

**BİR BOYUTLU TERS SAÇILMA PROBLEMLERİNDE C ÖZELLİĞİ
VE I-FONKSİYONU**

Hüseyin ENGÜR

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**EYLÜL 2009
ANKARA**

Hüseyin ENGÜR tarafından hazırlanan BİR BOYUTLU TERS SAÇILMA PROBLEMLERİNDE C ÖZELLİĞİ VE I -FONKSİYONU adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Adil MISIR
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Fatma AYAZ
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Adil MISIR
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Devrim ÇAKMAK
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Tarih: 24 / 09 / 2009

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nail ÜNSAL
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Hüseyin ENGÜR

**BİR BOYUTLU TERS SAÇILMA PROBLEMLERİNDE C ÖZELLİĞİ VE I-
FONKSİYONU**
(Yüksek Lisans Tezi)

Hüseyin ENGÜR

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Eylül 2009

ÖZET

Bu çalışmada bir boyutlu saçılma problemleri için C özelliğini ve I-fonksiyonu incelendi. İlk olarak bazı koşullar altında $-u'' + q(x)u = k^2u$ Sturm-Liouville diferensiyel denklemi için saçılma verileri oluşturuldu. Sonra bu problemin çözümlerinin tamlığını veren C özelliğini tanımlanarak incelendi. Daha sonra inversiyon prosedürlerinde ve $q(x)$ potansiyelini bulmada kullanışlı olan ve empedans fonksiyonu olarak bilinen I-fonksiyonu tanımlandı. Son olarak Marchenko ve Gelfand-Levitan inversiyon prosedürleri ve uygulamalarına kısaca göz atıldı.

Bilim kodu : 204.1.138
Anahtar Kelimeler : C Özelliği, I-Fonksiyonu, Saçılım Verisi
Sayfa Adedi : 99
Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Adil MISIR

**PROPERTY C AND THE I-FUNCTION OF THE ONE DIMENSIONAL
INVERSE SCATTERING PROBLEMS**

(M.Sc.Thesis)

Hüseyin ENGÜR

**GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

September 2009

ABSTRACT

In this work we investigate the property C and the I-function of the one dimensional inverse scattering problem. First we constitute scattering data for $-u'' + q(x)u = k^2u$ Sturm-Liouville differential equation under some initial conditions. After that we define and investigate the property C which gives the completeness feature for the solutions of the above initial value problem for Sturm-Liouville differential equation. Then we introduce the I-function which is known impedance function and the I-function is useful for inversion procedures and to find the potential function $q(x)$. Finally we glance at Marchenko and Gelfand-Levitan inversion procedure and their applications.

Science Code : 204.1.138

Key Words : Property C, I-function, Scattering Data.

Page Number : 99

Adviser : Assistant Professor Adil MISIR

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, kıymetli tecrübelerini benden esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Adil MISIR' a, ayrıca beni attığım her adımda destekleyen ve yalnız bırakmayan eşime teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	4
2.1. Giriş.....	4
2.2. Bir Boyutlu Saçılma Problemlerine Giriş.....	15
2.3. Jost Çözümleri	25
3. ADİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN C ÖZELLİĞİ	36
3.1. C_φ ve C_θ Özellikleri	42
4. VERİ OLARAK I -FONKSİYONLU TERS PROBLEM.....	56
4.1. Teklik Teoremi.....	56
4.2. I -fonksiyonunun Karakterizasyonu.....	70
4.3. İnversiyon Prosedürleri	75
4.4. $I(k)$ 'nin Özellikleri	75
5. SONUÇ	95
KAYNAKLAR.....	96
ÖZGEÇMİŞ.....	99

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
A^*	A operatörünün adjointi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar cümlesi
$D(A)$	A operatörünün tanım kümesi
H	Hilbert uzayı
$L_2(0, \infty)$	$\{f: \int_0^\infty f(x) ^2 dx < \infty\}$ cümlesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar cümlesi
$R_\lambda(A)$	A operatörünün rezolventi
$o(1)$	Landau sembolü (Sıfıra çok yakın değerler)
$O(1)$	Landau sembolü (Sınırlı değerler)
$W^{m,2}$	Sobolev uzayı
$W[f, g]$	f ve g çözümlerinin Wronskiyeni
$\rho(A)$	A operatörünün rezolvent cümlesi
$\sigma(A)$	$\mathbb{C} \setminus \rho(A)$, yani A operatörünün spektrumu
$\sigma_c(A)$	A operatörünün sürekli spektrumu
$\sigma_d(A)$	A operatörünün diskret spektrumu
$\sigma_r(A)$	A operatörünün rezidü spektrumu
$\sigma_{ss}(A)$	A operatörünün spektral tekiliği

1.GİRİŞ

Direkt saçılma problemleri üzerine birçok çalışma yapılmış olmasına rağmen, ters saçılma problemleri üzerine sadece son zamanlarda çalışılmaya başlanmıştır. Bunun sebebi ters saçılma problemlerinin lineer olmayan yapısı ve nümerik çözümlere uygun olmamasıdır. Özellikle herhangi bir normda uzak alan modelinin küçük salınımları, uzak alan modelinin sınıfı dışında bir fonksiyonla sonuçlanır ve düzenleme metotları uygulanmadığı takdirde ölçülen bilgidaki küçük varyasyonlar, saçıcının yeniden oluşturulmasında büyük hatalara yol açabilir. Buna rağmen ters saçılma problemlerinin, radar, sonar, jeofiziksel keşif ve tıbbi görüntüleme alanlarında önemli bir rolü vardır [24].

Ters saçılma problemlerinin temeli spektral analizin ters problemlerine dayanmaktadır ve spektral analizin ters problemleri bir lineer diferansiyel operatörün bazı spektral özelliklerine göre bu operatörün şeklinin belirlenmesi problemlerine denir. Ters saçılma problemleri, matematiksel fiziğin lineer olmayan denklemlerinin çözülmesi için yeni bir yöntem oluşturmaktadır. Spektral teoride önemli gelişmeler bir boyutlu Schrödinger operatörü adını da alan

$$ly := -y'' + q(x)y$$

Sturm-Liouville operatörü için elde edilmiştir. Böyle operatörler için spektral teori üzerine yapılan ilk çalışmalar D.Bernoulli, J.D.d’Alambert, L.Euler, J.Liouville ve Ch.Sturm tarafından çubuğun titreşimleri problemi için yapılmıştır [9]. Ters saçılma probleminin çözümü için ilk çabalar ise problemi birinci mertebeden lineer bir integral denkleme dönüştürme yoluyla kolaylaştırma şeklinde yapılmıştır. Bu şekilde probleme çözüm aramanın, ters saçılma probleminin lineer olmayan yapısını görmemek gibi kusurları vardır. Daha sonraları ters saçılma probleminin lineer olmayan ve bozuk yapısını dikkate alan çeşitli metotlar geliştirilmiştir [21].

Spektral teoremin ters problemleri ile ilgili temel sonuçlar XX. yüzyılın ikinci yarısında elde edilmiştir [8].

Sturm- Liouville denklemi için yarı eksende ters saçılma problemini çözmek için ilk çabalar Hulleras tarafından gösterilmiştir. Daha sonra Bargman göstermiştir ki Sturm-Liouville denkleminin potansiyeli, özdeğerler ve saçılma fonksiyonuna göre bire-bir belirlenmemektedir. Levinson, özel bir hal olan özdeğerlerin mevcut olmaması halinde potansiyelin bire-bir olarak belirlenebileceğini ispatladı. Marchenko, genel halde bire-bir olarak belirlenmemenin sebebini açıkladı. O Sturm-Liouville operatörünün saçılma verilerine göre bire-bir belirleneceğini ispatladı. Bu çalışmada Marchenko, yeni bir yöntem olan dönüşüm operatörleri yöntemini uyguladı ve bu yöntem ters problemler teorisinin bundan sonra ki gelişiminde çok büyük katkılarda bulundu. Sturm-Liouville operatörleri için dönüşüm operatörleri Povzner tarafından belirlenmiştir. Gelfand-Levitan, dönüşüm operatörleri yardımı ile Sturm-Liouville operatörü için spektral fonksiyona göre ters problemi çözdükten sonra dönüşüm operatörleri spektral teoride daha fazla önem taşımaya başladı. Marchenko, ters problemler teorisinde bir sonraki önemli adımı attı. O, Levitan tarafından bulunan sonsuzluğa bağlı dönüşüm operatörlerini uygulayarak saçılma verilerine göre potansiyelin doğrudan belirlenmesi yolunu buldu. Bu arada Krein, Sturm-Liouville operatörleri için ters problemin çözümünün bir başka yöntemini geliştirdi. Marchenko'nun çalışmalarından sonra Faddev 1964 yılında Sturm-Liouville denklemi için tüm eksende ters problemi çözmüştür. Bu çalışma 1967 yılında Kruskal ve Miure tarafından kullanılarak, dikkörtgensel bir kanalda uzun dalgaları belirleyen, Korteveg-de Vries (KdV) denklemi adını alan, lineer olmayan denklemin çözülmesine sebep olmuştur. Ters problemler teorisinde, Gelfand-Levitan ve Marchenko yöntemi ismini alan dönüşüm operatörleri, kendine eş Sturm-Liouville operatörü ile ilgili ters problemlerde olduğu gibi kendine eş olmayan ters problemlerin belli kısmına da başarıyla uygulanabilmektedir. Kendine eş olmayan Sturm-Liouville operatörü için ilk ters problem, Lyantse tarafından incelenmiştir [9].

Ters saçılma probleminin tekliğindeki ilk sonuçları Schiffer [4] vermiştir ve son zamanlarda Nachmann [5], Novikov [6] ve Ramm [7] tarafından ele alınmıştır [24].

Ramm, diferensiyel denklemler için tamlığı veren C özelliğinin, Sturm- Liouville denklemi için sağlandığı üzerine çalışmıştır. Fonksiyonel analizdeki tamlık

tanımından hareketle elde edilen C özelliklerinin ters saçılma problemlerindeki teklik ispatlarında kullanılışlılığını veren çalışmalar yapmıştır [1, 3, 10].

Ayrıca Ramm, spektral fonksiyon ve saçılım verisinden hareketle q potansiyelinin bulunmasını sağlayan Marchenko ve Gelfand-Levitan denklemlerinde, spektral fonksiyon ve saçılım verisinin bulunmasında alternatif olabilecek olan I -fonksiyonunu ele almıştır. Empedans fonksiyonu olarak bilinen I -fonksiyonunun karakterizasyonunu vererek nasıl kullanılabileceğini göstermiştir [1, 2, 10, 25, 26].

Bu tezde esas olarak, bir boyutlu saçılma problemleri için Ramm tarafından [1]'de ele alınan C özelliği ve I -fonksiyonu incelenecektir. Sturm-Liouville denklemi ele alınarak bu denklemin bazı koşullar altında elde edilen çözümlerine karşılık gelen saçılım verileri oluşturulacaktır. Sturm-Liouville denkleminde elde edilen çözümlerin tamlığını veren C özellikleri ortaya koyularak, bu denklem için sağlandığı ispatlanmaya çalışılacaktır. q potansiyellerinin tekliklerinin ispatı gibi teklik ispatlarında nasıl kullanıldığı gösterilmeye çalışılacaktır. İnversiyon prosedürlerinde kullanılabilen, $q(x)$ potansiyel fonksiyonunu bulmada çok kullanışlı olan ve empedans fonksiyonu olarak bilinen I -fonksiyonu incelenecektir. Tezin ikinci bölümünde konu ile ilgili gerekli olan temel tanım ve teoremler özetlenecektir. Ters saçılma problemlerine bir giriş yapılarak gerekli veriler düzenlenecektir. Üçüncü bölümde C özellikleri tanımlanarak bunların Sturm-Liouville denkleminde sağlandığı gösterilecektir. Dördüncü bölümde I -fonksiyonu incelenecek, Marchenko ve Gelfand-Levitan denklemleri için I -fonksiyonunun nasıl kullanıldığı ile ilgili örnek yapılacaktır.

2.TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde spektral analiz ve ters saçılma problemlerinin temel tanımları ve önemli teoremleri verildikten sonra Sturm-Liouville diferensiyel denkleminin bazı koşullar altındaki çözümleri için saçılma verileri toparlanacaktır.

2.1.Giriş

2.1.Tanım ($L_2[a, b]$ uzayı)

Aşağıdaki şekilde tanımlanan uzaya $L_2[a, b]$ uzayı denir.

$$L_2[a, b] = \{x|x: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \int_a^b |x(t)|^2 dt < \infty\}$$

Bu uzay üzerindeki iç çarpım fonksiyonu

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

şeklinde tanımlıdır. Eğer $f(x)$ ve $g(x)$ reel değerli fonksiyonlar ise iç çarpım

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

şeklinde tanımlanır [9].

2.2.Tanım (L operatörü)

$\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ olmak üzere $x \in \mathbb{R}_+$ için $L_2(\mathbb{R}_+)$ uzayında tanımlı $l(u) = -u'' + q(x)u$ diferensiyel ifadesi ve $u(0) = 0$ koşulu yardımıyla üretilen operatör L ile gösterilir. Burada q kompleks değerli bir fonksiyondur ve potansiyel fonksiyonu olarak adlandırılır.

Özel olarak $L_2[0, \infty)$ uzayında $-u'' + q(x)u = k^2u$, $x \in \mathbb{R}_+$ denklemi ve $u(0) = 0$ sınır koşulu yardımıyla üretilen operatörü l_0 ile göstereceğiz.

2.3.Tanım (Özdeğer ve özfonksiyon)

$A \in L(X)$ ve $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ için $(A - \lambda_0 I)x = 0$ denkleminin $x = 0$ aşıkâr çözümünden başka $x \neq 0$ çözümü bulunursa, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ sayısına A operatörünün özdeğeri (eigendeğeri), bu denklemin her bir $x \neq 0$ çözümüne ise A operatörünün λ_0 özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu (eigenfonksiyonu) denir [20].

2.4.Tanım (O ve o sembolleri)

$f(x)$ ve $g(x)$ reel sayıların bir altkümesi üzerinde tanımlı fonksiyonlar olsunlar.

i) $f(x) = O(g(x))$, $x \rightarrow \infty \Leftrightarrow$ bir x_0 reel sayısı ve bir M pozitif sayısı bulunabilir ki $\forall x > x_0$ için $|f(x)| \leq M|g(x)|$ sağlanır.

$f(x) = O(g(x))$, $x \rightarrow a \Leftrightarrow$ bir $\delta > 0$ ve $M > 0$ sayısı vardır ki $|x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x)| \leq M|g(x)|$ sağlanır.

Eğer $x = a$ 'nın bir komşuluğunda $g(x)$ sıfırdan farklı ise bu iki tanım limitsüperiyor ile birleştirilebilir şöyleki:

$$f(x) = O(g(x)), x \rightarrow a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \sup \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty$$

ii) Eğer $\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \rightarrow 0$ ise $f(x) \in o(g(x))$ yada $f(x) = o(|g(x)|)$ olarak yazılır.

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \forall C > 0$ sayısı için bir $k > 0$ sayısı vardır öyleki her $x \geq k$ için $0 \leq f(x) < Cg(x)$ sağlanır.

Özetle $\phi(n)$ ve $\phi(x)$ pozitif tanımlı fonksiyonlar, $f(n)$ ve $f(x)$ keyfi fonksiyonlar, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$i) f = O(\phi) \Leftrightarrow \text{bir } A \geq 0 \text{ için } \forall x, n \text{ için } |f| < A\phi$$

$$ii) f = o(\phi) \Leftrightarrow \frac{f}{\phi} \rightarrow 0$$

dır.

O ve o sembollerine Landau veya Bachmann-Landau sembolleri denir.

2.5.Tanım (Analitik fonksiyon, Tam fonksiyon)

Bir $f(z)$ kompleks değerli fonksiyonu kompleks düzlemin keyfi bir z_0 noktasının bir δ komşuluğunun tüm noktalarında türevlenebilirse $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir. Ayrıca $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin tüm noktalarında analitik ise $f(z)$ 'ye tam fonksiyon denir [9].

2.6.Tanım (Tam uzay ve tamlık)

(X, d) metrik uzayında her Cauchy dizisi bu uzayda yakınsak ise, (X, d) metrik uzayına tamdır denir.

2.7.Tanım (Hilbert uzayı)

x, y, z elemanlarından oluşan herhangi bir küme H olsun ve aşağıdaki aksiyomları sağlasın.

1. H lineer kompleks uzay

2. H 'nin her x, y ikili elemanına karşılık gelen $\langle x, y \rangle$ kompleks sayısı için

a) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

b) $x, y \in H$ için $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$

c) Her λ kompleks sayısı için $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

d) $\langle x, x \rangle \geq 0$; $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $(\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle})$

3. $d(x, y) = \|x - y\|$ metriği anlamında H tamdır.

4. Her n doğal sayısı için H 'de n sayıda lineer bağımsız eleman vardır. Yani H sonsuz boyutludur.

Yukarıdaki 1-4 şartlarını sağlayan uzaya soyut Hilbert uzayı, 1-3 şartlarını sağlayan uzaya ise üniter Hilbert uzayı denir [9].

2.8.Tanım (Simetrik operatör, Self adjoint operatör, Non-self adjoint operatör)

H bir Hilbert uzayı ve $\overline{D(A)} = H$ olmak üzere, $\forall x, y \in D(A)$ için

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$$

eşitliği sağlanıyorsa A operatörüne simetrik operatör denir. A simetrik operatörü için $A^* = A$ ise A operatörüne self adjoint operatör denir. Bu şartı sağlamıyorsa, A operatörüne non-self adjoint operatör adı verilir. Burada $\overline{D(A)}$ ile $D(A)$ kümesinin kapanışı, A^* ile A operatörünün adjoint operatörü gösterilmiştir [20].

2.9.Tanım (Rezolvent operatör, Rezolvent cümlesi)

$A \in L(X)$ ve H bir Hilbert uzayı olmak üzere $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ operatörüne rezolvent operatör denir ve

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: R_\lambda(A) \text{ var ve sınırlı, } \overline{D(R_\lambda(A))} = H\}$$

cümlesine A operatörünün rezolvent cümlesi denir [20].

2.10.Tanım (Spektrum)

$A \in L(X)$ olmak üzere

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

kümesine A operatörünün spektrumu denir [19].

2.11.Tanım (Kalan (rezidü) spektrum)

$A \in L(X)$ ve H bir Hilbert uzayı olmak üzere

$$\sigma_r(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}: R_\lambda(A) \text{ var ve sınırlı, } \overline{D(R_\lambda(A))} \neq H\}$$

cümlesine A operatörünün kalan (rezidü) spektrumu denir [19].

2.12.Tanım (Diskret spektrum)

$A \in L(X)$ olmak üzere

$$\sigma_d(A) = \{\lambda: \lambda \in \mathbb{C} \text{ için } R_\lambda(A) \text{ mevcut değil}\}$$

cümlesine A operatörünün diskret spektrumu denir [22].

2.13.Tanım (Sürekli spektrum)

$A \in L(X)$ ve H bir Hilbert uzayı olmak üzere

$$\sigma_c(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}: R_\lambda(A) \text{ var ve sınırsız}, \overline{D(R_\lambda(A))} = H\}$$

cümlesine A operatörünün sürekli spektrumu denir [20].

Yukarıdaki tanımlardan $Ax = \lambda x$ denkleminin yalnızca $x = 0$ çözümünün var olması halinde λ sayılarının A operatörünün rezolvent cümlesine ait olduğu açıktır. Bu denklemin $x \neq 0$ çözümünün var olması halinde bunlara karşılık gelen λ 'lar A operatörünün diskret spektrumuna aittir [22].

2.1. Teorem

f ve φ , L operatörüne karşılık gelen çözüm fonksiyonları olsun. Jost çözümleri olarak adlandırılan $f(\lambda) := f(0, \lambda)$ ve $\varphi(\lambda) := \varphi(0, \lambda)$ olmak üzere

$$\rho_1 := \{\lambda: \lambda \in \mathbb{C}_+, f(\lambda) \neq 0\}$$

$$\rho_2 := \{\lambda: \lambda \in \mathbb{C}_-, \varphi(\lambda) \neq 0\}$$

ve

$$\rho(L(\lambda)) := \rho_1(\lambda) \cup \rho_2(\lambda)$$

olarak tanımlansın.

$\lambda \in \rho(L(\lambda))$ için $L(\lambda)$ integral operatörünün rezolventi

$$R(L(\lambda))h(t) = \int_0^\infty R(x, t; \lambda)h(x)dx ; \quad h \in L_2(\mathbb{R}_+)$$

biçimindedir. Burada,

$$R_1(x, t; \lambda) = \frac{1}{f(\lambda)} \begin{cases} f(x, \lambda)\varphi(t, \lambda), & 0 \leq t < x \text{ ise} \\ -f(t, \lambda)\varphi(x, \lambda), & x \leq t < \infty \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$R_2(x, t; \lambda) = \frac{1}{\varphi(\lambda)} \begin{cases} g(x, \lambda)\varphi(t, \lambda), & 0 \leq t < x \text{ ise} \\ -g(t, \lambda)\varphi(x, \lambda), & x \leq t < \infty \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere

$$R(x, t; \lambda) = \begin{cases} R_1(x, t; \lambda), & \lambda \in \rho_1(\lambda) \text{ ise} \\ R_2(x, t; \lambda), & \lambda \in \rho_2(\lambda) \text{ ise} \end{cases}$$

dır ve $\mathbb{C}_+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Im}\lambda > 0\}$ 'dir [19].

$R_\lambda(L)$ operatörünün varlığını garanti eden aşağıdaki teoremi ispatsız olarak verelim.

2.2. Teorem

Herbir λ kompleks sayısı için, $\text{Im}\lambda > 0$ düzleminde

$$\|R_\lambda^+\| \geq \frac{C_\lambda^+}{|f(\lambda)|\sqrt{|\text{Im}\lambda|}}$$

olacak şekilde C_λ^+ sayısı, $\text{Im}\lambda < 0$ düzleminde

$$\|R_\lambda^-\| \geq \frac{C_\lambda^-}{|\varphi(\lambda)|\sqrt{|\text{Im}\lambda|}}$$

olacak şekilde C_λ^- sayısı vardır. Buda bize $R_\lambda(L)$ operatörünün varlığını gösterir. [19]

2.3.Teorem

λ , L operatörünün rezolvent cümlesine ait ve $\lambda \rightarrow \lambda_0 \in (-\infty, \infty)$ ise $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \|R_\lambda\| = \infty$ 'dur. [19]

Bu bize $R_\lambda(L)$ operatörünün sınırsızlığını verir.

2.4.Teorem

L operatörünün sürekli spektrumu pozitif reel eksendir. Yani $\sigma_c(L) = (0, \infty)$ 'dur. [19]

2.14.Tanım (Çekirdeğin kutbu)

Bir $\omega = f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının bir $D(z_0, r) - \{z_0\}$ delinmiş komşuluğunda analitik fakat z_0 'da analitik değilse, f 'ye, z_0 'da ayırık aykırı (singüler) noktaya sahiptir [31]; veya z_0 'a f 'nin çekirdeğinin kutbudur denir.

2.15.Tanım (Spektral tekillik)

L operatörünün rezolventinin çekirdeğinin kutupları olup, özdeğerleri olmayan noktalara spektral tekillik adı verilir.

$$\sigma_{ss}(L) = \{\lambda \in \mathbb{C}: \operatorname{Im}\lambda = 0, f(\lambda) = 0\}$$

ile gösterilir [19].

Şimdiye kadar vermiş olduğumuz kalan spektrum, sürekli spektrum, diskret spektrum ve spektral tekillik tanımlarını kullanarak spektrumun tanımını aşağıdaki şekilde de verebiliriz:

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A) = \sigma_r(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_d(A) \cup \sigma_{ss}(A)$$

2.5.Teorem

$L(\lambda)$ 'nın özdeğerleri ve spektral tekilliklerinin kümeleri sınırlıdır ve en fazla sayılabilir sayıdadır [19].

2.6.Teorem

$f(z) = u(z) + \int_{\partial D} g(z, u) du$ olarak tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu

i) $u(z)$ tam ise

ii) $\int_{\partial D} g(z, u) du$ mutlak yakınsak ise

tamdır.

2.7.Teorem (İki fonksiyonun bölümünün rezidüsü)

g ve h , z_0 noktasında analitik olmak üzere

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

ifadesinde f , z_0 noktasında basit kutup noktası ve $g(z_0) \neq 0$ ise

$$a_{-1} = \text{Res}f(z_0) = g(z_0)/h'(z_0)$$

dır.

2.8. Teorem (Wiener-Levy teoremi)

B bir değişimli Banach cebiri, $x \in B$ ve F bir $\sigma(x)$ 'in komşuluğunda analitik olsun. Bu durumda $F \rightarrow F(x)$, B 'deki $\sigma(x)$ 'in komşuluğunda homomorfizm olacak şekildeki analitik fonksiyonlar olmak üzere $F(x) \in B$ bulunabilir [16].

2.16. Tanım (Sobolev uzayı)

(a, b) aralığında tanımlı f fonksiyonunun $(m - 1)$ 'nci mertebeden türevi mutlak sürekli ve $f, f', f'', \dots, f^{(m)} \in L_2[a, b]$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayına Sobolev uzayı denir ve $W^{m,2}$ ile gösterilir [17].

2.17. Tanım (Girişim operatörü)

k ve u reel değerli operatörleri için $0 \leq t \leq T$ olmak üzere

$$ku = \int_0^t k(t-s)u(s)ds = k * u = f(t)$$

şeklinde tanımlanan operatöre girişim operatörü denir. Burada $t \geq 0$ için $k(t)$, lineer integral denklemin çekirdeğidir [23].

2.18. Tanım (Kompakt destekli fonksiyon)

$\mathbb{R}^n$ 'de tanımlı $u(x)$ fonksiyonunun desteği; $u(x)$ 'in sıfırdan farklı olduğu, x noktalarının kümesinin kapanışı olup $\text{supp } u$ ile gösterilir.

$$\text{supp } u = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \neq 0\}}$$

olmak üzere $\text{supp } u$, $\mathbb{R}^n$ 'de sınırlı küme ise, $u(x)$ fonksiyonuna kompakt desteklidir denir. $u(x)$, $G \subset \mathbb{R}^n$ 'de tanımlı, $\text{supp } u$, kompakt ve $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 'nin altkümesi ise Ω 'da kompakt destekli fonksiyon adını alır [18].

2.19.Tanım (Lineer operatör)

H Hilbert uzayında herhangi bir $D \subset H$ lineer alt uzayı ve $A: D \subset H \rightarrow H$ dönüşümü verilsin. Eğer her $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ ve her $x_1, x_2 \in D$ için

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2$$

eşitliği sağlanıyorsa A operatörüne D üzerinde lineer operatör, D 'ye ise A operatörünün tanım bölgesi denir ve $D(A)$ ile gösterilir [20].

2.9.Teorem

Eğer $f \in L_1(-\infty, \infty)$ ise

$$g(\lambda) = \int_0^\infty f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun Fourier dönüşümü denir. Eğer $f \in L_2(-\infty, \infty)$ olarak alınırsa $N > 0$ olmak üzere;

$$g_N(\lambda) = \int_{-N}^N f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

yazılır [22].

2.10.Teorem (Fubini Teoremi)

$B = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ ve $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu mutlak sürekli olsun. Bu takdirde

$$\iint_B f(x,y)dx dy = \int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy)dx = \int_c^d (\int_a^b f(x,y)dx) dy$$

dir [29].

Fubini teoremine göre, integrasyon bölgesi bir dikdörtgensel bölge olduğunda integralin sırası değiştirilebilir [29].

2.1.1. Teorem (Gronwall-Reid-Bellman eşitsizliği)

c negatif olmayan ($c \geq 0$) bir sabit olsun. u ve v , $[t_0, t_0 + a]$ aralığında tanımlı, negatif olmayan sürekli fonksiyonlar olsun ve

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^t u(s)v(s)ds$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $t \in [t_0, t_0 + a]$ için

$$u(t) \leq ce^{\int_{t_0}^t v(s)ds}$$

dir [30].

2.2. Bir Boyutlu Saçılma Problemlerine Giriş

$L^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$ ile, $a < \infty$ için kompleks düzlemin üst yarısında $L^2(0, a)$ sınıfından olan fonksiyonları gösterelim.

$$L_{1,m}(\mathbb{R}_+) = \{q: q(x) = \overline{q(x)}, \int_0^\infty (1+x)^m |q(x)|dx < \infty \text{ ve } q \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+)\}$$

olsun ve $q(x) \in L_{1,1}(\mathbb{R}_+)$ alalım. Bu $q(x)$ fonksiyonlarına potansiyel fonksiyonu adı verilir. $u(0) = 0$ sınır koşulu ve l operatörü ile birlikte bir self-adjoint l_0 diferensiyel ifadesini, $D(l_0) = \{u: u(0) = 0, u \in C_0^2(0, \infty)\}$ tanım bölgesinde göz önüne alalım.

Burada l operatörü $lu = -u'' + q(x)u$ diferensiyel ifadesidir. $C_0^2(0, \infty)$ ile, $C^2(\mathbb{R}_+)$ 'daki fonksiyonların sonsuz komşuluğunda sıfır olanlarının kümesi kastedilmektedir.

Burada $q(x) \in L_{loc}^2(\mathbb{R}_+)$ dışında bir self-adjoint l operatörü tanımlanıp tanımlanamayacağının ispatını yapmak çok zordur. Çünkü $D(l_0)u := \{u: u \in C_0^2(\mathbb{R}_+), lu \in L^2(\mathbb{R}_+)\}$ kümesinin H 'da yoğun olduğu açık değildir. l_0 diferensiyel operatörünün spektrumu kesinlikle vardır ve $(0, \infty)$ bölgesinde ayrık (diskret) spektrumludur. Bu operatör sınırlı ve negatif spektrumu $-k_j^2$ 'ler olan bir operatör olacaktır. Burada $-k_j^2$, l operatörünün özdeğerleridir ve $1 \leq j \leq J$ olmak üzere J tanedir. k_j 'ler ayrıca basit kutup noktalarıdır ve bunların tamamında,

$$l\varphi_j := -\varphi_j'' + q_j = -k_j^2\varphi_j, \varphi_j(0) = 0, \varphi_j'(0) = 1 \quad (2.1)$$

dir. Burada φ_j reel değerli bir özfonksiyon ve

$$\frac{1}{c_j} := \int_0^\infty \varphi_j^2 dx \quad (2.2)$$

dir. $\varphi(x, k)$ ve $\theta(x, k)$ fonksiyonları $x > 0$ için

$$l\varphi = k^2\varphi; \varphi(0, k) = 0, \varphi'(0, k) = 1 \quad (2.3)$$

ve $x > 0$ için

$$l\theta = k^2\theta; \theta(0, k) = 1, \theta'(0, k) = 0 \quad (2.4)$$

ile tanımlı problemlerin tek çözümleri olsunlar. Bu fonksiyonların bir $q(x) \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_+)$ için varlığı ve tekliği Volterra tipi integral denkleminde gösterilebilir.

2.12. Teorem

Her $\delta > 0$ için en az bir $a > 0$ vardır öyleki $-y'' + q(x)y = k^2y$ denkleminin $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, k)e^{-ikx} = 1$ sınır koşulunu sağlayan $x \geq a$, $\text{Im} k \leq 0$, $|k| \geq \delta$ bölgesinde tanımlı $f(x, k)$ Jost çözümü vardır, tektir, üstelik aynı bölgede k 'nın analitik fonksiyonudur [8].

İspat

$y'' + k^2y = q(x)y$ denkleminin karşılık gelen homojen kısım $y'' + k^2y = 0$ 'dır. Bu denkleme karşılık gelen indisel denklem $r^2 + k^2 = 0$ ve bu indisel denklemin kökleri $r = \mp ik$ olduğundan genel çözümü

$$\tilde{y} = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}$$

şeklinde arayabiliriz. Lineer denklemin çözümünü sabitlerin değişimi metodu yardımıyla

$$y(x, k) = C_1(x)e^{ikx} + C_2(x)e^{-ikx} \quad (2.5)$$

biçiminde arayalım.

$$y'(x, k) = C_1'(x)e^{ikx} + C_2'(x)e^{-ikx} + ikC_1(x)e^{ikx} - ikC_2(x)e^{-ikx}$$

olsun. Burada

$$C_1'(x)e^{ikx} + C_2'(x)e^{-ikx} = 0 \quad (2.6)$$

diyelim. Bu durumda denklem

$$y'(x, k) = ikC_1(x)e^{ikx} - ikC_2(x)e^{-ikx}$$

olarak yazılabilir. Buradan elde edilen

$$y''(x, k) = ikC_1'(x)e^{ikx} - ikC_2'(x)e^{-ikx} - k^2C_1(x)e^{ikx} - k^2C_2(x)e^{-ikx}$$

eşitliği, $y'' + k^2y = q(x)y$ lineer denkleminde Eş.2.5 ile birlikte yerine yazılırsa

$$ikC_1'(x)e^{ikx} - ikC_2'(x)e^{-ikx} - k^2C_1(x)e^{ikx} - k^2C_2(x)e^{-ikx} + k^2C_1(x)e^{ikx} + k^2C_2(x)e^{-ikx} = q(x)C_1(x)e^{ikx} + q(x)C_2(x)e^{-ikx}$$

olur. Buradan

$$ikC_1'(x)e^{ikx} - ikC_2'(x)e^{-ikx} = q(x)y \quad (2.7)$$

elde edilir. Eş.2.6 ve Eş.2.7 denklemlerini taraf tarafa çıkarırsak,

$$C_1'(x)e^{ikx} = \frac{q(x)y}{2ik}$$

elde ederiz. Buradan

$$C_1'(x) = \frac{q(x)}{2ik}e^{-ikx}y$$

olur. Eğer her iki tarafın x 'den ∞ 'a integralini alırsak

$$C_1(x) = \frac{1}{2ik} \int_x^\infty q(t)e^{-ikt}y(t, k)dt + \alpha_1$$

elde ederiz. Benzer şekilde Eş.2.6 ve Eş.2.7'den

$$C_2'(x)e^{-ikx} = -\frac{q(x)y}{2ik}$$

bulunur. Yine buradan

$$C_2'(x) = -\frac{q(x)}{2ik} e^{ikx} y$$

elde ederiz. Eğer her iki tarafın x 'den ∞ 'a kadar integralini alırsak

$$C_2(x) = -\frac{1}{2ik} \int_x^\infty q(t) e^{ikt} y(t, k) dt + \alpha_2$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$y(x, k) = C_1(x) e^{ikx} + C_2(x) e^{-ikx}$$

ifadesinde bulunan bu $C_1(x)$ ve $C_2(x)$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$y(x, k) = \frac{1}{2ik} \int_x^\infty q(t) e^{ik(x-t)} y(t) dt + \alpha_1 e^{ikx} + \alpha_2 e^{-ikx} - \frac{1}{2ik} \int_x^\infty q(t) e^{-ik(x-t)} y(t, k) dt$$

elde ederiz. Son eşitliği düzenlersek

$$y(x, k) = \alpha_1 e^{ikx} + \alpha_2 e^{-ikx} + \frac{1}{k} \int_x^\infty \frac{e^{ik(x-t)} - e^{-ik(x-t)}}{2i} q(t) y(t, k) dt$$

bulunur. Burada $\frac{e^{ik(x-t)} - e^{-ik(x-t)}}{2i} = \text{sink}(x-t)$ olduğundan

$$f(x, k) = \alpha_1 e^{ikx} + \alpha_2 e^{-ikx} + \frac{1}{k} \int_x^\infty \text{sink}(x-t) q(t) f(t, k) dt$$

yazabiliriz. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-ikx} f(x, k) = 1$ şartından

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x, k) e^{-ikx}) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\alpha_1 e^{ikx} e^{-ikx} + \alpha_2 e^{-ikx} e^{-ikx} + (e^{-ikx} \int_x^\infty \frac{\text{sink}(x-t)}{k} q(t) f(t, k) dt)) = 1$$

dir. $x \rightarrow \infty$ için $(e^{-ikx} \int_x^\infty \frac{\text{sink}(x-t)}{k} q(t) y(t, k) dt) = 0$ olduğundan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x, k) e^{-ikx}) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\alpha_1 + \alpha_2 e^{-2ikx}) = 1$$

olmalıdır. $x \rightarrow \infty$ için $\alpha_2 e^{-2ikx} = 0$ olduğundan $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$ olmalıdır. Buradan

$$f(x, k) = e^{ikx} + \int_x^\infty \frac{\sin k(x-t)}{k} q(t) f(t, k) dt$$

elde edilir.

$$z(x, k) = \frac{f(x, k) e^{-ikx}}{x} \text{ diyelim ve}$$

$$z(x, k) = \sum_{j=0}^{\infty} z_j(x, k) \quad (2.8)$$

seri formunda denklemi yazarak $f(x, k)$ 'nın varlığını ve tekliğini ardışık yinelemeler yöntemi ile gösterelim:

$$\frac{f(x, k) e^{-ikx}}{x} = \frac{1}{x} + \int_x^\infty \frac{\sin k(x-t)}{kx} q(t) e^{-ik(x-t)} t \frac{f(t, k) e^{-ikt}}{t} dt$$

ve

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, k) e^{-ikx} = 1$$

dir. Burada

$$z_j(x, k) = \int_x^\infty \frac{\sin k(x-t)}{kx} t q(t) e^{-ik(x-t)} z_{j-1}(t, k) dt$$

olarak tanımlarsak

$$z(x, k) = \frac{1}{x} + \int_x^\infty \frac{\sin k(x-t)}{kx} t q(t) e^{-ik(x-t)} z_{j-1}(t, k) dt$$

dir. $Imk \leq 0$ ve $0 < t \leq x$ için, $\left| \frac{sinkx}{kx} e^{-ikx} \right| \leq 1$ olduğundan [28]

$$\left| \frac{sink(x-t)}{kx} e^{-ik(x-t)} \right| \leq 1 - \frac{t}{x} \leq 1$$

bulunur [28]. Eş.2.8'dekine benzer olarak $\sum_{j=0}^{\infty} \xi_j(x)$ serisini yazalım. Burada

$$\xi_0(x) = 1, \quad \xi_j(x) = \int_x^{\infty} t|q(t)|\xi_{j-1}dt, \quad (j = 1, 2, \dots)$$

dir.

$$|z(x, k)| \leq 1 \text{ eşitsizliği için } |z(x, k)| \leq \xi_0 = 1$$

$$z_j(x, k) = \int_x^{\infty} \frac{sink(x-t)}{kx} tq(t)e^{-ik(x-t)}z_{j-1}(t, k)dt$$

olarak tanımladığımız ifadenin her iki tarafının mutlak değerini alalım. Bu durumda

$$|z_j(x, k)| \leq \int_x^{\infty} t|q(t)||z_{j-1}(t, k)|dt$$

olur.

$$|z_{j-1}(t, k)| := \xi_{j-1}(t)$$

diyelim. $\xi_0(x) = 1$ olarak ardışık yinelemeler ile

$$\xi_1(x) = \int_x^{\infty} t|q(t)|dt = \frac{1}{1!} \int_x^{\infty} t|q(t)|dt$$

$$\xi_n = (\int_x^{\infty} |q(t)|dt)^2 - \xi_n$$

eşitliğinden dolayı [28]

$$\xi_2(x) = (\int_x^\infty t|q(t)|dt)^2 - \xi_2(x)$$

yazılabilir. Böylece

$$\xi_2(x) = \frac{1}{2!} (\int_x^\infty t|q(t)|dt)^2$$

elde edilir. Böyle devam ederek

$$\xi_{j-1}(x) = \frac{1}{(j-1)!} (\int_x^\infty t|q(t)|dt)^{j-1}$$

ve

$$\xi_j(x) = \frac{1}{j!} (\int_x^\infty t|q(t)|dt)^j$$

elde ederiz. Böylece

$$|z_j(x, k)| \leq \xi_j(x) = \frac{1}{j!} (\int_x^\infty t|q(t)|dt)^j < \infty \text{ (Naimark koşulu) [8]}$$

$z(x, k) = \sum_{j=0}^\infty z_j(x, k)$ 'dan Gronwall-Reid-Bellman eşitsizliği kullanılırsa

$$|z(x, k)| \leq \frac{1}{x} \exp (\int_x^\infty t|q(t)|dt)$$

yazabiliriz. Teorem.2.6 kullanılırsa $f(x, k)$ için $u(z) = e^{ikx}$ ve $\int_{\partial D} g(z, u)du =$

$$\int_x^\infty \frac{\sin k(x-t)}{k} q(t) f(t, k) dt \text{ olmak üzere}$$

i) e^{ikx} , $\mathbb{C}$ 'de tam

ve yukarıdaki işlemlerden

ii) $\int_x^\infty \frac{\sin k(x-t)}{k} q(t) f(t, k) dt$ mutlak yakınsak

olduğundan $f(x, k)$ fonksiyonu k 'nin tam fonksiyonu olur.

Tersine; bulduğumuz çözüm $-y'' + q(x)y = k^2 y$ denklemini sağlar mı?

$$f'(x, k) = i k e^{ikx} + \int_x^\infty \cos k(x-t) q(t) f(t, k) dt$$

ve

$$f''(x, k) = -k^2 e^{ikx} - k \int_x^\infty \sin k(x-t) q(t) f(t, k) dt - q(x) f(x, k)$$

ifadeleri denklemde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} k^2 e^{ikx} + k \int_x^\infty \sin k(x-t) q(t) f(t, k) dt + q(x) f(x, k) - q(x) f(x, k) = \\ k^2 e^{ikx} + k^2 \int_x^\infty \frac{\sin k(x-t)}{k} q(t) f(t, k) dt \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$f(x, k) e^{-ikx} = 1 + \int_x^\infty \frac{\sin k(x-t)}{k} q(t) f(t, k) dt$$

olur. Dolayısıyla

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x, k) e^{-ikx}) = 1$$

olur. Bu durumda aranan çözüm $x \rightarrow \infty$ için

$$lf := -f'' + qf = k^2 f, \quad f(x, k) = e^{ikx} + o(1), \quad f(0, k) := f(k) \quad (2.9)$$

probleminin çözümüne eşdeğerdir. Bu da ispatı tamamlar.

Eğer $q \in L_{1,1}(\mathbb{R}_+)$ ise $f(x, k)$ 'nin $\mathbb{C}_+ = \{k \in \mathbb{C} : \text{Im} k > 0\}$ 'daki k 'lar için analitik olduğu anlaşılır.

$k > 0$ için $f(x, k) = \overline{f(x, -k)}$ 'dir [10]. Jost fonksiyonu $f(k) := f(0, k)$ olarak tanımlanır. Bu fonksiyonun $k_j > 0$ için ik_j gibi J tane basit kökü vardır; burada $-k_j^2$ ($1 \leq j \leq J$), l 'nin negatif özdeğeridir. $k = 0$ da $f(0, k)$ 'nin bir sıfırı vardır. Eğer $f(0, 0) = 0$ ise $\dot{f}(0, 0) \neq 0$ 'dır; burada $\dot{f}(0, k) := \frac{df(0, k)}{dk}$, dir.

$$f(x, k) = e^{ikx} + \int_x^\infty \frac{\sin k(x-t)}{k} q(t) f(t, k) dt$$

$$f(0, k) = 1 + \int_0^\infty \frac{\sin kt}{k} q(t) f(t, k) dt$$

$$\frac{df}{dk} = \int_0^\infty \cos kt q(t) f(t, k) dt$$

dir. $\dot{f}(0, 0)$ 'ın varlığının ispatı $q \in L_{1,1}(\mathbb{R}_+)$ için çok önemlidir. Bu ispat Teorem.4.3'de verilecektir.

Aynı şey $q \in L_{1,2}(\mathbb{R}_+) := \{q : q = \bar{q}, \int_0^\infty (1+x)^2 |q(x)| dx < \infty\}$ içinde geçerlidir.

Şimdi faz kayması olarak bilinen $\delta(k)$ delta fonksiyonunu aşağıdaki formül ile tanımlayalım.

$$f(k) = |f(k)| e^{-i\delta(k)}, \delta(\infty) = 0, f(\infty) = 1 \quad (2.10)$$

$q(x) = \overline{q(x)}$ ve bir $k \in \mathbb{R}$ için $\delta(-k) = -\delta(k)$ ise S-fonksiyonu (Saçılım fonksiyonu) şöyle tanımlanır [9]

$$S(k) := \frac{f(0, -k)}{f(0, k)}, k \in \mathbb{R} \quad (2.11)$$

$S(k)$ fonksiyonu $q \in L_{1,1}(\mathbb{R}_+)$ olması durumunda kompleks k 'lar için tanımlı değildir, fakat $|q(x)| \leq C_1 e^{-C_2|x|^\gamma}$, $\gamma > 1$ olursa, $f(0,k)$ k 'nın tam fonksiyonudur ve $S(k)$ $\mathbb{C}$ 'de meromorfiktir [10].

Burada tam fonksiyondan kastımız, tüm karmaşık düzlemde analitik olan, karmaşık değişkenli fonksiyon ve meromorfik fonksiyondan kastımız, bir bölgede sonlu sayıda tekil noktası bulunan kompleks değişkenli tek değerli fonksiyondur.

Eğer $x > a$ için $q(x) = 0$ ise, $f(x)$ fonksiyonu üsteli $\leq 2a$ olan, üstel tipten bir fonksiyondur [27].

Eğer $q \in L_{1,1}(\mathbb{R}_+)$ alınırsa, $k^2 = -k_j^2, k_j > 0$ durumunda $f_j(x,k) := f(x, ik_j)$ Jost çözümü $\varphi_j(x,k) := \varphi(x, ik_j)$ ile orantılıdır. Burada f_j ve φ_j 'ler $L^2(\mathbb{R}_+)$ 'ya aittir. φ 'nin sağladığı integral denklemi:

$$\varphi(x,k) = \frac{\sin(kx)}{k} + \int_0^x \frac{\sin k(x-s)}{k} q(s) \varphi(s,k) ds$$

dir [10].

2.3.Jost Çözümleri

$f(x,k)$ çözümü için aşağıdaki teoremi ispatsız olarak verelim.

2.13.Teorem [8]

Eğer $\int_0^x x|q(x)|dx < \infty$ (Naimark koşulu) var ise bu durumda $f(x,k)$ çözümü aşağıdaki gibi gösterilir.

$$f(x,k) = e^{ikx} + \int_x^\infty A(x,y) e^{iky} dy := (I + A)f_0, f_0 := e^{ikx}, x \geq 0, \text{Im} k \geq 0 \quad (2.12)$$

Burada $A(x, y)$ Volterra tipli integral denkleminin çekirdeği olup, x ve y 'ye göre sürekli diferensiyellenebilirdir. Bundan dolayı $A(x, y)$ aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar [10].

$$|A(x, y)| \leq c\sigma\left(\frac{x+y}{2}\right), c = \text{sabit}, \sigma(x) := \int_x^\infty |q(t)|dt \quad (2.13)$$

$$|A_x(x, y)| \leq \frac{1}{4} \left| q\left(\frac{x+y}{2}\right) \right| + ce^{\sigma(x)} \sigma\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad 0 \leq x \leq y < \infty$$

$$|A_y(x, y)| \leq \frac{1}{4} \left| q\left(\frac{x+y}{2}\right) \right| + ce^{\sigma(x)} \sigma\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad 0 \leq x \leq y < \infty$$

$$\left| A_y(x, y) + \frac{1}{4} q\left(\frac{x+y}{2}\right) \right| + \left| A_x(x, y) + \frac{1}{4} q\left(\frac{x+y}{2}\right) \right| \leq c\sigma(x)\sigma\left(\frac{x+y}{2}\right) \quad (2.14)$$

Ayrıca $A(x, y)$ çekirdek fonksiyonu aşağıdaki denkleminde bir çözümüdür.

$$A(x, y) = \frac{1}{2} \int_{\frac{x+y}{2}}^\infty q(s)ds + \int_{\frac{x+y}{2}}^\infty \int_0^{\frac{y-x}{2}} q(s-t)A(s-t, s+t) dt ds \quad (2.15)$$

2.14. Teorem

$lf := -f'' + qf = k^2 f$ denkleminin $f(x, k)$ Jost çözümünü

$$f(x, k) = e^{ikx} + \int_x^\infty A(x, t)e^{ikt} dt$$

olarak alırsak, $f(0, k) := f(k)$ olmak üzere $\text{Im} k \geq 0, x \rightarrow \infty$ için

$$f(x, k) = e^{ikx} + o(1)$$

asimptotik eşitliğini sağlar.

İspat

$f(x, k) = e^{ikx} + \int_x^\infty A(x, t)e^{ikt} dt$ olarak alalım.

Önce $Imk = 0$ durumunu ele alalım. [8]'den $|e^{iRekt}| = 1$ ve $|e^{-Imkt}| = \left| \frac{1}{e^{Imkt}} \right|$, dir.

$$\begin{aligned} |e^{ikt}| &= |e^{i(Rek+ilmk)t}| \\ &= |e^{iRekt}| |e^{-Imkt}| \\ &= \left| \frac{1}{e^{Imkt}} \right| \\ &= 1 \end{aligned}$$

$A(x, t) \in L_1(0, \infty)$ için

$$|A(x, t)e^{ikt}| = |A(x, t)|$$

olduğundan $x \rightarrow \infty$, $Imk = 0$ için

$$f(x, k) = e^{ikx} + o(1)$$

olur.

Şimdi $Imk > 0$ olsun. $|A(x, t)| \in L_1(0, \infty)$, $|A(x, t)| \leq c\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)$ ve $\sigma(x) := \int_x^\infty |q(t)|dt$ olduğundan (Naimark) [8]

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |A(x, t)|dt &\leq c \int_0^\infty \sigma\left(\frac{x+t}{2}\right) dt \\ &\leq c \int_0^\infty \int_{\frac{x_0+t}{2}}^\infty |q(s)|ds dt \\ &\leq c \int_0^\infty \int_{\frac{t}{2}}^\infty |q(s)|ds dt \\ &\leq c \int_0^\infty \int_0^{2s} |q(s)|dtds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq c \int_0^\infty t |q(s)| |0^{\frac{2s}{s}} ds \\ &\leq 2c \int_0^\infty s |q(s)| ds < \infty \end{aligned}$$

olur ki buda $A(x, t) \in L_1(0, \infty)$ olması demektir.

$$|e^{i(Rekt+Imkt)}| = |e^{iRekt}| |e^{-Imkt}|$$

dir. [8]'den $|e^{iRekt}| = 1$ ve $|e^{-Imkt}| = \left| \frac{1}{e^{Imkt}} \right|$ 'dir. Dolayısıyla

$$|e^{i(Rekt+Imkt)}| = \left| \frac{1}{e^{Imkt}} \right|$$

olduğundan azalan fonksiyondur. O halde $Imk > 0$ için $x \rightarrow \infty$ giderken

$$f(x, k) = e^{ikx} + o(1)$$

olur. Dolayısı ile $Imk \geq 0$ için $x \rightarrow \infty$ giderken

$$f(x, k) = e^{ikx} + o(1)$$

elde edilir.

2.15. Teorem

$-f'' + qf = k^2 f$ probleminin $f(0, k)$ ve $f(0, -k)$ çözümleri için

$$W[f(0, k), f(0, -k)] = \lim_{x \rightarrow \infty} W[f(0, k), f(0, -k)] = -2ik.$$

dır.

İspat

$f(x, k)$ çözümünün

$$f(x, k) = e^{ikx} + o(1), x \rightarrow \infty, f(0, k) = f(k)$$

asimptotiğini kullanırsak

$$\begin{aligned} W[f(0, k), f(0, -k)] &= \begin{bmatrix} f(0, k) & f(0, -k) \\ f'(0, k) & f'(0, -k) \end{bmatrix} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} [f(0, k)f'(0, -k) - f(0, -k)f'(0, k)] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} [(1)(-ik) - (1)(ik)] = -2ik \end{aligned}$$

dolayısıyla

$$f(0, k)f'(0, -k) - f'(0, k)f(0, -k) = -2ik$$

yada buna denk olarak

$$f'(0, k)f(0, -k) - f'(0, -k)f(0, k) = 2ik \quad (2.16)$$

yazılabilir.

Eğer Eş.2.3 şartını göz önüne alırsak aşağıdaki teorem ispat edilebilir.

2.16.Teorem

$f(x, k)$ ve $f(x, -k)$, $lf = -f'' + qf = k^2 f$ denkleminin çözümleri ise Eş.2.3 sınır şartları altında

$$\varphi(x, k) = \frac{f(x, k)f'(0, -k) - f(x, -k)f'(0, k)}{2ik} \quad (2.17)$$

dır.

İspat

$f(x, k)$ ve $f(x, -k)$ fonksiyonları $lf = -f'' + qf = k^2 f$, $0 \leq x < \infty$ denkleminin çözümleri olduklarından $l\varphi = k^2 \varphi$, $x > 0$ Eş.2.3 sınır değer probleminin çözümü olan $\varphi(x, k)$ fonksiyonu C_1 ve C_2 'ler keyfî sabitler olmak üzere

$$\varphi(x, k) = C_1 f(x, k) + C_2 f(x, -k)$$

olarak yazılabilir. Sınır koşulları uygulanırsa

$$\varphi(0, k) = C_1 f(0, k) + C_2 f(0, -k) = 0$$

$$\varphi'(0, k) = C_1 f'(0, k) + C_2 f'(0, -k) = 1$$

denklem sistemi elde edilir. Birinci denklem $f'(0, k)$ ile, ikinci denklem $f(0, k)$ ile çarpılır ve taraf tarafa çıkarılırsa

$$C_2 = \frac{f(0, k)}{f'(0, -k)f(0, k) - f(0, -k)f'(0, k)}$$

olur. $f'(0, k)f(0, -k) - f'(0, -k)f(0, k) = 2ik$ 'dir. O halde

$$C_2 = \frac{f(0, k)}{-2ik}$$

olmalıdır. C_2 'nin bu değeri birinci denklemde yerine yazılırsa

$$C_1 = -C_2 \frac{f(0, -k)}{f(0, k)} = \frac{f(0, -k)}{2ik}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\varphi(x, k) &= \frac{f(0, -k)}{2ik} f(x, k) - \frac{f(0, k)}{2ik} f(x, -k) \\
&= \frac{f(x, k)f(0, -k) - f(x, -k)f(0, k)}{2ik} \\
&= \frac{f(x, k)f(-k) - f(x, -k)f(0, k)}{2ik}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Eğer $k = ik_j$ ise, bu durumda $f_j(x, k) \in L^2(\mathbb{R}_+)$ olur. Bu

$$f(x, k) = e^{ikx} + \int_x^\infty \frac{\sin k(x-t)}{k} q(t) f(t, k) dt \quad (2.18)$$

eşitliğinde $k = ik_j$ yerine yazılması ile kolayca görülebilir. $|f_j(x, k)| \leq Ce^{-k_j x}$ ($x \geq 0$) eşitsizliği sağlanır [10]. Eğer $k > 0$ ise $f(x, -k) = \overline{f(x, k)}$ 'dir. Eğer $q(x) = \overline{q(x)}$ ise $f_j(x, k)$ reel-değerli bir fonksiyondur. $f(x, k)$ fonksiyonu $\mathbb{C}_+$ 'da analitik bir fonksiyondur. Ancak, $k \in \mathbb{C}_- := \{k \in \mathbb{C} : \text{Im} k < 0\}$ olması durumunda tanımlı değildir. Bu nedenle Eş.2.16 yalnız reel ekseninde geçerlidir. Bunun yanında, $|q(x)| \leq C_1 e^{-C_2|x|^\gamma}$ ($\gamma > 1$) olması durumunda $f(0, k)$, $\text{Im} k < 0$ için, yani kompleks düzlemde tanımlı olur [10]. $k \in \mathbb{C}_+$ için $f(x, k) := f_+(x, k)$ diyelim ve ikinci çözüm olarak $f(x, -k) = f_-(x, k)$ alalım. Bu çözümler Eş.2.9 denkleminin lineer bağımsız çözümleri olurlar. Eğer $f_+ \in L^2(\mathbb{R}_+)$ ise $f_- \notin L^2(\mathbb{R}_+)$ 'dır. Çünkü $\text{Im} k > 0$ için

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} |e^{-ikx}| &= \lim_{x \rightarrow \infty} |e^{-i(\text{Re} k x + i \text{Im} k x)}| \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} |e^{-i \text{Re} k x}| |e^{\text{Im} k x}| \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|e^{\text{Im} k x}|}{|e^{i \text{Re} k x}|} = \infty
\end{aligned}$$

olduğu için $f_- \notin L^2(\mathbb{R}_+)$ 'dır. Buradan $k \in \mathbb{C}_+$ için Eş.2.17 formülünde $f(x, -k) = f_-(x, k)$ denirse

$$\varphi(x, k) = \frac{1}{2ik} [f(x, k)f(0, -k) - f(x, -k)f(0, k)]$$

$$= \frac{1}{2ik} [f(x, k)f_-(0, k) - f_-(x, k)f(0, k)]$$

elde edilir. $C(k) = \frac{1}{2ik}$ dersek

$$\varphi(x, k) = C(k)[f_-(0, k)f(x, k) - f(0, k)f_-(x, k)] \quad (2.19)$$

yazılabilir. $\varphi(x, ik_j) \in L^2(\mathbb{R}_+)$ için gerek ve yeter şart $f(0, ik_j) = 0$ olmasıdır. Gerçekten ik_j , l 'nin sıfır yeri olduğundan

$$f(0, ik_j) = 0, \quad \dot{f}(0, ik_j) \neq 0, \quad 1 \leq j \leq J \quad (2.20)$$

dir. Burada $\dot{f}(x, k) = \frac{df(x, k)}{dk}$ dir.

2.17. Teorem

$k \in \mathbb{C}_+$ olmak üzere

$$lf := -f'' + qf = k^2 f$$

denkleminin k 'ya göre diferensiyeli alınarak elde edilen

$$\dot{f}'' + k^2 \dot{f} - q\dot{f} = -2kf \quad (2.21)$$

denklemini için

$$\int_0^\infty f_j^2(x, ik_j) dx = \frac{f_j'(0, ik_j)\dot{f}(0, ik_j)}{-2ik_j}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$\dot{f}$ 'nin varlığı $k \in \mathbb{C}_+$ için Eş.2.18 denkleminde açıktır. $\dot{f}'' + k^2 \dot{f} - q\dot{f} = -2kf$ denklemini f ile, $lf := -f'' + qf = k^2 f$ denklemini $\dot{f}$ ile çarpıp ve taraf tarafa toplarsak

$$f\dot{f}'' - f''\dot{f} = -2kf^2$$

elde ederiz. Eğer $k = ik_j$ alırsak

$$-2ik_j f^2 = f\dot{f}'' - f''\dot{f}$$

yazılabilir. Son eşitlikte 0'dan ∞ 'a kadar integral alırsak

$$-2ik_j \int_0^\infty f^2 dx = (f\dot{f}' - f'\dot{f})|_0^\infty$$

yazılabilir. $x \geq 0$ için eğer $k = ik_j$ olursa $f_j(x, ik_j) \in L^2(\mathbb{R}_+)$ olduğundan

$$\begin{aligned} -2ik_j \int_0^\infty f_j^2 dx &= [f(\infty, ik_j)\dot{f}'(\infty, ik_j) - f'(\infty, ik_j)\dot{f}(\infty, ik_j)] - [f(0, ik_j)\dot{f}'(0, ik_j) - \\ &\quad f'(0, ik_j)\dot{f}(0, ik_j)] \\ &= -f(0, ik_j)\dot{f}'(0, ik_j) + f'(0, ik_j)\dot{f}(0, ik_j) \\ &= f'(0, ik_j)\dot{f}(0, ik_j) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\int_0^\infty f_j^2(x, ik_j) dx = \frac{f'(0, ik_j)\dot{f}(0, ik_j)}{-2ik_j}$$

elde edilir. Burada $\dot{f}(0, ik_j) \neq 0$ için

$$s_j = -\frac{2ik_j}{f'(0,ik_j)\hat{f}(0,ik_j)}, 1 \leq j \leq J \quad (2.22)$$

olacak şekilde bir $s_j > 0$ sabit sayısı seçersek

$$\int_0^\infty f_j^2(x, ik_j) dx = \frac{f'(0,ik_j)\hat{f}(0,ik_j)}{-2ik_j} := \frac{1}{s_j} > 0 \quad (2.23)$$

şeklinde yazabiliriz.

2.20.Tanım (Saçılım verisi)

Saçılım verisi

$$S := \{S(k), k_j, s_j: 1 \leq j \leq J\}, S(k) := \frac{f(-k)}{f(k)}, k_j > 0, s_j > 0 \quad (2.24)$$

üçlüsü olarak tanımlanır. $k = 0$ noktasında $f(0,0) = 0$ olursa, k noktası rezonans noktası olarak tanımlanır. Eğer $|q(x)| = C_1 e^{-C_2|x|^\gamma}$ ($\gamma > 1$) olarak alınırsa, $f(0,k)$ 'nin $\mathbb{C}_+$ 'da ki sıfırları da rezonans olarak adlandırılır. Burada $f(0,k)$ 'nin $\mathbb{C}_+$ 'da sonlu çoklukta basit sıfırı vardır. Burada, l self-adjoint Dirichlet operatörünün negatif özdeğerleri $-k_j^2$ ($1 \leq j \leq J$)'lerin sayısı J kadardır. Eğer $q(x) \in L_{1,1}(\mathbb{R}_+)$ ise l operatörünün negatif spektrumu sınırlıdır [10].

Aşağıdaki eşitlikte $\delta(k)$ faz kaymasının $S(k)$ ile bağıntısı verilmiştir.

$$S(k) = e^{2i\delta(k)} \quad (2.25)$$

Böylece saçılım verisinde $S(k)$ ile $\delta(k)$ birbirlerinin yerine yazılabilir. $f_j(x, ik_j) = f'(0, ik_j)\varphi_j(x, ik_j)$ alabiliriz. Çünkü $\frac{f(x, ik_j)}{f'(0, ik_j)}$, Eş.2.3 denkleminin bir çözümüdür.

Bundan dolayı

$$\int_0^\infty \varphi_j^2(x, ik_j) dx = \int_0^\infty \frac{f_j^2(x, ik_j)}{[f'(0, ik_j)]^2} dx = \frac{1}{[f'(0, ik_j)]^2} \int_0^\infty f_j^2(x, ik_j) dx = \frac{1}{[f'(0, ik_j)]^2} \frac{1}{s_j} := \frac{1}{c_j} \quad (2.26)$$

yazılabilir. Burada

$$c_j = -\frac{2ik_j f'(0, ik_j)}{\dot{f}(0, ik_j)}, 1 \leq j \leq J \quad (2.27)$$

dir.

3.ADI DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN C ÖZELLİĞİ

l_m ile $q_m(x) \in L_{1,1}(\mathbb{R}_+)$ ($m = 1,2$) potansiyellerine karşılık gelen operatörleri gösterelim ve $f_m(x, k)$ 'larda bu operatörlere karşılık gelen uygun Jost çözümler olsun. Burada $k > 0$ ile, $k \in \mathbb{C}_+ = \{k \in \mathbb{C} : \text{Im} k > 0\}$ olacak şekildeki k 'lardan bahsedilmektedir.

3.1.Tanım

Eğer $\{f_1(x, k)f_2(x, k)\}$ kümesi $\forall k > 0$ için $L^1(\mathbb{R}_+)$ 'da tam ise, $\{l_1, l_2\}$ ikilisine C_+ özelliğine sahiptir denir.

Buradan şu anlaşılır; eğer $h(x) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ ise, $\forall k > 0$ için,

$$\int_0^\infty h(x)f_1(x, k)f_2(x, k)dx = 0 \implies h(x) = 0 \quad (3.1)$$

sağlanırsa $\{l_1, l_2\}$ ikilisi C_+ özelliğine sahiptir.

Bu bölümde $q_m(x) \in L_{1,1}(\mathbb{R}_+)$ ($m = 1,2$) ise $\{l_1, l_2\}$ ikilisinin C_+ özelliğini taşıdığının ispatını vereceğiz.

Bu kesimde ele alacağımız adi diferensiyel denklem

$$(l - k^2)u := -u'' + q(x)u - k^2u = 0 \quad (3.2)$$

şeklinde olacaktır. $q(x) \in L_{1,1}(\mathbb{R}_+)$ alalım. Bu durumda $f(x, k)$ Jost çözümü tek olarak tanımlıdır. Tanım.3.1'de C_+ özelliğini tanımlamıştık. Şimdi C_+ özelliği ile ilgili aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

3.1. Teorem

Eğer $j = 1, 2$ için $q_j(x) \in L_{1,1}(\mathbb{R}_+)$ ise, bu durumda $\{l_1, l_2\}$ için C_+ özelliği sağlanır [1].

İspat

Eş.2.12 ifadesini kullanırsak,

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^\infty h(x) f_1(x, k) f_2(x, k) dx \\
 &= \int_0^\infty h(x) [e^{ikx} + \int_x^\infty A_1(x, y) e^{iky} dy] [e^{ikx} + \int_x^\infty A_2(x, z) e^{ikz} dz] dx \\
 &= \int_0^\infty h(x) [e^{2ikx} + \int_x^\infty A_2(x, z) e^{ik(x+z)} dz + \int_x^\infty A_1(x, y) e^{ik(x+y)} dy + \\
 &\quad \int_x^\infty \int_x^\infty A_1(x, y) A_2(x, z) e^{ik(y+z)} dy dz] dx \\
 &= \int_0^\infty h(x) [e^{2ikx} + \int_x^\infty [A_1(x, y) + A_2(x, y)] e^{ik(x+y)} dy + \int_x^\infty \int_x^\infty A_1(x, y) A_2(x, z) e^{ik(y+z)} dy dz] dx
 \end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki ifadede $A_1(x, y) + A_2(x, y) = A(x, y)$ dersek

$$0 = \int_0^\infty h(x) [e^{2ikx} + \int_x^\infty A(x, y) e^{ik(x+y)} dy + \int_x^\infty \int_x^\infty A_1(x, y) A_2(x, z) e^{ik(y+z)} dy dz] dx \quad (3.3)$$

yazılabilir. Eğer $y + z = s$ ve $y - z = \sigma$ dönüşümlerini uygulanırsa, $y = \frac{s+\sigma}{2}$, $z = \frac{s-\sigma}{2}$ elde edilir. Jakobien $|J| = \frac{1}{2}$ olarak bulunur. $x \leq y < \infty$ olduğundan $x \leq \frac{s+\sigma}{2} < \infty$ olur ve buradan

$$2x - s \leq \sigma < \infty \quad (3.4)$$

elde edilir. Ayrıca $x \leq z < \infty$ olduğundan dolayı $x \leq \frac{s-\sigma}{2} < \infty$ 'dur. Buradan

$$-\infty < \sigma \leq s - 2x \quad (3.5)$$

olarak bulunur. Eş.3.4 ve Eş.3.5'dan $-(s - 2x) \leq \sigma \leq s - 2x$ olduğu elde edilmiş olur. Yine $x \leq \frac{s+\sigma}{2} < \infty$ ve $x \leq \frac{s-\sigma}{2} < \infty$ ifadeleri taraf tarafa toplanırsa $2x \leq s < \infty$ olarak bulunur. Bulunan bu eşitsizlikler $\int_x^\infty \int_x^\infty A_1(x, y)A_2(x, z)e^{ik(y+z)}dydz$ ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} \int_x^\infty \int_x^\infty A_1(x, y)A_2(x, z)e^{ik(y+z)}dydz &= \int_x^\infty [\int_x^\infty A_1(x, y)A_2(x, z)e^{ik(y+z)}dy]dz \\ &= \int_{2x}^\infty \left[\int_{-(s-2x)}^{s-2x} A_1\left(x, \frac{s+\sigma}{2}\right)A_2\left(x, \frac{s-\sigma}{2}\right)d\sigma \right] e^{iks} ds \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadede

$$T(x, s) = \frac{1}{2} \int_{-(s-2x)}^{s-2x} A_1\left(x, \frac{s+\sigma}{2}\right)A_2\left(x, \frac{s-\sigma}{2}\right)d\sigma \quad (3.6)$$

dersek

$$\int_x^\infty \int_x^\infty A_1(x, y)A_2(x, z)e^{ik(y+z)}dydz = \int_{2x}^\infty T(x, s)e^{iks}ds \quad (3.7)$$

olarak yazılabilir. Bu durumda Eş.3.3 denklemi

$$0 = \int_0^\infty h(x)[e^{2ikx} + \int_x^\infty A(x, y)e^{ik(x+y)}dy + \int_{2x}^\infty T(x, s)e^{iks}ds]dx$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$0 = \int_0^\infty h(x)e^{2ikx}dx + \int_0^\infty h(x)(\int_x^\infty A(x, y)e^{ik(x+y)}dy)dx + \int_0^\infty h(x)(\int_{2x}^\infty T(x, s)e^{iks}ds)dx \quad (3.8)$$

elde edilir. Eş.3.8 ifadesindeki $\int_0^\infty h(x)(\int_x^\infty A(x, y)e^{ik(x+y)}dy)dx$ integralinde $y = s - x$ dönüşümünü uygulayalım. Bu durumda $dy = ds$ olur. Burada $x \leq y < \infty$ olduğundan dolayı $x \leq s - x < \infty$ 'dur. Buradan s 'nin değişim aralığı $2x \leq s < \infty$ olarak hesaplanır. x 'in değişim aralığı da $0 \leq x < \infty$ olduğundan integralimiz

$$\int_0^\infty h(x) \left(\int_{2x}^\infty A(x, s-x) e^{iks} ds \right) dx \quad (3.9)$$

halini alır. Eş.3.9 integralinde $2x \leq s < \infty$ olduğundan

$$x \leq s/2 < \infty \quad (3.10)$$

bulunur. x 'in değişim aralığı

$$0 \leq x < \infty \quad (3.11)$$

dur. Eş.3.10 ve Eş.3.11 birleştirilirse $0 \leq x \leq s/2 < \infty$ elde edilir. Bu durumda Eş.3.9 integrali

$$\int_0^{s/2} h(x) \left(\int_{2x}^\infty A(x, s-x) e^{iks} ds \right) dx$$

olur. Bu son integral düzenlenirse

$$\int_0^{s/2} \int_{2x}^\infty A(x, s-x) h(x) e^{iks} ds dx$$

şeklini alır. Fubini teoremi kullanılırsa

$$\int_{2x}^\infty \int_0^{s/2} A(x, s-x) h(x) e^{iks} dx ds = \int_{2x}^\infty e^{iks} \left(\int_0^{s/2} A(x, s-x) h(x) dx \right) ds$$

olur. Burada $0 \leq x < \infty$ olduğundan $0 \leq 2x < \infty$ 'dur. Bu durumda

$$\int_0^\infty e^{iks} \left(\int_0^{s/2} A(x, s-x) h(x) dx \right) ds$$

olarak yazılabilir. Son integralde $s = 2s$ dönüşümü uygularsak $ds = 2ds$ olur.

Burada $0 \leq x \leq s/2$ olduğundan $0 \leq 2x \leq s$ yazılabilir. O halde son integral

$$2 \int_0^\infty e^{2iks} \left(\int_0^s A(x, 2s-x) h(x) dx \right) ds$$

şeklini alır. Bu durumda Eş.3.8 integrali aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$0 = \int_0^\infty h(s) e^{2iks} ds + 2 \int_0^\infty e^{2iks} \left(\int_0^s A(x, 2s-x) h(x) dx \right) ds + \int_0^\infty h(x) \left(\int_{2x}^\infty T(x, s) e^{iks} ds \right) dx \quad (3.12)$$

Eş.3.12 ifadesinde

$$\int_0^\infty h(x) \left(\int_{2x}^\infty T(x, s) e^{iks} ds \right) dx$$

integralini ele alalım. $0 \leq x < \infty$ ve $2x \leq s < \infty$ olduğundan $x \leq s/2 < \infty$, yani $0 \leq x \leq s/2$ yazılabilir. Fubini teoreminden

$$\int_0^\infty \int_{2x}^\infty T(x, s) e^{iks} h(x) ds dx = \int_0^\infty \int_0^{s/2} T(x, s) e^{iks} h(x) dx ds$$

yazılır. Burada yine $s = 2s$ dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^{s/2} T(x, s) e^{iks} h(x) dx ds &= 2 \int_0^\infty \int_0^s T(x, 2s) e^{2iks} h(x) dx ds \\ &= 2 \int_0^\infty e^{2iks} \left(\int_0^s T(x, 2s) h(x) dx \right) ds \end{aligned}$$

yazılır. Bu durumda Eş.3.8 integrali

$$0 = \int_0^\infty h(s) e^{2iks} ds + 2 \int_0^\infty e^{2iks} \left(\int_0^s A(x, 2s-x) h(x) dx \right) ds + 2 \int_0^\infty e^{2iks} \left(\int_0^s T(x, 2s) h(x) dx \right) ds$$

olarak yazılabilir. İntegralin lineerlik özelliğinden

$$0 = \int_0^\infty e^{2iks} [h(s) + 2 \int_0^s A(x, 2s-x) h(x) dx + 2 \int_0^s T(x, 2s) h(x) dx] ds$$

olur. Yine integralin lineerlik özelliğinden

$$0 = \int_0^\infty e^{2iks} [h(s) + \int_0^s 2h(x)[A(x, 2s-x) + T(x, 2s)]dx]ds \quad (3.13)$$

yazılabilir. $Imk > 0$ olsun. Çünkü C_+ özelliğinin tanımından $k > 0$ 'dır. Bu durumda

$$\int_0^\infty e^{2iks} ds = \frac{1}{2ik} e^{2iks} \Big|_0^\infty = -\left(\frac{1}{2ik} - \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{2ik} e^{2iks}\right)$$

bulunur. Buradan $|e^{2is(Rek)}| = 1$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} |e^{2iks}| &= \lim_{s \rightarrow \infty} |e^{2is(Rek+ilmk)}| = \lim_{s \rightarrow \infty} |e^{2is(Rek)} e^{-2sImk}| = \\ \lim_{s \rightarrow \infty} \left| \frac{e^{2is(Rek)}}{e^{2s(Imk)}} \right| &= 0 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\int_0^\infty e^{2iks} ds = -\frac{1}{2ik}$$

elde edilir ki bu ifade sıfır olamayacağı için Eş.3.13 eşitliğinin doğru olması için

$$h(s) + \int_0^s 2h(x)[A(x, 2s-x) + T(x, 2s)]dx = 0$$

olmalıdır. Burada $h(s) + \int_0^s 2h(x)[A(x, 2s-x) + T(x, 2s)]dx$ ifadesi Volterra tipi integral denklemi ve $A(x, 2s-x) + T(x, 2s)$ ifadesi Volterra tipi integral denkleminin çekirdeğidir. $A(x, y)$ ve $T(x, y)$ sınırlı ve sürekli fonksiyonlardır. Dolayısıyla denklemimiz homojen Volterra İntegral denklemi olur. Homojen Volterra İntegral denkleminin $L^2(0, s)$ 'de aşıkâr çözümünden başka çözümü yoktur [11]. O halde $h(x) = 0$ olmalıdır. Bu nedenle

$$h(x) \in L_{1,1}(\mathbb{R}_+) \text{ ise, } \forall k > 0 \text{ için } \int_0^\infty h(x)f_1(x, k)f_2(x, k)dx = 0 \Rightarrow h(x) = 0$$

olduğundan $\{l_1, l_2\}$ ikilisi C_+ özelliğine sahiptir denir.

3.2.Tanım

$\{l_1, l_2\}$ ikilisi C_- özelliğine sahiptir denir eğer, $\{g_1(x, k)g_2(x, k)\}$ kümesi $\forall k > 0$ için $L^1(\mathbb{R}_-)$ 'de tam ise. Burada $g_1(x, k), g_2(x, k)$ ile, l 'nin $\lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x, k)e^{ikx}) = 1$ koşulu altındaki çözümünden bahsedilmektedir.

Benzer yolla aşağıdaki teorem ispat edilebilir.

3.2.Teorem

Eğer $j = 1, 2$ için $q_j \in L_{1,1}(\mathbb{R}_-)$ ise, bu durumda $\{l_1, l_2\}$ için C_- özelliği sağlanır.

Burada $L_{1,1}(\mathbb{R}_-)$ ile

$$L_{1,1}(\mathbb{R}_-) := \{q: q(x) = \overline{q(x)}, \int_{-\infty}^0 (1 + |x|)|q(x)|dx < \infty\} \quad (3.14)$$

uzayı kastedilmektedir.

3.1. C_φ ve C_θ Özellikleri

$f(x, k)$ çözümü için tanımlanan C_+ özelliğine benzer olarak, farklı başlangıç değer koşullarına göre elde edilen $\varphi(x, k)$ çözümü için C_φ özelliğini ve $\theta(x, k)$ çözümü için de C_θ özelliğini tanımlayabiliriz. Burada sadece C_φ özelliğini ispat edeceğiz. C_θ özelliği benzer yolla ispat edilebilir.

3.3.Tanım

Eğer $\{\varphi_1(x, k)\varphi_2(x, k)\}$ kümesi $0 < b < \infty$ olacak şekilde bir b için $L^1(0, b)$ 'de tam ise, $\{l_1, l_2\}$ ikilisine C_φ özelliğine sahiptir denir.

Buradan şu anlaşılır; eğer $h(x) \in L^1(0, b)$ ise $\forall k > 0$ için,

$$\int_0^b h(x) \varphi_1(x, k) \varphi_2(x, k) dx = 0 \Rightarrow h = 0 \quad (3.15)$$

sağlanırsa $\{l_1, l_2\}$ ikilisi C_φ özelliğine sahiptir.

Teorem.3.4.'de her $k > 0$ iken bir $h(x) \neq 0$ için $q_1(x) \neq q_2(x)$ olacak şekilde

$$\int_0^\infty h(x) \varphi_1(x, k) \varphi_2(x, k) dx = 0$$

denklemini sağlayan uygun $q_1(x), q_2(x) \in L_{1,1}(\mathbb{R}_+)$ 'nın varlığını ispat edeceğiz.

3.3.Teorem

Eğer $j = 1, 2$ için $q_j \in L_{1,1}(0, b)$ ise, bu durumda $\{l_1, l_2\}$ için C_φ özelliği sağlanır [1].

İspat

Teorem.3.1.'e benzer yolla ispat edeceğiz.

$$\varphi(x, k) = \varphi_0(x, k) + \int_0^x K(x, y) \varphi_0(y) dy := (I + K) \varphi_0, \varphi_0(x, k) := \frac{\sin(kx)}{k} \quad (3.16)$$

ifadesini kullanalım. $\Phi_j(x, k) = k \varphi_j(x, k)$ ($j = 1, 2$) dersek

$$\Phi_1(x, k) = \sin(kx) + \int_0^x K_1(x, y) \sin(ky) dy$$

ve

$$\Phi_2(x, k) = \sin(kx) + \int_0^x K_2(x, s) \sin(ks) ds$$

olarak yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned}\Phi_1(x, k)\Phi_2(x, k) &= [\sin(kx) + \int_0^x K_1(x, y) \sin(ky) dy][\sin(kx) + \int_0^x K_2(x, s) \sin(ks) ds] \\ &= \sin^2(kx) + \int_0^x K_2(x, s) \sin(ks) \sin(kx) ds + \int_0^x K_1(x, y) \sin(ky) \sin(kx) dy + \\ &\quad \int_0^x \int_0^x K_1(x, y) K_2(x, s) \sin(ky) \sin(ks) dy ds\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $\sin(ky) \sin(ks) = -\frac{1}{2}[\cos k(y+s) - \cos k(y-s)]$ eşitliğini kullanırsak

$$\begin{aligned}\Phi_1(x, k)\Phi_2(x, k) &= \sin^2(kx) + \int_0^x [K_1(x, y) + K_2(x, y)] \sin(kx) \sin(ky) dy + \\ &\quad \int_0^x \int_0^x K_1(x, y) K_2(x, s) \{-\frac{1}{2}[\cos[k(y+s)] - \cos[k(y-s)]]\} dy ds\end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki son ifadede $K_1(x, y) + K_2(x, y) = K(x, y)$ olarak alırsak

$$\begin{aligned}\Phi_1(x, k)\Phi_2(x, k) &= \sin^2(kx) + \int_0^x K(x, y) \sin(kx) \sin(ky) dy + \int_0^x \int_0^x K_1(x, y) K_2(x, s) \{-\frac{1}{2}[\cos[k(y+s)] - \\ &\quad \cos[k(y-s)]]\} dy ds\end{aligned}\tag{3.17}$$

elde edilir. Kabul edelim ki her $k > 0$ için

$$0 = \int_0^b h(x) \Phi_1(x, k) \Phi_2(x, k) dx\tag{3.18}$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^b h(x) [\sin^2(kx) + \int_0^x K(x, y) \sin(ky) \sin(kx) dy + \frac{1}{2} \int_0^x \int_0^x K_1(x, y) K_2(x, s) \{\cos[k(y-s)] - \\ &\quad \cos[k(y+s)]\} dy ds] dx\end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^b h(x) \sin^2(kx) dx + \int_0^b h(x) \left\{ \int_0^x K(x, y) \left[-\frac{1}{2} \cos[k(y+x)] - \cos[k(y-x)] \right] dy \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_0^x \int_0^x K_1(x, y) K_2(x, s) [\cos[k(y-s)] - \cos[k(y+s)]] dy ds \right\} dx\end{aligned}$$

yazılabilir. $\sin^2(kx) = \frac{1 - \cos(2kx)}{2}$ eşitliğini kullanalım ve denklemde

$$I = \int_0^b h(x) \left\{ \frac{1}{2} \int_0^x \int_0^x K_1(x, y) K_2(x, s) [\cos[k(y - s)] - \cos[k(y + s)]] dy ds \right\} dx$$

alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} 0 = & \int_0^b \frac{1}{2} h(x) dx - \int_0^b \frac{1}{2} h(x) \cos(2kx) dx + \int_0^b h(x) \left\{ \int_0^x \frac{1}{2} K(x, y) \cos[k(y - x)] dy \right\} dx \\ & - \int_0^b h(x) \left\{ \int_0^x \frac{1}{2} K(x, y) \cos[k(y + x)] dy \right\} dx + I \end{aligned} \quad (3.19)$$

yazılabilir.

$$\int_0^b h(x) \left\{ \int_0^x \frac{1}{2} K(x, y) \cos[k(y - x)] dy \right\} dx \quad (3.20)$$

integralinde $y - x = s$ dönüşümünü uygularsak $dy = ds$ olur. Yine $0 \leq x \leq b$ ve $0 \leq y \leq x$ olduğundan $0 \leq x - s \leq x$ olur. Buradan s için $-x \leq -s \leq 0$ yazılabilir. Buradan

$$0 \leq s \leq x \quad (3.21)$$

olduğu kolayca görülebilir. Dıştaki integralde

$$0 \leq x \leq b \quad (3.22)$$

olduğundan Eş.3.21 ve Eş.3.22 birleştirilirse

$$0 \leq s \leq x \leq b \quad (3.23)$$

bulunur. Bu durumda Eş.3.20 integrali

$$\begin{aligned}
\int_0^b h(x) \left\{ \int_0^x \frac{1}{2} K(x, y) \cos[k(y-x)] dy \right\} dx &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^x K(x, y) \cos[k(y-x)] h(x) dy dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^b \int_s^b K(x, x-s) \cos(ks) h(x) ds dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^b \cos(ks) \left\{ \int_s^b K(x, x-s) h(x) dx \right\} ds
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdide

$$\int_0^b h(x) \left\{ \int_0^x \frac{1}{2} K(x, y) \cos[k(y+x)] dy \right\} dx \quad (3.24)$$

integralinde $y = s - x$ dönüşümünü uygulayalım. Bu durumda $0 \leq y \leq x$ olduğundan $0 \leq s - x \leq x$ ve buradan

$$x \leq s \leq 2x \quad (3.25)$$

bulunur. Dıştaki integralde $0 \leq x \leq b$ olduğundan

$$0 \leq 2x \leq 2b \quad (3.26)$$

yazılabilir. Eş.3.25 ve Eş.3.26 birleştirilirse

$$0 \leq x \leq s \leq 2x \leq 2b \quad (3.27)$$

bulunur. Buradan s 'nin değişim aralığı $0 \leq s \leq 2b$ elde edilir. Şimdide x 'in değişim aralığını bulalım. Eş.3.27 kullanılırsa $\frac{s}{2} \leq x \leq b$ ve $0 \leq x \leq s$ elde edilir. Bu iki ifadeden x 'in üst sınırının en fazla b ve s 'nin minimumu kadar olabileceği ve alt sınırında $\frac{s}{2}$ olduğu görülür. Yani $\frac{s}{2} \leq x \leq \min(b, s)$ olur. Bu durumda Eş.3.24 integrali

$$\begin{aligned}
\int_0^b h(x) \left\{ \int_0^x \frac{1}{2} K(x, y) \cos[k(y+x)] dy \right\} dx &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^x K(x, y) \cos[k(y+x)] h(x) dy dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2b} \int_{\frac{s}{2}}^{\min(b, s)} K(x, s-x) \cos(ks) h(x) ds dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2b} \cos(ks) \left\{ \int_{\frac{s}{2}}^{\min(b, s)} K(x, s-x) h(x) dx \right\} ds
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Son haliyle ifademizi

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^b \frac{1}{2} h(x) dx - \int_0^b \frac{1}{2} h(x) \cos(2kx) dx + \frac{1}{2} \int_0^b \cos(ks) \left\{ \int_s^b K(x, x-s) h(x) dx \right\} ds \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^{2b} \cos(ks) \left\{ \int_{\frac{s}{2}}^{\min(b, s)} K(x, s-x) h(x) dx \right\} ds + I
\end{aligned}$$

olarak yazabiliriz. Şimdi I integraline geri dönelim ve aşağıdaki gibi tekrar yazalım.

$$I = \frac{1}{2} \left[\int_0^b h(x) \left\{ \int_0^x \int_0^x K_1(x, y) K_2(x, s) \cos[k(y-s)] dy ds \right\} dx - \int_0^b h(x) \left\{ \int_0^x \int_0^x K_1(x, y) K_2(x, s) \cos[k(y+s)] dy ds \right\} dx \right]$$

Bu integralde

$$y - s = t \quad (3.28)$$

ve

$$y + s = v \quad (3.29)$$

dönüşümlerini uygulayalım. Eş.3.28 ve Eş.3.29 ifadelerini önce taraf tarafa toplar, sonrada çıkarırsak $y = \frac{v+t}{2}$ ve $s = \frac{v-t}{2}$ eşitlikleri elde edilir. Şimdi

$$I_4 = \int_0^b h(x) \left\{ \int_0^x \int_0^x K_1(x, y) K_2(x, s) \cos[k(y+s)] dy ds \right\} dx$$

integralini alalım. $0 \leq y \leq x$ ve $0 \leq s \leq x$ olduğundan

$$0 \leq v + t \leq 2x \quad (3.30)$$

ve

$$0 \leq v - t \leq 2x \quad (3.31)$$

dir. Eş.3.30 ve Eş.3.31 taraf tarafa toplanırsa $0 \leq v \leq 2x$ elde edilir. Şimdi yeni bölge için sınırları belirleyelim. $y = x$ olduğundan $\frac{v+t}{2} = x$ ve buradan $v + t = 2x$ olur. Yine $s = x$ olduğundan $v - t = 2x$ bulunur. Diğer taraftan $y = 0$ olduğunda $\frac{v+t}{2} = 0$ ve buradan da $v = -t$ bulunur. $s = 0$ için $\frac{v-t}{2} = 0$ olur ki buradan da $v = t$ olarak bulunur. Yani yeni bölgemiz

$$A_1 = \{(v, t): v + t = 0, v - t = 0\}$$

ve

$$A_2 = \{(v, t): v + t = 2x, v - t = 2x\}$$

eğrileri arasında kalan bölge olarak belirlenir. Buna göre I_4 integralini tekrar yazarsak

$$I_4 = \frac{1}{2} \int_0^x \int_{-v}^v K_1 \left(x, \frac{v+t}{2} \right) K_2 \left(x, \frac{v-t}{2} \right) \cos(kv) dt dv + \frac{1}{2} \int_x^{2x} \int_{-(2x-v)}^{2x-v} K_1 \left(x, \frac{v+t}{2} \right) K_2 \left(x, \frac{v-t}{2} \right) dt dv$$

halini alır. Bu son haliyle $v = s$ dönüşümünü uygulayalım ve bir $w(s)$ fonksiyonunu tanımlayalım öyleki

$$w(s) = \begin{cases} s & , \quad 0 \leq s \leq x \text{ için} \\ 2x - s, & x \leq s \leq 2x \text{ için} \end{cases}$$

olsun. Bu durumda

$$I_4 = \frac{1}{2} \int_0^{2x} \int_{-w(s)}^{w(s)} K_1 \left(x, \frac{t+s}{2} \right) K_2 \left(x, \frac{s-t}{2} \right) \cos(ks) dt ds$$

olur. Eğer

$$B_2(x, s) = \frac{1}{2} \int_{-w(s)}^{w(s)} K_1 \left(x, \frac{t+s}{2} \right) K_2 \left(x, \frac{s-t}{2} \right) dt$$

dersek

$$I_4 = \int_0^{2x} B_2(x, s) \cos(ks) ds$$

yazılabilir. Şimdi

$$I_3 = \frac{1}{2} \int_0^x \int_0^x K_1(x, y) K_2(x, s) \cos[k(y - s)] dy ds$$

integralini göz önüne alalım. Yukarıdaki dönüşümlerden $y = \frac{v+t}{2}$ ve $s = \frac{v-t}{2}$ elde etmiş ve A_1 ile A_2 bölgelerini yazmıştık. Şimdiki integralde de yeni bölgeler benzer şekilde

$$C_1 = \{(v, t): v + t = 0, v - t = 2x\}$$

ve

$$C_2 = \{(v, t): v - t = 0, v + t = 2x\}$$

eğrileri arasında kalan bölge olarak belirlenir. Bu durumda

$$I_3 = \frac{1}{2} \left[\int_0^x \int_t^{2x-t} K_1 \left(x, \frac{v+t}{2} \right) K_2 \left(x, \frac{v-t}{2} \right) \cos(kt) dv dt + \int_{-x}^0 \int_{-t}^{2x+t} K_1 \left(x, \frac{v+t}{2} \right) K_2 \left(x, \frac{v-t}{2} \right) \cos(kt) dv dt \right]$$

yazılabilir. Burada ki ilk integralde t ile v 'nin sınırları $0 \leq t \leq x$ ve $t \leq v \leq 2x - t$ dir. $t = s$ dönüşümü uygularsak $dt = ds$ yazılabilir. Bu durumda sınırlarımız

$0 \leq s \leq x$ ve $s \leq v \leq 2x - s$ şeklinde değişir. Yine ikinci integralimizi göz önüne alırsak t ve v 'nin sınırları $-x \leq t \leq 0$ ve $-t \leq v \leq 2x + t$ şeklindedir. Burada $t = -s$ dönüşümünü uygularsak $dt = -ds$ olur. Bu dönüşüm altında sınırlarımız $-x \leq -s \leq 0$ yani $0 \leq s \leq x$ ve $s \leq v \leq 2x - s$ olarak değişir. Uyguladığımız bu dönüşümler altında

$$I_3 = \frac{1}{2} [\int_0^x \int_s^{2x-s} K_1\left(x, \frac{v+s}{2}\right) K_2\left(x, \frac{v-s}{2}\right) \cos(ks) dv ds + \int_0^x \int_s^{2x-s} K_1\left(x, \frac{v-s}{2}\right) K_2\left(x, \frac{v+s}{2}\right) \cos(ks) dv ds]$$

olur. t 'nin değişim aralığı $0 \leq t \leq x$ olduğundan ve $t = s$ ve $t = -s$ dönüşümlerini uyguladığımızdan

$$I_3 = \int_0^x \frac{1}{2} \int_{|s|}^{2x-|s|} \left[K_1\left(x, \frac{s+v}{2}\right) K_2\left(x, \frac{v-s}{2}\right) + K_1\left(x, \frac{v-s}{2}\right) K_2\left(x, \frac{v+s}{2}\right) \right] \cos(ks) dv ds$$

şeklinde yazılabilir. Bu integralde

$$B_1 = \frac{1}{2} \int_{|s|}^{2x-|s|} \left[K_1\left(x, \frac{s+v}{2}\right) K_2\left(x, \frac{v-s}{2}\right) + K_1\left(x, \frac{v-s}{2}\right) K_2\left(x, \frac{v+s}{2}\right) \right] dv$$

olarak yazarsak

$$I_3 = \int_0^x B_1(x, s) \cos(ks) ds$$

olarak elde ederiz. I_3 ve I_4 integrallerinde Fubini teoremi uygulanırsa I integralinin son halini

$$I = \int_0^b \int_s^b h(x) B_1(x, s) \cos(ks) dx ds - \int_0^{2b} \int_{\frac{s}{2}}^b h(x) B_2(x, s) \cos(ks) dx ds \quad (3.32)$$

olarak yazabiliriz. Eş.3.32 integralini kullanırsak ifademiz

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^b h(x) dx - \int_0^b h(x) \cos(2kx) dx + \int_0^b \int_s^b h(x) K(x, x-s) \cos(ks) dx ds - \\
&\int_0^{2b} \int_{\frac{s}{2}}^{\min(b,s)} h(x) K(x, s-x) \cos(ks) dx ds + \int_0^b \int_s^b h(x) B_1(x, s) \cos(ks) dx ds - \\
&\int_0^{2b} \int_{\frac{s}{2}}^b h(x) B_2(x, s) \cos(ks) dx ds
\end{aligned}$$

olur. Burada

$$\int_0^b h(x) \cos(2kx) dx$$

integralinde $2x = s$ dönüşümünü uygularsak $dx = \frac{ds}{2}$ olur. Dolayısıyla $0 \leq x \leq b$ olduğundan $0 \leq \frac{s}{2} \leq b$ ve buradan da $0 \leq s \leq 2b$ elde edilir. Bu dönüşüm altında integralimiz

$$\int_0^b h(x) \cos(2kx) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2b} h\left(\frac{s}{2}\right) \cos(ks) ds$$

olarak bulunur. Eş.3.19 ve Eş.3.32 ifadelerinde $k \rightarrow \infty$ için

$$\int_0^b h(x) dx = 0$$

olur ve $0 < k < \infty$ için $L^2(0, b)$ 'de

$$\int_0^b h(s) \cos(ks) ds = 0$$

olması ancak $h(s) = 0$ olması ile mümkündür. Çünkü $\cos(ks)$ sistemi $0 < k < \infty$ için $L^2(0, b)$ 'de tamdır [10]. Dolayısıyla yukarıdaki asıl integralimizin sıfır olması ancak

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{h(\frac{s}{2})}{2} + \int_s^b h(x) K(x, x-s) dx - \int_{s/2}^{\min(b,s)} h(x) K(x, s-x) dx + \int_s^b h(x) B_1(x, s) dx - \\
&\int_{s/2}^b h(x) B_2(x, s) dx
\end{aligned} \tag{3.33}$$

olması ile mümkündür. $b < \infty$ ve $x > b$ için $h(x) = 0$ ise buradan

$$h\left(\frac{s}{2}\right) = 2 \int_s^b h(x)[K(x, x-s) + B_1(x, s)]dx - 2 \int_{s/2}^b h(x)[K(x, s-x) + B_2(x, s)]dx$$

elde edilir. Burada $\frac{s}{2} = y$ dönüşümünü uygularsak $ds = 2dy$ olur. Çekirdek fonksiyonlarının özelliklerinden dolayı K , B_1 ve B_2 çekirdekleri sınırlı ve sürekli fonksiyonlardır. Bunları denklemde yerine yazarsak

$$h(y) \leq c \int_{2y}^b h(x)dx + c \int_y^b h(x)dx$$

ve buradan da

$$|h(y)| \leq c \int_{2y}^b |h(x)|dx + c \int_y^b |h(x)|dx$$

yazılabilir. Burada $c > 0$ sabiti $2y = s$ dönüşümü altında $2K$, $2B_1$ ve $2B_2$ çekirdeklerinin sınırlılığından dolayı alınabilmektedir. Şimdi $0 < \varepsilon < b$ olacak şekilde bir ε seçelim öyle ki $c\varepsilon < 1$ ve $b - \varepsilon < 2b - 2\varepsilon$ sağlayacak kadar küçük olsun. Bu durumda

$$\max_{b-\varepsilon \leq y \leq b} |h(y)| \leq c\varepsilon \max_{b-\varepsilon \leq y \leq b} |h(y)| \quad (3.34)$$

yazılabilir. x 'i eğer $b - \varepsilon < x < b$ aralığına sıkıştırırsak Eş.3.34 eşitsizliği $h(x) = 0$ olduğunu verir. Bu argümanı sonlu çoklukta adım için tekrarlırsak $0 < x < b$ için $h(x) = 0$ elde edilir.

Bu da Teorem.3.3'ün ispatını verir.

Teorem.3.3, $b = \infty$ için geçerli değildir. Çünkü yukarıdaki ispatın son bölümünde sonlu çoklukta adım için ispat yapılabiliyor. Sonsuz çokluk için bu geçerli değildir.

3.4. Teorem

$q_1(x), q_2(x) \in L_{1,1}(\mathbb{R}_+)$ için bir $h(x) \neq 0$ vardır öyleki her $k > 0$ için

$$\int_0^\infty h(x) \varphi_1(x, k) \varphi_2(x, k) dx = 0 \quad (3.35)$$

dır [1].

İspat

Burada $L_{1,1}(\mathbb{R}_+)$ 'da iki $q_1(x)$ ve $q_2(x)$ potansiyellerini tanımlayalım öyle ki $\forall k > 0$ için

$$S_1(k) = S_2(k),$$

olsun. l_1 ve l_2 operatörleri aynı negatif $-k_1^2$ özdeğere sahip olsun. Fakat Eş.2.23'da tanımlı s_j 'ler için, $s_1 \neq s_2$ alalım öyle ki $q_1(x) \neq q_2(x)$ olsun. $h(x) := q_2(x) - q_1(x)$ diyelim. $h(x) \neq 0$ için Eş.3.35'nin sağlandığını gösterelim. $l_1 \varphi_1(x, k) = k^2 \varphi_1(x, k)$ ve $l_2 \varphi_2(x, k) = k^2 \varphi_2(x, k)$ alalım. Birinci denklemden ikinciye çıkarırsak

$$-\varphi_1''(x, k) + \varphi_2''(x, k) + q_1(x) \varphi_1(x, k) - q_2(x) \varphi_2(x, k) = k^2 \varphi_1(x, k) - k^2 \varphi_2(x, k)$$

olur. Burada $\varphi(x, k) = \varphi_1(x, k) - \varphi_2(x, k)$ dersek Eş.2.3 sınır şartlarından dolayı $\varphi(0, k) = \varphi'(0, k) = 0$ olduğu kolayca görülebilir. Şimdi denklemi buna göre tekrar düzenleyelim.

$$-\varphi''(x, k) - k^2 \varphi(x, k) = q_2(x) \varphi_2(x, k) - q_1(x) \varphi_1(x, k)$$

yazılabilir. Eşitliğin sağ tarafına $q_1(x)\varphi_2(x, k)$ ekleyip çıkardığımızda eşitlik değişmeyeceğinden

$$-\varphi''(x, k) - k^2\varphi(x, k) = q_2(x)\varphi_2(x, k) - q_1(x)\varphi_1(x, k) + q_1(x)\varphi_2(x, k) - q_1(x)\varphi_2(x, k) \quad (3.36)$$

dersek

$$-\varphi''(x, k) - k^2\varphi(x, k) + q_1(x)\varphi(x, k) = h(x)\varphi_2(x, k), \quad \varphi(x, k) = \varphi_1(x, k) - \varphi_2(x, k), \quad \varphi(0, k) = \varphi'(0, k) = 0 \quad (3.37)$$

elde ederiz. Eş.3.37 eşitliğini $\varphi_1(x, k)$ ile çarpar ve $(0, \infty)$ aralığında integralini alırsak

$$\int_0^\infty h(x)\varphi_2(x, k)\varphi_1(x, k)dx = \int_0^\infty [-\varphi''(x, k)\varphi_1(x, k) - k^2\varphi(x, k)\varphi_1(x, k) + q_1(x, k)\varphi(x, k)\varphi_1(x, k)]dx$$

olur. Sağ taraftaki $\int_0^\infty -\varphi''(x, k)\varphi_1(x, k)dx$ integralinde iki defa kısmi integrasyon uygulayarak integralin lineerlik özelliğini kullanırsak

$$\begin{aligned} \int_0^\infty h(x)\varphi_2(x, k)\varphi_1(x, k)dx &= -\varphi_1(x, k)\varphi'(x, k)|_0^\infty + \varphi'_1(x, k)\varphi(x, k)|_0^\infty - \\ &\int_0^\infty \varphi(x, k)\varphi'_1(x, k)dx + \int_0^\infty q_1(x)\varphi(x, k)\varphi_1(x, k)dx - \int_0^\infty k^2\varphi(x, k)\varphi_1(x, k)dx \\ &= (-\varphi_1(x, k)\varphi'(x, k) + \varphi'_1(x, k)\varphi(x, k))\Big|_0^\infty + \\ &\int_0^\infty [\varphi'_1(x, k)\varphi(x, k) + q_1(x)\varphi(x, k)\varphi_1(x, k) - k^2\varphi(x, k)\varphi_1(x, k)]dx \\ &= (-\varphi_1(x, k)\varphi'(x, k) + \varphi'_1(x, k)\varphi(x, k))\Big|_0^\infty + \\ &\int_0^\infty [\varphi'_1(x, k) + q_1(x)\varphi_1(x, k) - k^2\varphi_1(x, k)]\varphi(x, k)dx \end{aligned}$$

bulunur. $\varphi'_1(x, k) + q_1(x)\varphi_1(x, k) - k^2\varphi_1(x, k) = 0$ olduğundan $\forall k > 0$ için

$$\int_0^\infty h(x)\varphi_2(x,k)\varphi_1(x,k)dx = (-\varphi_1(x,k)\varphi'(x,k) + \varphi'_1(x,k)\varphi(x,k))\Big|_0^\infty \quad (3.38)$$

yazılır. Bu ifadede alt sınırı yerine koyduğumuzda sıfır olacağı aşıkardır. Üst sınırı yerine koyduğumuzda ise $\lim_{x \rightarrow \infty}(\varphi_1(x,k) - \varphi_2(x,k)) = 0$ olur. $q_1(x)$ ve $q_2(x)$ farklı alındığından ispat tamamlanmış olur.

4. VERİ OLARAK I -FONKSİYONLU TERS PROBLEM

4.1. Teklik Teoremi

Eş.2.9 problemini $q(x) \in L_{1,1}(\mathbb{R}_+)$ için ele alalım. Burada $f(x, k)$, $\mathbb{C}_+$ 'da analitiktir. I -fonksiyonu

$$I(k) = \frac{f'(0, k)}{f(0, k)} \quad (4.1)$$

olarak tanımlanır. Eş.4.1'den $I(k)$ 'nın, $\mathbb{C}_+$ 'da mevcut sonlu çoklukta ki basit kutup noktaları olan ik_j ($1 \leq j \leq J$)'ler de meromorfik olduğu aşıkardır. Burada meromorfiklik ile, bir bölge de (burada $\mathbb{C}_+$) sonlu sayıda tekil noktası bulunan (burada ik_j 'ler) kompleks değişkenli tek değerli fonksiyonlardan bahsedilmektedir. Gerçekten burada ik_j 'ler $f(0, k)$ 'nın basit sıfırları ve Eş.2.4'den dolayı $f'(0, ik_j) \neq 0$ 'dır. Burada Eş.2.12'den

$$f'(x, k) = ik e^{ikx} - A(x, x) + \int_x^\infty A_x(x, y) e^{iky} dy$$

dir. $x = 0$ için

$$f'(0, k) = ik - A(0, 0) + \int_0^\infty A_x(0, y) e^{iky} dy$$

ve $k = ik_j$ için

$$f'(0, ik_j) = ik_j - A(0, 0) + \int_0^\infty A_x(0, y) e^{ik_j y} dy \neq 0$$

yazılır.

Eş.4.1 ifadesinde $f'(0, k)$ ve $f(0, k)$, ik_j noktasında analitik, ik_j 'de I 'nın basit kutup noktası ve $f'(0, ik_j) \neq 0$ olduğundan Teorem.2.7 kullanılırsa

$$a_j = \text{Res}_{k=ik_j} I(k) = \frac{f'(0, ik_j)}{f(0, ik_j)} = -\frac{c_j}{2ik_j}, \quad k_j > 0; \quad a_0 = \frac{f'(0,0)}{f(0,0)} \quad (4.2)$$

dır [1]. Burada c_j 'ler Eş.2.27 'de olduğu gibidir ve

$$-\frac{c_j}{2ik_j} = -\frac{ic_j}{-2k_j} = i \frac{c_j}{2k_j}$$

dir. Ayrıca

$$\int_0^\infty \varphi_j^2(x, ik_j) dx = \frac{1}{c_j} = \|\varphi_j\|^2 > 0$$

olduğundan $\text{Im} a_j > 0$ ($1 \leq j \leq J$) olur.

4.1. Teorem

$a_0 \neq 0$ 'dır ancak ve ancak $f(0,0) = 0$ ise.

İspat

Önce $f(0,0) = 0$ için $a_0 \neq 0$ olduğunu ispat edelim.

$f(0,0) = 0$ olduğundan

$$1 + \int_0^\infty A(0, y) dy = 0$$

dır. Yani

$$\int_0^\infty A(0, y) dy = -1$$

olur. Her iki tarafın x 'e göre türevini alırsak

$$\int_0^{\infty} A_x(0, y) dy = 0$$

elde edilir. Her iki tarafa $-A(0,0)$ eklersek

$$-A(0,0) + \int_0^{\infty} A_x(0, y) dy = -A(0,0)$$

yazılabilir. Eş.2.15 eşitliğinden $A(x, y)$ çekirdeğinin ancak $q(x) = 0$ ($q(x) = 0$ olursa $A(0,0) = 0$ olur ki bu durumda $\int_0^{\infty} A(0, y) dy = -1$ olamaz) veya $x + y \rightarrow \infty$ olması durumunda sıfır olabilir. Bunun dışındaki durumlar da $A(x, y)$ çekirdeği sıfırdan farklı olacağından dolayı, eşitliğin sağ tarafı $x = y = 0$ olması nedeniyle sıfırdan farklı olur. Eşitliğin sol tarafı ise $f'(0,0)$ 'a eşit olduğundan $f'(0,0) \neq 0$, yani $a_0 \neq 0$ olur.

Tersine $a_0 \neq 0$ için $f(0,0) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$1 + \int_0^{\infty} A(0, y) dy \neq 0$$

olur. Buradan

$$\int_0^{\infty} A(0, y) dy \neq -1$$

dir. Yani $\int_0^{\infty} A(0, y) dy > -1$ veya $\int_0^{\infty} A(0, y) dy < -1$ 'dir.

$a_0 \neq 0$ olduğu için $f'(0,0) \neq 0$ olur. Burada

$$f'(0,0) = -A(0,0) + \int_0^{\infty} A_x(0, y) dy$$

olduğundan dolayı

$$-A(0,0) + \int_0^{\infty} A_x(0, y) dy \neq 0$$

dır. Yani $-A(0,0) + \int_0^\infty A_x(0,y)dy > 0$ veya $-A(0,0) + \int_0^\infty A_x(0,y)dy < 0$ olur.
 $-A(0,0) + \int_0^\infty A_x(0,y)dy > 0$ alalım. Her iki tarafın x 'e göre integralini alırsak

$$-\int_0^\infty A(0,0)dx + \int_0^\infty \int_0^\infty A_x(0,y)dy dx > 0$$

yazılabilir. Fubini teoreminden

$$-\int_0^\infty A(0,0)dx + \int_0^\infty \int_0^\infty A_x(0,y)dxdy > 0$$

ve buradan da

$$-\int_0^\infty A(0,0)dx + \int_0^\infty A(0,y)dy > 0$$

elde edilir. $\int_0^\infty A(0,0)dx$ herhangi bir sabit sayı olduğundan her iki tarafa $\int_0^\infty A(0,0)dx = c > 0$ sabit sayısını eklersek eşitsizlik değişmeyeceğinden

$$\int_0^\infty A(0,y)dy > c$$

olarak yazabiliriz. $\int_0^\infty A(0,y)dy < -1$ olduğunu kabul edersek

$$-1 > \int_0^\infty A(0,y)dy > c$$

olur ki bu da $c > 0$ kabulümüz ile çelişir. Yani $\int_0^\infty A(0,y)dy < -1$ olamaz. Benzer şekilde $-A(0,0) + \int_0^\infty A_x(0,y)dy < 0$ alarak $\int_0^\infty A(0,y)dy > -1$ olamayacağı, $c < 0$ alınarak gösterilebilir. Dolayısıyla $f(0,0) \neq 0$ kabulümüz yanlış, yani $f(0,0) = 0$ olmak zorundadır.

Bu da ispatı tamamlar.

Amacımız Eş.4.2 ifadesinde $q(x) \in L_{1,1}(\mathbb{R}_+)$ için $f(0,0) = 0$ olması halinde $\dot{f}(0,0)$ 'ın var ve $\dot{f}(0,0) \neq 0$ olduğunu ispat etmek olacaktır.

4.1.Lemma

$I(k)$ fonksiyonu bir $m(k)$ Weyl fonksiyonuna denktir [1].

İspat

Burada bahsi geçen Weyl fonksiyonu $Imk > 0$ için $\theta(x, k) + m(k)\varphi(x, k) \in L^2(\mathbb{R}_+)$ olacak şekilde bir fonksiyondur.

$f(x, k)$, $\varphi(x, k)$ ve $\theta(x, k)$ çözümleri

$$f(x, k) = c(k)[\theta(x, k) + m(k)\varphi(x, k)]$$

olacak şekilde birbirlerinin lineer kombinasyonu olarak yazılabilirler. Çünkü $f(x, k)$, $\varphi(x, k)$ ve $\theta(x, k)$; $-f'' + q(x)f = k^2f$ Sturm-Liouville denkleminin farklı başlangıç değer koşullarına göre elde edilen üç farklı çözümüdür. Bu Wronskiye formülünden kolayca görülebilir [10].

$$f(x, k) = c(k)[\theta(x, k) + m(k)\varphi(x, k)]$$

olarak alalım. Burada $c(k) \neq 0$ 'dır ($Imk > 0$). Buradan

$$I(k) = \frac{f'(0,k)}{f(0,k)} = \frac{c(k)[\theta'(0,k) + m(k)\varphi'(0,k)]}{c(k)[\theta(0,k) + m(k)\varphi(0,k)]}$$

olduğu görülür. Eş.2.3 ve Eş.2.4 başlangıç değer koşullarından dolayı

$$I(k) = m(k)$$

elde edilir. Bu da ispatı verir.

Temel teklik teoremi aşağıdaki şekilde verilebilir.

4.2. Teorem

Eğer $q_m(x) \in L_{1,1}(\mathbb{R}_+)$ ($m = 1, 2$) potansiyelleri aynı $I(k)$ fonksiyonunu üretiyorsa $q_1(x) = q_2(x)$ 'dir [1].

İspat

Eş.2.9 denkleminde $q_m(x) \in L_{1,1}(\mathbb{R}_+)$ ($m = 1, 2$)'ler için uygun Jost çözümler $f_m(x, k)$ 'ler olsun. Bu durumda

$$l_1 f_1(x, k) := -f_1''(x, k) + q_1(x)f_1(x, k) = k^2 f_1(x, k)$$

ve

$$l_2 f_2(x, k) := -f_2''(x, k) + q_2(x)f_2(x, k) = k^2 f_2(x, k)$$

denklemlerini yazabiliriz. Bu iki denklemi taraf tarafa çıkarırsak

$$-f_1''(x, k) + f_2''(x, k) + q_1(x)f_1(x, k) - q_2(x)f_2(x, k) = k^2 f_1(x, k) - k^2 f_2(x, k)$$

elde edilir. Bu denklemi

$$-(f_1''(x, k) - f_2''(x, k)) + q_1(x)f_1(x, k) - q_2(x)f_2(x, k) = k^2(f_1(x, k) - f_2(x, k))$$

şeklinde düzenleyelim ve $f_1(x, k) - f_2(x, k) = \omega(x, k)$ yazalım. Bu durumda

$$-\omega''(x, k) + q_1(x)f_1(x, k) - q_2(x)f_2(x, k) - k^2\omega(x, k) = 0$$

olarak yazabiliriz. Denklemin her iki tarafından $q_1(x)f_2(x, k)$ ifadesini çıkarırsak

$$-\omega''(x, k) + q_1(x)f_1(x, k) - q_1(x)f_2(x, k) - k^2\omega(x, k) - q_2(x)f_2(x, k) = -q_1(x)f_2(x, k)$$

elde edilir. Denklemi tekrar düzenlersek

$$-\omega''(x, k) + q_1(x)[f_1(x, k) - f_2(x, k)] - k^2\omega(x, k) = q_2(x)f_2(x, k) - q_1(x)f_2(x, k)$$

ve buradan

$$-\omega''(x, k) + q_1(x)\omega(x, k) - k^2\omega(x, k) = (q_2(x) - q_1(x))f_2(x, k)$$

yazılabilir. Burada $q_2(x) - q_1(x) = p(x)$ dersek

$$-\omega''(x, k) + q_1(x)\omega(x, k) - k^2\omega(x, k) = p(x)f_2(x, k)$$

yazılabilir. Jost çözümünün özelliğinden dolayı $x \rightarrow \infty$ için $|\omega(x, k)| + |\omega'(x, k)| = o(1)$ olduğu kolayca görülebilir [10]. Yani $x \rightarrow \infty$ için

$$-\omega''(x, k) + q_1(x)\omega(x, k) - k^2\omega(x, k) = p(x)f_2(x, k), \quad |\omega(x, k)| + |\omega'(x, k)| = o(1), \quad (4.3)$$

olarak düzenleyebiliriz. Eş.4.3 ifadesini $f_1(x, k)$ ile çarpıp ve 0'dan ∞ 'a kadar integralini alırsak

$$\begin{aligned} \int_0^\infty p(x)f_2(x, k)f_1(x, k)dx &= -\int_0^\infty \omega''(x, k)f_1(x, k)dx + \int_0^\infty q_1(x)\omega(x, k)f_1(x, k)dx - \\ &\int_0^\infty k^2\omega(x, k)f_1(x, k)dx \\ &= -f_1(x, k)\omega'(x, k)|_0^\infty + \int_0^\infty \omega'(x, k)f_1'(x, k)dx + \\ &\int_0^\infty q_1(x)\omega(x, k)f_1(x, k)dx - \int_0^\infty k^2\omega(x, k)f_1(x, k)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -f_1(x, k)\omega'(x, k)|_0^\infty + f_1'(x, k)\omega(x, k)|_0^\infty - \\
&\int_0^\infty \omega(x, k)f_1''(x, k)dx + \int_0^\infty q_1(x)\omega(x, k)f_1(x, k)dx - \int_0^\infty k^2\omega(x, k)f_1(x, k)dx \\
&= (-\omega'(x, k)f_1(x, k) + \omega(x, k)f_1'(x, k))|_0^\infty - \int_0^\infty \omega(x, k)[f_1''(x, k) + \\
&q_1(x)f_1(x, k) - k^2f_1(x, k)]dx
\end{aligned}$$

olur. $f_1''(x, k) + q_1(x)f_1(x, k) - k^2f_1(x, k) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty p(x)f_2(x, k)f_1(x, k)dx &= [-\omega'(\infty, k)f_1(\infty, k) + \omega(\infty, k)f_1'(\infty, k)] - \\
&[-\omega'(0, k)f_1(0, k) + \omega(0, k)f_1'(0, k)]
\end{aligned}$$

elde edilir. $x \rightarrow \infty$ için $|\omega(x, k)| + |\omega'(x, k)| = o(1)$ olduğundan $\omega'(\infty, k) = 0$ ve $\omega(\infty, k) = 0$ olur. Buradan

$$\int_0^\infty p(x)f_2(x, k)f_1(x, k)dx = \omega'(0, k)f_1(0, k) - \omega(0, k)f_1'(0, k)$$

yazılabilir. $\omega(0, k) = f_1(0, k) - f_2(0, k)$ ve $\omega'(0, k) = f_1'(0, k) - f_2'(0, k)$ olduğundan ifadede yazılırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty p(x)f_2(x, k)f_1(x, k)dx &= [f_1'(0, k) - f_2'(0, k)]f_1(0, k) - [f_1(0, k) - \\
&f_2(0, k)]f_1'(0, k) \\
&= f_1'(0, k)f_1(0, k) - f_2'(0, k)f_1(0, k) - f_1(0, k)f_1'(0, k) + \\
&f_2(0, k)f_1'(0, k) \\
&= f_1'(0, k)f_2(0, k) - f_2'(0, k)f_1(0, k) \\
&= f_1(0, k)f_2(0, k)\left[\frac{f_1'(0, k)}{f_1(0, k)} - \frac{f_2'(0, k)}{f_2(0, k)}\right]
\end{aligned}$$

yazılabilir. $I_1(k) = \frac{f_1'(0, k)}{f_1(0, k)}$ ve $I_2(k) = \frac{f_2'(0, k)}{f_2(0, k)}$ ifadeleri yerine yazılarak ve hipotezden $I_1(k) = I_2(k)$ olduğu kullanılırsa

$$\int_0^\infty p(x)f_2(x, k)f_1(x, k)dx = f_1(0, k)f_2(0, k)[I_1(k) - I_2(k)] = 0 \quad (4.4)$$

elde edilir. C_+ özelliğinden (Teorem.3.1) dolayı $p(x) = 0$ olur. Bu da teoremin ispatını verir.

Marchenko, $x \geq 0$ için Eş.2.12 gösteriminin çekirdek fonksiyonu olan $A(x, y)$ 'nin, $0 \leq x \leq y < \infty$ için

$$A(x, y) + \int_x^\infty A(x, s)F(s + y)ds + F(x + y) = 0 \quad (4.5)$$

denklemini sağladığını ve Eş.4.5 denkleminin her $x > 0$ için bir tek $A(x, y) \in L_1[x, \infty)$ çözümünün var olduğunu göstermiştir. Eş.4.5 denkleme ters saçılma probleminin temel denklemi denir ve Marchenko denklemi olarak bilinir [9]. Burada

$$F(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty [1 - S(k)]e^{ikx}dx + \sum_{j=1}^J s_j e^{-k_j x} := F_s(x) + F_d(x), \quad S(k) = \frac{f(0, -k)}{f(0, k)} \quad (k \in \mathbb{R}) \quad (4.6)$$

ve

$$q(x) = -2 \frac{dA(x, x)}{dx} \quad (4.7)$$

dir. Eğer

$$A(0, y) := \begin{cases} A(0, y) & , \quad y \geq 0 \\ 0 & , \quad y < 0 \end{cases}$$

olacak şekilde çekirdek fonksiyonunu yeniden tanımlarsak, bu fonksiyon $-\infty < y < \infty$ için

$$F(y) + A(0, y) + \int_0^\infty A(0, s)F(s + y)ds = A(0, -y) \quad (4.8)$$

denklemini sağlar. Bu $A(0, y)$ çekirdeği

$$f(0, k) = 1 + \int_0^\infty A(0, y) e^{iky} dy := 1 + \tilde{A}(k) \quad (4.9)$$

olacak şekildeki $f(k)$ verisine denk olarak tanımlanır.

4.3. Teorem

Eğer $q(x) \in L_{1,1}(\mathbb{R}_+)$ ve $f(0,0) = 0$ ise, $\dot{f}(0,0)$ vardır ve $\dot{f}(0,0) \neq 0$ 'dır [1].

İspat

$\tilde{A}_1(k) := \int_0^\infty e^{ikt} A_1(t) dt$ olmak üzere $f(0, k) = ik\tilde{A}_1(k)$, $\tilde{A}_1(0) \neq 0$ ve $A_1(t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ olduğunu ispat edeceğiz.

Burada $A_1(t) := \int_t^\infty A(s) ds$, $\tilde{A}(k) := f(k) - 1$ ve olarak alınmıştır. $A(x, y)$ ifadesi Eş.2.12 şeklinde tanımlıdır ve Eş.2.13'den $A(0, y) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ 'dir.

$\tilde{A}(k) := f(k) - 1$ ifadesini alalım. Burada ki

$$\tilde{A}(k) = \int_0^\infty A(0, y) e^{iky} dy$$

eşitliğinde kısmi integrasyon uygularsak

$$\tilde{A}(k) = -e^{ikt} A_1(t) \Big|_0^\infty + ik\tilde{A}_1(k) = ik\tilde{A}_1(k) - 1$$

elde edilir [10]. Burada

$$0 = f(0,0) = 1 + \int_0^\infty A(0, y) dy = 1 + A_1(0)$$

olduğundan $A_1(0) = -1$ 'dir. $\tilde{A}(k) := f(k) - 1$ olduğundan

$$ik\tilde{A}_1(k) - 1 = f(0, k) - 1$$

ve buradan

$$f(0, k) = ik\tilde{A}_1(k)$$

bulunur. Teoremdede ki temel zorluk $A_1 \in L^1(\mathbb{R}_+)$ olduğunu göstermektir. Sonuçta

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x+k) - f(x, 0)}{k}$$

ifadesinde $x = 0$ için $f(0, 0) = 0$ olduğundan

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k)}{k} = \dot{f}(0, 0)$$

dır. $\dot{f}(0, 0) \neq 0$ olduğunun ispatı için

$$\overline{f(x, k)}f'(x, k) - f(x, k)\overline{f'(x, k)} = 2ik \quad (4.10)$$

Wronskiyen formülünde $x = 0$ için

$$f(0, -k)f'(0, k) - f(0, k)f'(0, -k) = 2ik \quad (4.11)$$

olduğunu kullanacağız. Eş.4.11 ifadesini k ile bölelim ve $k \rightarrow 0$ için limitini alalım.

Bu durumda

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, -k)f'(0, k)}{k} - \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k)f'(0, -k)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} 2i = 2i$$

olur. Burada $\lim_{k \rightarrow 0} f'(0, k) = f'(0, 0)$ limitinin var ve $\dot{f}(0, -k) = -\dot{f}(0, k)$ olduğunu kullanırsak

$$-\dot{f}(0, 0)f'(0, 0) - \dot{f}(0, 0)f'(0, 0) = 2i$$

olur. Buradan da

$$-2\dot{f}(0, 0)f'(0, 0) = 2i$$

elde edilir ki bu da

$$-\dot{f}(0, 0)f'(0, 0) = i$$

olduğunu verir. Bu eşitlik $\dot{f}(0, 0)$ 'ın var ve $\dot{f}(0, 0) \neq 0$ olduğunu verir. Eş.2.12 çözüm denklemini ele alalım. Burada x 'e göre türev alırsak

$$f'(x, k) = ike^{ikx} - A(x, x) + \int_x^\infty A_x(x, y)e^{iky} dy$$

ve $x = 0$ için

$$f'(0, k) = ik - A(0, 0) + \int_0^\infty A_x(0, y)e^{iky} dy \quad (4.12)$$

dır. Buradan da $k = 0$ için

$$f'(0, 0) = -A(0, 0) + \int_0^\infty A_x(0, y) dy \quad (4.13)$$

yazılabilir. Eş.2.14'dan $A_x(0, y) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ olduğu görülür [10]. İspatı tamamlamak için $A_1(t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için Marchenko denklemi olarak bilinen Eş.4.5 denklemini $x = 0$ için alalım. $f(0, ik_j) = 0$ olduğu kullanırsak

$$\tilde{A}(k) = f(0, k) - 1$$

olduğundan

$$\tilde{A}(ik_j) = f(0, ik_j) - 1$$

ve buradan $\tilde{A}(ik_j) = -1$ olur. Böylece Eş.4.5'de $x = 0$ ve $y \geq 0$ için

$$A(0, y) + \int_0^\infty A(0, t)F_s(t + y)dt + F_s(y) = 0 \quad (4.14)$$

yazılabilir. Burada $A(0, y)$ 'nin

$$A(0, y) := \begin{cases} A(y) & , \quad y \geq 0 \\ 0 & , \quad y < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı çekirdek fonksiyonu olduğunu biliyoruz. Eş.4.14 ifadesinde (x, ∞) aralığı üzerinde integral alırsak, $x \geq 0$ için

$$\int_x^\infty A(0, y)dy + \int_x^\infty \int_0^\infty A(0, t)F_s(t + y)dtdy + \int_x^\infty F_s(y)dy = 0$$

olur. Burada $A_1(t) := \int_t^\infty A(0, s)ds$ olarak kabul etmiştik. $\int_x^\infty \int_0^\infty A(0, t)F_s(t + y)dtdy$ integralinde Fubini teoremini kullanırsak $x \geq 0$ için

$$A_1(x) + \int_0^\infty A(0, t) \int_x^\infty F_s(t + y)dydt + \int_x^\infty F_s(y)dy = 0 \quad (4.15)$$

elde edilir. Burada $F_s(y) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ 'dir [10]. $\int_0^\infty A(0, t) \int_x^\infty F_s(t + y)dydt$ integralinde kısmi integrasyon uygulayalım.

Bu durumda

$$\int_0^\infty A(t) \int_x^\infty F_s(t+y) dy dt = A_1(0) \int_x^\infty F_s(y) dy - \int_x^\infty A_1(t) F_s(x+t) dt \quad (4.16)$$

elde edilir [10]. Burada $0 = f(0,0) = 1 + \int_0^\infty A(0,y) dy = 1 + A_1(0)$ olduğundan dolayı $A_1(0) = -1$ 'dir. Eş.4.15 ve Eş.4.16 ifadelerini kullanırsak $x \geq 0$ için

$$-A_1(x) + A_1(0) \int_x^\infty F_s(y) dy + \int_x^\infty A_1(t) F_s(x+t) dt + \int_x^\infty F_s(y) dy = 0$$

yazılabilir. $A_1(0) = -1$ ifadesini kullanırsak $x \geq 0$ için

$$-A_1(x) - \int_x^\infty F_s(y) dy + \int_x^\infty A_1(t) F_s(x+t) dt + \int_x^\infty F_s(y) dy = 0$$

yazılır. Buradan $x \geq 0$ için

$$A_1(x) - \int_0^\infty A_1(t) F_s(x+t) dt = 0 \quad (4.17)$$

elde edilir. Marchenko denkleminde $F_s(t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ [9] olduğundan son denklemi kullanarak $A_1(t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ olduğunu göstermeye çalışalım. Bir $T(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ [$C_0^\infty(\mathbb{R}_+) = C^2(\mathbb{R}_+)$ 'nın sonsuz komşuluğunda türevlenebilir fonksiyonlar] seçelim öyle ki $\|F_s - T\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \leq 0,5$ olsun ve $Q(t) := F_s(t) - T(t)$ diyelim. Şimdi Eş.4.17 ifadesinin her iki tarafına $\int_0^\infty T(x+t) A_1(t) dt$ eklersek

$$A_1(x) - \int_0^\infty F_s(x+t) A_1(t) dt + \int_0^\infty T(x+t) A_1(t) dt = \int_0^\infty T(x+t) A_1(t) dt$$

yazılabilir. Buradan

$$A_1(x) - \int_0^\infty [F_s(x+t) - T(x+t)] A_1(t) dt = \int_0^\infty T(x+t) A_1(t) dt$$

ve $x \geq 0$ için

$$A_1(x) - \int_0^\infty Q(x+t)A_1(t)dt = a(x) = \int_0^\infty T(x+t)A_1(t)dt \quad (4.18)$$

olarak yazılabilir. $T(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ ve $A(x, y) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ olduğundan $A_1(t)$ 'nin sınırlı olduğu açıktır [İntegrallenebilir olduğundan $< \infty$ 'dur]. Böylece $a(x) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ olur. $QA_1(t) := \int_0^\infty Q(x+t)A_1(t)dt$ operatörü $\|Q\|_{L^1(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^1(\mathbb{R}_+)} \leq 0,5$ normuna sahiptir [10]. Bundan dolayı Eş.4.3 denkleminin $L^1(\mathbb{R}_+)$ 'da tek çözümü vardır ve $A_1(t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ 'dır.

Teorem.4.3.'ün ispatı tamamlanmış olur.

4.2.I-fonksiyonunun Karakterizasyonu

Kompleks analizden biliyoruz ki

$$ImI(k) = \frac{1}{2i} (I(k) - \overline{I(k)})$$

dır. Buradan

$$ImI(k) = \frac{1}{2i} \left(\frac{f'(0,k)}{f(0,k)} - \overline{\frac{f'(0,k)}{f(0,k)}} \right)$$

ve

$$ImI(k) = \frac{1}{2i} \left(\frac{f'(0,k)\overline{f(0,k)} - \overline{f'(0,k)}f(0,k)}{f(0,k)\overline{f(0,k)}} \right)$$

yazılabilir. Eş.4.10 Wronskiye formülünden $x = 0$ için

$$ImI(k) = \frac{1}{2i} \left(\frac{2ik}{f(0,k)\overline{f(0,k)}} \right)$$

olur. Kompleks fonksiyonun modülünden

$$ImI(k) = \frac{k}{|f(0,k)|^2}$$

yazılabilir.

Şimdi Eş.2.1 denklemini göz önüne alalım. Burada tek türlü tanımlı olmayan monoton artan bir $\rho(\lambda)$ fonksiyonu tanımlarsak, her $h(\lambda) \in L^2(0, \infty)$ için $\tilde{h}(\lambda) \in L^2(\mathbb{R}; d\rho)$ vardır öyle ki

$$\begin{aligned} \tilde{h}: \mathbb{R} &\rightarrow d\rho(\lambda) \\ \lambda &\rightarrow \tilde{h}(\lambda). \end{aligned}$$

ve

$$\int_0^\infty |h(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^\infty |\tilde{h}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda), \quad \tilde{h}(\lambda) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n f(x, 0) \varphi(x, \sqrt{\lambda}) dx \quad (4.19)$$

dir [10]. Burada ki limit $L^2(\mathbb{R}; d\rho)$ için tanımlanmıştır. Eğer Eş.2.1'deki $q(x)$ potansiyeli, l operatörünün sonsuza giderken limitinin alınması ile aranan çözümü ise, $\rho(\lambda)$ fonksiyonu $q(x)$ ile tek türlü tanımlıdır; aksi takdirde tek türlü tanımlı değildir [10]. l 'de üretilen bu $\rho(\lambda)$, spektral fonksiyonu olarak tanımlanır ve $\lambda \rightarrow \infty$ için aşağıdaki özellikleri sağlar [1,§4]:

$$\int_{-\infty}^0 e^{|\lambda|^{1/2}} d\rho(\lambda) < \infty, \quad \rho(\lambda) = \frac{2\lambda^{3/2}}{3\pi} + o(\lambda^{1/2}) \quad (4.20)$$

Burada $q(x) \in L_{1,1}(\mathbb{R}_+)$ için spektral fonksiyonun formülü

$$d\rho(\lambda) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\lambda} d\lambda}{\pi |f(0, \sqrt{\lambda})|^2} & , \lambda \geq 0 \\ \sum_{j=1}^J c_j \delta(\lambda + k_j^2) d\lambda & , \lambda < 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

şeklinde tanımlıdır [1,§4] ve c_j , Eş.2.26 ve Eş.2.27’de ki gibi tanımlıdır. Şimdi

$$ImI(k) = \frac{1}{2i} \left(\frac{f'(0,k)}{f(0,k)} - \frac{\overline{f'(0,k)}}{\overline{f(0,k)}} \right) = \frac{k}{|f(0,k)|^2} \quad (4.22)$$

ifadesinde $k = \sqrt{\lambda}$ yazalım. Bu durumda

$$ImI(\sqrt{\lambda}) = \frac{\sqrt{\lambda}}{|f(0,\sqrt{\lambda})|^2}$$

olur. Bu ifadenin her iki tarafını $d\lambda$ ile çarpalım ve π ile bölelim. Bu durumda

$$\frac{1}{\pi} ImI(\sqrt{\lambda}) d\lambda = \frac{\sqrt{\lambda} d\lambda}{\pi |f(0,\sqrt{\lambda})|^2}$$

olur. Eş.4.21’den $\lambda \geq 0$ için

$$\frac{1}{\pi} ImI(\sqrt{k}) d\lambda = d\rho(\lambda) \quad (4.23)$$

bulunur. $I(k)$, ik_j ($1 \leq j \leq J$) noktalarında tek olarak tanımlıdır ve Eş.4.2’de tanımlı c_j ’lerin oluşturduğu bu noktalar imajiner ekseninde $I(k)$ ’nın (basit) kutuplarıdır. Buradan anlaşılır ki Eş.4.21 ifadesinde tanımlanan $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu sayesinde $I(k)$ tek olarak tanımlıdır. Bu şekilde I fonksiyonunun $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu ile karakterizasyonu verilmiş olur.

I -fonksiyonunun diğer bir karakterizasyonu için, I -fonksiyonu ile Eş.2.24’deki S saçılım verisi ($S := \{S(k), k_j, s_j: 1 \leq j \leq J\}$, $S(k) = \frac{f(0,-k)}{f(0,k)}$, $k_j > 0$, $s_j > 0$) arasında bire-bir uygunluk kurmak gerekir. Yani, k_j ve J ($1 \leq j \leq J$) sayıları $I(k)$ ’dan bulunur, sonra $ik_j \in \mathbb{C}_+$ ’da $I(k)$ ’nın tek kutbu ise s_j , Eş.2.22 ve Eş.4.2 formüllerinden aşağıdaki gibi

$$s_j = -2ik_j/a_j[f(0, ik_j)]^2 \quad (4.24)$$

olarak bulunur. Bu $I(k)$ 'nin $f(0, k)$ çözümünden bulunması durumunda geçerlidir.

Son olarak $f(0, k)$ 'nin Riemann problemi olarak adlandırılan problemin çözümü olması durumunda $I(k)$ 'nin oluşturulması verilebilir [10]. Bu problem aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\text{eğer } I(0) < \infty \text{ ise } \omega(k) := \prod_{j=1}^J \frac{k-ik_j}{k+ik_j}, \quad (4.25)$$

ve

$$\text{eğer } I(0) = \infty, \text{ her } j \text{ için } k \neq i \text{ ise } \omega_0(k) := \frac{k}{k+i} \omega(k), \quad (4.26)$$

Burada Eş.4.25 $f(0,0) \neq 0$ ve Eş.4.26 ise $f(0,0) = 0$ olduğu anlamına gelir [26].

Şimdi

$$h(k) := \omega^{-1}(k)f(0, k), \quad I(0) < \infty \quad (4.27)$$

ve

$$h_0(k) := \omega_0^{-1}(k)f(0, k), \quad I(0) = \infty \quad (4.28)$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Eş.4.22 ifadesini tekrar ele alalım. Burada $|f(0, k)|^2 = f(0, k)\overline{f(0, k)}$ 'dir. $\overline{f(0, k)} = f(0, -k)$ olduğundan

$$ImI(k) = \frac{k}{f(0, k)f(0, -k)}$$

yazılabilir. Buradan

$$f(0, k) = \frac{k}{ImI(k)} \frac{1}{f(0, -k)}$$

yazılabilir. $\mathbb{C}_+$ 'da analitik $h_+(k) := h(k)$ alalım. $\mathbb{C}_+$ 'da $h_+(k) \neq 0$ ve $\mathbb{C}_+$ 'nın kapanışı $\overline{\mathbb{C}_+}$ 'da $h(\infty) = 1$ olsun. Benzer şekilde $\mathbb{C}_-$ 'de $h_-(k) := h(-k)$ alalım. $k > 0$ için bir $g(k) > 0$ tanımlayalım öyle ki $k = 0$ komşuluğunda sınırlı, $k = 0$ 'da limiti ve

$$\text{eğer } I(0) < \infty \text{ ise } g(k) = \frac{k}{\text{Im}I(k)}, \text{ eğer } I(0) = \infty \text{ ise } g(k) = \frac{k}{\text{Im}I(k)} \frac{k^2+1}{k^2} \quad (4.29)$$

şeklinde tanımlı olsun. Burada

$$h_+(k) = g(k)h_-(k), \quad -\infty < k < \infty \quad (4.30)$$

olur. Eş.4.30 ve h 'nın özelliğinden

$$h(k) = \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln g(t)}{t-k} dt \right) \quad (4.31)$$

elde edilir [2]. Ayrıca $\text{Im}k \geq 0$ için

$$f(0, k) = \omega(k)h(k) \quad (4.32)$$

yazılabilir.

$I(k)$ 'nın özelliklerini incelerken (Bölüm 4.4) $t < 0$ için

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [I(k) - ik] e^{-ikt} dk = -\frac{r_0}{2} - \sum_{j=1}^J r_j e^{k_j t} \quad (4.33)$$

olduğunu göstereceğiz. Burada $r_j = -ia_j$ 'dir.

Eş.4.33'de $t \rightarrow -\infty$ için adım adım r_j , k_j ve J bulunabilir. Eğer $I(0) < \infty$ ise $r_0 = 0$ 'dır. Böylece tüm $k > 0$ 'lar için $I(k)$ bilgisinden Eş.2.24 verisi bulunabilir.

4.3.İnversiyon Prosedürleri

Bölüm 4.2’de ki $\rho(\lambda)$ veya S ’nin $I(k)$ yardımıyla kurulabileceğini gördük. Burada q potansiyelinin bulunması için izlenecek prosedür $I \Rightarrow q$ şemasıyla gösterilir. $I(k), \rho(\lambda)$ ve S verileri birbirine denk olarak alınabilir. Böylece inversiyon şemaları

$$I(k) \Rightarrow \rho(\lambda) \Rightarrow q(x) \quad (4.34)$$

ve

$$I(k) \Rightarrow S \Rightarrow q(x) \quad (4.35)$$

olarak verilebilir. Marchenko denklemi kullanılarak oluşturulacak $\rho(\lambda) \Rightarrow q(x)$ ve $S \Rightarrow q(x)$ inversiyon prosedürlerinin adımlarının daha detaylı gösterimi

$$S \Rightarrow F(x) \Rightarrow A(x, y) \Rightarrow q(x) \quad (4.36)$$

ve

$$\rho(\lambda) \Rightarrow F(x) \Rightarrow A(x, y) \Rightarrow q(x)$$

şeklindedir.

4.4. $I(k)$ ’nın Özellikleri

Bu kısımda $I(k)$ için aşağıdaki teoremde verilen Eş.4.37 formülünü hesaplamaya çalışacağız.

4.4.Teorem

$I(k)$ için

$$I(k) = ik + \sum_{j=0}^J \frac{a_j}{k - ik_j} + \tilde{a}(k), \quad \tilde{a}(k) = \int_0^\infty a(t) e^{ikt} dt \quad (4.37)$$

formülü sağlanır [26]. Burada $k_0 = 0$ 'dır. Ima_0 ifadesi ancak ve ancak $f(0,0) = 0$ ise tanımlı ve $Ima_0 > 0$ 'dır. a_j ise $Ima_j > 0$ ($1 \leq j \leq J$) olacak şekilde Eş.4.2'deki gibi tanımlı sabittir. $a(t) = \overline{a(t)}$ reel değerli fonksiyondur. $f(0,0) \neq 0$ ve $q(x) \in L_{1,1}(\mathbb{R}_+)$ ise $a(t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$; $f(0,0) = 0$ ve $q(x) \in L_{1,2}(\mathbb{R}_+)$ ise $a(t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ 'dir [26]. Burada $L_{1,2}(\mathbb{R}_+) = \{q: q(x) = \overline{q(x)}, \int_0^\infty (1+x)^2 |q(x)| dx < \infty, q(x) \in L_{loc}^2(\mathbb{R}_+)\}$ 'dir [1].

İspatı farklı adımlarda formüle edilmiş lemmalar ile yapacağız. Eş.2.12 ve Eş.4.1'i alalım. Buradan

$$f(0,k) = 1 + \tilde{A}(k), \quad f'(0,k) = ik - A(0,0) + \int_0^\infty A_x(0,y) e^{iky} dy$$

olduğundan

$$I(k) = \frac{ik - A(0,0) + \int_0^\infty A_x(0,y) e^{iky} dy}{1 + \tilde{A}(k)} \quad (4.38)$$

$$A(y) := A(0,y), \quad \tilde{A}(k) := \int_0^\infty A(0,y) e^{iky} dy$$

olarak yazılabilir. Eş.4.25 ve $f(0,k) = f_0(k)\omega_0(k)$ olduğu kullanılırsa $\forall j > 0$ için [2]

$$\begin{aligned} f(0,k) &= 1 + \tilde{A}(k) := f_0(k)\omega_0(k) \\ &= f_0(k)\omega(k) \frac{k}{k+i}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\mathbb{R}'_+ da \quad f_0(k) \neq 0, \quad f_0(\infty) = 1 \quad (4.40)$$

yazılabilir [2]. $f_0(k)$, $\mathbb{C}_+$ 'da analitiktir. Eş.4.39'daki $\frac{k}{k+i}$ faktörü ancak ve ancak $f(0,0) = 0$ ve $\omega(k)\frac{k}{k+i} := \omega_0(k)$ ise tanımlıdır. Çünkü Eş.4.26'dan $f(0,0) = 0$ olduğu aşıkardır[10].

4.2.Lemma

Eğer $f(0,0) \neq 0$ ve $q(x) \in L_{1,1}(\mathbb{R}_+)$ ise

$$f_0(k) = 1 + \tilde{b}_0(k) = 1 + \int_0^\infty b_0(t)e^{ikt} dt, b_0(x) \in W^{1,1}(\mathbb{R}_+), \|b_0\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}_+)} := \int_0^\infty (|b_0(x)| + |b'_0(x)|)dx < \infty \quad (4.41)$$

dir [1].

Burada $W^{1,1}(\mathbb{R}_+)$ Sobolev uzayıdır.

İspat

$1 \leq j < \infty$ için

$$\frac{k+ik_j}{k-ik_j} f(0, k) = 1 + \int_0^\infty g_j(t)e^{ikt} dt, g_j(t) \in W^{1,1}(\mathbb{R}_+) \quad (4.42)$$

olduğunu ispat etmek yeterlidir [10]. Çünkü $\frac{k+ik_j}{k-ik_j} = 1 + \frac{2ik_j}{k-ik_j}$ ve $A(0, y) \in W^{1,1}(\mathbb{R}_+)$ olması $q(x) \in L_{1,1}(\mathbb{R}_+)$ olması için yeterlidir. Bunun için de

$$\frac{f(0,k)}{k-ik_j} = \int_0^\infty g(t)e^{ikt} dt, g(t) \in W^{1,1}(\mathbb{R}_+) \quad (4.43)$$

ifadesinin kontrolü yeterlidir.

$$\frac{k-ik_j}{k+ik_j} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikt} [\delta(t) - 2k_j e^{-k_j t} \theta(t)] dt, \quad \theta(t) := \begin{cases} 1 & , \quad t \geq 0 \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases} \quad (4.44)$$

alalım [10]. Burada $\delta(k)$ faz kaymasıdır. Özel olarak $k = k_j$ olsun. Böylece $f(0, ik_j) = 0$ olduğundan $f(0, ik) = 0$ olur.

$$\begin{aligned} \frac{f(0,k)}{k-ik_j} &= \frac{f(0,k)-f(0,ik)}{k-ik_j} \\ &= \frac{1}{k-ik_j} [f(0,k) - f(0,ik)] \\ &= \frac{1}{k-ik_j} [1 + \int_0^{\infty} A(0,y) e^{iky} dy - 1 - \int_0^{\infty} A(0,y) e^{-ky} dy] \\ &= \frac{1}{k-ik_j} [\int_0^{\infty} A(0,y) \{e^{iky} - e^{-ky}\} dy] \\ &= \int_0^{\infty} A(0,y) \frac{e^{iky-k_j y+k_j y} - e^{-ky-k_j y+k_j y}}{k-ik_j} dy \\ &= \int_0^{\infty} A(0,y) \frac{e^{i(k-ik_j)y} - 1}{k-ik_j} e^{-k_j y} dy \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $\frac{e^{i(k-ik_j)y} - 1}{k-ik_j} = i \int_0^y e^{i(k-ik_j)s} ds$ yazılabileceğinden

$$\frac{f(0,k)}{k-ik_j} = \int_0^{\infty} A(0,y) e^{-k_j y} i \int_0^y e^{i(k-ik_j)s} ds dy$$

elde edilir. Şimdi Fubini teoremini uygulayalım. Sınırlarımız $0 \leq y < \infty$ ve $0 \leq s \leq y$ olduğundan $0 \leq s \leq y < \infty$ yazılabilir. Yani $0 \leq s < \infty$ ve $s \leq y < \infty$ olarak tekrar elde edilebilir. Bu durumda

$$\frac{f(0,k)}{k-ik_j} = \int_0^{\infty} e^{iks} i \int_s^{\infty} A(0,y) e^{-k_j(y-s)} dy ds$$

bulunur. Burada $y = t + s$ dönüşümü uygularsak $dy = dt$ olur. $s \leq y < \infty$ olduğundan $s \leq s + t < \infty$ olur. Buradan da $0 \leq t < \infty$ bulunur. Bu durumda

$$\frac{f(0,k)}{k-ik_j} = \int_0^\infty e^{iks} i \int_s^\infty A(0,y) e^{-k_j(y-s)} dy ds = \int_0^\infty e^{iks} i \int_0^\infty A(0,t+s) e^{-k_j t} dt ds$$

yazabiliriz. Burada

$$h_j(s) = i \int_s^\infty A(0,y) e^{-k_j(y-s)} dy = i \int_0^\infty A(0,t+s) e^{-k_j t} dt \quad (4.45)$$

dersek

$$\frac{f(0,k)}{k-ik_j} = \int_0^\infty e^{iks} h_j(s) ds$$

olarak yazabiliriz. Eş.4.45 ifadesi ile Eş.4.43 ifadesinin benzerliğinden dolayı $A(0,y) \in W^{1,1}(\mathbb{R}_+)$ olur. Bu da Lemma.4.2.'nin ispatını verir.

4.3.Lemma

Eğer $f(0,0) = 0$ ve $q(x) \in L_{1,2}(\mathbb{R}_+)$ ise Eş.4.41 sağlanır [1].

İspat

İspata yukarıdakinden farklı bir yolla gideceğiz: Eğer $f(0,0) = 0$ ise Eş.4.37'deki k_j tanımından $k_0 = 0$ 'dir. Eş.4.45'de $k_0 = 0$ için

$$h_0(s) = i \int_0^\infty A(0,t+s) dt \quad (4.46)$$

olur. Böylece Eş.2.13'den

$$|A(0,t+s)| \leq c \int_{\frac{t+s}{2}}^\infty |q(t)| dt$$

olduğundan

$$|h_0(s)| \leq |i| \int_0^\infty |A(0, t+s)| dt \leq \int_0^\infty |A(0, t+s)| dt$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |h_0(s)| ds &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty |A(0, t+s)| dt ds \\ &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty c \int_{\frac{t+s}{2}}^\infty |q(u)| du dt ds \\ &\leq c \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{\frac{t+s}{2}}^\infty |q(u)| du dt ds \end{aligned}$$

bulunur. $\frac{t+s}{2} = v$ dönüşümü uygularsak $\frac{t+s}{2} \leq u < \infty$ olduğundan $v \leq u < \infty$ olduğu bulunur. Yine $\frac{t+s}{2} \leq u < \infty$ olduğundan $s \leq t+s \leq 2u < \infty$ bulunabilir ve buradan $\frac{s}{2} \leq v < \infty$ olur. $\frac{t+s}{2} = v$ dönüşümünden $\frac{dt}{2} = dv$ yani $dt = 2dv$ olur. İfademizi tekrar düzenlersek

$$\int_0^\infty |h_0(s)| ds \leq 2c \int_0^\infty \int_{\frac{s}{2}}^\infty \int_v^\infty |q(u)| du dv ds$$

yazılır. $v \leq u < \infty$ ve $\frac{s}{2} \leq v < \infty$ olduğundan bu eşitsizlikler birleştirilirse $\frac{s}{2} \leq v \leq u < \infty$ olur. Buradan $\frac{s}{2} \leq u < \infty$ elde edilir. Fubini teoremi uygulanırsa

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |h_0(s)| ds &\leq 2c \int_0^\infty \int_{\frac{s}{2}}^\infty \int_0^u |q(u)| dv du ds \\ &\leq 2c \int_0^\infty \int_{\frac{s}{2}}^\infty |q(u)| \int_0^u dv du ds \\ &\leq 2c \int_0^\infty \int_{\frac{s}{2}}^\infty |q(u)| u du ds \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $0 \leq s < \infty$ ve $\frac{s}{2} \leq u < \infty$ olduğundan dolayı $0 \leq u < \infty$ ve $0 \leq s < 2u$ bulunur. Fubini teoreminden

$$\int_0^\infty |h_0(s)| ds \leq 2c \int_0^\infty \int_0^{2u} |q(u)| u ds du$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2c \int_0^\infty |q(u)|u \int_0^{2u} ds du \\
&\leq 2c \int_0^\infty |q(u)|us|_0^{2u} du \\
&\leq 4c \int_0^\infty |q(u)|u^2 du
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $c > 0$ bir sabittir. $q(x) \in L_{1,2}(\mathbb{R}_+)$ olduğundan $\int_0^\infty |q(u)|u^2 du < \infty$ 'dur. Dolayısıyla

$$\int_0^\infty |h_0(s)|ds < \infty$$

olur. Benzer şekilde $q(x) \in L_{1,2}(\mathbb{R}_+)$ ise $h'_0(s) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ olduğu gösterilebilir. Bu da Lemma.4.3'ün ispatını verir.

4.4.Lemma

Eş.4.37 formülü sağlanır [1].

İspat

$$f(0, k) = f_0(k) \omega(k) \frac{k}{k+i}$$

yazabiliriz. Burada

$$\frac{k}{k+i} \omega(k) = \frac{k}{k+i} \prod_{j=1}^J \frac{k-ik_j}{k+ik_j}$$

olduğundan

$$f(0, k) = f_0(k) \frac{k}{k+i} \prod_{j=1}^J \frac{k-ik_j}{k+ik_j}$$

şeklinde yazılabilir. Gerekli düzenlemelerden sonra

$$\frac{1}{f(0,k)} = \frac{\frac{k+i}{k} \prod_{j=1}^J \frac{k+ik_j}{k-ik_j}}{f_0(k)}$$

olur. Burada

$$\frac{k+i}{k} \prod_{j=1}^J \frac{k+ik_j}{k-ik_j} = \frac{f_0(k)}{f(0,k)} = 1 + \sum_{j=0}^J \frac{c_j}{k-ik_j}, k_0 = 0, k_j > 0$$

yazılabilir [26]. Wiener-Levy teoreminden (Teorem 2.8)

$$\frac{1}{f_0(k)} = 1 + \int_0^\infty b(t) e^{ikt} dt, \quad b(t) \in W^{1,1}(\mathbb{R}_+) \quad (4.47)$$

yazılabilir [12,§17]. Burada $f_0(k)$ Eş.4.39'da ki gibi tanımlıdır. Gerçekten Wiener-Levy teoremi $b(t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ olduğunu verir [26]. Bununla beraber $b_0(t) \in W^{1,1}(\mathbb{R}_+)$ 'dır ve $b(t) \in W^{1,1}(\mathbb{R}_+)$ olduğu ispat edilebilir. Gerçekten $\tilde{b}$ ve $\tilde{b}_0$ 'ın ilişkisi $\forall k \in \mathbb{R}$ için

$$(1 + \tilde{b}_0)(1 + \tilde{b}) = 1$$

denklemini ile verilir [26]. Buradan

$$1 + \tilde{b} + \tilde{b}_0 + \tilde{b}_0 \tilde{b} = 1$$

ve

$$\tilde{b} = -\tilde{b}_0 - \tilde{b}_0 \tilde{b}$$

veya

$$b(t) = -b_0(t) - \int_0^t b_0(t-s)b(s)ds := -b_0(t) - b_0(t) * b(t) \quad (4.48)$$

yazılabilir [12,§17, 26]. Burada $*$ bir girişim operatörüdür.

Buradan $b'_0(t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ ve $b(t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ girişimlerinden $b'_0(t) * b(t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ olarak bulunabilir. Eş.4.48 ifadesinin diferansiyelinden $b'(t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ olduğu açıktır.

Yukarıdaki formüllerden

$$\begin{aligned}
 I(k) &= \frac{f'(0,k)}{f(0,k)} = \frac{ik - A(0,0) + \int_0^\infty A_x(0,y) e^{iky} dy}{1 + \tilde{A}(k)} \\
 &= (ik - A(0,0) + \tilde{A}_1)(1 + \tilde{b})(1 + \sum_{j=0}^J \frac{c_j}{k - ik_j}) \\
 &= (ik + ik\tilde{b} - A(0,0) - A(0,0)\tilde{b} + \tilde{A}_1 + \tilde{A}_1\tilde{b})(1 + \sum_{j=0}^J \frac{c_j}{k - ik_j}) \\
 &= ik + ik \sum_{j=0}^J \frac{c_j}{k - ik_j} + ik\tilde{b} + ik\tilde{b} \sum_{j=0}^J \frac{c_j}{k - ik_j} - A(0,0) - A(0,0) \sum_{j=0}^J \frac{c_j}{k - ik_j} - \\
 &A(0,0)\tilde{b} - A(0,0)\tilde{b} \sum_{j=0}^J \frac{c_j}{k - ik_j} + \tilde{A}_1 + \tilde{A}_1 \sum_{j=0}^J \frac{c_j}{k - ik_j} + \tilde{A}_1\tilde{b} + \tilde{A}_1\tilde{b} \sum_{j=0}^J \frac{c_j}{k - ik_j}
 \end{aligned}$$

yazılabilir. Bunun için $\tilde{b} = \int_0^\infty b(t) e^{ikt} dt$ alalım. $b(t) = u$ ve $e^{ikt} dt = dv$ diyerek kısmi integrasyon uygularsak

$$ik\tilde{b} = ik \left[\frac{e^{ikt}}{ik} b(t) \Big|_0^\infty - \frac{1}{ik} \int_0^\infty e^{ikt} b'(t) dt \right] = -b(0) - \tilde{b}'$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
 I(k) &= ik - A(0,0) - b(0) - \tilde{b}' + \tilde{A}_1 - A(0,0)\tilde{b} + ik \sum_{j=0}^J \frac{c_j}{k - ik_j} - b(0) \sum_{j=0}^J \frac{c_j}{k - ik_j} - \\
 &\tilde{b}' \sum_{j=0}^J \frac{c_j}{k - ik_j} - A(0,0) \sum_{j=0}^J \frac{c_j}{k - ik_j} - A(0,0)\tilde{b} \sum_{j=0}^J \frac{c_j}{k - ik_j} + \tilde{A}_1 \sum_{j=0}^J \frac{c_j}{k - ik_j} + \tilde{A}_1\tilde{b} + \\
 &\tilde{A}_1\tilde{b} \sum_{j=0}^J \frac{c_j}{k - ik_j} \\
 &= ik - A(0,0) - b(0) - \tilde{b}' + \tilde{A}_1 - A(0,0)\tilde{b} - \sum_{j=0}^J \frac{c_j[A(0,0) + b(0)]}{k - ik_j} + \sum_{j=0}^J \frac{c_j[-b' + \tilde{A}_1 - A(0,0)\tilde{b} - \tilde{A}_1\tilde{b}]}{k - ik_j} + \\
 &\tilde{A}_1\tilde{b} + \sum_{j=0}^J \frac{c_j ik}{k - ik_j}
 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son ifadeye $\sum_{j=0}^J \frac{\tilde{g}(ik_j)c_j}{k - ik_j}$ ifadesini ekleyip çıkaralım ve $\tilde{g}(k) := -\tilde{b}' +$

$\tilde{A}_1 - A(0,0)\tilde{b} + \tilde{A}_1\tilde{b}$ diyelim. Bu durumda

$$I(k) = ik - A(0,0) - b(0) - \tilde{g}(k) + \sum_{j=0}^J \frac{c_j ik}{k-ik_j} - \sum_{j=0}^J \frac{c_j [A(0,0)+b(0)]}{k-ik_j} + \sum_{j=0}^J \frac{\tilde{g}(k)-\tilde{g}(ik_j)}{k-ik_j} c_j + \sum_{j=0}^J \frac{\tilde{g}(ik_j)c_j}{k-ik_j} \quad (4.49)$$

olur. Bu son ifadede

$$c := -A(0,0) - b(0) \quad (4.50)$$

$$a_j := c_j [ik - A(0,0) - b(0) + \tilde{g}(ik_j)] \quad (4.51)$$

$$\tilde{a}(k) := \tilde{g}(k) + \sum_{j=0}^J \frac{\tilde{g}(k)-\tilde{g}(ik_j)}{k-ik_j} c_j \quad (4.52)$$

dersek

$$\begin{aligned} I(k) &= (ik - A(0,0) + \tilde{A}_1)(1 + \tilde{b})(1 + \sum_{j=0}^J \frac{c_j}{k-ik_j}) \\ &= ik + c + \sum_{j=0}^J \frac{a_j}{k-ik_j} + \tilde{a} \end{aligned} \quad (4.53)$$

elde edilir.

Lemma.4.4.'ün ispatını tamamlamak için $c = 0$ olduğunu göstermeliyiz. c , Eş.4.50'de tanımlanmıştır. $k \rightarrow \infty$ için $I(k)$ 'nin asimptotikliğinden faydalanacağız.

$$\tilde{A}(k) = \int_0^\infty A(0,t) e^{ikt} dt$$

ifadesinde $A(t) = u$ ve $e^{ikt} dt = dv$ diyerek kısmi integrasyon uygularsak

$$\tilde{A}(k) = -\frac{A(0,0)}{ik} - \frac{1}{ik} \tilde{A}'(k) \quad (4.54)$$

elde edilir. Eş.4.54 ve Eş.4.38'de $1 + \tilde{A}(k)$ ifadesinin seri açılımından

$$\begin{aligned}
I(k) &= \frac{ik - A(0,0) + \tilde{A}_1}{1 + \tilde{A}(k)} \\
&= (ik - A(0,0) + \tilde{A}_1) \left[1 - \frac{A(0,0)}{ik} + o\left(\frac{1}{k}\right) \right]^{-1} \\
&= (ik - A(0,0) + \tilde{A}_1) \left(1 + \frac{A(0,0)}{ik} + o\left(\frac{1}{k}\right) \right) \\
&= ik + o(1)
\end{aligned} \tag{4.55}$$

olur [2]. Eş.4.55 ve Eş.4.53'den $k \rightarrow \infty$ için $c = 0$ olur. Lemma.4.4 ispatlanmış olur.

4.5.Lemma

$a_j = ir_j$, $r_j > 0$, $1 \leq j \leq J$, alalım. Bu durumda eğer $f(0,0) \neq 0$ ise $r_0 = 0$, eğer $f(0,0) = 0$ ise $r_0 > 0$ olur [1].

İspat

Eş.4.2'den

$$a_j = -\frac{c_j}{2ik_j} = -\frac{ic_j}{-2k_j} = i\frac{c_j}{2k_j} := ir_j, \quad r_j = \frac{c_j}{2k_j} > 0, \quad j > 0 \tag{4.56}$$

elde edilir. Eğer $j = 0$ ise

$$a_0 = Res_{k=0} I(k) := \frac{f'(0,0)}{\dot{f}(0,0)} \tag{4.57}$$

olur. Burada $Res_{k=0} I(k)$ ile Eş.4.57'nin sağ tarafı kastediliyor. Burada $I(k)$ genelde $k = 0$ merkezli bir diskte analitik değildir. $I(k)$, $\mathbb{C}_+$ 'da analitiktir, ancak $\mathbb{C}_-$ 'de analitik olduğu söylenemez. Teorem.4.3.'den $\dot{f}(0,0)f'(0,0) = -i$ olduğunu biliyoruz. Bundan dolayı Eş.4.57'nin sağ tarafı tanımlı ve

$$a_0 = \frac{f'(0,0)}{\dot{f}(0,0)} = \frac{f'(0,0)\dot{f}(0,0)}{[\dot{f}(0,0)]^2} = -\frac{i}{[\dot{f}(0,0)]^2} = ir_0, \quad r_0 := -\frac{1}{[\dot{f}(0,0)]^2} \tag{4.58}$$

olur. Eş.2.12'den

$$\dot{f}(x, k) = ix e^{ikx} + i \int_x^\infty A(x, y) e^{iky} y dy$$

ve buradan

$$\dot{f}(0,0) = i \int_0^\infty A(0, y) y dy \quad (4.59)$$

bulunur. Eğer $q(x)$ reel-değerli ise $A(0, y)$ 'de reel-değerli bir fonksiyon olur (Bu Eş.2.15'den görülebilir). Eş.4.59'dan

$$[\dot{f}(0,0)]^2 < 0 \quad (4.60)$$

olduğu kolayca görülebilir. Bu da Eş.4.58 için

$$r_0 > 0 \quad (4.61)$$

olduğunu verir. Lemma.4.5 ispatlanmış olur.

Eş.4.37'de tanımlanan $a(t)$ fonksiyonunun özellikleri ile ilgilenebiliriz. Bu Eş.4.52 ile Lemma.4.2 ve Lemma.4.3 lemmalarının ispatlarındaki Eş.4.41'den bulunabilir.

4.1.Not

Eğer $q(x) \not\equiv 0$ kompakt destekli ise, $a(t)$ 'nin kompakt destekli olduğunu iddia edemeyiz [1].

İspat

Kolaylık için $J = 0$ ve $f(0,0) \neq 0$ alalım. Bu durumda, eğer $a(t)$ kompakt destekli ise $I(k)$ üstel tipte bir tam fonksiyondur [26]. $q(x) \not\equiv 0$ kompakt destekli ise, $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$

için $f(0, k)$ 'nın $\mathbb{C}$ 'de sonsuz çoklukta sıfırı vardır [13, sf.278]. $f'(0, z) \neq 0$ ise $f(0, z) = 0$ 'dır. Gerçekten, eğer $f(0, z) = 0$ ve $f'(0, z) = 0$ ise $k = z$ için Eş.2.9'daki denklem için Cauchy probleminin çözümünün tekliğinden $f(x, z) \equiv 0$ 'dır. $f(x, z) \not\equiv 0$ olması ile bir çelişki elde edildiğinden $f'(0, z) \neq 0$ ise $f(0, z) = 0$ 'dır. Böylece eğer $q(x) \not\equiv 0$, $q(x) \in L^1(\mathbb{R})$ ise $I(k)$ bir tam fonksiyon değildir ve $q(x)$ kompakt desteklidir. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi şu soruyu ele alalım: $a(t) = 0$ için Eş.4.37'deki potansiyel nedir? Diğer bir ifadeyle;

$$I(k) = ik + \sum_{j=0}^J \frac{ir_j}{k - ik_j} \quad (4.62)$$

ifadesini alarak Eş.4.62'de tanımlanan I -fonksiyonu için uygun $q(x)$ 'i bulmaya ve $x \rightarrow +\infty$ için $q(x)$ 'in uygun olmayan özelliklerini tanımlayabiliriz?

Bu problem için iki yöntem vereceğiz. Birinci yöntem aşağıdaki gibidir:

Tanımdan

$$f'(0, k) = I(k)f(0, k), \quad f'(0, -k) = I(-k)f(0, -k), \quad k \in \mathbb{R} \quad (4.63)$$

olur. Eş.4.63 ve Eş.2.16 kullanılırsa

$$I(k)f(k)f(-k) - I(-k)f(-k)f(k) = 2ik$$

$$[I(k) - I(-k)]f(k)f(-k) = 2ik$$

veya Eş.4.22'den $\forall k \in \mathbb{R}$ için

$$f(k)f(-k) = \frac{k}{ImI(k)} \quad (4.64)$$

yazılabilir.

Eş.4.56'dan, Eş.4.21'da tanımlı spektral fonksiyonu Eş.4.62'da tanımlı I -fonksiyonu $(\sqrt{\lambda} = k)$ şeklinde yazılabilir:

$$d\rho(\lambda) = \begin{cases} \frac{\text{Im}I(\lambda)}{\lambda} d\lambda & , \lambda \geq 0 \\ \sum_{j=1}^J 2k_j r_j \delta(\lambda + k_j^2) d\lambda & , \lambda < 0 \end{cases} \quad (4.65)$$

burada $\delta(\lambda)$ delta-fonksiyonudur.

$d\rho(\lambda)$ kullanılarak $q(x)$

$$\rho(\lambda) \Rightarrow L \Rightarrow K \Rightarrow q(x) \quad (4.66)$$

algoritması ile tekrar ele edilebilir. Bu algoritma Gelfand-Levitan prosedürü olarak adlandırılır [10].

Şimdi bu bahsettiklerimiz ile ilgili bir örnek yapalım. $f(0,0) \neq 0$, $J = 1$ olarak alalım. Eş.4.37'den

$$I(k) = ik + \frac{ir_1}{k - ik_1} = ik + \frac{ir_1(k + ik_1)}{k^2 + k_1^2} = i \left(k + \frac{r_1 k}{k^2 + k_1^2} \right) - \frac{r_1 k_1}{k^2 + k_1^2} \quad (4.67)$$

bulunur. Bu durumda Eş.4.65'den

$$d\rho(\lambda) = \begin{cases} \frac{d\lambda}{\pi} \left(\sqrt{\lambda} + \frac{r_1 \sqrt{\lambda}}{\lambda + k_1^2} \right) & , \lambda \geq 0 \\ 2k_1 r_1 \delta(\lambda + k_1^2) d\lambda & , \lambda < 0 \end{cases} \quad (4.68)$$

yazılabilir. Böylece $\varphi_0(x, k) = \frac{\sin(kx)}{k}$ olmak üzere

$$L(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x, \lambda) \varphi_0(y, \lambda) d\sigma(\lambda) , \quad d\sigma(\lambda) := d[\rho(\lambda) - \rho_0(\lambda)] \quad (4.69)$$

eşitliğinden [10]

$$L(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \frac{r_1 \sqrt{\lambda}}{\lambda + k_1^2} \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \sqrt{\lambda} y}{\sqrt{\lambda}} + 2k_1 r_1 \frac{\sinh(k_1 x)}{k_1} \frac{\sinh(k_1 y)}{k_1} \quad (4.70)$$

elde edilir. Burada $d\rho_0$

$$d\rho_0(\lambda) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\lambda} d\lambda}{\pi} , & \lambda \geq 0 \\ 0 & , \lambda < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. $\rho_0(\lambda)$, $q(x) = 0$ potansiyeli ile l tarafından üretilen ve $\rho_0 = \frac{2\lambda^{3/2}}{\sqrt{\pi}}$ olacak şekilde tanımlı spektral fonksiyondur.

$\lambda = k^2$ diyelim ve kolaylık için $2k_1 r_1 = 1$ alalım. Bu durumda $k_1 > 0$ için

$$\begin{aligned} L_0(x, y) &:= \frac{2r_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk k^2}{k^2 + k_1^2} \frac{\sin(kx) \sin(ky)}{k^2} \\ &= \frac{2r_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk \sin(kx) \sin(ky)}{k^2 + k_1^2} \\ &= \frac{r_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk [\cos k(x-y) - \cos k(x+y)]}{k^2 + k_1^2} \\ &= \frac{r_1}{2k_1} (e^{-k_1|x-y|} - e^{-k_1|x+y|}) \end{aligned} \quad (4.71)$$

bulunur. Burada iyi bilinen

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2 + a^2} dk = \frac{1}{2a} e^{-a|x|} , \quad a > 0 , \quad x \in \mathbb{R} \quad (4.72)$$

formülü kullanılmıştır [10].

$$L(x, y) = \frac{r_1}{2k_1} [e^{-k_1|x-y|} - e^{-k_1|x+y|}] + \frac{\sinh(k_1 x)}{k_1} \frac{\sinh(k_1 y)}{k_1} \quad (4.73)$$

elde edilir.

Eş.4.73 çekirdeğine sahip

$$K(x, y) + \int_0^x K(x, s)L(s, y)ds + L(x, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq x \quad (4.74)$$

denklemini,

$$K(x, y) + \int_0^x K(x, t) \left[\frac{e^{-k_1|t-y|} - e^{-k_1|t+y|}}{2k_1/r_1} + \frac{\sinh(k_1 t)}{k_1} \frac{\sinh(k_1 y)}{k_1} \right] dt = - \frac{e^{-k_1|x-y|} - e^{-k_1|x+y|}}{2k_1/r_1} - \frac{\sinh(k_1 x)}{k_1} \frac{\sinh(k_1 y)}{k_1} \quad (4.75)$$

olarak yazılabilir. Buradaki Eş.4.74 denklemi Gelfand-Levitan denklemi olarak bilinen denklemdir. Burada $q(x)$ potansiyeli $q(x) = 2 \frac{dK(x, x)}{dx}$ formülünden hesaplanabilir.

Bu denklem ancak analitik olarak çözülebilir [14] ve bu çözüm çok uzundur. Bu nedenle [14]'de teori olarak geliştirilerek bu çözümü vermeyeceğiz. Ancak $q(x)$ 'in özelliğinin uygulamasını, Eş.4.67 formunda $I(k)$ için vereceğiz. Bu uygulama Riemann problemleri olarak bilinen teoremin temelidir [15].

Eş.4.64 ve Eş.4.67 denklemlerinden

$$\begin{aligned} f(0, k)f(0, -k) &= \frac{k}{\text{Im}I(k)} \\ &= \frac{k}{k + \frac{r_1 k}{k^2 + k_1^2}} \\ &= \frac{k}{\frac{k^3 + k k_1^2 + r_1 k}{k^2 + k_1^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k(k^2+k_1^2)}{k(k^2+k_1^2+r_1)} \\
&= \frac{k^2+k_1^2}{k^2+k_1^2+r_1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $k_1^2 + r_1 := \nu_1^2$ dersek

$$f(0, k)f(0, -k) = \frac{k^2+k_1^2}{k^2+\nu_1^2} \quad (4.76)$$

yazılabilir. $\mathbb{C}_+$ 'da $f_0(k) := \frac{f(0, k)}{\omega(k)}$ yazılabileceğinden [2]

$$f_0(k) := f(0, k) \frac{k+ik_1}{k-ik_1} \neq 0 \quad (4.77)$$

dır. Böylece Eş.4.76'yı

$$f_0(k) \frac{k-ik_1}{k+ik_1} f_0(-k) \frac{k+ik_1}{k-ik_1} = \frac{k^2+k_1^2}{k^2+\nu_1^2}$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan

$$f_0(k) = \frac{k^2+k_1^2}{k^2+\nu_1^2} h, \quad h(k) := \frac{1}{f_0(-k)} \quad (4.78)$$

diyebiliriz. $\mathbb{C}_-$ 'de $f_0(-k) \neq 0$ ve $f_0(\infty) = 1$ 'dir; buradan $h := \frac{1}{f_0(-k)}$ $\mathbb{C}_-$ 'de analitik olur.

Eş.4.78'i bir Riemann problemi olarak göz önüne alalım. Böylece

$$\text{ind}_{\mathbb{R}} \frac{k^2+k_1^2}{k^2+\nu_1^2} := \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d \ln \frac{k^2+k_1^2}{k^2+\nu_1^2} = 0 \quad (4.79)$$

elde edilir [10]. Bundan dolayı Eş.4.78'in tek çözümü vardır ([15]'ye bakınız). Bu çözümün

$$f_0(k) = \frac{k+ik_1}{k+iv_1} h, \quad h(k) = \frac{k-iv_1}{k-ik_1} \quad (4.80)$$

olduğu görülebilir [10]. Eş.4.79'da bahsi geçen index, $S(k)$ için

$$\mathcal{J} := \text{ind} S(k) := \frac{1}{2\pi i} \Delta_{\mathbb{R}} \arg S(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d \ln S(k)$$

şeklinde tanımlı bir fonksiyondur [10]. Buradan Eş.4.77'de

$$f(0, k) = \frac{k-ik_1}{k+iv_1} \quad (4.81)$$

dir. Uygun S-fonksiyonu

$$S(k) = \frac{f(0, -k)}{f(0, k)} = \frac{(k+ik_1)(k+iv_1)}{(k-ik_1)(k-iv_1)} \quad (4.82)$$

olarak yazılır. Böylece $x > 0$ için

$$F_s(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - S(k)] e^{ikx} dk = O(e^{-k_1 x}) \quad (4.83)$$

$$F_d(x) = s_1 e^{-k_1 x}$$

ve

$$F(x) = F_s(x) + F_d(x) = O(e^{-k_1 x}) \quad (4.84)$$

dir. Eş.4.5 denklemi $A(x, x) = O(e^{-2k_1 x})$ için çözülürse $x \rightarrow +\infty$ için

$$q(x) = O(e^{-2k_1x}) \quad (4.85)$$

olur. Böylece, eğer $f(0,0) \neq 0$ ve $a(t) = 0$ ise $q(x)$ çözüm sınıfı azalan üsteldir ve k_1 sayısına bağlıdır ($k_1 = \min_{1 \leq j \leq J} k_j$)

Eğer $f(0,0) = 0$, $J = 0$ ve $a(t) = 0$ ise

$$I(k) = ik + \frac{ir_0}{k} \quad (4.86)$$

$$f(0,k)f(0,-k) = \frac{k^2}{k^2+r_0} , \quad r_0 > 0 \quad (4.87)$$

olur. $f_0(k) = \frac{(k+i)f(0,k)}{k}$ alalım. Bu durumda Eş (4.87)

$$\frac{f_0(k)k}{k+i} \frac{f_0(-k)(-k)}{-k+i} = \frac{k^2}{k^2+r_0}$$

olduğundan

$$f_0(k)f_0(-k) = \frac{k^2+1}{k^2+v_0^2} , \quad v_0^2 := r_0 \quad (4.88)$$

dır ve $\mathbb{C}_+$ 'da $f_0(k) \neq 0$ olur. Böylece $\text{ind}_{\mathbb{R}} \frac{k^2+1}{k^2+v_0^2} = 0$ bulunur ve $f_0(k)$, Eş.4.88 Riemann problemine göre tek türlü çözülebilir.

$$f_0(k) = \frac{k+i}{k+iv_0} , \quad f_0(-k) = \frac{k-i}{k-iv_0}$$

ve $x > 0$ için

$$f(0,k) = \frac{k}{k+iv_0} , \quad S(k) = \frac{f(0,-k)}{f(0,k)} = \frac{k+iv_0}{k-iv_0} \quad (4.89)$$

$$\begin{aligned}
F_s(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{k+i\nu_0}{k-i\nu_0}\right) e^{ikx} dk \\
&= \frac{-2i\nu_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx} dk}{k-i\nu_0} = 2\nu_0 e^{-\nu_0 x}
\end{aligned}$$

ve $F_d(x) = 0$ 'dır. Buradan $x > 0$ için

$$F(x) = F_s(x) = 2\nu_0 e^{-\nu_0 x} \quad (4.90)$$

bulunur. Eş.4.5 denklemi $y \geq x \geq 0$ için

$$A(x, y) + 2\nu_0 \int_x^{\infty} A(x, t) e^{-\nu_0(t+y)} dt = -2\nu_0 e^{-\nu_0(x+y)} \quad (4.91)$$

yazılabilir. Eş.4.91 çözülürse

$$A(x, y) = -2\nu_0 e^{-\nu_0(x+y)} \frac{1}{1+e^{-\nu_0 x}} \quad (4.92)$$

elde edilir. Uygun Eş.4.7 potansiyeli $x \rightarrow \infty$ için

$$q(x) = O(e^{-2\nu_0 x}) \quad (4.93)$$

olarak bulunur. Eğer $q(x) = O(e^{-kx})$ ($Imk > 0$) ise Eş.4.37'deki $a(t)$ azalan üsteldir. Gerçekten, bu durumda $b'(t), A_1(y), b(t), A_1 * b$ azalan üstel, dolayısıyla $g(t)$ azalan üstel ve Eş.4.52'den $h(t)$ ile $\frac{\tilde{g}(k) - \tilde{g}(ik_j)}{k - ik_j} := \tilde{h}(k)$ fonksiyonu azalan üsteldir.

5.SONUÇ

Bu çalışmada, Sturm-Liouville denkleminin farklı başlangıç değer koşulları altında elde edilen çözümlerini ele alındı. Üçüncü bölümde bu çözümler vasıtası ile diferensiyel denklemler için tamlığı veren C özelliklerinden C_+ , C_- , C_ϕ ve C_θ özelliklerine Sturm-Liouville denkleminin sahip olduğu gösterildi. Dördüncü bölümde ters saçılım teorisinde önemli bir yer alan I-fonksiyonu detaylı olarak ele alındı. Yine bu bölümde Marchenko ve Gelfand-Levitan denklemleri ele alınarak I-fonksiyonu vasıtası ile inversiyon prosedürlerinin nasıl işlediği gösterilmeye çalışıldı. Bu denklemler vasıtası ile birer örnek yapılarak anlatılanlar pekiştirildi.

Bu çalışmada amaç diferensiyel denklemler için tamlığı veren C özelliklerinin bir diferensiyel denklem için sağlandığının nasıl gösterileceğini vermektir. Bu C özellikleri vasıtası ile teklik ispatlarının nasıl yapılacağına dair yöntemler araştırıldı. Ayrıca ters saçılma problemlerinde empedans fonksiyonu olarak bilinen I-fonksiyonu tanımlanarak, özellikleri incelendi. I-fonksiyonu için yapılan çalışmada inversiyon prosedürleri olarak bilinen ve q potansiyelinin bulunmasına dayanan prosedürlerde, spektral fonksiyon ve saçılım verisine alternatif olarak nasıl kullanılabileceği gösterildi. Bu prosedürlerde Marchenko denklemi olarak bilinen ters saçılma probleminin temel denklemi ile Gelfand-Levitan denkleminin nasıl kullanılacağı verildi.

KAYNAKLAR

1. Ramm, A.G., "One-dimensional inverse scattering and spectral problems", *Revista Cubo*, 6 , N1, 1-52 (2004).
2. Ramm, A.G., "Reconstruction of the potential from I -function", *Jour. of Inverse and Ill-Posed Probl.*, 10, N4, 385-395 (2002).
3. Ramm, A.G., "Ordinary differential equations, property C for", *Encyclopedia of Mathematics*, Supplemental Vol. 3, Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht, 295-296 (2001).
4. Lax, P.D. and Phillips, R.S., "Scattering Theory", *Academic Press*, New York, 173-176 (1967).
5. Nachman, A., "Reconstructions from boundary measurements", *Annals of Math.*, 128: 531-576 (1988).
6. Novikov, R., "Multidimensional inverse spectral problems for the equation $-\Delta\psi + (\gamma(x) - Eu(x))\psi = 0$ ", *Translations in Func. Anal. And Appl.*, 22: 263-272 (1988).
7. Ramm, A.G., "Recovery of the potential from fixed energy scattering data" *Inverse Problems*, 4: 877-886 (1988).
8. Naimark, M.A., "Linear differential operators", *Frederick Ungar Publishing Co.*, New York, 300-305 (1968).
9. Çakır, A., "Kompleks potansiyele sahip Sturm-Liouville operatörü için ters saçılma problemi ve bazı uygulamaları", Yüksek Lisans Tezi, *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Isparta, 1-41, (2007).
10. Ramm, A.G., "Inverse problems: Mathematical and analytical techniques with applications to engineering", *Springer Verlag*, Berlin, 91-121 (2005).
11. Mahmoud, N.H., Yaich, I., "Inverse spectral analysis for singular differential operators with matrix coefficients, *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol.2006 No:16:1-19 (2006).
12. Gel'fand, I., Raikov, D., Shilov, G., "Commutative normed rings", *Chelsea*, New York, 106-113 (1964).
13. Ramm, A.G., "Multidimensional inverse scattering problems, Longman Scientific & Wiley, New York, (1992)", *Expanded Russian Edition*, Mir, Moskova, 277-279 (1994).

14. Ramm, A.G., "Random fields estimation theory", *Longman Scientific and Wiley*, New York, 1-282 (1990).
15. Gakhov, F., "Boundary value problems", *Pergamon Press*, New York, 85-142 (1996).
16. Ryckman, E., "A spectral equivlance for Jacobi matrices", *University of California*, Los Angeles, 1-13 (2006).
17. Eryılmaz, A., "Fark operatörlerinin spektral teorisi", Doktora Tezi, *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Isparta, 3-11 (2006).
18. Meyvacı, M., "Lineer olmayan başlangıç-sınır değer problemlerinin çözümlerinin uzun zaman davranışı", Doktora Tezi, *Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, İstanbul, 10-23 (2005).
19. Soylu, E., "Sınır koşullu Schrödinger spektrumu ve esas fonksiyonları", Yüksek Lisans Tezi, *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, 3-21 (2006).
20. Kılıç, G., "Sonlu Sturm-Liouville diferansiyel operatörler sisteminin spektrumu ve esas fonksiyonları", Yüksek Lisans Tezi, *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, 19-35 (2006).
21. Temeltaş, M., "Potansiyel teori ve Fredholm integral denklemleri", Yüksek Lisans Tezi, *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, 67-73 (2005).
22. Çanga, D., "Schrödinger diferansiyel denkleminin spektrumu", Yüksek Lisans Tezi, *Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Kahramanmaraş, 2-27 (2006).
23. Ramm, A.G., Smirnova, A.B., "On deconvolution problems: Numerical aspects", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Volume 176: 445-460 (2005).
24. Ateş, Ü., "Homojen olmayan bir ortamda yayılan zaman harmonik akustik dalgalar için uzak alan operatörünün özellikleri ve ters saçılma teorisi", Doktora Tezi, *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, 1-3 (2004).
25. Ramm, A.G., "Inverse scattering, Half-axis case", *Encyclopedia of Mathematics*, Supplemental Vol. 3, Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht, 209-211 (2001).
26. Ramm, A.G., "Property C for ODE and applications to inverse problems", Operator Theory and Applications, Vol.25, Ed.Ramm, A.G., Shivakumar, P.N., Strauss, A.V., *Fields Institute Communications*, Providence, 15-75 (2000).
27. Ramm,A.G., "Inequalities for the transformation operators and applications", *Journal of Inequal. in Pure and Appl. Mat.*, 4, N4, 69-79 (2003).

28. Agranovich, Z.S., Marchenko, V.A., “The inverse problem of scattering theory”, *Gordon and Breach Science Publishers Inc.*, New York, 1-55 (1963).
29. Balcı, M., “Matematik Analiz, Cilt II”, *Balcı Yayınları*, Ankara, 288 (1997)
30. Rao, R.M.R., “Ordinary differential equations: Theory and applications”, *Affiliated East-West Press.*, Yeni Delhi, 1-189 (1979).
31. Rudin, W., “Real and complex analysis”, *McGraw-Hill*, New York, 1-416 (1987).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ENGÜR, Hüseyin
 Uyuğu : T.C.
 Doğum Tarihi ve Yeri : 04.07.1975 İzmir
 Medeni Hali : Evli
 Telefon : 0 (544) 487 81 03
 e-mail : huseyinengur@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	İnönü Üniversitesi / Matematik Bölümü	2003
Lise	Atatürk Teknik Lisesi / Elektronik Bölümü	1994

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
1995-1996	800. Shh.Vet.Ana Dp. Ve Fb.K.lığı	Stajer Astsubay
1996-2003	Malatya Asker Hastanesi	Tbb.Chz.Tekns.
2003-2005	3.Komd.Tug.K.lığı/SİİRT	Tbb.Chz.Tekns.
2005-	TSK Shh.İkm.Bkm.Mrk.K.lığı	Tes.Tesl.Mal Sor.

Yabancı Dil

Almanca

Hobiler

Bilgisayar Teknolojileri, Akvaryum