

**f-CEBİRLERİ VE TİP-1 CEBİRLERİNDE
GELFAND-MAZUR TEOREMİ**

Mustafa ASLANTAŞ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ARALIK 2011
ANKARA**

Mustafa ASLANTAŞ tarafından hazırlanan "f-Cebirleri ve Tip-1 Cebirlerinde Gelfand-Mazur Teoremi" adlı tezin Yüksek Lisans Tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Bahri TURAN

.....

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Nurhayat İSPİR

.....

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi

Prof. Dr. Bahri TURAN

.....

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi

Doç. Dr. Ayşe UYAR

.....

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi

16 /12 /2011

Bu tez Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Mustafa ASLANTAŞ

**f-CEBİRLERİNDE VE TİP-1 CEBİRLERİNDE
GELFAND-MAZUR TEOREMİ
(Yüksek Lisans Tezi)**

Mustafa ASLANTAŞ

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Aralık 2011

ÖZET

Bu tezde sıralı cebirlerde Gelfand-Mazur Teoremi üzerinde çalışma yapılmıştır. Önce birimli sıralı cebirlerin bazı özellikleri incelenmiş, sonra f-cebirlerinde Gelfand-Mazur teoremi verilmiştir. Son olarak f-cebirlerinden daha genel olan tip-1 cebirlerinde inceleme yapılmıştır.

Bilim Kodu : 204.1.095

Anahtar Kelimeler : Örgü cebiri, Cebir ve Örgü izomorfizmleri, f-cebirleri, Tip-1 cebirleri, Banach örgü cebirleri

Sayfa Adedi : 93

Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Bahri TURAN

**GELFAND-MAZUR THEOREM
ON f-ALGEBRAS AND TYPE-1 ALGEBRAS**

(M. Sc. Thesis)

Mustafa ASLANTAŞ

**GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

December 2011

ABSTRACT

In this thesis, Gelfand-Mazur Theorem was studied on ordered algebras. Firstly, some porperties of ordered algebras with identity were investigated. Then Gelfand-Mazur Theorem was given on f-algebras. Lastly, some investigations were carried out on type-1 algebras which are more general than f-algebras.

Science code : 204.1.095

**Key words : Lattice algebra, Algebra and lattice isomorphism,
f-algebras, Type-1 algebras, Banach lattice algebras.**

Number of pages : 93

Supervisor : Prof. Dr. Bahri TURAN

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlarken benden bilgi ve deneyimlerini esirgemeyen, değerli yorum ve fikirleri ile bana yön veren sayın hocam Prof. Dr. Bahri TURAN'a ve çalışma süresince bana her türlü maddi desteği sağlayan bilimin ve bilim adamının destekçisi TUBİTAK'a, aileme ve yakın arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISATLMALAR.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	3
2.1. Riesz Uzayları.....	3
2.2. Operatörler ve Örgü Homomorfizması.....	11
2.3. Cebir ve f-Cebirleri.....	23
3. f-CEBİRLERİNDE GELFAND-MAZUR TEOREMİ.....	38
4. TİP-1 UZAYLARINDA GELFAND-MAZUR TEOREMİ.....	56
5. SONUÇ.....	84
KAYNAKLAR.....	85
ÖZGEÇMİŞ.....	86

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
Orth(E)	E üzerinde tanımlı orthomorfizmler
I_x	x tarafından üretilen ideal
B_x	x tarafından üretilen band
x^+	x'in pozitif kısmı
x^-	x'in negatif kısmı
$x \wedge y$	x ile y'nin supremumu
$x \vee y$	x ile y'nin infimumu
$ x $	x'in modülü (mutlak değeri)
$ T $	T'nin modülü (mutlak değeri)
E^+	E'nin pozitif kısmı
A^d	A kümesinin dik tümleyeni
$x_a \uparrow x$	Yukarı yönlendirilmiş ve supremumu x olan ağ
$x_a \downarrow x$	Aşağı yönlendirilmiş ve infimumu x olan ağ
$x \perp y$	Birbirine dik elemanlar
$A \perp B$	Birbirine dik kümeler
Z(E)	Merkez operatörlerin kümesi
L(E,F)	Operatörlerin vektör uzayı
$L_b(E, F)$	Sıra sınırlı operatörler uzayı
$\wp(E)$	E üzerindeki projeksiyonların kümesi
dimA	A'nın boyutu
$E \oplus F$	E ile F'nin direkt toplamı
$\sigma(x)$	x'in spektrum elemanlarının kümesi

Simgeler**Açıklama** **$r(x)$** x 'in spektral yarıçapı **$\rho(x)$** x 'in rezolvant elemanlarının kümesi

1. GİRİŞ

A normlu cebir olmak üzere eğer A bu norma göre tam uzay ise A 'ya Banach cebiri denir.

A Riesz uzayı ve cebir olsun. Eğer her $u, v \in A^+$ için $u \cdot v \in A^+$ oluyorsa A 'ya örgü cebiri denir.

A örgü cebiri ve $u, v \in A$ olmak üzere $u \wedge v = 0$ iken her $w \in A^+$ için $(uw) \wedge v = 0$ ve $(wu) \wedge v = 0$ oluyorsa A 'ya f -cebiri denir.

A örgü cebiri olmak üzere her $a \in A^+$ için $a(e+a)^{-1} \geq 0$ şartını sağlıyorsa A 'ya tip-1 örgü cebiri denir.

" A birimli kompleks Banach cebiri olmak üzere A 'daki sıfırdan farklı her elemanın tersi varsa A , $\mathbb{C}$ 'ye izometrik olarak eşyapılıdır"

Bu önerme Gelfand-Mazur teoremi olarak bilinir.

Huijsmans [8] 'de Gelfand-Mazur teoremini sıralı cebirlerde aşağıdaki biçimde sormuştur.

" A reel örgü cebiri ve $e > 0$ birim elemanı olmak üzere eğer pozitif her elemanın tersi varsa A , $\mathbb{R}$ 'ye örgü ve cebir izomorfik midir?"

Yaptığımız bu çalışmada bu sorunun cevabının f -cebirlerinde ve tip-1 cebirlerinde olumlu olduğu Huijsmans'ın [7] ve [8], Scheffold'ın [12] ve [13] makaleleri göz önüne alınarak verilmiştir.

Bu tezin ilk bölümünde gerekli olan temel tanım ve teoremler örneklerle açıklanarak verilmiştir.

İkinci bölümünde Huijsmans [7] ve [8] makaleleri göz önüne alınarak birimli örgü cebirlerinin bazı özellikleri elde edilmiştir. [8]'da Huijsmans'ın f-cebirleri için verdiği Gelfand-Mazur teoremi ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde Scheffold'un tip-1 cebirlerini incelediği [12] ve [13] makaleleri incelenmiş ve Gelfand-Mazur teoremi tip-1 cebirlerinde verilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar ve bazı sonuçlar verilmiştir.

2.1. Riesz Uzayları

2.1. Tanım :

E boştan farklı bir küme olsun. E üzerinde tanımlı " $\leq$ " bağıntısı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, " $\leq$ " bağıntısına (kısmi)sıralama bağıntısı, $(E, \leq)$ ikilisine (kısmi)sıralı küme denir [2].

i) Her $x \in E$ için $x \leq x$ (yansıma özelliği)

ii) Her $x, y \in E$ için $x \leq y$ ve $y \leq x$ iken $x=y$ (ters simetri özelliği)

iii) Her $x, y, z \in E$ için $x \leq y$ ve $y \leq z$ iken $x \leq z$ (geçişme özelliği)

2.2 Tanım :

$(E, \leq)$ kısmi sıralı küme ve $A \subseteq E$ olsun

a) Her $x \in A$ için $x \leq a$ ($a \leq x$) olacak şekilde bir $a \in E$ varsa buna A 'nın bir üst(alt) sınırı denir. A 'nın bir üst (alt) sınırı varsa, A 'ya üstten (alttan) sınırlı küme denir. A 'nın hem üst hem de alt sınırı varsa A 'ya sıra sınırlı küme denir [2].

b) Her $x \in A$ için $x \leq a$ ($a \leq x$) olacak şekilde bir $a \in A$ varsa a 'ya A 'nın en büyük (küçük) elemanı veya maksimal (minimal) elemanı denir ve maks A (min A) ile gösterilir [2].

c) A'nın üst (alt) sınırlarının en küçüğü (büyüğü) varsa, buna A kümesinin üst (alt) sınırlarının en küçüğü (büyüğü) ya da supremumu (infimumu) denir ve $\sup A$ ($\inf A$) ile gösterilir [2].

A yerine $\{x, y\}$ kümesi alınırsa $\sup\{x, y\} = x \vee y$ ve $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ şeklinde gösterilir.

2.3. Tanım :

$(E, \leq)$ sıralı bir küme olmak üzere, her $x, y \in E$ için $x \vee y \in E$ ve $x \wedge y \in E$ ise E kümesine örgü denir [2].

2.4. Tanım :

$(E, \leq)$ örgü olsun. Her $x, y, z \in E$ için $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ sağlanıyorsa E 'ye dağılmalı örgü denir [2].

2.5. Tanım :

$(E, \leq)$ örgü olsun. E 'nin en küçük elemanı varsa buna sıfır (null) eleman denir ve θ ile gösterilir. E 'nin en büyük elemanı varsa buna birim (unit) eleman denir ve e veya I ile gösterilir [2].

2.6. Tanım :

E gerçel vektör uzayı ve üzerindeki sıralama bağıntısı " $\leq$ " olmak üzere, her $x, y, z \in E$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}^+$ için $x \leq y$ iken,

$$x+z \leq y+z \quad \text{ve} \quad \alpha x \leq \alpha y$$

koşullarını sağlayan E uzayına sıralı vektör uzayı denir. E sıralı vektör uzayının $x \geq 0$

bağıntısını sağlayan elemanlarına pozitif eleman, $E^+ = \{ x \in E : x \geq 0 \}$ kümesine de E 'nin pozitif kısmı denir [2].

2.7. Tanım :

E sıralı vektör uzayı ve $V \subseteq E$ alt vektör uzayı olmak üzere E 'den gelen sıralama ile V 'ye sıralı alt vektör uzayı denir [2].

2.8. Tanım :

E sıralı vektör uzayı olmak üzere her $x, y \in E$ için $x \vee y \in E$ veya $x \wedge y \in E$ oluyorsa E uzayına Riesz uzayı denir [2].

2.9. Tanım :

E Riesz uzayı ve $G \subseteq E$ alt vektör uzayı olsun. Her $x, y \in E$ için $x \vee y \in G$ veya $x \wedge y \in G$ oluyorsa G 'ye E 'nin Riesz alt vektör uzayı denir [2].

Örnek :

i) $\mathbb{R}^n$ kümesi her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$x \leq y \Leftrightarrow \forall i=1,2,3,\dots,n \text{ için } x_i \leq y_i$$

sıralaması ile Riesz uzayıdır.

ii) (Ω, τ) topolojik uzay olmak üzere $C(\Omega) = \{ f : f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ sürekli fonksiyon} \}$ kümesi

$$f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in \Omega \text{ için } f(x) \leq g(x) \}$$

noktasal sıralaması ile Riesz uzayıdır.

2.10. Tanım :

Bir Riesz uzayının boştan farklı ve üstten sınırlı (sayılabilir) her alt kümesinin supremumu veya boştan farklı ve alttan sınırlı (sayılabilir) her alt kümesinin infimumu varsa bu uzaya Dedekind tam (σ -Dedekind tam) Riesz uzayı denir [2].

2.11. Tanım :

E bir Riesz uzayı ve $x, y, z \in E$ olmak üzere, aşağıdaki önermeler doğrudur [2].

$$1) x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)] \text{ ve } x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]$$

$$2) x + y = (x \wedge y) + (x \vee y)$$

$$3) x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z) \text{ ve } x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$$

$$4) \lambda \geq 0 (\lambda \in \mathbb{R}) \lambda (x \vee y) = \lambda x \vee \lambda y \text{ ve } \lambda (x \wedge y) = \lambda x \wedge \lambda y$$

2.12. Tanım :

E Riesz uzayı ve $x \in E$ olmak üzere;

i) $x^+ = x \vee 0$ elemanına x'in pozitif kısmı denir.

ii) $x^- = (-x) \vee 0$ elemanına x'in negatif kısmı denir.

iii) $|x| = x \vee (-x)$ elemanına x'in modülü (mutlak değeri) denir.

2.1. Teorem :

E Riesz uzayı ve $x \in E$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır [2].

$$i) x = x^+ - x^-$$

$$ii) |x| = x^+ + x^-$$

$$iii) x^+ \wedge x^- = 0$$

Ayrıca $x = y - z$ ve $y \wedge z = 0$ ise $y = x^+$, $z = x^-$ dir.

2.2. Teorem :

E Riesz uzayı ve $x, y \in E$ olsun. Aşağıdaki önermeler doğrudur [2].

$$i) x \vee y = \frac{1}{2} (x + y + |x - y|) \text{ ve } x \wedge y = \frac{1}{2} (x + y - |x - y|)$$

$$ii) |x - y| = (x \vee y) - (x \wedge y)$$

$$iii) |x| \vee |y| = \frac{1}{2} (|x+y| + |x-y|)$$

$$iv) |x| \wedge |y| = \frac{1}{2} (|x+y| - |x-y|)$$

Sonuç :

E sıralı vektör uzayı olsun. Aşağıdakiler denktir [2].

i) E Riesz uzayıdır.

ii) Her $x \in E$ için $x^+ \in E$

iii) Her $x \in E$ için $x^- \in E$

iv) Her $x \in E$ için $|x| \in E$

2.3. Teorem :

E Riesz uzayı, $x, y, z \in E$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır [2].

$$i) \quad ||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$

$$ii) \quad |x \vee z - y \vee z| \leq |x - y| \text{ ve } |x \wedge z - y \wedge z| \leq |x - y|$$

$$iii) \text{ Eğer } x, y, z \geq 0 \text{ ise } x \wedge (y + z) \leq (x \wedge y) + (x \wedge z)$$

2.13. Tanım :

E Riesz uzayı ve $x, y \in E$ olsun. Eğer $|x| \wedge |y| = 0$ ise x ile y birbirine diktir denir ve bu durum $x \perp y$ biçiminde gösterilir.

$\emptyset \neq A \subseteq E$ olmak üzere, $A^d = \{ x \in E : \text{Her } y \in A \text{ için } x \perp y \}$ kümesine A kümesinin dik tümleyeni denir. $A, B \subseteq E$ alındığında her $x \in A$ ve her $y \in B$ için $x \perp y$ oluyorsa A ile B kümeleri birbirine diktir denir ve $A \perp B$ biçiminde gösterilir [2].

2.14. Tanım :

E Riesz uzayı ve $A, B \subseteq E$ olmak üzere, aşağıdaki tanımlamaları yazabiliriz [2].

$$i) A^+ = \{a^+ : a \in A\}$$

$$ii) A^- = \{a^- : a \in A\}$$

$$iii) |A| = \{|a| : a \in A\}$$

$$iv) x \in E, x \vee A = \{x \vee a : a \in A\}$$

$$v) x \in E, x \wedge A = \{x \wedge a : a \in A\}$$

$$vi) A \vee B = \{a \vee b : a \in A, b \in B\}$$

$$vii) A \wedge B = \{a \wedge b : a \in A, b \in B\}$$

2.4. Teorem :

E bir Riesz uzayı ve $\emptyset \neq A \subseteq E$ olsun. Eğer $\sup A$ var ise her $x \in E$ için $\sup(x \wedge A)$ var ve

$$\sup(x \wedge A) = x \wedge \sup A$$

dır. Eğer $\inf A$ var ise her $x \in E$ için $\inf(x \vee A)$ var ve

$$\inf(x \vee A) = x \vee \inf A$$

dır [2].

2.15. Tanım :

$\Lambda \neq \emptyset$ bir küme ve üzerinde “ $\leq$ ” bağıntısı verilsin. Aşağıdaki önermeler sağlanırsa Λ kümesine “ $\leq$ ” bağıntısıyla (yukarı) yönlendirilmiş küme denir [2].

i) Her $\lambda \in \Lambda$ için $\lambda \leq \lambda$

ii) Her $\lambda, \alpha, \beta \in \Lambda$ için $\lambda \leq \beta$ ve $\beta \leq \alpha$ iken $\lambda \leq \alpha$

iii) Her $\lambda, \beta \in \Lambda$ için $\lambda \leq \alpha$ ve $\beta \leq \alpha$ olacak şekilde bir $\alpha \in \Lambda$ vardır.

2.16. Tanım :

$(\Lambda, \leq)$ yönlendirilmiş kümesinden herhangi bir X kümesine tanımlı her fonksiyona X içinde bir ağ (net) denir.

2.17. Tanım :

(x_λ) , E Riesz uzayında bir ağ olmak üzere her $x_\alpha, x_\beta \in (x_\lambda)$ için E 'deki sıralamaya göre $x_\alpha \leq x_\gamma$ ve $x_\beta \leq x_\gamma$ olacak şekilde bir $x_\gamma \in (x_\lambda)$ varsa (x_λ) ağı yukarı yönlendirilmiş denir ve $x_\lambda \uparrow$ şeklinde gösterilir. $x_\lambda \uparrow$ ve $\sup(x_\lambda) = x$ elemanı E içinde varsa $x_\lambda \uparrow x$ biçiminde gösterilir.

Benzer şekilde her $x_\alpha, x_\beta \in (x_\lambda)$ için E 'deki sıralamaya göre $x_\gamma \leq x_\alpha$ ve $x_\gamma \leq x_\beta$ olacak şekilde $x_\gamma \in (x_\lambda)$ varsa (x_λ) ağı aşağı yönlendirilmiştir denir ve $x_\lambda \downarrow$ şeklinde gösterilir. $x_\lambda \downarrow$ ve $\inf(x_\lambda) = y$ elemanı E içinde varsa $x_\lambda \downarrow y$ biçiminde gösterilir. (x_λ) ağı yerine herhangi bir $A \subseteq E$ alt kümesi alındığında, $A \uparrow$ ve $\sup A = x$, E içinde

varsa $A \uparrow x$ biçiminde gösterilir. $A \downarrow$ ve $\inf A = y$, E içinde varsa $A \downarrow y$ biçiminde gösterilir [2].

2.18. Tanım :

E Riesz uzayında her $x \in E^+$ için $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\frac{1}{n}x \downarrow 0$ ise E 'ye Arşimedsel (Archimedean) Riesz uzayı denir [2].

2.2. Operatörler ve Örgü Homomorfizması

2.19. Tanım :

E ve F iki vektör uzayı ve $T : E \rightarrow F$ dönüşüm olsun. Her $x, y \in E$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için,

$$T(x+y) = T(x) + T(y)$$

$$T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

koşulları sağlanıyorsa T 'ye lineer dönüşüm adı verilir. Lineer dönüşüm yerine operatör kelimesi, $T(x)$ yerine Tx gösterimi de kullanılabilir [2].

2.20. Tanım :

E ve F iki sıralı vektör uzayı $T : E \rightarrow F$ operatör olsun. Her $x \in E^+$ için $Tx \geq 0$ oluyorsa T operatörüne pozitif operatör denir ve $T \geq 0$ veya $0 \leq T$ biçiminde gösterilir [2].

2.21. Tanım :

E ve F Riesz uzayları olmak üzere, E 'den F içine tanımlanan bütün operatörlerin kümesi $L(E, F)$ ile gösterilir.

Her $S, T \in L(E, F)$ için " $S \leq T \Leftrightarrow T - S \geq 0$ " şeklinde tanımlanan sıralama bağıntısı ile $L(E, F)$ sıralı vektör uzayıdır. [2]

2.22. Tanım :

E ve F Riesz uzayları olsun. $T : E \rightarrow F$ operatörü için $T \vee (-T)$ varsa bu supremuma T operatörünün modülü denir ve $|T|$ ile gösterilir [2].

Sonuç :

E ve F Riesz uzayları, $T : E \rightarrow F$ operatör olmak üzere $|T|$ var ise her $x \in E^+$ için,

$$|Tx| \leq |T|(x)$$

eşitsizliği sağlanır [2].

2.23. Tanım :

E ve F Riesz uzayları ve $T : E \rightarrow F$ operatör olsun. Her $x, y \in E$ için $x \perp y$ iken $Tx \perp Ty$ oluyorsa, T 'ye dikliği koruyan operatör denir [2].

2.24. Tanım :

E Riesz uzayı olsun. $[x, y] = \{z \in E : x \leq z \leq y\}$ kümesine sıralı aralık, $A \subseteq E$ için $A \subseteq [x, y]$ olacak şekilde $x, y \in E$ varsa A 'ya sıra sınırlı küme denir [2].

Sonuç :

E Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ olmak üzere, A 'nın sıra sınırlı olması için gerekli ve yeterli koşul $A \subseteq [-x, x]$ olacak şekilde en az bir $x \in E^+$ elemanının var olmasıdır [2].

2.25. Tanım :

E ve F Riesz uzayları, $T:E \rightarrow F$ operatör olsun. Eğer T operatörü E 'deki her sıra sınırlı kümeyi F 'deki sıra sınırlı kümeye dönüştürüyorsa T operatörüne sıra sınırlı operatör denir.

E 'den F 'ye tanımlanan bütün sıra sınırlı operatörlerin kümesi $L_b(E,F)$ ile gösterilir.

$T_1, T_2 \in L_b(E,F)$ için

$$T_1 \leq T_2 \Leftrightarrow \text{Her } x \in E^+ \text{ için } T_1(x) \leq T_2(x)$$

sıralama bağıntısıyla $L_b(E,F)$ bir sıralı vektör uzayıdır. F Dedekind tam ise $L_b(E,F)$ Dedekind tamdır [2].

2.5. Teorem :

Her pozitif operatör sıra sınırlıdır [2].

2.26. Tanım :

E Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ olsun [2].

1) Her $y \in E$ ve $x \in A$ için $|y| \leq |x|$ iken $y \in A$ oluyorsa A 'ya katı küme denir.

2) A , E 'nin katı alt uzayı ise A 'ya E içinde (sıra) ideal denir.

3) A , E 'de ideal ve her $(x_n) \subseteq A$ ($n=1,2,3,\dots$) için $\sup(x_n)=x \in E$ iken $x \in A$ oluyorsa, A 'ya E içinde σ -ideal denir.

4) A , E 'de ideal ve her $B \subseteq A$ için $\sup B=b \in E$ iken $b \in A$ oluyorsa, A ideale E

içinde band denir.

5) $\emptyset \neq A \subseteq E$ olsun. A 'yı kapsayan en küçük ideale A 'nın ürettiği ideal denir ve A kümesinin ürettiği ideal I_A ile gösterilir.

6) $\emptyset \neq A \subseteq E$ olsun. A kümesini kapsayan en küçük banda A 'nın ürettiği band denir ve A kümesinin ürettiği band B_A ile gösterilir.

Sonuç :

Her (sıra) ideal bir Riesz alt uzayıdır [2].

2.6. Teorem :

A ve B , E de ideal ise $A \cap B$ ve $A+B$, E de idealdir [2].

2.27. Tanım :

E Riesz uzayı ve G , E nin Riesz alt uzayı olsun. Eğer her $x \in E^+$ için $0 < y \leq x$ olacak şekilde bir $y \in G$ varsa G 'ye E içinde sıra yoğun (order dense) denir [2].

2.7. Teorem :

E Riesz uzayı, $A \subseteq E$ ideal olsun [2].

1) A 'nın E de sıra yoğun olması için gerekli ve yeterli koşul $A^d = \{0\}$ olmasıdır.

2) $A \oplus A^d$ ideali E içinde sıra yoğundur.

3) A ideali A^{dd} içinde sıra yoğundur.

2.8. Teorem :

E Arşimedsel Riesz uzayı, $\emptyset \neq A \subseteq E$ olsun. $B_A = A^{dd}$ dir. Bu durumda A band ise $A = A^{dd}$ dir [2].

2.9. Teorem :

E Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ olsun. I_A , A 'nın ürettiği ideali göstermek üzere,

$$I_A = \{ x \in E : \exists x_1, x_2, \dots, x_n \in A, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+ \ni |x| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|, n \in \mathbb{N} \}$$

dir [2].

Sonuç :

E Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ olsun. $A = \{x\}$ ise ürettiği ideal şöyledir

$$I_A = I_x = \{ y \in E : \exists \lambda \in \mathbb{R}^+, |y| \leq \lambda |x| \}$$

2.10. Teorem :

E Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ ideal olmak üzere

$$B_A = \{ x \in E : \exists (x_\alpha) \subseteq A^+, 0 \leq x_\alpha \uparrow |x| \}$$

kümesine A 'nın ürettiği band denir ve B_A ile gösterilir [2].

Sonuç :

E Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ ideal olsun. B_A , A 'nın ürettiği band olmak üzere,

$$A = \{x\} \Rightarrow B_A = B_x = \{y \in E: |y| \wedge n|x| \uparrow |y|\}$$

olur [2].

2.28. Tanım :

E Riesz uzayı ve $0 < e \in E$ olsun [2].

1) $I_e = E$ ise e 'ye güçlü birim (strong unit) denir.

2) $B_e = E$ ise e 'ye zayıf birim (weak unit) denir.

2.29. Tanım :

E Riesz uzayında bir B bandı için $E = B \oplus B^d$ ise B 'ye projeksiyon band denir. Bir Riesz uzayında her band, projeksiyon band ise bu uzaya projeksiyon özelliğine sahiptir denir [2].

Dedekind tam Riesz uzayları projeksiyon özelliğine sahiptir.

2.11. Teorem :

E Riesz uzayı ve B bir ideal olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir [2].

i) B projeksiyon banddır. Yani $E = B \oplus B^d$ dir.

ii) Her $x \in E^+$ için $B^+ \cap [0, x]$ supremumu E içinde var ve bu supremum B ye aittir.

2.30. Tanım :

E Riesz uzayı ve $x \in E$ olmak üzere, x in ürettiği band olan B_x projeksiyon band ise x 'e projeksiyon eleman, B_x bandına da esas band denir. Bir Riesz uzayında her eleman projeksiyon eleman ise bu uzaya esas projeksiyon özelliğine sahiptir denir [2].

2.31. Tanım :

E Riesz uzayı olsun. $P : E \rightarrow E$ operatör olmak üzere $P^2 = P$ ise P 'ye projeksiyon denir. P , E Riesz uzayı üzerinde projeksiyon ve pozitif operatör ise, P 'ye pozitif projeksiyon denir. $B \subseteq E$ projeksiyon band olsun. Bu durumda her $x \in E$ için $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in B$ ve $x_2 \in B^d$ için

$$P_B : E \rightarrow E$$

$$x \rightarrow x_1$$

biçiminde tanımlanan P_B operatörüne band (sıra) projeksiyon denir. P_B pozitif projeksiyondur. Benzer şekilde $P_{B^d} : E \rightarrow E$, $x \rightarrow x_2$ biçiminde tanımlı P_{B^d} projeksiyonu da pozitifdir [2].

Sonuç :

E Riesz uzayındaki her projeksiyon banda karşılık bir band projeksiyon vardır [2].

2.12. Teorem :

E Riesz uzayı ve $T : E \rightarrow F$ operatör olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine

denktir [2].

1) T sıra projeksiyondur.

2) $I : E \rightarrow E$ birim operatör olmak üzere T projeksiyon ve $0 \leq T \leq I$

3) Her $x, y \in E$ için $Tx \perp y - Ty$ 'dir.

2.32. Tanım :

E ve F Riesz uzayları, $T : E \rightarrow F$ bir operatör olsun. [2]

1) $\{x_\alpha\} \subseteq E$ ve $x \in E$ olmak üzere, $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $\{y_\alpha\} \subseteq E^+$ ağı varsa $\{x_\alpha\}$ ağı x elemanına sıra(order) yakınsar denir ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ biçiminde gösterilir [2].

2) $\{x_\alpha\} \subseteq E$ için E 'de $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ iken F 'de $Tx_\alpha \xrightarrow{o} 0$ oluyorsa T operatörüne sıra sürekli operatör denir [2].

3) $(x_n) \subseteq E$ için $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere E 'de $x_n \xrightarrow{o} 0$ iken F de $Tx_n \xrightarrow{o} 0$ oluyorsa T operatörüne σ -sıra sürekli operatör denir [2].

T pozitif operatör olmak üzere T 'nin sıra sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul $x_\alpha \downarrow 0$ iken $Tx_\alpha \downarrow 0$ (ya da $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ iken $Tx_\alpha \uparrow Tx$) olmasıdır [2].

2.33. Tanım :

E Riesz uzayı olsun [2].

1) $(x_n) \subseteq E$ ve $x \in E$ olmak üzere, $\varepsilon > 0$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ ve her $n \geq n_0$ için $|x_n - x| \leq \varepsilon u$ olacak şekilde $u \in E^+$ varsa (x_n) dizisi x elemanına u -düzgün (uniformly) yakınsar denir. (x_n) dizisi x elemanına u -düzgün yakınsıyorsa (x_n) dizisi göreceli düzgün yakınsar denir ve $x_n \xrightarrow{ru} x$ biçiminde gösterilir [2].

2) $(x_n) \subseteq E$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için en az bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ve her $n, m \geq n_0$ için $|x_n - x_m| \leq \varepsilon u$ olacak şekilde bir $u \in E^+$ varsa (x_n) dizisine u -düzgün (uniformly) Cauchy dizisi denir [2].

3) $A \subseteq E$ olmak üzere her $(x_n) \subseteq A$ dizisi için $x_n \xrightarrow{ru} x$ iken $x \in A$ oluyorsa A 'ya düzgün (uniformly) kapalı küme denir [2].

2.34. Tanım :

E ve F Riesz uzayları ve $T : E \rightarrow F$ bir operatör olmak üzere, her $x, y \in E$ için

$$T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$$

oluyorsa, T 'ye örgü (Riesz) homomorfizması denir [2].

Sonuç :

Her örgü homomorfizması pozitif operatördür [2].

Sonuç :

E, F Riesz uzayları ve $T : E \rightarrow F$ örgü homomorfizması olsun. $T(E) \subseteq F$ Riesz alt uzayıdır. [2]

2.13. Teorem :

E ve F iki Riesz uzayı, $T : E \rightarrow F$ bir operatör olmak üzere aşağıdaki önermeler birbirine denktir [2].

1) T operatörü örgü homomorfizmasıdır

2) Her $x \in E$ için $T(x^+) = (Tx)^+$

3) Her $x, y \in E$ için $T(x \wedge y) = T(x) \wedge T(y)$

4) Her $x, y \in E$ için E uzayı içinde $x \wedge y = 0$ ise F uzayı içinde $T(x) \wedge T(y) = 0$

5) Her $x \in E$ için $|T(x)| = |Tx|$

Sonuç :

Her sıra (band) projeksiyon örgü homomorfizmasıdır [2].

2.35. Tanım :

E ve F Riesz uzayı, $T : E \rightarrow F$ örgü homomorfizması olsun. T birebir ve örtense T 'ye örgü izomorfizmi denir. E 'den F 'ye örgü izomorfizmi varsa, E ve F Riesz izomorftir denir [2].

2.14. Teorem :

E ve F Riesz uzayları, $T : E \rightarrow F$ birebir ve örten operatör olmak üzere T 'nin örgü izomorfizmi olması için gerekli ve yeterli koşul T ve T^{-1} operatörlerinin pozitif olmasıdır [2].

2.36. Tanım :

E Riesz uzayı ve $T : E \rightarrow E$ operatör olmak üzere E 'nin her bir B bandı için $T(B) \subseteq B$ oluyorsa, T 'ye band koruyan operatör denir [2].

2.15. Teorem :

E Arşimedsel Riesz uzayı ve $T : E \rightarrow E$ operatör olsun. B_x , x 'in ürettiği band olmak üzere aşağıdakiler birbirine denktir [2].

- 1) T , band koruyandır.
- 2) $x \perp y$ iken $Tx \perp y$ dir.
- 3) $x \in E$ iken $Tx \in B_x$ dir.

2.37. Tanım :

E Riesz uzayı olmak üzere $T : E \rightarrow E$ sıra sınırlı ve band koruyan operatör ise T 'ye orthomorfizma denir. E üzerindeki orthomorfizmaların kümesi $\text{Orth}(E)$ ile gösterilir.

$T : E \rightarrow E$ sıra sınırlı operatör ise T 'nin orthomorfizma olması için gerekli ve yeterli koşul her $x, y \in E$ için $x \perp y$ iken $Tx \perp y$ olmasıdır.

$$\begin{aligned} \text{Orth}(E) &= \{ T \mid T : E \rightarrow E \text{ sıra sınırlı ve band koruyan operatör} \} \\ &= \{ T \mid T \in L_b(E) \text{ için } x \perp y \text{ ise } Tx \perp y \} \end{aligned}$$

$\text{Orth}(E)$, $L_b(E)$ 'nin bir alt vektör uzayıdır. $L_b(E)$ den indirgenen noktasal sıralama ile $\text{Orth}(E)$ bir sıralı vektör uzayıdır [2].

2.16. Teorem :

E Arşimedsel Riesz uzayı ise $\text{Orth}(E)$ Arşimedsel Riesz uzayıdır. Her $S, T \in \text{Orth}(E)$ ve her $x \in E^+$ için,

$$(S \vee T)(x) = S(x) \vee T(x) \text{ ve } (S \wedge T)(x) = S(x) \wedge T(x)$$

sağlanır [2].

2.38. Tanım :

E Riesz uzayı, $\text{Orth}(E)$ birim operatörün ürettiği ideale E 'nin merkezi denir ve

$$Z(E) = \{ T \in L_b(E) : |T| \leq \lambda I \text{ olacak şekilde } \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ var dır} \}$$

şeklindedir. $T \in Z(E)$ ise T 'ye merkez operatör denir [2].

Sonuç :

E Riesz uzayı olsun. $P(E)$, E üzerindeki band projeksiyonların kümesi olmak üzere $P(E) \subseteq Z(E) \subseteq \text{Orth}(E) \subseteq L_b(E)$ dir.

2.17. Teorem :

E Riesz uzayı ve T orthomorfizm olsun. Bu durumda T sıra süreklidir [2].

2.18. Teorem :

E Dedekind tam Riesz uzayı ve $x \in E^+$ olsun. Her $y \in E$ için $|y| \leq x$ iken $T(x) = y$ şartını sağlayan $0 \leq T \leq I$ olacak şekilde $T \in \text{Orth}(E)$ vardır [2].

2.19. Teorem :

E Riesz uzayı olmak üzere $\text{Orth}(E)$, $L_b(E)$ 'nin full altcebiridir [9].

2.20. Teorem :

E Riesz uzayı ve $\emptyset \neq A \subseteq E$ olsun. $S, T \in \text{Orth}(E)$ olmak üzere her $x \in A$ için $S(x)=T(x)$ ise bu orthomorfizmler A'nın ürettiği band üzerinde de eşittir [2].

2.3 Cebir ve f-Cebirleri

2.39. Tanım :

E, F cismi üzerinde doğrusal uzay olsun. Her $x, y, z \in E$ ve her $\lambda \in F$ için

$$\begin{aligned} \cdot : E \times E &\rightarrow E \\ (x, y) &\rightarrow x \cdot y \end{aligned}$$

işlemi

$$C_1) \lambda \odot (x \cdot y) = (\lambda \odot x) \cdot y = x \cdot (\lambda \odot y)$$

$$C_2) x \cdot (y \oplus z) = x \cdot y \oplus x \cdot z \text{ ve } (x \oplus y) \cdot z = x \cdot z \oplus y \cdot z$$

$$C_3) x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

şartlarını sağlıyorsa E ye F üzerinde cebir denir [3].

Eğer E bir cebir ve her $x, y \in E$ için $x \cdot y = y \cdot x$ ise E'ye değişmeli cebir denir. E'nin çarpma işlemine göre birim elemanı varsa yani her $x \in E$ için $x \cdot e = e \cdot x = x$ olacak

şekilde $e \in E$ varsa E ye birimli cebir denir.

Örnek :

X topolojik uzay ve $C(X, \mathbb{R})$, X te tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların kümesi

her $f, g \in C(X, \mathbb{R})$, her $\lambda \in \mathbb{R}$ ve her $x \in X$ için

$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x), (\lambda \odot g)(x) = \lambda g(x)$$

işlemleri ile doğrusal uzay;

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

işlemi ile birlikte bir cebirdir.

2.40. Tanım :

E bir cebir ve $A \subseteq E$ olsun.

1) A doğrusal alt uzay

2) Her $x, y \in A$ için $x \cdot y \in A$

oluyorsa A 'ya alt cebir denir [3].

2.41. Tanım :

E bir cebir ve E 'de bir $\| \cdot \|$ normu tanımlanmış olsun. Bu norm her $x, y \in E$ için

$$\|x \cdot y\| \leq \|x\| \|y\|$$

oluyorsa ve birim elemanı olması durumunda $\|e\|=1$ ise E 'ye normlu cebir denir. E bu norma göre tam ise E 'ye Banach cebiri denir [2].

Örnek :

$C[a,b]$ cebiri, her $f \in C[a,b]$ için $\|f\| = \sup \{ |f(x)| : x \in [a,b] \}$ normu ile Banach cebiridir.

2.21. Teorem :

E Banach örgüsü ve T pozitif operatör olsun. Bu durumda T norm sınırlıdır [2].

2.22. Teorem :

E Riesz uzayı olsun. E 'yi Banach örgüsü yapan bütün normlar denktir [2].

2.23. Teorem :

E Banach örgü uzayı olsun. Bu durumda $Z(E) = \text{Orth}(E)$ dir [2].

2.42. Tanım :

E Banach örgüsü olsun. Eğer her $x, y \in E^+$ $x \wedge y = 0$ iken $\|x \vee y\| = \max \{\|x\|, \|y\|\}$ sağlanıyorsa E ye AM-uzayı denir [1].

2.24. Teorem :

E Banach örgüsü ve $x \in E$ olsun. I_x , x 'in ürettiği ideal olmak üzere

$$\|y\|_\infty = \inf \{ \lambda > 0 : |y| \leq \lambda |x| \}$$

normu ile birlikte AM-uzayıdır [2].

2.25. Teorem (Kakutani-Bohnenblust and M. Krein-S. Krein) :

E Banach örgüsü ve $A \subseteq E$ olsun.

A , AM-uzayıdır $\Leftrightarrow A \cong C(K)$ örgü izometrisi olacak şekilde K Hausdorff topolojik uzayı vardır [2].

2.43. Tanım :

A Riesz uzayı ve bir cebir olsun. Eğer her $u, v \in A^+$ için $uv \geq 0$ oluyorsa A 'ya Riesz cebiri (Örgü cebiri) denir. Eğer E Banach cebiri ve her $x, y \in E$ için üzerindeki norm

$$|x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$$

şartını sağlıyorsa o zaman E 'ye Banach örgü cebiri denir [2].

2.44. Tanım :

A örgü cebiri olsun. Her $a, b \in A$ ve $0 \leq c \in E$ için

$$c(a \vee b) = (ca) \vee (cb) \text{ ve } (a \vee b)c = (ac) \vee (bc)$$

şartları sağlanıyorsa A 'ya d-cebiri denir [4].

Örnek :

$A = C[0,1]$ olmak üzere her $f, g \in A$ ve her $x \in [0,1]$ için

$$(f * g)(x) = f(0).g(0)$$

işlemiyle birlikte A d-cebiridir.

2.45. Tanım :

A Riesz cebiri olmak üzere $u, v \in A$ için $u \wedge v = 0$ iken her $w \in A^+$ için

$$(uw) \wedge v = 0 \text{ ve } (wu) \wedge v = 0$$

oluyorsa A' ya f-cebiri denir [4].

Örnek :

i) $L_b(L)$ Riesz uzayı bileşke işlemine göre Riesz cebiridir.

ii) X boştan farklı bir küme olmak üzere X üzerinde tanımlı reel değerli bütün fonksiyonların kümesi $\mathbb{R}^X$ noktasal çarpma ile birimli bir f-cebiridir.

iii) K kompakt Hausdorff uzayı olmak üzere, $C(K)$ uzayı üzerinde fonksiyonların noktasal sıralaması ile Riesz uzayı ve fonksiyonların noktasal çarpımıyla birimli bir f-cebiridir.

2.46. Tanım:

A bir f-cebiri ve $u \in E$ olsun. Eğer en az bir k doğal sayısı için $u^k = 0$ iken $u \neq 0$ oluyorsa A' ye yarı-asal (semiprime) f-cebiri denir [4].

A f-cebirinin yarı-asal olması için gerekli ve yeterli koşul $u^2 = 0$ iken $u \neq 0$ olmasıdır.

2.26. Teorem :

A f-cebiri olmak üzere aşağıdaki özellikler vardır [10].

i) Her $x, y \in A$ ve $0 \leq u \in A$ olmak üzere

$$u(x \vee y) = (ux) \vee (uy), (x \vee y)u = (xu) \vee (yu)$$

$$u(x \wedge y) = (ux) \wedge (uy), (x \wedge y)u = (xu) \wedge (yu)$$

dir.

ii) Her $x, y \in A$ için $|xy| = |x||y|$, $(xy)^+ = x^+y^+ + x^-y^-$ ve $(xy)^- = x^+y^- + x^-y^+$ dir.

iii) Her $x \in A$ için $x^2 \geq 0$ dir.

2.27. Teorem (Amemiya-Birkhoff-Pierce) :

Her Arşimedsel f-cebiri değişmelidir [2].

2.28. Teorem :

A yarıasal f-cebiri ve $x, y \in A$ olsun. $x \perp y \Leftrightarrow xy = yx = 0$ dir [10].

2.47. Tanım :

A örgü cebiri ve n negatif olmayan tamsayı olsun. Eğer her $a \in A^+$ için

$$a^n(e+a)^{-1} \geq 0$$

oluyorsa A'ya tip-n örgü cebiri denir [14].

Burada A Banach örgü cebiri ise bu durumda A 'ya tip- n Banach örgü cebiri denir.

Örnek :

K kompakt Hausdorff uzayı için $C(K)$ Banach örgü cebiri tip-1 dir.

Örnek :

Her düzgün tam f -cebiri, tip-1 cebiridir. Bu önermenin tersi doğru değildir.

$F = \{A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ olmak üzere bilinen matris çarpımıyla F tip-1 Banach örgü cebiridir. Fakat f -cebiri değildir.

2.48. Tanım :

A , birim elemanı e olan kompleks bir cebir ve $x \in A$ olsun. $y \cdot x = e$ ($x \cdot y = e$) olacak şekilde $y \in A$ varsa y 'ye x 'in sol (sağ) tersi denir. Eğer $x \cdot y = y \cdot x = e$ olacak şekilde $y \in A$ varsa y 'ye x 'in tersi denir. A 'nın tersi olan elemanlarına regüler denir ve R ile gösterilir. A 'nın regüler olmayan elemanlarına singüler denir ve bunların kümesi S ile gösterilir [3].

2.29. Teorem :

A birim elemanı e olan kompleks Banach cebiri olsun. $x \in A$ ve $\|e - x\| < 1$ ise x regüler ve x 'in tersi

$$x^{-1} = e + \sum_{n=1}^{\infty} (e - x)^n$$

dir [3].

2.30. Teorem :

A birim elemanı e olan kompleks Banach cebiri olsun. $x \in A$ ve $\lim_n \|(e-x)^n\|^{1/n} < 1$ ise x regüler ve

$$x^{-1} = e + \sum_{k=1}^{\infty} (e-x)^k$$

dır [3].

2.31. Teorem :

A birim elemanlı kompleks Banach cebiri olsun. A'nin regüler elemanlar kümesi olan R açıktır [3].

2.32. Teorem :

A birim elemanı e olan kompleks Banach cebiri olsun. A'deki regüler elemanların kümesi R olmak üzere

$$\begin{aligned} f: R &\rightarrow R \\ x &\rightarrow f(x) = x^{-1} \end{aligned}$$

dönüşümü süreklidir [3].

2.49. Tanım :

A, $\mathbb{C}$ 'nin açık bir alt kümesi olsun. $f: A \rightarrow X$ fonksiyonu $a \in A$ noktasını içeren açık bir diskin her noktasında türevlenebiliyorsa f 'ye a noktasında holomorfik fonksiyon denir [5].

Eğer A 'nın tüm elemanlarında holomorfik ise f 'ye A üzerinde holomorfiktir denir.

2.50. Tanım :

A kompleks cebir ve $x \in A$ olsun.

$$x \circ y = y + x - yx = \theta \quad (x \circ y = x + y - xy = \theta)$$

olacak şekilde $y \in A$ varsa y 'ye x 'in sol(sağ) yarı-tersi denir. Eğer $x \circ y = y \circ x = \theta$ olacak şekilde $y \in A$ varsa y 'ye x 'in yarı-tersi denir ve x 'e yarı regüler denir [3].

2.51. Tanım :

A normlu kompleks cebir ve $x \in A$ olsun. $xy = \theta$ ($yx = \theta$) olacak şekilde $\theta \neq y \in A$ varsa x 'e sol (sağ) sıfır bölen denir. $xy = yx = \theta$ olacak şekilde $\theta \neq y \in A$ varsa x 'e iki yanlı sıfır bölen denir. [3]

2.52. Tanım :

A normlu kompleks cebir ve $x \in A$ olsun. $k = 1, 2, 3, 4, \dots$ olmak üzere $\|y_k\| = 1$ ve $\lim_k \|xy_k\| = 0$ ($\lim_k \|y_k x\| = 0$) olacak şekilde $(y_k) \subseteq A$ dizisi varsa x 'e sol (sağ) topolojik sıfır bölen denir. $k=1,2,3,\dots$ için $\|y_k\| = 1$ ve $\lim_k \|xy_k\| = \lim_k \|y_k x\| = 0$ olacak şekilde $(y_k) \subseteq A$ dizisi varsa x 'e iki yanlı topolojik sıfır bölen denir [3].

2.53. Tanım :

A kompleks Banach cebiri ve $x \in A$ olsun. A birimli ve birimi e ise

$$\sigma(x) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \text{ A'da singüler} \}$$

kümesine x 'in spektrumu denir. A birimli değil ise

$$\sigma(x) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{x}{\lambda} \text{ A'da yarı singüler, } \lambda \neq 0 \right\} \cup \{0\}$$

kümesine x 'in spektrumu denir [3].

Fakat A birimli olmasa dahi $A_e = A \times \mathbb{C}$ kümesi

$$i) (x, a) + (y, b) = (x + y, a + b)$$

$$ii) b(x, a) = (bx, ba)$$

$$iii) (x, a)(y, b) = (xy + ay + bx, ab)$$

işlemleri ile birlikte birim elemanlı kompleks bir cebirdir.

2.33. Teorem :

A kompleks cebir olsun. Bu taktirde

1) $\varphi : A \rightarrow A_e$, $\varphi(x) = (x, 0)$ olarak tanımlanan φ dönüşümü içine epimorfidir.

2) $(A, \|\cdot\|)$ kompleks cebir ise A_e

$$\|(x, a)\|^* = \|x\| + |a|$$

olarak tanımlanan $\|\cdot\|^*$ normuna göre normlu cebirdir. Eğer A Banach cebiri ise A_e Banach cebiridir [3].

2.34. Teorem :

A birim elemanı olmayan kompleks Banach cebiri ve $x \in A$ olsun. Bu durumda $\sigma_A(x) = \sigma_{A_e}(x)$ dir [3].

2.35. Teorem :

X kompakt Hausdorff topolojik uzay ve $f \in S(X, \mathbb{C})$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir [3].

- 1) f topolojik sıfır bölendir.
- 2) f singülerdir.
- 3) $f(x)=0$ olacak şekilde $x \in X$ vardır.

2.36. Teorem :

A birim elemanı e olan kompleks Banach cebiri ve $x \in A$ olsun. Bu taktirde $\sigma(x)$, $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|x\|\}$ kümesinin kompakt alt kümesidir [3].

2.54. Tanım :

$\sigma(x)$ kümesinin tümleyen kümesine x 'in rezolvantı denir ve $\rho(x)$ ile gösterilir. Yani $\rho(x) = \mathbb{C} - \sigma(x)$ dir [3].

$\sigma(x)$ kapalı olduğundan $\rho(x)$ açıktır [3].

Ayrıca teorem 2.36' dan dolayı $\{z \in \mathbb{C} : \|x\| < |z|\} \subseteq \rho(x)$ tir [3].

2.37. Teorem :

A birim elemanı e olan kompleks Banach cebiri olsun. $x \in A$ ve $\lambda_0 \in \rho(x)$ için

$$D(\lambda_0, \frac{1}{\|R(\lambda_0)\|}) \subseteq \rho(x) \text{ tir [1].}$$

2.55. Tanım :

A birim elemanı e olan kompleks Banach cebiri ve $x \in A$ olsun.

$$\begin{aligned} v_x : \rho(x) &\rightarrow A \\ \lambda &\rightarrow v_x(\lambda) = (x - \lambda e)^{-1} \end{aligned}$$

dönüşümüne x'in rezolvantı denir [3].

Rezolvant dönüşümü Teorem 2.32'ten dolayı süreklidir. Ayrıca $\lambda, \mu \in \rho(x)$ için;

$$v_x(\lambda) - v_x(\mu) = (\mu - \lambda) v_x(\lambda) v_x(\mu)$$

eşitliğine rezolvant eşitliği denir.

2.38. Teorem :

A Banach örgü uzayı ve $x \in A$ olsun.

$$\begin{aligned} f : \rho(x) &\rightarrow A \\ \lambda &\rightarrow (\lambda - a)^{-1} \end{aligned}$$

dönüşümü holomofiktir [5].

2.39. Teorem :

A kompleks Banach cebiri ve $x \in A$ ise $\sigma(x) \neq \emptyset$ dir [3].

Burada A reel Banach cebiri ise $\sigma(x)=\emptyset$ olabilir.

Örnek :

$a_{ij} \in \mathbb{R}$ olmak üzere 2×2 tipindeki $A=(a_{ij})$ kare matrislerin kümesini M_2 ile gösterelim. M_2 kümesi;

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij}) \text{ ve } \lambda A=(\lambda a_{ij})$$

işlemlerine göre lineer uzay ve bilinen matris çarpımına göre bir cebirdir. M_2 kümesinin birim elemanı;

$$e=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dır. M_2 kümesi;

$$\|A\|=\max\left\{\sum_{j=1}^2|a_{ij}| : 1 \leq i \leq 2\right\}$$

normuna göre normlu cebirdir. Üstelik bu norma göre M_2 tamdır.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere $(A-\lambda e)$ ifadesinin tersi olmaması için $\det(A-\lambda e)=0$ olması gerekir. Fakat

$\det(A - \lambda e) = \lambda^2 + 1 = 0$ olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{R}$ olmadığından $\sigma(A) = \emptyset$ tur.

2.40. Teorem (Gelfand-Mazur) :

A birim elemanı e olan kompleks Banach cebiri olsun. Eğer A'daki sıfırdan farklı her eleman regüler ise A, $\mathbb{C}$ ile izometrik olarak eş yapılıdır [3].

2.41. Teorem :

A birim elemanı e olan kompleks Banach cebiri olsun. A'da topolojik sıfır bölen sadece θ ise $A = \mathbb{C}$ dir.

2.56. Tanım :

A kompleks Banach cebiri ve $x \in A$ olsun.

$$r(x) = \sup \{ |\lambda| : \lambda \in \sigma_A(x) \}$$

sayısına x'in spektral yarıçapı denir [3].

2.42. Teorem (Polinom spektral dönüşümü teoremi) :

A birim elemanı e olan kompleks Banach cebiri ve $p(x)$, $\mathbb{C}$ de bir polinom olsun. Eğer $x \in E$ ise $\sigma(p(x)) = p(\sigma(x))$ tir [3].

2.43. Teorem (Spektral yarıçap formülü):

A kompleks Banach cebiri ve $x \in A$ olsun.

$$r(x) = \lim_n \|x^n\|^{1/n}$$

dir [3].

2.44. Teorem :

A birim elemanı e olan kompleks Banach cebiri ve B , A 'nın kapalı alt cebiri olsun.
Bu durumda

$$r_B(x) = \sup \{ |\lambda| : \lambda \in \sigma_B(x) \} = \sup \{ |\lambda| : \lambda \in \sigma_A(x) \}$$

dır [3].

2.45. Teorem :

A birim elemanı e olan kompleks Banach cebiri olsun. $e \in B$ olmak üzere B , A 'nın alt Banach cebiri ise $x \in B$ için $\sigma_A(x) \subseteq \sigma_B(x)$ tir [3].

3. f-CEBİRLERİNDE GELFAND-MAZUR TEOREMİ

Bu bölümde Arşimedsel f-cebirlerinde Gelfand-Mazur teoremini inceleyeceğiz. Bundan sonra alacağımız tüm uzaylar Arşimedsel olarak alınacaktır.

3.1. Tanım :

A reel cebir olsun. $A_{\mathbb{C}} = A \times A$ üzerinde $a, b, c, d \in A$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için;

$$i) (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$ii) (\alpha + i\beta)(a, b) = (\alpha a - \beta b, \alpha b + \beta a)$$

$$iii) (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

işlemleri ile birlikte $A_{\mathbb{C}}$ kompleks cebirdir.

A reel Banach cebiri ve $z \in A_{\mathbb{C}}$ için $z = a + ib$ olsun.

$$|z| = \sup \{ (\cos \varphi)a + (\sin \varphi)b : 0 \leq \varphi \leq 2\pi \}$$

olmak üzere $\|z\| = \| |z| \|$ ise $A_{\mathbb{C}}$ kompleks Banach cebiri denir.

3.1. Teorem :

A düzgün tam örgü cebiri ve $\epsilon > 0$ birim elemanı olsun.

1) B_{ϵ} projeksiyon bandıdır yani $A = B_{\epsilon} + B_{\epsilon}^d$ dir.

2) Her $a \in B_e$ için

$$L_a : A \rightarrow A$$

$$b \rightarrow L_a(b) = ab$$

$$R_a : A \rightarrow A$$

$$b \rightarrow R_a(b) = ba$$

biçiminde tanımlı çarpma operatörleri A 'nın orthomorfizmleridir.

İspat :

1) Teorem 2.11' den dolayı B_e nin projeksiyon band olduğunu göstermek her $a \in A^+$ için $\sup_n (a \wedge ne) \in B_e$ içinde mevcut olduğunu göstermek yeterlidir. Her $m, n \in \mathbb{N}$ $m \geq n > 0$;

$$0 \leq (a \wedge me) - (a \wedge ne) \leq n^{-1} a^2$$

olduğunu gösterelim. $a_n = a \wedge ne$ ($n=1,2,3,\dots$) ve I_e de e 'nin ürettiği ideal olsun. I_e f-
cebiridir. Her $a, b \in I_e$ ve $c \in I_e^+$ için $a \wedge b = 0$ olsun.

$$c \in I_e^+ \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ için } c \leq \lambda e \text{ dir.}$$

Ayrıca;

$$\begin{aligned} 0 &\leq (ca \wedge b) \\ &\leq (\lambda e)a \wedge b = \lambda a \wedge b \quad (c \leq \lambda e) \\ &\leq (\lambda+1)a \wedge (\lambda+1)b \quad (\sup\{\lambda, 1\} \leq \lambda+1) \\ &= (\lambda+1)(a \wedge b) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde $a \wedge b = 0$ olduğu gösterilir. O halde I_e f-cebiridir.

Her $m, n \in \mathbb{N}$ $m \geq n > 0$ için;

$$\begin{aligned}(a_m - a_n) \wedge (ne - a_n) &= (a_m \wedge ne) - a_n \\ &= (a \wedge ne) - a_n \\ &= (a_n - a_n) \\ &= 0\end{aligned}$$

O halde $(a_m - a_n) \perp (ne - a_n)$ dir.

$a_m - a_n = (a \wedge me) - (a \wedge ne) = a \wedge (me - ne) \leq a \wedge me \leq me \leq \lambda e$ olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{R}^+$ var olduğundan $a_m - a_n \in I_e$ dir.

$(ne - a_n) = (ne - (a \wedge ne)) = (ne - a) \wedge (ne - ne) = (ne - a) \wedge 0 \leq ne - a \leq ne \leq \lambda e$ olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{R}^+$ vardır. O halde $ne - a_n \in I_e$ dir. I_e f-cebiri olduğundan $(a_m - a_n) \wedge (ne - a_n) = 0$ iken $n^{-1}a_m \in I_e$ için $(a_m - a_n) \wedge (a_m - n^{-1}a_m(ne - a_n)) = 0$ dır.

$$\begin{aligned}(a_m - a_n) \wedge (a_m - n^{-1}a_m a_n) &= 0 \Rightarrow a_m + (-a_n \wedge -n^{-1}a_m a_n) = 0 \\ &\Rightarrow a_m - (a_n \vee n^{-1}a_m a_n) = 0 \\ &\Rightarrow a_m = a_n \vee a_m a_n n^{-1}\end{aligned}$$

bulunur.

$$0 \leq a_m - a_n = (n^{-1}a_m a_n - a_n)^+ \leq n^{-1}a_m a_n \leq n^{-1}a^2 \begin{pmatrix} a_m \leq a \\ a_n \leq a \end{pmatrix}$$

O halde $\{a \wedge ne\}_{n=1}^{\infty}$ a^2 -düzgün Cauchy dizisidir. A düzgün tam olduğundan

$a \wedge ne \rightarrow b$ (a^2 - düzgün) olacak şekilde $b \in A^+$ vardır. Ayrıca $\{a \wedge ne\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi

artandır. Şimdi $\sup(a \wedge ne) = b$ olduğunu gösterelim.

$\{a \wedge ne\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi artan olduğundan $m \geq n > 0$ için $a_m - a_n \geq 0$ dir. Buradan $a_m \geq a_n$ bulunur. $m \rightarrow \infty$ için $b \geq a_n$ dir. O halde b bir üst sınırdır. c başka bir üst sınır olsun. $b \leq c$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olur.

$$a_n = a_n \wedge c \rightarrow b \wedge c \quad (a^2 - \text{düzgün})$$

O halde $b = b \wedge c$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} 0 \leq |b - b \wedge c| &= |b - a_n + a_n - b \wedge c| \\ &\leq |b - a_n| + |a_n - b \wedge c| \\ &= |a_n - b| + |a_n - b \wedge c| \\ &\leq \frac{1}{n}a^2 + \frac{1}{n}a^2 \\ &\leq 0 \quad (\text{A Arşimedsel düzgün tam}) \end{aligned}$$

O halde $b - b \wedge c = 0$ olmasından $b = b \wedge c \leq c$ bulunur. Sonuç olarak b üst sınırların en küçüğüdür yani $\sup(a \wedge ne) = b$ dir.

2) $\text{Orth}(A)$ Riesz uzayı olduğundan $L_a = L_{a^+} - L_{a^-}$ dir. Her $a \in B_e$ için $L_a \in \text{Orth}(A)$ olduğunu göstermek için $a \geq 0$ için $L_{a^+} \in \text{Orth}(A)$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$a \in B_e$ olduğundan $a \wedge me \uparrow a$ ve $m \geq n$ için;

$$0 \leq (a \wedge me) - (a \wedge ne) \leq n^{-1}a^2$$

dir. m üzerinden supremum alınırsa;

$$0 \leq a - (a \wedge ne) \leq n^{-1}a^2$$

dir. O halde $a \wedge ne \rightarrow a$ (a^2 düzgün). $0 \leq a \wedge ne \leq ne$ olduğundan $0 \leq L_{a \wedge ne} \leq nI$ dir.

Her $b \in A$ için

$$\begin{aligned} 0 \leq (a \wedge ne)b \leq nb &\Rightarrow 0 \leq L_{a \wedge ne}(b) \leq nI(b) \\ &\Rightarrow 0 \leq L_{a \wedge ne} \leq nI \end{aligned}$$

dir. Buradan $L_{a \wedge ne} \in Z(A)$ bulunur ve $Z(A) \subseteq \text{Orth}(A)$ olduğundan $L_{a \wedge ne} \in \text{Orth}(A)$ dır. Şimdi $b \wedge c = 0$ olsun. $L_a(b) \wedge c = 0$ olduğunu gösterelim. $L_{a \wedge ne} \in \text{Orth}(A)$ olduğundan $\{(a \wedge ne)b\} \wedge c = L_{a \wedge ne}(b) \wedge c = 0$ dir. $a \wedge ne \rightarrow a$ için $(a \wedge ne)b \rightarrow ab$ (a^2b düzgün) Çünkü;

$$\begin{aligned} 0 \leq (a - a \wedge ne)b \leq n^{-1}a^2b &\Rightarrow 0 \leq R_b(a - a \wedge ne) \leq R_b(n^{-1}a^2) \\ &\Rightarrow 0 \leq R_b(a) - R_b(a \wedge ne) \leq n^{-1}R_b(a^2) \\ &\Rightarrow 0 \leq ab - (a \wedge ne)b \leq n^{-1}a^2b \\ &\Rightarrow (a \wedge ne)b \rightarrow ab \text{ (} a^2b \text{ düzgün)} \end{aligned}$$

O halde $(a \wedge ne)b \rightarrow ab$ (a^2b düzgün) ve infimum sıra sürekli olduğundan;

$$(a \wedge ne)b \wedge c \rightarrow ab \wedge c$$

$(a \wedge ne)b \wedge c = 0$ olmasından dolayı 0'a yakınsaktır ve limitin tekliğiinden $ab \wedge c = 0$ dır. O halde $a \geq 0$ için $L_a \in \text{Orth}(A)$ dır. Keyfi bir $a \in B_e$ için $a^+, a^- \in B_e$ olduğundan $L_{a^+}, L_{a^-} \in \text{Orth}(A)$ ve $\text{Orth}(A)$ Riesz uzayı olduğundan $L_{a^+} - L_{a^-} = L_a \in \text{Orth}(A)$ bulunur.

3.2. Teorem :

E Banach örgü cebiri ve $e > 0$ birim elemanı olsun. e tarafından üretilen I_e ideali için

$I_e = B_e$ dir.

İspat :

$$I_e \subseteq B_e \dots (1)$$

$a \in B_e^+$ olsun. $a \in I_e^+$ olduğunu gösterelim. $0 \leq T \in \text{Orth}(E)$ olsun. Teorem 2.21' den pozitif operatörler norm sınırlı olduğundan $\|T\| < \infty$. Kabul edelim ki $\lambda > 0$ için $(T - \lambda I)^+ \geq 0$ olsun. $0 \leq x \in E$ için;

$$y = (T - \lambda I)^+ x \geq 0$$

olarak alalım. $\text{Orth}(E)$ f-cebiri olduğundan teorem 2.28' den dolayı

$$(T - \lambda I)^- y = (T - \lambda I)^- (T - \lambda I)^+ x = 0$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned} (T - \lambda I)y &= \left[(T - \lambda I)^+ - (T - \lambda I)^- \right] y \\ &= (T - \lambda I)^+ y - \underbrace{(T - \lambda I)^- y}_0 \end{aligned}$$

Böylece $(T - \lambda I)y \geq 0$ olduğundan $Ty \geq \lambda y$ dır. Buradan $\|T\| \geq \lambda$ olur ki bu da T nin norm sınırlı olması ile çelişkidir. O halde $(T - \lambda I)^+ = 0$ bulunur.

$$(T - \lambda I) \leq 0 \Rightarrow T \leq \lambda I$$

dır. O halde $T \in Z(E)$ bulunur.

Keyfi bir $T \in \text{Orth}(E)$ olsun. $T = T^+ - T^-$ olup $T^+, T^- \in Z(E)$ olduğundan $T \in Z(E)$ dir.

O halde $0 \leq L_a \leq \lambda I$ olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{R}^+$ vardır.

$$0 \leq L_a(e) = ae = a \leq \lambda e$$

olduğundan $a \in I_e^+$ dir.

Keyfi bir $a \in B_e$ olsun. $a = a^+ - a^-$ olup $a^+, a^- \in I_e$ olduğundan $a \in I_e$ bulunur. O halde

$$B_e \subseteq I_e \dots (2)$$

(1) ve (2) den $I_e = B_e$ dir.

Teorem 3.1' den I_e projeksiyon banddır ve $a \in I_e$ için teorem 2.80'den

$$\|a\|_e = \inf\{\lambda > 0 : |a| \leq \lambda e\}$$

e -düzgün normu ile birlikte $(I_e, \|\cdot\|_e)$ Banach örgüsüdür.

3.1. Lemma :

A örgü cebiri ve $0 < e \in A$ birim elemanı olsun. $a \in A^+$ için a 'nın tersi var ve $a^{-1} \geq 0$ ise

$$a(b \wedge c) = ab \wedge ac, (b \wedge c)a = ba \wedge ca$$

sağlanır.

İspat :

$$\left. \begin{array}{l} a(b \wedge c) \leq ab \\ a(b \wedge c) \leq ac \end{array} \right\} \Rightarrow a(b \wedge c) \leq ab \wedge ac \dots (1)$$

Diğer taraftan;

$$0 \leq a^{-1}(ab \wedge ac) \leq (a^{-1}ab \wedge a^{-1}ac) \quad (\text{Teoremin 1.kısımından}) \\ = b \wedge c$$

dir. O halde

$$0 \leq a^{-1}(ab \wedge ac) \leq b \wedge c \Rightarrow aa^{-1}(ab \wedge ac) \leq a(b \wedge c) \quad (a \in A^+) \\ \Rightarrow ab \wedge ac \leq a(b \wedge c) \dots (2)$$

(1) ve (2) den dolayı $a(b \wedge c) = ab \wedge ac$ bulunur. Diğer tarafıda benzer şekilde gösterilebilir.

Genel olarak e yerine herhangi bir $a \in A^+$ için benzer durumu inceleyelim.

3.3. Teorem :

A reel Banach örgü cebiri ve $e > 0$ birim elemanı olmak üzere $a \in A^+$ için a^{-1} var ve pozitif olsun. Bu durumda aşağıdakiler vardır.

1) B_a projeksiyon banddır.

2) $I_a = B_a'$ 'dır

İspat :

1) B_a projeksiyon band olduğunu göstermek için teorem 2.11'den $u \in A^+$ olmak üzere $\sup\{u \wedge na\}$ mevcut ve B_a içinde olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$u \in A^+$ için A örgü cebiri olduğundan $a^{-1}u \in A^+$ dır. B_e projeksiyon band olmasından $\sup\{a^{-1}u \wedge ne\} = v \in B_e$ dir. $v \in B_e$ ve teorem 3.2' den dolayı $v \in I_e$ dir.

$$\begin{aligned} v \in I_e &\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ için } v \leq \lambda e \\ &\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ için } av \leq \lambda a \quad (a \text{ pozitif}) \end{aligned}$$

olduğundan $av \in I_a$ dır. Ayrıca $I_a \subseteq B_a$ olmasından $av \in B_a$ bulunur. Şimdi $\sup\{u \wedge na\} = av$ olduğunu gösterelim. a ve a^{-1} pozitif olduğundan L_a çarpım operatörü örgü izomorfizmdir. Her örgü izomorfizm sıra süreklidir.

$$\begin{aligned} a^{-1}u \wedge ne \uparrow v &\Rightarrow L_a(a^{-1}u \wedge ne) \uparrow L_a(v) \quad (L_a \text{ sıra sürekli}) \\ &\Rightarrow L_a(a^{-1}u) \wedge L_a(ne) \uparrow L_a(v) \quad (L_a \text{ örgü izomorfizmi}) \\ &\Rightarrow u \wedge na \uparrow av \end{aligned}$$

olduğundan ve $av \in B_a$ olmasından B_a projeksiyon banddır.

2) $I_a \subseteq B_a \dots(1)$ dır. Kapsamanın diğer tarafı için $b \in B_a^+$ olsun. Bu durumda $b \wedge na \uparrow b$ dır. Şimdi $a^{-1}b \in B_e$ olduğunu göstereceğiz. a ve a^{-1} pozitif olduğundan $L_{a^{-1}}$ örgü izomorfizmdir.

$$\begin{aligned} b \wedge na \uparrow b &\Rightarrow L_{a^{-1}}(b \wedge na) \uparrow L_{a^{-1}}(b) \quad (L_{a^{-1}} \text{ sıra sürekli}) \\ &\Rightarrow L_{a^{-1}}(b) \wedge L_{a^{-1}}(na) \uparrow L_{a^{-1}}(b) \quad (L_{a^{-1}} \text{ örgü homomorfizm}) \\ &\Rightarrow a^{-1}b \wedge ne \uparrow a^{-1}b \\ &\Rightarrow a^{-1}b \in B_e \end{aligned}$$

Teorem 3.2' den $I_e = B_e$ olduğundan $a^{-1}b \in I_e$ dir

$$\begin{aligned} a^{-1}b \in I_e &\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ : 0 \leq a^{-1}b \leq \lambda e \\ &\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ : 0 \leq aa^{-1}b \leq \lambda a \quad (a \text{ pozitif}) \\ &\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ : 0 \leq b \leq \lambda a \end{aligned}$$

olduğundan $b \in I_a^+$ dir. Keyfi bir $b \in B_a$ için $b = b^+ - b^-$ olacak şekilde $b^+, b^- \in B_a^+$ olmasından $b^+, b^- \in I_a^+$ dir. Buradan $b \in I_a$ olduğundan $B_a \subseteq I_a \dots (2)$ dir. (1) ve (2) den $I_a = B_a$ bulunur.

Yukarıda I_e 'nin f-cebiri olduğunu söylenmişti. Herhangi bir $a \in A^+$ için I_a 'nın cebir olması için gerek ve yeterli koşul $0 \leq a^2 \leq \lambda a$ olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{R}^+$ sayısının var olmasıdır.

3.4. Teorem :

A düzgün tam örgü cebiri ve $0 < e \in A$ birim elemanı olsun. B_e f-cebiridir.

İspat :

Her $a, b \in B_e$ için teorem 3.1' den dolayı $L_a \in \text{Orth}(A)$ dir. L_a ortomorfizm ve B_e band olduğundan $L_a(B_e) \subseteq B_e$ dir. $b \in B_e$ olmasından $L_a(b) \in B_e$ bulunur. O halde $ab \in B_e$ olduğundan B_e cebiridir. Şimdi B_e f-cebiri olduğunu gösterelim. $a, b \in B_e$ ve her $c \in B_e^+$ için $a \wedge b = 0$ olsun.

$$c \in B_e \Rightarrow L_c, R_c \in \text{Orth}(A)$$

olduğundan $a \wedge b = 0$ iken $L_c(a) \wedge b = 0$ ve $R_c(a) \wedge b = 0$ dir. O halde $ac \wedge b = 0$ ve $ca \wedge b = 0$ olduğundan B_e f-cebiridir.

3.5. Teorem :

A Dedekind tam birimli örgü cebiri olsun.

$$a \in B_e^+ \text{ ve } I_a \text{ cebir} \Leftrightarrow a \in I_e$$

İspat :

$a \in B_e^+$ ve I_a cebir olsun. I_a cebir olduğundan $0 \leq a^2 \leq \lambda a$ olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{R}^+$ vardır. Teorem 2.18' den dolayı $0 \leq b \leq e$ ve $a^2 = b\lambda a$ olacak şekilde $b \in B_e$ vardır.

$$\begin{aligned} a^2 = b\lambda a &\Rightarrow a^2 - b\lambda a = 0 \\ &\Rightarrow a(a - b\lambda) = 0 \\ &\Rightarrow |a| \wedge |a - b\lambda| = 0 \quad (\text{Teorem 2.90}) \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} a - b\lambda &\leq a \Rightarrow a - b\lambda \leq a \wedge (a - b\lambda) \\ &\Rightarrow a - b\lambda \leq |a| \wedge |a - b\lambda| = 0 \quad (a \wedge (a - b\lambda) \leq |a| \wedge |a - b\lambda|) \\ &\Rightarrow a - b\lambda \leq 0 \\ &\Rightarrow a \leq b\lambda \leq \lambda e \quad (b \leq e) \\ &\Rightarrow a \in I_e \end{aligned}$$

dir.

Tersine $a \in I_e$ olsun. O halde $a \leq \lambda e$ olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{R}^+$ vardır. a pozitif olduğundan $a^2 \leq \lambda a$ bulunur. Buradan I_a cebirdir.

3.6. Teorem :

A düzgün tam örgü cebiri ve $0 < e \in A$ birim elemanı olsun. B_e ile $\text{Orth}(B_e)$ cebir ve

örgü izomorftir.

İspat :

$$\begin{aligned} F : B_e &\rightarrow \text{Orth}(B_e) \\ a &\rightarrow F(a)=L_a \end{aligned}$$

dönüşümü tanımlayalım.

i) $a \in B_e$ için teorem 3.1' den dolayı $F(a)=L_a \in \text{Orth}(B_e)$ olduğundan F anlamlıdır.

ii) $a, b, c \in B_e$ ve $b=c$ olsun.

$$\begin{aligned} b=c &\Rightarrow ab=ac \\ &\Rightarrow L_a(b)=L_a(c) \\ &\Rightarrow F(b)=F(c) \end{aligned}$$

olduğundan F iyi tanımlıdır.

iii) F 'nin lineer olduğunu görmek kolaydır. O halde birebir olduğunu göstermek için $\text{Çek}F=\{0\}$ olduğunu gösterelim. $\text{Çek}F$ vektör uzayı olduğundan

$$\{0\} \subseteq \text{Çek}F \dots(1)$$

Her $b \in \text{Çek}F$ için

$$\begin{aligned} F(b)=0 &\Rightarrow L_a(b)=0 \\ &\Rightarrow ab=0 \end{aligned}$$

dır. Her $a \in B_e$ için sağlandığından özel olarak $a=e \in B_e$ için $b=eb=0$ bulunur. O halde

$$\text{Çek}F \subseteq \{0\} \dots (2)$$

olduğundan (1) ve (2) den $\text{Çek}F = \{0\}$ dır. O halde F bire-birdir.

iv) Her $s \in \text{Orth}(B_e)$ için

$$\begin{aligned} s \in \text{Orth}(B_e) &\Rightarrow s(e) = a \in B_e \quad (s(B_e) \subseteq B_e) \\ &\Rightarrow s(e)e = ae \\ &\Rightarrow s(e) = L_a(e) \end{aligned}$$

olduğundan teorem 2.20' den B_e üzerinde $s=L_a$ olur ki buradan da F örtendir.

v) Her $a, b \in B_e$ için $F(a.b) = F(a).F(b)$ olduğunu gösterelim. $F(a,b) = L_{ab}$ dir. Her $c \in A$ için

$$\begin{aligned} L_{ab}(c) &= abc \\ &= L_a(bc) \\ &= L_a L_b(c) \end{aligned}$$

olduğundan $L_{ab} = L_a L_b$ dir. O halde $F(ab) = L_{ab} = L_a L_b = F(a)F(b)$ olduğundan F cebir homomorfizmdir.

vi) Teorem 2.14' den dolayı F örgü izomorfizm olduğunu göstermek için F ve F^{-1} dönüşümlerinin pozitif olduğunu göstermek yeterlidir. Her $a \in A^+$ için L_a çarpım operatörü pozitif olduğundan F pozitifdir.

$$\begin{aligned} F^{-1} : \text{Orth}(B_e) &\rightarrow B_e \\ s &\rightarrow F^{-1}(s) \end{aligned}$$

dir. Her $s \in \text{Orth}(B_e)_+$ için F örten olduğundan en az bir $a \in B_e$ vardır ve $F(a)=s$ dir.

O halde her $c \in B_e$ için $L_a(c)=s(c)$ olduğundan $ac=s(c)$ dir. Bu eşitlik B_e nin tüm elemanları için sağlandığından özel olaca $c=e$ içinde sağlanır.O halde $a=ae=s(e)$ olup s pozitif olduğu için a pozitifdir.Buradan da

$$F^{-1}(s)=a \geq 0$$

bulunur. Sonuç olarak F ve F^{-1} pozitif olduğu için F örgü izomorfizmdir. O halde B_e ile $\text{Orth}(B_e)$ cebir ve örgü izomorfiktir.

Sonuç :

A düzgün tam - örgü cebiri ve $0 < e \in A$ birim elemanı olsun. $a \in B_e$ için a^{-1} , A 'da mevcut ise $a^{-1} \in B_e$ dir

Bunun için $L_a^{-1}=L_{a^{-1}}$ olduğunu gösterelim. Her $b \in A$ için

$$\begin{aligned} (L_a \circ L_{a^{-1}})(b) &= L_a(L_{a^{-1}}(b)) \\ &= L_a(a^{-1}b) \\ &= aa^{-1}b \\ &= b \\ &= I(b) \end{aligned}$$

dır. O halde $L_a \circ L_{a^{-1}} = I$ bulunur.Benzer şekilde $L_{a^{-1}} \circ L_a = I$ olduğu gösterilebilir.

Dolayısıyla $L_a^{-1}=L_{a^{-1}}$ dır. L_a ortomorfizm tersi var ve teorem 2.19' dan $\text{Orth}(B_e)$ full altcebir olduğundan $L_a^{-1} \in \text{Orth}(B_e)$ dır.

$$\begin{aligned} L_a^{-1} \in \text{Orth}(B_e) &\Rightarrow L_{a^{-1}} \in \text{Orth}(B_e) \\ &\Rightarrow a^{-1} \in B_e \end{aligned}$$

dir.

3.7. Teorem :

$E \neq \{0\}$ Riesz uzayı olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir. [8]

i) $E, \mathbb{R}$ 'ye örgü izomorfizmdir.

ii) E 'nin sadece aşıkâr ideali vardır.

iii) E Arşimedyan ve tamamen sıralıdır

3.2. Lemma :

A örgü cebiri, $e > 0$ birim elemanı ve her $a \in A$ için a 'nın tersi var ve pozitif ise A f-
cebiridir.

İspat :

Bunun için önce A nın d-cebiri olduğunu gösterelim. $a > 0$ için L_a sol çarpım
operatörü pozitifdir. Gerçekten her $b \in A^+$ için;

$$L_a : A \rightarrow A$$

$$b \rightarrow L_a(b) = ab$$

biçiminde tanımlı sol çarpım operatörü, A örgü cebiri ve $a, b \in A^+$ için
 $ab \in A^+$ olduğundan pozitifdir. Ayrıca $L_a^{-1} = L_{a^{-1}}$ için $a^{-1} > 0$ olduğundan L_a^{-1} operatörü
pozitifdir. O halde L_a örgü izomorfizmdir. Benzer şekilde R_a sağ çarpım operatörünün
de örgü izomorfizm olduğu gösterilebilir. $b, c \in A$ ve $a \in A^+$ olsun. $a(b \vee c) = ab \vee ac$
ve $(b \vee c)a = ba \vee ca$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
a(b \vee c) &= L_a(b \vee c) \\
&= L_a(b) \vee L_a(c) \quad (L_a \text{ örgü izomorfizması}) \\
&= ab \vee ac
\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde $(b \vee c)a = ba \vee ca$ olduğuda gösterilebilir. O halde A d-cebiridir. Şimdi A 'nın f-cebiri olduğunu gösterelim. Her $a, b \in A$ ve $c \in A^+$ için $a \wedge b = 0$ olsun.

$$\begin{aligned}
0 \leq ca \wedge b &\leq [(c \vee e)a] \wedge [(c \vee e)b] \quad \begin{cases} c \leq (c \vee e) \\ e \leq (c \vee e) \end{cases} \\
&\leq (c \vee e)(a \wedge b) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan $ca \wedge b = 0$ dir. Benzer şekilde $ac \wedge b = 0$ olduğu gösterilebilir. O halde A f-cebiridir.

3.8. Teorem :

A f-cebiri ve $e > 0$ birim elemanı olsun. Eğer $0 < a \in A$ için a 'nın tersi var ise pozitifdir.

İspat :

$a \in A^+$ için $b = a^{-1}$ olsun. Bu durumda $ab = ba = e$ dir.

$$e = ab = a(b^+ - b^-) = ab^+ - ab^-$$

dir. Benzer şekilde $e = b^+a - b^-a$ bulunur. A f-cebiri olduğundan $b^+ \wedge b^- = 0$ için

$$(ab^+) \wedge (ab^-) = 0 \text{ ve } (b^+a) \wedge (b^-a) = 0$$

olduğundan teorem 2.1'den dolayı $e = e^+ = ab^+ = b^+a$ bulunur. O halde $a^{-1} = b^+ > 0$

dır.

3.9. Teorem :

A örgü cebiri ve $e > 0$ birim elemanı olsun. Her pozitif elemanın tersi var ve tersi pozitif ise $A, \mathbb{R}'$ 'ye örgü ve cebir izomorftur.

İspat :

A 'nın tam sıralı olduğunu gösterelim. Keyfi bir $b \in A$ için kabul edelim ki $b^+ > 0$ veya $b^- > 0$ olsun. O halde her pozitif elemanın tersi var ve pozitif olduğundan $c > 0$ ve $d > 0$ vardır ve $b^+c = cb^+ = e$, $b^-d = db^- = e$ dir. O halde $b^+c = b^-d = e$ bulunur. Ayrıca Lemma'dan A f-cebiri olduğundan $b^+ \wedge b^- = 0$ için

$$0 = b^+c \wedge b^-d = e \wedge e = e$$

bulunur ki bu da $e > 0$ olması ile çelişkidir. O halde $b^+ = 0$ veya $b^- = 0$ dır. Bu yüzden $b \geq 0$ veya $b \leq 0$ dır. O halde A tam sıralıdır. Teorem 3.7' den dolayı $A, \mathbb{R}$ örgü izomorftur ve bu dönüşüm

$$\begin{aligned} \varphi : A &\rightarrow \mathbb{R} \\ a &\rightarrow \varphi(a) = \alpha \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır.

Şimdi bu dönüşümün cebir homomorfizm olduğunu gösterelim. Her $a, b \in A$ için $a = \alpha e$ ve $b = \beta e$ olacak şekilde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vardır.

$$\begin{aligned}
\varphi(ab) &= \varphi(\alpha e \beta e) \\
&= \varphi((\alpha \beta) e) \\
&= \alpha \beta \\
&= \varphi(\alpha e) \varphi(\beta e) \\
&= \varphi(a) \varphi(b)
\end{aligned}$$

olduğundan φ cebir izomorfizmdir. Sonuç olarak A , $\mathbb{R}$ 'ye cebir ve örgü izomorftir.

4. TİP-1 CEBİRLERİNDE GELFAND-MAZUR TEOREMİ

Önceki bölümde A birimli örgü cebiri olmak üzere her pozitif elemanın tersi var ve pozitif ise $A \cong \mathbb{R}$ olduğunu verdik. A 'nın bu şartlarda f -cebiri olduğunu 3.2 Lemma'dan biliyoruz. Şimdi f -cebirlerinden daha zayıf olan tip-1 Banach cebirlerinde Gelfand-Mazur teoremini araştıracağız.

4.1 Teorem :

A Banach uzayı ve $x \in A$ olsun.

$$1) \text{ Eğer } \lambda_n \in \rho(x) \text{ ise } \|R(\lambda_n, x)\| \geq \frac{1}{d(\lambda_n, \sigma(x))}$$

$$[d(\lambda_n, \sigma(x)) = \inf\{|\lambda_n - \mu| : \mu \in \sigma(x)\}]$$

$$2) (\lambda_n) \subseteq \rho(x) \text{ dizisi } \lambda_n \rightarrow \lambda_0 \in \mathbb{C} \text{ olsun. } \lambda_0 \in \sigma(x) \Rightarrow \|R(\lambda_n, x)\| \rightarrow \infty$$

İspat :

$$1) \lambda_n \in \rho(x) \text{ olsun. } \mu \in \sigma(x) \text{ için } |\lambda_n - \mu| \geq \frac{1}{\|R(\lambda_n, x)\|} \text{ dir. Çünkü teorem 2.109'dan}$$

$$\text{dolayısı } D(\lambda_0, \frac{1}{\|R(\lambda_0, x)\|}) \subseteq \rho(x) \text{ olduğundan } |\lambda_n - \mu| < \frac{1}{\|R(\lambda_n, x)\|} \text{ olması } \mu \in \sigma(x) \text{ olması}$$

ile çelişkidir.

$$d(\lambda_n, \sigma(x)) = \inf\{|\lambda_n - \mu| : \mu \in \sigma(x)\} \geq \frac{1}{\|R(\lambda_n, x)\|}$$

$$2) \lambda_n \rightarrow \lambda_0 \in \sigma(x) \text{ olsun. } \|R(\lambda_n, x)\| \geq \frac{1}{d(\lambda_n, \sigma(x))} \text{ (teoremin 1. kısmından)}$$

Keyfi $m \in \mathbb{N}^+$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\lambda_n, \sigma(x)) = 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0 \text{ için } d(\lambda_n, \sigma(x)) < \frac{1}{m}$$

dir. $\|R(\lambda_n, x)\| \geq \frac{1}{d(\lambda_n, \sigma(x))}$ olduğundan $\|R(\lambda_n, x)\| \geq \frac{1}{d(\lambda_n, \sigma(x))} > m$ bulunur. O halde

$n \rightarrow \infty$ için $\|R(\lambda_n, x)\| \rightarrow \infty$ dur.

4.2. Teorem :

A reel Banach örgü cebiri ve e birim elemanı olsun. Her $x \in A^+$, x tersinir ve $\|x\|=1$ iken $\|x^{-1}\| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ varsa A , $\mathbb{R}$ ye örgü izomorfiktir.

İspat :

$x \in A^+$ ve $(\lambda_n)_{n=0}^\infty, \mathbb{R}^+$ da bir dizi ve $\lambda_n > r(x)$ ve $\lim_n \lambda_n = r(x)$ olsun.

$(\lambda_n = r(x) + \frac{1}{n})$ alabiliriz.)

$$\lambda_n > r(x) \Rightarrow \lambda_n \in \rho(x) \quad (\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r(x)\} \subseteq \rho(x))$$

O halde $\lambda_n > r(x)$ için $(\lambda_n e - x)^{-1}$ vardır.

$$\lambda_n > r(x) \Rightarrow \frac{\|x\|}{\lambda_n} \leq \frac{r(x)}{\lambda_n} < 1$$

olduğundan $s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\lambda_n^{k+1}}$ serisi yakınsaktır.

$$\begin{aligned}
(\lambda_n e^{-x})s &= (\lambda_n e^{-x}) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\lambda_n^{k+1}} \\
&= (\lambda_n e^{-x}) \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \frac{x^k}{\lambda_n^{k+1}} \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[(\lambda_n e^{-x}) \sum_{k=0}^m \frac{x^k}{\lambda_n^{k+1}} \right] \quad (\text{Çarpma sürekli}) \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=0}^m \frac{x^k}{\lambda_n^k} - \sum_{k=0}^m \frac{x^{k+1}}{\lambda_n^{k+1}} \right] \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[e - \left(\frac{x}{\lambda_n} \right)^{m+1} \right] \\
&= e
\end{aligned}$$

$$x_n := \frac{R(\lambda_n, x)}{\|R(\lambda_n, x)\|} \text{ tanımlayabiliriz ve } R(\lambda_n, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\lambda_n^{k+1}} \quad \text{dir. } R(\lambda_n, x) \geq 0 \quad \text{olduğunu}$$

gösterelim.

$$R_m(\lambda_n, x) = \sum_{k=0}^m \frac{x^k}{\lambda_n^{k+1}}$$

dir. $x^k \geq 0$ ve $\lambda_n \geq 0$ olduğundan bunların sonlu toplamı da pozitifdir yani $R_m \geq 0$ dir.

Pozitif kon kapalı olduğundan $\lim_{m \rightarrow \infty} R_m \geq 0$ olur. O halde $R(\lambda_n, x) \geq 0$, $x_n \geq 0$ ve

$\|x_n\| = 1$ dir. Teorem 4.1' den dolayı $\lim_{n \rightarrow \infty} R(\lambda_n, x) = \infty$ dur. O halde

$$\begin{aligned}
0 \leq \|\lambda_n e^{-x}\| &\leq \frac{M}{\|R(\lambda_n, x)\|} \Rightarrow 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\lambda_n e^{-x}\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M}{\|R(\lambda_n, x)\|} \\
&\Rightarrow 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\lambda_n e^{-x}\| \leq 0 \\
&\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|\lambda_n e^{-x}\| = 0 \\
&\Rightarrow \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n e^{-x}) \right\| = 0 \\
&\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n e^{-x}) = 0 \\
&\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n e) - x = \\
&\Rightarrow x = r(x)e
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece A e'nin ürettiği lineer uzay yani 1-boyutlu Banach cebiri olur. Buradan $A \cong \mathbb{R}$ elde edilir. (Riesz Space I, Teorem 26.11)

Sonuç :

A sonlu boyutlu reel Banach örgü cebiri ve her pozitif elemanın tersi var olsun. Bu durumda $A, \mathbb{R}$ ye izomorftur.

İspat :

$S = \{x \in A^+ : \|x\| = 1\}$ olsun. $S \subseteq A$ olduğundan S sonlu boyutludur.

1) Her $x \in S$ için $\|x\| \leq 1$ olduğundan sınırlıdır.

2) S kapalıdır.

$$S \subseteq \bar{S} \quad \dots (1)$$

Diğer taraftan $x \in \bar{S}$ olsun. O halde $x_n \rightarrow x$ olacak şekilde $(x_n) \subseteq S$ vardır. Şimdi $\|x\| = 1$ olduğunu gösterelim.

$$x_n \rightarrow x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0 \text{ için } \|x_n - x\| < \varepsilon$$

dur. Buradan da $\| \|x_n\| - \|x\| \| \leq \|x_n - x\| < \varepsilon$ olduğundan $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ tir.

$$\begin{aligned} x_n \rightarrow x &\Rightarrow \|x_n\| \rightarrow \|x\| \\ &\Rightarrow 1 \rightarrow \|x\| \end{aligned}$$

ve (1) sabit dizisi 1'e yakınsak olacağından ve limitin tekliğinden dolayı $\|x\| = 1$ dir.

O halde $x \in S$ dir. Dolayısıyla

$$\bar{S} \subseteq S \dots (2)$$

(1) ve (2) den dolayı $S = \bar{S}$ dir. S kapalıdır.

Sonlu boyutlu uzaylarda kapalı ve sınırlı küme kompakttır.

$$\begin{aligned} \varphi : S &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\rightarrow \|x^{-1}\| \end{aligned}$$

dönüşümü süreklidir. Çünkü teorem 2.32' den $x \rightarrow x^{-1}$ dönüşüm sürekli olduğundan

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \|x - x_0\| < \delta \text{ iken } \|x^{-1} - x_0^{-1}\| < \varepsilon$$

dur. O halde $\|x - x_0\| < \delta$ iken $\left| \|x^{-1}\| - \|x_0^{-1}\| \right| \leq \|x^{-1} - x_0^{-1}\| < \varepsilon$ olduğundan $x \rightarrow \|x^{-1}\|$ dönüşümü süreklidir. Kompakt kümelerde sürekli fonksiyonlar maksimum değerini alacağından $\|x^{-1}\| \leq M$ olacak şekilde $M \in \mathbb{R}^+$ vardır. O halde Teorem 4.2' nin tüm şartları sağlandığından $A \cong \mathbb{R}$ tur.

4.3. Teorem :

A reel Banach örgü cebiri ve e birim elemanı olsun. $x \in A^+$, $\mathbb{R}^+ \subseteq \rho(x)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\inf(x^n, e) = 0$ ise x singülerdir.

İspat :

A_c , A 'nın kompleksleştirilmiş Banach örgü cebiri ve $B(x)$, e ve x tarafından üretilen alt cebirin kapanışı olsun.

$$V = \text{Sp}\{e, x^n : n \in \mathbb{N}\} = \left\{ \sum_{k=1}^t \lambda_k u_k : u_k = e \text{ veya } u_k = x^n, t \in \mathbb{N} \right\}$$

ailesi e ve x tarafından üretilen cebirdir.

1) V 'nin vektör uzayı olduğunu gösterelim.

i) Her $x, y \in V$ için $x = \sum_{k=1}^t \lambda_k u_k$, $y = \sum_{s=1}^r \beta_s v_s$ olsun. $x+y = \sum_{k=1}^t \lambda_k u_k + \sum_{s=1}^r \beta_s v_s$ dir.

$$\gamma_k = \begin{cases} \lambda_k & ; 1 \leq k \leq t \\ \beta_k & ; t+1 \leq k \leq t+r \end{cases}$$

$$\omega_k = \begin{cases} u_k & ; 1 \leq k \leq t \\ v_k & ; t+1 \leq k \leq t+r \end{cases}$$

olmak üzere $x+y = \sum_{k=1}^{t+r} \gamma_k \omega_k$ olduğundan $x+y \in V$ dir.

ii) Her $x \in V$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olsun.

$$x \in V \Rightarrow x = \sum_{k=1}^t \lambda_k u_k$$

olacak şekilde $\lambda_k \in \mathbb{C}$ ve $u_k = e$ veya $u_k = x^n$ vardır.

$$\lambda x = \sum_{k=1}^t (\lambda \lambda_k) u_k$$

olduğundan $\lambda x \in V$ dir. O halde V alt vektör uzayıdır.

2) Her $x, y \in V$ için

$$x, y \in V \Rightarrow \begin{cases} x = \sum_{k=1}^t \lambda_k u_k \\ y = \sum_{s=1}^r \beta_s v_s \end{cases}$$

olacak şekilde $\lambda_k, \beta_s \in \mathbb{C}$, ($u_k = e$ veya $u_k = x^n$) ve ($v_s = e$ veya $v_s = x^n$) vardır.

$$\begin{aligned} x \cdot y &= \left(\sum_{k=1}^t \lambda_k u_k \right) \cdot \left(\sum_{s=1}^r \beta_s v_s \right) \\ &= \sum_{k=1}^t \sum_{s=1}^r [(\lambda_k \beta_s) \cdot (u_k v_s)] \end{aligned}$$

dir.

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_k = e \text{ ve } v_s = e & \Rightarrow u_k \cdot v_s = e \\ u_k = e \text{ ve } v_s = x^n & \Rightarrow u_k \cdot v_s = x^n \\ u_k = x^n \text{ ve } v_s = e & \Rightarrow u_k \cdot v_s = x^n \\ u_k = x^n \text{ ve } v_s = x^n & \Rightarrow u_k \cdot v_s = x^{2n} \end{array} \right\}$$

olduğundan $x \cdot y \in V$ dir. O halde V cebirdir.

3) Her $x, y \in \bar{V}$ için

$x \in \bar{V} \Rightarrow x_n \rightarrow x$ olacak şekilde $(x_n) \subseteq V$ vardır.

$y \in \bar{V} \Rightarrow y_n \rightarrow y$ olacak şekilde $(y_n) \subseteq V$ vardır.

V cebir olduğundan $x_n \cdot y_n \in V$ dir. Şimdi $x_n \cdot y_n \rightarrow x \cdot y$ olduğunu gösterelim.

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists n'_0 \in \mathbb{N} \ni \|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2\|x\|}$$

$$y_n \rightarrow y \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists n_0'' \in \mathbb{N} \ni \|y_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2\|y_n\|}$$

dır. O halde

$$\begin{aligned} \|x_n \cdot y_n - x \cdot y\| &= \|x_n \cdot y_n - x \cdot y_n + x \cdot y_n - x \cdot y\| \\ &\leq \|y_n\| \|x_n - x\| + \|x\| \|y_n - y\| \\ &< \|y_n\| \frac{\varepsilon}{2\|y_n\|} + \|x\| \frac{\varepsilon}{2\|x\|} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

olduğundan $x_n \cdot y_n \rightarrow x \cdot y$ dir.

Sonuç olarak $x_n \cdot y_n \rightarrow x \cdot y$ ve $(x_n \cdot y_n) \subseteq V$ olduğundan $x \cdot y \in \bar{V}$ dir.

4) $B(x) = \bar{V}$ olduğunu gösterelim.

$e, x \in V$ için $e, x \in \bar{V}$ dir. $B(x)$, e 'yi ve x 'i kapsayan en küçük cebir olduğundan

$$B(x) \subseteq \bar{V} \dots (1)$$

dır. $e, x \in B(x)$ ve $B(x)$ cebir olduğundan $e, x^n \in B(x)$ bulunur. Her $y \in \bar{V}$ için

$y = \sum_{k=1}^t \lambda_k u_k$ olduğundan $u_k = e$ veya $u_k = x^n$ olup $u_k \in B(x)$ ve $B(x)$ cebir olduğundan

$y = \sum_{k=1}^t \lambda_k u_k \in B(x)$ bulunur. O halde

$$\bar{V} \subseteq B(x) \dots (2)$$

tir.(1) ve (2) den $B(x)=\overline{V}$ bulunur.

Şimdi x 'in singüler olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki x 'in tersi var olsun yani $x^{-1} \in A$ olsun. Bu durumda $0 \in \rho(x)$ tir.

$$\varphi : A_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C} \text{ sürekli ve } \varphi(B(x))=0$$

şartını sağlayan herhangi bir φ fonksiyonunu alalım. $\varphi(x^{-1})=0$ olduğunu göstereceğiz. Teorem 2.32' den

$$\begin{aligned} h : \rho(x) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \lambda &\rightarrow h(\lambda)=\varphi((\lambda e-x)^{-1}) \end{aligned}$$

dönüşümü holomorftir. $|\lambda| > r(x)$ için;

$$(\lambda e-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}} \in B(x)$$

tir. $B(x)$ üzerinde $\varphi=0$ olduğundan $\varphi((\lambda e-x)^{-1})=0$ dir. O halde $h(\lambda)=0$ olup $\rho(x)$ sınırsız her maksimal irtibatlı alt kümesinde $h=0$ dir [6].

$(-\infty, 0] \subseteq \rho(x)$ ve $\rho(x)$ 'in $(-\infty, 0]$ kapsayacak şekilde irtibatlı, sınırsız maksimal altkümesi vardır ve $(-\infty, 0] \subseteq S$ ve $h(S)=0$ olduğundan $h(0)=0$ dir.

$$\begin{aligned} 0=h(0)=\varphi((-x)^{-1}) &\Rightarrow \varphi((-x)^{-1})=0 \\ &\Rightarrow \varphi((x)^{-1})=0 \\ &\Rightarrow x^{-1} \in B(x) \end{aligned}$$

tir. $x^{-1} \in B(x)$ olduğundan en az bir $(p_n) \subseteq V$ vardır ve burada $x^{-1}=\lim_n p_n$ ve

$$p_n = \sum_{k=1}^t \lambda_k u_k \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned} x^{-1} = \lim_n p_n &\Rightarrow x \cdot x^{-1} = \lim_n p_n x \quad (\text{Çarpma sürekli}) \\ &\Rightarrow e = \lim_n (p_n x) \end{aligned}$$

$x^n \wedge e = 0$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n x \wedge e = 0$ olduğundan $p_n x$, e 'ye diktir. O halde ürettiği ideale de diktir. $y \perp x$ ve her $a \in I_x$ için

$$\begin{aligned} 0 \leq |y| \wedge |a| &\leq |y| \wedge \lambda |x| \quad (a \in I_x \Rightarrow \exists \lambda > 0 \ni |a| \leq \lambda |x|) \\ &\leq \mu |y| \wedge \mu |x| \quad (\mu = \max(\lambda, 1)) \\ &\leq \mu (|y| \wedge |x|) \\ &= 0 \quad (y \perp x \text{ olduğundan } |y| \wedge |x| = 0) \end{aligned}$$

O halde $p_n x \in (A_c)_e^\perp$ ve $(A_c)_e^\perp$ sıra kapalı olduğu için $e \in (A_c)_e^\perp$ dir. Bu da çelişkidir. O halde kabul yanlıştır x singülerdir.

4.4 Teorem :

A tip1 reel Banach örgü cebiri ve e birim elemanı olsun.

$u \in A^+$ için $u \perp e$ olsun. Bu durumda u singülerdir

İspat :

$\alpha > 0$ olsun. $\alpha u > 0$ dir ve A tip-1 olduğundan $(e + \alpha u)^{-1}$ vardır ve $\alpha u(e + \alpha u)^{-1} \geq 0$ dir.

$$\begin{aligned}
(e+\alpha u)^{-1} &= (-\alpha(-\frac{e}{\alpha}-u))^{-1} \\
&= -\frac{1}{\alpha}(-\frac{e}{\alpha}-u)^{-1} \\
&= -\frac{1}{\alpha}R(-\frac{1}{\alpha},u)
\end{aligned}$$

olduğundan $-\frac{1}{\alpha} \in \rho(u)$ dir. $\beta \in \mathbb{R}^-$ için $\beta \in \rho(u)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\beta \in \mathbb{R}^- &\Rightarrow -\beta \in \mathbb{R}^+ \\
&\Rightarrow -\frac{1}{\beta} \in \mathbb{R}^+ \\
&\Rightarrow -\frac{1}{\frac{1}{\beta}} = \beta \in \rho(u)
\end{aligned}$$

olduğundan $\mathbb{R}^- \subseteq \rho(u)$ bulunur. Her $\alpha > 0$ için

$-uR(-\frac{1}{\alpha},u) = \alpha u(e+\alpha u)^{-1} \geq 0$ dir. Şimdi $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \|R(\lambda,u)\| = 0$ olduğunu gösterelim.

$\lambda \rightarrow -\infty$ olması $|\lambda| \rightarrow \infty$ demektir. O halde $|\lambda| > \|u\|$ için;

$$\begin{aligned}
0 \leq \|R(|\lambda|,u)\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{|\lambda|^{n+1}} \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|u\|^n}{|\lambda|^{n+1}} \\
&= \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|u\|^n}{|\lambda|^n} \\
&= \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \frac{\|u\|}{|\lambda|}} \quad \left(\frac{\|u\|}{|\lambda|} < 1 \text{ olduğundan} \right) \\
&= \frac{1}{|\lambda|} \frac{|\lambda|}{|\lambda| - \|u\|} \\
&= \frac{1}{|\lambda| - \|u\|} \quad (|\lambda| \rightarrow \infty \text{ için}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|R(|\lambda|, u)\| = 0$ bulunur.

$$\begin{aligned} |R(\lambda, u)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{\lambda^{n+1}} \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u|^n}{|\lambda|^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{|\lambda|^{n+1}} \quad (u > 0) \\ &= R(|\lambda|, u) \end{aligned}$$

Buradan $|R(\lambda, u)| \leq R(|\lambda|, u)$ için $\|R(\lambda, u)\| \leq \|R(|\lambda|, u)\|$ olmasından dolayı

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \|R(\lambda, u)\| = \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|R(|\lambda|, u)\| = 0 \text{ elde edilir. } \beta > 0 \text{ için } s := \beta u(e + \beta u)^{-1} \geq 0$$

olsun.

$$\begin{aligned} \|s\| &= \|\beta u(e + \beta u)^{-1}\| \\ &= \beta \|u\| \|(e + \beta u)^{-1}\| \\ &\leq \beta \|u\| \frac{1}{\beta} \left\| R\left(-\frac{1}{\beta}, u\right) \right\| \quad (\|(e + \beta u)^{-1}\| = \frac{1}{\beta} \left\| R\left(-\frac{1}{\beta}, u\right) \right\|) \\ &= \|u\| \left\| R\left(-\frac{1}{\beta}, u\right) \right\| \dots * \end{aligned}$$

bulunur. $\beta \rightarrow 0$ iken $\lambda = -\frac{1}{\beta}$ seçersek $\lambda \rightarrow -\infty$ olur. O halde $\varepsilon = \frac{1}{2\|u\|} > 0$ verilsin.

Öyle $n \in \mathbb{N}$ vardırki $\lambda < -n$ iken $\|R(\lambda, u)\| < \frac{1}{2\|u\|}$ dir. $\lambda = -\frac{1}{\beta}$ olduğundan $n \in \mathbb{N}$ için

$-\frac{1}{\beta} < -n$ olmak üzere

$$\left\| R\left(-\frac{1}{\beta}, u\right) \right\| < \frac{1}{2\|u\|} \dots **$$

bulunur. * ve ** eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}\|s\| &\leq \|u\| \left\| R\left(-\frac{1}{\beta}, u\right) \right\| \\ &< \|u\| \frac{1}{2\|u\|} \\ &< 1\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}e-s &= e-\beta u(e+\beta u)^{-1} \\ &= (e+\beta u)(e+\beta u)^{-1}-\beta u(e+\beta u)^{-1} \\ &= (e+\beta u)^{-1}e \\ &= (e+\beta u)^{-1}\end{aligned}$$

olduğundan $e+\beta u=(e-s)^{-1}=e+\sum_{n=1}^{\infty} s^n \Rightarrow s^n \leq \beta u$ 'dur.

$$\begin{aligned}0 \leq s^n \leq \beta u &\Rightarrow 0 \leq s^n \wedge e \leq \beta u \wedge e \\ &\leq \mu(u \wedge e) \quad (\mu = \text{maks}(\beta, 1)) \\ &= 0\end{aligned}$$

dır. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $s^n \wedge e=0$ olduğundan $s^n \perp e$ dir. $\lambda \in \sigma(u)$ olsun.

$$\begin{aligned}\frac{\beta\lambda}{1+\beta\lambda} e-s &= [\beta\lambda e-s(1+\beta\lambda)] \frac{1}{1+\beta\lambda} \\ &= [\beta\lambda e-s-\beta\lambda s] \frac{1}{1+\beta\lambda} \\ &= [\beta\lambda(e-s)-s] \frac{1}{1+\beta\lambda} \\ &= [\beta\lambda(e+\beta u)^{-1}-\beta u(e+\beta u)^{-1}] \frac{1}{1+\beta\lambda} \\ &= [(e+\beta u)^{-1}\beta(\lambda e-u)] \frac{1}{1+\beta\lambda}\end{aligned}$$

$\lambda \in \sigma(u)$ olduğundan $(\lambda e - u)$ ifadesinin tersi yoktur. O halde $(\frac{\beta\lambda}{1+\beta\lambda} e - s)$ ifadesinin tersi yoktur.

$$\sigma(s) = \left\{ \frac{\beta\lambda}{1+\beta\lambda} : \lambda \in \sigma(u) \right\}$$

dur. $\mathbb{R}^- \subseteq \rho(u)$ olduğunu biliyoruz. $\mathbb{R}^- \subseteq \rho(s)$ olduğunu gösterelim. $\alpha \in \mathbb{R}^-$ için $\alpha \in \rho(u)$ dur.

$$\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\lambda \rightarrow \varphi(\lambda) = \frac{\beta\lambda}{1+\beta\lambda}$$

dönüşümü tanımlayalım.

i) Her $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $0 < \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \beta\lambda \in \mathbb{C} &\Rightarrow (1 + \beta\lambda) \in \mathbb{C} \\ &\Rightarrow \frac{1}{1 + \beta\lambda} = \varphi(\lambda) \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

olduğundan φ anlamlıdır.

ii) Her $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{C}$ ve $0 < \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \lambda_2 &\Rightarrow \beta\lambda_1 = \beta\lambda_2 \\ &\Rightarrow 1 + \beta\lambda_1 = 1 + \beta\lambda_2 \text{ ve } \beta\lambda_1 = \beta\lambda_2 \\ &\Rightarrow \frac{\beta\lambda_1}{1 + \beta\lambda_1} = \frac{\beta\lambda_2}{1 + \beta\lambda_2} \\ &\Rightarrow \varphi(\lambda_1) = \varphi(\lambda_2) \end{aligned}$$

olduğundan φ iyi tanımlıdır.

iii) Her $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ ve $0 < \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda_1) = \varphi(\lambda_2) &\Rightarrow \frac{\beta\lambda_1}{1+\beta\lambda_1} = \frac{\beta\lambda_2}{1+\beta\lambda_2} \\ &\Rightarrow (1+\beta\lambda_1)\lambda_2 = (1+\beta\lambda_2)\lambda_1 \\ &\Rightarrow \lambda_2 + \beta\lambda_1\lambda_2 = \lambda_1 + \beta\lambda_1\lambda_2 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2\end{aligned}$$

olduğundan φ bire-birdir.

iv) Her $\gamma \in \mathbb{C}$ için $\varphi(\lambda) = \gamma$ olsun.

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) = \gamma &\Rightarrow \frac{\beta\lambda}{1+\beta\lambda} = \gamma \\ &\Rightarrow \beta\lambda = (1+\beta\lambda)\gamma \\ &\Rightarrow \beta\lambda = \gamma + \beta\lambda\gamma \\ &\Rightarrow \beta\lambda - \beta\lambda\gamma = \gamma \\ &\Rightarrow \lambda(\beta - \beta\gamma) = \gamma \\ &\Rightarrow \lambda = \frac{\gamma}{(\beta - \beta\gamma)} \in \mathbb{C}\end{aligned}$$

olduğundan φ örtendir.

Her $\lambda \in \sigma(s)$ için $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R}^-$ olduğunu gösterelim.

$$\lambda \in \sigma(s) \Rightarrow \exists \lambda_1 \in \sigma(u) \ni \frac{\beta\lambda_1}{1+\beta\lambda_1} = \lambda \quad (\varphi \text{ anlamlı})$$

$\sigma(u) \subseteq \mathbb{C} - \mathbb{R}^-$ olduğundan $\lambda_1 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}^-$ dir. Kabul edelim ki $\lambda \notin \mathbb{C} - \mathbb{R}^-$ olsun. O

halde $\lambda \in \mathbb{R}^-$ dir. Bu durumda $\frac{\beta\lambda_1}{1+\beta\lambda_1} = a$ olacak şekilde $a \in \mathbb{R}^-$ vardır.

$$\begin{aligned} \frac{\beta\lambda_1}{1+\beta\lambda_1} = a &\Rightarrow \beta\lambda_1 = (1+\beta\lambda_1)a \\ &\Rightarrow \beta\lambda_1 = a + \beta\lambda_1 a \\ &\Rightarrow \beta\lambda_1(1-a) = a \\ &\Rightarrow \lambda_1 = \frac{a}{\beta(1-a)} \end{aligned}$$

dır.

$$\begin{aligned} a \in \mathbb{R}^- &\Rightarrow (1-a) \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow \frac{a}{1-a} \in \mathbb{R}^- \\ &\Rightarrow \frac{a}{(1-a)\beta} \in \mathbb{R}^- \\ &\Rightarrow \lambda_1 \in \mathbb{R}^- \end{aligned}$$

olması $\lambda_1 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}^-$ ile çelişkidir. O halde $\sigma(s) \subseteq \mathbb{C} - \mathbb{R}^-$ dir. Buradan da $\mathbb{R}^- \subseteq \rho(s)$ dir.

$s \geq 0$, $s^n \wedge e = 0$ ve $\mathbb{R}^- \subseteq \rho(s)$ olduğundan teorem 4.3'ten s singülerdir.

$$u = \frac{s(e + \beta u)}{\beta}$$

olduğundan u singülerdir.

4.1 Lemma :

A reel Banach örgü cebiri, e birim elemanı ve her pozitif elemanın tersi var olsun. Bu durumda aşağıdakiler vardır.

$$1) \dim I_e = 1$$

$$2) 0 < x \in A \text{ için } \sigma(x) \subseteq \mathbb{R}^+ \text{ dir.}$$

İspat :

1) Teorem 2.25' den $I_e = C(K)$ olacak şekilde K kompakt Hausdorff uzayı vardır. Her $f \in C(K)$ f negatif olmayan ve $f^{-1} \in C(K)$ ise K tek noktadır.

Teorem 2.35' ten (ii $\Leftrightarrow$ iii) önermesinin tersi " f regüler $\Leftrightarrow \forall x \in K$ için $f(x) \neq 0$ " önermesi doğrudur. Ayrıca f negatif olmayan fonksiyon olduğundan her $x \in K$ için $f(x) > 0$ dir.

Kabul edelim ki K en az iki elemanlı olsun. $x, y \in K$ $x \neq y$ dir. O halde ayırma teoreminden dolayı

$$\exists f \in C(K) \ni f(x)=0, f(y)=1$$

dir. $f^+ \geq 0$, $f^+ \in C(K)$ için $f^+(x)=f(x) \vee 0$ ve $f^+(y)=f(y) \vee 0=1$ dir. Ayrıca $f^+ \geq 0$ olduğundan hipotezden dolayı f^+ tersi vardır. O halde $f^+(x)=0$ olması f^+ regüler olması ile çelişkidir. Sonuç olarak K tek noktadır.

2) $0 < x \in A$ olsun. O halde $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ için $(e+\lambda x) > 0$ olduğundan hipotezden dolayı tersi vardır.

$$(e+\lambda x)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \left(-\frac{1}{\lambda} e - x\right)^{-1}$$

olduğundan $-\frac{1}{\lambda} \in \rho(x)$ olduğundan $\mathbb{R}^- \subseteq \rho(x)$ tir. O halde her iki tarafın tümleyeni alınırsa $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}^+$ dir.

4.5. Teorem (Gelfand-Mazur Teoremi) :

A tipl reel Banach örgü cebiri ve $e > 0$ birim elemanı olsun. A'daki her pozitif elemanın tersi var ise A, $\mathbb{R}$ 'ye izomorftur.

İspat :

A tipl reel Banach örgü cebiri ve A'daki her pozitif elemanın tersi var olsun. A Banach örgü cebiri olduğundan e'nin ürettiği ideal, e'nin ürettiği bande eşit olup oda projeksiyon banddır. O halde $A = I_e \oplus I_e^\perp$ dir. Teorem 4.4'ten dolayı $I_e^\perp = \{0\}$ dir. O halde $A = I_e$ bulunur. A f-cebiri olduğundan A, $\mathbb{R}$ ye izomorftur.

4.6. Teorem :

E Banach örgü, $S \in L(E)$, $S \geq 0$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere $T := R(\alpha, S)$ ve $\alpha > r(S)$ olsun.

$$1) \{ \operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(T) \} \subseteq \mathbb{R}^+$$

2) $f : \mathbb{R}^- \rightarrow L(E)$ ye $\lambda \rightarrow f(\lambda) = \lambda TR(\lambda, T)$ dönüşümü ile $g : \mathbb{R}^- \rightarrow L(E)$ ye $\lambda \rightarrow g(\lambda) = (\lambda\alpha - 1)TR(\lambda, T)$ dönüşümleri negatif olmayan ve monoton azalandır.

$$3) \text{ Her } \lambda \in \mathbb{R}^- \text{ için } TR(\lambda, T) \leq 0, I - \lambda R(\lambda, T) \geq 0 \text{ ve } 0 \leq \lambda TR(\lambda, T) \leq T$$

$$4) \lambda \in \mathbb{R}^- \text{ ve } x \in E \text{ için } Tx \leq \lambda x \text{ iken } Tx \leq 0$$

İspat :

1) $\sigma(T) = \{ \frac{1}{\alpha - z} : z \in \sigma(S) \}$ dir. $z \in \sigma(S)$ olsun. O halde $(zI - S)$ nin E içinde tersi yoktur.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha - z} I - T &= \frac{I - \alpha T + zT}{\alpha - z} \\ &= \frac{(\alpha I - S)(\alpha I - S)^{-1} - \alpha(\alpha I - S)^{-1} + z(\alpha I - S)^{-1}}{\alpha - z} \\ &= \frac{(\alpha I - S)^{-1}(\alpha I - S - \alpha I + zI)}{\alpha - z} \\ &= \frac{(\alpha I - S)^{-1}(zI - S)}{\alpha - z} \end{aligned}$$

$(zI - S)$ 'nin tersi olmadığından $\frac{1}{\alpha - z} I - T$ 'nin tersi yoktur. $z = a + ib \in \sigma(S)$ olsun.

$$\frac{1}{\alpha - z} = \frac{1}{(\alpha - a) - ib} = \frac{(\alpha - a) + ib}{(\alpha - a)^2 + b^2}$$

olduğundan

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\alpha - z}\right) = \frac{\alpha - a}{(\alpha - a)^2 + b^2}$$

dir.

$$\begin{aligned} |a| \leq |a + ib| \leq r(S) < \alpha &\Rightarrow |a| < \alpha \\ &\Rightarrow a < |a| < \alpha \\ &\Rightarrow \alpha - a > 0 \end{aligned}$$

için $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\alpha - z}\right) > 0$ olduğundan $\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(T)\} \subseteq \mathbb{R}^+$ bulunur.

2) $S \geq 0$ için $R(\lambda, S) \geq 0$ ve $\lambda R(\lambda, S) \geq 0$ ve her $\lambda > r(S)$ için

$$R(\lambda, S) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^n}{\lambda^{n+1}}$$

dir. $R_m = \sum_{n=0}^m \frac{S^n}{\lambda^{n+1}} > 0$ ve E^+ kapalı olduğundan $R(\lambda, S) > 0$ dir. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $r(S) < a < b$

olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $a^{n+1} < b^{n+1}$ dir.

$$\frac{1}{b^{n+1}} < \frac{1}{a^{n+1}} \Rightarrow \frac{S^n}{a^{n+1}} > \frac{S^n}{b^{n+1}}$$

olduğundan

$$R(a, S) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^n}{a^{n+1}} \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^n}{b^{n+1}} = R(b, S)$$

O halde monoton azalandır ve $aR(a, S) \geq bR(b, S)$ dir. $(r(S), \infty)$ içinde $\lambda \rightarrow R(\lambda, S)$ ve $\lambda \rightarrow \lambda R(\lambda, S)$ dönüşümleri negatif olmayan monoton azalandır.

$R(., S)$ ile $R(., T)$ arasında aşağıdaki ilişki vardır.

$$R(\lambda, S) = \frac{1}{\alpha - \lambda} \text{TR} \left(\frac{1}{\alpha - \lambda}, T \right) \quad (\text{her } \lambda \in \rho(S) \lambda \neq \alpha) \dots^*$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha - \lambda} \text{TR} \left(\frac{1}{\alpha - \lambda}, T \right) &= \frac{1}{\alpha - \lambda} \text{TR} \left(\frac{1}{\alpha - \lambda}, T \right) \\ &= \frac{1}{\alpha - \lambda} T \left(\frac{1}{\alpha - \lambda} I - T \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{\alpha - \lambda} T \left(\frac{I - \alpha T + \lambda T}{\alpha - \lambda} \right)^{-1} \\ &= \frac{\alpha - \lambda}{\alpha - \lambda} T [(\alpha I - S)^{-1} (\alpha I - S) - \alpha (\alpha I - S)^{-1} + \lambda (\alpha I - S)^{-1}]^{-1} \\ &= T [(\alpha I - S)^{-1} (\alpha I - S - \alpha I + \lambda I)]^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= T (\alpha I - S)(\lambda I - S) \\
&= (\lambda I - S)^{-1} \quad (T = (\alpha I - S)^{-1}) \\
&= R(\lambda, S)
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

$$\begin{aligned}
h : (\alpha, \infty) &\rightarrow \mathbb{R}^- \\
\lambda &\rightarrow \frac{1}{\alpha - \lambda}
\end{aligned}$$

dönüşümü monoton artandır. Gerçekten;

$$\begin{aligned}
\lambda_1 < \lambda_2 &\Rightarrow -\lambda_1 > -\lambda_2 \\
&\Rightarrow \alpha - \lambda_1 > \alpha - \lambda_2 \\
&\Rightarrow \frac{1}{\alpha - \lambda_1} < \frac{1}{\alpha - \lambda_2}
\end{aligned}$$

$$\text{dır. } \beta := \frac{1}{\alpha - \lambda} \text{ seçersek}$$

$$\begin{aligned}
\varphi : \mathbb{R}^- &\rightarrow L(E) \\
\beta &\rightarrow \beta TR(\beta, T)
\end{aligned}$$

dönüşümü negatif olmayan ve monoton azalandır. Gerçekten

$$\begin{aligned}
R(\lambda, S) &= \frac{1}{\alpha - \lambda} TR\left(\frac{1}{\alpha - \lambda}, T\right) \\
&= \beta TR(\beta, T)
\end{aligned}$$

dir ve $(\alpha, \infty) \subseteq (r(S), \infty)$ olup $\lambda \rightarrow R(\lambda, S)$, $(r(S), \infty)$ aralığından negatif olmayan monoton azalan dönüşüm olduğundan $\beta \rightarrow \beta TR(\beta, T)$ dönüşümde negatif olmayan monoton azalandır.

Şimdi $\beta \rightarrow (\beta\alpha-1)TR(\beta,T)$ dönüşümünün negatif olmayan monoton azalan olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^- &\rightarrow L(E) \\ \lambda &\rightarrow g(\lambda)=(\beta\alpha-1)TR(\beta,T) \end{aligned}$$

dönüşümü için

$$\beta\alpha-1 = \frac{\alpha}{\alpha-\lambda} - 1 = \frac{\alpha-\alpha+\lambda}{\alpha-\lambda} = \frac{\lambda}{\alpha-\lambda}$$

dir ve g dönüşümü monoton azalandır. Gerçekten $\beta_1 < \beta_2 < 0$ olsun. $\alpha < \lambda_1 < \lambda_2$ için

$$\begin{aligned} \alpha < \lambda_1 < \lambda_2 &\Rightarrow \lambda_1 R(\lambda_1, S) \geq \lambda_2 R(\lambda_2, S) \quad (\lambda \rightarrow R(\lambda, S) \text{ dönüşümü azalan}) \\ &\Rightarrow \frac{\lambda_1}{\alpha-\lambda_1} T R\left(\frac{1}{\alpha-\lambda_1}, S\right) \geq \frac{\lambda_2}{\alpha-\lambda_2} T R\left(\frac{1}{\alpha-\lambda_2}, S\right) \\ &\Rightarrow (\beta_1 \alpha - 1) T R((\beta_1 \alpha - 1), S) \geq (\beta_2 \alpha - 1) T R((\beta_2 \alpha - 1), S) \end{aligned}$$

dir. Ayrıca;

$$\begin{aligned} \beta_1 < \beta_2 &\Rightarrow \beta_1 \alpha < \beta_2 \alpha \\ &\Rightarrow (\beta_1 \alpha - 1) < (\beta_2 \alpha - 1) \end{aligned}$$

O halde $(\beta_1 \alpha - 1) < (\beta_2 \alpha - 1)$ iken $(\beta_1 \alpha - 1)TR((\beta_1 \alpha - 1), S) \geq (\beta_2 \alpha - 1)TR((\beta_2 \alpha - 1), S)$ olduğundan dönüşüm monoton azalandır. $\lambda R(\lambda, S) \geq 0$ olduğundan * eşitliği yerine yazılırsa

$$\frac{\lambda}{\alpha-\lambda} TR\left(\frac{1}{\alpha-\lambda}, T\right) \geq 0$$

bulunur. O halde $(\beta\alpha-1)T R((\beta\alpha-1), S) \geq 0$ dir.

3) $\beta \in \mathbb{R}^-$ olsun. Bu durumda $\beta \text{TR}(\beta, T) \geq 0 \Rightarrow \text{TR}(\beta, T) \leq 0$ dır.

$$\begin{aligned} (\beta I - T)R(\beta, T) &= I \Rightarrow \beta R(\beta, T) - \text{TR}(\beta, T) = I \\ &\Rightarrow I - \beta R(\beta, T) = -\text{TR}(\beta, T) \geq 0 \end{aligned}$$

bulunur.

4) $\beta \in \mathbb{R}^-$ ve $Tx \leq \beta x$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} Tx \leq \beta x &\Rightarrow 0 \leq \beta x - Tx \\ &\Rightarrow 0 \leq (\beta I - T)x \end{aligned}$$

tir. $0 \leq (\beta I - T)x = y$ diyelim. O halde

$$\begin{aligned} Tx &= \text{TR}(\beta, T)(\beta I - T)x \\ &= \text{TR}(\beta, T)y \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

4.1. Tanım :

$0 \leq T \in L(E)$ olmak üzere $x \in E$ ve $\lambda \in \mathbb{R}^-$ için $Tx \leq \lambda x$ iken $Tx \leq 0$ oluyorsa T 'ye negatif prensibini (NP) sağlar denir.

4.7. Teorem :

E Banach örgü ve $0 \leq T \in L(E)$ olsun.

$$T \text{ operatörü NP ilkesini sağlasın} \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \mathbb{R}^- \subseteq \rho(T) \\ 2) \text{Her } \lambda \in \mathbb{R}^- \text{ için } \text{TR}(\lambda, T) \leq 0 \end{cases}$$

İspat :

$\Rightarrow 0 \leq T \in L(E)$ ve T (NP) ilkesini sağlasın. $\lambda \in \rho(T) \cap \mathbb{R}^-$ ve $0 \leq x \in E$ olsun.

$$(\lambda I - T)R(\lambda, T) = I \Rightarrow \lambda R(\lambda, T) - TR(\lambda, T) = I$$

dır. $0 \leq x \in E$ için;

$$\lambda R(\lambda, T)x - TR(\lambda, T)x = x \geq 0 \Rightarrow TR(\lambda, T)x \leq \lambda R(\lambda, T)x$$

dir. T , NP ilkesini sağladığından $TR(\lambda, T)x \leq 0$ dır. Her $\lambda \in \rho(T) \cap \mathbb{R}^-$ için $\lambda TR(\lambda, T) \geq 0$ dır.

$$f: \rho(T) \cap \mathbb{R}^- \rightarrow L(E)$$

$$\lambda \rightarrow \lambda TR(\lambda, T)$$

dönüşümü negatif olmayan ve monoton azalandır. Gerçekten $\alpha, \beta \in \rho(T) \cap \mathbb{R}^-$ ve $\alpha < \beta$ olsun.

$$\begin{aligned} \alpha R(\alpha, T) - \beta R(\beta, T) &= \alpha R(\alpha, T) - \beta R(\alpha, T) + \beta R(\alpha, T) - \beta R(\beta, T) \\ &= (\alpha - \beta) R(\alpha, T) + \beta [R(\alpha, T) - R(\beta, T)] \\ &= (\alpha - \beta) R(\alpha, T) + \beta [(\beta - \alpha) R(\alpha, T) R(\beta, T)] \quad (\text{rezolvant eşitliği}) \\ &= (\alpha - \beta) R(\alpha, T) [I - \beta R(\beta, T)] \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $\alpha TR(\alpha, T) - \beta TR(\beta, T) = (\alpha - \beta) TR(\alpha, T) [I - \beta R(\beta, T)]$ bulunur.

$\alpha \in \rho(T) \cap \mathbb{R}^-$ olduğundan

$$TR(\alpha, T) \leq 0 \Rightarrow (\alpha - \beta) TR(\alpha, T) \geq 0 \quad \dots^*$$

ve

$$I - \beta R(\beta, T) = R(\beta, T) (\beta I - T - \beta I) = -TR(\beta, T) \geq 0 \dots **$$

olduğundan * ve ** dan $\alpha TR(\alpha, T) - \beta TR(\beta, T) \geq 0$ dır.
 $\alpha TR(\alpha, T) - \beta TR(\beta, T) \geq 0$ iken $\alpha TR(\alpha, T) \geq \beta TR(\beta, T)$ olduğundan monoton azalandır.

$\mathbb{R}^- \subseteq \rho(T)$ için $\sigma(T) \cap \mathbb{R}^- = \emptyset$ olması demektir. Kabul edelim ki $\sigma(T) \cap \mathbb{R}^- \neq \emptyset$ olsun. $\sigma(T)$ kompakt ve kapalı olduğundan sınırlıdır. O halde $s = \inf\{\sigma(T) \cap \mathbb{R}^-\}$ vardır.

$$\begin{aligned} s < 0 &\Rightarrow s - \frac{1}{n} < 0 \text{ ve } s - \frac{1}{n} \notin \sigma(T) \cap \mathbb{R}^- \\ &\Rightarrow s - \frac{1}{n} < 0 \text{ ve } s - \frac{1}{n} \in \rho(T) \cup \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow \lambda_n = s - \frac{1}{n} \in \rho(T) \end{aligned}$$

dir. λ_n monoton artan ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = s$ dir.

$(\lambda_n TR(\lambda_n, T))$ negatif olmayan, monoton azalandır ve sınırlıdır. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $\|\lambda_n TR(\lambda_n, T)\| \leq M$ olacak şekilde $M \in \mathbb{R}^+$ vardır. $(\lambda_n I - T)R(\lambda_n, T) = I$ olduğundan

$$R(\lambda_n, T) = \frac{1}{\lambda_n} TR(\lambda_n, T) + \frac{1}{\lambda_n} I$$

dır. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \|R(\lambda_n, T)\| &\leq \frac{1}{|\lambda_n|} \|TR(\lambda_n, T)\| + \frac{1}{|\lambda_n|} \\ &\leq \frac{M}{|\lambda_n|^2} + \frac{1}{|\lambda_n|} \\ &\leq \frac{M}{s^2} + \frac{1}{s} \end{aligned}$$

dır. O halde $\|R(\lambda_n, T)\|$ sınırlıdır. Fakat $s \in \sigma(T)$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = s$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|R(\lambda_n, T)\| = \infty$ olması ile çelişkidir. O halde kabul yanlıştır. $\mathbb{R}^- \subseteq \rho(T)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}^-$ için $TR(\lambda, T) \leq 0$ dır.

$\Leftrightarrow \beta \in \mathbb{R}^-, x \in E$ ve $Tx \leq \beta x$ olsun.

$$Tx \leq \beta x \Rightarrow (\beta I - T)x \geq 0$$

dir. Hipotezden dolayı $TR(\beta, T) \leq 0$ dır.

$$Tx = TR(\beta, T)(\beta I - T)x \leq 0$$

bulunur.

4.8. Teorem :

A reel Banach örgü cebiri ve e birim elemanı olsun. Pozitif her elemanın tersi varsa aşağıdakiler denktir.

i) Pozitif bir $y \in A$ için $x = R(\alpha, y)$ ve $\alpha > r(y)$

ii) x , NP ilkesini sağlar.

İspat :

i) $\Rightarrow$ ii) $\beta \in \mathbb{R}^-, z \in A$ ve $xz \leq \beta z$ olsun.

$$xz \leq \beta z \Rightarrow (\beta e - x)z \geq 0$$

dır. Teorem 4.6' dan dolayı $xR(\beta, x) \leq 0$ olduğundan $xz = x R(\beta, x) \{ (\beta e - x) z \} \leq 0$ bulunur.

ii) $\Rightarrow$ i) x , NP ilkesini sağlasın. Teorem 4.7' den dolayı her $\lambda \in \mathbb{R}^-$ için $\mathbb{R}^- \subseteq \rho(x)$ ve $xR(\lambda, x) \leq 0$ dır.

$$\begin{aligned} (\lambda e - x)R(\lambda, x) = e &\Rightarrow \lambda R(\lambda, x) - xR(\lambda, x) = e \\ &\Rightarrow \lambda R(\lambda, x) \leq e \quad (xR(\lambda, x) \geq 0 \text{ olduğundan}) \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \lambda R(\lambda, x) \leq e &\Rightarrow \frac{\lambda}{|\lambda|} R(\lambda, x) \leq \frac{e}{|\lambda|} \\ &\Rightarrow -R(\lambda, x) \leq \frac{e}{|\lambda|} \quad (\lambda < 0) \end{aligned}$$

dır.

$$P: E \rightarrow I_e^d$$

projeksiyon band dönüşümü olsun. $\lambda < 0$ için

$$P(-R(\lambda, x)) \leq P\left(\frac{e}{|\lambda|}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. $x^{-1} \in A$ olduğundan $0 \leq \rho(x)$ ve P sürekli olduğundan

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} P(-R(\lambda, x)) \leq 0 \Rightarrow P(-R(0, x)) \leq 0$$

dır. $-R(0,x) = -(-x)^{-1} = x^{-1}$ olduğundan $x^{-1} = -y + u$ olacak şekilde $y \geq 0$ ve $u \in A_e$ vardır.

$y_1 = x^{-1} - \|u\|e$ şeklinde seçelim.

$$\begin{aligned} x^{-1} \leq u \leq \|u\|e &\Rightarrow x^{-1} - \|u\|e \leq 0 \\ &\Rightarrow y_1 \leq 0 \end{aligned}$$

dır. $x^{-1} = \|u\|e - (-y_1)$ ve $x = R(\|u\|, -y_1)$ olacak şekilde $-y_1 \geq 0$ vardır.

$$R(\|u\|, -y_1) \geq 0 \Rightarrow \|u\| > r(-y_1)$$

bulunur. O halde $-y_1 \in A$ için $x = R(\|u\|, -y_1)$ ve $\|u\| > r(-y_1)$ sağlanır.

5. SONUÇ

Huijsmans'ın [8]'de sorduğu sorunun yanıtının herhangi bir örgü cebirinde olumsuz olduğunu [6]'da Z.Ercan ile S.Önal bir örnekle göstermişlerdir. Bu sorunun yanıtının olumlu olduğunu Huijsmans f-cebirlerinde, Scheffold tip-1 cebirlerinde göstermiştir. Hangi sıralı cebirlerde Huijsmans'ın sorusunun yanıtının olumlu olduğu hakkında çalışmalar devam etmektedir.

KAYNAKLAR

1. Abramovich, Y. A., Aliprantis, C. D., "An Invitation to Operator Theory", *American Mathematical Society*, Rhode Island, 94,237-253, (2002)
2. Aliprantis, C. D., Burkinshaw, O., "Positive Operators", *Academic Press*, Orlando,1-43,88-90,106-111,174-176,194,251.(1985)
3. Bayraktar,Mustafa, "Fonksiyonel Analiz", *Gazi Kitapevi*, 255-288 (2006)
4. Bernau, S. J., Huijsmans, C. D., "Almost f-algebras and d-algebras", *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 287-308,(1990),
5. Bonsall, F. F., Duncan J., "Complete Normed Algebras", *Springer-Verlag*, Berlin-Heidelberg-New York, 1-71, (1973)
6. Ercan, Z., Önal, S., "Some Observation on Riesz Algebras", *Positivity 10*, 731- 736, (2006)
7. Huijsmans, C. D., "Element with unit spectrum in a Banach lattice algebra", *Proceedings A 91*, 43-51, (1988)
8. Huijsmans, C. D., "Lattice-Ordered Division Algebras", *Proc. R. Ir. Acad.* Vol. 92 A, 239-41, (1992)
9. Meyer-Nieberg, P., "Banach Lattices", *Springer-Verlag*,Osnabrück, 156, 247 - 249, (1991)
10. Pagter De, B., "f-Algebras and Orthomorphisms", *Dissertation*, 1-149 (1981)
11. Schaefer, H. H., "Banach Lattices and Positive Operators", *Grundlehren 215*. Berlin. Springer (1974)
12. Scheffold, E., "Über Banachverbandsalgebren vom Typ 1", *Ark. Math.*,41, 375- 79, (2003)
13. Scheffold, E., "Über Positive Resolventenwerte Positiver Operatoren", *Positivity 8*, 179-186, (2004)
14. Uyar, A., "On Type n Banach Lattice Algebras and Huijsmans's Problem", yayımlanacak

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı,Adı : ASLANTAŞ,Mustafa
Uyruğu : T.C.
Doğum Tarihi ve Yeri : 27.04.1987 Ankara
Medeni Hali : Bekar
e-mail : mustafaaslantas_1987@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Gazi Üni./Matematik Bölümü	2009
Lise	Keçiören Lisesi	2005
İlköğretim	Dumlupınar İ.Ö.O.	2001

Yabancı Dil

İngilizce