17	2,56	2,69	2850,37	2,65	2,65	2938,05
2,0	(1,1,1)	12833,80	12957,73	12927,08	12497,52	12972,88	12681,85	12556,42	12656,72	12623,88
	(1,1,0)	12682,17	12937,20	2,67	12615,54	12570,86	2,69	12902,33	12664,26	2,68
	(1,0,1)	12491,53	2,65	12569,81	12704,97	2,53	12856,54	12926,24	2,71	12650,74
	(1,0,0)	12745,65	2,70	2,65	12717,50	2,71	2,64	12862,79	2,66	2,74
	(0,1,1)	2,65	12666,22	12836,67	2,73	12722,61	12583,77	2,60	12763,72	12676,14
	(0,1,0)	2,52	12794,91	2,61	2,65	12562,09	2,60	2,63	12601,91	2,73
	(0,0,1)	2,72	2,61	12779,06	2,6	2,67	12819,07	2,62	2,66	12741,15
2,5	(1,1,1)	43445,95	44122,88	43919,16	43500,07	43032,15	44259,21	43774,98	43196,02	43436,39
	(1,1,0)	43714,08	42887,20	2,64	44267,36	43469,05	2,59	43887,94	43985,36	2,64
	(1,0,1)	43636,91	2,64	43783,03	43722,62	2,68	43481,02	44081,09	2,69	43383,35
	(1,0,0)	44415,22	2,62	2,65	43977,45	2,67	2,71	43855,29	2,70	2,71
	(0,1,1)	2,66	44224,95	43527,40	2,62	43734,11	42923,29	2,66	44176,07	44103,72
	(0,1,0)	2,63	43325,94	2,63	2,59	43422,62	2,71	2,69	44076,47	2,72
	(0,0,1)	2,71	2,66	43363,05	2,73	2,63	43401,59	2,67	2,74	43822,94
3,0	(1,1,1)	124571,76	126669,73	126602,51	127112,87	125606,47	126882,54	128938,25	126083,12	126416,55
	(1,1,0)	126892,04	125739,36	2,66	127143,84	125898,23	2,64	124128,53	128601,64	2,63
	(1,0,1)	127891,48	2,62	127318,06	128212,44	2,66	127062,57	127249,86	2,69	127191,53
	(1,0,0)	123339,42	2,65	2,71	126475,23	2,63	2,66	128170,17	2,66	2,56
	(0,1,1)	2,67	125836,64	126058,92	2,71	126564,01	126579,09	2,69	126617,62	126160,53
	(0,1,0)	2,72	125817,21	2,71	2,67	125587,21	2,64	2,65	126797,68	2,62
	(0,0,1)	2,69	2,61	127135,21	2,62	2,68	126600,09	2,58	2,73	126424,68

Senaryo 5a (Veri üretme süreci: Çok değişkenli gamma dağılım, Yöntem: DVM, ARL)

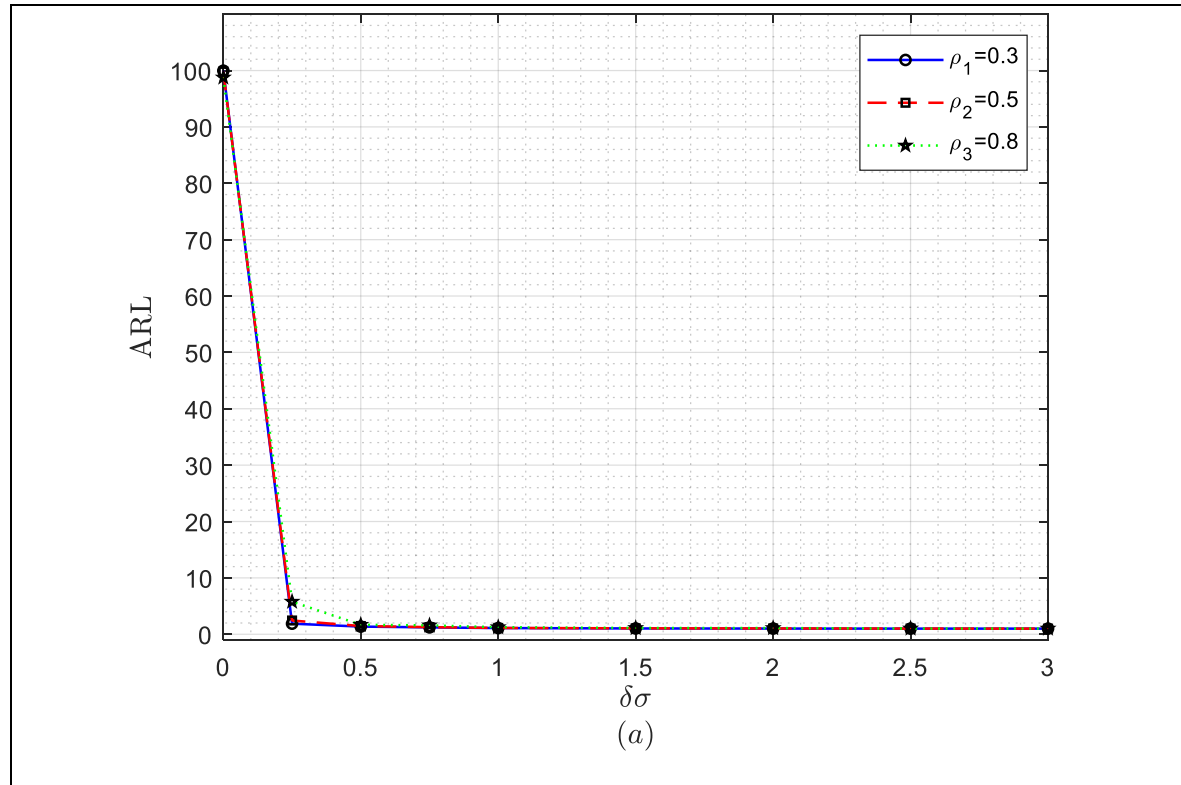
Çizelge 4.13'te çok değişkenli gamma dağılımına uyan süreçler için oluşturulan üç senaryo (Gamma_1, Gamma_2, Gamma_3) için DVM yaklaşımı ile elde edilen PoC kontrol grafiklerine ilişkin ARL değerleri verilmiştir. Burada da ARL_0 değeri 100 olarak belirlenmiş, bu değere karşılık hesaplanan ARL_1 değerleri incelenmiştir. Çizelgeye bakıldığında PoC kontrol grafiğinin her üç senaryo için de çok küçük kaymalardan itibaren ($\delta = 0,25$ ve ötesinde) iyi performans sergilediği söylenebilir. Bununla birlikte, PoC kontrol

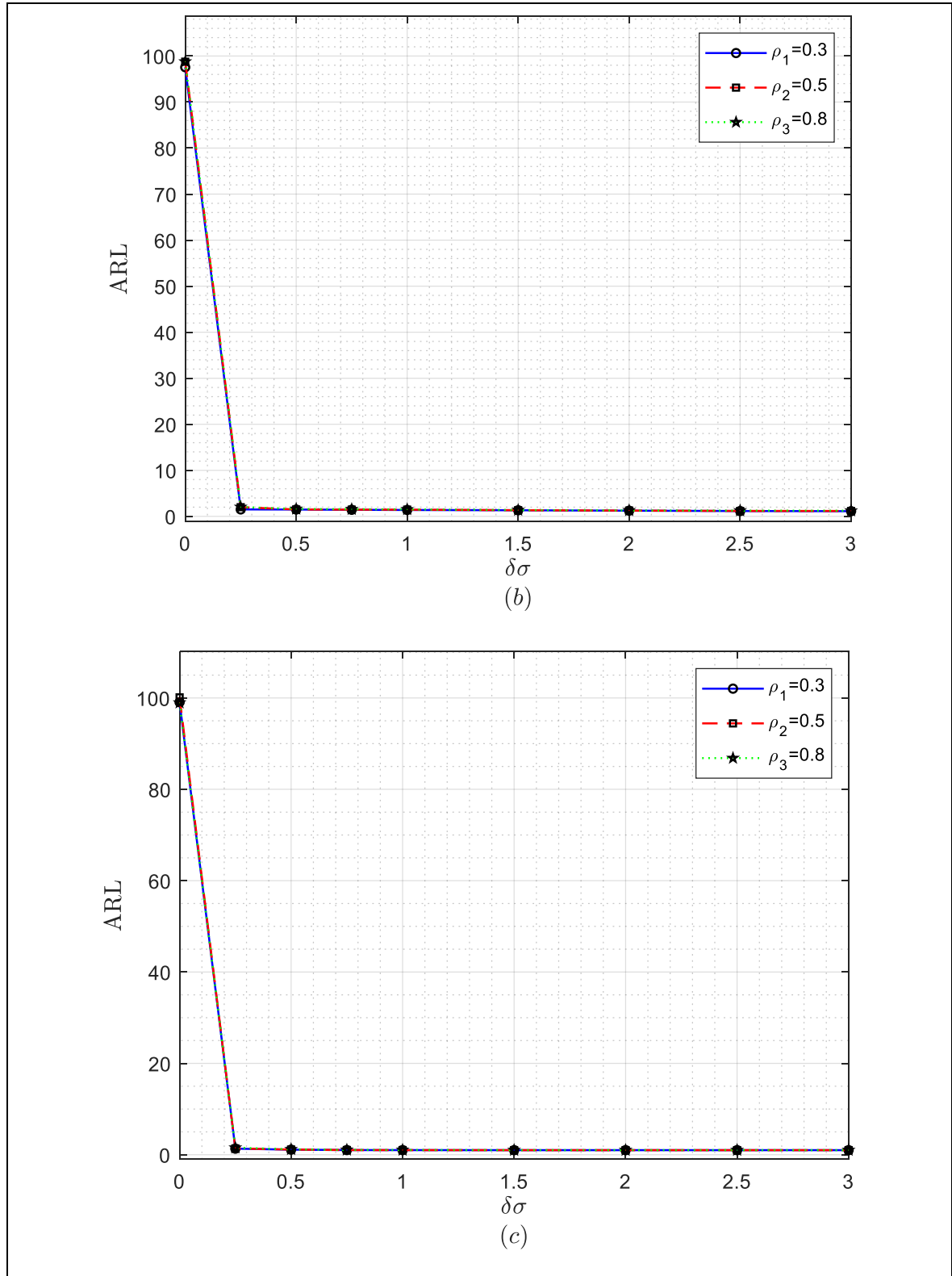
grafiğinin farklılaşmanın süreç dağılımının hem şekil hem de ölçek parametrelerinde gerçekleştiği Gamma_3 senaryosunda diğer senaryolara göre daha iyi çalıştığı belirtilmelidir.

Çizelge 4.13. Çok değişkenli gamma dağılımına uyan süreçlerde PoC kontrol grafiği ile elde edilen ARL değerleri

δ	Gamma_1 ($\theta_1 + \delta; \theta_2$)			Gamma_2 ($\theta_1; \theta_2 + \delta$)			Gamma_3($\theta_1 + \delta; \theta_2 + \delta$)		
	$\rho_1=0,3$	$\rho_2=0,5$	$\rho_3=0,8$	$\rho_1=0,3$	$\rho_2=0,5$	$\rho_3=0,8$	$\rho_1=0,3$	$\rho_2=0,5$	$\rho_3=0,8$
0,00	99,97	99,83	98,76	97,56	98,77	98,77	99,07	100,13	98,96
0,25	1,88	2,44	5,78	1,50	1,99	2,02	1,33	1,37	1,53
0,50	1,36	1,46	1,68	1,48	1,49	1,60	1,11	1,13	1,18
0,75	1,22	1,26	1,57	1,42	1,45	1,54	1,02	1,02	1,05
1,00	1,10	1,12	1,25	1,38	1,45	1,50	1,01	1,01	1,03
1,50	1,03	1,05	1,11	1,32	1,33	1,35	1,00	1,00	1,00
2,00	1,01	1,03	1,10	1,23	1,25	1,28	1,00	1,00	1,00
2,50	1,00	1,01	1,02	1,15	1,17	1,24	1,00	1,00	1,00
3,00	1,00	1,00	1,01	1,12	1,16	1,22	1,00	1,00	1,00

Şekil 4.6’da Çizelge 4.13’teki sonuçların grafiksel gösterimi yer almaktadır.





Şekil 4.6. Çok değişkenli gamma dağılımına uyan süreçlerde PoC kontrol grafiği ile elde edilen ARL değerlerinin kayma miktarına göre değişimi: (a) Gamma_1, (b) Gamma_2, (c) Gamma_3

Senaryo 5b (Veri üretme süreci: Çok değişkenli gamma dağılım, Yöntem: DVM, Kaynak Belirleme)

Çizelge 4.14'te süreç dağılımının sadece ölçek parametresinde farklılaşma yaratılan Gamma_1 senaryosuna göre uygulanan PoC kontrol grafiğinin süreç izleme istatistiklerinin ortalama değerleri yer almaktadır. $ARL_0 = 100$ olmak üzere hesaplanan PoC ortalama değeri yaklaşık 0,200 olarak hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlara göre PoC kontrol grafiğinin süreçte meydana gelen en küçük kayma miktarı $\delta = 0,5$ 'ten itibaren farklılaşmanın kaynağı olabilecek değişken/değişkenleri tespit edilebildiği söylenebilir. Örneğin $\delta = 0,5$ ve $\rho_3 = 0,8$ olduğunda (0,0,1) kombinasyonuna karşılık gelen sütundaki en büyük değerin (0,218) bulunduğu satırda da (0,0,1) kombinasyonuna denk geldiği, dolayısıyla süreçteki kaymaya sadece x_3 değişkeninin sebep olduğu sonucuna varılır. Bir başka örnekle sunmak gerekirse, $\delta = 2,0$ ve $\rho_2 = 0,5$ olması halinde (1,0,0) durumunun bulunduğu sütundaki en büyük değerin 0,522 olduğu ve bu değerin bulunduğu satırda da (1,0,0) kombinasyonuna karşılık geldiği anlaşılmaktadır. (1,0,0) kombinasyona göre değişimin sadece x_1 değişkeninden kaynaklanmaktadır.

Çizelge 4.14. Gamma_1’de DVM yaklaşımı ile hesaplanan PoC değerlerinin farklı değişim kombinasyonlarından elde edilen ortalamaları

		Gamma_1 ($\theta_1 + \delta; \theta_2$)							Gamma_2 ($\theta_1; \theta_2 + \delta$)							Gamma_3($\theta_1 + \delta; \theta_2 + \delta$)						
		$\rho_1 = 0,3$							$\rho_2 = 0,5$							$\rho_3 = 0,8$						
		(1,1,1)	(1,1,0)	(1,0,1)	(1,0,0)	(0,1,1)	(0,1,0)	(0,0,1)	(1,1,1)	(1,1,0)	(1,0,1)	(1,0,0)	(0,1,1)	(0,1,0)	(0,0,1)	(1,1,1)	(1,1,0)	(1,0,1)	(1,0,0)	(0,1,1)	(0,1,0)	(0,0,1)
$\delta \sigma$	0	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200
0,5	(1,1,1)	0,246	0,220	0,226	0,207	0,222	0,207	0,206	0,236	0,220	0,221	0,207	0,218	0,205	0,205	0,236	0,220	0,221	0,207	0,218	0,205	0,205
	(1,1,0)	0,227	0,230	0,211	0,208	0,210	0,208	0,201	0,221	0,233	0,208	0,207	0,205	0,208	0,201	0,221	0,233	0,208	0,207	0,205	0,208	0,201
	(1,0,1)	0,227	0,211	0,231	0,209	0,210	0,201	0,208	0,224	0,208	0,231	0,208	0,208	0,201	0,207	0,224	0,208	0,231	0,208	0,208	0,201	0,207
	(1,0,0)	0,214	0,214	0,212	0,212	0,204	0,201	0,201	0,211	0,212	0,212	0,218	0,202	0,201	0,200	0,211	0,212	0,212	0,218	0,202	0,201	0,200
	(0,1,1)	0,226	0,211	0,210	0,201	0,230	0,208	0,208	0,219	0,207	0,208	0,201	0,235	0,207	0,208	0,219	0,207	0,208	0,201	0,235	0,207	0,208
	(0,1,0)	0,213	0,212	0,203	0,201	0,212	0,212	0,201	0,208	0,213	0,202	0,200	0,211	0,219	0,200	0,208	0,213	0,202	0,200	0,211	0,219	0,200
	(0,0,1)	0,214	0,203	0,212	0,201	0,212	0,202	0,212	0,209	0,202	0,213	0,200	0,213	0,201	0,218	0,209	0,202	0,213	0,200	0,213	0,201	0,218
1,0	(1,1,1)	0,377	0,287	0,291	0,224	0,290	0,223	0,225	0,332	0,275	0,272	0,225	0,274	0,224	0,222	0,332	0,275	0,272	0,225	0,274	0,224	0,222
	(1,1,0)	0,301	0,325	0,242	0,230	0,242	0,230	0,206	0,279	0,340	0,234	0,232	0,234	0,230	0,207	0,279	0,340	0,234	0,232	0,234	0,230	0,207
	(1,0,1)	0,296	0,242	0,324	0,229	0,243	0,208	0,229	0,280	0,236	0,340	0,230	0,237	0,207	0,231	0,280	0,236	0,340	0,230	0,237	0,207	0,231
	(1,0,0)	0,236	0,237	0,236	0,260	0,212	0,203	0,202	0,226	0,234	0,236	0,292	0,208	0,202	0,202	0,226	0,234	0,236	0,292	0,208	0,202	0,202
	(0,1,1)	0,302	0,242	0,243	0,207	0,330	0,230	0,227	0,271	0,228	0,228	0,205	0,341	0,231	0,229	0,271	0,228	0,228	0,205	0,341	0,231	0,229
	(0,1,0)	0,234	0,234	0,213	0,203	0,235	0,259	0,203	0,224	0,233	0,210	0,203	0,234	0,286	0,203	0,224	0,233	0,210	0,203	0,234	0,286	0,203
	(0,0,1)	0,235	0,213	0,233	0,202	0,237	0,203	0,258	0,224	0,211	0,232	0,202	0,232	0,202	0,289	0,224	0,211	0,232	0,202	0,232	0,202	0,289
1,5	(1,1,1)	0,550	0,390	0,392	0,249	0,384	0,250	0,249	0,462	0,353	0,360	0,256	0,355	0,250	0,252	0,462	0,353	0,360	0,256	0,355	0,250	0,252
	(1,1,0)	0,411	0,489	0,303	0,265	0,304	0,265	0,222	0,357	0,508	0,288	0,263	0,288	0,262	0,222	0,357	0,508	0,288	0,263	0,288	0,262	0,222
	(1,0,1)	0,418	0,315	0,477	0,264	0,308	0,222	0,262	0,363	0,295	0,490	0,268	0,303	0,228	0,266	0,363	0,295	0,490	0,268	0,303	0,228	0,266
	(1,0,0)	0,268	0,275	0,273	0,339	0,235	0,208	0,207	0,259	0,277	0,279	0,400	0,240	0,210	0,210	0,259	0,277	0,279	0,400	0,240	0,210	0,210
	(0,1,1)	0,411	0,309	0,310	0,223	0,480	0,265	0,265	0,353	0,300	0,299	0,224	0,486	0,267	0,270	0,353	0,300	0,299	0,224	0,486	0,267	0,270
	(0,1,0)	0,268	0,270	0,238	0,208	0,269	0,342	0,209	0,261	0,275	0,234	0,209	0,276	0,409	0,208	0,261	0,275	0,234	0,209	0,276	0,409	0,208
	(0,0,1)	0,279	0,240	0,276	0,210	0,277	0,210	0,348	0,253	0,232	0,267	0,209	0,273	0,207	0,401	0,253	0,232	0,267	0,209	0,273	0,207	0,401
2,0	(1,1,1)	0,695	0,470	0,477	0,271	0,484	0,283	0,277	0,602	0,447	0,455	0,280	0,451	0,277	0,286	0,602	0,447	0,455	0,280	0,451	0,277	0,286
	(1,1,0)	0,535	0,642	0,394	0,302	0,396	0,298	0,244	0,491	0,632	0,412	0,316	0,422	0,315	0,276	0,491	0,632	0,412	0,316	0,422	0,315	0,276
	(1,0,1)	0,544	0,410	0,632	0,302	0,404	0,251	0,306	0,476	0,397	0,655	0,309	0,397	0,258	0,313	0,476	0,397	0,655	0,309	0,397	0,258	0,313
	(1,0,0)	0,338	0,338	0,344	0,448	0,288	0,222	0,221	0,330	0,344	0,341	0,522	0,294	0,230	0,227	0,330	0,344	0,341	0,522	0,294	0,230	0,227
	(0,1,1)	0,551	0,407	0,412	0,246	0,629	0,297	0,308	0,477	0,397	0,394	0,267	0,641	0,310	0,328	0,477	0,397	0,394	0,267	0,641	0,310	0,328
	(0,1,0)	0,324	0,333	0,278	0,218	0,324	0,445	0,219	0,338	0,345	0,295	0,232	0,341	0,525	0,229	0,338	0,345	0,295	0,232	0,341	0,525	0,229
	(0,0,1)	0,328	0,279	0,325	0,221	0,327	0,221	0,425	0,321	0,289	0,328	0,227	0,329	0,230	0,513	0,321	0,289	0,328	0,227	0,329	0,230	0,513

Çizelge 4.14. (Devam) Gamma_1’de DVM yaklaşımı ile hesaplanan PoC değerlerinin farklı değişim kombinasyonlarından elde edilen ortalamaları

2,5	(1,1,1)	0,793	0,565	0,561	0,305	0,548	0,306	0,307	0,705	0,548	0,544	0,339	0,542	0,341	0,337	0,705	0,548	0,544	0,339	0,542	0,341	0,337
	(1,1,0)	0,658	0,735	0,516	0,348	0,516	0,345	0,298	0,588	0,764	0,532	0,376	0,516	0,362	0,324	0,588	0,764	0,532	0,376	0,516	0,362	0,324
	(1,0,1)	0,654	0,502	0,744	0,348	0,506	0,288	0,338	0,574	0,511	0,768	0,360	0,512	0,334	0,358	0,574	0,511	0,768	0,360	0,512	0,334	0,358
	(1,0,0)	0,420	0,395	0,406	0,548	0,357	0,239	0,244	0,431	0,440	0,435	0,624	0,394	0,273	0,274	0,431	0,440	0,435	0,624	0,394	0,273	0,274
	(0,1,1)	0,659	0,507	0,521	0,290	0,746	0,355	0,338	0,584	0,531	0,527	0,338	0,746	0,370	0,366	0,584	0,531	0,527	0,338	0,746	0,370	0,366
	(0,1,0)	0,430	0,409	0,365	0,242	0,423	0,553	0,245	0,437	0,436	0,404	0,275	0,436	0,635	0,269	0,437	0,436	0,404	0,275	0,436	0,635	0,269
	(0,0,1)	0,424	0,356	0,407	0,244	0,410	0,243	0,543	0,440	0,397	0,452	0,272	0,452	0,268	0,627	0,440	0,397	0,452	0,272	0,452	0,268	0,627
3,0	(1,1,1)	0,863	0,630	0,642	0,337	0,624	0,323	0,338	0,789	0,599	0,602	0,373	0,594	0,372	0,372	0,789	0,599	0,602	0,373	0,594	0,372	0,372
	(1,1,0)	0,748	0,810	0,622	0,400	0,617	0,395	0,355	0,678	0,820	0,626	0,426	0,620	0,439	0,438	0,678	0,820	0,626	0,426	0,620	0,439	0,438
	(1,0,1)	0,752	0,620	0,809	0,402	0,633	0,369	0,393	0,684	0,625	0,836	0,439	0,620	0,422	0,437	0,684	0,625	0,836	0,439	0,620	0,422	0,437
	(1,0,0)	0,514	0,500	0,494	0,632	0,454	0,289	0,281	0,540	0,539	0,529	0,711	0,511	0,345	0,359	0,540	0,539	0,529	0,711	0,511	0,345	0,359
	(0,1,1)	0,750	0,617	0,625	0,361	0,810	0,394	0,385	0,684	0,647	0,648	0,436	0,816	0,450	0,454	0,684	0,647	0,648	0,436	0,816	0,450	0,454
	(0,1,0)	0,516	0,495	0,455	0,281	0,502	0,629	0,281	0,542	0,545	0,519	0,349	0,550	0,715	0,348	0,542	0,545	0,519	0,349	0,550	0,715	0,348
	(0,0,1)	0,513	0,446	0,482	0,287	0,488	0,276	0,629	0,538	0,507	0,540	0,356	0,536	0,353	0,710	0,538	0,507	0,540	0,356	0,536	0,353	0,710

Çizelge 4.15'te Gamma_2 senaryosuna göre hesaplanan PoC istatistiklerinin ortalamaları gösterilmektedir. Elde edilen bulgulara bakıldığında çok değişkenli gamma dağılım koşulları altında elde edilen veri üretme sürecinde DVM yaklaşımının $0,5\sigma$ ve ötesindeki kayma miktarlarından itibaren süreç dağılımının şekil parametresindeki değişime sebep olan değişken/değişkenleri belirleyebildiği anlaşılmaktadır. Örneğin, $\delta = 1,5$ ve $\rho_2 = 0,5$ olması halinde (0,1,0) durumunun bulunduğu sütundaki en büyük değerin 0,221 olduğu ve bu değerin bulunduğu satırda da (0,1,0) durumuna karşılık geldiği görülmektedir. (0,1,0) kombinasyonuna göre süreç dağılımının şekil parametresindeki kaymaya sebep olan değişkenin x_2 değişkenidir. Değişkenler arasında düşük korelasyon yapısı ($\rho_1 = 0,3$) söz konusu olduğunda süreçte $\delta = 2,5$ birimlik bir kayma söz konusu iken (1,1,1) sütunundaki en büyük değerin (0,359) karşılık geldiği satırdaki kombinasyonda (1,1,1)'dir. Dolayısıyla, bu koşullar altında her üç değişken de süreçteki kontrol dışı sinyale sebep olmuştur.

Çizelge 4.15. Gamma_2’de DVM yaklaşımı ile hesaplanan PoC değerlerinin farklı değişim kombinasyonlarından elde edilen ortalamaları

		Gamma_1 ($\theta_1 + \delta; \theta_2$)							Gamma_2 ($\theta_1; \theta_2 + \delta$)							Gamma_3($\theta_1 + \delta; \theta_2 + \delta$)						
		$\rho_1 = 0,3$							$\rho_2 = 0,5$							$\rho_3 = 0,8$						
		(1,1,1)	(1,1,0)	(1,0,1)	(1,0,0)	(0,1,1)	(0,1,0)	(0,0,1)	(1,1,1)	(1,1,0)	(1,0,1)	(1,0,0)	(0,1,1)	(0,1,0)	(0,0,1)	(1,1,1)	(1,1,0)	(1,0,1)	(1,0,0)	(0,1,1)	(0,1,0)	(0,0,1)
$\delta \sigma$	0	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200
0,5	(1,1,1)	0,216	0,206	0,206	0,203	0,205	0,202	0,203	0,211	0,205	0,206	0,202	0,204	0,203	0,202	0,208	0,207	0,206	0,203	0,207	0,202	0,202
	(1,1,0)	0,209	0,208	0,205	0,202	0,206	0,202	0,201	0,209	0,207	0,204	0,202	0,204	0,202	0,201	0,206	0,208	0,204	0,204	0,204	0,203	0,201
	(1,0,1)	0,212	0,205	0,209	0,203	0,206	0,201	0,203	0,209	0,206	0,208	0,202	0,205	0,201	0,202	0,207	0,204	0,210	0,204	0,206	0,201	0,203
	(1,0,0)	0,206	0,205	0,205	0,205	0,204	0,201	0,201	0,207	0,204	0,204	0,204	0,202	0,201	0,201	0,205	0,205	0,205	0,205	0,202	0,201	0,200
	(0,1,1)	0,212	0,206	0,206	0,201	0,208	0,202	0,202	0,208	0,203	0,204	0,201	0,206	0,202	0,202	0,207	0,203	0,203	0,201	0,208	0,203	0,203
	(0,1,0)	0,208	0,204	0,203	0,201	0,205	0,203	0,201	0,206	0,204	0,202	0,201	0,205	0,204	0,201	0,205	0,206	0,201	0,201	0,205	0,204	0,200
	(0,0,1)	0,207	0,202	0,204	0,201	0,205	0,201	0,204	0,206	0,203	0,204	0,201	0,204	0,201	0,203	0,204	0,201	0,206	0,201	0,205	0,201	0,205
1,0	(1,1,1)	0,250	0,223	0,224	0,209	0,226	0,210	0,210	0,239	0,223	0,223	0,209	0,221	0,209	0,210	0,230	0,217	0,218	0,209	0,222	0,209	0,210
	(1,1,0)	0,230	0,227	0,220	0,209	0,217	0,210	0,206	0,228	0,226	0,218	0,208	0,219	0,209	0,204	0,225	0,231	0,218	0,216	0,215	0,213	0,204
	(1,0,1)	0,233	0,218	0,229	0,209	0,220	0,205	0,209	0,230	0,214	0,225	0,210	0,216	0,204	0,208	0,225	0,214	0,229	0,215	0,215	0,204	0,213
	(1,0,0)	0,220	0,212	0,212	0,212	0,208	0,204	0,202	0,217	0,213	0,213	0,211	0,206	0,203	0,202	0,216	0,215	0,215	0,217	0,205	0,202	0,203
	(0,1,1)	0,235	0,220	0,219	0,206	0,227	0,209	0,208	0,226	0,214	0,215	0,203	0,227	0,209	0,210	0,225	0,217	0,219	0,205	0,233	0,215	0,217
	(0,1,0)	0,220	0,215	0,209	0,203	0,215	0,212	0,203	0,218	0,213	0,207	0,203	0,215	0,210	0,203	0,216	0,221	0,207	0,203	0,219	0,227	0,203
	(0,0,1)	0,219	0,207	0,214	0,203	0,214	0,203	0,212	0,217	0,209	0,215	0,202	0,215	0,203	0,211	0,216	0,206	0,219	0,202	0,221	0,203	0,226
1,5	(1,1,1)	0,294	0,252	0,253	0,221	0,242	0,220	0,221	0,265	0,243	0,245	0,218	0,241	0,217	0,218	0,251	0,238	0,242	0,219	0,240	0,219	0,222
	(1,1,0)	0,262	0,261	0,239	0,219	0,235	0,220	0,211	0,253	0,245	0,233	0,219	0,233	0,220	0,210	0,249	0,261	0,238	0,233	0,236	0,229	0,214
	(1,0,1)	0,269	0,241	0,260	0,220	0,241	0,213	0,220	0,250	0,233	0,247	0,219	0,231	0,208	0,220	0,246	0,232	0,259	0,227	0,231	0,210	0,231
	(1,0,0)	0,229	0,225	0,223	0,224	0,217	0,207	0,205	0,228	0,224	0,220	0,220	0,212	0,205	0,205	0,230	0,238	0,235	0,256	0,215	0,207	0,206
	(0,1,1)	0,259	0,237	0,235	0,211	0,261	0,217	0,219	0,256	0,234	0,234	0,212	0,246	0,220	0,219	0,248	0,235	0,233	0,213	0,265	0,234	0,231
	(0,1,0)	0,236	0,229	0,217	0,206	0,228	0,221	0,207	0,228	0,224	0,213	0,205	0,223	0,221	0,206	0,229	0,237	0,215	0,207	0,233	0,249	0,207
	(0,0,1)	0,240	0,220	0,232	0,208	0,233	0,207	0,224	0,230	0,214	0,227	0,205	0,225	0,206	0,221	0,233	0,214	0,235	0,206	0,236	0,206	0,255
2,0	(1,1,1)	0,328	0,276	0,275	0,235	0,279	0,232	0,225	0,307	0,263	0,267	0,234	0,261	0,232	0,232	0,282	0,269	0,268	0,241	0,268	0,240	0,236
	(1,1,0)	0,295	0,289	0,263	0,227	0,263	0,235	0,220	0,279	0,274	0,250	0,232	0,252	0,230	0,218	0,265	0,286	0,253	0,246	0,255	0,252	0,225
	(1,0,1)	0,298	0,264	0,284	0,231	0,261	0,223	0,233	0,285	0,255	0,268	0,233	0,255	0,218	0,229	0,279	0,257	0,297	0,251	0,259	0,225	0,256
	(1,0,0)	0,253	0,240	0,237	0,236	0,224	0,209	0,211	0,242	0,237	0,238	0,235	0,221	0,208	0,208	0,247	0,259	0,258	0,290	0,226	0,212	0,211
	(0,1,1)	0,301	0,264	0,268	0,221	0,290	0,233	0,235	0,278	0,250	0,249	0,218	0,272	0,229	0,231	0,274	0,258	0,258	0,226	0,291	0,251	0,254
	(0,1,0)	0,256	0,242	0,230	0,212	0,242	0,236	0,211	0,247	0,235	0,223	0,209	0,235	0,234	0,208	0,246	0,260	0,230	0,213	0,257	0,288	0,216
	(0,0,1)	0,250	0,228	0,241	0,209	0,237	0,209	0,238	0,247	0,225	0,240	0,209	0,239	0,209	0,234	0,248	0,226	0,256	0,212	0,251	0,213	0,283

Çizelge 4.15. (Devam) Gamma_2’de DVM yaklaşımı ile hesaplanan PoC değerlerinin farklı değişim kombinasyonlarından elde edilen ortalamaları

2,5	(1,1,1)	0,359	0,308	0,297	0,246	0,298	0,245	0,246	0,326	0,289	0,283	0,241	0,285	0,240	0,240	0,306	0,286	0,288	0,254	0,276	0,251	0,252
	(1,1,0)	0,337	0,314	0,299	0,247	0,290	0,236	0,234	0,320	0,299	0,285	0,249	0,280	0,240	0,227	0,299	0,325	0,279	0,273	0,285	0,281	0,238
	(1,0,1)	0,328	0,288	0,309	0,241	0,280	0,229	0,243	0,296	0,268	0,288	0,241	0,268	0,223	0,241	0,294	0,288	0,348	0,286	0,290	0,244	0,287
	(1,0,0)	0,271	0,254	0,257	0,249	0,239	0,215	0,216	0,264	0,254	0,249	0,250	0,235	0,214	0,214	0,274	0,281	0,285	0,317	0,252	0,228	0,227
	(0,1,1)	0,330	0,288	0,288	0,232	0,313	0,245	0,242	0,311	0,273	0,274	0,228	0,292	0,242	0,242	0,302	0,288	0,288	0,243	0,332	0,275	0,280
	(0,1,0)	0,261	0,251	0,234	0,214	0,248	0,248	0,213	0,252	0,244	0,228	0,211	0,244	0,247	0,212	0,266	0,277	0,240	0,224	0,276	0,315	0,222
	(0,0,1)	0,271	0,240	0,253	0,218	0,254	0,217	0,252	0,253	0,229	0,247	0,212	0,241	0,212	0,242	0,278	0,255	0,292	0,225	0,288	0,228	0,320
3,0	(1,1,1)	0,405	0,329	0,332	0,251	0,329	0,251	0,257	0,349	0,314	0,297	0,255	0,314	0,255	0,258	0,317	0,294	0,290	0,262	0,296	0,255	0,256
	(1,1,0)	0,369	0,342	0,312	0,263	0,316	0,263	0,241	0,334	0,318	0,293	0,258	0,295	0,258	0,237	0,311	0,347	0,300	0,288	0,294	0,289	0,254
	(1,0,1)	0,369	0,320	0,348	0,262	0,324	0,244	0,263	0,307	0,279	0,315	0,246	0,275	0,231	0,246	0,308	0,301	0,356	0,297	0,308	0,258	0,297
	(1,0,0)	0,281	0,268	0,260	0,265	0,248	0,220	0,220	0,272	0,265	0,264	0,260	0,243	0,217	0,219	0,268	0,281	0,281	0,321	0,251	0,226	0,227
	(0,1,1)	0,363	0,316	0,313	0,243	0,350	0,259	0,263	0,338	0,297	0,299	0,240	0,323	0,263	0,262	0,311	0,292	0,292	0,251	0,340	0,282	0,289
	(0,1,0)	0,287	0,268	0,251	0,221	0,266	0,265	0,222	0,279	0,266	0,243	0,218	0,265	0,265	0,220	0,291	0,302	0,269	0,241	0,307	0,345	0,238
	(0,0,1)	0,297	0,255	0,273	0,222	0,272	0,222	0,266	0,274	0,248	0,264	0,220	0,266	0,218	0,263	0,298	0,273	0,301	0,237	0,310	0,239	0,346

Çizelge 4.16’da Gamma_3 senaryosunda belirlenen koşullar altında süreç dağılımının hem ölçek hem de şekil parametrelerinde meydana gelen kaymalara sebep olan değişken/değişkenleri belirlemek amacıyla elde edilen PoC istatistiklerinin ortalamaları yer almaktadır. Çizelgeye göre, DVM yaklaşımının süreçte meydana gelen küçük kaymalardan itibaren tüm kayma büyüklüklerinde değişime sebep olan değişken/değişkenlere ilişkin doğru tespitlerde bulunduğu anlaşılmaktadır. Elde edilen sonuçlara bakıldığında $\delta = 1,0$ ve $\rho_2 = 0,5$ olduğu durumda (1,0,1) kombinasyonuna ilişkin sütundaki en yüksek değerin 0,669 olduğu ve bu değerin karşılık geldiği satırda da (1,0,1) kombinasyonuna denk geldiği ve dolayısıyla süreçteki kaymaya birinci (x_1) ve üçüncü (x_3) değişkenlerin sebep olduğu söylenebilir. Bir başka örnek vermek gerekirse, $\delta = 2,0$ ve $\rho_3 = 0,8$ olması durumunda, (0,0,1) değişim kombinasyonu için hesaplanan en büyük PoC ortalamasının 0,968 olduğu görülmektedir. Bu değerin karşılık geldiği satırda da (0,0,1) değişim kombinasyonuna denk geldiği ve dolayısıyla süreçteki kaymada sadece x_3 değişkeninin sebep olduğu belirtilebilir.

Çizelge 4.16. Gamma_3'te DVM yaklaşımı ile hesaplanan PoC değerlerinin farklı değişim kombinasyonlarından elde edilen ortalamaları

δ		Gamma_1 ($\theta_1 + \delta; \theta_2$)							Gamma_2 ($\theta_1; \theta_2 + \delta$)							Gamma_3($\theta_1 + \delta; \theta_2 + \delta$)						
		$\rho_1 = 0,3$							$\rho_2 = 0,5$							$\rho_3 = 0,8$						
		(1,1,1)	(1,1,0)	(1,0,1)	(1,0,0)	(0,1,1)	(0,1,0)	(0,0,1)	(1,1,1)	(1,1,0)	(1,0,1)	(1,0,0)	(0,1,1)	(0,1,0)	(0,0,1)	(1,1,1)	(1,1,0)	(1,0,1)	(1,0,0)	(0,1,1)	(0,1,0)	(0,0,1)
0	0	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200
0,5	(1,1,1)	0,394	0,326	0,323	0,246	0,324	0,247	0,243	0,337	0,301	0,297	0,241	0,297	0,239	0,239	0,298	0,293	0,295	0,252	0,297	0,253	0,257
	(1,1,0)	0,328	0,328	0,273	0,242	0,275	0,246	0,220	0,302	0,322	0,263	0,246	0,262	0,247	0,220	0,288	0,442	0,287	0,293	0,289	0,292	0,246
	(1,0,1)	0,328	0,276	0,325	0,243	0,275	0,222	0,246	0,304	0,263	0,325	0,244	0,262	0,218	0,246	0,291	0,289	0,445	0,288	0,295	0,247	0,291
	(1,0,0)	0,253	0,250	0,252	0,261	0,226	0,208	0,209	0,245	0,248	0,251	0,286	0,223	0,207	0,208	0,251	0,289	0,292	0,449	0,247	0,224	0,223
	(0,1,1)	0,335	0,279	0,275	0,222	0,327	0,246	0,243	0,308	0,264	0,263	0,219	0,329	0,245	0,248	0,290	0,290	0,290	0,251	0,453	0,301	0,301
	(0,1,0)	0,256	0,247	0,226	0,208	0,249	0,264	0,208	0,247	0,247	0,224	0,209	0,246	0,279	0,208	0,255	0,287	0,248	0,225	0,286	0,450	0,225
	(0,0,1)	0,252	0,226	0,250	0,208	0,249	0,209	0,260	0,246	0,223	0,249	0,207	0,247	0,207	0,287	0,254	0,250	0,294	0,224	0,298	0,227	0,455
1,0	(1,1,1)	0,769	0,664	0,661	0,449	0,662	0,441	0,444	0,676	0,620	0,619	0,454	0,615	0,452	0,454	0,626	0,614	0,614	0,550	0,617	0,549	0,555
	(1,1,0)	0,681	0,667	0,603	0,448	0,599	0,449	0,421	0,626	0,663	0,579	0,463	0,576	0,468	0,432	0,574	0,830	0,694	0,677	0,691	0,673	0,637
	(1,0,1)	0,696	0,616	0,687	0,455	0,607	0,415	0,450	0,621	0,573	0,669	0,471	0,579	0,433	0,469	0,620	0,688	0,827	0,670	0,690	0,634	0,667
	(1,0,0)	0,490	0,455	0,450	0,499	0,447	0,315	0,315	0,488	0,472	0,475	0,565	0,457	0,346	0,340	0,593	0,667	0,674	0,823	0,646	0,590	0,597
	(0,1,1)	0,684	0,605	0,606	0,419	0,672	0,447	0,448	0,632	0,580	0,586	0,438	0,680	0,471	0,465	0,625	0,692	0,698	0,635	0,832	0,680	0,681
	(0,1,0)	0,476	0,453	0,429	0,313	0,453	0,493	0,316	0,477	0,467	0,448	0,334	0,463	0,555	0,341	0,591	0,669	0,639	0,596	0,669	0,820	0,587
	(0,0,1)	0,468	0,426	0,441	0,309	0,441	0,308	0,493	0,486	0,454	0,471	0,343	0,478	0,340	0,572	0,578	0,628	0,655	0,586	0,655	0,578	0,809
1,5	(1,1,1)	0,933	0,865	0,860	0,654	0,867	0,658	0,657	0,887	0,848	0,848	0,703	0,846	0,690	0,702	0,833	0,843	0,841	0,811	0,844	0,814	0,813
	(1,1,0)	0,898	0,891	0,847	0,683	0,851	0,688	0,676	0,852	0,875	0,828	0,719	0,828	0,720	0,716	0,811	0,947	0,881	0,881	0,882	0,892	0,859
	(1,0,1)	0,884	0,847	0,876	0,683	0,841	0,674	0,678	0,856	0,833	0,882	0,725	0,834	0,716	0,720	0,830	0,877	0,946	0,884	0,878	0,858	0,881
	(1,0,0)	0,740	0,717	0,717	0,740	0,722	0,572	0,573	0,734	0,720	0,722	0,781	0,711	0,616	0,619	0,802	0,858	0,860	0,934	0,836	0,826	0,827
	(0,1,1)	0,896	0,852	0,852	0,679	0,891	0,690	0,683	0,857	0,836	0,836	0,720	0,887	0,728	0,728	0,830	0,878	0,879	0,853	0,946	0,893	0,883
	(0,1,0)	0,718	0,697	0,695	0,565	0,697	0,719	0,561	0,745	0,732	0,728	0,626	0,733	0,785	0,630	0,803	0,867	0,845	0,836	0,865	0,939	0,829
	(0,0,1)	0,724	0,703	0,712	0,570	0,704	0,567	0,727	0,730	0,709	0,713	0,613	0,717	0,613	0,774	0,800	0,835	0,862	0,828	0,856	0,831	0,931
2,0	(1,1,1)	0,984	0,948	0,951	0,799	0,951	0,802	0,810	0,964	0,941	0,942	0,853	0,937	0,851	0,848	0,925	0,938	0,936	0,921	0,934	0,921	0,922
	(1,1,0)	0,967	0,964	0,949	0,835	0,952	0,838	0,849	0,944	0,956	0,938	0,871	0,935	0,862	0,872	0,922	0,978	0,942	0,949	0,944	0,948	0,933
	(1,0,1)	0,960	0,945	0,958	0,836	0,947	0,850	0,835	0,950	0,940	0,965	0,880	0,940	0,880	0,879	0,924	0,948	0,979	0,953	0,947	0,935	0,955
	(1,0,0)	0,846	0,836	0,833	0,854	0,839	0,755	0,764	0,874	0,871	0,866	0,895	0,864	0,812	0,808	0,900	0,931	0,934	0,969	0,911	0,917	0,916
	(0,1,1)	0,970	0,951	0,951	0,850	0,964	0,833	0,832	0,948	0,939	0,940	0,876	0,960	0,873	0,873	0,928	0,951	0,954	0,943	0,984	0,959	0,961
	(0,1,0)	0,856	0,849	0,856	0,777	0,851	0,860	0,766	0,870	0,860	0,859	0,803	0,856	0,890	0,798	0,899	0,931	0,916	0,922	0,933	0,969	0,916
	(0,0,1)	0,859	0,852	0,850	0,768	0,849	0,770	0,856	0,881	0,868	0,871	0,811	0,873	0,809	0,902	0,891	0,905	0,925	0,910	0,925	0,908	0,968

Çizelge 4.16. (Devam) Gamma_3'te DVM yaklaşımı ile hesaplanan PoC değerlerinin farklı değişim kombinasyonlarından elde edilen ortalamaları

2,5	(1,1,1)	0,996	0,985	0,984	0,912	0,984	0,908	0,906	0,989	0,979	0,978	0,935	0,979	0,929	0,936	0,971	0,975	0,976	0,969	0,974	0,969	0,967
	(1,1,0)	0,990	0,988	0,984	0,920	0,982	0,924	0,925	0,983	0,984	0,975	0,946	0,975	0,942	0,947	0,968	0,991	0,974	0,978	0,976	0,980	0,972
	(1,0,1)	0,990	0,982	0,985	0,923	0,982	0,926	0,921	0,981	0,974	0,983	0,938	0,972	0,931	0,944	0,965	0,974	0,984	0,978	0,975	0,972	0,975
	(1,0,0)	0,933	0,924	0,922	0,932	0,925	0,879	0,879	0,933	0,930	0,925	0,949	0,931	0,890	0,891	0,946	0,964	0,964	0,986	0,951	0,959	0,953
	(0,1,1)	0,989	0,982	0,983	0,926	0,985	0,921	0,923	0,983	0,979	0,976	0,940	0,987	0,934	0,946	0,965	0,976	0,978	0,971	0,992	0,980	0,980
	(0,1,0)	0,929	0,927	0,930	0,882	0,924	0,936	0,885	0,935	0,934	0,930	0,898	0,928	0,945	0,896	0,945	0,966	0,947	0,952	0,964	0,984	0,956
	(0,0,1)	0,937	0,928	0,925	0,885	0,927	0,882	0,934	0,942	0,938	0,937	0,908	0,935	0,903	0,948	0,941	0,950	0,963	0,952	0,963	0,955	0,983
3,0	(1,1,1)	0,999	0,994	0,995	0,962	0,994	0,959	0,959	0,997	0,993	0,992	0,974	0,993	0,972	0,974	0,989	0,989	0,987	0,987	0,990	0,985	0,987
	(1,1,0)	0,998	0,995	0,993	0,965	0,993	0,963	0,954	0,992	0,995	0,990	0,976	0,990	0,973	0,975	0,987	0,994	0,989	0,990	0,989	0,989	0,988
	(1,0,1)	0,998	0,993	0,996	0,967	0,994	0,958	0,969	0,994	0,992	0,995	0,977	0,992	0,968	0,963	0,986	0,987	0,990	0,989	0,988	0,987	0,990
	(1,0,0)	0,964	0,960	0,958	0,974	0,962	0,934	0,935	0,976	0,971	0,968	0,979	0,971	0,952	0,951	0,966	0,980	0,979	0,991	0,968	0,973	0,975
	(0,1,1)	0,958	0,994	0,994	0,954	0,996	0,963	0,965	0,993	0,991	0,990	0,971	0,995	0,976	0,977	0,985	0,989	0,989	0,988	0,993	0,987	0,986
	(0,1,0)	0,963	0,962	0,961	0,934	0,961	0,974	0,934	0,973	0,967	0,965	0,943	0,965	0,979	0,945	0,966	0,977	0,967	0,971	0,984	0,991	0,976
	(0,0,1)	0,964	0,963	0,957	0,932	0,958	0,933	0,971	0,966	0,960	0,964	0,936	0,964	0,939	0,979	0,964	0,966	0,977	0,977	0,979	0,977	0,991

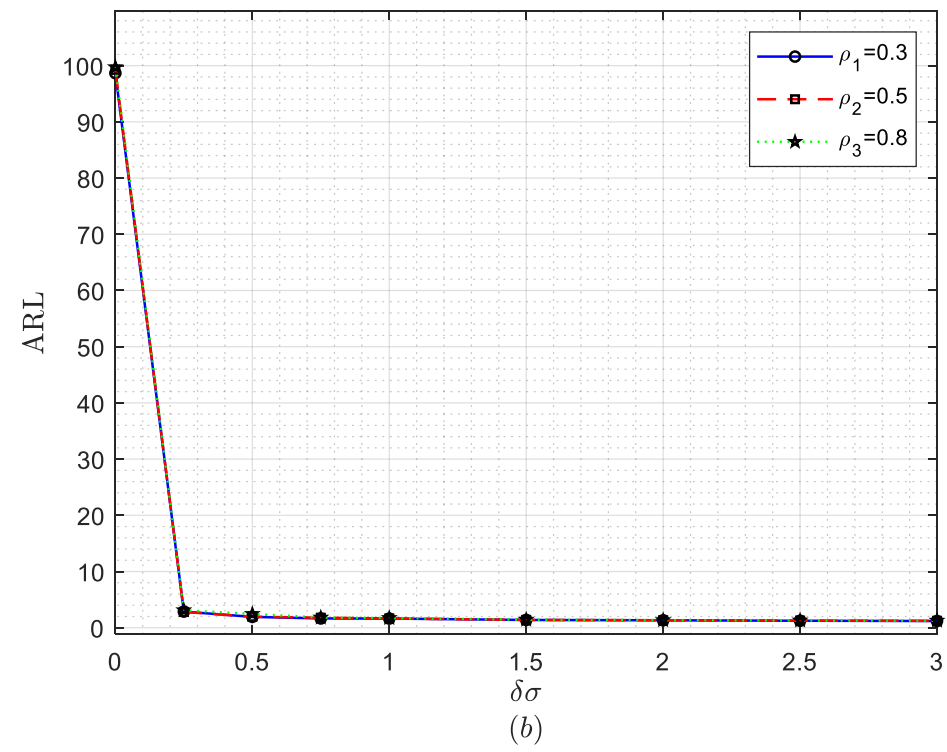
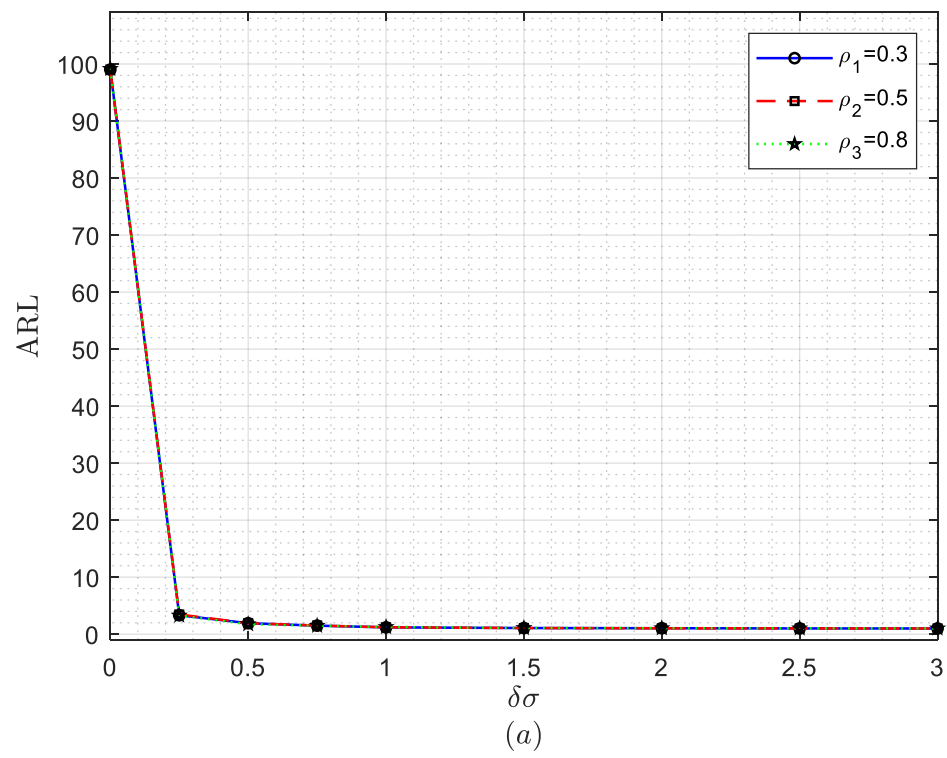
Senaryo 6a (Veri üretme süreci: Çok değişkenli gamma dağılım, Yöntem: Hibrit BBA-DVM, ARL)

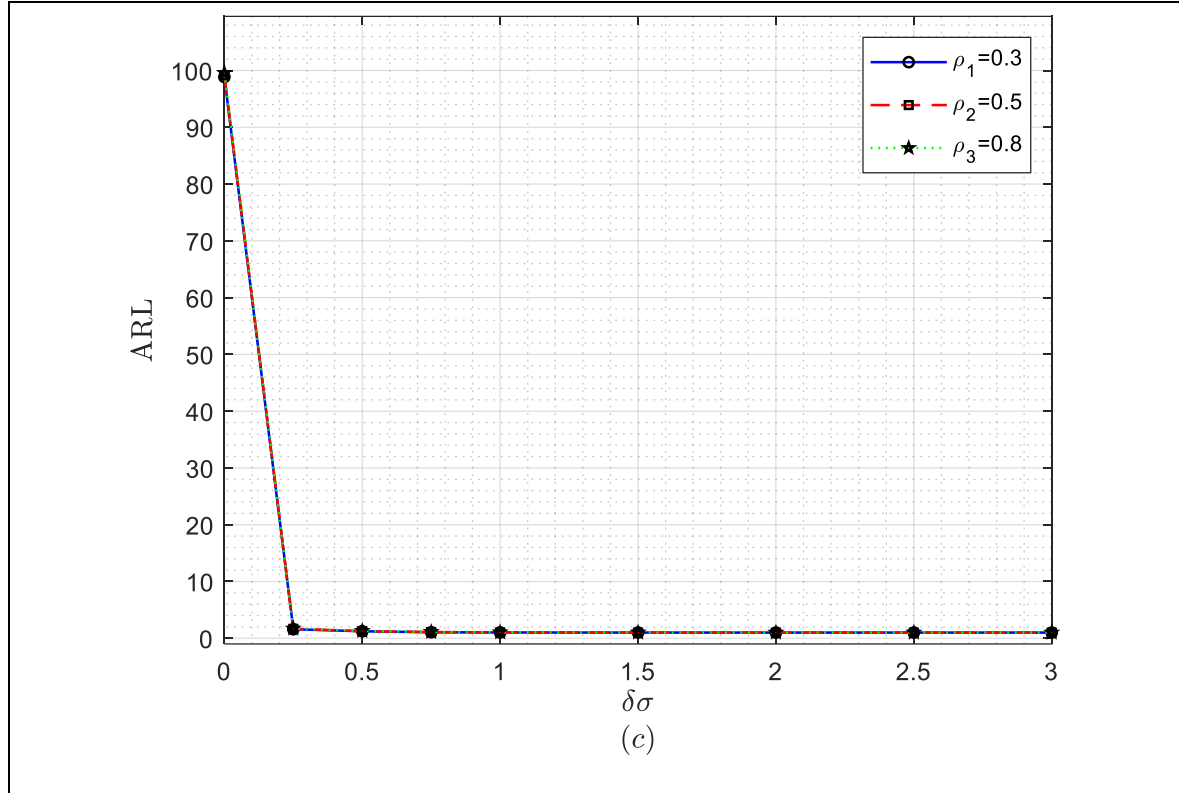
Çizelge 4.17’de çok değişkenli gamma dağılımına uyan süreçler için oluşturulan üç senaryo (Gamma_1, Gamma_2, Gamma_3) için hibrit BBA-DVM yaklaşımı ile elde edilen I^2 – PoC kontrol grafiklerine ilişkin ARL değerleri verilmiştir. Çizelgeye göre I^2 – PoC kontrol grafiğinin çok değişkenli gamma dağılımına uyan bir süreçte meydana gelen küçük kaymalardan itibaren iyi performans sergilediği görülmektedir. Hibrit BBA-DVM yaklaşımı en iyi performansını, kaymanın süreç dağılımının hem şekil hem de ölçek parametrelerinde gerçekleştiği Gamma_3 senaryosunda sergilemektedir.

Çizelge 4.17. Çok değişkenli gamma dağılımına uyan süreçlerde I^2 – PoC kontrol grafiği ile elde edilen ARL değerleri

δ	Gamma_1 ($\theta_1 + \delta; \theta_2$)			Gamma_2 ($\theta_1; \theta_2 + \delta$)			Gamma_3($\theta_1 + \delta; \theta_2 + \delta$)		
	$\rho_1 = 0,3$	$\rho_2 = 0,5$	$\rho_3 = 0,8$	$\rho_1 = 0,3$	$\rho_2 = 0,5$	$\rho_3 = 0,8$	$\rho_1 = 0,3$	$\rho_2 = 0,5$	$\rho_3 = 0,8$
0,00	99,02	99,02	99,14	98,67	99,25	99,73	98,86	99,15	99,58
0,25	3,27	3,32	3,46	2,81	2,87	3,11	1,59	1,66	1,71
0,50	1,75	1,93	1,94	1,93	1,95	2,45	1,23	1,26	1,29
0,75	1,48	1,50	1,52	1,65	1,78	1,81	1,06	1,09	1,11
1,00	1,20	1,21	1,26	1,63	1,65	1,73	1,02	1,03	1,05
1,50	1,08	1,08	1,09	1,38	1,39	1,43	1,00	1,00	1,01
2,00	1,03	1,04	1,05	1,32	1,33	1,35	1,00	1,00	1,00
2,50	1,01	1,01	1,02	1,24	1,27	1,29	1,00	1,00	1,00
3,00	1,00	1,00	1,01	1,19	1,23	1,26	1,00	1,00	1,00

Şekil 4.7’de Çizelge 4.17’deki sonuçların grafiksel gösterimi yer almaktadır.





Şekil 4.7. Çok değişkenli gamma dağılımına uyan süreçlerde I^2 – PoC kontrol grafiği ile elde edilen ARL değerlerinin kayma miktarına göre değişimi: (a)Gamma_1, (b)Gamma_2, (c)Gamma_3

Senaryo 6b (Veri üretme süreci: Çok değişkenli gamma dağılım, Yöntem: Hibrit BBA-DVM, Kaynak belirleme)

Çizelge 4.18’de süreç dağılımının sadece ölçek parametresinde farklılaşma yaratılan Gamma_1 senaryosuna göre uygulanan I^2 – PoC kontrol grafiğinin süreç izleme istatistiklerinin ortalama değerleri yer almaktadır. $ARL_0 = 100$ olmak üzere hesaplanan I^2 – PoC ortalama değeri yaklaşık 0,200 olarak hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlara göre I^2 – PoC kontrol grafiğinin süreçte meydana gelen en küçük kayma miktarı $\delta = 0,5$ ’ten itibaren farklılaşmanın kaynağı olabilecek değişken/değişkenleri belirleyebildiği söylenebilir. Çizelgeye bakıldığında $\delta = 1,5$ ve $\rho_1 = 0,3$ olduğunda (0,1,1) kombinasyonuna karşılık gelen sütundaki en büyük değerin (5,087) bulunduğu satırda da (0,1,1) kombinasyonuna denk geldiği, dolayısıyla süreçteki kaymaya x_2 ve x_3 değişkenlerinin sebep olduğu görülebilir. $\delta = 3,0$ ve $\rho_3 = 0,8$ olması halinde (1,1,0) durumunun bulunduğu sütundaki en büyük değerin 9,375 olduğu ve bu değerin bulunduğu

satırda da (1,1,0) kombinasyonuna karşılık geldiği gözlemlenmiştir. (1,1,0) kombinasyona göre kayma x_1 ve x_2 değişkenlerinden kaynaklanmaktadır.

Çizelge 4.18. Gamma_1’te Hibrit BBA-DVM yaklaşımı ile hesaplanan $I^2 - \text{PoC}$ değerlerinin farklı değişim kombinasyonlarından elde edilen ortalamaları

		Gamma_1 ($\theta_1+\delta;\theta_2$)							Gamma_2 ($\theta_1;\theta_2+\delta$)							Gamma_3($\theta_1+\delta;\theta_2+\delta$)						
		$\rho_1=0,3$							$\rho_2=0,5$							$\rho_3=0,8$						
δ		(1,1,1)	(1,1,0)	(1,0,1)	(1,0,0)	(0,1,1)	(0,1,0)	(0,0,1)	(1,1,1)	(1,1,0)	(1,0,1)	(1,0,0)	(0,1,1)	(0,1,0)	(0,0,1)	(1,1,1)	(1,1,0)	(1,0,1)	(1,0,0)	(0,1,1)	(0,1,0)	(0,0,1)
0	0	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000
0,5	(1,1,1)	2,468	2,241	2,228	2,057	2,211	2,052	2,066	2,321	2,159	2,180	2,048	2,173	2,047	2,049	2,277	2,158	2,185	2,060	2,173	2,062	2,067
	(1,1,0)	2,265	2,305	2,097	2,058	2,100	2,068	2,010	2,212	2,335	2,063	2,061	2,078	2,073	2,005	2,106	2,892	2,028	2,134	2,033	2,151	2,002
	(1,0,1)	2,320	2,108	2,323	2,084	2,105	2,008	2,092	2,216	2,065	2,329	2,073	2,063	2,003	2,074	2,098	2,032	2,900	2,153	2,040	2,001	2,170
	(1,0,0)	2,146	2,131	2,133	2,145	2,022	2,004	2,009	2,107	2,147	2,139	2,194	2,016	2,004	2,003	2,046	2,179	2,193	2,816	2,005	2,001	2,001
	(0,1,1)	2,264	2,095	2,105	2,011	2,346	2,070	2,077	2,207	2,071	2,071	2,005	2,360	2,078	2,069	2,123	2,041	2,036	2,003	2,851	2,187	2,132
	(0,1,0)	2,127	2,157	2,032	2,011	2,120	2,142	2,010	2,120	2,143	2,021	2,010	2,115	2,192	2,003	2,048	2,192	2,004	2,001	2,152	2,861	2,002
	(0,0,1)	2,148	2,032	2,151	2,009	2,116	2,008	2,127	2,117	2,012	2,137	2,003	2,134	2,004	2,193	2,044	2,003	2,182	2,000	2,155	2,002	2,856
1,0	(1,1,1)	3,889	2,914	2,918	2,219	2,914	2,232	2,220	3,396	2,707	2,674	2,219	2,711	2,201	2,195	2,971	2,736	2,729	2,321	2,752	2,342	2,363
	(1,1,0)	3,039	3,439	2,409	2,299	2,408	2,334	2,049	2,736	3,507	2,314	2,337	2,302	2,331	2,049	2,543	5,181	2,650	2,700	2,597	2,655	2,279
	(1,0,1)	3,090	2,399	3,442	2,322	2,404	2,045	2,305	2,719	2,309	3,599	2,334	2,288	2,037	2,323	2,538	2,601	5,240	2,579	2,593	2,260	2,701
	(1,0,0)	2,377	2,365	2,382	2,690	2,109	2,024	2,026	2,304	2,393	2,400	3,001	2,101	2,021	2,019	2,358	2,835	2,911	5,159	2,347	2,156	2,144
	(0,1,1)	2,997	2,394	2,392	2,046	3,399	2,351	2,278	2,685	2,272	2,297	2,044	3,624	2,301	2,350	2,598	2,658	2,615	2,281	5,195	2,713	2,645
	(0,1,0)	2,379	2,413	2,106	2,024	2,365	2,626	2,023	2,249	2,367	2,077	2,016	2,362	3,019	2,011	2,313	2,767	2,340	2,147	2,785	5,114	2,153
	(0,0,1)	2,361	2,099	2,401	2,025	2,403	2,020	2,695	2,262	2,077	2,348	2,015	2,385	2,018	3,038	2,323	2,319	2,853	2,132	2,802	2,164	5,142
1,5	(1,1,1)	5,584	3,766	3,737	2,475	3,810	2,408	2,412	4,734	3,511	3,461	2,419	3,446	2,425	2,386	3,929	3,813	3,841	3,065	3,790	3,067	3,087
	(1,1,0)	4,218	4,926	3,007	2,686	3,096	2,655	2,188	3,720	5,093	2,938	2,655	2,927	2,673	2,233	3,517	7,168	4,271	3,702	4,140	3,705	3,343
	(1,0,1)	4,222	2,983	4,897	2,655	3,041	2,158	2,613	3,655	2,967	5,132	2,638	3,007	2,200	2,727	3,466	4,067	7,252	3,829	4,182	3,407	3,665
	(1,0,0)	2,793	2,792	2,824	3,541	2,307	2,059	2,061	2,603	2,743	2,799	4,190	2,341	2,078	2,085	3,119	4,100	4,201	6,967	3,582	2,964	2,991
	(0,1,1)	4,273	2,980	2,961	2,136	5,087	2,690	2,614	3,501	2,904	2,910	2,189	5,309	2,682	2,714	3,522	4,137	4,117	3,364	7,073	3,731	3,781
	(0,1,0)	2,825	2,836	2,341	2,066	2,852	3,607	2,069	2,665	2,873	2,344	2,069	2,891	4,175	2,076	3,138	4,134	3,554	2,983	4,088	6,825	2,947
	(0,0,1)	2,831	2,361	2,806	2,074	2,810	2,084	3,489	2,672	2,390	2,849	2,083	2,808	2,092	4,152	3,221	3,574	4,265	3,059	4,164	3,001	6,909
2,0	(1,1,1)	7,009	4,636	4,681	2,734	4,704	2,718	2,673	6,105	4,451	4,495	2,780	4,327	2,805	2,810	5,343	4,989	4,831	3,974	4,810	3,946	3,979
	(1,1,0)	5,306	6,304	3,960	2,993	3,995	3,090	2,434	4,816	6,713	3,898	3,175	4,017	3,202	2,616	4,514	8,415	5,755	5,132	5,739	5,038	4,792
	(1,0,1)	5,473	4,015	6,461	3,115	3,937	2,364	3,051	4,760	3,965	6,657	3,130	3,928	2,630	3,056	4,557	5,863	8,249	5,273	5,948	4,898	5,235
	(1,0,0)	3,605	3,482	3,590	4,657	2,825	2,168	2,210	3,511	3,612	3,611	5,276	3,026	2,303	2,283	4,305	5,684	5,722	8,022	5,236	4,468	4,431
	(0,1,1)	5,586	3,918	3,805	2,345	6,434	3,023	3,029	4,882	4,001	4,006	2,642	6,585	3,110	3,175	4,481	5,944	5,815	4,940	8,298	5,127	5,292
	(0,1,0)	3,533	3,579	2,929	2,185	3,494	4,592	2,175	3,409	3,646	2,999	2,285	3,612	5,397	2,261	4,271	5,812	5,459	4,659	5,791	8,169	4,651
	(0,0,1)	3,523	2,896	3,456	2,208	3,532	2,212	4,503	3,493	3,023	3,663	2,268	3,625	2,281	5,477	4,185	5,279	5,789	4,490	5,796	4,775	8,172

Çizelge 4.18. (Devam) Gamma_1'te Hibrit BBA-DVM yaklaşımı ile hesaplanan I^2 – PoC değerlerinin farklı değişim kombinasyonlarından elde edilen ortalamaları

2,5	(1,1,1)	7,986	5,481	5,330	2,866	5,507	2,899	2,963	7,263	4,946	4,921	2,964	5,071	3,026	3,025	6,213	6,154	6,014	5,125	6,022	5,070	5,139
	(1,1,0)	6,691	7,542	5,079	3,381	4,994	3,432	2,750	5,835	7,732	5,034	3,740	5,133	3,600	3,194	5,398	9,108	7,076	6,589	7,145	6,532	6,215
	(1,0,1)	6,506	4,981	7,594	3,397	5,033	2,744	3,391	5,829	4,985	7,814	3,685	5,093	3,229	3,674	5,322	7,120	8,918	6,677	7,078	6,212	6,393
	(1,0,0)	4,550	4,283	4,344	5,507	3,718	2,468	2,453	4,641	4,717	4,719	6,534	3,921	2,770	2,673	5,444	6,954	6,997	8,739	6,761	6,138	6,076
	(0,1,1)	6,645	4,889	4,980	2,740	7,598	3,393	3,473	5,876	5,194	5,136	3,167	7,635	3,712	3,747	5,465	7,123	7,076	6,336	8,962	6,473	6,444
	(0,1,0)	4,532	4,409	3,738	2,387	4,329	5,700	2,434	4,677	4,665	4,117	2,698	4,575	6,546	2,688	5,417	7,059	6,840	6,269	7,021	8,760	6,173
	(0,0,1)	4,690	3,797	4,479	2,419	4,368	2,407	5,663	4,600	4,101	4,717	2,855	4,702	2,732	6,434	5,492	6,822	7,063	6,138	7,081	6,115	8,783
3,0	(1,1,1)	8,684	6,273	6,232	3,300	6,229	3,190	3,159	7,919	6,133	6,174	3,757	6,173	3,718	3,718	7,125	6,718	6,666	5,898	6,727	5,864	5,904
	(1,1,0)	7,408	8,166	6,088	3,912	6,115	4,002	3,397	6,630	8,379	6,017	4,311	6,049	4,266	3,912	6,185	9,375	7,857	7,386	7,929	7,506	7,325
	(1,0,1)	7,410	6,041	8,201	3,946	6,090	3,464	3,941	6,715	5,931	8,511	4,248	5,948	3,771	4,093	6,257	7,933	9,249	7,515	7,989	7,424	7,306
	(1,0,0)	5,695	5,329	5,356	6,467	4,932	2,921	2,787	5,595	5,571	5,679	7,267	5,306	3,476	3,501	6,239	7,993	7,924	9,259	7,667	7,356	7,301
	(0,1,1)	7,490	5,973	6,025	3,222	8,262	3,909	3,940	6,696	6,081	6,211	3,898	8,436	4,309	4,364	6,046	7,903	8,037	7,373	9,384	7,647	7,618
	(0,1,0)	5,690	5,450	4,745	2,911	5,298	6,468	2,862	5,491	5,483	5,200	3,543	5,653	7,210	3,451	6,336	7,920	7,612	7,088	7,960	9,179	7,222
	(0,0,1)	5,741	4,957	5,472	2,852	5,349	2,859	6,518	5,767	5,299	5,679	3,475	5,659	3,629	7,229	6,249	7,681	7,956	7,311	7,884	7,241	9,182

Çizelge 4,19'de Gamma_2 senaryosundaki $I^2 - \text{PoC}$ süreç izleme istatistiklerinden elde edilen ortalama değerler yer almaktadır. Bu değerler ile süreç dağılımının şekil parametresinde (θ_2) gerçekleşen δ büyüklüklerindeki kaymalara sebep olan değişken/değişkenler belirlenir. Çizelgeye bakıldığında, hibrit BBA-DVM yaklaşımının $\delta = 0,5$ kadar küçük kayma miktarından itibaren kontrol dışı sinyalin kaynağını doğru bir şekilde tespit edebildiği görülmektedir. $\delta = 0,5$ ve $\rho_1 = 0,3$ iken $(1,0,1)$ değişim kombinasyonuna karşılık gelen, koyu ile belirtilen ortalama değeri 4,200 karşılık geldiği satırda da $(1,0,1)$ durumunu yansıtır. Öyleyse süreçteki kaymaya $\mathbf{x}_1$ ve $\mathbf{x}_3$ değişkenleri sebep olmuştur. Benzer şekilde, $\delta = 3,0$ ve $\rho_2 = 0,5$ iken $(0,1,0)$ değişim kombinasyonu ile elde edilen en büyük ortalama değerlerin $(5,635)$ bulunduğu satırda da $(0,1,0)$ kombinasyonuna denk geldiği ve dolayısıyla süreçteki farklılaşmanın kaynağının $\mathbf{x}_2$ değişkeni olarak belirlenebileceği söylenebilir.

Çizelge 4.19. Gamma_2’de Hibrit BBA-DVM yaklaşımı ile hesaplanan $I^2 - \text{PoC}$ değerlerinin farklı değişim kombinasyonlarından elde edilen ortalamaları

		Gamma_1 ($\theta_1+\delta;\theta_2$)							Gamma_2 ($\theta_1;\theta_2+\delta$)							Gamma_3($\theta_1+\delta;\theta_2+\delta$)						
		$\rho_1=0,3$							$\rho_2=0,5$							$\rho_3=0,8$						
δ		(1,1,1)	(1,1,0)	(1,0,1)	(1,0,0)	(0,1,1)	(0,1,0)	(0,0,1)	(1,1,1)	(1,1,0)	(1,0,1)	(1,0,0)	(0,1,1)	(0,1,0)	(0,0,1)	(1,1,1)	(1,1,0)	(1,0,1)	(1,0,0)	(0,1,1)	(0,1,0)	(0,0,1)
0	0	3,999	3,999	3,999	3,999	3,999	3,999	3,999	3,999	3,999	3,999	3,999	3,999	3,999	3,999	3,999	3,999	3,999	3,999	3,999	3,999	3,999
0,5	(1,1,1)	4,387	4,192	4,156	4,057	4,182	4,062	4,066	4,269	4,155	4,153	4,046	4,157	4,044	4,062	4,235	4,157	4,146	4,053	4,171	4,058	4,063
	(1,1,0)	4,262	4,195	4,149	4,060	4,138	4,055	4,031	4,219	4,180	4,109	4,060	4,125	4,060	4,016	4,192	4,201	4,083	4,080	4,096	4,084	4,016
	(1,0,1)	4,249	4,127	4,200	4,061	4,123	4,027	4,062	4,230	4,113	4,188	4,057	4,118	4,016	4,064	4,183	4,081	4,209	4,082	4,094	4,015	4,079
	(1,0,0)	4,179	4,114	4,118	4,062	4,077	4,025	4,028	4,150	4,105	4,106	4,077	4,063	4,022	4,021	4,139	4,126	4,138	4,131	4,044	4,013	4,024
	(0,1,1)	4,290	4,143	4,154	4,032	4,195	4,072	4,046	4,216	4,099	4,113	4,028	4,188	4,058	4,059	4,184	4,095	4,113	4,014	4,221	4,086	4,091
	(0,1,0)	4,190	4,105	4,081	4,019	4,105	4,074	4,022	4,167	4,136	4,059	4,021	4,125	4,098	4,016	4,141	4,139	4,037	4,010	4,130	4,152	4,013
	(0,0,1)	4,171	4,071	4,121	4,017	4,100	4,030	4,068	4,162	4,060	4,110	4,021	4,114	4,016	4,070	4,139	4,040	4,139	4,011	4,145	4,016	4,158
1,0	(1,1,1)	5,250	4,624	4,631	4,242	4,720	4,243	4,260	4,995	4,602	4,605	4,247	4,624	4,236	4,247	4,749	4,581	4,615	4,292	4,577	4,289	4,280
	(1,1,0)	4,853	4,773	4,495	4,259	4,460	4,240	4,122	4,807	4,659	4,425	4,256	4,442	4,243	4,091	4,685	4,902	4,441	4,426	4,425	4,440	4,130
	(1,0,1)	4,894	4,486	4,743	4,247	4,478	4,126	4,214	4,743	4,411	4,624	4,236	4,388	4,100	4,254	4,586	4,386	4,782	4,369	4,367	4,095	4,357
	(1,0,0)	4,553	4,377	4,371	4,276	4,248	4,084	4,071	4,417	4,379	4,360	4,300	4,174	4,061	4,064	4,374	4,475	4,510	4,707	4,160	4,059	4,050
	(0,1,1)	4,988	4,544	4,528	4,124	4,804	4,281	4,261	4,737	4,440	4,393	4,109	4,642	4,226	4,277	4,652	4,399	4,425	4,091	4,833	4,438	4,406
	(0,1,0)	4,509	4,354	4,231	4,086	4,354	4,282	4,081	4,390	4,309	4,175	4,063	4,347	4,253	4,076	4,392	4,520	4,139	4,063	4,454	4,689	4,058
	(0,0,1)	4,496	4,217	4,324	4,070	4,342	4,081	4,271	4,484	4,189	4,408	4,065	4,360	4,074	4,317	4,371	4,137	4,462	4,056	4,463	4,058	4,675
1,5	(1,1,1)	6,384	5,194	5,297	4,458	5,166	4,517	4,524	5,863	5,220	5,198	4,514	5,214	4,494	4,506	5,314	5,150	5,094	4,619	5,124	4,627	4,636
	(1,1,0)	5,733	5,487	5,019	4,518	4,959	4,501	4,281	5,364	5,263	4,790	4,521	4,852	4,529	4,230	5,262	5,674	4,879	4,925	4,913	4,877	4,295
	(1,0,1)	5,683	5,037	5,485	4,509	4,937	4,309	4,513	5,375	4,850	5,241	4,565	4,881	4,238	4,533	5,202	4,906	5,558	4,879	4,885	4,316	4,860
	(1,0,0)	4,854	4,696	4,679	4,581	4,382	4,161	4,155	4,793	4,756	4,694	4,583	4,374	4,148	4,140	4,708	4,835	4,895	5,360	4,357	4,174	4,151
	(0,1,1)	5,647	4,968	4,977	4,285	5,527	4,509	4,467	5,450	4,894	4,845	4,248	5,236	4,534	4,551	5,291	4,963	4,874	4,368	5,738	4,964	4,935
	(0,1,0)	4,884	4,710	4,436	4,147	4,712	4,585	4,156	4,756	4,634	4,359	4,132	4,634	4,563	4,144	4,765	4,954	4,366	4,165	4,949	5,403	4,182
	(0,0,1)	4,931	4,447	4,701	4,160	4,725	4,153	4,556	4,760	4,369	4,608	4,135	4,642	4,130	4,571	4,694	4,338	4,851	4,159	4,844	4,170	5,302
2,0	(1,1,1)	7,217	5,862	5,905	4,831	5,892	4,777	4,730	6,534	5,778	5,740	4,825	5,780	4,885	4,880	6,064	5,535	5,516	4,887	5,597	4,902	4,934
	(1,1,0)	6,503	6,239	5,591	4,821	5,563	4,859	4,499	6,015	5,911	5,297	4,838	5,365	4,818	4,422	5,836	6,357	5,437	5,407	5,450	5,443	4,609
	(1,0,1)	6,530	5,609	6,183	4,856	5,604	4,521	4,834	6,025	5,301	5,852	4,822	5,308	4,415	4,811	5,710	5,696	6,828	5,614	5,679	4,750	5,568
	(1,0,0)	5,418	5,128	5,106	4,958	4,777	4,247	4,266	5,263	5,027	5,023	4,961	4,569	4,256	4,222	5,170	5,415	5,315	6,115	4,786	4,384	4,392
	(0,1,1)	6,468	5,608	5,594	4,482	6,227	4,838	4,854	5,971	5,371	5,354	4,446	5,926	4,830	4,862	5,900	5,584	5,504	4,707	6,559	5,453	5,419
	(0,1,0)	5,410	5,089	4,729	4,275	5,092	4,901	4,253	5,235	5,049	4,630	4,253	5,056	4,960	4,255	5,203	5,496	4,733	4,393	5,496	6,098	4,378
	(0,0,1)	5,360	4,676	5,033	4,246	4,999	4,258	4,963	5,198	4,639	5,044	4,266	5,012	4,235	4,946	5,188	4,750	5,433	4,370	5,425	4,357	6,061

Çizelge 4.19. (Devam) Gamma_2’de Hibrit BBA-DVM yaklaşımı ile hesaplanan I^2 – PoC değerlerinin farklı değişim kombinasyonlarından elde edilen ortalamaları

2,5	(1,1,1)	8,225	6,572	6,480	5,036	6,659	5,101	5,036	7,194	6,287	6,303	5,120	6,363	5,154	5,136	6,754	6,139	6,077	5,365	6,156	5,365	5,269
	(1,1,0)	7,290	6,940	6,191	5,177	6,230	5,169	4,774	6,641	6,406	5,853	5,123	5,858	5,198	4,663	6,317	7,579	6,251	6,180	6,306	6,115	5,195
	(1,0,1)	7,394	6,187	6,890	5,149	6,150	4,755	5,169	6,847	5,976	6,451	5,228	6,021	4,741	5,232	6,583	6,151	7,255	5,989	6,125	5,062	6,007
	(1,0,0)	5,744	5,370	5,332	5,257	5,039	4,370	4,377	5,623	5,384	5,461	5,333	4,859	4,348	4,356	5,528	5,755	5,828	6,689	5,054	4,523	4,512
	(0,1,1)	7,379	6,270	6,259	4,815	6,839	5,208	5,201	6,842	5,937	6,032	4,759	6,512	5,078	5,250	6,563	6,110	6,052	5,063	7,305	5,929	5,948
	(0,1,0)	5,869	5,439	5,058	4,392	5,466	5,256	4,405	5,498	5,300	4,874	4,329	5,242	5,257	4,324	5,741	5,901	5,190	4,632	5,902	6,792	4,620
	(0,0,1)	5,857	4,983	5,457	4,399	5,443	4,384	5,211	5,543	4,922	5,386	4,353	5,333	4,373	5,269	5,767	5,205	5,943	4,637	5,887	4,650	6,894
3,0	(1,1,1)	8,868	7,145	7,132	5,355	7,067	5,383	5,358	7,611	6,766	6,792	5,317	6,776	5,415	5,382	7,499	6,640	6,730	5,749	6,658	5,743	5,720
	(1,1,0)	7,981	7,500	6,727	5,517	6,810	5,566	5,108	7,416	6,892	6,406	5,485	6,498	5,603	5,016	7,045	7,902	6,671	6,500	6,771	6,550	5,516
	(1,0,1)	8,026	6,832	7,553	5,570	6,731	5,084	5,432	7,241	6,347	6,903	5,457	6,357	4,943	5,567	6,923	6,459	7,677	6,361	6,533	5,335	6,291
	(1,0,0)	6,242	5,764	5,841	5,639	5,366	4,549	4,522	6,017	5,712	5,751	5,535	5,226	4,531	4,507	6,219	6,476	6,499	7,395	5,665	4,899	4,969
	(0,1,1)	8,073	6,805	6,833	5,073	7,448	5,537	5,479	7,440	6,460	6,473	4,978	7,055	5,550	5,580	6,839	7,000	7,033	5,795	8,485	6,967	6,839
	(0,1,0)	6,160	5,767	5,339	4,545	5,766	5,593	4,543	5,999	5,720	5,128	4,492	5,731	5,635	4,511	6,447	6,797	5,832	5,111	6,608	7,635	5,072
	(0,0,1)	6,204	5,353	5,748	4,534	5,798	4,540	5,636	5,987	5,241	5,664	4,465	5,642	4,496	5,570	6,008	5,445	6,277	4,805	6,224	4,776	7,172

Çizelge 4.20’de Gamma_3 senaryosuna uyan süreçte meydana gelen kaymalara sebep olan değişken/değişkenleri belirlemek amacıyla elde edilen $I^2 - \text{PoC}$ istatistiklerinin ortalamaları yer almaktadır. Çizelgeye göre, hibrit BBA-DVM yaklaşımının süreçte meydana gelen küçük kaymalardan itibaren tüm kayma büyüklüklerinde değişime sebep olan değişken/değişkenlere ilişkin doğru tespitlerde bulunduğu anlaşılmaktadır. Elde edilen sonuçlara bakıldığında $\delta = 1,0$ ve $\rho_1 = 0,3$ olduğu durumda (1,0,0) kombinasyonuna ilişkin sütundaki en yüksek değerin 4,910 olduğu, bu değer karşılık geldiği satırda da (1,0,0) kombinasyonuna denk geldiği ve dolayısıyla süreçteki kaymaya sadece x_1 değişkeninin sebep olduğu söylenebilir. Bir başka örnek vermek gerekirse, $\delta = 1,5$ ve $\rho_3 = 0,8$ olması durumunda, (0,0,1) değişim kombinasyonu için hesaplanan en büyük $I^2 - \text{PoC}$ ortalamasının 8,684 olduğu görülmektedir. Bu değer karşılık geldiği satırda da (0,0,1) değişim kombinasyonuna denk geldiği ve dolayısıyla süreçteki kaymaya sadece x_3 değişkeninin sebep olduğu belirtilebilir.

Çizelge 4.20. Gamma_3'te Hibrit BBA-DVM yaklaşımı ile hesaplanan $I^2 - \text{PoC}$ değerlerinin farklı değişim kombinasyonlarından elde edilen ortalamaları

		Gamma_1 ($\theta_1 + \delta; \theta_2$)							Gamma_2 ($\theta_1; \theta_2 + \delta$)							Gamma_3($\theta_1 + \delta; \theta_2 + \delta$)						
		$\rho_1 = 0,3$							$\rho_2 = 0,5$							$\rho_3 = 0,8$						
δ	σ	(1,1,1)	(1,1,0)	(1,0,1)	(1,0,0)	(0,1,1)	(0,1,0)	(0,0,1)	(1,1,1)	(1,1,0)	(1,0,1)	(1,0,0)	(0,1,1)	(0,1,0)	(0,0,1)	(1,1,1)	(1,1,0)	(1,0,1)	(1,0,0)	(0,1,1)	(0,1,0)	(0,0,1)
0	0	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000
0,5	(1,1,1)	4,008	3,362	3,285	2,467	3,311	2,482	2,479	3,603	3,130	3,122	2,463	3,077	2,438	2,455	3,117	3,037	3,020	2,615	3,065	2,563	2,590
	(1,1,0)	3,550	3,402	2,915	2,465	2,920	2,501	2,241	3,195	3,298	2,772	2,507	2,781	2,511	2,224	3,057	4,390	2,943	2,980	2,941	2,917	2,510
	(1,0,1)	3,505	2,871	3,366	2,476	2,956	2,263	2,484	3,114	2,670	3,279	2,479	2,698	2,232	2,408	2,995	2,966	4,352	2,920	2,923	2,511	2,935
	(1,0,0)	2,755	2,606	2,660	2,623	2,382	2,113	2,116	2,563	2,590	2,603	2,812	2,278	2,098	2,095	2,610	2,984	3,002	4,552	2,494	2,270	2,254
	(0,1,1)	3,483	2,934	2,951	2,269	3,393	2,510	2,493	3,220	2,743	2,747	2,250	3,319	2,459	2,458	2,913	2,899	2,904	2,478	4,193	2,924	2,843
	(0,1,0)	2,803	2,691	2,409	2,124	2,684	2,580	2,140	2,606	2,596	2,302	2,092	2,597	2,914	2,096	2,639	2,950	2,491	2,254	2,860	4,457	2,252
	(0,0,1)	2,810	2,391	2,722	2,124	2,692	2,124	2,624	2,555	2,274	2,546	2,104	2,552	2,100	2,792	2,611	2,578	2,983	2,253	2,945	2,258	4,484
1,0	(1,1,1)	7,721	6,681	6,657	4,537	6,678	4,623	4,549	6,901	6,260	6,280	4,669	6,266	4,664	4,666	6,133	6,259	6,361	5,655	6,462	5,751	5,717
	(1,1,0)	7,109	6,805	6,199	4,649	6,215	4,652	4,220	6,488	6,560	5,951	4,715	5,903	4,792	4,413	6,044	7,463	6,527	6,000	6,451	5,991	5,830
	(1,0,1)	7,041	6,197	6,778	4,671	6,259	4,204	4,597	6,458	5,913	6,629	4,789	5,893	4,384	4,811	5,968	6,412	7,328	5,907	6,411	5,712	6,110
	(1,0,0)	5,391	4,990	4,956	4,910	4,838	3,446	3,471	5,408	5,119	5,119	5,586	4,919	3,705	3,774	5,677	6,247	6,275	7,646	6,210	5,541	5,505
	(0,1,1)	7,234	6,224	6,213	4,229	6,943	4,664	4,669	6,559	6,036	6,033	4,461	6,784	4,850	4,875	5,972	6,382	6,380	5,870	7,300	5,855	5,899
	(0,1,0)	5,447	5,097	4,912	3,525	5,066	4,997	3,506	5,184	5,053	4,819	3,702	5,112	5,513	3,653	5,755	6,213	6,227	5,560	6,214	7,601	5,669
	(0,0,1)	5,453	4,973	5,110	3,525	5,187	3,544	5,044	5,275	4,806	5,023	3,702	5,071	3,630	5,545	5,820	6,237	6,395	5,665	6,281	5,547	7,757
1,5	(1,1,1)	9,359	8,674	8,674	6,486	8,556	6,673	6,462	8,812	8,356	8,402	6,924	8,387	7,049	6,948	8,127	8,396	8,389	8,054	8,472	8,073	8,022
	(1,1,0)	9,080	8,961	8,510	6,958	8,506	6,974	6,536	8,755	8,882	8,484	7,394	8,389	7,331	7,034	8,049	8,951	8,434	8,342	8,537	8,350	8,172
	(1,0,1)	8,987	8,372	8,898	6,983	8,469	6,465	6,953	8,473	8,136	8,518	7,133	8,258	7,054	7,098	8,047	8,485	8,925	8,198	8,410	8,161	8,244
	(1,0,0)	7,691	7,484	7,548	7,316	7,476	6,065	6,168	7,670	7,549	7,578	7,637	7,432	6,482	6,405	7,726	8,058	8,084	8,786	8,000	7,711	7,838
	(0,1,1)	9,016	8,528	8,492	6,674	8,900	6,938	6,999	8,711	8,314	8,287	6,896	8,977	7,403	7,347	8,124	8,456	8,523	8,236	8,943	8,256	8,266
	(0,1,0)	7,770	7,522	7,399	6,079	7,528	7,295	6,134	7,497	7,469	7,427	6,295	7,457	7,643	6,287	7,729	8,064	8,020	7,738	8,090	8,775	7,708
	(0,0,1)	7,658	7,405	7,401	5,964	7,461	6,132	7,274	7,649	7,444	7,615	6,475	7,476	6,444	7,699	7,530	7,934	7,906	7,520	7,889	7,576	8,684
2,0	(1,1,1)	9,788	9,438	9,476	8,016	9,463	7,963	8,115	9,623	9,307	9,321	8,260	9,285	8,222	8,160	9,309	9,213	9,186	8,810	9,200	8,783	8,863
	(1,1,0)	9,724	9,722	9,310	8,460	9,356	8,400	7,818	9,401	9,581	9,189	8,654	9,106	8,710	8,304	8,961	9,559	9,156	9,272	9,224	9,274	9,041
	(1,0,1)	9,718	9,410	9,658	8,322	9,380	8,057	8,467	9,516	9,276	9,571	8,737	9,273	8,571	8,706	9,133	9,313	9,520	9,225	9,351	9,185	9,204
	(1,0,0)	8,978	8,901	8,905	8,658	8,831	7,919	7,970	9,222	9,110	9,140	9,124	9,077	8,422	8,346	8,712	8,978	8,960	9,265	8,955	8,778	8,747
	(0,1,1)	9,728	9,351	9,350	7,963	9,719	8,337	8,337	9,534	9,316	9,319	8,482	9,669	8,646	8,838	9,199	9,457	9,433	9,272	9,660	9,360	9,421
	(0,1,0)	9,160	8,964	8,953	8,024	9,017	8,723	8,021	9,149	9,125	9,046	8,359	9,157	9,155	8,398	9,131	9,341	9,348	9,153	9,335	9,590	9,191
	(0,0,1)	9,307	9,132	9,160	8,117	9,209	8,075	8,919	8,836	8,758	8,730	8,095	8,731	8,142	8,745	8,790	9,056	9,043	8,841	9,057	8,805	9,322

Çizelge 4.20. (Devam) Gamma_3'te Hibrit BBA-DVM yaklaşımı ile hesaplanan I^2 – PoC değerlerinin farklı değişim kombinasyonlarından elde edilen ortalamaları

2,5	(1,1,1)	9,952	9,802	9,831	8,799	9,826	8,801	8,847	9,875	9,723	9,734	8,864	9,712	8,860	8,880	9,704	9,583	9,586	9,129	9,587	9,161	9,193
	(1,1,0)	9,945	9,880	9,816	9,233	9,810	9,209	8,593	9,838	9,868	9,677	9,386	9,673	9,437	8,735	9,572	9,910	9,492	9,695	9,504	9,696	8,742
	(1,0,1)	9,934	9,791	9,896	9,246	9,782	8,675	9,140	9,842	9,701	9,870	9,400	9,706	9,063	9,348	9,650	9,564	9,871	9,693	9,618	9,190	9,717
	(1,0,0)	9,742	9,719	9,661	9,513	9,678	9,123	9,109	9,806	9,736	9,745	9,765	9,705	9,308	9,230	9,588	9,649	9,659	9,740	9,642	9,538	9,588
	(0,1,1)	9,930	9,800	9,791	8,656	9,889	9,164	9,236	9,861	9,663	9,695	8,800	9,836	9,295	9,296	9,508	9,397	9,392	8,783	9,789	9,577	9,592
	(0,1,0)	9,719	9,697	9,670	9,052	9,630	9,492	9,080	9,585	9,541	9,500	9,209	9,528	9,493	9,177	9,643	9,754	9,740	9,682	9,745	9,845	9,673
	(0,0,1)	9,740	9,669	9,683	9,102	9,695	9,111	9,525	9,785	9,701	9,689	9,228	9,706	9,287	9,703	9,685	9,731	9,768	9,700	9,799	9,723	9,857
3,0	(1,1,1)	9,988	9,902	9,943	9,459	9,957	9,424	9,452	9,967	9,906	9,932	9,444	9,916	9,396	9,447	9,893	9,806	9,825	9,537	9,828	9,496	9,462
	(1,1,0)	9,985	9,952	9,939	9,575	9,939	9,640	9,416	9,963	9,949	9,925	9,643	9,900	9,624	9,399	9,889	9,948	9,786	9,836	9,784	9,814	9,237
	(1,0,1)	9,973	9,949	9,963	9,616	9,957	9,441	9,617	9,948	9,911	9,952	9,671	9,887	9,358	9,667	9,881	9,819	9,934	9,814	9,807	9,320	9,775
	(1,0,0)	9,857	9,859	9,869	9,717	9,867	9,500	9,496	9,923	9,868	9,858	9,811	9,855	9,627	9,620	9,822	9,882	9,882	9,924	9,873	9,807	9,823
	(0,1,1)	9,971	9,949	9,947	9,411	9,965	9,635	9,551	9,956	9,891	9,882	9,252	9,943	9,676	9,669	9,885	9,749	9,745	9,161	9,931	9,767	9,783
	(0,1,0)	9,925	9,883	9,864	9,517	9,892	9,746	9,578	9,943	9,899	9,886	9,637	9,902	9,875	9,657	9,891	9,905	9,832	9,706	9,889	9,937	9,680
	(0,0,1)	9,958	9,904	9,914	9,494	9,931	9,537	9,815	9,909	9,845	9,896	9,665	9,895	9,665	9,846	9,848	9,835	9,928	9,758	9,924	9,709	9,945

4.3.4. Çok değişkenli gamma dağılım sürecine uygulanan yöntemlerin performanslarının karşılaştırılması

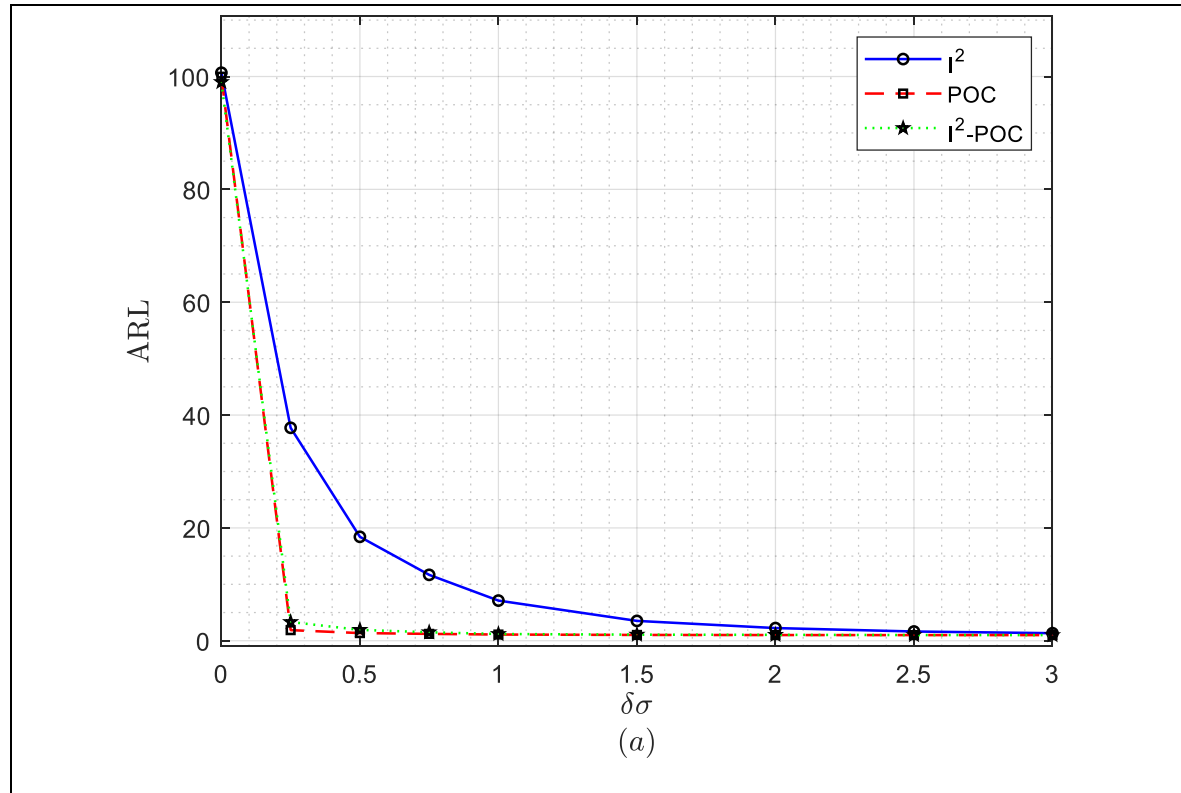
Çizelge 4.21’de süreçteki kaymanın sadece dağılımın şekil parametresinde gerçekleştiği ilk senaryo olan Gamma_1’de farklı kayma büyüklüklerine ve değişkenler arasındaki ilişkinin farklı düzeylerine göre $ARL_0=100$ olmak üzere I^2 , PoC ve $I^2 - PoC$ kontrol grafiklerinden elde edilen ARL_1 değerleri yer almaktadır.

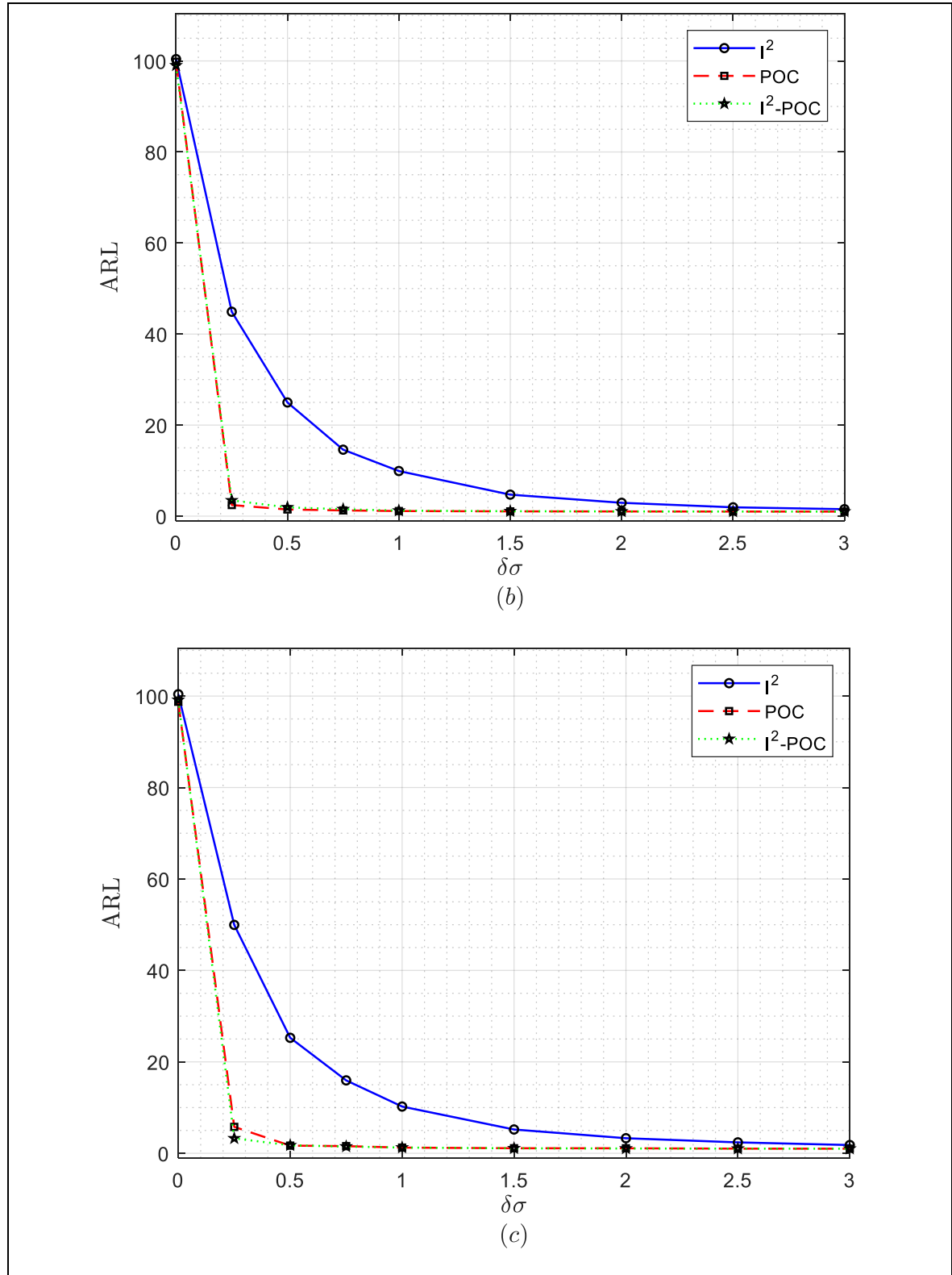
Çizelgeye bakıldığında I^2 kontrol grafiğinin süreçteki kaymayı ancak $\delta = 1,5$ ve ötesinde farklılaştığında yakalayabildiği, öte yandan PoC ve $I^2 - PoC$ kontrol grafiklerinin süreçteki kaymayı $\delta = 0,25$ ’ten itibaren yakalayabildiği görülmektedir. PoC kontrol grafiği, kayma miktarı $\delta = 0,75$ ve daha küçük olduğu durumlarda değişkenler arasındaki korelasyon yapısı fark etmeksizin diğer yöntemlere göre daha iyi performans göstermiştir. Örneğin $\delta = 0,75$ iken $ARL_0=100$ olması koşulu altında I^2 kontrol grafiğinden hesaplanan ARL_1 değeri yaklaşık 18, $I^2 - PoC$ kontrol grafiğinden hesaplanan ARL_1 değeri 2 iken PoC kontrol grafiğiyle hesaplanan ARL_1 değeri yaklaşık olarak 1’dir. Başka bir deyişle, PoC kontrol grafiği süreç şekil parametresinde gerçekleşen küçük kaymaları diğer yöntemlerden daha erken yakalayabilmektedir. Süreçteki kayma miktarı $\delta = 0,75$ ’in ötesinde olduğunda PoC ve $I^2 - PoC$ kontrol grafikleri I^2 kontrol grafiğinden daha iyi olmakla birlikte birbirine yakın performans sergilemektedir.

Değişkenler arasındaki korelasyon yapısı bağlamında değerlendirildiğinde, korelasyon katsayısı büyüdükçe I^2 kontrol grafiklerinin performanslarında nispeten bir kötüleşme gözlemlenirken, PoC ve $I^2 - PoC$ kontrol grafiklerinin performanslarının değişkenler arasındaki korelasyon yapısından etkilenmediği görülmektedir. Dolayısıyla, PoC ve $I^2 - PoC$ kontrol grafiklerinin çok değişkenli gamma dağılımına uyan süreçlerin şekil parametresinde bir kayma gerçekleştiğinde değişkenler arasındaki tüm korelasyon yapılarında iyi çalıştığı söylenebilir.

Çizelge 4.21. Gamma_1’de oluşturulan I^2 , PoC ve $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafikleri için elde edilen ARL değerleri

δ	Gamma_1 ($\theta_1 + \delta; \theta_2$)								
	$\rho_1 = 0,3$			$\rho_2 = 0,5$			$\rho_3 = 0,8$		
	I^2	PoC	$I^2 - \text{PoC}$	I^2	PoC	$I^2 - \text{PoC}$	I^2	PoC	$I^2 - \text{PoC}$
0,00	100,67	99,97	99,02	100,40	99,83	99,02	100,40	98,76	99,14
0,25	37,74	1,88	3,32	44,90	2,44	3,46	49,95	5,78	3,27
0,50	18,42	1,36	1,93	24,97	1,46	1,93	25,26	1,68	1,75
0,75	11,68	1,22	1,50	14,60	1,26	1,52	15,95	1,57	1,48
1,00	7,12	1,10	1,20	9,91	1,12	1,21	10,23	1,25	1,26
1,50	3,52	1,03	1,08	4,72	1,05	1,08	5,21	1,11	1,09
2,00	2,25	1,01	1,05	2,93	1,03	1,03	3,30	1,10	1,05
2,50	1,64	1,00	1,01	1,94	1,01	1,01	2,39	1,02	1,02
3,00	1,34	1,00	1,00	1,53	1,00	1,00	1,81	1,01	1,01





Şekil 4.8. Gamma_1’de oluşturulan I^2 , PoC ve $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafiklerine ilişkin ARL değerlerinin kayma miktarına göre değişimi: (a) $\rho_1 = 0,3$, (b) $\rho_2 = 0,5$, (c) $\rho_3 = 0,8$

Kaymanın sadece dağılımın ölçek parametresinde gerçekleştiği senaryo olan Gamma_2’de oluşturulan I^2 , PoC ve $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafikleri için $ARL_0 = 100$ olduğunda hesaplanan ARL_1 değerleri Çizelge 4.22’de gösterilmektedir.

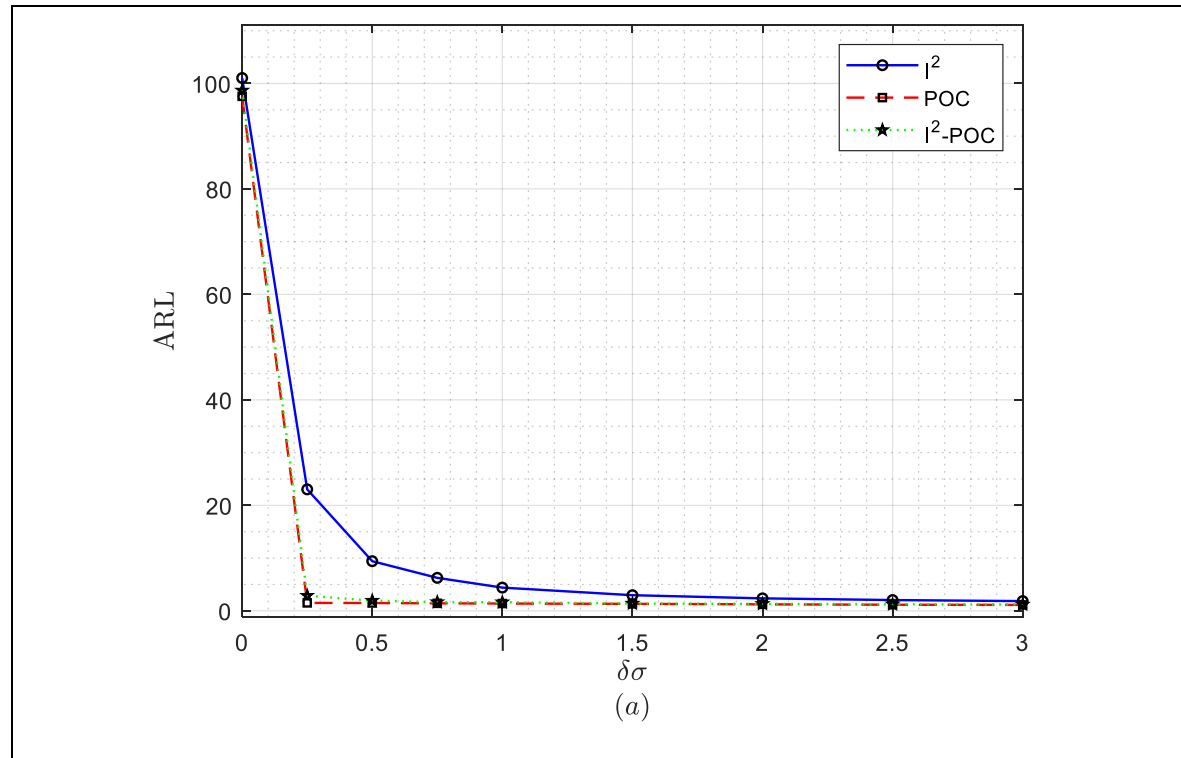
Çizelgeye bakıldığında I^2 kontrol grafiğinin süreçteki kaymayı ancak $\delta = 1,5\sigma$ ve ötesinde farklılaştığında yakalayabildiği, öte yandan PoC ve $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafiklerinin süreçteki kaymayı $\delta = 0,25$ ’dan itibaren yakalayabildiği görülmektedir. PoC kontrol grafiği, kayma miktarı $\delta = 1,0$ ve daha küçük olduğu durumlarda değişkenler arasındaki korelasyon yapısı fark etmeksizin diğer yöntemlere göre daha iyi performans göstermiştir. Örneğin değişkenler arasında düşük korelasyon yapısı olduğunda $\delta = 0,50$ iken $ARL_0 = 100$ olması koşulu altında I^2 kontrol grafiğinden hesaplanan ARL_1 değeri yaklaşık olarak 9, $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafiğinden hesaplanan ARL_1 değeri 2 iken PoC kontrol grafiğiyle hesaplanan ARL_1 değeri yaklaşık olarak 1’dir. Başka bir deyişle, PoC kontrol grafiğinin süreç şekil parametresinde gerçekleşen küçük kaymaları diğer yöntemlerden daha erken yakalayabildiği söylenebilir. Süreçteki kayma miktarı $\delta = 1,5$ ve üzerinde olduğunda PoC ve $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafikleri I^2 kontrol grafiğinden daha iyi olmakla birlikte birbirine yakın performans sergilemektedir.

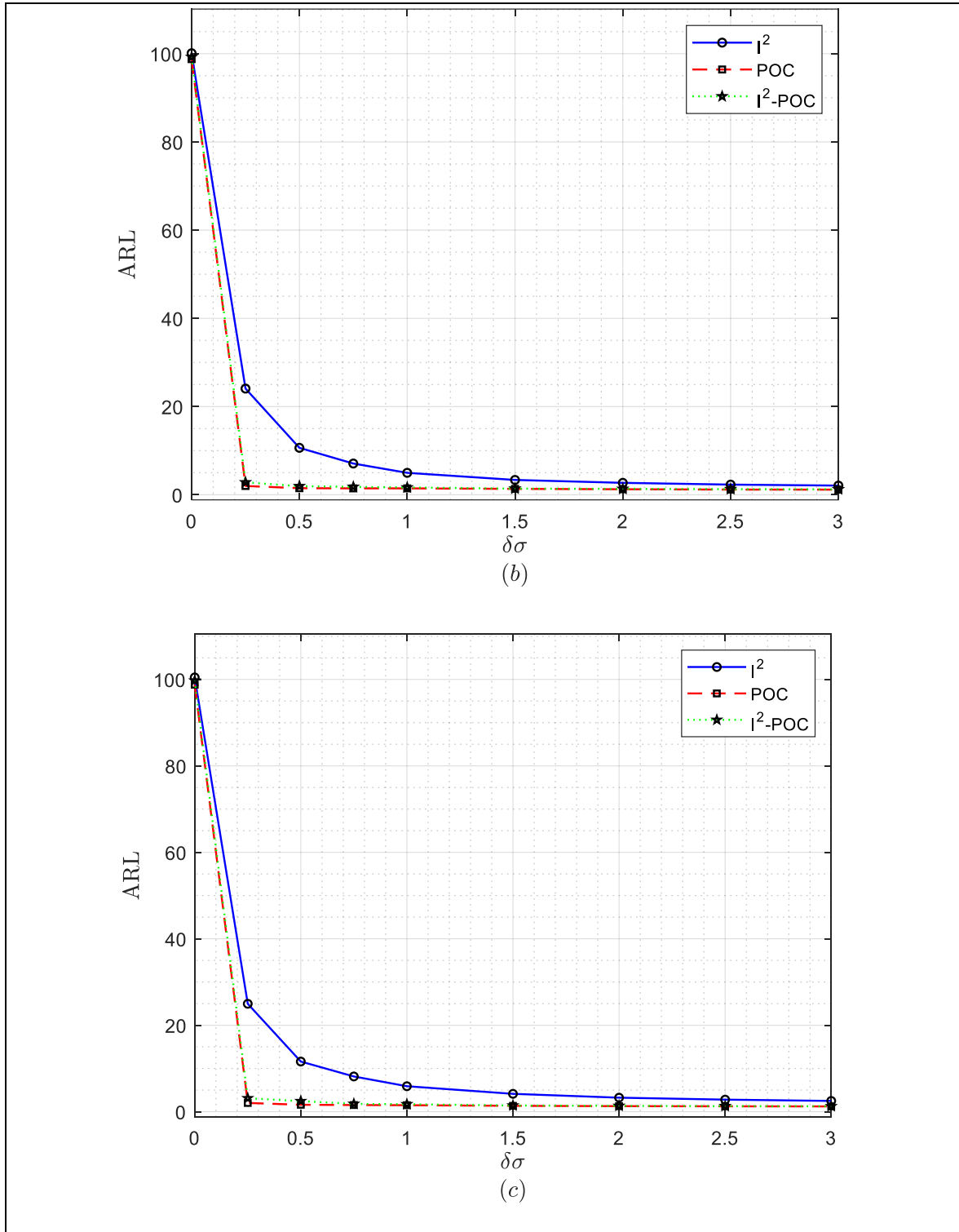
Değişkenler arasındaki korelasyon yapısı bağlamında değerlendirildiğinde, korelasyon katsayısı büyüdükçe I^2 kontrol grafiklerinin performanslarında nispeten bir kötüleşme gözlemlenirken, PoC ve $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafiklerinin performanslarının değişkenler arasındaki korelasyon yapısından etkilenmediği görülmektedir. Dolayısıyla, PoC ve $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafiklerinin çok değişkenli gamma dağılımına uyan süreçlerin ölçek parametresinde bir kayma gerçekleştiğinde değişkenler arasındaki tüm korelasyon yapılarında iyi çalıştığı söylenebilir.

Çizelge 4.22. Gamma_2’de oluşturulan I^2 , PoC ve $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafikleri için elde edilen ARL değerleri

δ	Gamma_2 ($\theta_1; \theta_2 + \delta$)								
	$\rho_1 = 0,3$			$\rho_2 = 0,5$			$\rho_3 = 0,8$		
	I^2	$I^2 - \text{PoC}$	PoC	I^2	$I^2 - \text{PoC}$	PoC	I^2	$I^2 - \text{PoC}$	PoC
0,00	101,03	97,56	98,67	100,11	98,77	99,25	100,47	98,77	99,73
0,25	23,03	1,50	2,87	24,07	1,99	2,81	24,96	2,02	3,11
0,50	9,41	1,48	1,93	10,64	1,49	1,95	11,60	1,60	2,45
0,75	6,25	1,42	1,65	7,08	1,45	1,78	8,15	1,54	1,81
1,00	4,40	1,38	1,63	4,97	1,45	1,65	5,89	1,5	1,73
1,50	2,96	1,32	1,38	3,36	1,33	1,39	4,13	1,35	1,43
2,00	2,36	1,23	1,32	2,7	1,25	1,33	3,24	1,28	1,35
2,50	2,04	1,15	1,24	2,3	1,17	1,27	2,79	1,24	1,29
3,00	1,84	1,12	1,19	2,08	1,16	1,23	2,49	1,22	1,26

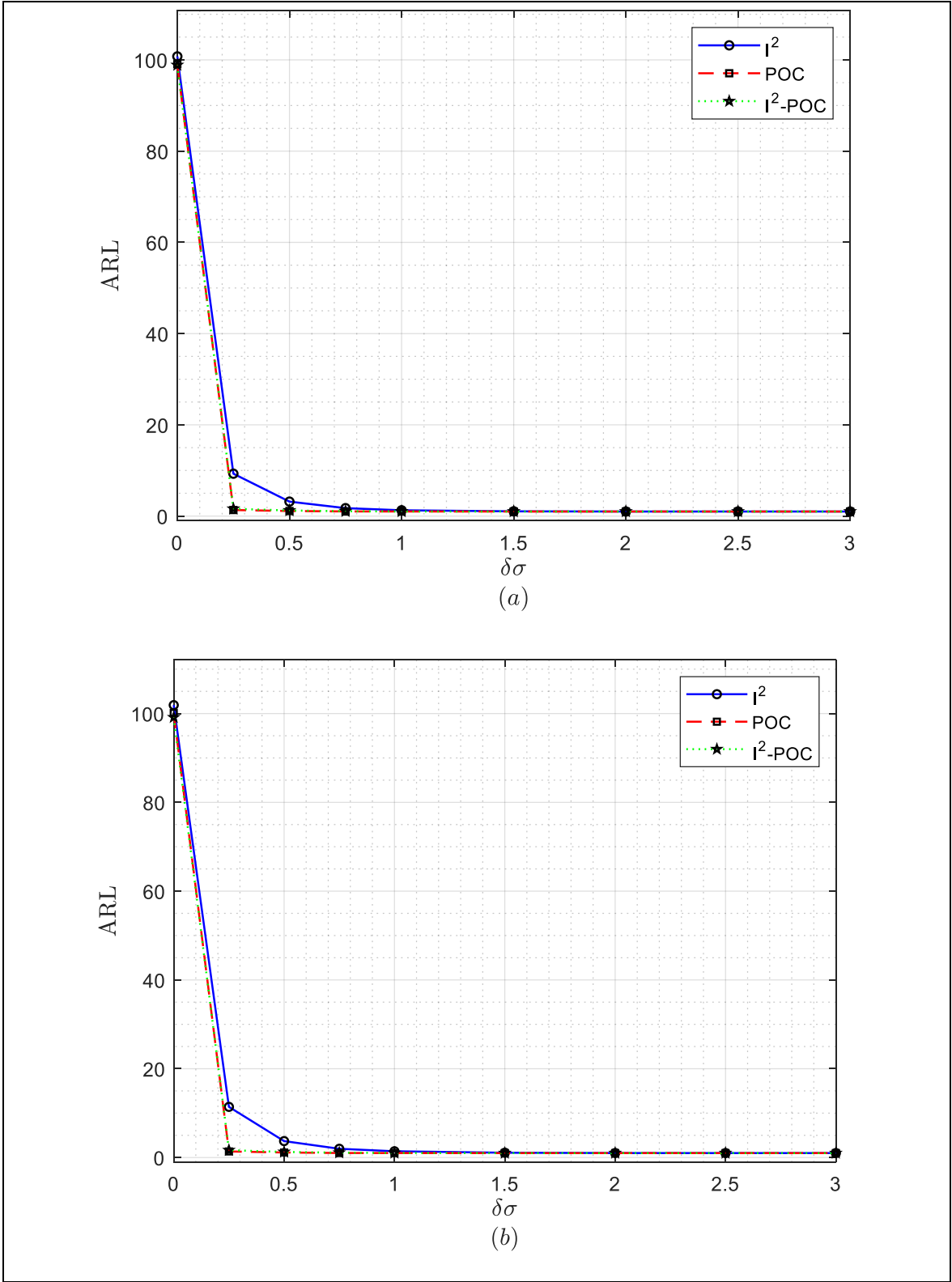
Çizelge 4.22’de elde edilen sonuçlar Şekil 4.9’da görülebilir.

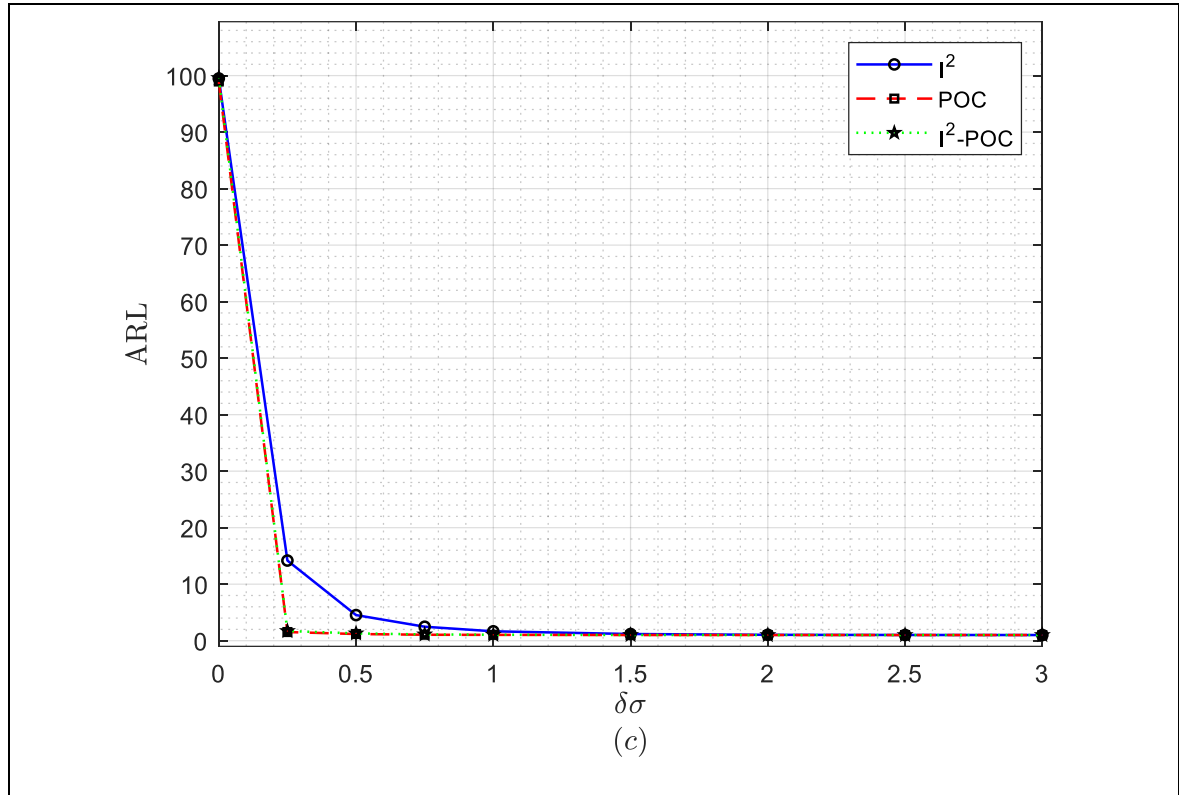




Şekil 4.9. Gamma_2’de oluşturulan I^2 , PoC ve I^2 – PoC kontrol grafiklerine ilişkin ARL değerlerinin kayma miktarına göre değişimi: (a) $\rho_1 = 0,3$, (b) $\rho_2 = 0,5$, (c) $\rho_3 = 0,8$

Kaymanın dağılımın her iki parametresinde de meydana geldiği senaryo olan Gamma_3’e göre elde edilen I^2 , PoC ve I^2 – PoC kontrol grafiklerine ilişkin ARL değerleri Çizelge





Şekil 4.10. Gamma_3'te oluşturulan I^2 , PoC ve $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafiklerine ilişkin ARL değerlerinin kayma miktarına göre değişimi: (a) $\rho_1 = 0,3$, (b) $\rho_2 = 0,5$, (c) $\rho_3 = 0,8$

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Çok değişkenli bir süreçte verimliliği arttırmak ve kaliteyi korumak amacıyla operatörlere sürecin durumu hakkında doğru bilgiyi sağlamak önemlidir. Bu amaçla ÇİSK grafiklerinin kullanılmasının sürecin izlenmesinde önemli bir rolü vardır. Süreçte bir kayma gerçekleştiğinde, grafikler ile kontrol dışı sinyal üretilir. Bu sinyalin ulaştığı operatör daha sonra süreçteki kaymanın etkilerini telafi etmek için önlemler almak amacıyla kaymanın temel nedenlerini araştırmaya başlar. Bununla birlikte, ÇİSK grafikleri pratikte bir güçlüklerle karşılaşmaktadır. Bu güçlük, kontrol dışı sinyalin üretilmesinden hangi kalite değişkeninin veya değişkenlerinin sorumlu olduğunun belirlenmesidir. Bu çalışmada çok değişkenli normal dağılıma uyan ve uymayan süreçlerde, değişkenler arasındaki korelasyonlar dikkate alınarak, süreç ortalamasında gerçekleşen kaymanın tespit edilmesi ve kaymaya sebep olan değişken/değişkenlerin tespit edilmesinde literatürde bilinen yöntemlere alternatif olabilecek yöntemlerin geliştirilmesi amaçlanmıştır.

Belirtilen amaca uygun olarak çok değişkenli normal dağılıma uyan süreçte, sürecin hedef ortalama vektöründe bir farklılaşma yaratılmıştır. Ayrıca değişkenler arasındaki korelasyon yapısının yöntemler üzerindeki etkisini görebilmek amacıyla varyans-kovaryans matrisi oluşturulurken, değişkenler arasındaki düşük, orta ve yüksek ilişkiyi temsil eden farklı korelasyon düzeyleri dikkate alınmıştır.

Çok değişkenli normal dağılıma uygun olarak tasarlanan senaryoya göre önerilen yöntemlerin hepsinin süreç ortalamasında meydana gelen bir kaymayı geleneksel T^2 yöntemine göre daha erken yakaladığı dolayısıyla daha iyi performans sergiledikleri söylenebilir. Shewhart tipi kontrol grafikleri belleksiz olma özellikleri nedeniyle süreçteki küçük kaymaları yakalamada başarılı değildir. Çizelge 4.8'e bakıldığında bir tür Shewhart tipi kontrol grafiği olan Hotelling T^2 kontrol grafiğinin tüm kayma miktarlarında önerilen yöntemlerin gerisinde kaldığı görülmektedir. Özellikle $I^2 - PoC$ kontrol grafiğinin kayma miktarının çok küçük olduğu durumlarda dahi süreç ortalama vektöründeki kaymayı diğer yöntemlerden daha erken yakaladığını söylemek mümkündür. Dolayısıyla, çok değişkenli normal dağılıma uyan süreçten elde edilen sonuçlara göre önerilen hibrit BBA-DVM yönteminin süreç ortalama vektöründeki kaymayı yakalamada en başarılı yöntem olduğu söylenebilir.

I^2 kontrol grafiği kayma miktarının büyük olduğu durumlarda T^2 kontrol grafiğine göre daha iyi performans sergilemiştir. PoC ve $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafikleri tüm kayma büyüklüklerinde iyi performans göstermişlerdir. Çok değişkenli süreç izlemede kullanılan en yaygın yöntem olan T^2 kontrol grafiği önerilen yöntemlerin gerisinde kalmıştır. Dolayısıyla süreç dağılımının normal olduğu koşullarda önerilen yöntemlerin tümü geleneksel yöntemden açık şekilde daha başarılıdır. Bu durum, çok değişkenli süreçlerdeki ortalama vektöründeki kaymanın tespit edilmesi konusunda önerilen yöntemlerin mevcut yönteme bir alternatif olduğu anlamına gelmektedir.

Çalışma kapsamında ayrıca dağılımın normal olmadığı durumlarda süreç izleme ve süreçteki sinyalin kaynağını belirleme konusuna da yer verilmiştir. Bu bağlamda çok değişkenli gamma dağılımına uyan süreçler dikkate alınmıştır. Çok değişkenli gamma dağılımına uyan süreçler tasarlanırken, süreçteki kayma dağılımının sadece şekil (Gamma_1), sadece ölçek (Gamma_2) ve hem şekil hem de ölçek (Gamma_3) parametrelerinde gerçekleştirilmiştir. Çok değişkenli gamma dağılımına uyan süreçlere ilişkin sonuçların değişkenler arasındaki ilişki yapısına göre değerlendirilebilmesi için veriler üretilirken düşük, orta ve yüksek olmak üzere 3 farklı korelasyon düzeyi dikkate alınmıştır. Son olarak, senaryolarda önerilen yöntemlerin performansları karşılaştırılırken T^2 kontrol grafiği (normal dağılım varsayımını gerektirdiğinden) dahil edilmemiştir.

Çok değişkenli gamma dağılımına uyan süreçler için düzenlenen ilk senaryoda (Gamma_1: $\theta_1 + \delta; \theta_2$), süreçteki kayma sadece dağılımın şekil parametresinde gerçekleştirilmiştir. Bu durumda PoC ve $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafiklerinin süreç dağılımının θ_1 parametresinde gerçekleşen kaymayı $\delta = 0,25$ 'dan itibaren yakalayabildiği, ancak I^2 kontrol grafiğinin süreçteki kaymayı ancak $\delta = 1,5$ birim ve ötesinde farklılaştığında yakalayabildiği söylenebilir.

Özellikle PoC kontrol grafiği kayma miktarı $\delta = 0,75$ 'in altında olduğu durumlarda I^2 ve $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafiklerinden daha iyi performans göstermiştir. Süreçteki kayma miktarı $\delta = 0,75$ 'in üzerinde olduğunda PoC ve $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafikleri I^2 kontrol grafiğinden daha başarılı olmasının yanı sıra birbirine yakın performans sergilemektedir. Değişkenler arasındaki ilişki baz alınarak incelendiğinde, değişkenler arasındaki korelasyon katsayısı

büyüdükçe I^2 kontrol grafiğinin performansında nispeten bir kötüleşme gözlemlenmiş, PoC ve $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafiklerinin performanslarının ise değişkenler arasındaki korelasyon yapısından etkilenmediği görülmüştür. Buradan, PoC ve $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafiklerinin çok değişkenli gamma dağılımına uyan süreçlerin θ_1 parametresinde bir kayma gerçekleştiğinde değişkenler arasındaki tüm korelasyon yapılarında iyi çalıştığı söylenebilir.

Çok değişkenli gamma dağılımına uyan süreçler için düzenlenen ikinci senaryoda (Gamma_2: $\theta_1; \theta_2 + \delta$), süreçteki kayma sadece dağılımın ölçek parametresinde meydana gelmiştir. Gamma_2 koşulları altında, I^2 kontrol grafiği süreçteki kaymayı ancak $\delta = 1,5$ birim uzaklaştığında, PoC ve $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafikleri ise süreçteki kaymayı $\delta = 0,25$ birim uzaklıktan itibaren yakalayabildiği görülmektedir. Bunun dışında, PoC kontrol grafiği, kayma miktarı $\delta = 1,0$ ve daha küçük olduğu durumlarda süreç şekil parametresinde gerçekleşen küçük kaymaları diğer yöntemlerden daha erken yakalayabildiği söylenebilir. Süreç dağılımının ölçek parametresindeki kayma miktarı $\delta = 1,5$ ve üzerinde olduğunda PoC ve $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafikleri I^2 kontrol grafiğinden daha iyi olmakla birlikte birbirine yakın performans sergilemektedir. Değişkenler arasındaki korelasyon yapısı bağlamında, korelasyon katsayısı büyüdükçe I^2 kontrol grafiklerinin performansının kötüleştiği gözlemlenirken, PoC ve $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafiklerinin performanslarının değişkenler arasındaki korelasyon yapısından etkilenmediği görülmektedir. Dolayısıyla, PoC ve $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafiklerinin çok değişkenli gamma dağılımına uyan süreçlerin ölçek parametresinde bir kayma gerçekleştiğinde değişkenler arasındaki tüm korelasyon yapılarında iyi çalıştığı söylenebilir.

Çok değişkenli gamma dağılımına uyan süreçler için düzenlenen üçüncü senaryo (Gamma_3: $\theta_1 + \delta; \theta_2 + \delta$), süreçteki kaymanın dağılımın hem şekil hem de ölçek parametrelerinde gerçekleştiği durumu temsil etmektedir. Gamma_3 senaryosunda I^2 kontrol grafiği küçük kayma miktarlarında bile süreçteki kaymayı erken yakalayabilmektedir. Dolayısıyla I^2 kontrol grafiğinin Gamma_3 koşulları altında Gamma_1 ve Gamma_2 senaryolarına göre daha iyi performans sergilediği belirtilmelidir. Öte yandan, değişkenler arasındaki ilişkinin her üç düzeyi için de süreçteki kaymayı yakalamada PoC ve $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafiklerin süreçteki kayma miktarının çok küçük

değerlerinde dahi I^2 kontrol grafiğinden daha hızlı olduğu görülmektedir. Ayrıca, I^2 kontrol grafiğinin $\delta = 1,5$ ve üzerindeki kayma miktarlarında, PoC ve $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafiklerinin ise tüm kayma miktarlarında değişkenler arasındaki korelasyon yapısından etkilenmedikleri söylenmelidir.

Çok değişkenli gamma dağılımına ilişkin süreçlerden elde edilen sonuçlar hem kendi içerisinde hem de dağılımın normal olduğu senaryolarla karşılaştırıldığında anlamlı farklılıkları işaret etmektedir. Örneğin, çok değişkenli normal dağılıma uyan süreçte $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafiği diğerlerinden belirgin şekilde daha iyi sonuç vermekte iken, çok değişkenli gamma dağılımına göre PoC kontrol grafiği önerilen diğer yöntemlere karşın üstünlük sağlamıştır. I^2 kontrol grafiği ise Gamma_3 senaryosu dışındaki tüm durumlarda ancak büyük kaymalarda iyi sonuç vermektedir. Değişkenler arasındaki korelasyonlar bağlamında değerlendirildiğinde, I^2 kontrol grafiğinin Gamma_3 senaryosu dışındaki tüm senaryolarda değişkenler arasındaki korelasyon katsayısından etkilendiği, PoC ve $I^2 - \text{PoC}$ kontrol grafiklerinin ise değişkenlerin korelasyon yapısından hiçbir şekilde etkilenmediği söylenebilir.

Önerilen yöntemler çok değişkenli normal dağılıma ve gamma dağılımına uyan süreçlerde karşılaşılan kontrol dışı durumun tespit edilmesinin yanı sıra bu farklılaşmaya neden olan değişken/değişkenlerin belirlenmesi konusunda da çözüm sunmaktadır. Bu çerçevede çok değişkenli normal ve gamma dağılımlarına uyan süreçlerde farklı kayma miktarları ve çeşitli korelasyon katsayılarına göre önerilen BBA, DVM ve hibrid BBA-DVM yaklaşımları ile değişimin kaynağının belirlenmesi problemi de incelenmiştir. Yapılan değerlendirmeler sonucunda önerilen yöntemlerin tüm senaryolarda $\delta = 0,5$ birim ve ötesinde meydana gelen kaymaya sebep olan değişken/değişkenleri doğru bir şekilde belirleyebildikleri görülmüştür. Ayrıca, süreçte meydana gelen kontrol dışı sinyalin kaynağının belirlenmesi değişkenler arasındaki korelasyon yapısından da etkilenmemektedir. Bu da önerilen yöntemlerin, aralarında bağımlılık bulunan değişkenlerle çalışıldığında bile süreçteki kaymaya sebep olan değişken/değişkenleri belirleyebildiğini ve literatürde yer alan birçok çalışmaya bu konuda üstünlük sağladığını gösteren önemli bir sonuçtur.

Yapılan çalışmadan elde edilen bulgulardan hareketle, bu çalışmanın literatürde yer alan benzerleriyle karşılaştırıldığında gerek BBA, gerek DVM ve gerekse de hibrid BBA-DVM

yaklaşımları bakımından oldukça farklı sonuçları ortaya koyduğu söylenebilir. İlk olarak, BBA yaklaşımını merkeze alan çalışmalarda birden fazla süreç izleme istatistiği elde edildiği için süreçteki kontrol dışı kaynağın belirlenmesinde hesaplama zorluğu yaşanmaktadır. Buna karşılık, bu çalışmada tek bir süreç izleme istatistiği kullanılarak belirtilen zorluğun üstesinden gelinmiştir. İkincisi, DVM yaklaşımı temelli çalışmalarda değişkenler arasındaki korelasyon yapısının dikkate alınmadığı görülmüştür. Ayrıca bu çalışmalarda süreçteki sinyalin kaynağının belirlenmesi problemi üzerinde durulmamış, sadece DVM'nin sınıflandırma özelliğinden faydalanılarak kontrol dışı durum saptaması yapılmıştır. Bu çalışmayla DVM yaklaşımının sinyal kaynağının belirlenmesinde etkili bir şekilde kullanılabileceği gösterilmiştir. Bunun yanında, DVM yönteminin değişkenler arasında yüksek korelasyonun olması durumunda dahi kullanılabileceği ortaya konulmuştur. Üçüncüsü, literatürde hibrid BBA-DVM yaklaşımının ele alındığı çalışmalarda tıpkı DVM yaklaşımında olduğu gibi sınıflandırma yoluyla süreçteki kaymanın tespit edilmesi konusu incelenmiştir. Bu çalışmada hibrit BBA-DVM yaklaşımı, süreçteki kaymaya neden olan değişken ya da değişkenleri saptamak üzere geliştirilmiştir. Öte yandan, çalışma ile hibrit BBA-DVM yaklaşımının çok değişkenli normal olmayan dağılıma uyan süreçlerde de işlevsel olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Çalışmada çok değişkenli süreç izleme probleminde kullanılan yöntemlere alternatif olabilecek yaklaşımlar üzerinde durulmuştur. Bu bağlamda üç değişkenli normal ve gamma dağılımlarına uyan süreçlere ilişkin çeşitli senaryolar geliştirilmiştir. Senaryolardan elde edilen sonuçlar süreçte meydana gelen kaymanın büyüklüğüne ve sürece dahil olan değişkenler arasındaki korelasyon yapısına göre değerlendirilmiştir. Bu değerlendirmeler yapılırken ilk olarak incelenen yöntemlerin süreçteki kaymayı belirlemedeki performansları irdelenmiştir. Normal dağılıma uyan süreçte, önerilen yöntemlerin performansları geleneksel T^2 yöntemi ile karşılaştırılmıştır. Ancak gamma dağılımına uyan senaryolarda, T^2 yönteminin normal dağılım varsayımı dikkate alınarak önerilen yöntemlerin kendi aralarında karşılaştırılmasına odaklanılmıştır. İkincisi, söz konusu yöntemlerin süreçteki kaymaya neden olan değişken/değişkenleri tespit etme durumunun incelenmesidir. Yapılan değerlendirmeler sonucunda alternatif yöntemlerin çeşitli koşullar altında daha iyi sonuçlar verdiği görülmüştür. Buna göre alternatif yöntemleri tümünden başarılı ya da başarısız olarak nitelendirmek mümkün değildir. Yöntemler farklı koşullarda farklı düzeylerde başarı sağlayabilmektedir. Örneğin, çok değişkenli normal dağılım sürecinde hibrit BBA-DVM

yaklaşımı diğer yöntemlere göre daha iyi performans gösterirken, çok değişkenli gamma dağılımına uyan süreçlerde DVM yaklaşımının diğer yöntemlere üstünlük sağladığı görülmüştür.

Önerilen yöntemler geliştirilmeye açıktır. Örneğin, değişken sayısının arttırılması yoluyla bahsi geçen yöntemlerin uygulama alanı genişletilebilir. Bunun dışında çok değişkenli bir süreçte kontrol dışı durum süreç dağılımında olabileceği gibi dağılım parametrelerinde de gerçekleşebilir. Bu çalışmada normal dağılıma uygun süreç için dağılımın ortalama vektöründe meydana gelen kayma dikkate alınmıştır. Buna ek olarak varyans-kovaryans matrisinde ve hem ortalama vektöründe hem de varyans-kovaryans matrisinde farklılaşma olması halinde yöntemlerin performansları değerlendirilebilir. Bunların yanında, çok değişkenli normal dağılıma uymayan süreçlerde temel alınan gamma dağılımından farklı olarak diğer çarpık dağılımlardan da faydalanılabilir. Ayrıca her bir değişkene ilişkin marjinal dağılımların farklı olduğu senaryolar geliştirmek de ileride yapılacak çalışmaları çeşitlendirilebilir.

KAYNAKLAR

- Alt, F. B. (1985). Multivariate Quality Control. Encyclopedia of Statistical Sciences, N. L. Johnson ve S. Kotz, (eds.) Wiley, New York.
- Amari, S., Cichocki, A. ve Yang, H. H. (1996). A New Learning Algorithm for Blind Signal Separation. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 757–763.
- Bakshi, B. R. (1998). Multiscale PCA with Application to Multivariate Statistical Process Monitoring. *American Institute Chemical Engineers Journal*, 44, 1596.
- Belouchrani, A., Abed-Meraim, K., Cardoso, J.-F. ve Moulines, E. (1997). A Blind Source Separation Technique Using Second-Order Statistics. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45(2), 434–444.
- Bissel, D. (1994). *Statistical Methods for SPC and TQM: Text In Statistical Science*, CRC Press.
- Boser, B. E., Guyon, I. M., Vapnik, V. N. (1992). A training algorithm for optimal margin classifiers, In *Fifth Annual Workshop on Computational learning Theory*, Pittsburgh, 144-152.
- Burges, C.J.C. (1998). A Tutorial on Support Vector Machines for Pattern Recognition, *Data Mining and Knowledge Discovery*, 2,121–167.
- Cardoso, J.-F. ve Souloumiac, A. (1993). Blind Beamforming for non Gaussian Signals. *IEEE Proceedings-F*, 140, 362–370.
- Chen, G. (1998). The Run Length Distributions of the R, s and s^2 Control Charts When σ Is Estimated, *The Canadian Journal of Statistics*, 26(2), 311-322.
- Chongfuangprinya, P., Kim, S. B., Park, S.-K. ve Sukchotrat, T. (2011). Integration of support vector machines and control charts for multivariate process monitoring. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 81(9), 1157-1173.
- Chua, M. ve Montgomery, D. C. (1992). Investigation and Characterization of a Control Scheme for Multivariate Quality Control. *Quality and Reliability Engineering International*, 8(1), 37–44.
- Cortes, C. ve Vapnik, V. N. (1995). Support Vector Networks. *Machine Learning*, 20, 1-25.
- Efron, B. ve Tibshirani, R. (1994). *An Introduction to the Bootstrap*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL.
- Foody, G. M. ve Mathur, A. (2004). Toward Intelligent Training of Supervised Image Classifications: Directing Training Data Acquisition for SVM Classification. *Remote Sensing of Environment*, 93, 107–117.

- Ge, Z. ve Song, Z. (2007). Process Monitoring Based on Independent Component Analysis-Principal Component Analysis (ICA-PCA) and Similarity Factors. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 46, 2054–2063.
- Girolami, M. (1991). *Self-Organising Neural Networks: Independent Component Analysis and Blind Source Separation*, Springer-Verlag, London.
- Hastie, T. ve Tibshirani, R. (1998). Classification by Pairwise Coupling. *The Annals of Statistics*, 26(2), 451–471.
- Hayter, A. J. ve Tsui, K.-L. (1994). Identification and Quantification in Multivariate Quality Control Problems. *Journal of Quality Technology*, 26(3), 197–208.
- Hotelling, H. (1947). Multivariate Quality Control. *Techniques of Statistical Analysis*, C. Eisenhart, M. W. Hastay, ve W. A. Wallis, eds., New York: McGraw-Hill.
- Hsu, C. C., Chen, L. S. ve Liu, C. H. (2010). A Process Monitoring Scheme Based on Independent Component Analysis and Adjusted Outliers. *International Journal of Production Research*, 48(6), 1727–1743.
- Hsu, C. C., Chen, M.-C. ve Chen, L.-S. (2010). Integrating Independent Component Analysis and Support Vector Machine for Multivariate Process Monitoring. *Computers & Industrial Engineering*, 59(1), 146–156.
- Hyvärinen, A. ve Oja, E. (2000). Independent Component Analysis: Algorithms and Applications. *Neural Networks*, 13(4–5), 411–430.
- Hyvärinen, A., Karhunen, E. ve Oja, E. (2001). *Independent Component Analysis*, Wiley Interscience.
- Jackson, J. E. (1959). Quality Control Methods for Several Related Variables. *Technometrics*, 1, 359.
- Jackson, J. E. ve Mudholkar, G. S. (1979). Control Procedures for Residuals Associated with Principal Component Analysis, *Technometrics*, 21, 341–349.
- Jackson, J. E. (1980). Principal Components and Factor Analysis: Part I—Principal Components. *Journal of Quality Technology*, 12(4), 201–213.
- Jackson, J. E. (1991). *A User's Guide to Principal Components*, Wiley, New York.
- Jensen, W. A., Jones-Farmer, L. A., Champ, C. W. ve Woodall, W. H. (2006). Effects of Parameter Estimation on Control Chart Properties: A Literature Review, *Journal of Quality Technology*, 38, 95–108.
- Jutten, C., ve Herault, J. (1991). Blind Separation of Sources: I. An Adaptive Algorithm Based on Neuromimetic Architecture. *Signal Process*, 24, 1.

- Kano, M., Ohno, H., Hasebe, S. ve Hashimoto, I. (2001). A New Statistical Process Monitoring Method Using Principal Component Analysis. *Computer Chemical Engineering*, 25, 1103.
- Kano, M., Tanaka, S., Hasebe, S., Hashimoto, I. ve Ohno, H. (2003). Monitoring Independent Components for Fault Detection. *American Institute Chemical Engineers Journal*, 49(4), 969-976.
- Karush, W. (1939). *Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Constraints*, Master's thesis, Department of Mathematics, University of Chicago.
- Kecman, V. (2001). *Learning and Soft Computing: Support Vector Machines, Neural Networks, and Fuzzy Logic Models*. Massachusetts Institute of Technology Press, Cambridge, Massachusetts.
- Kuhn, H. W., Tucker, A. W. (1951). *Nonlinear programming*, In *Proceedings of the 2nd Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability*, University of California Press, Berkeley, 481-492.
- Langlois, D., Chartier, S. ve Gosselin, D. (2010). An Introduction to Independent Component Analysis: InfoMax and FastICA Algorithms. *Tutorials in Quantitative Methods for Psychology*, 6(1), 31-38.
- Lee, J. M., Qin, S. J. ve Lee, I. B. (2006). Fault detection and diagnosis based on modified independent component analysis. *American Institute Chemical Engineers Journal*, 52(10), 3501-3514.
- Lee, J.-M., Yoo, C.K. ve Lee, I.-B. (2004). Statistical process monitoring with independent component analysis. *Journal of Process Control*, 14, 467-485.
- Liao, W.H. (2008). *An Introduction to Support Vector Machines*. www.cs.nccu.edu.tw/~whliao/pr2008/intro_SVM.ppt
- Liu, Y. (2009). Wavelet Feature Extraction for High-Dimensional Microarray Data. *Neurocomputing*, 72, 985-990.
- Lowry, C. A ve Montgomery, D. C. (1995). A Review of Multivariate Control Charts. *IIE Transactions*, 27(6), 800-810.
- Lu, C. J., Wu, C. M., Keng, C. J. ve Chiu, C. C. (2006). Integrated application of SPC/EPC/ICA and neural networks. *International Journal of Production Research*, 46(4), 873-893.
- MacGregor, J. F., Jaeckle, C., Kiparissides, C. ve Koutoudi, M. (1994). Process monitoring and diagnosis by multiblock PLS methods, *American Institute Chemical Engineers Journal*, 40(5), 826-838.
- Mason, R. L. ve Young J. C. (2000). Interpretive Features of a T(2) Chart in Multivariate SPC. *Quality Progress*, 33(4), 84-89.

- Mason, R. L., Tracy, N. D. ve Young, J. C. (1995). Decomposition of T2 for Multivariate Control Chart Interpretation. *Journal of Quality Technology*, 27(2), 109–119.
- Mason, R. L., Tracy, N. D. ve Yong, J. C. (1997). A practical approach for interpreting multivariate T2 control chart signals. *Journal of Quality Technology*, 29(4), 396–406.
- Mitra, A. (1998). *Fundamentals of Quality Control and Improvement*, 2nd Edition, Prentice Hall, New Jersey.
- Montgomery, D. C. (2009). *Introduction to Statistical Quality Control*, 6th Edition, Wiley: New York, USA.
- Murphy, B. J. (1987). Screening Out-of-Control Variables with T2 Multivariate Quality Control Procedures. *The Statistician*, 36(5), 571–583.
- Platt, J. (2000). Probabilistic outputs for support vector machines and comparison to regularized likelihood methods. *Advances in Large Margin Classifiers*, A. Smola, P. Bartlett, B. Scholkopf, and D. Schuurmans, eds., Cambridge, MA, 61–74.
- Runger, G. C., Alt, F. B. ve Montgomery, D. C. (1996b). Contributors to a Multivariate Statistical Process Control Signal. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, 25(10), 2203–2213.
- Sahonero-Alvarez, G. ve Calderon, H. (2017). A Comparison of SOBI, FastICA, JADE and Infomax Algorithms, *Proceedings of the 8th International Multi-Conference on Complexity, Informatics and Cybernetics*, Orlando, USA, 17-22.
- Shao, E.Y., Lu, C.-J. ve Wang, Y.-C. (2012). A Hybrid ICA-SVM Approach for Determining the Quality Variables at Fault in a Multivariate Process. *Mathematical Problems in Engineering*, 18(1), 1-12.
- Shawe-Taylor, J. ve Cristianini, N. (2000). *An Introduction to Support Vector Machines and Other Kernel-Based Learning Methods*, Cambridge University Press, New York.
- Sun, R. ve Tsung, F. (2003). A Kernel-distance-based multivariate control chart using support vector methods. *International Journal Production Research*, 41(13), 2975–2989.
- Stapenhurst T., (2005). Mastering Statistical Process Control – A Handbook for Performance Improvement Using Cases, *Elsevier*, ISBN:0-7506-6529-7
- Tolun, S. (2008). *Destek Vektör Makineleri: Banka Başarısızlığının Tahmini Üzerine Bir Uygulama*. Doktora Tezi, İşletme Bölümü, İstanbul Üniversitesi, İstanbul.
- Vapnik, V. N. ve Chervonenkis, A. J. (1968). On the uniform convergence of relative frequencies of events to their probabilities, *Academy of Sciences of the United Soviet Socialist Republic*, 4, 181.
- Vapnik, V. N. (1995). *The nature of statistical learning theory*. New York: Springer-Verlag.

- Vapnik, V. N. (1998). *Statistical learning theory*. John Wiley and Sons, New York.
- Walpole, R., Myers, R., Myers, S. ve Ye, K. (2012). *Probability and Statistics for Engineers and Scientists*, 9th Edition, Pearson Education, Inc., USA.
- Wasterhuis, J. A., Gurden, S. P. ve Smilde, A. K. (2000). Generalized Contribution Plots in Multivariate Statistical Process Monitoring. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 51, 95–114.
- Wold, S., Geladi, P., Esbensen, K. ve Ohman, J. (1987). Multi-Way Principal Components and PLS Analysis. *Journal of Chemometrics*, 1, 41-56.
- Woodall, W.H. ve Montgomery, D.C. (1999). Research Issues and Ideas in Statistical Process Control, *Journal of Quality Technology*, 31(4), 376–386.
- Yoo, C. K., Lee, J. M., Vanrolleghem, P. A. ve Lee, I. B. (2004). On-line Monitoring of Batch Processes Using Multiway Independent Component Analysis. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 71(2), 151–163.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ÖZDEMİR GÜLER, Zümre
 Uyruğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 16.04.1986, İstanbul
 Medeni hali : Evli
 Telefon : 0 (530) 495 56 78
 e-mail : zumre.ozdemirguler@gazi.edu.tr



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Doktora	Gazi Üniversitesi / İstatistik	Devam ediyor
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi / İstatistik	2014
Lisans	Yıldız Teknik Üniversitesi / İstatistik	2010
Lise	TEB Ataşehir Lisesi	2004

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2018-Halen	Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2011-2018	Gazi Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2010-2011	Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

- Özdemir Güler, Z. ve Bakır, M. A. (2019). Signal Detection Based on Independent Components in Multivariate Statistical Quality Control. *Econometrics Letters*, 5(2), 14-24.
- Özdemir Güler, Z. ve Bakır, M. A. (2019). Performance of Methods Determining Structural Break in Linear Regression Models. *International Econometric Review*, 11(2), 70-83.

- Güler, M. A., Özdemir Güler, Z. (2017). Ekonomik İş Birliği ve Kalkınma Örgütü Ülkelerinde Sendika Yoğunluğu-İşsizlik İlişkisi. İş ve Hayat, 3(5).
- Beşirli, H., Bakır, M. A., Koçancı, M., Özdemir Güler, Z., Yalçınkaya Güllü, M. (2016). Sosyal Konut Uygulamaları ve Sosyal Dışlanma Toplu Konut İdaresi Yoksul Konutları Örneği. Manas Sosyal Araştırmalar Dergisi, 5(1).
- Beşirli, H., Bakır, M. A., Koçancı, M., Özdemir Güler, Z., Yalçınkaya Güllü, M. (2016). Sosyal Konut Uygulamaları ve Yoksulluğun Yönetimi Üzerine Ampirik Bir Çalışma, Siyasal Kitabevi, Basım sayısı:1, ISBN:978-605-9221-27-6, Türkçe(Bilimsel Kitap), (Yayın No: 3278826)
- Özdemir Güler, Z. (2016). Mühendisler ve Fen Bilimciler İçin Olasılık ve İstatistik, Bölüm adı:(Bayesgil İstatistik), Palme Yayıncılık, Editör:Mehmet Akif BAKIR, Basım sayısı:1, ISBN:978-605-355-579-7, Türkçe(Kitap Tercümesi).
- Özdemir Güler, Z. (2016). Mühendisler ve Fen Bilimciler İçin Olasılık ve İstatistik, Bölüm adı:(İstatistiksel Kalite Kontrolü) , Palme Yayıncılık, Editör:Mehmet Akif BAKIR, Basım sayısı:1, ISBN:978-605-355-579-7, Türkçe(Kitap Tercümesi), (Yayın No: 3278872)

Hobiler

Resim, Müzik, Kitap



GAZİ GELECEKTİR..