



DİK b-ÖZELLİĞİNE SAHİP RİESZ UZAYLARI

Esra EFETÜRK

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ARALIK 2019

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.



Esra EFETÜRK

30/12/2019

DİK b-ÖZELLİĞİNE SAHİP RİESZ UZAYLARI
(Yüksek Lisans Tezi)

Esra EFETÜRK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Aralık 2019

ÖZET

Bu tez çalışmasında, dik b-özellğine sahip Riesz uzaylarının tanımı yapılmıştır. Dik b-özellğine sahip olan ve olmayan Riesz uzayları örnekleri verilmiştir. Kartezyen çarpım ve Bölüm Riesz uzaylarının dik b-özellği incelenmiştir. Ayrıca dik b-özellği, b-özellği ve Levi norm arasındaki ilişki verilmiştir.

Bilim Kodu : 20404
Anahtar Kelimeler : Riesz Uzayları, Pozitif Operatörler, b-Özellğine Sahip Riesz Uzayları, Dik b-Özellğine Sahip Riesz Uzayları
Sayfa Adedi : 45
Danışman : Prof. Dr. Birol ALTIN

RIESZ SPACES WITH DISJOINT b-PROPERTY
(M. Sc. Thesis)

Esra EFETÜRK

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
December 2019

ABSTRACT

In this thesis, we define the definition of Riesz spaces with disjoint b-property. Examples of Riesz spaces with and without disjoint b-property are given. Disjoint b-property of Cartesian product of Riesz spaces and Quotient Riesz spaces are investigated. Moreover, relations between disjoint b-property, b-property and Levi norm are given.

Science Code : 20404

Key Words : Riesz Spaces, Positive Operators, Riesz Spaces with b-Property, Riesz Spaces with Disjoint b-Property

Page Number : 45

Supervisor : Prof. Dr. Birol ALTIN

TEŞEKKÜR

Bu tezin yazımında bilgi ve birikimlerini esirgmeden sürekli benimle paylaşan, her aşamasında sabırla beni teşvik eden ve destekleyen kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Birol ALTIN'a teşekkürü bir borç bilirim.

Teşekkürlerin en büyüğü hayatımın her anında bana gösterdikleri sevgi ve destekten dolayı çok kıymetli aileme. Bana olan inançları ve güvenleri için annem Semray EFETÜRK'e, babam Seyfettin EFETÜRK'e bu hayattaki en büyük şanslarım olan ablam Latife EFETÜRK SAYAR'a , erkek kardeşim Furkan EFETÜRK'e, eniştem Mehmet SAYAR'a hep yanımda oldukları için teşekkür ederim.

Son olarak, tez yazımı süresince verdikleri destekle motivasyonumu yüksek tutmamı sağlayan ve bu sürecin tamamlanmasına yardımcı olan dostlarım; Tuğba SELAMOĞLU'na, Ruşen GÜNEY'e, Umut GÜNGÖRÜR'e, Ahmet DUMAN'a, Yıldırım ÜNAL'a, Enes KARAMAN'a, Azime KARAGÖZ'e ve bütün arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2.GENEL TANIM VE ÖNERMELER.....	3
2.1. Pozitif Operatörler.....	3
2.2. Sıralı Projeksiyonlar.....	8
2.3. Pozitif Lineer Fonksiyoneller	10
2.4. Örgü (Lattice) Homomorfizmi.....	12
2.5. Banach Örgüleri.....	13
2.6. b -Özelliğine Sahip Riesz Uzayları.....	17
2.6.1. b -sıra sınırlı küme	17
2.6.2. b -özellliği	19
3. DİK b -ÖZELLİĞİNE SAHİP RİESZ UZAYLARI	21
3.1. Dik b -Sıra Sınırlı Küme	21
3.2. Dik b -Özellliği	21
4. KARTEZYEN ÇARPIM VE BÖLÜM UZAYLARININ DİK b -ÖZELLİĞİNİ SAĞLAMASI	29
4.1. Kartezyen Çarpım Uzaylarının Dik b -Özellliği	29
4.2. Bölüm Uzaylarının Dik b -Özellliği.....	34

Sayfa

5. BANACH ÖRGÜLERİNİN DİK b-ÖZELLİĞİNİ SAĞLAMASI.....	37
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	41
KAYNAKLAR	43
ÖZGEÇMİŞ	45

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$[x, y]$	Sıralı aralık
$x \vee y$	x ve y nin supremumu
$x \wedge y$	x ve y nin infimumu
x^+	x ve 0 (vektör uzayının sıfırı) ın supremumu
x^-	$-x$ ve 0 ın supremumu
$ x $	$-x$ ve x in supremumu
$x \perp y$	$ x $ ve $ y $ nin infimumu 0 dır.
$x_\alpha \downarrow x$	$\{x_\alpha\}$ aşağıya yönlendirilmiş bir ağıdır ve infimumu x dir.
$x_\alpha \uparrow y$	$\{x_\alpha\}$ yukarıya yönlendirilmiş bir ağıdır ve supremumu y dir.
$x_\alpha \xrightarrow{0} x$	$\{x_\alpha\}$ ağı x elemanına sıralı yakınsar.
A^d	A kümesinin diki
$A \perp B$	Her $x \in A$ ve her $y \in B$ için $x \perp y$ dir.
$\mathcal{L}(E, F)$	Operatörlerin uzayı
$\mathcal{L}_b(E, F)$	Sıra sınırlı operatörlerin uzayı
$\mathcal{L}_r(E, F)$	Regüler operatörlerin uzayı
$\mathcal{L}_n(E, F)$	Sıra sürekli operatörlerin uzayı
$\mathcal{L}_c(E, F)$	σ -sıralı sürekli operatörlerin uzayı
$L(E, F)$	Sürekli operatörlerin uzayı
$E \sim$	E uzayının sıra duali
$E \sim_n$	E uzayının sıra sürekli duali
T'	T dönüşümünün eşleniği
V^*	V uzayının cebirsel duali

1. GİRİŞ

1974 yılında Fremlin D., E bir Banach örgüsü olmak üzere E uzayının Levi norma sahip olması tanımını ilk olarak kullanmıştır [1]. Fremlin D. Levi norma sahip Banach örgülerinin Dedekind tam olduğunu ve pozitif terimli artan ve üstten sınırlı ağıın yine aynı uzayın içinde bir üst sınırlı olduğunu göstermiştir.

Altın B., 2002 yılında hazırlamış olduğu doktora tezinde, E bir Riesz uzayı olmak üzere E içinde pozitif terimli artan ve E den E nin ikinci sıra dualine tanımlı Q_E kanonik dönüşümü altında görüntüsü ikinci sıra dualde sıra sınırlı olan her ağıın yine E uzayı içinde üstten sınırı var ise bu uzaya b -özellğine sahip Riesz uzayı adını vermiştir [2].

Bu tezin üçüncü bölümünde b -özellğinden daha zayıf olan dik b -özellğine sahip Riesz uzaylarının tanımı verilip dik b -özellğine sahip olan ve olmayan uzay örnekleri verilerek b -özellği ile ilişkisi incelenmiştir. Ayrıca bu bölümde E ve F iki Riesz uzayı olmak üzere E den F ye sıra sınırlı operatörlerin uzayı $\mathcal{L}_b(E, F)$ nin dik b -özellğine sahip olduğunda F Riesz uzayının da dik b -özellğine sahip olduğu görülmüştür.

Dördüncü bölümde Kartezyen çarpım ve Bölüm Riesz uzaylarının dik b -özellğine sahip olması için birer karakterizasyonu verilmiştir.

Beşinci bölümde dik b -özellği, b -özellği ve Levi normun çakıştığı uzaylar incelenmiştir.

Tezin son bölümünde de elde edilen sonuç ve öneriler yer almaktadır.

2. GENEL TANIM VE ÖNERMELER

Bu bölümde tez boyunca kullanacağımız temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1. Pozitif Operatörler

2.1.1. Tanım

Üzerindeki “ $\geq$ ” sıralama bağıntısı ile tanımlanmış olan bir gerçel vektör uzayı M ve her $x, y \in M$ için,

- i) $x \geq y$ iken her bir $z \in M$ için $x+z \geq y+z$
- ii) $x \geq y$ iken her bir $0 \leq \alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha x \geq \alpha y$

şartlarını sağlayan M uzayına sıralı vektör uzayı denir [3]. M sıralı vektör uzayının $x \geq 0$ bağıntısını sağlayan elemanlarına pozitif diyeceğiz. M uzayındaki pozitif elemanların kümesini $\{x \in M : x \geq 0\}$, M^+ veya M_+ sembollerinden biri ile göstereceğiz. M ve N iki sıralı vektör uzayı olmak üzere bir $T : M \rightarrow N$ lineer dönüşümüne kısaca operatör diyeceğiz. Ayrıca her bir $x \in M^+$ için $T(x) \geq 0$ oluyorsa T operatörüne pozitif diyeceğiz ve $T \geq 0$ ile göstereceğiz.

2.1.2. Tanım

M bir sıralı vektör uzayı ve bu uzayın herhangi iki elemanı x, y olsun. Eğer bir $z \in M$ için,

- (i) $x \leq z$ ve $y \leq z$
- (ii) $s \in M$ ve $x \leq s$ ve $y \leq s$ iken $z \leq s$

koşulları sağlanıyorsa z elemanına M uzayı içinde x ve y nin supremumu denir [3].

2.1.3. Tanım

M bir sıralı vektör uzayı ve bu uzayın herhangi iki elemanı x, y olsun. Eğer bir $z \in M$ için,

$$(i) z \leq x \text{ ve } z \leq y$$

$$(ii) s \in M \text{ ve } s \leq x \text{ ve } s \leq y \text{ iken } s \leq z$$

koşulları sağlanıyorsa z elemanına M uzayı içinde x ve y nin infimumu denir [3].

2.1.4. Tanım

M bir sıralı vektör uzayı olsun. Eğer üzerindeki sıralamaya göre M uzayının her x, y çiftinin supremumu M uzayına ait ise bu uzaya Riesz uzayı denir [3].

Bundan sonra supremum ve infimum yerine sırasıyla,

$$x \vee y := \sup \{x, y\}, \quad x \wedge y := \inf \{x, y\}$$

sembollerini kullanacağız.

Örnek

Ω boştan farklı bir küme olsun. Ω kümesi üzerinde tanımlı gerçel değerli fonksiyonların vektör uzayı $\mathbb{R}^\Omega$, her bir $f, g \in \mathbb{R}^\Omega$ çifti için,

$$[f \leq g \Leftrightarrow \forall \omega \in \Omega \text{ için } f(\omega) \leq g(\omega)]$$

noktasal sıralama ile bir Riesz uzaydır. Burada her bir $\omega \in \Omega$ ve her $f, g \in \mathbb{R}^\Omega$ için,

$$[f \vee g(\omega)] := \max \{f(\omega), g(\omega)\}$$

$$[f \wedge g(\omega)] := \min \{f(\omega), g(\omega)\}$$

ifadesi sağlanır.

Aşağıdaki uzaylar üzerindeki noktasal sıralama ile birer Riesz uzayıdır.

- (i) Ω topolojik uzayı üzerinde tanımlı, gerçel değerli sürekli fonksiyonların uzayı $C(\Omega)$,
- (ii) Ω topolojik uzayı üzerinde tanımlı gerçel değerli sürekli ve sınırlı fonksiyonların uzayı $C_b(\Omega)$,
- (iii) Ω üzerinde tanımlı gerçel değerli sınırlı fonksiyonların uzayı $\ell_\infty(\Omega)$,

birer Riesz uzayıdır [3].

M bir Riesz uzayı ve $x \in M$ olsun. $x^+ := x \vee 0$, $x^- := (-x) \vee 0$ ve $|x| := x \vee (-x)$ elemanlarına sırayla $x \in M$ elemanının pozitif kısmı, negatif kısmı ve modülü diyeceğiz. Ayrıca $x, y \in M$ olsun. Eğer $|x| \wedge |y| = 0$ ise x ile y birbirine diktir denir ve $x \perp y$ ile gösterilir. A, M 'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. $\{x \in M : \text{Her bir } y \in A \text{ için } x \perp y\}$ kümesine A kümesinin dik tümleyeni denir ve $A^\perp$ ile gösterilir [3].

2.1.5. Önerme

M bir Riesz uzayı ve $x, y, z \in M$ olsun. O zaman aşağıdaki bağıntılar sağlanır.

- (i) $x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)]$ ve $x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]$
- (ii) $x + y = x \wedge y + x \vee y$
- (iii) $x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z)$ ve $x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$
- (iv) Her $0 \leq \alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha(x \vee y) = (\alpha x) \vee (\alpha y)$ ve $\alpha(x \wedge y) = (\alpha x) \wedge (\alpha y)$
- (v) $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$, $x^+ \wedge x^- = 0$
- (vi) $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$, $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$
- (vii) $|x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x + y| + |x - y|)$, $|x| \wedge |y| = \frac{1}{2}||x + y| - |x - y||$
- (viii) $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ (Üçgen eşitsizliği)
- (ix) $|x \vee z - y \vee z| \leq |x - y|$, $|x \wedge z - y \wedge z| \leq |x - y|$
- (x) Eğer $x, y, z \in M^+$ ise $x \wedge (y + z) \leq x \wedge y + x \wedge z$ olur [3].

M bir Riesz uzayı ve $\{x_\alpha\}$, M Riesz uzayında bir ağ olsun. Eğer $\alpha \leq \beta$ iken $x_\alpha \leq x_\beta$ ($x_\beta \leq x_\alpha$) ise $\{x_\alpha\}$ ağına artan (azalan) denir ve $x_\alpha \uparrow$ ($x_\alpha \downarrow$) sembolü ile gösterilir. M Riesz uzayının bir elemanı x olmak üzere $x_\alpha \uparrow x$ ($x_\alpha \downarrow x$) sembolleri $x_\alpha \uparrow$ ($x_\alpha \downarrow$) $\sup\{x_\alpha\}=x$ ($\inf\{x_\alpha\}=x$) anlamına gelecektir. Eğer her bir $x \in M^+$ için $n^{-1}x \downarrow 0$ sağlanıyorsa M Riesz uzayına Archimedean denir [3].

2.1.6. Önerme (Kantorovich)

M bir Riesz uzayı, N Archimedean Riesz uzayı ve $T : M^+ \rightarrow N^+$ toplamsal (Her $x, y \in M^+$ için $T(x + y) = T(x) + T(y)$) olsun. O zaman T , M den N içine bir tek pozitif operatöre genişler ve (genişlemeyi yine T ile gösterirsek) her bir $x \in M$ için, $T(x) = T(x^+) - T(x^-)$ biçimindedir [3].

Bir M Riesz uzayından bir N Riesz uzayı içine tanımlı operatörlerin vektör uzayı $\mathcal{L}(M, N)$ olsun. Her $S, T \in \mathcal{L}(M, N)$ için $T \geq S \Leftrightarrow T - S \geq 0$ (her bir $x \in M^+$ için $T(x) \geq S(x)$) sıralaması ile bir sıralı vektör uzayıdır.

M ve N birer Riesz uzayları ve $T: M \rightarrow N$ bir operatör olsun. Eğer $\mathcal{L}(M, N)$ sıralı vektör uzayında $\{T, -T\}$ kümesinin supremumu var ise T operatörünün modülü vardır denir ve $|T| := T \vee (-T)$ ile gösterilir [3].

Bir M Riesz uzayının $x \leq y$ şartını sağlayan iki elemanı x, y olsun. $[x, y] = \{z \in M : x \leq z \leq y\}$ ile tanımlı alt kümeye Riesz uzayının bir sıralı aralığı denir. M uzayının boştan farklı bir alt kümesi A olsun. Eğer her bir $y \in A$ için $y \leq x$ ($x \leq y$) olacak şekilde bir $x \in M$ varsa A kümesine üstten (alttan) sınırlıdır denir. Hem üstten hem alttan sınırlı olan kümeye sıra sınırlı küme denir. Açık olarak bir kümenin sıra sınırlı olması için gerekli ve yeterli koşul bu kümenin bir sıralı aralık tarafından kapsanmasıdır [3].

2.1.7. Tanım

M, N iki Riesz uzayı ve $T: M \rightarrow N$ bir operatör olsun. Eğer T operatörü M Riesz uzayının sıralı aralıklarını N Riesz uzayının sıra sınırlı kümelerine dönüştürüyorsa T operatörüne

sıra sınırlı operatör denir. Bir M Riesz uzayından bir N Riesz uzayına tanımlı sıra sınırlı operatörlerin uzayı $\mathcal{L}_b(M, N)$ ile gösterilir [3].

İki pozitif operatörün farkı şeklinde yazılabilen operatöre regüler operatör denir. Bir M Riesz uzayından bir N Riesz uzayı içine tanımlanan regüler operatörlerin uzayı $\mathcal{L}_r(M, N)$ ile göstereceğiz. Açık olarak,

$$\mathcal{L}_r(M, N) \subseteq \mathcal{L}_b(M, N) \subseteq \mathcal{L}(M, N)$$

vektör uzayı kapsamaları sağlanır. Kısalık için $\mathcal{L}(M, M)$, $\mathcal{L}_b(M, M)$, $\mathcal{L}_r(M, M)$ sırasıyla $\mathcal{L}(M)$, $\mathcal{L}_b(M)$, $\mathcal{L}_r(M)$ ile gösterilecektir [3].

2.1.8. Tanım

M bir Riesz uzayı olsun. Eğer M Riesz uzayının boştan farklı ve üstten sınırlı her alt kümesinin (sayılabilir alt kümesinin) bir supremumu varsa M Riesz uzayına Dedekind tam (σ -Dedekind tam) Riesz uzayı denir [3].

Bir M Riesz uzayının Dedekind tam (σ -Dedekind tam) olması için gerekli ve yeterli koşul $0 \leq x_\alpha \uparrow \leq x$ ($0 \leq x_n \uparrow \leq x$) olduğunda $\sup\{x_\alpha\}$ ($\sup\{x_n\}$) M içinde var olmasıdır. $L_p(\mu)$ ($1 \leq p \leq \infty$) uzayları Dedekind tam Riesz uzaylarına örnek oluştururlar [3].

2.1.9. Önerme (Riesz-Kantorovich)

M , N Riesz uzayları ve N Dedekind tam olsun. Bu durumda $\mathcal{L}_b(M, N)$ sıralı vektör uzayı, Dedekind tam Riesz uzaydır. Her $x \in M^+$ ve her bir $S, T \in \mathcal{L}_b(M, N)$ çifti için,

$$S \vee T(x) = \sup \{ S(y) + T(z) : y, z \in M^+ \text{ ve } y + z = x \}$$

$$S \wedge T(x) = \inf \{ S(y) + T(z) : y, z \in M^+ \text{ ve } y + z = x \}$$

$$|T|(x) = \sup \{ |Ty| : |y| \leq x \}$$

$$T^+(x) = \sup \{ Ty : 0 \leq y \leq x \}$$

$$T^-(x) = \sup \{ -Ty : 0 \leq y \leq x \}$$

eşitlikleri gerçekleşir [3].

2.2. Sıralı Projeksiyonlar

2.2.1. Tanım

G , bir M Riesz uzayının alt vektör uzayı olsun. Eğer her bir $x, y \in G$ çiftinin supremumu G vektör uzayında bulunuyorsa bu alt uzaya M nin bir Riesz alt uzayı denir [3].

Bir M Riesz uzayının bir alt kümesi A olsun. Eğer $|x| \leq |y|$ ve $y \in A$ iken $x \in A$ oluyorsa A kümesine solid denir. Riesz uzayının solid olan alt vektör uzaylarına ise ideal denir.

$x \vee y = \frac{1}{2} (x + y + |x-y|)$ eşitliğinden her idealin bir Riesz alt uzayı olduğu görülür [3].

2.2.2. Tanım

M bir Riesz uzayı ve $\{x_\alpha\}$, M Riesz uzayında bir ağ olsun. Eğer her bir α için $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha$ ve $y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde bir $\{y_\alpha\}$ ağı ve bir $x \in M$ var ise $\{x_\alpha\}$ ağına x elemanına sıralı yakınsıyor denir ve $x_\alpha \xrightarrow{0} x$ ile gösterilir.

$$[\{x_\alpha\} \subseteq A \text{ ve } x_\alpha \xrightarrow{0} x \Rightarrow x \in A]$$

önermesini sağlayan M Riesz uzayının A alt kümelerine sıra kapalı alt kümeler denir [3]. Sıra kapalı olan ideallere de band diyeceğiz.

A bir M Riesz uzayının boştan farklı bir alt kümesi olsun. A kümesini kapsayan en küçük (kapsama bağıntısına göre) ideale A kümesinin doğurduğu ideal denir. A kümesinin doğurduğu ideal,

$$\{ x \in M : \exists x_1, x_2, \dots, x_n \in A \text{ ve } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+, |x| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i| \}$$

dir.

$x \in M$ elemanının doğurduğu ideal A_x ise $A_x = \{ y \in M : \exists \lambda > 0, |y| \leq \lambda |x| \}$ kümesi olur. Bir Riesz uzayında tek elemanlı kümelerin ürettikleri ideallere esas ideal denir. Benzer olarak A kümesinin doğurduğu band A kümesini kapsayan en küçük banddır [3].

2.2.3. Önerme

A , bir M Riesz uzayının ideali olsun.

$\{ x \in M : \exists \{x_\alpha\} \subseteq A^+ \text{ ve } 0 \leq x_\alpha \uparrow |x| \}$ kümesi A tarafından üretilen banddır. Üstelik tek bir x elemanının ürettiği band B_x ise $B_x = \{ y \in M : |y| \wedge n|x| \uparrow |y| \}$ dir [3].

Bir M Riesz uzayında bir band B olsun. Eğer $M = B \oplus B^d$ eşitliği sağlanıyorsa B uzayına projeksiyon band denir. B , bir M Dedekind tam Riesz uzayında band ise $M = B \oplus B^d$ şeklinde yazılır [3].

2.2.4. Tanım

M, N iki Riesz uzayı ve $T: M \rightarrow N$ bir operatör olsun.

(a) M içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ iken N içinde de $Tx_\alpha \xrightarrow{o} 0$ sağlanıyorsa T operatörüne sıra sürekli operatör denir.

(b) M içinde $x_n \xrightarrow{o} 0$ iken N içinde de $Tx_n \xrightarrow{o} 0$ sağlanıyorsa T operatörüne σ sıra sürekli operatör denir [3].

$T: M \rightarrow N$ pozitif operatörünün sıra sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul M içinde $x_\alpha \downarrow 0$ iken N içinde $Tx_\alpha \downarrow 0$ sağlanmasıdır.

$\mathcal{L}_n(M, N) := \{ T \in \mathcal{L}_b(M, N) : T \text{ sıra sürekli} \}$ ve

$\mathcal{L}_c(M, N) := \{ T \in \mathcal{L}_b(M, N) : T \text{ } \sigma\text{-sıra sürekli} \}$ uzayları

N Dedekind tam ise $\mathcal{L}_b(M, N)$ Riesz uzayı içinde birer band olurlar [3].

2.3. Pozitif Lineer Fonksiyoneller

2.3.1. Tanım

M bir Riesz uzayı olsun. M üzerinde tanımlı gerçel değerli sıra sınırlı operatörlerin vektör uzayına M Riesz uzayının sıra duali denir ve $M^\sim$ ile gösterilir.

$f \in M^\sim$ olsun. Eğer her bir $x \in M^+$ için $f(x) \geq 0$ ise f fonksiyoneline pozitif lineer fonksiyonel denir. Her bir $f, g \in M^\sim$ çifti için

$$f \leq g \Leftrightarrow \text{Her bir } x \in M^+ \text{ için } f(x) \leq g(x)$$

sıralaması ile $M^\sim$ bir sıralı vektör uzayıdır. Üstelik $\mathbb{R}$ bir Dedekind tam Riesz uzayı olduğundan Önerme 2.1.9. dan $M^\sim$ bir Dedekind tam Riesz uzayıdır.

$M^\sim$ Riesz uzayının sıra duali $(M^\sim)^\sim = M^{\sim\sim}$, M üzerinde tanımlı bütün sıra sürekli ve sıra sınırlı lineer fonksiyonellerin uzayı ise $M_n^\sim$ ile gösterilecektir [3].

2.3.2. Tanım

M bir Riesz uzayı olsun. Eğer her bir $0 \neq x \in M$ için $f(x) \neq 0$ olacak şekilde bir $f \in M^\sim$ var ise $M^\sim$ ya M nin noktalarını ayırıyor denir [3].

V bir vektör uzayı olmak üzere V üzerinde tanımlı lineer fonksiyonellerin oluşturduğu vektör uzayı V^* ile gösterilir. W bir başka vektör uzayı ve $T : V \rightarrow W$ bir operatör olsun.

Her bir $f \in W^*$ ve her bir $v \in V$ için $T^* f(v) = f(T(v))$ olarak tanımlanan $T^* : W^* \rightarrow V^*$ operatöre T operatörünün cebirsel eşleği (transpozu) denir. Genelde $\langle T^* f, v \rangle = \langle f, Tv \rangle$ biçiminde gösterilir [3].

2.3.3. Önerme

M ve N Riesz uzayları, $T : M \rightarrow N$ bir sıra sınırlı operatör ise $T^*(N^\sim) \subseteq M^\sim$ dir [3].

T^* operatörünün $N^\sim$ uzayına kısıtlanmasına T operatörünün (sıra) eşleği denir ve T' ile gösterilir. Yani $T' : N^\sim \rightarrow M^\sim$ $\langle T' f, x \rangle = \langle f, Tx \rangle$, $x \in M$ dir [3].

2.3.4. Tanım

M ve N iki Riesz uzayı ve $M^\sim$, M' 'nin noktalarını ayırsın. $M^\sim \neq \{\emptyset\}$, $f \in M^\sim$ ve $u \in N$ olsun.

$$f \otimes u : M \rightarrow N$$

$$x \rightarrow (f \otimes u)(x) = f(x).u$$

biçiminde tanımlanan $f \otimes u$ dönüşümüne mertebe bir (rank one) operatörü denir [3].

2.3.5. Teorem

M ve N iki Riesz uzayı olsun.

(1) $f \in M_+^\sim$ ve $u, v \in N$ olmak üzere $(f \otimes u) \vee (f \otimes v)$ ve $(f \otimes u) \wedge (f \otimes v) \in \mathcal{L}(M, N)$ 'de mevcut olsunlar.

$$(f \otimes u) \vee (f \otimes v) = f \otimes (u \vee v)$$

ve

$$(f \otimes u) \wedge (f \otimes v) = f \otimes (u \wedge v)$$

dır.

(2) $u \in N^+$ ve $f, g \in M^\sim$ olmak üzere $(f \otimes u) \vee (g \otimes v)$ ve $(f \otimes u) \wedge (g \otimes v) \in \mathcal{L}(M, N)$ 'de mevcut olsunlar.

$$(f \otimes u) \vee (g \otimes v) = (f \vee g) \otimes u$$

ve

$$(f \otimes u) \wedge (g \otimes v) = (f \wedge g) \otimes u$$

dır.

(3) $f \in M^\sim$ ve $u \in N$ olmak üzere $f \otimes u$ modülü $\mathcal{L}(M, N)$ 'de mevcut olsun.

$$|f \otimes u| = |f| \otimes |u|$$

dır [3].

2.3.6. Önerme

Her, mertebe bir (rank one) operatörü sıra sınırlıdır [3].

İspat

M ve N iki Riesz uzayı olsun. $f \in M^*$, $f \neq 0$ ve $u \in N$ için;

$$f \otimes u : M \rightarrow N$$

$$x \rightarrow (f \otimes u)(x) = f(x).u$$

biçiminde dönüşüm tanımlansın.

$x \in M^+$ ve $|y| \leq x$ için;

$$|(f \otimes u)(y)| = |f(y) \otimes u| \leq |f(y)| \cdot |u| \leq |f|(|y|) \cdot |u| \leq |f|(x) \cdot |u|$$

olur.

Buradan $(f \otimes u)$ sıra sınırlıdır. ■

2.4. Örgü(Lattice) Homomorfizmi

$T: M \rightarrow N$ bir operatör olsun. Eğer her $x, y \in M$ için $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$ sağlanıyorsa T ye örgü homomorfizmi denir. Aynı zamanda birebir ve örten olan Riesz homomorfizmlerine örgü izomorfizmi denir. Eğer M Riesz uzayından N Riesz uzayı içine bir örgü izomorfizmi varsa M ve N uzayları Riesz izomorfiktir denir [3].

2.4.1. Teorem

İki Riesz uzayı arasındaki $T: M \rightarrow N$ operatörü için aşağıdaki önermeler denktir.

- 1) T bir örgü (lattice) homomorfizmdir.
- 2) $T(x^+) = (Tx)^+$, $\forall x \in M$ için sağlanır.
- 3) $T(x \wedge y) = T(x) \wedge T(y)$, $\forall x, y \in M$ için sağlanır.
- 4) M 'de $x \wedge y = 0$ olduğunda $T(x) \wedge T(y) = 0$ N 'de sağlanır.
- 5) $\forall x \in M$ için $T(|x|) = |T(x)|$ sağlanır [3].

2.4.2. Teorem

M ve N iki Riesz uzayı ve $T: M \rightarrow N$ bir birebir ve örten operatör olsun. O zaman T operatörünün bir örgü izomorfizması olması için gerekli ve yeterli koşul T ve T^{-1} operatörlerinin pozitif olmasıdır [3].

2.5. Banach Örgüleri

2.5.1. Tanım

M bir Riesz uzayı ve $\| \cdot \|$, M üzerinde bir norm olsun. Eğer $|x| \leq |y|$ koşulunu sağlayan her $x, y \in M$ çifti için $\|x\| \leq \|y\|$ oluyorsa $\| \cdot \|$ normuna M üzerinde bir örgü (lattice) normu denir [3].

Bir örgü normu ile donatılmış Riesz uzayına normlu Riesz uzayı denir. Ayrıca normlu Riesz uzayı tam ise bu uzay Banach örgüsü denir. Her bir normlu Riesz uzayının bir lokal konveks-solid Riesz uzayı olduğu açıktır [3].

2.5.2. Önerme

Normlu bir Riesz uzayının norm duali bir Banach örgüsüdür [3].

2.5.3. Önerme

Bir Banach örgüsünden bir normlu Riesz uzayına tanımlanan her bir pozitif operatör süreklidir [3].

2.5.4. Sonuç

M bir Banach örgüsü olsun. M nin sürekli duali ile sıra sınırlı duali çakışır. Yani; $M^{\sim} = M'$ dir [3].

2.5.5. Tanım

M bir Banach örgüsü olsun. Eğer M içinde $x_\alpha \downarrow 0$ şartını sağlayan her bir $\{x_\alpha\}$ ağı için $\|x_\alpha\| \downarrow 0$ oluyorsa $\|\cdot\|$ normuna sıra sürekli norm denir [3].

2.5.6. Önerme

M bir Banach örgüsü ise aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- (i) M sıra sürekli norma sahiptir.
- (ii) M içinde $0 \leq x_n \uparrow \leq x$ ise $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir.
- (iii) M, σ Dedekind tam ve M içinde $x_n \downarrow 0$ ise $\|x_n\| \downarrow 0$ dir.
- (iv) M uzayı M'' uzayı içinde bir idealdir.
- (v) M içindeki her bir sıra aralık zayıf kompakt bir kümedir [3].

M ve N birer normlu uzaylar olsun. M den N içine tanımlanan bütün sürekli operatörlerin vektör uzayını $L(M, N)$ ile göstereceğiz.

Örnek

K bir kompakt Hausdorff uzay olmak üzere $C(K)$ ve her bir $L_p(\mu)$ ($1 \leq p \leq \infty$) uzayı bir Banach örgüsüdür [3].

2.5.7. Tanım

E bir Banach örgüsü olsun.

- (i) $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $x \wedge y = 0$ şartını sağlayan her bir $x, y \in E$ için $\|x + y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p$ oluyorsa E ye soyut L_p uzayı denir.
- (ii) $x \wedge y = 0$ koşulunu sağlayan her bir $x, y \in E$ için $\|x \vee y\| = \max \{\|x\|, \|y\|\}$ eşitliği sağlanırsa E ye soyut M uzayı denir. Genelde soyut L_1 uzayına AL uzay, soyut M uzayına ise AM - uzay denir [3].

2.5.8. Önerme

M bir Banach örgüsü olsun.

- (i) M uzayının bir AL uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul her bir $x, y \in M^+$ çifti için $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ olmasıdır.
- (ii) M uzayının bir AM uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul her bir $x, y \in M^+$ için $\|x \vee y\| = \max \{\|x\|, \|y\|\}$ olmasıdır [4].

M bir Riesz uzayı ve $0 < e \in M$ olsun. Eğer her bir $x \in M$ için $|x| \leq \lambda e$ olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{R}$ var ise e elemanına M Riesz uzayının sıra birimi denir [3].

2.5.9. Önerme

M , bir Banach örgüsü olsun. M uzayının bir AL (AM) uzay olması için gerekli ve yeterli koşul M' norm dualinin bir AM (AL) uzay olmasıdır [3].

2.5.10. Önerme (Kantorovich)

M bir Banach örgüsü ve N bir Dedekind tam birimli AM uzayı olsun. O zaman M den N içine her bir sürekli operatör regülerdir .

Yani $L(M, N) = \mathcal{L}_r(M, N)$ dir [5].

2.5.11. Tanım

M bir Banach örgüsü olsun. Eğer M nin her pozitif artan ve norm sınırlı dizisi, norm yakınsak oluyorsa M uzayına bir KB (Kantorovich Banach) uzayı denir [3].

Örnek

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $1 \leq p < \infty$ olsun. $L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir KB uzayıdır [4].

2.5.12. Önerme

M bir Banach örgüsü olsun. M nin KB uzay olması için gerekli ve yeterli koşul M nin M'' içinde bir band olmasıdır [3].

2.5.13. Önerme

M bir AL uzay ve N bir KB uzay olsun. O zaman $\mathcal{L}_b(M, N) = L(M, N)$ eşitliği sağlanır [3].

2.5.14. Önerme

Her AL uzay bir KB uzaydır [4].

2.5.15. Önerme (Kakutani-Bohnenblust-Nakano)

M Banach örgüsünün bir soyut L_p ($1 \leq p \leq \infty$) uzay olması için gerekli ve yeterli koşul M nin bir gerçek $L_p(\mu)$ uzayına örgü izometrik olmasıdır [3].

2.5.16. Tanım

M bir Banach örgüsü olsun. Eğer M nin pozitif terimli yukarı yönlendirilmiş ve norm sınırlı her ağının M de supremumu varsa M ye Levi norma sahiptir denir [1].

Açık olarak her Levi norm Dedekind tamdır.

2.5.17. Teorem

M bir Banach örgüsü olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(a) M Levi norma sahiptir.

(b) $A \subset M^+$ dik ve $B := \{\sum_{a \in \alpha} a : \alpha \subseteq A \text{ sonlu}\}$ kümesi norm sınırlı ise $\sup A$ mevcuttur [6].

2.6. b-Özellğine Sahip Riesz Uzayları

M bir Riesz uzayı olsun ve $M^\sim$, M uzayının noktalarını ayırsın.

$$Q_M : M \rightarrow M^{\sim\sim}$$

$$x \rightarrow Q_M(x) = \hat{x} : M^\sim \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \rightarrow \hat{x}(f) = f(x)$$

biçiminde tanımlanan Q_M dönüşümüne M uzayının kanonik gömmesi denir.

$Q_M : M \rightarrow M^{\sim\sim}$ kanonik dönüşümü M den $M^{\sim\sim}$ ya bir örgü koruyan operatördür. Özellikle $M^\sim$, M nin noktalarını ayırıyorsa o zaman Q_M 1:1 olur. Bu durumda M Riesz uzayını $M^{\sim\sim}$ Riesz uzayının bir Riesz alt uzayı olarak görebiliriz. Yani her bir $x \in M$ elemanını $M^{\sim\sim}$ nın bir elemanı olarak göreceğiz. Bu çalışmanın tamamında $M^\sim$ nın M uzayının noktalarını ayırdığını kabul edeceğiz [3].

2.6.1. b-sıra sınırlı küme

2.6.1.1. Tanım

M bir Riesz uzayı ve $A \subseteq M$ olsun. Eğer $Q_M(A)$, $M^{\sim\sim}$ uzayı içinde bir sıra sınırlı küme oluyor ise A kümesine M uzayının bir b-sıra sınırlı alt kümesi denir [2].

2.6.1.2. Tanım

M ve N iki Riesz uzayı ve $T : M \rightarrow N$ bir operatör olsun. Eğer T , M nin b-sıra sınırlı kümelerini N nin b-sıra sınırlı kümesine dönüştürüyorsa T ye b-sıra sınırlı operatör denir [2].

$Q_M : M \rightarrow M^{\sim\sim}$ bir pozitif operatör olduğundan M uzayının her b-sıra sınırlı kümesini bir b-sıra sınırlı kümesine dönüştürür [7].

2.6.1.3. Lemma

M bir Riesz uzayı ve $\{x_\alpha\}$ M nin pozitif terimli ve artan bir ağı olsun. $\{x_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ kümesi M 'de b-sıra sınırlıdır ancak ve ancak her $f \in M_+^\sim$ için $\{f(x_\alpha)\}$ $\mathbb{R}$ de sınırlıdır.

İspat

$\{x_\alpha\}$ M nin pozitif terimli ve artan ağı olmak üzere $\{x_\alpha\}$ ağı b-sıra sınırlı ve $f \in M_+^\sim$ olsun. O zaman $-x'' \leq_{Q_M} (x_\alpha) \leq x''$ olacak şekilde bir $x'' \in M_+^{\sim}$ vardır.

Böylece

$$-x''(f) \leq Q_M(x_\alpha)(f) \leq x''(f)$$

olur. Dolayısıyla

$$|f(x_\alpha)| \leq x''(f)$$

olur. Bu ise $\{f(x_\alpha)\}$ nın $\mathbb{R}$ de sınırlı olduğunu verir.

Tersine her $f \in M_+^\sim$ için $\{f(x_\alpha)\} \subseteq \mathbb{R}$ de sınırlı olsun. O zaman,

$$\varphi: M_+^\sim \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$f \rightarrow \varphi(f) := \sup_{\alpha} f(x_\alpha)$$

biçiminde tanımlı dönüşüm toplamsaldır. Gerçekten her $f, g \in M_+^\sim$ için ;

$$\begin{aligned} f(x_\alpha) + g(x_\alpha) &\leq \sup_{\alpha} f(x_\alpha) + \sup_{\alpha} g(x_\alpha) \\ &= \varphi(f) + \varphi(g) \end{aligned}$$

Böylece

$$\sup_{\alpha} ((f+g)(x_\alpha)) \leq \varphi(f) + \varphi(g)$$

$$\varphi(f+g) \leq \varphi(f) + \varphi(g) \quad (2.1)$$

elde edilir. Diğer taraftan, Λ indis kümesi yukarı yönlendirildiğinden her $\alpha, \beta \in \Lambda$ için $\alpha \leq \gamma$ ve $\beta \leq \gamma$ olacak şekilde en az bir $\gamma \in \Lambda$ vardır. $\{x_\alpha\}$ artan olduğundan $x_\alpha \leq x_\gamma$ ve $x_\beta \leq x_\gamma$ olur. f ve g pozitif olduğundan

$$f(x_\alpha) \leq f(x_\gamma), \quad g(x_\beta) \leq g(x_\gamma)$$

olur ki iki eşitsizliği taraf tarafa toplayıp γ üzerinden supremum alınırsa;

$$\begin{aligned} f(x_\alpha) + g(x_\beta) &\leq f(x_\gamma) + g(x_\gamma) \leq \sup_{\gamma} [f(x_\gamma) + g(x_\gamma)] \\ &= \sup_{\gamma} [(f + g)(x_\gamma)] \\ &= \varphi(f + g) \end{aligned}$$

$$f(x_\alpha) + g(x_\beta) \leq \varphi(f + g)$$

olur.

Sırasıyla α ve β üzerinden supremum alınırsa;

$$\sup_{\alpha} f(x_\alpha) + g(x_\beta) \leq \varphi(f + g)$$

$$\varphi(f) + \sup_{\beta} g(x_\beta) \leq \varphi(f + g)$$

$$\varphi(f) + \varphi(g) \leq \varphi(f + g) \quad (2.2)$$

elde edilir.

Eş. 2.1 ve Eş. 2.2 ifadeleri göz önüne alındığında φ toplamsaldır.

Dolayısıyla Önerme 2.1.6. dan φ nın M^+ nın tamamına bir pozitif genişlemesi vardır.

Bunu yine φ ile gösterirsek her $f \in M^+$ için, $\varphi : M^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(f) = \varphi(f^+) - \varphi(f^-)$

biçiminde tanımlıdır. Her bir $\alpha \in \Lambda$ ve her $f \in M^+$ için ;

$$0 \leq f(x_\alpha) \leq \sup_{\alpha} f(x_\alpha) = \varphi(f)$$

olduğundan

$$0 \leq Q_M(x_\alpha)(f) \leq \varphi(f)$$

elde edilir ki bu da $0 \leq Q_M(x_\alpha) \leq \varphi$ olduğunu verir.

Yani, $\{x_\alpha\}$ kümesi M de b-sıra sınırlı olur. ■

2.6.2. b-özelligi

2.6.2.1. Tanım

M bir Riesz uzayı olsun. Eğer M uzayının her bir b-sıra sınırlı kümesi M uzayı içinde de sıra sınırlı oluyorsa M uzayına b-özelligine sahip Riesz uzayı denir [2].

2.6.2.2. Önerme

Bir M Riesz uzayının b -özelliğine sahip olması için gerekli ve yeterli koşul M uzayı içindeki $0 \leq Q_M(x_\alpha) \uparrow \leq x''$, $x'' \in M^{\sim\sim}$ koşulunu sağlayan her bir $\{x_\alpha\}$ ağıının M uzayı içinde üstten sınırlı olmasıdır [6].

3. DİK b-ÖZELLİĞİNE SAHİP RİESZ UZAYLARI

Bu kısımda daha önce bilinen b-sıra sınırlı küme üzerine diklik şartı konularak dik b-sıra sınırlı küme tanımını vereceğiz. Bu dik b-sıra sınırlı küme yardımıyla da dik b-özellğine sahip Riesz uzayı tanımını verip Riesz uzaylarının bir sınıflandırmasını yapacağız.

3.1. Dik b-Sıra Sınırlı Küme

3.1.1. Tanım

E bir Riesz uzayı ve $\emptyset \neq A \subseteq E$ olsun. Eğer A dik ve $Q_E(A)$, $E^\sim$ içinde sıra sınırlı oluyorsa A kümesine E de bir dik b-sıra sınırlı küme denir.

3.2. Dik b-Özellği

3.2.1. Tanım

E bir Riesz uzayı olsun. Eğer E uzayının her bir dik ve b-sıra sınırlı kümesi E uzayı içinde de sıra sınırlı oluyorsa E uzayına dik b-özellğine sahip Riesz uzayı denir.

3.2.2. Sonuç

Her b-özellğine sahip Riesz uzayı dik b-özellğine sahip Riesz uzayıdır.

İspat

E bir Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ olsun. A kümesi dik ve b-sıra sınırlı olsun. A kümesi b-sıra sınırlı ve E uzayı da b-özellğine sahip olduğundan A kümesi E uzayında sıra sınırlıdır. Dolayısıyla E uzayı dik b-özellğine sahip olur. ■

3.2.3. Lemma

Her $A \subseteq E^+$ dik ve b-sıra sınırlı küme E de üstten sıra sınırlı küme oluyorsa E Riesz uzayı dik b-özelliğine sahiptir.

İspat

Her $A \subseteq E$ dik ve b-sıra sınırlı küme olsun. $|A|$ kümesini $|A| := \{ |a| : a \in A \}$ şeklinde tanımlayalım. $|A| \subseteq E^+$ ve $|A|$ kümesi diktir. A, b-sıra sınırlı olduğundan her $a \in A$ için $-x'' \leq a \leq x''$ ve $-x'' \leq |a| \leq x''$ olacak şekilde en az bir $x'' \in E_{+}''$ vardır. Dolayısıyla $|A|$ kümesi b-sıra sınırlıdır. Hipotezden $|A|$ kümesi E içinde üstten sınırlıdır. Böylece her $a \in A$ için $|a| \leq x$ olacak şekilde en az bir $x \in E$ vardır. Yani; A kümesi E de sıra sınırlı olur. Dolayısıyla E Riesz uzayı dik b-özelliğine sahiptir. ■

Örnekler

- a) Yansılmalı olan her Banach örgüsü b-özelliğine sahiptir. Dolayısıyla dik b-özelliğine sahiptir.
- b) E bir Riesz uzayı olmak üzere eğer $E'', Q_E(E)$ üzerinde retractable (E'' üzerinde değer kümesi $Q_E(E)$ olan bir pozitif projeksiyon var) ise E uzayı b-özelliğine sahiptir. Gerçekten, $P : E'' \rightarrow Q_E(E)$ bir pozitif projeksiyon olsun ve $\{x_\alpha\} \subseteq E, x'' \in E''$ olmak üzere $0 \leq x_\alpha \uparrow x''$, E'' içinde sağlansın. Her bir α için $0 \leq P(x_\alpha) = x_\alpha \leq P(x'') \in E$ olduğundan E Riesz uzayı b-özelliğine sahiptir. Diğer taraftan her bir KB-uzayı retractable olduğundan KB- uzayları da b-özelliğine sahip Riesz uzaylardır. Dolayısıyla dik b-özelliğine sahiptir.
- c) K, bir kompakt Hausdorff uzayı olmak üzere $C(K)$ uzayı b- özelliğine sahiptir. Dolayısıyla dik b-özelliğine sahiptir.
- d) Sıfıra yakınsak reel sayıların dizi uzayı, c_0 Riesz uzayı dik b-özelliğine sahip değildir. Gerçekten, her bir $n \in \mathbb{N}$ için n. bileşeni 1 diğer terimleri 0 olan $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ dizilerinin oluşturduğu küme A olsun. A diktir. Ayrıca, $e = (1, 1, 1, \dots) \in \ell_\infty$ olmak üzere

her bir $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq Q_E(e_n) \leq e$ eşitsizliği $(c_0)^{\sim\sim} \cong \ell_\infty$ sınırlı dizi uzayı içinde sağlandığından A kümesi $(c_0)^{\sim\sim}$ içinde bir sıra sınırlı küme olur. A kümesi dik b -sıra sınırlıdır. Ancak A kümesi c_0 uzayı içinde sıra sınırlı olmadığından c_0 dik b -özellğine de sahip değildir [8].

3.2.4. Önerme

E dik b -özellğine sahip Dedekind tam bir Riesz uzayı olsun. E nin her sıra kapalı Riesz alt uzayı da dik b -özellğine sahiptir.

İspat

E Dedekind tam Riesz uzayı, U , E nin sıra kapalı Riesz alt uzayı ve A , U Riesz uzayının bir b -sıra sınırlı alt uzayı olsun. A nın E de b -sıra sınırlı olduğunu görelim. A , U da b -sıra sınırlı olduğundan her $a \in A$ için $Q_u(a) \leq \varphi$ olacak şekilde $\varphi \in U_+^{\sim\sim}$ vardır. Kolaylıkla görülebilir ki her $f \in E^\sim$ için $f|_U \in U^\sim$ dir.

$$x'' : E^\sim \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \rightarrow x''(f) = \varphi(f|_U)$$

biçiminde tanımlı $x'' \in E_+^{\sim\sim}$ dir. Şimdi her $a \in A$ için $0 \leq Q_E(a) \leq x''$ eşitsizliğinin $E^{\sim\sim}$ da sağladığını görelim.

$$0 \leq Q_u(a) \leq \varphi \text{ olur.}$$

Böylece her $f \in E_+^\sim$ için;

$$0 \leq Q_u(a)(f|_U) \leq \varphi(f|_U)$$

olup buradan

$$0 \leq f|_U(a) \leq \varphi(f|_U)$$

elde edilir.

$$0 \leq f(a) \leq x''(f)$$

$0 \leq Q_E(a)(f) \leq x''(f)$ olur. Yani, $0 \leq Q_E(a) \leq x''$ eşitsizliği $E^{\sim\sim}$ da sağlanır. Dolayısıyla;

A , $E^{\sim\sim}$ içinde b -sıra sınırlı olur.

A , E içinde dik, b -sıra sınırlı ve E dik b -özelliğine sahip olduğundan her $a \in A$ için $0 \leq a \leq b$ olacak şekilde bir $b \in E^+$ vardır. E Dedekind tam olduğundan $\sup A = x_0$ olacak şekilde bir $x_0 \in E$ vardır. $D := \{ \alpha \subseteq \mathbb{N} \text{ sonlu} \}$ kümesi yukarı yönlendirilmiş bir kümedir.

$$\varphi : D \rightarrow E$$

$$\alpha \rightarrow \varphi(\alpha) = \bigvee_{a \in \alpha} a \in U$$

biçiminde tanımlı bir ağıdır ve $\varphi(\alpha) = \bigvee_{a \in \alpha} a$ ağı yukarı yönlendirilmiştir. $0 \leq x_\alpha \uparrow x_0$ E içinde sağlanır. Yani, $x_\alpha \xrightarrow{o} x_0$ dir. $\{x_\alpha\} \subseteq U$ ve U sıra kapalı olduğundan $x_0 \in U$ olur ve $0 \leq a \leq x_0$ U da sağlanır. Dolayısıyla; U sıra kapalı Riesz uzayı dik b -özelliğine sahiptir. Bu da ispatı tamamlar. ■

3.2.5. Önerme

E ve F izomorfik iki Riesz uzayı olsun. Eğer E Riesz uzayı dik b -özelliğine sahip ise F Riesz uzayı da dik b -özelliğine sahiptir.

İspat

$B := \{y_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subseteq F^+$ dik b -sıra sınırlı bir küme olsun. E ve F Riesz izomorfik olduğundan ve Teorem 2.4.2. den T ve T^{-1} pozitif olacak şekilde $T : E \rightarrow F$ bir operatör vardır.

Her $\alpha \in \Lambda$ için $T^{-1}(y_\alpha) := x_\alpha \in E^+$ ve $B \subseteq F$ dik ve b -sıra sınırlı olsun.

T^{-1} Riesz homomorfizm olduğundan ;

$$\{T^{-1}(y_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda} = \{T(x_\alpha) : \alpha \in \Lambda\} \subseteq E^+$$

de b -sınırlı ve dik olur [7].

E dik b -özelliğine sahip olduğundan her $\alpha \in \Lambda$ için $0 \leq x_\alpha \leq x$ olacak şekilde bir $x \in E^+$ vardır. T pozitif olduğundan ;

$$0 \leq T(x_\alpha) \leq T(x)$$

$$0 \leq y_\alpha \leq y$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu eşitsizlik F de sağlandığından F dik b -özelliğine sahip olur. ■

3.2.6. Sonuç

Dik b-özelliğine sahip bir E Riesz uzayının hiçbir sıra kapalı Riesz alt uzayı

$$c_0 := \{x = (x_n) \subseteq \mathbb{R} : \lim x_n = 0\}$$

uzayına Riesz izomorfik olamaz.

İspat

Aksini kabul edelim.

E nin bir U sıra kapalı Riesz alt uzayı c_0 Riesz uzayına Riesz izomorfik olsun. c_0 dik b-özelliğine sahip olmadığından c_0 Riesz uzayına izomorfik olan U Riesz alt uzayı da dik b-özelliğine sahip olamaz. Diğer taraftan E dik b-özelliğine sahip ve U Riesz alt uzayı sıra kapalı olduğundan Önerme 3.2.5. ten U Riesz alt uzayı dik b-özelliğine sahiptir. Bu bir çelişkidir. Bu da ispatı tamamlar. ■

3.2.7. Önerme

E, F ve $\mathcal{L}_b(E, F)$ Riesz uzayları olsun. $\mathcal{L}_b(E, F)$ Riesz uzayı dik b-özelliğine sahip ise F Riesz uzayı da dik b-özelliğine sahiptir.

İspat

$\mathcal{L}_b(E, F)$ dik b-özelliğine sahip olsun. Şimdi F nin de dik b-özelliğine sahip olduğunu görelim. $A \subseteq F^+$ dik ve b-sıra sınırlı bir küme olsun. $0 \neq x_0 \in E^+$ seçelim. $E^{\sim}, E'$ nin noktalarını ayırdığından $f(x_0) \neq 0$ olacak şekilde bir $f \in E^{\sim}_+$ vardır.

$D := \{f \otimes a : a \in A\} \subseteq \mathcal{L}_b(E, F)$ kümesinin $\mathcal{L}_b(E, F)$ de b-sıra sınırlı olduğunu gösterelim. A, E de dik ve b-sıra sınırlı olduğundan her $a \in A$ için $-x'' \leq Q_F(a) \leq x''$ olacak şekilde bir $x'' \in E^{\sim\sim}_+$ vardır. Ayrıca A dik olduğundan $a \neq b \in A$ için $|a| \wedge |b| = 0$ olur.

$$\varphi : F \rightarrow \mathcal{L}_b(E, F)$$

$$y \rightarrow \varphi(y) := f \otimes y : E \rightarrow F$$

$$x \rightarrow (f \otimes y)(x) = f(x).y$$

biçiminde tanımlanan φ nin bir pozitif operatör olduğu açıktır. Bu durumda φ^{**} da pozitifdir. Dolayısıyla $\varphi^{**} : F^{**} \rightarrow \mathcal{L}_b(E, F)^{**}$ pozitif bir operatördür.

$A \subseteq F$ b-sıra sınırlı olduğundan $Q_F(A) \subseteq F^{**}$ sıra sınırlıdır ve böylece

$$\varphi^{**}(Q_F(A)) \subseteq \mathcal{L}_b(E, F)^{**}$$

ve

$$\varphi^{**}(Q_F(A)) = Q_{\mathcal{L}_b(E, F)}(\varphi(A)) \subseteq \mathcal{L}_b(E, F)^{**}$$

sıra sınırlı olur.

Buradan $\varphi(A) \subseteq \mathcal{L}_b(E, F)$ de b-sıra sınırlı olur.

$a \neq b$ için $|a| \wedge |b| = 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} |f \otimes a| \wedge |f \otimes b| &= [|f| \otimes |a|] \wedge [|f| \otimes |b|] \\ &= f \otimes (|a| \wedge |b|) \end{aligned}$$

dır. Her $x \in E^+$ için;

$$[f \otimes (|a| \wedge |b|)](x) = f(x).(|a| \wedge |b|) = 0$$

bulunur.

Yani;

$$f \otimes a \perp f \otimes b$$

olur.

Dolayısıyla $\varphi(A) \subseteq \mathcal{L}_b(E, F)$ içinde dik b-sıra sınırlı olur. Hipotezden $\mathcal{L}_b(E, F)$ dik b-özelliğine sahip olduğundan her $a \in A$ için $-T \leq f \otimes a \leq T$ olacak şekilde en az bir $0 < T \in \mathcal{L}_b(E, F)$ operatörü vardır. Böylece $-T(x_0) \leq (f \otimes a)(x_0) \leq T(x_0)$ elde edilir.

Dolayısıyla, $-T(x_0) \leq f(x_0).a \leq T(x_0)$ bulunur.

Buradan;

$$\frac{-T(x_0)}{f(x_0)} \leq a \leq \frac{T(x_0)}{f(x_0)}$$

olur.

Bu ise A nın F de sıra sınırlı olduğunu verir. Yani F uzayı dik b-özelliğine sahiptir. ■

Örnek

$\{E_i : i \in I\}$ Banach uzaylarının bir ailesi olsun.

$$E = (E_1 \oplus E_2 \oplus \dots)_0 := \{x = (x_n) \in \prod_{i=1}^{\infty} E_i : \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0\}$$

Banach örgüsü dik b-özelliğine sahip değildir.

Gerçekten; her $n \in \mathbb{N}$ için $\|x_n\| = 1$ olacak şekilde $x_n \in E_+ \sim$ seçelim.

n. bileşeni x_n , diğerleri 0 olan $a_n = (0, 0, 0, \dots, x_n, 0, \dots)$ dizisi E^+ nın bir elemanı olsun.

Açık olarak a_n ' ler dik ve pozitifdir.

$$e_n = \bigvee_{i=1}^n a_i \text{ olmak üzere;}$$

$$\varphi : E_+ \sim \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$f \rightarrow \varphi(f) := \sup_n f(e_n)$$

dönüşümünü göz önüne alalım.

$$|f(e_n)| \leq \|f\| \cdot \|e_n\|_0 \leq \|f\| < \infty \text{ olduğundan}$$

$$\varphi(f) \in \sup_n f(e_n) \in \mathbb{R}^+ \text{ dir. Yani; } \varphi \text{ anlamlıdır.}$$

Her $f, g \in E_+ \sim$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için ;

$$\begin{aligned} 0 \leq (f+g)(e_n) &= f(e_n) + g(e_n) \leq \sup_n f(e_n) + \sup_n g(e_n) \\ &\leq \varphi(f) + \varphi(g) \end{aligned}$$

n üzerinden supremum alınırsa ;

$$\sup_n ((f+g)(e_n)) \leq \varphi(f) + \varphi(g)$$

olur.

Böylece

$$\varphi(f+g) \leq \varphi(f) + \varphi(g) \tag{3.1}$$

elde edilir. Her n, m ve $k = n+m$ için

$$e_n \leq e_{n+m}, \quad e_m \leq e_{n+m} \text{ olur.}$$

$$f(e_n) \leq f(e_{n+m}), \quad g(e_m) \leq g(e_{n+m})$$

dir ve bu iki eşitsizliği taraf tarafa toplayıp k üzerinden supremum alırsak;

$$f(e_n) + g(e_m) \leq f(e_{n+m}) + g(e_{n+m}) \leq (f+g)(e_{n+m}) \leq \sup_k [(f+g)(e_k)]$$

$$f(e_n) + g(e_m) \leq \varphi(f+g) \text{ olur.}$$

Sırasıyla n ve m üzerinden supremum alınırsa;

$$\sup_n f(e_n) + g(e_m) \leq \varphi(f+g)$$

$$\varphi(f) + \sup_m g(e_m) \leq \varphi(f+g)$$

$$\varphi(f) + \varphi(g) \leq \varphi(f+g) \quad (3.2)$$

elde edilir.

Eş. 3.1 ve Eş. 3.2 ifadeleri göz önüne alındığında φ toplamsaldır.

Önerme 2.1.6. dan φ nın $E^\sim$ nın tamamına bir pozitif genişlemesi vardır ve bu genişlemeyi yine φ ile gösterelim. Her $f \in E^\sim$ ve her $i \in \mathbb{N}$ için;

$$0 \leq \hat{e}_i(f) = f(e_i) \leq \sup_n f(e_i(n))$$

$$0 \leq \hat{e}_i(f) \leq \varphi(f)$$

$$0 \leq \hat{e}_i \leq \varphi$$

olur. Buradan

$\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ b-sıra sınırlıdır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq a_n \leq e_n$ ve e_n b-sıra sınırlı olduğundan $0 \leq a_n \leq e_n \leq \varphi$ olur. $(a_n) \subseteq E$ de b-sıra sınırlıdır. Ayrıca (a_n) ler dik olduğundan (a_n) E de dik b-sıra sınırlıdır. Ancak $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ E içinde üstten sınırlı değildir. Gerçekten kabul edelim ki her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq z$ olacak şekilde bir $z \in E$ olsun. O zaman her $i \in \mathbb{N}$ için $a_n(i) \leq z_i$ olur. Böylece her $i \in \mathbb{N}$ için $0 \leq x_i \leq z_i$ olur. Her bir $i \in \mathbb{N}$ için E_i Banach örgüsü olduğundan $\|x_i\| \leq \|z_i\|$ elde edilir. Buradan;

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_i\| \neq 0$ olur bu da $z = (z_1, z_2, \dots) \notin E$ olduğunu verir. Böylece, E Banach örgüsü dik b-özellğine sahip olamaz. ■

4. KARTEZYEN ÇARPIM VE BÖLÜM UZAYLARININ DİK b-ÖZELLİĞİNİ SAĞLAMASI

4.1. Kartezyen Çarpım Uzaylarının Dik b-Özelliği

Bu bölümde kartezyen çarpım uzaylarının dik b-özelliğine sahip olması karakterize edilecektir.

$\{E_i : i \in I\}$ Riesz uzaylarının bir ailesi olsun. $E = \prod_{i \in I} E_i$ kartezyen (dik) çarpım

$$\{x_i\} \geq \{y_i\} \Leftrightarrow \forall i \in I \text{ için } x_i \geq y_i$$

sıralaması ile bir Riesz uzayıdır.

Açık olarak E uzayının herhangi iki elemanı $x = \{x_i\}$, $y = \{y_i\}$ ise

$$\sup\{x, y\} = x \vee y = \{x_i \vee y_i\} \text{ ve } \inf\{x, y\} = x \wedge y = \{x_i \wedge y_i\}$$

dir. Direkt toplam $F = \sum_{i \in I} \oplus E_i$, E uzayının sonlu i 'ler haricindeki elemanları sıfır olan elemanların uzayı olsun. F uzayı, E Riesz uzayının bir Riesz alt uzayı olur.

$i \in I$ olmak üzere A_i E_i uzayının bir alt kümesi olsun. O zaman her bir $a \in A$ için;

$$\bar{a} = (a_j)_{j \in I} = \begin{cases} a_i, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $(a_j)_{j \in I}$ elemanını $\bar{a}$ ile gösterelim. Açık olarak $\bar{a} = (a_j)_{j \in I}$ E nin bir elemanıdır.

4.1.1. Önerme

$\{E_i : i \in I\}$ Riesz uzaylarının bir ailesi ve $E = \prod_{i \in I} E_i$ bu Riesz uzayların kartezyen çarpımı olsun. Her bir $i \in I$ için $A_i := \{a : a \in E_i^+\} \subseteq E_i$ dik b-sıra sınırlı bir küme olsun. O zaman $\bar{A} := \{\bar{a} : a \in A\} \subseteq E^+$ de dik b-sıra sınırlıdır.

İspat

Her bir $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{A}$ ve $\bar{a} \neq \bar{b}$ için $\bar{a} \wedge \bar{b} = 0$ dır.

Tanımdan $\bar{a} = (a_j)_{j \in I}$, $\bar{b} = (b_j)_{j \in I}$ olmak üzere;

$$\bar{a} \wedge \bar{b} = (a_j \wedge b_j)_{j \in I}$$

$$= \begin{cases} a \wedge b = 0, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} = \theta$$

bulunur.

Şimdi $\bar{A}$ nın b-sıra sınırlı olduğunu görelim.

$\emptyset \neq A \subseteq E_i^+$ ve $\Lambda := \{ \alpha \subseteq A : \alpha \text{ sonlu} \}$ olsun.

$$\varphi : \Lambda \rightarrow E$$

$$\alpha \rightarrow \varphi(\alpha) = z_\alpha = \bigvee_{i=1}^n a_i, \quad a_i \in \alpha, \quad 1 \leq a \leq |\alpha|$$

dönüşümünü göz önüne alalım. $\{ z_\alpha : \alpha \in \Lambda \}$ E_i de yukarı yönlendirilmiş ve b-sıra sınırlıdır. Gerçekten, A b-sıra sınırlı olduğundan her $a \in A$ için $0 \leq a \leq x''$ olacak şekilde bir $x'' \in E_i^{\sim \sim}$ vardır. Her α için $z_\alpha = \bigvee_{i=1}^n a_i$ olacak şekilde bir $a_i \in A$ vardır. Ayrıca $a_i \in A$ ve $0 \leq a \leq x''$

olduğundan

$$0 \leq a_i \leq x''$$

olur. O zaman;

$$0 \leq \bigvee_{i=1}^n a_i \leq x''$$

elde edilir. Her α için

$$0 \leq z_\alpha \leq x''$$

elde edilir ki bu da $\{ z_\alpha : \alpha \in \Lambda \}$ ağıının E_i de b-sıra sınırlı olduğunu verir.

$\mathcal{K} := \{ \overline{z_\alpha} : \alpha \in \Lambda \}$ olarak tanımlayalım.

Her bir $F \in E_+^{\sim}$ için

$$f : E_i \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x_i \rightarrow f(x_i) = F(\overline{x_i})$$

tanımlansın. Açık olarak $f \in (E_i)_{+}^{\sim}$ dir.

$\{ z_{\alpha} : \alpha \in \Lambda \}$ kümesi, b-sıra sınırlı olduğundan $0 \leq z_{\alpha} \leq x''$ olacak şekilde en az bir $x'' \in (E_i^{\sim})_{+}$ vardır.

Her bir $\alpha \in \Lambda$ için;

$$0 \leq \widehat{z_{\alpha}}(f) \leq x''(f)$$

$$0 \leq f(z_{\alpha}) \leq x''(f)$$

olur. Diğer taraftan,

$$\varphi : E_{+}^{\sim} \rightarrow \mathbb{R}^{+}$$

$$F \rightarrow \varphi(F) := \sup_{\alpha} F(\overline{z_{\alpha}})$$

biçiminde φ dönüşümünü tanımlayalım.

Her $\alpha \in \Lambda$ için $0 \leq F(\overline{z_{\alpha}}) = f(z_{\alpha}) \leq x''(f)$ olduğundan $\sup_{\alpha} F(\overline{z_{\alpha}}) \in \mathbb{R}$ dir. Ayrıca φ

dönüşümü toplamsaldır. Gerçekten her $F, G \in E_{+}^{\sim}$ için;

$$F(\overline{z_{\alpha}}) + G(\overline{z_{\alpha}}) \leq \varphi(F) + \varphi(G)$$

$$(F+G)(\overline{z_{\alpha}}) \leq \varphi(F) + \varphi(G)$$

$$\sup_{\alpha} (F+G)(\overline{z_{\alpha}}) \leq \varphi(F) + \varphi(G)$$

$$\varphi(F+G) \leq \varphi(F) + \varphi(G) \quad (4.1)$$

bulunur.

Diğer taraftan, Λ yukarı yönlendirildiğinden her $\alpha, \beta \in \Lambda$ için $\alpha \leq \gamma$ ve $\beta \leq \gamma$ olacak şekilde $\gamma \in \Lambda$ vardır. Buradan,

$$\overline{z_{\alpha}} \leq \overline{z_{\gamma}} \text{ ve } \overline{z_{\beta}} \leq \overline{z_{\gamma}} \text{ bulunur.}$$

F ve G , E üzerinde sıra sınırlı ve pozitif olduğundan;

$$0 \leq F(\overline{z_{\alpha}}) \leq F(\overline{z_{\gamma}})$$

$$0 \leq G(\overline{z_{\beta}}) \leq G(\overline{z_{\gamma}})$$

elde edilir. Eşitsizlikler taraf tarafa toplandığında;

$$\begin{aligned} F(\overline{z_{\alpha}}) + G(\overline{z_{\beta}}) &\leq F(\overline{z_{\gamma}}) + G(\overline{z_{\gamma}}) \\ &\leq (F+G)(\overline{z_{\gamma}}) \end{aligned}$$

$$F(\overline{z_\alpha}) + G(\overline{z_\beta}) \leq \sup_{\alpha \in \Lambda} (F + G)(\overline{z_\alpha}) = \varphi(F+G)$$

elde edilir.

Sırasıyla α ve β üzerinden supremum alınır;

$$\varphi(F) + \varphi(G) \leq \varphi(F+G) \quad (4.2)$$

bulunur.

Eş. 4.1 ve Eş. 4.2 ifadeleri göz önüne alındığında φ nin toplamsal olduğu elde edilir.

Önerme 2.1.6. dan φ nın $E^\sim$ nin tamamına bir pozitif genişlemesi vardır. Bu genişlemeyi yine φ ile gösterirsek her $\alpha \in \Lambda$ için $0 \leq (\overline{z_\alpha})^\wedge \leq \varphi$ olur. Gerçekten

her $F \in E_+^\sim$ için;

$$0 \leq (\overline{z_\alpha})^\wedge(F) = F(\overline{z_\alpha}) \leq \sup_{\alpha} F(\overline{z_\alpha}) \leq \varphi(F)$$

$$0 \leq (\overline{z_\alpha})^\wedge(F) \leq \varphi(F)$$

$0 \leq (\overline{z_\alpha})^\wedge \leq \varphi$, $E^\sim$ Riesz uzayında sağlanır. Bu ise;

$\mathcal{K}$ nın E de b-sıra sınırlı olduğunu gösterir. $\overline{A} \subseteq \mathcal{K}$ ve $\mathcal{K}$, E de b-sıra sınırlı olduğundan $\overline{A}$ da b-sıra sınırlıdır. Bu da ispatı tamamlar. ■

4.1.2. Teorem

$\{E_i : i \in I\}$ Riesz uzaylarının bir ailesi ve $E = \prod_{i \in I} E_i$ bu Riesz uzayların kartezyen çarpımı olsun. E Riesz uzayının dik b-özelliğine sahip olması için gerekli ve yeterli koşul her bir $i \in I$ için E_i Riesz uzayının dik b-özelliğine sahip olmasıdır.

İspat

$E = \prod_{i \in I} E_i$ Riesz uzayı dik b-özelliğine sahip ve $i \in I$ keyfi sabit indis olsun. E_i Riesz uzayının dik b-özelliğine sahip olduğunu göstereceğiz. E_i Riesz uzayının $A_i := \{a : a \in E_i^+\}$ dik ve b-sıra sınırlı herhangi bir alt kümesi olsun.

A_i kümesinin yardımıyla

$$\overline{a} := (a_j)_{j \in I} := \begin{cases} a, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

olacak şekilde E Riesz uzayının bir $\bar{a}$ elemanını tanımlayalım.

$\bar{A} := \{ \bar{a} : a \in A \}$ kümesi Önerme 4.1.1. den E de dik b -sıra sınırlıdır.

E dik b -özelliliğine sahip olduğundan her $\bar{a} \in \bar{A}$ için $0 \leq \bar{a} \leq \bar{x}$ olacak şekilde E nin en az bir $\bar{x} = (x_j)_{j \in I}$ elemanı vardır. Böylece her $i \in I$ için $0 \leq (\bar{a})_i \leq (\bar{x})_i$ sağlanır. Buradan her $a \in A$ için $0 \leq a \leq x_i$ eşitsizliği E_i uzayında sağlanır. Dolayısıyla A kümesi E_i uzayında sıra sınırlı olur. Bu ise E_i uzayının dik b -özelliliğine sahip olduğunu verir.

Tersine, her bir $i \in I$ için E_i uzayı dik b -özelliliğine sahip olsun. Şimdi E Kartezyen çarpım Riesz uzayının da dik b -özelliliğine sahip olduğunu görelim.

E uzayının herhangi bir dik b -sıra sınırlı alt kümesi $A := \{ (a_j)_{j \in I} : a_j \in E_i \}$ olsun.

$$P_i : E \rightarrow E_i$$

$$(a_j)_{j \in I} \rightarrow P_i((a_j)_{j \in I}) = a_i$$

biçiminde tanımlanan i . izdüşüm dönüşümü pozitifdir. Pozitif operatörler b -sıra sınırlı kümeleri b -sıra sınırlı kümeye dönüştürdüğünden $P_i(A) \subseteq E_i^+$ de b -sıra sınırlıdır.

Her $P_i((a_j)_{j \in I})$ ve $P_i((b_j)_{j \in I})$ $P(A)$ nın iki farklı elemanı olsun. Dolayısıyla

$(a_j)_{j \in I} \neq (b_j)_{j \in I}$ dır. A dik b -özelliliğine sahip olduğundan $(a_j)_{j \in I} \wedge (b_j)_{j \in I} = 0$ olur. Yani $a_j \wedge b_j = 0$ dır. Bu da $P_i(A) \subseteq E_i$ de dik olduğunu verir. E_i dik b -özelliliğine sahip olduğundan $0 \leq P_i(A) \leq (x_i)$ olacak şekilde en az bir $x_i \in E_i$ vardır. $x = (x_i)_{i \in I} \in E$ olmak üzere $0 \leq a_i \leq x_i$ olduğundan her $a \in E$ için $0 \leq a \leq x$ E de sağlanır. Bu ise E uzayının dik b -özelliliğine sahip olduğunu verir. ■

Direkt toplam Riesz uzaylarının dik b -özelliliğine sahip olmasını aşağıdaki sonuç ile karakterize edelim.

4.1.3. Sonuç

$\{ E_i : i \in I \}$ Riesz uzaylarının bir ailesi ve $E := \sum_{i \in I} \oplus E_i$ direkt toplam Riesz uzayı olsun. E nin dik b -özelliliğine sahip olması için gerekli ve yeterli koşul her bir $i \in I$ için E_i nin dik b -özelliliğine sahip olmasıdır.

İspat

$E := \sum_{i \in I} \oplus E_i$ direkt toplam Riesz uzayı dik b-özelliğine sahip olsun. Teorem 4.1.2. nin gereklilik koşulundaki ispata benzer şekilde her bir $i \in I$ için E_i nin dik b-özelliğine sahip olduğu görülür.

Tersine her bir $i \in I$ için E_i Riesz uzayı dik b-özelliğine sahip olsun. E direkt toplam Riesz uzayının dik b-özelliğine sahip olduğunu göstereceğiz.

$$A = \{ x_\alpha = (x_\alpha^i), x_\alpha^i \in E_i \text{ her bir } i \in I \text{ ve } \alpha \in \Lambda \}$$

ağı E^+ Riesz uzayında dik ve b-sıra sınırlı olsun. Dolayısıyla

$$B := \{ \bigvee_{j=1}^n x_{\alpha_j} : x_{\alpha_j} \in A \text{ ve } n \in \mathbb{N} \}$$

kümesi yukarı yönlendirilmiş bir ağıdır ve B, E^+ da b-sıra sınırlıdır. [9] da yer alan önerme 6 nın yeter şartının ispatındaki benzer adımlardan B kümesinin E uzayında sıra sınırlı olduğu görülür. Bu ise A nın E uzayında sıra sınırlı olduğunu verir. Yani E uzayı dik b-özelliğine sahiptir. ■

4.2. Bölüm Uzaylarının Dik b-Özelliği

Bu bölümde bölüm uzaylarının dik b-özelliğine sahip olması karakterize edilecektir.

E bir Riesz uzayı ve A, E nin bir ideali olsun. Herhangi $x, y \in E$ için $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in A$ biçiminde tanımlı “ $\sim$ ” bağıntısı E üzerinde bir denklik bağıntısıdır ve E nin “ $\sim$ ” bağıntısına göre denklik sınıflarının kümesini E / A ve bu uzayın elemanlarını $\dot{x}$ ile gösterirsek ;

$$\dot{x} \leq \dot{y} \Leftrightarrow \exists x_1 \in \dot{x}, \exists y_1 \in \dot{y} \ni x_1 \leq y_1$$

sıralamasıyla birlikte E / A bir Riesz uzayıdır [3].

Dik b-özelliğine sahip Riesz uzayına örgü izomorfik olan Riesz uzayları da dik b-özelliğine sahip olur.

Gerçekten, E dik b-özelliğine sahip bir Riesz uzayı ve F ise E uzayına örgü izomorfik Riesz uzayı olsun. O zaman $T: E \rightarrow F$ birebir ve örten bir örgü izomorfizmi vardır. $A \subseteq F^+$ dik ve b-sıra sınırlı herhangi bir alt kümesi olsun. O zaman her $a \in A$ için $0 \leq a \leq y''$ olacak şekilde $y'' \in F_+^{\sim\sim}$ elemanı vardır. T^{-1} pozitif ve örgü homomorfizmi olduğundan

$T^{-1}(A)$, E^+ da dik ve b-sıra sınırlı bir kümedir. E dik b-özelliğine sahip olduğundan her $a \in A$ için $0 \leq T^{-1}(a) \leq x$ olacak şekilde $x \in E^+$ vardır. T pozitif olduğundan

$$0 \leq T(T^{-1}(a)) \leq T(x)$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan;

$$0 \leq a \leq T(x)$$

eşitsizliği F de sağlanır. Bu ise A nın F de sıra sınırlı olduğunu verir. Dolayısıyla F dik b-özelliğine sahip olur.

4.2.1. Önerme

E bir Riesz uzayı ve B , E uzayının bir projeksiyon bandı olsun. E/B bölüm uzayı ve B bandının dik b-özelliğine sahip olması için gerekli ve yeterli koşul E Riesz uzayının dik b-özelliğine sahip olmasıdır.

İspat

E/B bölüm uzayı ve B bandı dik b-özelliğine sahip olsun. B projeksiyon band olduğundan $E = B \oplus B^d$ biçiminde tek türlü yazılabildiğinden E Riesz uzayı $B \times B^d$ Kartezyen çarpım Riesz uzayına Riesz izomorfiktir. Ayrıca E/B , B^d ye Riesz izomorfik olduğundan ve hipoteze göre E/B dik b-özelliğine sahip olduğundan B^d uzayı da dik b-özelliğine sahiptir. Teorem 4.1.2. den $B \times B^d$ de dik b-özelliğine sahiptir. E , $B \times B^d$ Riesz izomorfik olduğundan E de dik b-özelliğine sahiptir.

Tersine, E Riesz uzayı dik b-özelliğine sahip olsun. B projeksiyon band olduğundan E Riesz uzayı $B \times B^d$ uzayına Riesz izomorfiktir. Teorem 4.1.2. den ve B ve B^d de dik b-özelliğine sahiptir. B^d Riesz uzayı E/B bölüm uzayına Riesz izomorfik olduğundan E/B bölüm uzayı da dik b-özelliğine sahiptir. ■

5. BANACH ÖRGÜLERİNİN DİK b-ÖZELLİĞİNİ SAĞLAMASI

Bu kısımda dik b-özelliğine sahip Banach örgüleri ile Levi norma sahip Banach örgüleri arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

5.1. Teorem

E Banach örgüsü olsun. E nin Levi norma sahip olması için gerekli ve yeterli koşul E nin dik b-özelliğine sahip olması ve Dedekind tam olmasıdır.

İspat

E Levi norma sahip olsun. E b-özelliğine sahiptir [2]. Dolayısıyla E dik b-özelliğine sahiptir. Ayrıca her Levi norma sahip Banach örgüsü Dedekind tamdır.

Tersine, E dik b-özelliğine sahip ve Dedekind tam olsun. Her $A \subseteq E^+$ A dik ve

$$B := \{ y_\alpha = \sum_{a \in \alpha} a : \alpha \subseteq A \text{ sonlu} \}$$

kümesi yukarı yönlendirilmiş ve norm sınırlı olsun.

$$\varphi : E_{\sim}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$f \rightarrow \varphi(f) = \sup_{\alpha} f(y_\alpha)$$

biçiminde tanımlı dönüşümü göz önüne alırsak bu dönüşümün toplamsal olduğu Lemma 2.6.1.3.'ün ispatında verilmişti. Her $b \in B$ ve $f \in E_{\sim}^+$ için;

$$0 \leq \widehat{b}(f) \leq f(b) \leq \sup_{\alpha} f(y_\alpha) \leq \varphi(f)$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan;

$0 \leq \widehat{b} \leq \varphi$ $E_{\sim}$ da elde edilir. B, b-sıra sınırlıdır. $A \subseteq B$ olduğundan A da b-sıra sınırlı olur. E dik b-özelliğine sahip olduğundan A, E içinde üstten sınırlıdır. E Dedekind tam olduğundan $\sup A$ vardır. Dolayısıyla $\sup B$ de vardır. Teorem 2.5.17. den E Levi norma sahiptir. ■

5.2. Sonuç

E bir Dedekind tam Banach örgüsü olsun.

- i) E üzerindeki norm Levi normdur.
- ii) E b -özelliğine sahiptir.
- iii) E dik b -özelliğini sağlar.

İspat

- i) $\Rightarrow$ ii) Her Levi norma sahip Banach örgüsü b -özelliğine sahiptir [2].
- ii) $\Rightarrow$ iii) Sonuç 3.2.2. den her b -özelliğine sahip Riesz uzayı dik b -özelliğine sahiptir.
- iii) $\Rightarrow$ i) Teorem 5.1. den her dik b -özelliğine sahip Dedekind tam Banach örgüsü Levi norma sahiptir. ■

5.3. Açık Problem

Dik b -özelliğine sahip Riesz uzayları b -özelliğine sahip midir? Eğer öyle değilse bir örnek veriniz.

5.4. Sonuç

E sıra sürekli norma sahip bir Banach örgüsü olsun.

- i) E KB uzayıdır.
- ii) E üzerindeki norm Levi normdur.
- iii) E b -özelliğine sahiptir.
- iv) E dik b -özelliğini sağlar.

İspat

- i) $\Rightarrow$ ii) Her KB uzayı Levi norma sahiptir [4].
- ii) $\Rightarrow$ iii) Her Levi norma sahip Banach örgüsü b -özelliğine sahiptir [2].
- iii) $\Rightarrow$ iv) Sonuç 5.2. den her b -özelliğine sahip Riesz uzayı dik b -özelliğine sahiptir.

iv) $\Rightarrow$ i) E dik b-özelliğine sahip olsun. E Dedekind tam ve Banach örgüsü olduğundan Teorem 5.1. den E Levi norma sahiptir. Hipotezden E sıra sürekli norma sahip olduğundan ve [4] den E KB uzayıdır. ■

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Altın B.'nin 2002'de tanımladığı b-özelliğinin bir genellemesi olan dik b-özelliği tanımı verilmiştir. Dik b-özelliğine sahip bazı uzayların karakterizasyonları elde edilmiştir. Bazı uzaylarda, b-özelliği ile dik b-özelliğinin çakışma durumları çalışılmıştır.

Bu çalışmamızın sonucunda, dik b-özelliğinin b-özelliğini gerektirip gerektirmeyeceği açık sorusu ortaya çıkmıştır.

KAYNAKLAR

1. Fremlin, D. (1974). *Topological Riesz Spaces and Measure Theory*, Cambridge University Press, London, 129-130.
2. Altın B. (2002). *b-Özelliğini Sağlayan Riesz Uzayları ve b-Zayıf Kompakt Operatörler*, Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 25-37.
3. Aliprantis, C. D., Burkinshaw, O. (1985). *Positive Operators*, Academic Press, 1-249.
4. Zaanen, A. C. (1983). *Riesz Spaces Volume II*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 434, 456-460.
5. Nieberg, P. M. (1991). *Banach Lattices*, Springer, Berlin, 48.
6. Abramovich, Y. A., Wickstead A. W. (1997). When each continuous operator is regular, II. *Indagationes Mathematicae*, 281-284.
7. Alpay, Ş., Altın, B., Tonyalı, C. (2006). A note on Riesz spaces with property-b. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 56(131), 765-772.
8. Alpay, Ş., Altın, B., Tonyalı, C. (2003). On Property (b) of Vector Lattices. *Positivity*, 7(1), 135-139.
9. Altın, B. (2007). On Banach lattices with Levi norm. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 135(4), 1059-1063.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : EFETÜRK, Esra
 Uyruğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 11.08.1990, Konak
 Medeni hali : Bekâr
 Telefon : 0 (312) 420 76 14
 e-mail : esraefeturek@gmail.com



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik	Devam ediyor
Lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik	2013
Lise	Kaya Bayazıtöğlü Lisesi	2007

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2015-Halen	Türkiye Büyük Millet Meclisi	Memur

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Efetürk, E. (2019, 3-4 Mayıs). *Riesz spaces with disjoint b-property*. International Workshop on Dynamical Systems and Applications: In Memory of Prof. Dr. Aydın Tiryaki, Gazi Üniversitesi, Ankara.

Hobiler

Kitap okuma, sinema ve tiyatroya gitme, seyahat etme, yürüyüş yapma, yüzme



GAZİ GELECEKTİR...