

**KREDİ DERECELENDİRME KURULUŞLARININ ORTAK
SINIFLANDIRMA UYUMUNUN AĞIRLIKLİ KAPPA KATSAYISI
KULLANILARAK İNCELENMESİ**

Mustafa Mert ÖZDİLER

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MART 2010
ANKARA**

Mustafa Mert ÖZDİLER tarafından hazırlanan KREDİ DERECELENDİRME KURULUŞLARININ ORTAK SINIFLANDIRMA UYUMUNUN AĞIRLIKLİ KAPPA KATSAYISI KULLANILARAK İNCELENMESİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Jale BALİBEYOĞLU

Tez Danışmanı, İstatistik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile İstatistik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Semra ORAL ERBAŞ

İstatistik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Jale BALİBEYOĞLU

İstatistik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Nezir KÖSE

Ekonometri Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Tarih: 01 / 03 / 2010

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Mustafa Mert ÖZDİLER

**KREDİ DERECELENDİRME KURULUŞLARININ ORTAK
SINIFLANDIRMA UYUMUNUN AĞIRLIKLİ KAPPA KATSAYISI
KULLANILARAK İNCELENMESİ**

(Yüksek Lisans Tezi)

Mustafa Mert ÖZDİLER

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Mart 2010

ÖZET

Ağırlıklı kappa katsayısı aynı durumu birbirinden bağımsız olarak değerlendiren karar vericiler arasında gerçekleşen ortak sınıflandırma uyumunu ölçen kappa katsayısının genişletilmiş bir çeşididir. Bu çalışmada kappa ve ağırlıklı kappa katsayısına ilişkin istatistiksel yöntemler detaylı olarak incelenmiştir. Ayrıca doğrusal ağırlıklar kullanıldığı durumda ağırlıklı kappa katsayısına ilişkin bir tahmin verilmiştir. Buna ek olarak sektörün önde gelen kredi derecelendirme kuruluşlarının uyum yönünden değerlendirmeleri derecelendirdikleri bankalara ilişkin veri kullanılmak suretiyle ağırlıklı kappa katsayısı ile yapılmıştır.

Bilim Kodu : 205.1.066

**Anahtar Kelimeler : Ağırlıklı kappa katsayısı, ortak derecelendirme
uyumu, kredi derecelendirme notu**

Sayfa Adedi : 47

Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Jale BALİBEYOĞLU

**THE ANALYSIS OF INTERRATER AGREEMENT OF CREDIT RATING
AGENCIES USING WEIGHTED KAPPA COEFFICIENT**

(M.Sc. Thesis)

Mustafa Mert ÖZDİLER

**GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

March 2010

ABSTRACT

Weighted kappa coefficient is a version of kappa coefficient which measures the interrater agreement between raters assessing independently corresponding cases. In this study, statistical methods of kappa and weighted kappa coefficient were examined in detail. Furthermore, in the case of using linear weights an estimate of weighted kappa coefficient was given. Additionally, the assessment of leading credit rating agencies of the area was made by using weighted kappa coefficient across the data of banks that they rated.

Science Code	: 205.1.066
Key Words	: Weighted kappa coefficient, interrater agreement, credit rating
Page Number	: 47
Adviser	: Assist. Prof. Dr. Jale BALİBEYOĞLU

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca bilimsel yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, desteğini esirgemeyen değerli hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Jale BALİBEYOĞLU' na ve gerek maddi gerekse manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR	xi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Giriş	3
2.2 Uyum Ölçüsü	3
3. KAPPA KATSAYISI	9
3.1. Kappa Katsayısına İlişkin Açıklık Sınırları.....	11
3.2. Kappa Katsayısına İlişkin Hipotez Testleri.....	13
3.3. Kappa Katsayısına İlişkin Güven Aralığı	16
4. AĞIRLIKLİ KAPPA KATSAYISI	17
4.1. Ağırlıklı Kappa Katsayısına İlişkin Açıklık Sınırları	20
4.2. Ağırlıklı Kappa Katsayısına İlişkin Hipotez Testleri	21
4.3. Ağırlıklı Kappa Katsayısına İlişkin Güven Aralığı	23
4.4. Ağırlıklı Kappa Katsayısının İndirgeme Yöntemiyle Tahmini.....	23
5. UYGULAMA.....	28
5.1. Kredi Derecelendirme Kuruluşlarına İlişkin Temel Bilgiler	28

Sayfa

5.2. Ağırlıklı Kappa Katsayısı Yardımıyla Kredi Derecelendirme Kuruluşlarının Uyumunun Belirlenmesi	30
5.3. Ağırlıklı Kappa Katsayısının İndirgeme Yöntemiyle Tahmin Edilmesi	34
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	39
KAYNAKLAR	42
EKLER	44
EK-1. Gözlenen uyum oranlarının eşitliğinin gösterilmesi	45
ÖZGEÇMİŞ	47

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 2.1. İki karar verici için 2x2 boyutlu dağılım.....	4
Çizelge 2.2. Köşegen üzerindeki birimlerin uyuma etkisinin karşılaştırılması için hazırlanan çizelge.....	4
Çizelge 2.3. Köşegen üzerindeki birimlerin uyumun artmasına katkısının gösterilmesi için hazırlanan çizelge.....	5
Çizelge 2.4. İki psikiyatrisin sınıflandırdığı hastaların frekans dağılımı	6
Çizelge 2.5. İki psikiyatrisin sınıflandırdığı hastalara ilişkin beklenen oranlar	6
Çizelge 3.1. İki karar vericiye ilişkin k kategorili ortak kararların oranı	9
Çizelge 3.2. İki karar vericinin yaptığı sınıflandırmaya ilişkin frekans dağılımı	11
Çizelge 3.3. Mükemmel uyum olduğunda gerçekleşen frekans dağılımı	12
Çizelge 3.4. Tesadüfi uyum olduğunda gerçekleşen frekans dağılımı	12
Çizelge 3.5. Mükemmel uyumsuzluk olduğunda gerçekleşen frekans dağılımı	12
Çizelge 3.6. İki karar vericinin yaptığı teşhis sonuçlarının frekans dağılımı ..	14
Çizelge 4.1.a. İki karar verici arasındaki uyumsuzluğun fazla olduğu durum.....	19
Çizelge 4.1.b. İki karar verici arasındaki uyumsuzluğun az olduğu durum....	19
Çizelge 4.2. Doğrusal ve karesel ağırlıklar.....	19
Çizelge 4.3. Hesaplanan kappa ve ağırlıklı kappa istatistik değerleri.....	20
Çizelge 4.4. İki karar vericiye ilişkin K kategorili ortak kararların frekansları	24
Çizelge 4.5. İndirgenmiş 2x2 boyutlu frekans dağılımı.....	24
Çizelge 4.6. İki karar vericiye ait dört kategorili sınıflandırma dağılımı.....	26

Çizelge	Sayfa
Çizelge 4.7. İndirgenmiş 2x2 boyutlu tüm durumları içeren çizelgeler	26
Çizelge 5.1. Derecelendirme notlarının gösterimi	29
Çizelge 5.2. S&P ve Moody's derecelendirme kuruluşlarına ilişkin dağılım ..	30
Çizelge 5.3.a. Doğrusal ağırlıklar	31
Çizelge 5.3.b. Karesel ağırlıklar	31
Çizelge 5.4. Moody's ve Fitch derecelendirme kuruluşlarına ilişkin dağılım..	32
Çizelge 5.5. S&P ve Fitch derecelendirme kuruluşlarına ilişkin dağılım	33
Çizelge 5.6. S&P ve Moody's kuruluşlarına ilişkin indirgenmiş çizelgeler	35
Çizelge 5.7. Moody's ve Fitch kuruluşlarına ilişkin indirgenmiş çizelgeler.....	36
Çizelge 5.8. S&P ve Fitch kuruluşlarına ilişkin indirgenmiş çizelgeler	37

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
n	Örnek hacmi
k	Kategori sayısı
α	Anlamlılık düzeyi
c	Olumsuzluk katsayısı
χ^2	Ki-kare istatistiği
κ	Kappa katsayısı
κ_w	Ağırlıklı kappa katsayısı
Kısaltmalar	Açıklama
ABD	Amerika Birleşik Devletleri
S&P	Standard and Poor's
SD	Serbestlik derecesi
USD	Amerikan Doları

1. GİRİŞ

Birden fazla karar vericinin n gözlem birimini k kategoriye sınıflandırması karmaşık bir süreç sonucunda gerçekleşebilir. Hangi karar vericinin gerçekleştirdiği sınıflandırmanın ilgi konusu yapılmasının belirlenmesi gerektiğinde, yapılan sınıflandırmaların güvenilirliği büyük önem taşımaktadır. Böyle durumlarda birden fazla karar vericinin aynı gözlem birimlerini birbirlerinden bağımsız olarak sınıflandırması ile karar vericilerin arasındaki uyum kavramı söz konusu olmaktadır.

Karar vericilerin arasındaki uyumu incelemek için araştırmacıların ilk kullandığı yöntem aynı düzeye sınıflanan birimlerin gözlenen oranını hesaplamaya yöneliktir. Bu uygulama, belirli bir miktardaki şansa bağlı olan tesadüfi sınıflandırmayı düzeltmediği için açık bir şekilde yetersiz kalmaktadır [Goodman ve Kruskal, 1954].

Karar vericilerin ortak sınıflandırma uyumunu inceleyen ilk çalışmalardan bir diğeri ise olumsallık tablolarından hesaplanan ki-kare (chi-square) istatistiğine dayanmaktadır. Benzer şekilde ki-kare istatistiği olumsallık tablolarına uygulandığında ilişki derecesini ölçmektedir. Ki-kare istatistiği şans ilişkisinden uyum veya uyumsuzluk olarak iki yönde de uzaklaştığı için ortak sınıflandırma uyumunun hesaplanması amacıyla kullanılması doğru değildir.

Şansa bağlı tesadüfi uyumu düzelterek karar vericiler arasındaki ortak sınıflandırma uyumunu ilişkiden farklı olarak ölçen ilk yöntem Scott (1955) tarafından önerilmiş, daha sonra ise Cohen (1960) tarafından geliştirilmiştir. Böylece, karar vericiler arasında beklenen uyumun ötesinde gerçekleşen uyumun ölçülmesi söz konusu olmuştur [Scott 1955].

Çalışmanın ikinci bölümünde uyum katsayısı olarak ilk kullanılan yöntemlerin anlatılması amaçlanmış olup, ilgili yöntemlere ilişkin temel kavramlara yer

verilmiştir. Üçüncü bölümde kappa katsayısı detaylı bir şekilde örnekler yardımıyla açıklanmış ve buna ilişkin hipotez testi yapılması ile güven aralığı sınırlarının oluşturulması anlatılmıştır. Dördüncü bölümde ağırlıklı kappa katsayısı tanımlanarak basit kappa katsayısı yerine kullanılma nedenleri çeşitli uygulamalar aracılığı ile gösterilmiştir. Beşinci bölümde kredi derecelendirme kuruluşlarına ait gerçek veriler kullanılarak ağırlıklı kappa katsayısına ilişkin bir uygulama yapılmıştır. Çalışmanın altıncı bölümünde ise sonuç ve önerilere ilişkin bilgilere yer verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmada kullanılan yöntemin temeli olan uyum katsayısına ilişkin temel kavramlara yer verilmiştir.

2.1. Giriş

Bireylere ilişkin tek bir özelliğin değerlendirilmesi, belirli bir kategoriye sınıflandırılması iki ya da daha fazla karar verici tarafından gerçekleştirilebilir. Gerçekleştirilen değerlendirme sonucunda karar vericilerin verdikleri kararlar belirli düzeyde uyumlu veya uyumsuz olabilir.

Tıp bilimlerinde bazı hastalıklara teşhis konulmasında güçlüklerle karşılaşmaktadır. Böyle durumlarda hekimler arasında ortak değerlendirme, hastalığa ilişkin tanının gerçekleştirilmesi ve bunun sonucunda uygun tedavi yönteminin belirlenmesi için büyük önem taşımaktadır. Tıp bilimlerinden olan psikiyatride bir hastalığa ilişkin teşhisin konulması genellikle zor olduğundan ikinci ve hatta bazen üçüncü bir hekime ihtiyaç duyulabilmektedir. Bu durumda verilen ortak kararlar hekimler arası uyum ya da uyumsuzluk olarak önem kazanmaktadır [Koçak, 2005].

2.2. Uyum Ölçüsü

Birimlerin sınıflandırılması karmaşık bir sürecin sonucunda gerçekleştiği için karar vericilerin hangisinin daha güvenilir olduğunun belirlenmesi daha önemli bir konu haline gelmektedir. Böylece iki veya daha fazla karar verici tarafından birimlerin bir örneğinin bağımsız olarak sınıflandırılması ve bu işlemin uyum derecesinin ve anlamlılığının belirlenmesi ilgi konusu olur [Cohen, 1960].

Bir hastalığa ilişkin gerçekleştirilen tanı değerlendirmesinde karar vericiler hastaları “pozitif” veya “negatif” olarak sınıflandırmaktadır. İki karar vericinin

olduğu ve n sayıdaki aynı birimleri birbirinden bağımsız ve ayrı ayrı olarak sınıflandırdığı durumda oluşan 2x2 boyutlu Çizelge aşağıda verilmiştir.

Çizelge 2.1. İki karar verici için 2x2 boyutlu dağılım

	Karar Verici A		
Karar Verici B	+	-	Toplam
+	a	b	a+b
-	c	d	c+d
Toplam	a+c	b+d	n

Burada “a” iki karar verici tarafından “pozitif” olarak sınıflandırılan birimlerin sayısını, “d” iki karar verici tarafından “negatif” olarak sınıflandırılan birimlerin sayısını gösterdiği için iki karar verici arasındaki uyumun değerlendirilmesi, “a+d” toplamının “n” ile gösterilen ve karar vericiler tarafından sınıflanan tüm birimlere olan oranı olarak $(a+d)/n$ şeklinde “gözlenen uyum oranı” olarak ifade edilebilir [Armitage ve Berry, 1994].

Ancak karar vericilerin aynı düzeye sınıflandırdıkları durumların gözlenen oranını hesaplamaya yönelik olan ortak sınıflandırma uyumunu inceleyen ilk çalışma belirli bir miktardaki şansa bağlı sınıflandırmayı düzeltmediği için açık bir şekilde yetersiz kalmaktadır.

Bu durumu daha açık bir şekilde ifade etmek için iki karar verici tarafından iki kategoriye sınıflandırılan 100 adet birime ilişkin örnek ele alınmıştır.

Çizelge 2.2. Köşegen üzerindeki birimlerin uyuma etkisinin karşılaştırılması için hazırlanan çizelge

	Karar Verici A		
Karar Verici B	+	-	Toplam
+	10	5	15
-	5	80	85
Toplam	15	85	100

Çizelge 2.2’de gösterildiği gibi karar vericiler arasındaki gözlenen uyum oranı $(10+80)/100$ şeklinde hesaplanarak %90 olarak ifade edilir. Benzer şekilde iki karar vericinin yaptığı sınıflandırmaya ilişkin dağılım Çizelge 2.3’te gösterilen şekildedir.

Çizelge 2.3. Köşegen üzerindeki birimlerin uyumun artmasına katkısının gösterilmesi için hazırlanan çizelge

Karar Verici B	Karar Verici A		
	+	-	Toplam
+	30	5	35
-	5	60	65
Toplam	35	65	100

Çizelge 2.2’de olduğu gibi yukarıda gösterilen durumda da iki karar verici arasındaki gözlenen uyum oranı $(30+60)/100$ şeklinde hesaplanarak %90 olarak ifade edilir. Ancak Çizelge 2.2’de karar vericiler arasındaki uyumsuzluk Çizelge 2.3’te gerçekleşen uyumsuzluğa nazaran daha fazladır. Çizelge 2.3’te karar vericilerin en az biri tarafından sınıflandırılan 40 birimden 30 tanesi için “pozitif” olduğu konusunda uyum sağlanmış iken, bu uyum Çizelge 2.2’de 20 birimden 10 tane olarak göze çarpmaktadır.

Ortak sınıflandırma uyumuna ilişkin ilk çalışmalardan bir diğeri ise olumsallık tablolarından hesaplanan χ^2 istatistiğine dayanmaktadır. Benzer şekilde χ^2 istatistiği olumsallık tablolarına uygulandığında ilişki derecesini ölçtüğü için ortak sınıflandırma uyumu hesaplaması amacıyla kullanılması yetersiz olacaktır.

χ^2 istatistiğinin ortak sınıflandırma uyumunun hesaplanması için kullanılmasının yetersiz olduğunu göstermek amacıyla Çizelge 2.4’te verilen örnek ele alınmıştır. Çizelge 2.4’teki örnek iki psikiyatrisin muayene ettiği hastalara ilişkin dağılımı göstermektedir. Buradaki kategoriler “şizofren” (1), “sinir hastalığı” (2) ve “beyin hasarı” (3) olarak verilmiştir.

Çizelge 2.4. İki psikiyatrisin sınıflandırdığı hastaların frekans dağılımı

Karar Verici B	Karar Verici A			Toplam
	1	2	3	
1	50	26	24	100
2	24	4	32	60
3	6	30	4	40
Toplam	80	60	60	200

Örneğe göre iki karar verici arasındaki uyum 0.29 olarak hesaplanmaktadır. Ancak belirli bir uyumun tesadüfi olarak ortaya çıkması oldukça olağandır. Tesadüfi uyum, başka bir değişle şansa bağlı uyum marjinal olasılıkların çarpımlarının toplanması ile hesaplanır. Çizelge 2.4'te karar verici A birinci kategoriye 80 birim ve benzer şekilde karar verici B birinci kategoriye 100 birim sınıflamıştır. Birinci kategoriye ilişkin marjinal olasılık değerleri karar vericiler için sırasıyla 0,4 ve 0,5 olarak hesaplanır. Birinci kategori için beklenen şans uyumu ise $(0,4)(0,5)=0,2$ şeklinde bulunur. Karar vericiler tarafından sınıflanan birimlere ilişkin gözlenen oranlar Çizelge 2.5'te gösterilmiştir [Cohen, 1960].

Çizelge 2.5. İki psikiyatrisin sınıflandırdığı hastalara ilişkin beklenen oranlar

Karar Verici B	Karar Verici A			p_{iB}
	1	2	3	
1	0,20	0,15	0,15	0,50
2	0,12	0,09	0,09	0,30
3	0,08	0,06	0,06	0,20
p_{iA}	0,40	0,30	0,30	$\Sigma p_i=1$

Bu hesaplama yapıldıktan sonra birçok araştırmacı şansa bağlı uyuma ilişkin hipotezi test etmek için χ^2 istatistiğini, bazıları ise uyum derecesi ölçümü olarak olumsuzluk katsayısı c'yi (contingency coefficient) hesaplamıştır [Banerjee ve ark., 1999].

Yukarıdaki örneğe ilişkin χ^2 istatistiği oldukça anlamlı bir sonuç olan 64,59 olarak hesaplanmaktadır (SD=4). Bu noktada bazı araştırmacılar sonucun

uyum için uygun olduğunu düşünürken, bazı araştırmacılar ise buradaki örnek için 0,49 olan c istatistiğini hesaplamaktadır.

χ^2 istatistiği olumsallık tablolarına uygulandığında yokluk hipotezini uyum yerine ilişkiye dayalı test etmektedir. Çizelge 2.4'te verilen örnek için hesaplanan χ^2 istatistik değerine en büyük katkı A2-B3 hücresinden gelmektedir ($\frac{(0,15-0,06)^2}{0,06} 200 = 27$). Bu değer karar vericilerin tesadüfi uyumdan anlamlı derecede büyük bir şekilde uyumsuzlaştığı durumu yansıtmaktadır. Şansa bağlı ilişkiden uyum veya uyumsuzluk olarak iki yönde de uzaklaştığı için c ve χ^2 istatistiklerinin karar vericilerin ortak değerlendirme uyumunu ölçme amacıyla kullanılması doğru olmamaktadır.

Çizelge 2.5'te köşegen üzerinde bulunan hücrelerin toplamı karar vericilerin tesadüfi olarak aynı yönde verdikleri kararları ölçen ve tamamen tesadüfi olarak gerçekleşen uyumu göstermektedir. Bu uyum p_c ile gösterilen şansa bağlı uyum olarak tanımlanmıştır. Çizelge 2.4'te verilen örnek için gözlenen uyum oranı olan 0,29, şansa bağlı uyum olan 0,35'ten daha küçük olduğundan karar vericilerin uyumlu olmadıkları açıkça görünmektedir. Buna göre istatistiksel olarak oldukça anlamlı olan χ^2 değeri karar vericilerin uyumlu olduğunu değil ilişkili olduğunu göstermektedir [Cohen, 1960].

Ortak karar verme uyumunun ölçülmesine yönelik olarak kullanılan ilk yöntemler karar vericiler tarafından ortak sınıflandırılan birimleri hesaba katmaktadır. Ancak karar vericilerin tamamen tesadüfi olarak aynı yönde karar vermeleri söz konusu olabilir. Buna göre uyumun varlığı, beklenen dışında kalan ortak kararların tüm sınıflandırma içindeki gücünün ortaya çıkarılmasıyla belirlenecektir [Şenocak, 1992].

Karar vericiler arasında tesadüfi olarak gerçekleşen uyum oranının etkisini gözlenen uyum oranından silerek, ortak sınıflandırma uyumunu hesaplayan yöntem Cohen tarafından önerilmiş ve literatüre kappa katsayısı (kappa

coefficient) olarak girmiştir. Bu katsayı zamanla sınıflama ölçme düzeyinde sınıflandırıcılar arasındaki uyumu incelemek amacıyla yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır. Özellikle insan yargısına bağlı yapılan sınıflandırmalarda gerçekleşen uyumu ölçerek aynı gözlem birimlerini değerlendiren sınıflandırıcıların güvenilirliği hakkında bir sonuç ortaya koyan kappa katsayısı ilerleyen bölümde detaylı bir şekilde incelenmiştir.

3. KAPPA KATSAYISI

İki karar vericinin bir özelliğe ilişkin n tane birimi k kategoride değerlendirmesi ilgi konusu olduğunda uyumun ölçülmesi için $k \times k$ boyutlu bir çizelge oluşmaktadır. Bu çizelgede yer alan hücreler p_{ij} ($i=1,2,\dots,k$ ve $j=1,2,\dots,k$) ile gösterilmekte ve karar verici A tarafından j . kategoriye karar verici B tarafından i . kategoriye sınıflandırılan birimlerin oranını ifade etmektedir. Karar verici A tarafından j . kategoriye sınıflanan birimlerin oranı $p_{.j}$ ile, karar verici B tarafından i . kategoriye sınıflanan birimlerin oranı $p_{i.}$ ile gösterilir. Bu oranlar aynı zamanda karar vericiler tarafından ilgili kategoriye sınıflanan birimlerin marjinal olasılık değerlerini göstermektedir. İki karar vericinin n tane birimi k kategoriye sınıflandırdığı duruma ilişkin dağılım Çizelge 3.1'de gösterilmiştir.

Çizelge 3.1. İki karar vericiye ilişkin k kategorili ortak kararların oranı

Karar Verici B	Karar Verici A				Toplam
	1	2	...	k	
1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1k}	$p_{1.}$
2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2k}	$p_{2.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
k	p_{k1}	p_{k2}	...	p_{kk}	$p_{k.}$
Toplam	$p_{.1}$	$p_{.2}$	...	$p_{.k}$	$\sum p_{ij} = 1$

Buraya kadar olan bölümde iki karar verici arasındaki uyumun ölçülmesi için ortak sınıflandırılan birimlerinin oranlarının toplanmasından bahsedilmiştir. Bu oran p_o ile ifade edilmiştir. Ancak iki karar vericinin yaptıkları sınıflandırmalar tamamen tesadüfi olarak gerçekleşebilir. Karar vericilerin arasında gerçekleşmesi beklenen uyum p_c ile gösterilmiştir.

$$p_o = \sum_{i=1}^k p_{ii} \quad , \quad p_c = \sum_{i=1}^k p_{i.} p_{.i} \quad (3.1)$$

Tesadüfi olmayan faktörler uyum yönünde çalıştığı için p_o , p_c 'yi içermektedir.

Bu ikisinin farkı olan $p_o - p_c$ ise beklenen uyumun ötesinde gerçekleşen uyumu temsil eden birimlerin oranını verecektir. Karar vericiler arasında beklenen uyumdan farklı olarak gerçekleşecek toplam uyum ise $1 - p_c$ kadar olacağından Cohen tarafından tanımlanan κ istatistiği Eş. 3.2'de verilen şekilde hesaplanır.

$$\kappa = \frac{p_o - p_c}{1 - p_c} \quad (3.2)$$

Karar vericilerin birbirinden ayrı ve bağımsız olarak sınıflandırma yaptıkları varsayımı altında κ istatistiği karar vericiler arasındaki beklenen uyum oranı silindikten sonra gerçekleşen uyum oranını göstermektedir.

Eğer κ istatistiği frekans dağılımından hesaplanmak istenirse, buna ilişkin yöntem Eş. 3.3'te verilen şekilde bulunur.

$$\kappa = \frac{f_o - f_c}{N^2 - f_c} \quad (3.3)$$

Eş. 3.3'te verilen gözlenen uyum frekansı $f_o = N \sum_{i=1}^k f_{ii}$ ve beklenen uyum frekansı $f_c = \sum_{i=1}^k f_{i.} f_{.i}$ şeklinde hesaplanmaktadır. N ise karar vericiler tarafından sınıflanan toplam birim sayısını ifade etmektedir [Cohen, 1960].

κ istatistiğinin çalışma şeklinin anlaşılması amacıyla, bir örnek ele alınmıştır. İki karar vericiye toplam 100 adet kuşları ve köpekleri içeren hayvanların gösterildiği varsayılın. Karar vericilerin yaptıkları sınıflandırmaya ilişkin frekans dağılımını içeren çizelge ve örneğe ilişkin κ istatistiğinin hesaplanması aşağıda verilmiştir.

Çizelge 3.2. İki karar vericinin yaptığı sınıflandırmaya ilişkin frekans dağılımı

Karar Verici B	Karar Verici A		
	Köpek	Kuş	Toplam
Köpek	11	1	12
Kuş	2	86	88
Toplam	13	87	100

$$p_o = \frac{11}{100} + \frac{86}{100} = 0,97 \quad , \quad p_c = \frac{12}{100} \times \frac{13}{100} + \frac{88}{100} \times \frac{87}{100} = 0,78$$

$$\kappa = \frac{0,97 - 0,78}{1 - 0,78} = 0,86$$

Görüldüğü üzere karar vericiler arasındaki uyum gözlenen uyum oranı olan %97 değil, beklenen uyum oranının düzeltilmesiyle hesaplanan κ istatistik değeri olan %86'dır.

3.1. Kappa Katsayısına İlişkin Açıklık Sınırları

κ istatistiği -1 ile +1 arasında değer alır. Eğer $\kappa = 1$ ise iki karar verici arasında “mükemmel uyum” olduğu söylenir. Eğer gözlenen uyum beklenen uyuma eşit olursa, $\kappa = 0$ olarak hesaplanacak ve iki karar verici arasında “tesadüfi uyum” olacaktır. Eğer $\kappa = -1$ ise iki karar verici arasında “mükemmel uyumsuzluk” vardır [Fleiss ve ark., 2003].

Karar vericiler arasındaki hesaplanan uyum derecesine karşı gelen κ istatistiği değerlerinin yorumu için farklı değer aralıkları belirlenmiştir. Bu önerimler keyfi seçilmiş olsalar da κ istatistiği değerlerinin yorumu için standart olarak literatüre girmiştir. Buna göre çoğu amaca yönelik olarak 0,75'ten daha büyük değerler beklenen uyumun ötesinde “mükemmel uyum”, 0,40'tan daha küçük değerler beklenen uyumun ötesinde “zayıf uyum” ve 0,40 ile 0,75 arasındaki değerler beklenen uyumun ötesinde “zayıftan iyiye uyum” olarak değerlendirilir. Landis ve Koch bu değerlerin kullanılmasının uygun olacağını, sonraki yıllarda yaptıkları simülasyon çalışmaları ile desteklemiştir [Landis ve Koch, 1977].

Karar vericiler arasında gerçekleşen “mükemmel uyum”, “tesadüfi uyum” ve “mükemmel uyumsuzluk” durumlarında oluşan frekans dağılımları şu şekilde gösterilmiştir.

Çizelge 3.3. Mükemmel uyum olduğunda gerçekleşen frekans dağılımı

Karar Verici B	Karar Verici A		Toplam
	+	-	
+	a	0	a
-	0	b	b
Toplam	a	b	a+b

$$p_o = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1, \quad p_c = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a+b}\right)^2 \geq 0$$

$$\kappa = \frac{1-p_c}{1-p_o} = 1$$

Çizelge 3.4. Tesadüfi uyum olduğunda gerçekleşen frekans dağılımı

Karar Verici B	Karar Verici A		Toplam
	+	-	
+	a	a	2a
-	a	a	2a
Toplam	2a	2a	4a

$$p_o = \frac{a}{4a} + \frac{a}{4a} = 0,5, \quad p_c = \left(\frac{2a}{4a}\right)^2 + \left(\frac{2a}{4a}\right)^2 = 0,5$$

$$\kappa = \frac{0,5-0,5}{1-0,5} = 0$$

Çizelge 3.5. Mükemmel uyumsuzluk olduğunda gerçekleşen frekans dağılımı

Karar Verici B	Karar Verici A		Toplam
	+	-	
+	0	a	a
-	b	0	b
Toplam	b	a	a+b

$$p_o = \frac{0}{a+b} + \frac{0}{a+b} = 0, \quad p_c = \frac{2ab}{(a+b)^2}$$

$$\kappa = \frac{-2ab}{a^2+b^2} \quad \text{ve } a=b \text{ olduğunda, } \kappa = -1 \text{ olur [Ben-David, 2008].}$$

3.2. Kappa Katsayısına İlişkin Hipotez Testleri

Cohen tarafından tanımlanan ve karar vericiler arasındaki uyumun ölçülmesi amacıyla kullanılan κ istatistiğine ilişkin kategorilerin bağımsız olduğu, başka bir değişle κ istatistiği değerinin sıfıra eşit olduğunu test etmek için gereken uygun varyans değeri Eş. 3.4'te verilen şekilde tahmin edilmiştir.

$$\widehat{var}_0(\kappa) = \frac{1}{n(1-p_c)^2} (p_c + p_c^2 - \sum_{i=1}^k p_{i.} p_{.i} (p_{i.} + p_{.i})) \quad (3.4)$$

Burada n daha önce verildiği gibi toplam birim sayısını, p_c Eş. 3.1'de tanımlanan beklenen uyum oranını, $p_{i.}$ ve $p_{.i}$ marjinal olasılıkları göstermektedir. Buna göre test edilecek H_0 hipotezi ve alternatif hipotezler aşağıda verilen şekilde kurulur.

$$H_0: \kappa = 0$$

ve

$$H_1: \kappa < 0 \text{ veya } H_1: \kappa > 0$$

ya da,

$$H_0: p_o = p_c$$

ve

$$H_1: p_o < p_c \text{ veya } H_1: p_o > p_c$$

Burada amaç gözlenen uyum oranının, beklenen uyum oranından daha iyi olduğunu (aynı ya da ters yönde) test etmek olduğundan tek taraflı bir test yapmak daha uygun olacaktır. $H_0: \kappa = 0$ hipotezinin doğruluğu altında standart test istatistiği $\hat{\kappa}^*$ standart normal dağılıma sahiptir ve Eş. 3.5'te verilen şekilde hesaplanır.

$$\hat{\kappa}^* = \frac{\kappa}{\sqrt{\widehat{var}_0(\kappa)}} \quad (3.5)$$

Hipotez testinin sonucu standart normal dağılım tablosu kullanılarak belirlenir. Eğer $\hat{\kappa}^*$ değeri z tablo değerinden büyükse H_0 hipotezi ilgili α anlamlılık düzeyi için reddedilir [Fleiss ve ark., 1969].

Çizelge 3.6 iki karar verici tarafından sınıflandırılan 100 hastanın, bir hastalığa ilişkin teşhis sonuçlarını içermektedir. Kategoriler hastalığın “psikolojik”, “sinirsel” ya da “bedensel” olduğu yönündedir.

Çizelge 3.6. İki karar vericinin yaptığı teşhis sonuçlarının frekans dağılımı

Karar Verici A				
Karar Verici B	Psikolojik	Sinirsel	Bedensel	Toplam
Psikolojik	75	1	4	80
Sinirsel	5	4	1	10
Bedensel	0	0	10	10
Toplam	80	5	15	100

Burada $\hat{\kappa}$ istatistiği değeri 0,68 olarak hesaplanacaktır. $H_0: \kappa = 0$ hipotezi $\alpha = 0,05$ anlamlılık düzeyinde $H_1: \kappa > 0$ hipotezine karşı test edilmek istenirse, $\hat{\kappa}^*$ istatistik değeri aşağıda verilen şekilde hesaplanır.

$$\widehat{var}_0(\hat{\kappa}) = \frac{1}{100(1-0,66)^2} (0,66 + 0,66^2 - 1,0285) = 0,0058 ,$$

$$\hat{\kappa}^* = \frac{0,68}{\sqrt{0,0058}} = 8,95$$

Bu sonuca göre $\alpha = 0,05$ anlamlılık düzeyinde $H_0: \kappa = 0$ hipotezi reddedilir. İki karar vericinin arasında beklenen uyumun ötesinde istatistiksel olarak anlamlı bir uyum vardır [Fleiss ve ark., 2003].

Karar vericiler arasındaki ortak sınıflandırma uyumunu belirli bir κ_0 değeriyle

test etmek ilgi konusu olabilir. Bu durumda κ istatistiğini sıfırdan farklı bir değere göre test etmek için Fleiss, Cohen ve Everitt (1969) tarafından tahmin edilen asimptotik varyans Eş. 3.6'da verilmiştir.

$$\widehat{var}(\kappa) = \frac{A+B-C}{n(1-p_c)^2} \quad (3.6)$$

burada,

$$A = \sum_{i=1}^k p_{ii}[1 - (p_{i.} + p_{.i})(1 - \kappa)]^2$$

$$B = (1 - \kappa)^2 \sum \sum_{i \neq j} p_{ij}(p_{i.}p_{.j})^2$$

$$C = [\kappa - p_c(1 - \kappa)]^2$$

Buna göre $H_1: \kappa \neq \kappa_0$ hipotezine karşı test edilmek istenen $H_0: \kappa = \kappa_0$ hipotezi için hesaplanan $\hat{\kappa}^*$ test istatistiği Eş. 3.7 verilen şekildedir [Fleiss ve ark., 1969].

$$\hat{\kappa}^* = \frac{|\kappa - \kappa_0|}{\sqrt{\widehat{var}(\kappa)}} \quad (3.7)$$

Çizelge 3.6'da verilen örnek için $H_0: \kappa = 0,80$ hipotezi $\alpha = 0,05$ anlamlılık düzeyinde test edilmek istenirse hesaplanan $\hat{\kappa}^*$ değeri aşağıda gösterildiği gibi elde edilir.

$$A = 0,75[1 - (0,80 + 0,80)(1 - 0,68)]^2 + 0,04[1 - (0,10 + 0,05)(1 - 0,68)]^2 + 0,10[(1 - (0,10 + 0,15)(1 - 0,68))]^2 = 0,2995$$

$$B = (1 - 0,68)^2[0,01(0,80 + 0,10)^2 + 0,04(0,80 + 0,10)^2 + 0,05(0,05 + 0,80)^2 + 0,01(0,05 + 0,10)^2 + 0 + 0] = 0,0079$$

$$C = [0,68 - 0,66(1 - 0,68)]^2 = 0,2198$$

$$\widehat{var}(\hat{\kappa}) = \frac{0,2995 + 0,0079 - 0,2198}{100(1 - 0,66)^2} = 0,0076$$

$$\hat{\kappa}^* = \frac{|0,68 - 0,80|}{0,087} = 1,38$$

Böylece $\alpha = 0,05$ anlamlılık düzeyinde $H_0: \kappa = 0,80$ hipotezi reddedilemez [Fleiss ve ark., 2003].

3.3. Kappa Katsayısına İlişkin Güven Aralığı

Kappa katsayısına ilişkin hipotez testlerinin yer aldığı bölümde Eş. 3.6'da verilen asimptotik varyans formülü kullanılarak, κ istatistiğine ilişkin $1 - \alpha$ güven aralığı sınırları Eş. 3.8'de verilmiştir. Burada, $\hat{\kappa}$ hesaplanan kappa istatistik değerini ve $z_{\alpha/2}$ standart normal dağılıma ilişkin ilgili anlamlılık düzeyi için z istatistik değerini ifade etmektedir [Fleiss ve ark., 2003].

$$\hat{\kappa} - z_{\alpha/2} \sqrt{\widehat{var}(\hat{\kappa})} \leq \kappa \leq \hat{\kappa} + z_{\alpha/2} \sqrt{\widehat{var}(\hat{\kappa})} \quad (3.8)$$

Çizelge 3.6 da verilen örnek için $\alpha = 0.05$ anlamlılık düzeyinde güven aralığı sınırları oluşturulmak istenirse, hesaplanan $\hat{\kappa}$ istatistiği 0,68, buna ilişkin standart hata 0,087 ve $z_{\alpha/2}$ değeri 1,96 olduğundan κ istatistiğine ilişkin güven aralığı sınırları aşağıda verilmiştir.

$$0,5095 < \kappa < 0,8505$$

4. AĞIRLIKLIL KAPPA KATSAYISI

Genellikle karar vericiler arasındaki belirli kategorilerdeki uyumsuzluklar diğerlerinden daha önemli olduğunda uyumsuzluk oranı artmaktadır. Örneğin kategorilerin “kişilik bozukluğu”, “sinirsel bozukluk” ve “ruh hastalığı” olduğu bir psikolojik teşhis çalışmasında hekimler “sinirsel bozukluk” ile “ruh hastalığı” arasındaki uyumsuzluğun “sinirsel hastalık” ile “kişilik bozukluğu” arasındaki uyumsuzluktan daha önemli olduğunu düşünebilir. Ancak kappa katsayısı böyle bir ayırım yapmayarak tüm uyumsuzluklara eşit önem vermektedir. Karar vericiler arasındaki beklenen ağırlıklı uyumun ötesinde gerçekleşen ağırlıklı uyum oranını ölçme amacıyla kullanılmak üzere, κ istatistiğinin genişletilmiş bir versiyonu olan ve κ_w ile gösterilen ağırlıklı kappa katsayısı literatüre katılmıştır.

İki karar vericinin n gözlem birimini k kategoriye sınıflandırdığı Çizelge 3.1 de verilen dağılım için p_{ij} ($i=1,2,\dots,k$ ve $j=1,2,\dots,k$) daha önce tanımlandığı gibi karar verici A tarafından j . kategoriye karar verici B tarafından i . kategoriye sınıflandırılan birimlerin oranını, $p_{i.}$ ve $p_{.j}$ karşı gelen marjinal olasılıkları ifade etmektedir. Ayrıca n gözlem birimi için oluşan $k \times k$ boyutlu çizelge için karşı gelen hücreye ilişkin ağırlıklar w_{ij} ile gösterilir. Ağırlıklar Eş. 4.1 ve Eş. 4.2’de gösterilen şekilde tanımlanır.

$$w_{ii} = 1 \quad (4.1)$$

$$i \neq j \text{ için } 0 \leq w_{ij} < 1 \quad (4.2)$$

Eş. 4.1’den anlaşılacağı üzere karar vericiler arasındaki uyuma maksimum ağırlık verilmiştir. Benzer şekilde karar vericiler arasındaki uyumsuzluklar için maksimum ağırlıktan daha düşük ağırlık verilmiştir. Ayrıca ağırlıklar simetriktir ($w_{ij} = w_{ji}$).

Buna göre ağırlıklı gözlenen uyum oranı $p_{o(w)}$ ve ağırlıklı beklenen uyum oranı $p_{c(w)}$ Eş. 4.3'te verilen şekilde tanımlanır.

$$p_{o(w)} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k w_{ij} p_{ij} \quad , \quad p_{c(w)} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k w_{ij} p_{i.} p_{.j} \quad (4.3)$$

Böylece Cohen tarafından verilen κ_w istatistiği aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\kappa_w = \frac{p_{o(w)} - p_{c(w)}}{1 - p_{c(w)}} \quad (4.4)$$

Eğer tüm $i \neq j$ için $w_{ij} = 0$ olursa κ_w istatistiği Eş. 3.2'de verilen kappa katsayısına eşit olur [Cohen, 1968].

Ağırlıklı kappa katsayısına ilişkin yaygın olarak iki ağırlıklandırma yöntemi kullanılmaktadır. Bu ağırlıklandırma yöntemlerinden ilki doğrusal, ikincisi ise karesel ağırlıklandırma yöntemidir. Doğrusal ağırlıklandırma yöntemi Eş. 4.5'te, karesel ağırlıklandırma yöntemi ise Eş. 4.6'da tanımlanmıştır [Fleiss ve ark., 2003].

$$w_{ij} = 1 - \frac{|i-j|}{k-1} \quad (4.5)$$

$$w_{ij} = 1 - \frac{(i-j)^2}{(k-1)^2} \quad (4.6)$$

κ_w istatistiğinin κ istatistiğine göre nasıl farklılık gösterdiğinin daha iyi açıklanması için iki karar vericinin bir ürüne ilişkin müşteri memnuniyetini tahmin ettiği Çizelge 4.1 ve 4.2'de verilen örnekler ele alınmıştır. Buna göre, Çizelge 4.1'deki örnekte karşılıklı olarak bir karar vericinin “mükemmel” olarak sınıflandırdığı 100 birimi diğer karar verici “kötü” olarak sınıflandırmıştır. Çizelge 4.2'de ise karşılıklı olarak bir karar vericinin “iyi” olarak sınıflandırdığı 100 birimi diğer karar verici “normal” olarak sınıflandırmıştır.

Çizelge 4.1.a. İki karar verici arasındaki uyumsuzluğun fazla olduğu durum

		Karar Verici A				
Karar Verici B		Mükemmel	İyi	Normal	Kötü	Toplam
Mükemmel		200	0	0	100	300
İyi		0	200	0	0	200
Normal		0	0	200	0	200
Kötü		100	0	0	200	300
Toplam		300	200	200	300	1000

Çizelge 4.1.b. İki karar verici arasındaki uyumsuzluğun az olduğu durum

		Karar Verici A				
Karar Verici B		Mükemmel	İyi	Normal	Kötü	Toplam
Mükemmel		200	0	0	0	200
İyi		0	200	100	0	300
Normal		0	100	200	0	300
Kötü		0	0	0	200	200
Toplam		200	300	300	200	1000

Sınıflandırılan birimlerin farklılaşmasının daha net ifade edilmesi açısından karar vericilerin yaptıkları sınıflandırmaya ilişkin frekans dağılımı verilmiştir. Görüldüğü üzere Çizelge 4.1.a'daki sınıflandırmada karar vericiler arasında gerçekleşen uyumsuzluk Çizelge 4.1.b'dekine göre daha fazladır. Örneklerle ilişkin κ_w istatistiğinin hesaplanmasında kullanılan doğrusal ve karesel ağırlıklar Çizelge 4.2'de gösterilmiştir. Her hücrede sol üstte bulunan değerler doğrusal, sağ altta bulunan değerler ise karesel ağırlıkları göstermektedir.

Çizelge 4.2. Doğrusal ve karesel ağırlıklar

		Karar Verici A			
Karar Verici B		Mükemmel	İyi	Normal	Kötü
Mükemmel		1 1	0,667 0,889	0,333 0,556	0 0
İyi		0,667 0,889	1 1	0,667 0,889	0,333 0,556
Normal		0,333 0,556	0,667 0,889	1 1	0,667 0,889
Kötü		0 0	0,333 0,556	0,667 0,889	1 1

Örneğe ilişkin κ istatistik değeri ve hem doğrusal hem de karesel ağırlıklar kullanılarak hesaplanan κ_w istatistik değerleri Çizelge 4.3'te verilmiştir.

Çizelge 4.3. Hesaplanan kappa ve ağırlıklı kappa istatistik değerleri

	Fazla Uyumsuzluk	Az Uyumsuzluk
Kappa	0,7297	0,7297
Ağırlıklı Kappa (doğrusal)	0,5522	0,8246
Ağırlıklı Kappa (karesel)	0,3793	0,9048

Örnek sonuçları incelendiğinde karar vericilerin ortak sınıflandırma uyumu ölçülürken, ağırlıklı kappa katsayısının kullanılması uygun olacaktır. Karar vericilerin arasındaki uyum ölçümü olan ağırlıklı kappa katsayısının, basit kappa katsayısına göre fazla uyumsuzluk olduğu durumda düştüğü, az uyumsuzluk olduğu durumda ise yükseldiği özellikle belirtilmelidir. Kappa katsayısı bu durumu hesaba katmayarak fazla ve az uyumsuzluk olduğu durumların her ikisi için de karar vericilerin ortak sınıflandırma uyumunu aynı olarak ölçmektedir.

Genellikle sıralama ölçme düzeyi ilgi konusu olduğunda kategoriler arasındaki farklı sınıflandırmaların farklılaşma sıraları önem taşımaktadır. Bu durumda karar vericiler arasındaki ortak sınıflandırma uyumu ağırlıklı kappa katsayısı tarafından daha iyi yansıtılmaktadır.

4.1. Ağırlıklı Kappa Katsayısına İlişkin Açıklık Sınırları

Ağırlıklı kappa katsayısına ilişkin açıklık sınırları, Bölüm 3.1'de verilen kappa katsayısına ilişkin açıklık sınırlarına benzer şekildedir. κ_w -1 ile +1 arasında değer alır. Eğer $\kappa_w = 1$ ise iki karar verici arasında “mükemmel uyum” olduğu söylenir. Eğer gözlenen uyum beklenen uyuma eşit olursa, $\kappa_w = 0$ olarak hesaplanacak ve iki karar verici arasında “tesadüfi uyum” olacaktır. Eğer $\kappa_w = -1$ ise iki karar verici arasında “mükemmel uyumsuzluk” vardır [Fleiss

ve ark., 2003].

Benzer şekilde karar vericiler arasında gerçekleşen uyum derecesine karşı gelen κ_w istatistiği değerinin yorumlanması için, κ istatistik değerinin yorumlanmasında yararlanılan keyfi olarak belirlenen değerlendirmeler kullanılmaktadır. Buna göre çoğu amaca yönelik olarak 0,75'ten daha büyük değerler beklenen uyumun ötesinde "mükemmel uyum", 0,40'tan daha küçük değerler beklenen uyumun ötesinde "zayıf uyum" ve 0,40 ile 0,75 arasındaki değerler beklenen uyumun ötesinde "zayıftan iyiye uyum" olarak değerlendirilir [Landis ve Koch, 1977].

4.2. Ağırlıklı Kappa Katsayısına İlişkin Hipotez Testleri

Cohen tarafından tanımlanan karar vericiler arasındaki uyumun kategoriler arasında ağırlıklandırma yapılarak ölçülmesine olanak sağlayan κ_w istatistiğine ilişkin hipotez testleri üçüncü bölümde verildiği gibi iki farklı şekilde ele alınmıştır. İlk olarak κ_w istatistiğinin sıfıra eşit olduğu hipotezini test etmek için gereken uygun varyans Eş. 4.7'de verilen şekilde tahmin edilmiştir.

$$\widehat{var}_0(\kappa_w) = \frac{1}{n(1-p_{c(w)})^2} \left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k p_{i,j} [w_{ij} - (\bar{w}_{i.} + \bar{w}_{.j})]^2 - p_{c(w)}^2 \right) \quad (4.7)$$

Burada n toplam birim sayısını, $p_{c(w)}$ Eş. 4.3'te tanımlanan ağırlıklı beklenen uyum oranını, w_{ij} Eş. 4.1 ve Eş. 4.2'de tanımlanan ağırlıkları, $p_{i.}$ ve $p_{.j}$ marjinal olasılıkları göstermektedir. $\bar{w}_{i.}$ ve $\bar{w}_{.j}$ değerleri marjinal ağırlıkları göstermekte, Eş. 4.8'de verilen şekilde hesaplanır.

$$\bar{w}_{i.} = \sum_{j=1}^k p_{j.} w_{ij} \quad , \quad \bar{w}_{.j} = \sum_{i=1}^k p_{i.} w_{ij} \quad (4.8)$$

Buna göre test edilecek H_0 hipotezi ve alternatif hipotezler aşağıda verilen şekilde kurulur.

$$H_0: \kappa_w = 0$$

ve

$$H_1: \kappa_w \neq 0, \quad H_1: \kappa_w < 0 \text{ veya } H_1: \kappa_w > 0$$

$H_0: \kappa_w = 0$ hipotezinin doğruluğu altında standart test istatistiği $\hat{\kappa}_w^*$ standart normal dağılıma sahiptir ve Eş. 4.9'da verilen şekilde hesaplanır.

$$\hat{\kappa}_w^* = \frac{\hat{\kappa}_w}{\sqrt{\widehat{var}_0(\hat{\kappa}_w)}} \quad (4.9)$$

Hipotez testinin sonucu standart normal dağılım kullanılarak belirlenir. Eğer $\hat{\kappa}_w^*$ değeri z tablo değerinden büyükse H_0 hipotezi ilgili α anlamlılık düzeyi için reddedilir.

Karar vericiler arasındaki ortak sınıflandırma uyumunu belirli bir κ_{w0} değeriyle test etmek ilgi konusu olabilir. Bu durumda κ_w istatistiğini sıfırdan farklı bir değere göre test etmek için gereken uygun varyans Eş. 4.10'da verilen şekilde tahmin edilmiştir.

$$\widehat{var}(\kappa_w) = \frac{A-B}{n(1-p_{c(w)})^2} \quad (4.10)$$

Burada,

$$A = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k p_{ij} [w_{ij} - (\bar{w}_{i.} + \bar{w}_{.j})(1 - \kappa_w)]^2$$

$$B = [\kappa_w - p_{c(w)}(1 - \kappa_w)]^2$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Buna göre $H_1: \kappa_w \neq \kappa_{w0}$ hipotezine karşı test edilmek istenen $H_0: \kappa_w = \kappa_{w0}$ hipotezi için hesaplanan $\hat{\kappa}_w^*$ test istatistiği Eş. 4.11'de verilmiştir [Fleiss ve ark, 1969].

$$\hat{\kappa}_w^* = \frac{|\hat{\kappa}_w - \kappa_{w0}|}{\sqrt{\widehat{var}(\hat{\kappa}_w)}} \quad (4.11)$$

4.3. Ağırlıklı Kappa Katsayısına İlişkin Güven Aralığı

Ağırlıklı kappa katsayısına ilişkin hipotez testlerinin yer aldığı bölümde Eş. 4.10'da verilen varyans formülü kullanılarak, κ_w istatistiğine ilişkin $1 - \alpha$ güven aralığı sınırları Eş. 4.12'de verilmiştir. Burada, $\hat{\kappa}_w$ hesaplanan ağırlıklı kappa istatistik değerini ve $z_{\alpha/2}$ standart normal dağılıma ilişkin ilgili anlamlılık düzeyi için z istatistik değerini ifade etmektedir [Fleiss ve ark., 2003].

$$\hat{\kappa}_w - z_{\alpha/2} \sqrt{\widehat{var}(\hat{\kappa}_w)} \leq \kappa_w \leq \hat{\kappa}_w + z_{\alpha/2} \sqrt{\widehat{var}(\hat{\kappa}_w)} \quad (4.12)$$

4.4. Ağırlıklı Kappa Katsayısının İndirgeme Yöntemiyle Tahmini

Çizelge 3.1'de verilen iki karar vericinin n tane gözlem birimini k kategoriye sınıflandırdıkları duruma ilişkin doğrusal ağırlıklar söz konusu olduğunda ağırlıklı kappa katsayısı ölçümüne yönelik olarak Vanbelle ve Albert (2009) yeni bir yöntem önermişlerdir. Temel olarak kappa katsayısına dayanan bu yöntemde $k \times k$ boyuta sahip olan dağılım 2×2 boyuta indirgenerek her kategori için κ istatistiği hesaplanmaktadır. Daha sonra her kategori için hesaplanan istatistiklerin aritmetik ortalaması alınarak κ_w istatistiğine ulaşılmaktadır. Vanbelle ve Albert (2009) indirgenmiş 2×2 boyutlu dağılımlar kullanılarak hesaplanan κ_w istatistiğinin, indirgenmemiş κ_w istatistiğine yakın olduğunu göstermişlerdir.

Çizelge 4.4 iki karar vericinin n tane gözlem birimini K kategoriye sınıflandırdıkları duruma ilişkin frekans dağılımını göstermektedir. Daha önce verilen şekilde n toplam gözlenen birim sayısını, i ve j kategorileri ($i=1,2,\dots,K$ ve $j=1,2,\dots,K$) ve n_{ij} , ij hücresine ilişkin gözlenen birim sayısını göstermektedir.

Çizelge 4.4. İki karar vericiye ilişkin K kategorili ortak kararların frekansları

Karar Verici B	Karar Verici A				Toplam
	1	2	...	K	
1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1K}	$n_{1.}$
2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2K}	$n_{2.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
K	n_{K1}	n_{K2}	...	n_{KK}	$n_{K.}$
Toplam	$n_{.1}$	$n_{.2}$	...	$n_{.K}$	n

Belirlenen k kesme noktası için kategorileri Çizelge 4.5'te verilen şekilde 2x2 boyuta indirgemek mümkündür. Buna göre ilgili kesme noktasına göre indirgenmiş 2x2 boyutlu gözlenen frekansların dağılımı Çizelge 4.5'te verilen şekildedir.

Çizelge 4.5. İndirgenmiş 2x2 boyutlu frekans dağılımı

Karar Verici B	Karar Verici A		Toplam
	$\leq k$	$> k$	
$\leq k$	$N_{11}(k)$	$N_{12}(k)$	$N_{1.}(k)$
$> k$	$N_{21}(k)$	$N_{22}(k)$	$N_{2.}(k)$
Toplam	$N_{.1}(k)$	$N_{.2}(k)$	n

Çizelge 4.5'teki gözlenen frekanslar Eş. 4.13'te verilen şekildedir.

$$\begin{aligned}
 N_{11}(k) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k n_{ij}, & N_{12}(k) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^K n_{ij} \\
 N_{21}(k) &= \sum_{i=k+1}^K \sum_{j=1}^k n_{ij}, & N_{22}(k) &= \sum_{i=k+1}^K \sum_{j=k+1}^K n_{ij}
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

$l = 1, 2$, $m = 1, 2$ ve $k = 1, 2, \dots, K-1$ olmak üzere, gözlenen ve marjinal oranlar Eş. 4.14'te verilen şekilde ifade edilir.

$$p_{lm}(k) = \frac{1}{n} N_{lm}(k), \quad p_{l.}(k) = \frac{1}{n} N_{l.}(k) \quad \text{ve} \quad p_{.m}(k) = \frac{1}{n} N_{.m}(k) \tag{4.14}$$

Eş. 4.14'teki oranlar kullanılarak κ istatistiğini hesaplamak için gereken gözlenen uyum oranı $p_o(k)$ ve beklenen uyum oranı $p_c(k)$ Eş. 4.15'te verilmiştir.

$$\begin{aligned} p_o(k) &= p_{11}(k) + p_{22}(k) , \\ p_c(k) &= p_{1.}(k)p_{.1}(k) + p_{2.}(k)p_{.2}(k) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Eş. 4.15'te verilen gözlenen ve beklenen uyum oranları $K \times K$ boyutlu dağılımdan 2×2 boyuta indirgenmiş dağılımlara ilişkin tüm özel olarak seçilen k kategorileri için hesaplanarak ağırlıklı kapa istatistiğinin tahmini için kullanılacak olan p_o^* ve p_c^* ilişkin oranların bulunması Eş. 4.16'da verilen şekildedir.

$$p_o^* = \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^{K-1} p_o(k) , \quad p_c^* = \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^{K-1} p_c(k) \quad (4.16)$$

Eş. 4.16'da verilen p_o^* ve p_c^* oranları yardımıyla ağırlıklı kapa katsayısının tahmini olan κ istatistiği Eş. 3.2'de verilen şekilde hesaplanır [Vanbelle ve Albert, 2009].

Çizelge 4.6 iki karar vericiye ait dört kategorili bir sınıflandırma sonucunda elde edilen gözlenen frekansları ve doğrusal ağırlıkları göstermektedir. Her hücrede yer alan ilk birim ilgili hücre için gözlenen frekans, ikinci birim ise Eş. 4.5'te verilen şekilde hesaplanan doğrusal ağırlıktır. Karar vericiler hekimleri, kategoriler ise bir hastalığa ilişkin büyüklük derecesini göstermektedir. Birinci kategori “düşük” ve diğer kategoriler sırasıyla “orta”, “yüksek” ve “çok yüksek” dereceyi ifade etmektedir [Gilmour ve ark., 1997].

Çizelge 4.6. İki karar vericiye ait dört kategorili sınıflandırma dağılımı

Karar Verici B	Karar Verici A				Toplam
	1	2	3	4	
1	13 1	2 0,667	0 0,333	0 0	15
2	10 0,667	16 1	3 0,667	0 0,333	29
3	3 0,333	7 0,667	3 1	0 0,667	13
4	1 0	4 0,333	12 0,667	11 1	28
Toplam	27	29	18	11	85

Çizelge 4.6'da verilen örneğe ilişkin $p_{o(w)} = 0,800$, $p_{c(w)} = 0,583$ ve $\kappa_w = 0,520$ olarak hesaplanmıştır. 4x4 boyutlu dağılıma ilişkin 2x2 boyutlu indirgenmiş dağılımlar aşağıda verilen şekilde oluşturulur.

Çizelge 4.7. İndirgenmiş 2x2 boyutlu tüm durumları içeren çizelgeler

Karar Verici B	Karar Verici A			Karar Verici B	Karar Verici A		
	≤ 1	> 1	Toplam		≤ 2	> 2	Toplam
≤ 1	13	2	15	≤ 2	41	3	44
> 1	14	56	70	> 2	15	26	41
Toplam	27	58	85	Toplam	56	29	85

Karar Verici B	Karar Verici A				k		
	≤ 3	> 3	Toplam		1	2	3
≤ 3	57	0	57	Gözlenen Uyum	0,812	0,788	0,800
> 3	17	11	28	Beklenen Uyum	0,618	0,506	0,626
Toplam	74	11	85	Kappa	0,507	0,572	0,465

Çizelge 4.7'de verilen bilgiler kullanılarak p_o^* ve p_c^* şu şekilde hesaplanır.

$$p_o^* = \frac{0,812+0,788+0,800}{3} = 0,800, \quad p_c^* = \frac{0,618+0,506+0,626}{3} = 0,583$$

Görüldüğü üzere hesaplanan p_o^* ve p_c^* oranları p_o ve p_c oranlarına eşittir. O halde bu oranlar kullanılarak hesaplanan κ değerleri yardımıyla κ_w istatistiğine ilişkin bir tahmin olan $\bar{\kappa}$ aşağıda verilen şekilde hesaplanır.

$$\bar{\kappa} = \frac{0,507+0,572+0,465}{3} = 0,515$$

Bu sonuca göre, $\kappa_w = 0,52$ istatistiğine oldukça yakın bir sonuç olan hesaplanan $\bar{\kappa}$ istatistiğinin κ_w istatistiğinin tahmini olarak kullanılması uygundur [Vanbelle ve Albert, 2009].

5. UYGULAMA

Çalışmanın bu bölümünde gerçek veriler kullanılarak ağırlıklı kappa katsayısına ilişkin bir uygulama verilmesi amaçlanmıştır. Öncelikle karar vericiler arasındaki uyum ölçüsü olan ağırlıklı kappa katsayısı eldeki veri kullanılarak hesaplanmış ve bölüm 4.4'te verilen indirgenmiş yöntem ile ağırlıklı kappa katsayısına ilişkin tahmin değeri bulunmuştur.

Yapılacak uygulama için kullanılan veri, dünya çapında ileri gelen kredi derecelendirme kuruluşlarının derecelendirdikleri bankaları içermektedir. Böylece kredi derecelendirme kuruluşlarının ortak sınıflandırma uyumu ölçülecektir. Uygulamada böyle bir alan için seçilmesinin nedeni özellikle geçtiğimiz yıl tüm dünyayı etkileyen ekonomik kriz sonrasında en yüksek kredi notuna sahip olan bankaların iflas açıklayarak batmaları ile kredi derecelendirme kuruluşlarına olan güvenin azalması ve bunun sonucunda bu kuruluşların güvenilirliğinin sorgulanmasıdır.

Kredi derecelendirme kuruluşlarına ve kullandıkları derecelendirme notlarına ilişkin tanımlar ve açıklamalar ilerleyen alt bölümde verilmiştir.

5.1. Kredi Derecelendirme Kuruluşlarına İlişkin Temel Bilgiler

Amerika Birleşik Devletleri'nde (ABD) sermaye piyasaları konusunda düzenleyici otorite olan Sermaye Piyasası Kurulu'nun (Securities and Exchange Commission) 1975 yılında yaptığı düzenleme ile az sayıdaki derecelendirme kuruluşu “ulusal düzeyde kabul görmüş istatistiksel notlandırma kuruluşu” olarak nitelendirilmiştir. Bu düzenlemeden sonra gerçekleşen şirket birleşmeleri ile ortaya çıkan ve bugün halen faaliyet göstermekte olan Standard and Poor's (S&P), Moody's ve Fitch'in kredi derecelendirme sektöründe ön plana çıktığı görülmüştür. Bu üç kuruluşun sunduğu hizmet zamanla ABD sınırlarının ötesine geçerek uluslararası düzeyde referans alınan ve dünyadaki belli başlı bütün kamu ve özel sektör

kuruluşlarının ve bu kuruluşlar tarafından ihraç edilen finansal araçların değerlendirildiği bir düzeye ulaşmıştır [White 2002].

Kredi notu ya da derecelendirme notu, bir derecelendirme kuruluşu tarafından kredi değerliliğinin ölçümüdür. Kredi derecesi en genel tanımı ile bir kuruluşun finansal yükümlülüklerini zamanında yerine getirip getiremeyeceği hakkında verilen bağımsız bir görüştür. Bu görüşün kolay anlaşılır olması için sonuçlar sembollere dönüştürülmüştür. Semboller ise evrensel uygulamaya sahiptir. Yükümlülüklerini zamanında yerine getirme olasılığı en yüksek kuruluşa veya ülkeye verilen not AAA şeklinde belirlenmiştir. Kredi notu AAA'dan BBB derecesine kadar olanlar yatırım yapılabilirliği gösterir daha altı ise yatırımcılar için riskli olarak nitelendirilir. S&P, Fitch ve Moody's kredi derecelendirme kuruluşlarına ilişkin derecelendirme notları Çizelge 5.1'de verilen şekildedir [Jorion, 2001].

Çizelge 5.1. Derecelendirme notlarının gösterimi

	S&P ve Fitch	Moody's
Yatırım Yapılabilir		
En Yüksek Not	AAA	Aaa
Yüksek Not	AA	Aa
Orta-üstü Not	A	A
Orta Not	BBB	Baa
Riskli		
Orta-altı Not	BB	Ba
Spekülatif	B	B
Zayıf	CCC	Caa
Oldukça Spekülatif	CC	Ca
En Düşük Not	C	C

Kredi dereceleri vadelerine göre uzun ya da kısa, türlerine göre ise uluslararası döviz cinsinden ve uluslararası yerel para cinsinden olabilir. Uygulamada kullanılan veride bankaların uzun vadeli ödeme performansları ve USD (Amerikan Doları) cinsinden kredi notları baz alınmıştır. Bu veriler Reuters ekranından alınan Aralık 2009 tarihine ait banka verileridir.

Fitch, S&P ve Moody's derecelendirme kuruluşlarının derecelendirdikleri bankalar gözlem birimleri olmak üzere ikiye ayrılarak birbirlerine olan uyumları ağırlıklı kappa katsayısı kullanılarak ölçülmüştür. Daha sonra ise hesaplanan ağırlıklı kappa istatistiğine ilişkin Vanbelle ve Albert'in (2009) önerdiği 2x2 boyutlu çizelgelere indirgeme yöntemiyle tahmin değeri bulunmuştur.

5.2. Ağırlıklı Kappa Katsayısı Yardımıyla Kredi Derecelendirme Kuruluşlarının Uyumunun Belirlenmesi

Kategoriler olarak Çizelge 5.1'de verilen derecelendirme notları kullanılmıştır. Karar vericiler birinci uygulama için "S&P" ve "Moody's" kredi derecelendirme kuruluşları olarak belirlenmiştir. İki kuruluşun ortak derecelendirdiği 150 adet bankaya ait belirlenen kategorilere göre dağılımı Çizelge 5.2'de gösterilmiştir.

Çizelge 5.2. S&P ve Moody's derecelendirme kuruluşlarına ilişkin dağılım

		Moody's						Toplam
		AAA	AA	A	BBB	BB	B	
S&P	AAA	3	0	0	0	0	0	3
	AA	3	51	2	0	0	0	56
	A	1	21	53	0	0	0	75
	BBB	0	0	1	2	0	0	3
	BB	0	0	0	0	1	11	12
	B	0	0	0	0	0	1	1
	Toplam	7	72	56	2	1	12	150

Toplam altı adet kategori seçilmiştir (AAA, AA, A, BBB, BB, B). B derece notundan daha düşük notlara ilişkin birimler dikkate alınmamıştır. Bu kategorilerin dikkate alınmamasının sebebi uygulamada kullanılan birimlerin bu kategorilerde yer almamasıdır.

Tüm uygulamalar için, derecelendirme kuruluşlarının uyumunun ölçülmesi amacıyla kullanılacak ağırlıklı kappa katsayısı, hem doğrusal hem de karesel ağırlıklar yardımıyla hesaplanmıştır. Eş. 4.5 ve Eş. 4.6'da verilen şekilde

hesaplanan doğrusal ve karesel ağırlıklar Çizelge 5.3.a ve Çizelge 5.3.b'de gösterilmiştir.

Çizelge 5.3.a. Doğrusal ağırlıklar

		Moody's					
		AAA	AA	A	BBB	BB	B
S&P	AAA	1	0,80	0,60	0,40	0,20	0
	AA	0,80	1	0,80	0,60	0,40	0,20
	A	0,60	0,80	1	0,80	0,60	0,40
	BBB	0,40	0,60	0,80	1	0,80	0,60
	BB	0,20	0,40	0,60	0,80	1	0,80
	B	0	0,20	0,40	0,60	0,80	1

Çizelge 5.3.b. Karesel ağırlıklar

		Moody's					
		AAA	AA	A	BBB	BB	B
S&P	AAA	1	0,96	0,84	0,64	0,36	0
	AA	0,96	1	0,96	0,84	0,64	0,36
	A	0,84	0,96	1	0,96	0,84	0,64
	BBB	0,64	0,84	0,96	1	0,96	0,84
	BB	0,36	0,64	0,84	0,96	1	0,96
	B	0	0,36	0,64	0,84	0,96	1

Eş. 3.2 kullanılarak hesaplanan basit kappa katsayısına göre, S&P ve Moody's kredi derecelendirme kuruluşları arasında beklenen uyumun ötesinde gerçekleşen uyum %58,85 olarak ölçülmüştür.

Doğrusal ağırlıklar kullanıldığında Eş. 4.3'te verilen şekilde hesaplanan gözlenen ve beklenen ağırlıklı oranlar sırasıyla 0,947 ve 0,800 olarak bulunmuştur. Karesel ağırlıklar kullanıldığında ise bu oranlar sırasıyla 0,989 ve 0,914 olarak bulunmuştur. İlgili kredi derecelendirme kuruluşları arasındaki beklenen ağırlıklı uyumun ötesinde gerçekleşen ağırlıklı uyum Eş. 4.4 yardımıyla doğrusal ağırlıklar kullanıldığında %73,33, karesel ağırlıklar kullanıldığında ise %86,97 olarak hesaplanmıştır.

İkinci uygulama için karar vericiler “Moody’s” ve “Fitch” kredi derecelendirme kuruluşları olarak belirlenmiştir. İki kuruluşun ortak derecelendirdiği 172 adet bankaya ait belirlenen kategorilere göre dağılımı Çizelge 5.4’te gösterilmiştir.

Çizelge 5.4 Moody’s ve Fitch derecelendirme kuruluşlarına ilişkin dağılım

	Fitch						Toplam
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	
Moody’s	AAA	2	4	1	0	0	7
	AA	0	61	14	0	0	75
	A	0	4	48	7	0	59
	BBB	0	0	2	7	1	10
	BB	0	0	1	0	2	3
	B	0	0	0	0	16	18
	Toplam	2	69	66	14	19	172

Eş. 3.2 kullanılarak hesaplanan basit kappa katsayısına göre, Moody’s ve Fitch kredi derecelendirme kuruluşları arasında beklenen uyumun ötesinde gerçekleşen uyum %57,57 olarak ölçülmüştür.

Önceki uygulamada olduğu gibi hesaplama yapılırken kullanılan ağırlıklar Çizelge 5.3.a ve Çizelge 5.3.b’de verilen şekildedir. Doğrusal ağırlıklar kullanıldığında Eş. 4.3’te verilen şekilde hesaplanan gözlenen ve beklenen ağırlıklı oranlar sırasıyla 0,940 ve 0,763 olarak bulunmuştur. Karesel ağırlıklar kullanıldığında ise bu oranlar sırasıyla 0,987 ve 0,891 olarak bulunmuştur. İlgili kredi derecelendirme kuruluşları arasındaki beklenen ağırlıklı uyumun ötesinde gerçekleşen ağırlıklı uyum Eş. 4.4 yardımıyla doğrusal ağırlıklar kullanıldığında %74,51, karesel ağırlıklar kullanıldığında ise %88,05 olarak hesaplanmıştır.

Üçüncü uygulama için karar vericiler “S&P” ve “Fitch” kredi derecelendirme kuruluşları olarak belirlenmiştir. İki kuruluşun ortak derecelendirdiği 151 adet bankaya ait belirlenen kategorilere göre dağılımı Çizelge 5.5’te gösterilmiştir.

Çizelge 5.5. S&P ve Fitch derecelendirme kuruluşlarına ilişkin dağılım

	Fitch						
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	Toplam
S&P	AAA	2	1	0	0	0	3
	AA	0	52	4	0	0	56
	A	0	18	56	3	0	77
	BBB	0	0	0	3	0	3
	BB	0	0	0	0	11	11
	B	0	0	0	0	1	1
	Toplam	2	71	60	6	11	151

Eş. 3.2 kullanılarak hesaplanan basit kappa katsayısına göre, S&P ve Fitch kredi derecelendirme kuruluşları arasında beklenen uyumun ötesinde gerçekleşen uyum %72,07 olarak ölçülmüştür.

Diğer uygulamalarda olduğu gibi hesaplama yapılırken kullanılan ağırlıklar Çizelge 5.3.a ve Çizelge 5.3.b’de verilen şekildedir. Doğrusal ağırlıklar kullanıldığında Eş. 4.3’te verilen şekilde hesaplanan gözlenen ve beklenen ağırlıklı oranlar sırasıyla 0,966 ve 0,823 olarak bulunmuştur. Karesel ağırlıklar kullanıldığında ise bu oranlar sırasıyla 0,993 ve 0,936 olarak bulunmuştur. İlgili kredi derecelendirme kuruluşları arasındaki beklenen ağırlıklı uyumun ötesinde gerçekleşen ağırlıklı uyum Eş. 4.4 yardımıyla doğrusal ağırlıklar kullanıldığında %80,51, karesel ağırlıklar kullanıldığında ise %89,26 olarak hesaplanmıştır.

Uygulamanın bu bölümüne kadar yapılanlar özetlenecek olursa, ağırlıklı kappa katsayısı tüm derecelendirme kuruluşlarının birbiriyle olan uyumunu ölçmek için hem doğrusal hem de karesel ağırlıklar için hesaplanmıştır. Tüm derecelendirme kuruluşlarının karşılaştırılması sonucunda S&P ve Fitch derecelendirme kuruluşları, hem doğrusal hem de karesel ağırlıklar kullanılarak hesaplanan ağırlıklı kappa katsayısı değerlerine göre en yüksek uyuma sahip iki derecelendirme kuruluşu olarak belirlenmiştir. En düşük uyuma sahip derecelendirme kuruluşları ise hem doğrusal hem de karesel

ağırlıklar kullanılarak hesaplanan ağırlıklı kappa katsayısı değerlerine göre S&P ve Moody's derecelendirme kuruluşlarıdır.

Uyum ölçüsü olarak kullanılan ve uygulamada kabul gören uyum dereceleri göz önünde bulundurulduğunda, sektörün önde gelen üç kredi derecelendirme kuruluşunun beklenen uyumun ötesinde gerçekleşen uyum dereceleri oldukça yüksektir. Buna göre, bu kuruluşlardan herhangi birisinin verdiği kredi notunun geçerliliğine güvenmek yanlış bir yaklaşım olmayacaktır.

5.3. Ağırlıklı Kappa Katsayısının İndirgeme Yöntemiyle Tahmin Edilmesi

Bu bölümde Vanbelle ve Albert (2009) tarafından önerilen doğrusal ağırlıklar kullanıldığında hesaplanan ağırlıklı kappa katsayısının indirgeme yöntemiyle tahmin edilmesine ilişkin uygulama yapılması amaçlanmıştır. Önceki alt bölümde kullanılan veri için tüm ikili kombinasyonlara ilişkin indirgeme yöntemiyle doğrusal ağırlıklar yardımıyla hesaplanan ağırlıklı kappa katsayısı tahmin edilmiştir.

Kredi derecelerinin indirgeme yöntemi kullanılarak birleştirilmesine yönelik uygulamada $k=6$ olduğu için toplamda $k-1=5$ adet dağılım oluşacaktır. Buna göre birleştirme için $k=1$ seçildiğinde AAA derecesi ve bu dereceden küçük olanlar ilk dağılımı oluşturacaktır. Benzer şekilde, $k=2$ seçildiğinde AAA ile AA dereceleri ve bunlardan küçük olanlar ikinci dağılımı oluşturacaktır. Sırasıyla üçüncü, dördüncü ve beşinci dağılımlar ($k=3,4,5$) A, BBB ve BB derecelerine kadar olan yüksek dereceden küçük dereceye doğru olmak üzere birleştirilerek hesaplanır.

Kredi derecelendirme kuruluşlarına ilişkin ağırlıklı kappa katsayısının tahmini için yapılan uygulamada, önceki alt bölümde verilen sıra izlenmiştir. Buna göre ilk olarak tahmin edilecek uyum için kullanılacak kredi derecelendirme kuruluşları Moody's ve S&P'dir. Bu kuruluşlara ilişkin 2x2 boyutlu indirgenmiş

dağılımlar Çizelge 5.6'da verilen şekilde olacaktır.

Çizelge 5.6. S&P ve Moody's kuruluşlarına ilişkin indirgenmiş çizelgeler

Moody's				Moody's			
S&P	≤ 1	> 1	Toplam	S&P	≤ 2	> 2	Toplam
≤ 1	3	0	3	≤ 2	57	2	59
> 1	4	143	147	> 2	22	69	91
Toplam	7	143	150	Toplam	79	71	150

Moody's				Moody's			
S&P	≤ 3	> 3	Toplam	S&P	≤ 4	> 4	Toplam
≤ 3	134	0	134	≤ 4	137	0	137
> 3	1	15	16	> 4	0	13	13
Toplam	135	15	150	Toplam	137	13	150

Moody's				Ağırlıklı İndirgenmiş	
S&P	≤ 5	> 5	Toplam	Gözlenen Uyum	İndirgenmiş
≤ 5	138	11	149	Beklenen Uyum	0,800
> 5	0	1	1	Kappa	0,733
Toplam	138	12	150		0,676

S&P ve Moody's kredi derecelendirme kuruluşlarına ilişkin indirgenmiş 2x2 boyutlu dağılımlardan hesaplanan kappa katsayısı değerleri sırasıyla 0,589, 0,687, 0,964, 1 ve 0,143 olarak elde edilmiştir. Bu değerlerin ortalaması olan ve doğrusal ağırlıklar kullanılarak hesaplanan ağırlıklı kappa katsayısının tahmini olarak kullanılabileceği önerilen uyum tahmini 0,676 gerçekleşen ağırlıklı kappa katsayısı değeri olan 0,733'e yaklaşık bir değer değildir. Bu sonuca göre, Vanbelle ve Albert'in (2009) önerdiği yöntemin S&P ve Moody's derecelendirme kuruluşlarının uyumunun ölçülmesi için doğrusal ağırlıklandırılmış kappa katsayısının tahmini olarak kullanılması uygun olmayacaktır.

İndirgenmiş yöntemle doğrusal ağırlıklandırılmış kappa katsayısının tahmini için ikinci olarak Fitch ve Moody's derecelendirme kuruluşlarına ilişkin uyum ölçülmüştür. Buna göre oluşturulan 2x2 boyutlu indirgenmiş dağılımlar Çizelge 5.7'de verilen şekilde olacaktır.

Çizelge 5.7. Moody's ve Fitch kuruluşlarına ilişkin indirgenmiş çizelgeler

Fitch				Fitch			
Moody's	≤ 1	> 1	Toplam	Moody's	≤ 2	> 2	Toplam
≤ 1	2	5	7	≤ 2	67	15	82
> 1	0	165	165	> 2	4	86	90
Toplam	2	170	172	Toplam	71	101	172

Fitch				Fitch			
Moody's	≤ 3	> 3	Toplam	Moody's	≤ 4	> 4	Toplam
≤ 3	134	7	141	≤ 4	150	1	151
> 3	3	28	31	> 4	1	20	21
Toplam	137	35	172	Toplam	151	21	172

Fitch				Ağırlıklı İndirgenmiş		
Moody's	≤ 5	> 5	Toplam	Gözlenen Uyum	0,940	0,940
≤ 5	154	0	154	Beklenen Uyum	0,763	0,763
> 5	16	2	18	Kappa	0,745	0,631
Toplam	170	2	172			

Fitch ve Moody's kredi derecelendirme kuruluşlarına ilişkin indirgenmiş 2x2 boyutlu dağılımlardan hesaplanan kappa katsayısı değerleri sırasıyla 0,434, 0,777, 0,813, 0,946 ve 0,183 olarak elde edilmiştir. Bu değerlerin ortalaması olan ve doğrusal ağırlıklar kullanılarak hesaplanan ağırlıklı kappa katsayısının tahmini olarak kullanılabileceği önerilen uyum tahmini 0,631 gerçekleşen ağırlıklı kappa katsayısı değeri olan 0,745'e yaklaşık bir değer değildir. Bu sonuca göre, Vanbelle ve Albert'in (2009) önerdiği yöntemin Fitch ve Moody's derecelendirme kuruluşlarının uyumunun ölçülmesi için doğrusal ağırlıklandırılmış kappa katsayısının tahmini olarak kullanılması uygun olmayacaktır.

Son olarak uygulama Fitch ve S&P kuruluşları için yapılmıştır. İndirgenmiş yöntemle doğrusal ağırlıklandırılmış kappa katsayısının tahmini için oluşturulan 2x2 boyutlu indirgenmiş dağılımlar Çizelge 5.8'de verilen şekilde olacaktır.

Çizelge 5.8. S&P ve Fitch kuruluşlarına ilişkin indirgenmiş çizelgeler

Fitch				Fitch			
S&P	≤ 1	> 1	Toplam	S&P	≤ 2	> 2	Toplam
≤ 1	2	1	3	≤ 2	55	4	59
> 1	0	148	148	> 2	18	74	92
Toplam	2	149	151	Toplam	73	78	151

Fitch				Fitch			
S&P	≤ 3	> 3	Toplam	S&P	≤ 4	> 4	Toplam
≤ 3	133	3	136	≤ 4	139	0	139
> 3	0	15	15	> 4	0	12	12
Toplam	133	18	151	Toplam	139	12	151

Fitch				Ağırlıklı İndirgenmiş	
S&P	≤ 5	> 5	Toplam	Gözlenen Uyum	0,966
≤ 5	150	0	150	Beklenen Uyum	0,823
> 5	0	1	1	Kappa	0,805
Toplam	150	1	151		0,880

Fitch ve S&P kredi derecelendirme kuruluşlarına ilişkin indirgenmiş 2x2 boyutlu dağılımlardan hesaplanan kappa katsayısı değerleri sırasıyla 0,797, 0,706, 0,898, 1 ve 1 olarak elde edilmiştir. Bu değerlerin ortalaması olan ve doğrusal ağırlıklar kullanılarak hesaplanan ağırlıklı kappa katsayısının tahmini olarak kullanılabileceği önerilen uyum tahmini 0,880 gerçekleşen ağırlıklı kappa katsayısı değeri olan 0,805'e yaklaşık bir değer değildir. Bu sonuca göre, Vanbelle ve Albert'in (2009) önerdiği yöntemin Fitch ve S&P derecelendirme kuruluşlarının uyumunun ölçülmesi için doğrusal ağırlıklandırılmış kappa katsayısının tahmini olarak kullanılması uygun değildir.

Sonuç olarak, indirgeme yöntemiyle hesaplanan gözlenen ve beklenen uyum oranları, doğrusal ağırlıklar kullanılarak hesaplanan ağırlıklı gözlenen ve beklenen uyuma eşit olarak bulunsa da, hesaplanan ağırlıklı kappa katsayısının tahmininin her zaman, özellikle karar vericiler arasında beklenenin ötesinde mükemmel uyum olarak değerlendirilen şekilde uyum olduğunda, gerçekleşen ağırlıklı kappa katsayısının yerine kullanılması uygun değildir. Buna göre Vanbelle ve Albert (2009) tarafından önerilen

indirgeme yöntemiyle ağırlıklı kappa katsayısının tahmini Eş. 4.5'te verilen doğrusal ağırlıklar kullanılarak hesaplanan κ_w istatistiğinin yerine kullanılması her durum için kesin ve doğru bir yaklaşım olmayacaktır.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmanın birinci bölümünde karar vericilerin yaptıkları sınıflandırmalar sonucunda aralarında meydana gelen gerçekleşen uyum hakkında bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde ise karar vericilerin arasında oluşan ilişki ve uyum arasındaki farklılık açıklanmıştır. Bu kapsamda uyum ölçüsü tanımı yapılarak bu amaca yönelik olarak yapılan ilk çalışmalardan bahsedilmiştir. Uyum ölçüsü hesaplanırken kullanılan ilk yöntemler karşılaştırılarak yapılan ölçümlerin eksiklerine örneklerle değinilmiştir.

Üçüncü bölümde Cohen (1960) tarafından önerilen ve karar vericiler arasındaki uyum ölçüsü olarak sıkça kullanılan kappa katsayısına ilişkin temel bilgiler örneklerle açıklanmıştır. Ayrıca κ 'ya ilişkin farklı amaçlara yönelik olarak hipotez testlerinin nasıl yapılacağı örnekler yardımıyla anlatılmış ve güven sınırlarının oluşturulmasına ilişkin bilgiler verilmiştir.

Dördüncü bölümde Cohen (1968) tarafından tanımlanan ve κ istatistiğinin genişletilmiş biçimi olan ağırlıklı kappa katsayısı açıklanmıştır. κ_w istatistiğine neden ihtiyaç olduğu ve hangi durumlarda κ istatistiğine üstünlük sağladığına ilişkin temel bilgiler örneklerle birlikte verilmiştir. Buna ek olarak, κ_w istatistiğine ilişkin hipotez testi yapılması ve güven aralığı sınırlarının belirlenmesine ilişkin açıklamalar yapılmıştır. Daha sonra ise Vanbelle ve Albert (2009) tarafından verilen ve doğrusal ağırlıklar kullanıldığı durumda κ_w istatistiğine ilişkin tahmin olarak kullanılabileceği önerilen yöntem anlatılmıştır.

Beşinci bölümde ağırlıklı kappa katsayısına ilişkin gerçek veriler kullanılarak uygulama yapılmıştır. Sektörde dünya çapında lider olarak kabul edilen üç kredi derecelendirme kuruluşunun derecelendirdikleri bankalara göre kendi

aralarındaki uyumları κ_w istatistiği kullanılmak suretiyle ölçülmüştür. Buna ek olarak, Vanbelle ve Albert (2009) tarafından önerilen indirgeme yöntemiyle κ_w istatistiğinin tahmini aynı veriler kullanılarak hesaplanmıştır.

Sonuç olarak, κ istatistiği yalnızca iki düzeyi bulunan durumlar için karar vericilerin yaptıkları ortak sınıflandırma uyumunu ölçmek için kullanılması uygun olan ve literatüre girdiği günden bu yana genellikle tıp bilimlerinde bir hastalığa ilişkin tanı çalışmalarında hekimlerin uyumunun ölçülmesi amacıyla sıkça kullanılan bir yöntemdir. Ancak düzey sayısı arttığı ve özellikle düzeyler arasında gerçekleşen uyumsuzlukların önem derecesinin birbirine eşit olmadığı durumlarda bu istatistiğinin genişletilmiş versiyonu olan κ_w istatistiğinin kullanılması daha uygun olmaktadır. Günümüzde hala etkilerini hissettiğimiz ve geçen yıl tüm dünyayı etkileyen küresel ekonomik krize sebep olan, kredi derecelendirme kuruluşları tarafından en yüksek kredi notlarına sahip olmalarına rağmen iflas eden bankalardan yola çıkılarak, kredi derecelendirme kuruluşlarına olan güvenin sorgulandığı göz önünde bulundurularak, bu kuruluşların birbirlerine olan uyumlarının ölçülmesi amaçlanmıştır. Ağırlıklı kappa katsayısı kredi derecelendirme kuruluşlarının uyumunun ölçülmesi amacıyla kullanılmıştır.

Kredi derecelendirme kuruluşlarının derecelendirdikleri bankalara ilişkin veriyi kullanarak uyum yönünden ikili karşılaştırmaları sonucunda ulaşılan uyum büyüklükleri uygulamada kabul görmüş yüksek uyum değerlerine karşı gelmektedir. Böylece yapılan uygulama sonucuna göre, kredi derecelendirme kuruluşlarının verdikleri kredi derecelerinin kullanılabilir olduğu başka bir deyişle bu kuruluşların uyumlu olduğu ifade edilir.

Tüm kredi derecelendirme kuruluşları birbiriyle yüksek uyuma sahip olmakla birlikte, S&P ve Fitch kredi derecelendirme kuruluşlarının ortak derecelendirme uyumları en fazla iken, S&P ve Moody's kredi derecelendirme kuruluşlarının ortak derecelendirme uyumları en az olarak hesaplanmıştır. Ayrıca kredi derecelendirme kuruluşlarının derecelendirdikleri

bankalara ilişkin veriler kullanılarak, Vanbelle ve Albert (2009) tarafından önerilen yöntem ile doğrusal ağırlıklar kullanıldığı durumda ağırlıklı kappa katsayısının tahmin edilmesinin, bu kuruluşların ortak sınıflandırma uyumunun ölçülmesi amacıyla yapılan örnek ile benzer sonuçlar vermeyeceği gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

Armitage, P. ve Berry, G., "Further analysis of categorical data", Statistical method in medical research 3rd edition, **Blackwell Science**, Great Britain, 443-447 (1994).

Banerjee, M., Capozzoli, M., McSweeney, L., ve Sinha, D., "Beyond kappa: a review of interrater agreement measures", **The Can. Journal of Statistics**, 27: 3-23 (1999).

Ben-David, A., "Comparison of classification accuracy using Cohen's weighted kappa", **Expert Systems With Applications**, 34: 825-832 (2008).

Cohen, J., "A coefficient of agreement for nominal scales", **Educ. and Psychol. Measurement**, 20: 37-46 (1960).

Cohen, J., "Weighted κ : nominal scale agreement with provision for scaled disagreement or partial credit", **Psychological Bulletin**, 70: 213-220 (1968).

Fleiss, J. L., Cohen, J. ve Everitt, B. S., "Large sample standard errors of kappa and weighted kappa", **Psychological Bulletin**, 72: 323-327 (1969).

Fleiss, J. L., Levin, B. ve Paik, M. C., "The measurement of interrater agreement", Statistical Methods for Rates and Proportions 3rd ed., **John Wiley & Sons. Inc.**, New-Jersey, 598-610 (2003).

Gilmour, E., Ellerbrock, T., Koulos, J., Chiasson, M., Williamson, J., Kubn, L., Wright, T.J., "Measuring cervical ectopy: direct visual assessment versus computerized planimetry", **Amer. Jour. of Obstet. and Gynecology** 176: 108-111 (1997).

Goodman, L. A., ve Kruskal, W. H., "Measures of association for cross classifications", **Journal of the Amer. Statistical Association**, 49: 732-764 (1954).

Jorion, P., "Measuring actuarial default risk", Financial Risk Manager Handbook 2nd ed., **John Wiley & Sons. Inc.**, New-Jersey, 411-416 (2001).

Koçak, A., "Kappa katsayısı üzerine bir uygulama", Yüksek Lisans Tezi, **Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**, Ankara, 4-10 (2005).

Landis, J. R., ve Koch, G. G., "The measurement of observer agreement for categorical data", **Biometrics**, 33: 159-174 (1977).

Scott, W., A., "Reliability of content analysis: the case of nominal scale coding", **Public Opinion Quarterly**, 19: 321-325 (1955).

Şenocak, M., “Tarama ve tanı testlerinde değerlendirme”, Özel Biyoistatistik Epidemiyolojide Sayısal Çözümleme, **Çağlayan Kitabevi**, İstanbul, 168-170 (1992).

Vanbelle, S. ve Albert, A., “A note on the linearly weighted kappa coefficient for ordinal scales”, **Statistical Methodology**, 6: 157-163 (2009).

White, L. J., “The credit rating industry: an industrial organization analysis”, Ratings Rating Agencies and the Global Financial System 1st ed., **Kluwer Academic Publishers**, New-York, 41-65 (2002).

EKLER

EK-1. Gözlenen uyum oranlarının ($p_o^* = p_o$) eşitliğinin gösterilmesi

Eş. (4.16)'da verilen p_o^* gözlenen uyum oranının $K \times K$ boyutlu sınıflandırma dağılımından hesaplanan p_o gözlenen uyum oranına eşit olduğu aşağıda verilen şekilde gösterilir.

$$\begin{aligned}
 p_o^* &= \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^{K-1} \left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k p_{ij} + \sum_{i=k+1}^K \sum_{j=k+1}^K p_{ij} \right) \\
 &= \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^{K-1} \left(\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K p_{ij} - \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^K p_{ij} - \sum_{i=k+1}^K \sum_{j=1}^k p_{ij} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K p_{ij} - \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^{K-1} \left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^K p_{ij} + \sum_{i=k+1}^K \sum_{j=1}^k p_{ij} \right)
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 p_o &= \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \left(1 - \frac{|i-j|}{K-1} \right) p_{ij} = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K p_{ij} - \frac{1}{K-1} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K |i-j| p_{ij} \\
 &= \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K p_{ij} - \frac{1}{K-1} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^i (i-j) p_{ij} - \frac{1}{K-1} \sum_{i=1}^{K-1} \sum_{j=i+1}^K (j-i) p_{ij}
 \end{aligned}$$

$p_o^* = p_o$ göstermek için,

$$\sum_{k=1}^{K-1} \left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^K p_{ij} + \sum_{i=k+1}^K \sum_{j=1}^k p_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{K-1} \sum_{j=i+1}^K (j-i) p_{ij} + \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^i (i-j) p_{ij}$$

olduğunu ispatlamak yeterli olur. Buna göre,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{K-1} \left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^K p_{ij} + \sum_{i=k+1}^K \sum_{j=1}^k p_{ij} \right) &= \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^K p_{ij} + \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{i=k+1}^K \sum_{j=1}^k p_{ij} \\
 &= \sum_{i=1}^1 \sum_{j=2}^K p_{ij} + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=3}^K p_{ij} + \cdots + \sum_{i=1}^{K-1} \sum_{j=K}^K p_{ij} + \sum_{i=2}^K \sum_{j=1}^1 p_{ij} + \sum_{i=3}^K \sum_{j=1}^2 p_{ij} + \cdots + \sum_{i=K}^K \sum_{j=1}^{K-1} p_{ij}
 \end{aligned}$$

EK-1. (Devam) Gözlenen uyum oranlarının ($p_o^* = p_o$) eşitliğinin gösterilmesi

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^1 \sum_{j=2}^K p_{ij} + \sum_{i=1}^1 \sum_{j=3}^K p_{ij} + \sum_{i=2}^2 \sum_{j=3}^K p_{ij} + \cdots + \sum_{i=1}^1 \sum_{j=k}^K p_{ij} + \sum_{i=2}^{K-1} \sum_{j=K}^K p_{ij} \\
&+ \sum_{i=K}^K \sum_{j=1}^1 p_{ij} + \sum_{i=2}^{K-1} \sum_{j=1}^1 p_{ij} + \sum_{i=K}^K \sum_{j=1}^2 p_{ij} + \sum_{i=3}^{K-1} \sum_{j=1}^2 p_{ij} + \cdots + \sum_{i=K}^K \sum_{j=1}^{K-1} p_{ij} \\
&= \sum_{j=2}^K (j-1)p_{1j} + \sum_{i=2}^2 \sum_{j=3}^K p_{ij} + \cdots + \sum_{i=2}^{K-1} \sum_{j=K}^K p_{ij} + \sum_{j=1}^{K-1} (K-j)p_{Kj} + \sum_{i=2}^{K-1} \sum_{j=1}^1 p_{ij} + \cdots + \sum_{i=3}^{K-1} \sum_{j=1}^2 p_{ij} \\
&= \sum_{j=2}^K (j-1)p_{1j} + \sum_{j=3}^K (j-2)p_{2j} + \cdots + \sum_{j=K}^K (j-(K-1))p_{K-1j} \\
&+ \sum_{j=1}^{K-1} (K-j)p_{Kj} + \sum_{j=1}^{K-2} (K-1-j)p_{K-1j} + \cdots + \sum_{j=1}^{K-(K-1)} (K-(K-1)-j)p_{K-(K-1)j} \\
&= \sum_{i=1}^{K-1} \sum_{j=i+1}^K (j-i)p_{ij} + \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^i (i-j)p_{ij}
\end{aligned}$$

Böylece $p_o^* = p_o$ eşitliği gösterilmiş olur. $p_c^* = p_c$ eşitliği de benzer şekilde gösterilir.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ÖZDİLER, Mustafa Mert
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri: 05.03.1984 Ankara
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0 (312) 428 43 63
e-mail : mertozdiler@yahoo.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi / İstatistik Bölümü	2010
Lisans	Gazi Üniversitesi / İstatistik Bölümü	2006
Lise	Ankara Anadolu Lisesi	2002

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2008 -	T.C. Ziraat Bankası A.Ş.	Risk Analist Yrd.

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Tango, Bilgi Teknolojileri, Seyahat etmek, Tiyatro, Sinema