



**STOKASTİK DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN RUNGE-KUTTA  
YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ**

**Zeynep YETKİN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KASIM 2019**

Zeynep YETKİN tarafından hazırlanan “STOKASTİK DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN RUNGE-KUTTA YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

**Danışman:** Doç. Dr. Fikriye Nuray YILMAZ

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

**Başkan:** Doç. Dr. Mediha ÖRKÜ

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

**Üye:** Dr. Öğr. Üyesi Kadir KANAT

Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Tez Savunma Tarihi: 15/11/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ  
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

## ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Zeynep YETKİN

15/11/2019

# STOKASTİK DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN RUNGE-KUTTA YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

(Yüksek Lisans Tezi)

Zeynep YETKİN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Kasım 2019

## ÖZET

Bu tezde, stokastik diferensiyel denklemlerin (SDD) nümerik çözümünü elde etmek için stokastik Runge-Kutta metodu kullanılacaktır. Bilindiği üzere, SDD' lerin nümerik çözümleri Itô-Taylor seri açılımı ile elde edilmektedir. Fakat hesaplama açısından kolaylık sağladığından dolayı Stratonovich Taylor seri açılımı tercih edilmektedir. Gerçek çözümün seri açılımı ile nümerik çözümün Stratonovich Taylor seri açılımı karşılaştırılarak Runge-Kutta metodunun mertebe koşulları elde edilebilir. Biz bu tezde, stokastik Runge-Kutta metodu için güçlü yakınsaklık mertebe koşullarını elde edeceğiz. Son kısımda ise nümerik uygulamalar verilerek sonuçlar farklı yöntemlerle karşılaştırılacaktır.

Bilim Kodu : 20406

Anahtar Kelimeler : Stokastik diferensiyel denklemler, Stratonovich integralleri, Runge-Kutta metodu

Sayfa Numarası : 55

Danışman : Doç. Dr. Fikriye Nuray YILMAZ

# SOLUTION OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS BY RUNGE-KUTTA METHOD

(M. Sc. Thesis)

Zeynep YETKİN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

November 2019

## ABSTRACT

In this thesis, stochastic Runge-Kutta method will be used to obtain numerical solution of stochastic differential equations (SDE). As it is known, numerical solutions of SDE's are obtained by Itô-Taylor series expansion. However, Stratonovich Taylor series expansion is preferred because it provides ease of calculation. The order conditions of the Runge-Kutta method can be obtained by comparing the series expansion of the real solution with the Stratonovich Taylor series expansion of the numerical solution. In this thesis, we will obtain strong order conditions for the stochastic Runge-Kutta method. In the last part, numerical applications are given and the results will be compared with different methods.

Science Code : 20406

Key Words : Stochastic differential equations, Stratonovich integrals,  
Runge-Kutta method

Page Number : 55

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Fikriye Nuray YILMAZ

## TEŞEKKÜR

Tez çalışmaları yolculuğuma başladığımdan bugüne kadar benden desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, zorlandığım anlarda beni motive eden, bıkmadan her daim yardımcı olan ve bana yol gösteren, beni hiçbir zaman geri çevirmeyen değerli hocam Doç. Dr. Fikriye Nuray YILMAZ' a teşekkür ediyor ve saygı ve minnetlerimi sunuyorum. Bu süreçte maddi ve manevi desteklerini benden hiç esirgemeyen, her ne olursa olsun arkamda duran ve benim bugünlere gelmemin mimarları olan babam Refik YETKİN ve annem Cemile YETKİN başta olmak üzere kardeşlerim Elif YETKİN ve Zehra YETKİN' e çok teşekkür ediyorum ve bu tezi aileme ithaf ediyorum.

## İÇİNDEKİLER

|                                                            | Sayfa |
|------------------------------------------------------------|-------|
| ÖZET .....                                                 | iv    |
| ABSTRACT.....                                              | v     |
| TEŞEKKÜR.....                                              | vi    |
| İÇİNDEKİLER .....                                          | vii   |
| ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....                                  | ix    |
| ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....                                    | x     |
| SİMGELER VE KISALTMALAR.....                               | xi    |
| 1. GİRİŞ.....                                              | 1     |
| 2. TEMEL MATEMATİKSEL KAVRAMLAR .....                      | 3     |
| 2.1. Olasılık Uzayı .....                                  | 3     |
| 2.2. Beklenen Değer, Varyans .....                         | 4     |
| 2.3. Stokastik Süreçler .....                              | 5     |
| 2.3.1. Brown hareketi.....                                 | 5     |
| 2.4. Stokastik İntegraller .....                           | 6     |
| 2.4.1. Riemann integrali.....                              | 7     |
| 2.4.2. Itô integrali.....                                  | 7     |
| 2.4.3. Stratonovich integrali.....                         | 7     |
| 3. STOKASTİK DİFERENSİYEL DENKLEMLER .....                 | 11    |
| 3.1. Itô Lemma.....                                        | 14    |
| 4. STOKASTİK TAYLOR AÇILIMLARI .....                       | 17    |
| 4.1. Adi Diferensiyel Denklemler için Taylor Açılımı ..... | 17    |
| 4.2. Itô-Taylor Açılımı .....                              | 20    |
| 4.3. Stratonovich Taylor Seri Açılımı.....                 | 22    |

|                                                                   |    |
|-------------------------------------------------------------------|----|
| 5. STOKASTİK RUNGE-KUTTA YÖNTEMİNİN MERTEBE KOŞULLARI .....       | 27 |
| 5.1. Yakınsaklık Mertebesi .....                                  | 27 |
| 5.1.1. Güçlü yakınsama.....                                       | 27 |
| 5.1.2. Zayıf yakınsama.....                                       | 27 |
| 5.2. Stokastik Runge-Kutta Metodu.....                            | 28 |
| 5.3. Güçlü 2. Mertebeden Açık Stokastik Runge-Kutta Yöntemi ..... | 36 |
| 6. NÜMERİK SONUÇLAR.....                                          | 41 |
| 6.1. Monte-Carlo Yöntemi.....                                     | 41 |
| 7. SONUÇ VE ÖNERİLER .....                                        | 51 |
| KAYNAKLAR .....                                                   | 53 |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                                    | 55 |

**ÇİZELGELERİN LİSTESİ**

| <b>Çizelge</b>                       | <b>Sayfa</b> |
|--------------------------------------|--------------|
| Çizelge 5.1. Katsayılar .....        | 33           |
| Çizelge 5.2. Beklenen Değerler ..... | 37           |



## ŞEKİLLERİN LİSTESİ

| Şekil                                                                                       | Sayfa |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Şekil 2.1. Bir Brown Parçacığının Sıvı İçindeki Görüntüsü .....                             | 6     |
| Şekil 3.1. Diferensiyel Denklemin Yörüngesi .....                                           | 11    |
| Şekil 3.2. Stokastik Diferensiyel Denklemin Örnek Yolu .....                                | 11    |
| Şekil 6.1. SDD' nin $\lambda = 0,5$ ve $\mu = 1$ için Runge-Kutta yaklaşık çözümü .....     | 44    |
| Şekil 6.2. SDD' nin $\lambda = 0,5$ ve $\mu = 2$ için Runge-Kutta yaklaşık çözümü .....     | 45    |
| Şekil 6.3. SDD' nin $\lambda = 0,5$ ve $\mu = 5$ için Runge-Kutta yaklaşık çözümü .....     | 45    |
| Şekil 6.4. SDD' nin $\lambda = 5$ ve $\mu = 5$ için Runge-Kutta yaklaşık çözümü .....       | 46    |
| Şekil 6.5. Örnek 6.2. nin $\lambda = 2$ ve $\mu = 1$ için Runge-Kutta yaklaşık çözümü ..... | 47    |
| Şekil 6.6. Örnek 6.2. nin Euler ve Milstein yaklaşık çözümlerinin hata değerleri .....      | 47    |
| Şekil 6.7. Örnek 6.2. nin Runge-Kutta yaklaşık çözümünün hata değeri .....                  | 48    |
| Şekil 6.8. Örnek 6.2. nin Runge-Kutta yaklaşık çözümünün $\mu = 0,1$ için hata değeri ..    | 49    |
| Şekil 6.9. Örnek 6.2. nin Runge-Kutta yaklaşık çözümünün $\mu = 0,5$ için hata değeri ..    | 49    |
| Şekil 6.10. Örnek 6.2. nin Runge-Kutta yaklaşık çözümünün $\mu = 1$ için hata değeri ..     | 50    |
| Şekil 6.11. Örnek 6.2. nin Runge-Kutta yaklaşık çözümünün $\mu = 4$ için hata değeri ..     | 50    |

## SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

### Simgeler

### Açıklamalar

$\approx$

Nümerik Yaklaşım

$W(t)$

Wiener Süreci

$I$

Itô İntegrali

$J$

Stratonovich İntegrali

### Kısaltmalar

### Açıklamalar

ADD

Adi Diferensiyel Denklemler

SDD

Stokastik Diferensiyel Denklemler

SRK

Stokastik Runge-Kutta

## 1. GİRİŞ

Diferensiyel denklemler çoğu fiziksel bilimlerde, finans, ekonomi, mühendislik dallarında önemli bir yer tutmaktadır. Son zamanlara kadar fiziksel olayları tanımlamak için geliştirilen çoğu model uygun sayısal yöntemlerin eksikliği ve gerekli bilgisayar teknolojilerinin bulunmaması açısından çözümlerde zorluklara sebep oluyordu. Bu durumlar da problemlerde belirsizliği hesaba katmaya mani oluyordu. Son zamanlarda ise artık bu belirsizlikler hesaba katılarak rassal değişkenler devreye girmiş ve stokastik diferensiyel denklemlerin (SDD) çözümleri için sayısal yöntemler geliştirilmeye büyük ilgi duyulmaya başlanmıştır. Bunun sonucu olarak SDD daha gerçekçi modellerin çözümüyle uğraşmaya olanak sağlamıştır [1].

Stokastik diferensiyel denklemler (SDD), terimleri stokastik süreçler olan diferensiyel denklemlerdir ve dolayısıyla kendiliğinden stokastik süreç olan çözümler verecektir [2]. SDD' nin çevre modelleme, mühendislik, fizik, biyolojik modelleme gibi geniş çapta uygulamaları vardır [3] ve SDD matematik ve uygulamaları için temel bir araçtır [4]. Son yıllarda stokastik (rassal) süreçler ve hesaplar finansal problemlerde geniş bir yelpazede uygulanmıştır. Birçok alanda stokastik süreç ve hesapların uygulamalarını görebiliriz: fizik, mühendislik, finans vb. [5].

Çoğu SDD' nin bilinen bir analitik çözümü yoktur. Bu yüzden üzerinde düşünülen problem için genel ve yaklaşık nümerik çözümler üretmek gerekir. SDD' nin çözümü için sayısal bir yöntem ele alındığında, doğruluk derecesini ölçebilmek önemlidir. SDD' nin çözümü için bu nümerik yöntemlerden biri Runge-Kutta metodudur ki bu metod yaklaşık çözümlerde optimal doğruluk veren nümerik metodların en önemli gelişmesidir [6].

Bu tezde açık Runge-Kutta yöntemi, SDD' yi çözmek için Stokastik Taylor serisi genişletmesine dayalı bir yaklaşıma bağlı olarak elde edilmiştir [7].

Genel olarak tek boyutlu Stokastik diferensiyel denklem (SDD)

$$\frac{dX_t}{dt} = f(X_t, t)dt + g(X_t, t)dW_t \quad (1.1)$$

şeklinde olup  $X_t = X(t)$ , stokastik bir süreç veya rastgele değişkenin gerçekleştirilmesidir.  $f(X_t, t)$  sürüklenme katsayısı olarak adlandırılır, bu SDD' nin yerel eğilimi karakterize eden belirleyici kısmıdır.  $g(X_t, t)$ ,  $X$  in çarpışmalarının ortalama büyüklüğünü yansıtan stokastik kısmı ifade eder. Bu, Wiener süreci olarak adlandırılan ve Bölüm 2.3.1. de tanımlanan stokastik süreç  $W_t$  den kaynaklanır.

Bu SDD' nin integral formu

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t f(X_s, s) ds + \int_{t_0}^t g(X_s, s) dW_s \quad (1.2)$$

şeklinde olup [8, 9] burada birinci integrali Riemann integralidir. Bir Wiener sürecinin örnek yolları diferansiyellenemez olduğu için, Japon matematikçi K. Itô 1940' larda Itô stochastic integral denilen yeni bir integral türü tanımlamıştır. 1960' lı yıllarda Rus fizikçi R. L. Stratonovich, Stratonovich stochastic integral adı verilen başka bir stokastik integral önerdi ve “ $\circ$ ” sembolünü eski Itô integralinden ayırmak için kullandı. Eş. 1.3 ve Eş. 1.4 eşitlikleri, Eş. 1.1 ve Eş. 1.2 denklemlerinin Stratonovich eşdeğerleridir [8, 10].

$$\frac{dX_t}{dt} = f(X_t, t) dt + g(X_t, t) \circ dW_t \quad (1.3)$$

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t f(X_s, s) ds + \int_{t_0}^t g(X_s, s) \circ dW_s \quad (1.4)$$

Biz bu tezde SDD' nin nümerik çözümleri için Stratonovich Taylor seri açılımından yola çıkarak Runge-Kutta metodunu kullanıp merteye koşullarını inceleyeceğiz. Bilindiği üzere, SDD' nin çözümleri deterministik denklemlerle karşılaştırılırsa oldukça zordur. Brownian hareketi analitik ve nümerik çözümleri zorlaştırmaktadır. Biz SDD' lerin Runge-Kutta yöntemiyle nümerik çözümlerini inceleyip merteye koşullarını hem zayıf hem de güçlü yakınsaklık için inceleyeceğiz. Son kısımda ise nümerik uygulamalar vererek sonuçları farklı yöntemlerle karşılaştıracğız.

## 2. TEMEL MATEMATİKSEL KAVRAMLAR

Bu tezin ana konusuna geçmeden önce, konuyu ele alırken kullanacağımız bazı temel tanımlar ve stokastik analizin teoremleri bu başlık altında tanıtılıp anlatılacaktır. SDD' yi yapılandırırken ihtiyacımız olan temel kavramlar incelenecektir.

### 2.1. Olasılık Uzayı

Tanım 2.1.1.  $X$  bir küme ve  $P(X)$ ,  $X$  in güç kümesi olsun.  $\mathcal{A} \subseteq X$  olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan  $\mathcal{A}$  kümesine  $\sigma$ -cebiri denir.

- a)  $\mathcal{A} \neq \emptyset$
- b) Eğer  $A \in \mathcal{A}$  ise  $A^c \in \mathcal{A}$ . Burada  $A^c = \mathcal{A} - A$  olup  $A$  nın tümleyenidir.
- c)  $n = 1, 2, \dots$  için  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  ise o halde  $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$  dir [11].

Tanım 2.1.2.  $A \in \mathcal{A}$  kümelerine olaylar ya da ölçülebilir kümeler denir.  $(\Omega, \mathcal{A})$  ise ölçülebilir uzay olarak adlandırılır.  $P$  ise  $(\Omega, \mathcal{A})$  üzerinde tanımlanmış bir olasılık ölçüsüdür (ya da olasılık fonksiyonu). Yani  $P: \mathcal{A} \rightarrow [0,1]$  dir.

Tanım 2.1.3. Reel değerli bir fonksiyon  $P: \mathcal{A} \rightarrow [0,1]$ , eğer aşağıdaki şartları sağlarsa  $\mathcal{A}$  üzerinde  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  üçlüsünün olasılık fonksiyonudur.

- a)  $P(\emptyset) = 0$
- b)  $P(\Omega) = 1$
- c)  $A_i, A_j \in \mathcal{A}$  olmak üzere  $A_i \cap A_j = \emptyset$  ise  $P(\bigcup A_i) = \sum P(A_i)$  [12].

Tanım 2.1.4.  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  olasılık uzayı için aşağıdaki şartlar sağlanır:

- a)  $\Omega$  rastgele deneyin tüm olası çıktılarından kümesi,
- b)  $\mathcal{A}$ ,  $\Omega$  nın alt kümelerinin  $\sigma$ -cebiri,
- c)  $P, \mathcal{A}$  üzerinde olasılık fonksiyonudur [1,13].

## 2.2. Beklenen Değer, Varyans

Tanım 2.2.1.  $X$  rastgele (rastlantısal) değişkeni,  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) olmak üzere  $\{\omega | X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{A}$  biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.2.2.  $X$ ,  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  olasılık uzayında rastgele değişken olarak tanımlansın.  $X$  in beklenen değeri (ortalama değeri):

$$E[X] = \int_{\Omega} X dP$$

(Lebesgue İntegrali) şeklindedir. Burada

$$\int_{\Omega} X dP = \int_{\Omega} X f d\omega$$

olup beklenen değer aynı zamanda

$$E[X] = \int_{\Omega} X f d\omega$$

yazılabilir. Buradaki  $f$  olasılık yoğunluk fonksiyonudur [12].

Tanım 2.2.3.  $X$  rastgele değişkenin varyansı

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

şeklindedir [12].

Tanım 2.2.4.  $X$  rastgele değişkenin standart normal dağılımı " $X, N(\mu, \sigma^2)$  'dir." diye ifade edilir. Burada  $\mu$  beklenen değer,  $\sigma^2$  varyanstır. Aynı zamanda  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  olmak üzere

$$P(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_a^b e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

dir [7].

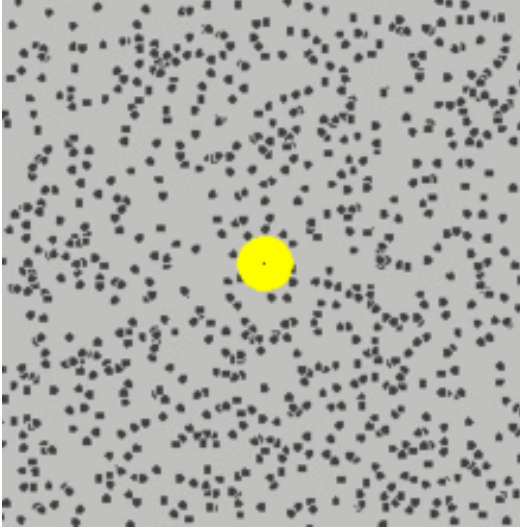
## 2.3. Stokastik Süreçler

Birçok fiziksel uygulamada, rastgele değişkenlerin kullanıldığı birçok işlem vardır. Bu bölümde stokastik süreçler ve Wiener işlemleri tanımlanacaktır.

### 2.3.1. Brown hareketi

Brown hareketi ya da Brownian hareket denilen olay, toz parçacıkları gibi büyük parçacıkların akışkan içerisinde sıvı ya da gaz molekülleri gibi daha küçük parçacıklarla çarpışması sonucu oluşan rastlantısal harekettir. Stokastik bir sürecin en temel örneği standart Brown hareketi veya standart bir Wiener işlemidir. Aslında rastlantısal hareketleri incelediği bilinen ilk bilim insanı biyolog, fizyolog ve kimyager Jan Ingenhousz' dur. Ancak yine de bundan yaklaşık 45 sene sonra botanikçi Robert Brown tarafından 1827' de, bir bardak suda rastgele hareket ederken bir polen tahrılın hareketini gözlemlediğinde keşfedilmiştir. Brown, parçacıkların hareketini polen üzerinde mikroskop ile inceliyordu. Ortada bir hareket mevcuttu ancak kaynağını bulamıyordu, polenlerin canlı olabileceği konusunda bir düşünceye kapılan Brown, aynı gözlemi toz parçacıkları üzerinde gerçekleştirdi ve aynı rastlantısal hareketin toz parçacıklarda da meydana geldiğini görünce, polenlerin canlı olmadığı konusunda emin oldu. Ancak yine de hareketin kaynağını saptayamamıştı. Hareketin sebebi araştırılmaya başlandı ve 1900'lerin başında Albert Einstein tarafından rastlantısal hareketin moleküller gibi mikroskop ile göremediğimiz (Brown zamanında moleküller tartışmalı bir kavramdı) çok küçük parçacıkların bombardımanı nedeniyle oluştuğu kanıtlandı ve bu hareketin gözlemcisi Robert Brown anısına, Brownian Movement yani Brown Hareketi olarak adlandırıldı.

Albert Einstein ve Norbert Wiener tarafından matematiksel model temelleri atılmış Brownian hareketi, uygulamada ısı transferinden borsa değişimlerine kadar kullanılmaktadır [4].



Şekil 2.1. Bir Brown parçacığının sıvı içindeki görüntüsü

Tanım 2.3.1.1.  $t \rightarrow X(t, w)$  dönüşümüne  $w^{th}$  örnek yolu denir.

Tanım 2.3.1.2. Brown Hareketi olarak isimlendirilen  $W(T)$  şu özellikleri sağlar:

- a)  $W(0) = 0$
- b) Bütün örnek yollar süreklidir.
- c)  $W(T)$  normal dağılımdır ve  $W(T), N(0, t)$  dir.
- d)  $W(t_1), \underbrace{W(t_2) - W(t_1)}_{\Delta W_1}, \dots, W(t_m) - W(t_{m-1})$  her biri bağımsız rastlantısal değişkenler olup

$$P(\Delta W_1 \cap \Delta W_2) = P(\Delta W_1).P(\Delta W_2)$$

dir [4,11].

## 2.4. Stokastik İntegraller

Bu bölümde belirli integral tanımını hatırlayarak stokastik integralleri de benzer şekilde ifade edeceğiz.

### 2.4.1. Riemann integrali

$\int_0^T g(t, w) dW(t, w)$  stokastik integralinin hesaplanabilmesi için  $g(t, w)$  nin sadece  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N - 1$ ) zaman aralıklarında değiştiğini varsayalım ki burada  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$  dir. O halde integralimiz  $\int_0^T g(t, w) dW(t, w)$

$$S_N(w) = \sum_{i=1}^N g(t_{i-1}, w) (W(t_i, w) - W(t_{i-1}, w)), \quad N \rightarrow \infty$$

Riemann İntegrali olarak tanımlanır [11].

### 2.4.2. Itô integrali

Rastgele bir değişken olan  $S$ ,  $[0, T]$  aralığının  $(t_0, t_1, \dots, t_n)$  her bölüm dizisi için

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left[ S - \sum_{i=1}^N g(t_{i-1}, w) (W(t_i, w) - W(t_{i-1}, w)) \right] = 0$$

ise  $[0, T]$  aralığı üzerindeki  $W(t, w)$  Brown hareketine göre olan  $g(t, w)$  stokastik bir işlemin Itô integrali olarak adlandırılır öyle ki  $\max_i (t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0$  dır. Yukarıdaki limit ortalama kare anlamında stokastik integral adını alır. Dolayısıyla stokastik integral örnekleri  $W(\cdot, w)$  yollarının tek tek gerçekleşmelerine bağlı olan rastgele bir değişkendir [14].

### 2.4.3. Stratonovich integrali

$t_i^* = t_i$  (sol uç nokta) seçilirse aşağıdaki Itô integrali elde edilir:

$$\int_0^T g(t, w) dW(t, w)$$

$t_i^* = \frac{t_i + t_{i+1}}{2}$  (orta nokta) seçilirse de aşağıdaki Stratonovich integrali elde edilir:

$$\int_0^T g(t, w) \circ dW(t, w)$$

[14].

Şimdi Itô ve Stratonovich hesabı arasındaki farkı göstermek için, stokastik integrale yakından bakalım.

SDD' nin integral formunun hem Itô hem de Stratonovich hesabı kullanılarak aşağıdaki gibi yazıldığı biliniyor:

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t f(X_s, s) ds + \int_{t_0}^t g(X_s, s) dW_s \quad (2.1)$$

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t f(X_s, s) ds + \int_{t_0}^t g(X_s, s) \circ dW_s \quad (2.2)$$

Eş. 2.1 ve Eş. 2.2 eşitliklerindeki ikinci integral

$$\int_{t_0}^t g(X_s, s) dW_s = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{m-1} g(X_{\tau_k}, \tau_k) (W(t_{k+1}) - W(t_k)) \quad (2.3)$$

şeklinde yazılabilir [15]. Burada  $h = (t_{k+1} - t_k)$  ara noktalar ve  $\tau_k = (1 - \lambda)t_k - \lambda t_{k+1}$ ,  $\forall k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ . Eş. 2.1 'de verilen Itô SDD' nin stokastik integralinde  $\lambda = 0$ ,  $\tau_k = t_k$  'ya yol açar ve dolayısıyla aralıkların sol noktasında stokastik integrali değerlendirir. Stratonovich integralinin tanımında,  $\lambda = \frac{1}{2}$  ve böylece  $\tau_k = \frac{t_{k+1} - t_k}{2}$ , ikinci aralığın Eş. 2.2' de değerlendirilmelerini her bir aralığın orta noktasında ifade eder.

$$\int_{t_0}^T W(s) dW_s = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m-1} W(\tau_k) (W(t_{k+1}) - W(t_k)) \quad (2.4)$$

$$= \frac{W(t)}{2} + \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) T \quad (2.5)$$

Yukarıda bahsedilen her iki yorum için de Eş. 2.5 sonucunu yukarıda tartışılan  $\lambda$  değerleriyle birleştirirsek [16]

$$\int_{t_0}^T W(s) dW_s = \frac{1}{2} W(t) + \frac{1}{2} T \quad (2.6)$$

$$\int_{t_0}^T W(s) \circ dW_s = \frac{1}{2} W(t) \quad (2.7)$$

elde edilir.

Eğer stokastik integralleri Eş. 2.6 ve Eş. 2.7' nin bir parçası olan Eş. 2.1 ve Eş. 2.2' yi çözersek, Itô ve Stratonovich temsillerinin aynı çözüme yakınlaşmadığını görürüz. İki farklı hesap arasında geçiş yapmak için Itô' dan Stratonovich hesaplarına ve tersine dönüşümler mümkündür. Bu, sürüklenme faktörlerine düzeltme terimi eklenerek gerçekleştirilir.

$$dX_t = f(X_t)dt + g(X_t)dW_t \quad (2.8)$$

$$dX_t = \underline{f}(X_t)dt + g(X_t) \circ dW_t \quad (2.9)$$

$$\underline{f} = f - \frac{1}{2} g' g \quad (2.10)$$

Burada  $g' = \frac{dg(X_t)}{dX_t}$ ,  $g$  nin ilk türevidir. Eğer Eş. 2.10 denklemi kullanılırsa (Itô-Stratonovich sürüklenme düzeltme formülü olarak adlandırılır), Stratonovich SDD' nin Eş. 2.9 integrasyonu şimdi Itô SDD' nin Eş. 2.8 integrasyonu ile aynı sonuca götürür [10,15].



### 3. STOKASTİK DİFERENSİYEL DENKLEMLER

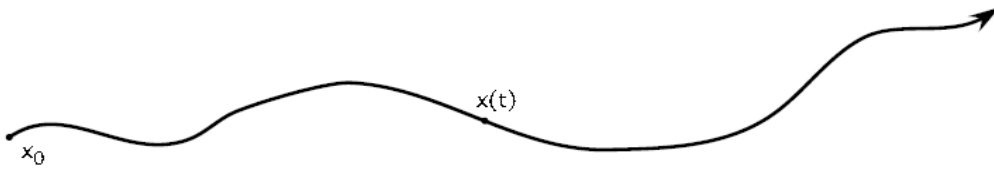
Bu bölümde SDD' yi temellendirip tanımlayacağız.

Öncelikle  $\mathbb{R}^n$  de bir  $x_0$  noktası alalım ve aşağıdaki adi diferensiyel denklemin genel biçimini düşünelim:

$$\dot{X}(t) = f(t, X) \quad (3.1)$$

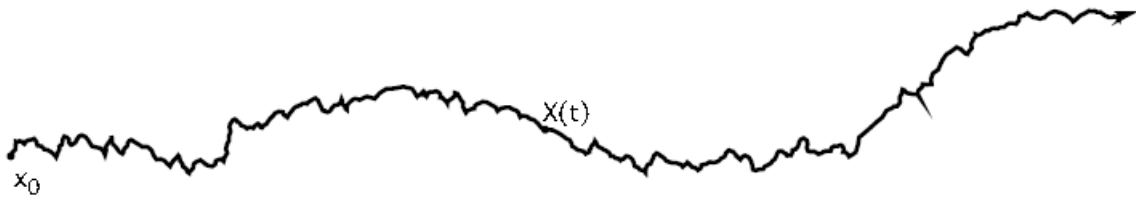
$$X(t_0) = X_0 \quad (t > 0)$$

Burada  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ve  $X(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  olup çözüm kümesi aşağıdaki yörüngedir:



Şekil 3.1. Diferensiyel Denklemin Yörüngesi

ADD tarafından modellenen sistemin ölçülen yörüngesi bu şekildeyken, yörünge aslında birçok uygulamada tahmin edildiği gibi davranmaz.



Şekil 3.2. Stokastik Diferensiyel Denklemin Örnek Yolu

Bu ADD içine rassal veriler eklenirse birçok fiziksel ve finans probleminin modellenmesine ışık tutar. Bu nedenle ADD' yi biraz değiştirip çözümün istenen şekilde elde edilmesi sağlanabilir. Bunu da sistemi bozan rastgele değişkenlerin olasılığını sisteme dahil ederek yapabiliriz:

$$\dot{X}(t) = f(t, X) + g(t, X)\xi(t) \quad (3.2)$$

$$X(t_0) = X_0 \quad (t > 0)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\xi(t)$  değişkenine "white noise" (beyaz gürültü) denir.  $g(t, X)$  ise herhangi bir katsayıdır [17]. Bu SDD' nin çözümü ise stokastik bir sürecin örnek yollarının bir koleksiyonudur.

Yukarıdaki denklemde  $\xi = \dot{W}$  alınırsa

$$dX(t) = f(t, X)dt + g(t, X)dW(t) \quad (3.3)$$

stokastik diferensiyel denklemin genel formu elde edilir. Bu eşitlik integral biçiminde yazılırsa eğer

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t f(s, X(s))ds + \int_{t_0}^t g(s, X(s))dW(s) \quad (3.4)$$

olup birinci integral Riemann integrali, ikinci integral ise Itô integrali' dir.

Burada  $W(t)$  bir Wiener sürecidir ve  $W'$  nin türevi beyaz gürültü olarak yorumlanır.

$$E(W(t)) = 0, \quad E(W^2(t)) = t, \quad t \geq 0$$

eşitlikleri sağlanır. Bir Wiener sürecinin örnek yolları sınırlı bir çeşitlilik sağlamadığından dolayı yukarıdaki denklemin ikinci integrali Riemann anlamında yorumlanamaz. Aslında  $[t_{i-1}, t_i]$  alt aralıklarından  $\tau_i$  farklı seçimleri yapılırsa

$$\sum_{i=1}^s g(X(\tau_i))(W(t_i) - W(t_{i-1})) \quad (3.5)$$

bu doğal yaklaşık toplamları ortalama kare anlamında bu integralin farklı değerlerine yakınsar ( Burada  $\{X_n\}$  rastgele değişkenlerinin dizisi eğer  $n \rightarrow \infty$  iken

$(E(|X_n - X|)^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$  ise  $X$  rastgele değişkenine ortalama kare anlamında yakınsar denir).

Özellikle eğer  $\tau_i = \tau_{i-1}$  seçilirse bu Itô integralini verir ki bu da Itô integralinin zincir kuralına dayanır.

Bununla birlikte Itô integrali aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$E \left[ \int_a^b g(t) dW(t) \right] = 0$$

$$E \left[ \left| \int_a^b g(t) dW(t) \right|^2 \right] = \int_a^b E[|g(t)|^2] dt. \quad (3.6)$$

Yukarıda da bahsettiğimiz  $\tau_i$  değerleri için sonsuz sayıda olasılık vardır:

$\tau_i = \theta t_i + (1 - \theta) t_{i-1}$  alınırsa eğer Eş. 3.5

$$\int_a^b W(t) dW(t) = \frac{1}{2} (W^2(b) - W^2(a)) + \left( \theta - \frac{1}{2} \right) (b - a)$$

denklemini verir.

Eğer  $\theta = 0$  seçilirse Itô integralini;  $\theta = \frac{1}{2}$  seçilirse de Stratonovich integrali elde edilir.

(SDD' nin Stratonovich integral formunu belirtmek için "  $\circ$  " sembolünün kullanıldığını hatırlayalım yani  $\circ dW(t)$ .)

O halde stokastik bir diferensiyel denklemin Itô ve Stratonovich formları arasındaki ilişkiyi inceleyelim:

Genel olarak verilen SDD ( Itô integral formu)

$$dX(t) = f(t, X)dt + g(t, X)dW(t) \quad (3.7)$$

şeklindeyken Stratonovich SDD

$$dX(t) = f^*(t, X)dt + g(t, X) \circ dW(t) \quad (3.8)$$

şeklinde olup burada

$$f^*(t, X) = f(t, X) - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial X}(t, X) \cdot g(t, X)$$

dir.

Yukarıda bahsettiğimiz Itô ve Stratonovich formlar farklı hesaplama yöntemleri altında aynı çözüme sahiptirler. Biz bu tezde SDD 'nin Stratonovich formunu kullanacağız.

Böylece sonuç olarak belirli bir  $F$  fonksiyonu için ve  $f$  ve  $g$  fonksiyonları üzerindeki belirli pürüzsüzlük, ölçülebilirlik ve sınırlılık özellikleriyle varlık garantidir:

$$dF(t, X) = \frac{\partial F}{\partial t} dt + f^T \frac{\partial F}{\partial X} dt + \frac{1}{2} \text{trace} \left( g g^T \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \right) dt + \frac{\partial F}{\partial X} g dW$$

[1,7].

### 3.1. Itô Lemma

Riemann integralleri Analizin temel teoremi, zincir kuralı ve Taylor serisi açılımı değerlendirilerek oluşturulur. Aynı şekilde Itô integrali için de benzer kurallara ve formüllere ihtiyaç duyulur. Bu nedenle Itô Lemma stokastik analizin zincir kuralı olarak da bilinir.

$dX(t) = f(t, X)dt + g(t, X)dW(t)$  denklemi ve  $f: [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  şartlarını sağlayan  $(X_t)$  Itô süreci  $C^2([0, \infty) \times \mathbb{R})$  'de verilen sınırlı bir fonksiyon olsun.

O halde

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)(dX_t)^2 \quad (3.9)$$

eşitliği sağlanır. Burada  $(dX_t)^2 = (dX_t) \cdot (dX_t)$  olup aşağıdaki kurallara göre hesaplanır:

$$dt \cdot dt = dt \cdot dZ_t = dZ_t \cdot dt = 0 \quad \text{ve} \quad dZ_t \cdot dZ_t = dt \quad [13].$$



## 4. STOKASTİK TAYLOR AÇILIMLARI

Yaklaşık çözümleri bulma yollarından biri de Taylor serisine açmadır. Literatürde Taylor formülünün stokastik genellemeleri üzerine yürütülen çeşitli çalışmalar görülebilir. Adi diferensiyel denklemler için deterministik nümerik analizin çoğu Taylor açılımını kullanmaya dayanır. Zamanında çözümlerin diferansiyellenemezliği Itô formülünün integral formlarını kullanarak atlatılmıştır. Stokastik Taylor ( Itô-Taylor açılımı) Itô formül iterasyonlarının yinelenmesine dayanır. Bu bölümde bu açılımlar incelenecektir.

Stokastik denklemler için Taylor seri açılımını incelemeye önce Adi diferensiyel denklemler için Taylor açılımına bakalım:

### 4.1. Adi Diferensiyel Denklemler İçin Taylor Açılımı

Adi diferensiyel denklemlerin analitik çözümleri yapılabilmektedir. Fakat lineer olmayan diferensiyel denklemlerin birçoğunun analitik çözümü olmadığı için ancak sayısal (nümerik) olarak çözülebilmektedir. O halde şimdi Taylor Serisini hatırlayalım ve Taylor Serisi çözümünü inceleyelim.

Adi diferensiyel denklemlerin Taylor serisi çözümü

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y) \\ y(x_i) &= y_i \end{aligned} \right\} \text{ Adi Diferensiyel Denklem (ADD)}$$

şeklindedir. Bu denklemi Taylor serisine açarsak;

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2!} \cdot (x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{y'''(x_i)}{3!} \cdot (x_{i+1} - x_i)^3 + \dots$$

$\Delta x = x_{i+1} - x_i$  yazılırsa:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i) \cdot \Delta x + \frac{y''(x_i)}{2!} \cdot \Delta x^2 + \frac{y'''(x_i)}{3!} \cdot \Delta x^3 + \dots$$

elde edilir [18].

$$\text{Örnek 4.1.1. } \left. \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = y \cdot x + x \\ y(0) = 1 \end{array} \right\} \text{ Adi diferensiyel denklemi için; } x = 0,2 \text{ deki sayısal değerini}$$

Taylor serisi ile (2.mertebe dahil) artış değeri  $\Delta x = h = 0,1$  alarak hesaplayalım.

Çözüm 4.1.1.  $y' = yx + x$  için  $x'$  e göre türev alırsak eğer

$$\begin{aligned} y'' &= y'x + y + 1 = (yx + x).x + y + 1 = yx^2 + x^2 + y + 1 \\ &= x^2(y + 1) + y + 1 \\ &= (x^2 + 1)(y + 1) \end{aligned}$$

Bu türev alma işini devam ettirip seri açılımında yerine yazarsak

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i) \cdot \Delta x + \frac{y''(x_i)}{2!} \cdot \Delta x^2 + \frac{y'''(x_i)}{3!} \cdot \Delta x^3 + \dots$$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + (y_i x_i + x_i) \cdot \Delta x + \frac{(x_i^2 + 1)(y_i + 1)}{2!} \Delta x^2 + \dots$$

$y(x_i + 1) = y(0,1)$  ,  $x_i = 0 \rightarrow$  başlangıç değeri,  $\Delta x = h = 0,1$  alırsak;

$$y(0,1) = y(0) + (y(0) \cdot 0 + 0) \cdot 0,1 + \frac{(1 + 1)(0^2 + 1)}{2!} \cdot (0,1)^2 + \dots$$

$$y(0,1) = 1,01$$

$$y(0,2) = y(0,1) + (y(0,1) \cdot 0,1 + 0,1) \cdot 0,1 + \frac{(y(0,1) + 1)((0,1)^2 + 1)}{2!} \cdot (0,1)^2 + \dots$$

$$y(0,2) = 1,040250500.$$

Şimdi bu iç içe Taylor açılımını genelleştirelim:

$$\frac{dX_t}{dt} = X_t' = a(t, X_t), \quad t_0 \leq t \leq T$$

olsun. Burada  $X_t$  fonksiyonunu Taylor serisine açarsak;

$$X_t = X_{t_0} + (t - t_0).X'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2!}X''(t_0) + \frac{(t - t_0)^3}{3!}X'''(t_0) + \dots$$

Şimdi burada  $X'(t_0)$ ,  $X''(t_0)$ ,  $X'''(t_0)$ , ... türevlerini yerine yazalım:

$$X'(t_0) = a(t_0, X_{t_0})$$

$$X''(t_0) = \frac{\partial}{\partial t} a(t_0, X_{t_0}) + \frac{\partial}{\partial x} a(t_0, X_{t_0}) \frac{\partial}{\partial t} X_t$$

$$\Rightarrow X''(t_0) = \frac{\partial}{\partial t} a(t_0, X_{t_0}) + a(t_0, X_{t_0}) \frac{\partial}{\partial x} a(t_0, X_{t_0})$$

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + a(t, X_t) \frac{\partial}{\partial x}$$

olarak tanımlayalım: O zaman

$$X''(t_0) = La(t_0, X_{t_0})$$

olur.

$$\begin{aligned} X'''(t_0) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} a(t_0, X_{t_0}) + a(t_0, X_{t_0}) \frac{\partial}{\partial x} a(t_0, X_{t_0}) \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial t} a(t_0, X_{t_0}) + a(t_0, X_{t_0}) \frac{\partial}{\partial x} a(t_0, X_{t_0}) \right] \frac{\partial}{\partial t} X_t \end{aligned}$$

$$X'''_{t_0} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} a(t_0, X_{t_0}) + a(t_0, X_{t_0}) \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} a(t_0, X_{t_0}) + a(t_0, X_{t_0}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} a(t_0, X_{t_0})$$

$$+ a^2(t_0, X_{t_0}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} a(t_0, X_{t_0})$$

$$X'''_{t_0} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} a(t_0, X_{t_0}) + 2a(t_0, X_{t_0}) \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} a(t_0, X_{t_0}) + a^2(t_0, X_{t_0}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} a(t_0, X_{t_0}).$$

$$L^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2a(t_0, X_{t_0}) \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

olarak tanımlanırsa

$$\Rightarrow X'''_{t_0} = L^2 a(t_0, X_{t_0})$$

olur.

Bu şekilde devam edip diğer türevleri de aynı şekilde elde edip Taylor serisinde yerine yazarsak;

$$X_t = X_{t_0} + a(t_0, X_{t_0})(t - t_0) + \frac{1}{2!} L a(t_0, X_{t_0})(t - t_0)^2 + \frac{1}{3!} L^2 a(t_0, X_{t_0})(t - t_0)^3 + \dots$$

$X'_t = a(t, X_t)$  denkleminin Taylor seri açılımı elde edilmiş olur [19,20].

#### 4.2. Itô-Taylor Açılımı

Daha önceki bölümlerde de ifade edildiği gibi SDD' nin Itô integral formu

$$X(t) = X_{t_0} + \int_{t_0}^t f(s, X(s)) ds + \int_{t_0}^t g(s, X(s)) dW(s) \quad (4.1)$$

şeklindedir.

Bir Wiener Süreci olan Stratonovich SDD' nin de

$$dX(t) = f(t, X)dt + g(t, X) \circ dW(t)$$

şeklinde yazıldığını biliyoruz. Bu eşitliğin integral formu ise;

$$X(t) = X_{t_0} + \int_{t_0}^t f(s, X(s))ds + \int_{t_0}^t g(s, X(s)) \circ dW(s) \quad (4.2)$$

şeklindedir.

Eş. 4.1 ve Eş. 4.2 denklemlerine Itô Lemma uygularsak eğer bu formül  $X$  çözümünün bir  $a(t, X_t)$  fonksiyonu olarak yazılabileceğini belirtir:

$$a(t, X_t) = a(t_0, X_{t_0}) + \int_{t_0}^t \frac{\partial a}{\partial s}(s, X_s)ds + \int_{t_0}^t \frac{\partial a}{\partial x}(s, X_s)dX_s + \int_{t_0}^t \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}(s, X_s)(dX_s)^2$$

Bu eşitlikteki  $dX_s = fds + g dZ_s$  ve  $(dX_s)^2 = (dX_s).(dX_s)$  ifadeleri ve gerekli türevler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} a(t, X_t) = a(t_0, X_{t_0}) &+ \int_{t_0}^t \left( \frac{\partial a}{\partial s}(s, X_s) + f(s, X_s) \frac{\partial a}{\partial x}(s, X_s) + \frac{1}{2} g^2(s, X_s) \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}(s, X_s) \right) ds \\ &+ \int_{t_0}^t g(s, X_s) \frac{\partial a}{\partial x}(s, X_s) dZ_s \end{aligned}$$

elde edilir.

$$L^0 = \frac{\partial}{\partial t} + f \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} g^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \text{ve} \quad L^1 = g \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{operatörleri Itô formu için tanımlanırken}$$

$$L^0 = f \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{ve} \quad L^1 = g \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{operatörleri de Stratonovich formu için tanımlanır [1,7,19].}$$

Biz bu tezde SDD' nin Stratonovich formunu kullanacağız.

### 4.3. Stratonovich Taylor Seri Açılımı

SDD' in Stratonovich formu

$$dX(t) = f(t, X)dt + g(t, X) \circ dW(t)$$

şeklinde olup bu eşitliğin integral formunun

$$X(t) = X_{t_0} + \int_{t_0}^t f(s, X(s))ds + \int_{t_0}^t g(s, X(s)) \circ dW(s)$$

olduğunu biliyoruz. Bir önceki bölümde elde ettiğimiz

$$\begin{aligned} a(t, X_t) = a(t_0, X_{t_0}) &+ \int_{t_0}^t \left( \frac{\partial a}{\partial s}(s, X_s) + f(s, X_s) \frac{\partial a}{\partial x}(s, X_s) + \frac{1}{2} g^2(s, X_s) \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}(s, X_s) \right) ds \\ &+ \int_{t_0}^t g(s, X_s) \frac{\partial a}{\partial x}(s, X_s) dZ_s \end{aligned}$$

denkleminde tanımlanan  $L^0 = f \frac{\partial}{\partial x}$  ve  $L^1 = g \frac{\partial}{\partial x}$  operatörleri yerine yazılırsa elde edilen son denklem

$$a(t, X_t) = a(t_0, X_{t_0}) + \int_{t_0}^t L^0 a(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t L^1 a(s, X_s) \circ dZ_s$$

şeklini alır. Burada sırasıyla  $a(t, X_t)$  fonksiyonu yerine  $f(t, X_t)$  ve  $g(t, X_t)$  fonksiyonlarını yazalım:

$$f(t, X_t) = f(t_0, X_{t_0}) + \int_{t_0}^t L^0 f(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t L^1 f(s, X_s) \circ dZ_s$$

$$g(t, X_t) = g(t_0, X_{t_0}) + \int_{t_0}^t L^0 g(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t L^1 g(s, X_s) \circ dZ_s$$

Şimdi bu yazdığımız  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarını orijinal SDD denklemi olan

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t f(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t g(s, X_s) \circ dZ_s$$

de yerine yazalım:

$$\begin{aligned} X_t &= X_{t_0} + \int_{t_0}^t \left[ f(t_0, X_{t_0}) + \int_{t_0}^s L^0 f(\tau, X_\tau) d\tau + \int_{t_0}^s L^1 f(\tau, X_\tau) \circ dZ_\tau \right] ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t \left[ g(t_0, X_{t_0}) + \int_{t_0}^s L^0 g(\tau, X_\tau) d\tau + \int_{t_0}^s L^1 g(\tau, X_\tau) \circ dZ_\tau \right] \circ dZ_s \\ X_t &= X_{t_0} + f(t_0, X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^0 f(\tau, X_\tau) d\tau ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^1 f(\tau, X_\tau) \circ dZ_s ds + g(t_0, X_{t_0}) \int_{t_0}^t \circ dZ_s \\ &\quad + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^0 g(\tau, X_\tau) d\tau \circ dZ_s + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^1 g(\tau, X_\tau) \circ dZ_\tau \circ dZ_s. \end{aligned}$$

Şimdi  $L^0 f$ ,  $L^1 f$ ,  $L^0 g$ ,  $L^1 g$  ifadelerini de ilk bulduğumuz

$$a(t, X_t) = a(t_0, X_{t_0}) + \int_{t_0}^t L^0 a(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t L^1 a(s, X_s) \circ dZ_s$$

denkleminde yerine yazalım:

$$\begin{aligned}
L^0 f(t, X_t) &= L^0 f(t_0, X_{t_0}) + \int_{t_0}^t L^0(L^0 f(s, X_s))ds + \int_{t_0}^t L^1(L^0 f(s, X_s)) \circ dZ_s \\
L^1 f(t, X_t) &= L^1 f(t_0, X_{t_0}) + \int_{t_0}^t L^0(L^1 f(s, X_s))ds + \int_{t_0}^t L^1(L^1 f(s, X_s)) \circ dZ_s \\
L^0 g(t, X_t) &= L^0 g(t_0, X_{t_0}) + \int_{t_0}^t L^0(L^0 g(s, X_s))ds + \int_{t_0}^t L^1(L^0 g(s, X_s)) \circ dZ_s \\
L^1 g(t, X_t) &= L^1 g(t_0, X_{t_0}) + \int_{t_0}^t L^0(L^1 g(s, X_s))ds + \int_{t_0}^t L^1(L^1 g(s, X_s)) \circ dZ_s.
\end{aligned}$$

Bu eşitlikleri son bulduğumuz

$$\begin{aligned}
X_t &= X_{t_0} + f(t_0, X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^0 f(\tau, X_\tau) d\tau ds \\
&+ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^1 f(\tau, X_\tau) \circ dZ_s ds + g(t_0, X_{t_0}) \int_{t_0}^t \circ dZ_s \\
&+ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^0 g(\tau, X_\tau) d\tau \circ dZ_s + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^1 g(\tau, X_\tau) \circ dZ_\tau \circ dZ_s
\end{aligned}$$

denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
X_t &= X_{t_0} + f(t_0, X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + g(t_0, X_{t_0}) \int_{t_0}^t \circ dZ_s \\
&+ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \left[ L^0 f(t_0, X_{t_0}) + \int_{t_0}^\tau L^0 L^0 f(z, X_z) dz + \int_{t_0}^\tau L^1 L^0 f(z, X_z) \circ dZ_z \right] d\tau ds \\
&+ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \left[ L^1 f(t_0, X_{t_0}) + \int_{t_0}^\tau L^0 L^1 f(z, X_z) dz + \int_{t_0}^\tau L^1 L^1 f(z, X_z) \circ dZ_z \right] \circ dZ_\tau ds \\
&+ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \left[ L^0 g(t_0, X_{t_0}) + \int_{t_0}^\tau L^0 L^0 g(z, X_z) dz + \int_{t_0}^\tau L^1 L^0 g(z, X_z) \circ dZ_z \right] d\tau \circ dZ_s
\end{aligned}$$

$$+ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \left[ L^1 g(t_0, X_{t_0}) + \int_{t_0}^{\tau} L^0 L^1 g(z, X_z) dz + \int_{t_0}^{\tau} L^1 L^1 g(z, X_z) \circ dZ_z \right] \circ dZ_{\tau} \circ dZ_s$$

Son olarak düzenlersek

$$\begin{aligned} X_t &= X_{t_0} + f(t_0, X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + g(t_0, X_{t_0}) \int_{t_0}^t \circ dZ_s \\ &+ L^0 f(t_0, X_{t_0}) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s d\tau ds + L^1 f(t_0, X_{t_0}) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \circ dZ_{\tau} ds \\ &+ L^0 g(t_0, X_{t_0}) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s d\tau \circ dZ_s + L^1 g(t_0, X_{t_0}) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \circ dZ_{\tau} \circ dZ_s \\ &+ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^{\tau} L^0 L^0 f dz d\tau ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^{\tau} L^1 L^0 f \circ dZ_z d\tau ds \\ &+ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^{\tau} L^0 L^1 f dz \circ dZ_{\tau} ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^{\tau} L^1 L^1 f \circ dZ_z \circ dZ_{\tau} ds \\ &+ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^{\tau} L^0 L^0 g dz d\tau \circ dZ_s + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^{\tau} L^1 L^0 g \circ dZ_z d\tau \circ dZ_s \\ &+ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^{\tau} L^0 L^1 g dz \circ dZ_{\tau} \circ dZ_s + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^{\tau} L^1 L^1 g \circ dZ_z \circ dZ_{\tau} \circ dZ_s. \end{aligned}$$

Aynı işlemlere devam edilirse aşağıdaki genel açılım elde edilir:

$$\begin{aligned} X_t &= X_{t_0} + f(t_0, X_{t_0})J_0 + g(t_0, X_{t_0})J_1 + f'(t_0, X_{t_0})g(t_0, X_{t_0})J_{00} \\ &+ f'(t_0, X_{t_0})g(t_0, X_{t_0})J_{10} + g'(t_0, X_{t_0})f(t_0, X_{t_0})J_{01} \\ &+ g'(t_0, X_{t_0})g(t_0, X_{t_0})J_{11} + f''(t_0, X_{t_0})f(t_0, X_{t_0})f(t_0, X_{t_0})J_{000} \\ &+ f'(t_0, X_{t_0})f'(t_0, X_{t_0})f(t_0, X_{t_0})J_{000} + f''(t_0, X_{t_0})f(t_0, X_{t_0})g(t_0, X_{t_0})J_{100} \\ &+ f'(t_0, X_{t_0})f'(t_0, X_{t_0})g(t_0, X_{t_0})J_{100} + f''(t_0, X_{t_0})g(t_0, X_{t_0})f(t_0, X_{t_0})J_{010} \\ &+ f'(t_0, X_{t_0})g'(t_0, X_{t_0})f(t_0, X_{t_0})J_{010} + f''(t_0, X_{t_0})g(t_0, X_{t_0})g(t_0, X_{t_0})J_{110} \\ &+ f'(t_0, X_{t_0})g'(t_0, X_{t_0})g(t_0, X_{t_0})J_{110} + g''(t_0, X_{t_0})f(t_0, X_{t_0})f(t_0, X_{t_0})J_{001} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +g'(t_0, X_{t_0})f'(t_0, X_{t_0})f(t_0, X_{t_0})J_{001} + g''(t_0, X_{t_0})f(t_0, X_{t_0})g(t_0, X_{t_0})J_{101} \\
& +g'(t_0, X_{t_0})f'(t_0, X_{t_0})g(t_0, X_{t_0})J_{101} + g''(t_0, X_{t_0})g(t_0, X_{t_0})f(t_0, X_{t_0})J_{011} \\
& +g'(t_0, X_{t_0})g'(t_0, X_{t_0})f(t_0, X_{t_0})J_{011} + g''(t_0, X_{t_0})g(t_0, X_{t_0})g(t_0, X_{t_0})J_{111} \\
& +g'(t_0, X_{t_0})g'(t_0, X_{t_0})g(t_0, X_{t_0})J_{111} + R.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Daha önce de Eş. 4.1 denkleminin Stokastik Stratonovich Taylor seri açılımını elde etmiştik. Burada  $R$  kalıntı terimidir ve  $J_{j_1 j_2 \dots j_k}$  Stratonovich çoklu integralleridir. Eğer  $j_i = 0$  ise  $ds$ ,  $j_i = 1$  ise  $\circ dW(s)$  ile temsil edilir.

Örneğin, bir boyutlu bir Weiner süreci

$$J_{101} = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{s_2} \int_{t_0}^s \circ dW(s_1) ds \circ dW(s_2).$$

Eş. 4.4 denklemi, Taylor seri açılımında  $g \equiv 0$  alındığında deterministik denklemler için bir genellemesidir. Bu açılım ile düşünülen bir nümerik metot uygulamasının karşılaştırılmasıyla belirli bir mertebeyi elde etmek için nümerik metodun katsayılarını seçmek mümkündür [1,7,19,20].

## 5. STOKASTİK RUNGE-KUTTA YÖNTEMİNİN MERTEBE KOŞULLARI

Stokastik diferansiyel denklemlerde, çözümün doğruluğunu ölçmenin iki yolu vardır: güçlü ve zayıf yakınsama. Bu bölümde SDD' nin nümerik sonuçları için gerekli olan yakınsaklık mertebesi olarak güçlü ve zayıf yakınsama kavramları tanıtılmıştır. Sonrasında ise SDD' yi sayısal olarak çözmek için gerekli olan nümerik metotlardan Runge-Kutta metodu ayrıca ele alınmıştır.

### 5.1. Yakınsaklık Mertebesi

#### 5.1.1. Güçlü yakınsama

$C$ , en yüksek  $h$  adım aralığına bağlı olmayan bir pozitif sabit sayı olmak üzere ayırık bir zaman yaklaşımı  $X^h$  (yaklaşık çözüm),  $T$  zamanındaki  $p > 0$  mertebesiyle güçlü bir şekilde yakınsar. Şöyle ki;

$$E(\|X - X^h\|) \leq Ch^p$$

$\delta_0 > 0$  olmak üzere  $h = \frac{T-t_0}{N} \in (0, \delta_0)$  olup burada  $N$ ,  $I = [t_0, T]$  aralığının alt aralıklarının sayısıdır.  $X$ ,  $T$  zamanındaki kesin çözüm;  $X^h$  da yaklaşık çözümdür [1,7].

#### 5.1.2. Zayıf yakınsama

Eğer her bir  $f \in C_p^{2(p+1)}(R^d, R)$  için  $C$ , en yüksek  $h$  adım aralığına bağlı olmayan pozitif sabit sayı olmak üzere ve sonlu sayıda  $\delta_0 > 0$  için  $h \rightarrow 0$  olarak  $T$  zamanında  $X$ , maksimum adım aralığı ile ayırık bir zaman yaklaşımı  $X^h$  (yaklaşık çözüm)' a  $p > 0$  mertebesiyle zayıf bir şekilde yakınsar. Şöyle ki;

$$\|E(f(X)) - E(f(X^h))\| \leq Ch^p$$

$h \in (0, \delta_0)$  dir [1,7].

## 5.2. Stokastik Runge -Kutta Metodu

Deterministik problemler için Runge-Kutta yöntemlerinde kesin başlangıç değerleri varsayılarak bir adım ötesinde hesaplanan çözümün tam çözüm ile karşılaştırılmasıyla doğruluk mertebesine rastlanır. Bu hem gerçek çözümü hem de Taylor seri açılımı kullanılarak ki nümerik metodları genişleterek yapılır. Bu yaklaşım Stokastik Taylor seri genişlemesi (Itô veya Stratonovich hesabı kullanılarak) uygulandığında SDD' lere geçer. Stratonovich Calculus' ün sadeleştirilmiş yapısı nedeniyle burada Stokastik Taylor serisinin Stratonovich formu kullanılacaktır.

Bir önceki bölümde SDD' nin gerçek çözümü için Stratonovich Taylor serisi kuruldu. Bu bölümde ise nümerik çözüm ile ilgili Stratonovich Taylor serilerinin türetilmesi gerekmektedir. Ele alınan nümerik yöntemler s-aşamalı Stokastik Runge-Kutta yöntemlerinin genel ailesine ait olacaktır. Yöntemin formülasyonuna dahil edilen rastgele değişkenlerin keyfi bir sayısı olabilir.

Genel SDD probleminin çözümü için tek adımlı çok aşamalı yöntemlerin [15] bazı sınıfları şu şekilde tanıtlmaktadır ki belki de şimdiye kadar düşünülmüş en genel yöntem sınıfı bu formdadır:

$$\begin{aligned}
 Y_i &= y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(Y_j) + J_1 \sum_{j=1}^s b_{ij} g(Y_j), \quad i = 1, \dots, s \\
 y_{n+1} &= y_n + h \sum_{j=1}^s \alpha_j f(Y_j) + J_1 \sum_{j=1}^s \beta_j g(Y_j).
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Burada  $A = (a_{ij})$  ve  $B = (b_{ij})$ ,  $s \times s$  tipinde reel elemanlı matrisler olup  $\alpha^T = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$  ve  $\beta^T = (\beta_1, \dots, \beta_s) \in \mathbb{R}^s$  satır vektörleridir.

Eğer  $A$  ve  $B$  kesinlikle üçgen şeklinden daha düşükse o zaman Eş. 5.1 denklemi açık olarak söylenir. Aksi takdirde kapalıdır. Stokastik bileşen  $J_1 = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \circ dW(s)$  integralinden gelir ki  $B$  ve  $\beta$  ile bağlantılıdır. Çoğu yazar (Rümelin, Gard) sadece açık yöntemleri dikkate alır.

Verilen bir SDD' nin nümerik çözümlerinde kesin çözüme daha yaklaşık bir sonuç bulabilmek için yani dolayısıyla daha yüksek güçlü merteye yöntemleri gerekliyse Eş. 5.1 denklemi sadece  $J_1'$  den başka stokastik unsur içerecek şekilde modifiye edilmek zorundadır. Bu da keyfi matris olan  $Z^{(1)}$  ve  $z^{(1)T}$  ögelerinin tanıtımıyla mümkündür [1]. Bunlar aynı zamanda rassal değişkenlerdir. Adım boyutu  $h$  ise sadece  $J_0 = \int_{t_0}^{t_0+h} ds$  olduğundan tutarlılık için adım boyutu deterministik bileşenlerle ilişkili parametre matrisine dahil edilecektir ( $Z^{(0)} = hA$  ve  $z^{(0)T} = h\alpha^T$ ). Bundan dolayı bir Wiener süreci durumu için s-adımlı Stokastik Runge-Kutta (SRK) yöntemlerinin genel ailesi bu denklemle verilir:

$$\begin{aligned} Y_i &= y_n + \sum_{j=1}^s Z_{ij}^{(0)} f(Y_j) + \sum_{j=1}^s Z_{ij}^{(1)} g(Y_j), & i = 1, \dots, s \\ y_{n+1} &= y_n + \sum_{j=1}^s z_j^{(0)} f(Y_j) + \sum_{j=1}^s z_j^{(1)} g(Y_j) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Açıkça görülüyor ki Eş. 5.1 denklemi Eş. 5.2' nin özel bir halidir.

$$\begin{aligned} Z_{ij}^{(0)} &= ha_{ij}, i, j = 1, \dots, s \\ z_j^{(0)} &= h\alpha_j, j = 1, \dots, s \\ Z_{ij}^{(1)} &= \sum_{l=1}^p b_{ij}^{(l)} \theta_l, & i, j = 1, \dots, s \\ z_j^{(1)} &= \sum_{l=1}^p \beta_j^{(l)} \theta_l, & j = 1, \dots, s \end{aligned} \quad (5.3)$$

Bu ifadeler Eş. 5.2' de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} Y_i &= y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(Y_j) + \sum_{l=1}^p \left( \sum_{j=1}^s b_{ij}^{(l)} g(Y_j) \right) \theta_l, & i = 1, \dots, s \\ y_{n+1} &= y_n + h \sum_{j=1}^s \alpha_j f(Y_j) + \sum_{l=1}^p \left( \sum_{j=1}^s \beta_j^{(l)} g(Y_j) \right) \theta_l, \end{aligned} \quad (5.4)$$

elde edilir.

Bu metod ailesini tabloda şu şekilde gösterebiliriz:

|          |                                 |
|----------|---------------------------------|
| $A$      | $B^{(1)} \dots B^{(p)}$         |
| $\alpha$ | $\beta^{(1)} \dots \beta^{(p)}$ |

Eş. 5.2 ile ilişkili mertebe koşullarını incelemek için Eş. 5.2 denklemini  $t$  nin bir fonksiyonu olarak yazalım:

$$\begin{aligned}
 Y_i(t) &= y(t_0) + \sum_{j=1}^s Z_{ij}^{(0)} f(Y_j(t)) + \sum_{j=1}^s Z_{ij}^{(1)} g(Y_j(t)), \quad i = 1, \dots, s \\
 Y(t) &= y(t_0) + \sum_{i=1}^s z_i^{(0)} f(Y_i(t)) + \sum_{i=1}^s z_i^{(1)} g(Y_i(t))
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

$Y(t)$  ifadesinde  $Y_i(t)$  yerine  $f(Y_i(t))$  Taylor serisine genişletilebilir: (Benzer şekilde  $g(Y_i(t))$  fonksiyonu da  $L^1$  operatörüyle genişletilebilir.)

Burada  $f(Y_i(t))$  ' in Taylor seri açılımı

$$f(Y_i(t)) = f(Y_i(t_0)) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(L^0)^k f(Y_i(t_0))}{k!} \tag{5.6}$$

şeklindedir. Burada

$$L^0 a(y) = \frac{\partial a}{\partial y} f, \quad L^1 a(y) = \frac{\partial a}{\partial y} g$$

olarak tanımlanmış olup  $f$  ve  $g$  farklı fonksiyonlar olarak düşünelim.

$$L^0 f(Y_i(t_0)) = \sum_{j=1}^s Z_{ij}^{(0)} f'(Y_i(t_0)) f(Y_i(t_0)) + \sum_{j=1}^s Z_{ij}^{(1)} f'(Y_i(t_0)) g(Y_i(t_0))$$

$$L^1 g(Y_i(t_0)) = \sum_{j=1}^s Z_{ij}^{(0)} g'(Y_i(t_0)) f(Y_i(t_0)) + \sum_{j=1}^s Z_{ij}^{(1)} g'(Y_i(t_0)) g(Y_i(t_0))$$

Benzer şekilde ikinci türev terimleri için:

$$\begin{aligned} (L^0)^2 f(Y_i(t_0)) &= \left( \sum_j Z_{ij}^{(0)} \right)^2 f''(y_0) f(y_0) f(y_0) + 2 \sum_{j,k} Z_{ij}^{(0)} Z_{jk}^{(0)} f'(y_0) f'(y_0) f(y_0) \\ &+ \sum_j Z_{ij}^{(0)} \sum_j Z_{ij}^{(1)} f''(y_0) f(y_0) g(y_0) + \sum_{j,k} Z_{ij}^{(0)} Z_{jk}^{(1)} f'(y_0) f'(y_0) g(y_0) \\ &+ \sum_{j,k} Z_{ij}^{(1)} Z_{jk}^{(0)} f'(y_0) g'(y_0) f(y_0) + \sum_j Z_{ij}^{(1)} \sum_j Z_{ij}^{(0)} f''(y_0) g(y_0) f(y_0) \\ &+ \sum_{j,k} Z_{ij}^{(0)} Z_{jk}^{(1)} f'(y_0) f'(y_0) g(y_0) + \sum_{j,k} Z_{ij}^{(1)} Z_{jk}^{(0)} f'(y_0) g'(y_0) f(y_0) \\ &+ \left( \sum_j Z_{ij}^{(1)} \right)^2 f''(y_0) g(y_0) g(y_0) + 2 \sum_{j,k} Z_{ij}^{(1)} Z_{jk}^{(1)} f'(y_0) g'(y_0) g(y_0) \end{aligned}$$

bulunur.

$(L^1)^2 g(Y_i(t_0))$  de benzer şekilde bulunur.

Şimdi bulduğumuz bu değerleri Eş. 5.5 denkleminde  $f(Y_i(t))$  ve  $g(Y_i(t))$  fonksiyonlarının Taylor seri açılımlarında yerine yazalım ve bu nümerik yöntemi Taylor serisinde genişletelim:

$$\begin{aligned} Y(t) &= y(t_0) + \sum_{i=1}^s z_i^{(0)} f(Y_i(t)) + \sum_{i=1}^s z_i^{(1)} g(Y_i(t)) \\ &= y(t_0) + \sum_{i=1}^s z_i^{(0)} \left[ f(y(t_0)) + L^0 f(y(t_0)) + \frac{1}{2!} (L^0)^2 f(y(t_0)) + \dots \right] \\ &+ \sum_{i=1}^s z_i^{(1)} \left[ g(y(t_0)) + L^1 g(y(t_0)) + \frac{1}{2!} (L^1)^2 g(y(t_0)) + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y(t) = & y(t_0) + z^{(0)T} e f(y_0) + z^{(0)T} Z^{(0)} e f'(y_0) f(y_0) + z^{(0)T} Z^{(1)} e f'(y_0) g(y_0) \\
& + \frac{1}{2} z^{(0)T} (Z^{(0)} e)^2 f''(y_0) f(y_0) f(y_0) + z^{(0)T} (Z^{(0)} e)^2 f'(y_0) f'(y_0) f(y_0) \\
& + \frac{1}{2} z^{(0)T} Z^{(0)} e Z^{(1)} e f''(y_0) f(y_0) g(y_0) + z^{(0)T} Z^{(0)} Z^{(1)} e f'(y_0) f'(y_0) g(y_0) \\
& + z^{(0)T} Z^{(1)} Z^{(0)} e f'(y_0) g'(y_0) f(y_0) + \frac{1}{2} z^{(0)T} Z^{(1)} e Z^{(0)} e f''(y_0) g(y_0) f(y_0) \\
& + \frac{1}{2} z^{(0)T} (Z^{(1)} e)^2 f''(y_0) g(y_0) g(y_0) + z^{(0)T} (Z^{(1)} e)^2 f'(y_0) g'(y_0) g(y_0) + \dots \\
& + z^{(1)T} e g(y_0) + z^{(1)T} Z^{(0)} e g'(y_0) f(y_0) + z^{(1)T} Z^{(1)} e g'(y_0) g(y_0) \\
& + \frac{1}{2} z^{(1)T} (Z^{(0)} e)^2 g''(y_0) f(y_0) f(y_0) + z^{(1)T} (Z^{(0)} e)^2 g'(y_0) f'(y_0) f(y_0) \\
& + \frac{1}{2} z^{(1)T} Z^{(0)} e Z^{(1)} e g''(y_0) f(y_0) g(y_0) + z^{(1)T} Z^{(0)} Z^{(1)} e g'(y_0) f'(y_0) g(y_0) \\
& + z^{(1)T} Z^{(1)} Z^{(0)} e g'(y_0) g'(y_0) f(y_0) + \frac{1}{2} z^{(1)T} Z^{(1)} e Z^{(0)} e g''(y_0) g(y_0) f(y_0) \\
& + \frac{1}{2} z^{(1)T} (Z^{(1)} e)^2 g''(y_0) g(y_0) g(y_0) + z^{(1)T} (Z^{(1)} e)^2 g'(y_0) g'(y_0) g(y_0) \\
& + \dots.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

(Burada  $e$  birim matristir.)

Artık parametreleri analiz etmek mümkündür. Bölüm 4.3. de Eş. 4.4 eşitliği ile elde ettiğimiz Stratonovich Taylor seri açılımı ile burada elde ettiğimiz Eş. 5.7 SRK yönteminin çözüm ailesini karşılaştırsak;  $f$  ve  $g$  fonksiyonları ve bunların türevlerinin oluşturduğu terimlerin katsayılarını eşleştirip bu katsayıları olduğunca eşitleyip, bazı katsayıları sıfırlayıp ona göre değişken seçebiliriz.

O halde Eş. 4.4 ile Eş. 5.7 denklemlerinin katsayılarını eşleştirme tablosunu oluşturalım:

Çizelge 5.1. Katsayılar

|    |                                                          |  |    |                                                          |
|----|----------------------------------------------------------|--|----|----------------------------------------------------------|
| 1  | $J_0 \Leftrightarrow z^{(0)T} e$                         |  | 12 | $J_{010} \Leftrightarrow z^{(0)T} Z^{(1)} c$             |
| 2  | $J_1 \Leftrightarrow z^{(1)T} e$                         |  | 13 | $J_{110} \Leftrightarrow z^{(0)T} Z^{(1)} \lambda$       |
| 3  | $J_{00} \Leftrightarrow z^{(0)T} c$                      |  | 14 | $J_{110} \Leftrightarrow \frac{1}{2} z^{(0)T} \lambda^2$ |
| 4  | $J_{10} \Leftrightarrow z^{(0)T} \lambda$                |  | 15 | $J_{001} \Leftrightarrow z^{(1)T} Z^{(0)} c$             |
| 5  | $J_{01} \Leftrightarrow z^{(1)T} c$                      |  | 16 | $J_{101} \Leftrightarrow z^{(1)T} Z^{(0)} \lambda$       |
| 6  | $J_{11} \Leftrightarrow z^{(1)T} \lambda$                |  | 17 | $J_{001} \Leftrightarrow \frac{1}{2} z^{(1)T} c^2$       |
| 7  | $J_{000} \Leftrightarrow \frac{1}{2} z^{(0)T} c^2$       |  | 18 | $J_{101} \Leftrightarrow \frac{1}{2} z^{(1)T} c \lambda$ |
| 8  | $J_{000} \Leftrightarrow z^{(0)T} Z^{(0)} c$             |  | 19 | $J_{011} \Leftrightarrow \frac{1}{2} z^{(1)T} c \lambda$ |
| 9  | $J_{100} \Leftrightarrow z^{(0)T} Z^{(0)} \lambda$       |  | 20 | $J_{111} \Leftrightarrow \frac{1}{2} z^{(1)T} \lambda^2$ |
| 10 | $J_{100} \Leftrightarrow \frac{1}{2} z^{(0)T} c \lambda$ |  | 21 | $J_{011} \Leftrightarrow h z^{(1)T} Z^{(1)} c$           |
| 11 | $J_{010} \Leftrightarrow \frac{1}{2} z^{(0)T} c \lambda$ |  | 22 | $J_{111} \Leftrightarrow z^{(1)T} Z^{(1)} \lambda$       |

Çizelge 5.1. de  $c = Z^{(0)} e$ ,  $\lambda = Z^{(1)} e$  olarak tanımlanmış olup  $Z^{(0)} = h a$  ve  $z^{(0)T} = h \alpha^T$  olduğunu hatırlatmakta fayda vardır.

Öncelikle  $Z^{(0)} = h A$ ,  $z^{(0)T} = h \alpha^T$ ,  $Z^{(1)} = J_1 B$ ,  $z^{(1)T} = J_1 \beta^T$ ,  $b = B e$  eşitliklerini göz önünde bulunduralım. Şimdi mertebe koşullarıyla ilgili bağlantılara geçebiliriz.

Örneğin Çizelge 5.1.' den güçlü mertebe 2 için gerekli olan 4 koşulu yazalım:

$$E = (J_{10} - h J_1 \psi)^2 = O(h)^4 \text{ olup } \psi = \alpha^T b \text{ olarak tanımlayalım.} \quad (5.8)$$

$$E(J_{10} - h J_1 \psi)^2 = E(J_{10}^2) - 2\psi h E(J_{10} J_1) + \psi^2 h^2 E(J_1^2)$$

eşitliği sağlanıyor olup

$$J_1 \sim N(0, h), \quad E(J_1^{2k+1}) = 0, \quad E(J_1^{2k}) = \frac{2k!}{k! 2^k} h^k, \quad E(J_{10}^2) = \frac{1}{3} h^3, \quad E(J_{10} J_1) = \frac{1}{2} h^2$$

ve  $E(J_1^2) = h$  'dır [20]. (5.9)

Bu eşitlikleri Eş. 5.8' de yerine yazarsak

$$\frac{1}{3}h^3 - 2\psi h \left(\frac{1}{2}h^2\right) + \psi^2 h^2 h = h^3 \left(\frac{1}{3} - \psi + \psi^2\right) \neq 0$$

olacağı için bu ifadeyi minimum yapan değere bakmamız gerekir. O halde bulduğumuz bu ifadenin minimum değerini bulmak için  $\psi'$  ye göre birinci merteben türevini alıp sıfıra eşitleyelim:

$$\left(\frac{1}{3} - \psi + \psi^2\right)' = 0 \Rightarrow -1 + 2\psi = 0 \Rightarrow \psi = \frac{1}{2} \text{ değeri elde edilir. Bu değere karşılık beklenen değer minimum değeri ise } \frac{1}{12} \text{ dir.}$$

Mesela şimdi de Çizelge 5.1.' den 1, 2 ve 6 numaralı eşleştirmelerin mertebeleri sırasıyla  $h$  (mertebesi 1),  $\sqrt{h}$  (mertebesi 0,5) ve  $h$  (mertebesi 1) olan koşullarına bakalım:

$$1) J_0 \Leftrightarrow z^{(0)T} e \text{ için: } z^{(0)T} e = h\alpha^T e \text{ 'dir.}$$

$$E(J_0 - h\alpha^T e)^2 = E(J_0^2) - 2h\alpha^T e E(J_0) + h^2(\alpha^T e)^2 = 0$$

$$\text{Burada } E(J_0^2) = h^2 \text{ ve } E(J_0) = h \text{ olup yerine yazarsak}$$

$$h^2 - 2h^2\alpha^T e + h^2(\alpha^T e)^2 = h^2(1 - 2\alpha^T e + (\alpha^T e)^2) = 0$$

$$\alpha^T e = \psi \text{ seçersek denklem } \psi^2 - 2\psi + 1 = 0 \Rightarrow (\psi - 1)^2 = 0 \Rightarrow \psi = 1 \text{ bulunur ki } \alpha^T e = 1 \text{ 'dir.}$$

$$2) J_1 \Leftrightarrow z^{(1)T} e \text{ için: } z^{(1)T} e = J_1\beta^T e \text{ 'dir.}$$

$$E(J_1 - J_1\beta^T e)^2 = E(J_1^2) - 2\beta^T e E(J_1 J_1) + (\beta^T e)^2 E(J_1^2) = 0$$

$$\text{burada } E(J_1^2) = E(J_1 J_1) = h \text{ olup yerine yazarsak}$$

$$h(1 - 2\beta^T e + (\beta^T e)^2) = 0$$

$$\beta^T e = \psi \text{ seçersek denklem } \psi^2 - 2\psi + 1 = 0 \Rightarrow (\psi - 1)^2 = 0 \Rightarrow \psi = 1 \text{ bulunur ki } \beta^T e = 1 \text{ 'dir.}$$

$$6) J_{11} \Leftrightarrow z^{(1)T} \lambda \text{ için: } z^{(1)T} \lambda = (J_1\beta^T)(Z^{(1)}e) = (J_1\beta^T)(J_1 B e) = J_1^2 \beta^T b \text{ 'dir.}$$

$$E(J_{11} - J_1^2 \beta^T b)^2 = E(J_{11}^2) - 2\beta^T b E(J_{11} J_1^2) + (\beta^T b)^2 E((J_1^2)^2) = 0$$

$$\text{burada } J_{1\dots 1} = \frac{J_1^p}{p!} \text{ olup}$$

$E(J_{11}^2) = \frac{3}{4}h^2$  ,  $E(J_{11}J_1^2) = \frac{3}{2}h^2$  ve  $E((J_1^2)^2) = E(J_1^4) = 3h^2$  'dir. Yerine yazarsak  $h^2 \left( \frac{3}{4} - 3\beta^T b + 3(\beta^T b)^2 \right) = 0$  bulunur. Burada  $h^2 \neq 0$  olacağından  $\frac{3}{4} - 3\beta^T b + 3(\beta^T b)^2 = 0$  olur ki  $\beta^T b = \frac{1}{2}$  elde edilir.

Şimdi de Çizelge 5.1.' den  $h^{1,5}$  mertebe koşullarına karşılık gelen terimler 4, 5, 20 ve 22 numaralı eşleştirmelerden ortaya çıkacağından bu eşleştirmeleri Eş. 5.9 'u da göz önünde bulundurarak yukarıda yaptığımız gibi aynı yoldan sırasıyla incelersek

4)  $J_{10} \Leftrightarrow z^{(0)T} \lambda$  için:  $z^{(0)T} \lambda = (h\alpha^T)(Z^{(1)}e) = (h\alpha^T)(J_1 B e) = h\alpha^T J_1 b$  'dir.

$$E(J_{10} - hJ_1 \alpha^T b)^2 = h^3 \left( \frac{1}{3} - \alpha^T b + (\alpha^T b)^2 \right) \neq 0$$

5)  $J_{01} \Leftrightarrow z^{(1)T} c$  için:  $z^{(1)T} c = (J_1 \beta^T)(Z^{(0)}e) = (J_1 \beta^T)(hAe) = J_1 \beta^T ha$  'dir.

$$E(J_{01} - hJ_1 \beta^T a)^2 = h^3 \left( \frac{1}{3} - \beta^T a + (\beta^T a)^2 \right) \neq 0$$

20)  $J_{111} \Leftrightarrow \frac{1}{2} z^{(1)T} \lambda^2$  için:

$$\frac{1}{2} z^{(1)T} \lambda^2 = \frac{1}{2} (J_1 \beta^T)(Z^{(1)}e)^2 = \frac{1}{2} (J_1 \beta^T)(J_1 B e)^2 = \frac{1}{2} J_1 \beta^T (J_1 b)^2 \text{ 'dir.}$$

$$E \left( J_{111} - \frac{1}{2} J_1^3 \beta^T b^2 \right)^2 = \frac{15}{4} h^3 \left( \frac{1}{9} - \frac{2}{3} \beta^T b^2 + (\beta^T b^2)^2 \right) = 0$$

22)  $J_{111} \Leftrightarrow z^{(1)T} Z^{(1)} \lambda$  için:

$$z^{(1)T} Z^{(1)} \lambda = (J_1 \beta^T)(J_1 B)(Z^{(1)}e) = (J_1 \beta^T)(J_1 B)(J_1 B e) = (J_1 \beta^T)(J_1 B)(J_1 b) \text{ 'dir.}$$

$$E(J_{111} - J_1^3 \beta^T B b)^2 = 15h^3 \left( \frac{1}{36} - \frac{1}{3} \beta^T B b + (\beta^T B b)^2 \right) = 0$$

Bulunan bu eşitliklerden bu dört denklem minimize edilirse denklemleri minimum yapan

$$\alpha^T b = \frac{1}{2}, \quad \beta^T a = \frac{1}{2}, \quad \beta^T b^2 = \frac{1}{3}, \quad \beta^T B b = \frac{1}{6}$$

değerleri elde edilir. Bu değerler sırasıyla yukarıdaki dört denklemde yerine yazılırsa

$$\frac{h^3}{12}, \quad \frac{h^3}{12}, \quad 0, \quad 0$$

denklemlerin minimum değerleri bulunur.

### 5.3. Güçlü 2. Mertebeden Açık Stokastik Runge-Kutta Yöntemi

Bu bölümde güçlü 2. mertebeden açık SRK yöntemi  $p = 2$  ve  $\theta_1 = J_1$ ,  $\theta_2 = \frac{J_{10}}{h}$  alınarak bir önceki bölümdeki metod ailesinin tablosuna dayandırılacaktır. Böylece metod şu şekilde yazılabilir:

$$Y_i = y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f(Y_j) + \sum_{j=1}^{i-1} \left( b_{ij}^{(1)} J_1 + b_{ij}^{(2)} \frac{J_{10}}{h} \right) g(Y_j), \quad i = 1, \dots, s$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=1}^s \alpha_j f(Y_j) + \sum_{j=1}^s \left( \beta_j^{(1)} J_1 + \beta_j^{(2)} \frac{J_{10}}{h} \right) g(Y_j) \quad (5.10)$$

Burada kolaylık sağlaması açısından

$$c = Ae, \quad b = B^1 e, \quad d = B^2 e, \quad \lambda = bJ_1 + d \frac{J_{10}}{h}$$

olduğu kabul edilecektir.

Devam ederken, sadece birinci ve ikinci mertebeden Stratonovich çoklu integralleri temel alan bir SRK yönteminin oluşturulmasında sadece  $J_1$  ve  $\frac{J_{10}}{h}$  'ın dikkate alınmasının gerektiğine vurgu yapılmalıdır. Zira mertebesi iki veya daha az olan diğer çoklu integraller  $h$  formülü ve bu integrallerin terimleriyle ifade edilebilirler:

$$J_{00} = \frac{h^2}{2}, \quad J_{11} = \frac{J_1^2}{2}, \quad \frac{J_{01}}{h} = J_1 - \frac{J_{10}}{h}$$

[20].

Güçlü 2. mertebeden bir metod inşa etmek için Çizelge 5.1.'deki 1, 2, 4, 5, 6, 20 ve 22 numaralı eşleştirmeler dikkate alınmalıdır. Bu terimlerin her biri sırayla incelenecek olup ilk önce bu metodu oluşturmakta yardımcı olacak beklenen değerlerin tablosunu oluşturalım:

Çizelge 5.2. Beklenen değerler

| Beklenen                                | Değer             |
|-----------------------------------------|-------------------|
| $J_1^2$                                 | $h$               |
| $\frac{J_{10}^2}{h^2}$                  | $\frac{1}{3}h$    |
| $\frac{J_1 J_{10}}{h}$                  | $\frac{1}{2}h$    |
| $J_1^4$                                 | $3h^2$            |
| $\frac{J_1^3 J_{10}}{h}$                | $\frac{3}{2}h^2$  |
| $J_1^2 \left(\frac{J_{10}}{h}\right)^2$ | $\frac{5}{6}h^2$  |
| $J_1 \left(\frac{J_{10}}{h}\right)^3$   | $\frac{1}{2}h^2$  |
| $\left(\frac{J_{10}}{h}\right)^4$       | $\frac{1}{3}h^2$  |
| $J_1^6$                                 | $15h^3$           |
| $\frac{J_1^5 J_{10}}{h}$                | $\frac{15}{2}h^3$ |
| $J_1^4 \left(\frac{J_{10}}{h}\right)^2$ | $4h^3$            |
| $J_1^3 \left(\frac{J_{10}}{h}\right)^3$ | $\frac{9}{4}h^3$  |
| $J_1^2 \left(\frac{J_{10}}{h}\right)^4$ | $\frac{4}{3}h^3$  |
| $J_1 \left(\frac{J_{10}}{h}\right)^5$   | $\frac{5}{6}h^3$  |
| $\left(\frac{J_{10}}{h}\right)^6$       | $\frac{5}{9}h^3$  |

Şimdi, Çizelge 5.2' den 1, 2, 4, 5, 6, 20 ve 22 numaralı eşleştirmeleri inceleyelim:

1.  $J_0 \Leftrightarrow z^{(0)T}e$  için:  $z^{(0)T}e = h\alpha^T e$  'dir.

$$E(J_0 - h\alpha^T e)^2 = (1 - \alpha^T e)h^2 \Rightarrow \alpha^T e = 1' \text{ dir.}$$

2.  $J_1 \Leftrightarrow z^T e$  için:  $z^T e = J_1 \beta^T e$  idi.

$$E(J_1 - z^T e)^2 = E\left(J_1(1 - \beta^{(1)T} e) - \left(\frac{J_{10}}{h}\right)\beta^{(2)T} e\right)^2 \Rightarrow \beta^{(1)T} e = 1, \quad \beta^{(2)T} e = 0.$$

4.  $J_{10} \Leftrightarrow z^{(0)T}\lambda$  için:  $z^{(0)T}\lambda = (h\alpha^T)(Z^{(1)}e) = (h\alpha^T)(J_1 B e) = h\alpha^T J_1 b$  idi.

$$E\left(J_{10} - h(\alpha^T b J_1 + \alpha^T d \frac{J_{10}}{h})\right)^2 = E(J_{10}(1 - \alpha^T d) - h\alpha^T b J_1)^2 \Rightarrow \alpha^T d = 1, \quad \alpha^T b = 0.$$

5.  $J_{01} \Leftrightarrow z^{(1)T}c$  için:  $z^{(1)T}c = (J_1 \beta^T)(Z^{(0)}e) = (J_1 \beta^T)(hAe) = J_1 \beta^T h a$  idi.

$$E\left(J_{01} - h(\beta^{(1)T} c J_1 + \beta^{(2)T} c \frac{J_{10}}{h})\right)^2 = h^2 E\left(J_1(1 - \beta^{(1)T} c) - \left(\frac{J_{10}}{h}\right)(1 + \beta^{(2)T} c)\right)^2$$

$$\Rightarrow \beta^{(1)T} c = 1, \quad \beta^{(2)T} c = -1.$$

6.  $J_{11} \Leftrightarrow z^{(1)T}\lambda$  için:  $z^{(1)T}\lambda = (J_1 \beta^T)(Z^{(1)}e) = (J_1 \beta^T)(J_1 B e) = J_1^2 \beta^T b$  idi.

$$E(J_{11} - z^T \lambda)^2 = E\left(\frac{J_1^2}{2} - z^T \lambda\right)^2$$

$$= E\left(J_1^2 \left(\frac{1}{2} - \beta^{(1)T} b\right) - J_1 \left(\frac{J_{10}}{h}\right)(\beta^{(1)T} d + \beta^{(2)T} b) - \left(\frac{J_{10}}{h}\right)^2 \beta^{(2)T} d\right)^2$$

$$\Rightarrow \beta^{(1)T} b = \frac{1}{2}, \quad \beta^{(1)T} d + \beta^{(2)T} b = 0, \quad \beta^{(2)T} d = 0.$$

20.  $J_{111} \Leftrightarrow \frac{1}{2}z^{(1)T}\lambda^2$  için:

$$\frac{1}{2}z^{(1)T}\lambda^2 = \frac{1}{2}(J_1 \beta^T)(Z^{(1)}e)^2 = \frac{1}{2}(J_1 \beta^T)(J_1 B e)^2 = \frac{1}{2}J_1 \beta^T (J_1 b)^2 \text{ idi.}$$

$$E\left(J_{111} - \frac{1}{2}z^T \lambda^2\right)^2 = E\left(\frac{J_1^3}{6} - \frac{1}{2}z^T \lambda^2\right)^2$$

$$\Rightarrow \beta^{(1)T} b^2 = \frac{1}{3}, \quad \beta^{(2)T} b^2 + 2\beta^{(1)T} b d = 0, \quad \beta^{(1)T} d^2 + 2\beta^{(2)T} b d = 0, \quad \beta^{(2)T} d^2 = 0.$$

22.  $J_{111} \Leftrightarrow z^{(1)T}Z^{(1)}\lambda$  için:

$$z^{(1)T} Z^{(1)} \lambda = (J_1 \beta^T)(J_1 B)(Z^{(1)} e) = (J_1 \beta^T)(J_1 B)(J_1 B e) = (J_1 \beta^T)(J_1 B)(J_1 b) \text{ idi.}$$

$$E \left( J_{111} - \frac{1}{2} z Z^T \lambda \right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \beta^{(1)T} B^{(1)} b = \frac{1}{6}, \quad \beta^{(2)T} B^{(1)} b + \beta^{(1)T} (B^{(2)} b + B^{(1)} d) = 0$$

$$\beta^{(2)T} B^{(2)} d = 0, \quad \beta^{(1)T} B^{(2)} d + \beta^{(2)T} (B^{(2)} b + B^{(1)} d) = 0 \text{ [22].}$$



## 6. NÜMERİK SONUÇLAR

Bu bölümde, bazı stokastik diferensiyel denklemler için elde edilen Runge-Kutta yönteminin mertbe koşulları dikkate alınarak nümerik sonuçlar sunulacaktır. Nümerik sonuçları elde etmek için MATLAB programlama dili kullanılmıştır.

Mertebe koşullarını nümerik olarak hesaplayabilmek için beklenen değerin yaklaşık hesabına ihtiyaç vardır. Bunun için literatürde yer etmiş bir yöntem olan Monte-Carlo simülasyonuna başvuracağız. Öncelikli olarak Monte-Carlo yönteminin beklenen değeri nasıl hesapladığını verelim.

### 6.1. Monte-Carlo Yöntemi

$X$ ,  $R^n$  değerli rassal değişken olmak üzere  $f(X) \in L^2(\Omega)$  ölçülebilir bir fonksiyon olsun.  $k \in \mathbb{N}$  için,  $X_k$  birbirinden bağımsız rassal değişkenler dizisi olmak üzere, beklenen  $f(X)$  in yaklaşık değeri

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K f(X_k) = E(f(X))$$

biçiminde hesaplanır [23,24].

Şimdi, önemli finansal modellerden örnekler seçeceğiz. Bu örneklerin nümerik sonuçlarını bilinen yöntemlerden olan Euler-Maruyama ve Milstein metotları ile hesaplayacağız. Daha sonra Runge-Kutta ile sonuçlarını karşılaştırıp Runge-Kutta' nın gerçeğe daha yakın sonuçlar verdiğini göstereceğiz. Sonuçları vermeden önce karşılaştırma yapacağımız nümerik yöntemlerin şemalarını kısaca ele alalım.

Aşağıdaki SDD' yi nümerik olarak çözelim:

$$dX(t) = \lambda X(t)dt + \mu X(t)dW(t), \quad X(0) = x_0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

$1 \leq n \leq N$  olmak üzere  $[0, T]$  aralığının  $\Delta t = \frac{T}{N}$  genişliği  $N$  tane eşit aralığa bölünsün:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T, \quad \Delta W_n = W_{t_{n+1}} - W_{t_n}.$$

Euler-Maruyama metodunun uygulanışı şu şekildedir:

$$y_{n+1} = y_n + \lambda(y_n)\Delta t + \mu(y_n)\Delta W_n.$$

Burada  $y_n$ ,  $X$  in  $t_n$  noktasındaki yaklaşık değerini göstermektedir. Ayrıca,  $\Delta W_n$  rassal değişkenler, bağımsız ve eşit olarak dağıtılmış normal rassal değişkenlerdir.  $N(0, \Delta_n)$  beklenen değeri sıfır ve varyansı  $\Delta n$  dir ve

$$E(\Delta W_n) = 0, \quad E((\Delta W_n)^2) = \Delta_n$$

olarak ifade edilir.

Milstein yakınsama yöntemi ise

$$Y_{n+1} = Y_n + \lambda(Y_n)\Delta t + \mu(Y_n)\Delta W_n + \frac{1}{2}\mu(Y_n)\mu'(Y_n)((\Delta W_n)^2 - \Delta t)$$

biçiminde elde edilir. Ayrıca mertebe hesabı için hatanın beklenen değerine ihtiyaç olmaktadır. Güçlü yakınsama kuralından

$$E|X - X^N| \leq c\Delta t^p$$

yazılabilir.  $p$  sayısı mertebeyi göstermektedir. Bu eşitsizlik üzerine biraz işlem yapılırsa

$$\log_2 E|X - X^N| \leq \log_2 c + p \log_2 \Delta t$$

$$\frac{\log_2 E|X - X^N|}{\log_2 \Delta t} \leq \frac{\log_2 c}{\log_2 \Delta t} + p$$

elde edilir.

Burada  $\frac{\log_2 c}{\log_2 \Delta t}$  oranı çok küçük olduğundan  $\frac{\log_2 c}{\log_2 \Delta t} \cong 0$  alırsak mertebemiz yaklaşık olarak

$$p \cong \frac{\log_2 E|X - X^N|}{\log_2 \Delta t} \text{ olur [25].}$$

*Örnek 6.1.* Yukarıda seçtiğimiz SDD' yi ele alalım.

$$\begin{cases} dX = \lambda X dt + \mu X dW, \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

Bu denklemin gerçek çözümü,

$$X(t) = X(0) \exp \left( \left( \lambda - \frac{1}{2} \mu^2 \right) t + \mu W(t) \right)$$

olarak bilinmektedir [26].

Gerçek çözümü bildiğimizden dolayı nümerik sonuçları yorumlamamız kolay olacaktır.

Euler-Maruyama yöntemi uygulanarak elde edilen şema,

$$X_{i+1} = X_i + \lambda X_i \Delta t + \mu X_i \Delta W;$$

Milstein yöntemi uygulanarak elde edilen şema,

$$X_{i+1} = X_i + \lambda X_i \Delta t + \mu X_i \Delta W + \frac{1}{2} \mu^2 X_i ((\Delta W)^2 - \Delta t);$$

şeklinde. Şimdi de daha güzel bir sonuç elde etmeyi beklediğimiz Runge-Kutta yöntemine odaklanalım. Mertebe koşulları dikkate alınırsa aşağıdaki tablo elde edilir:

Deterministik kısım için

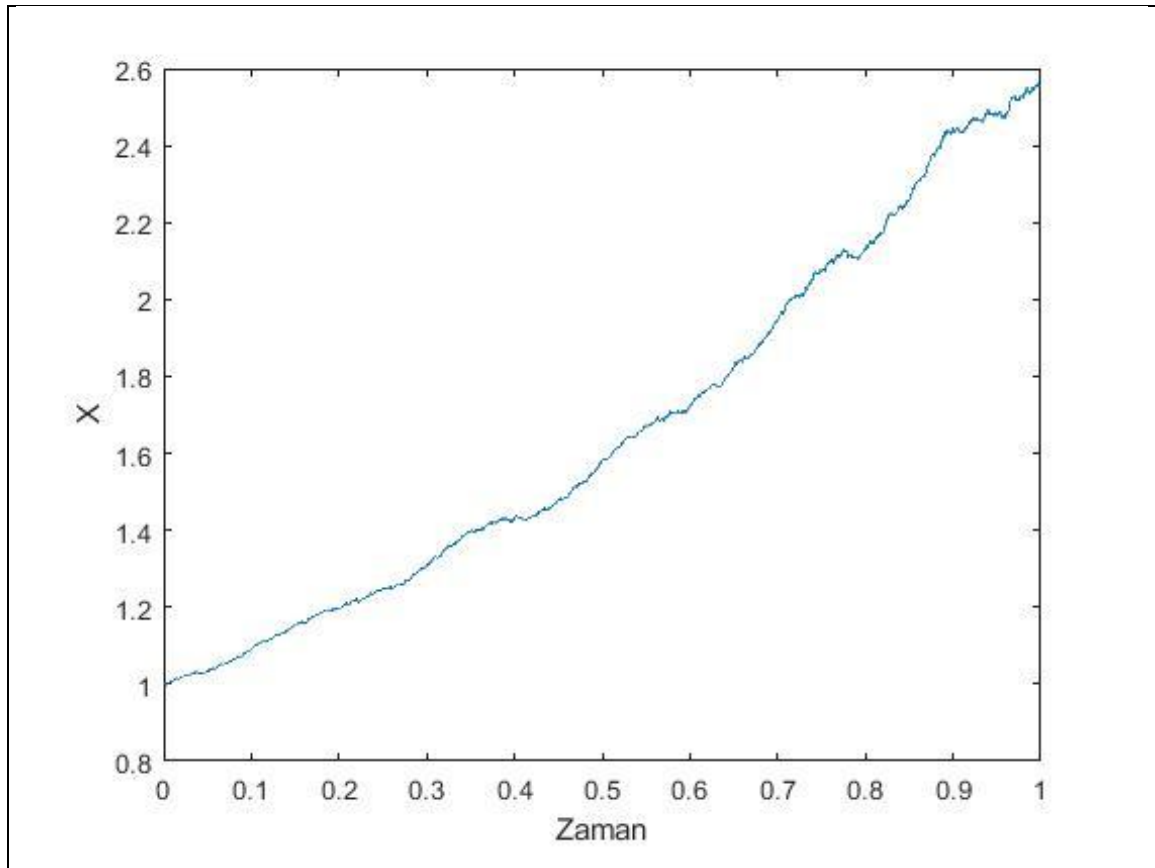
$$\begin{array}{c|cc}
 0 & 0 & \\
 1 & 1 & 0 \\
 \hline
 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
 \end{array}$$

ve stokastik kısım için

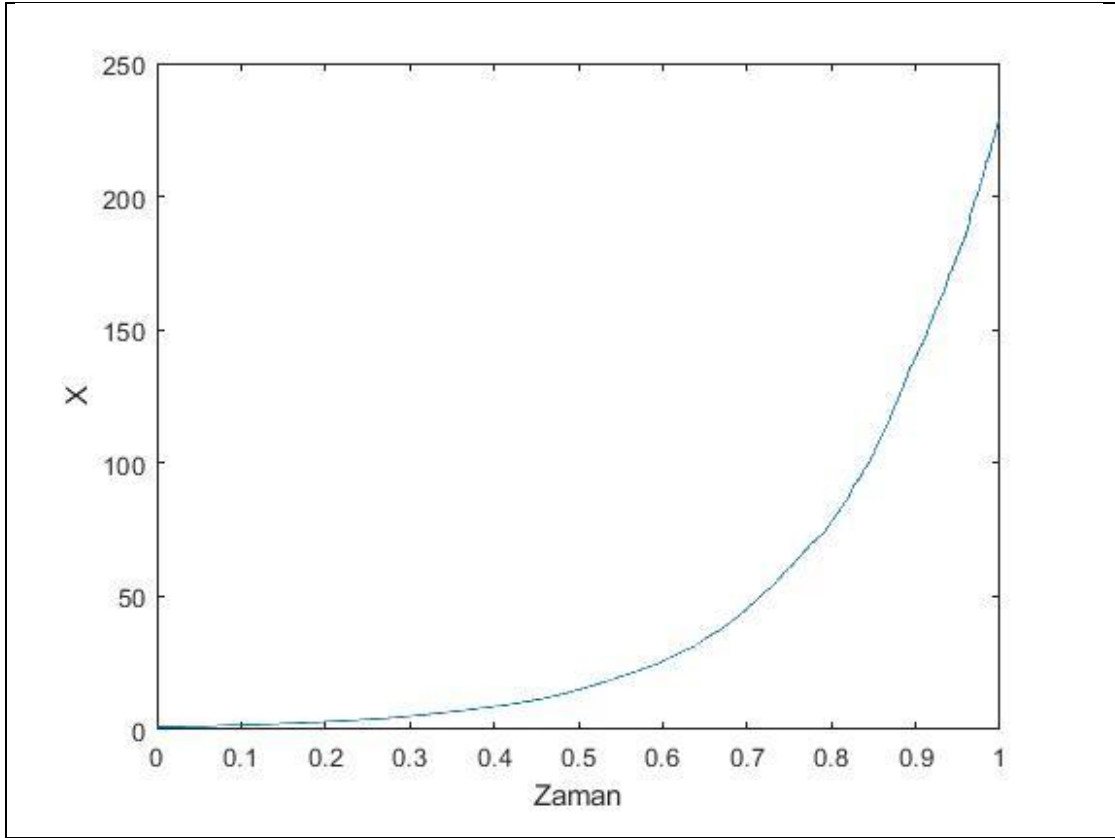
$$\begin{array}{c|cc}
 0 & 0 & \\
 \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\
 \hline
 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}
 \end{array}$$

alalım.

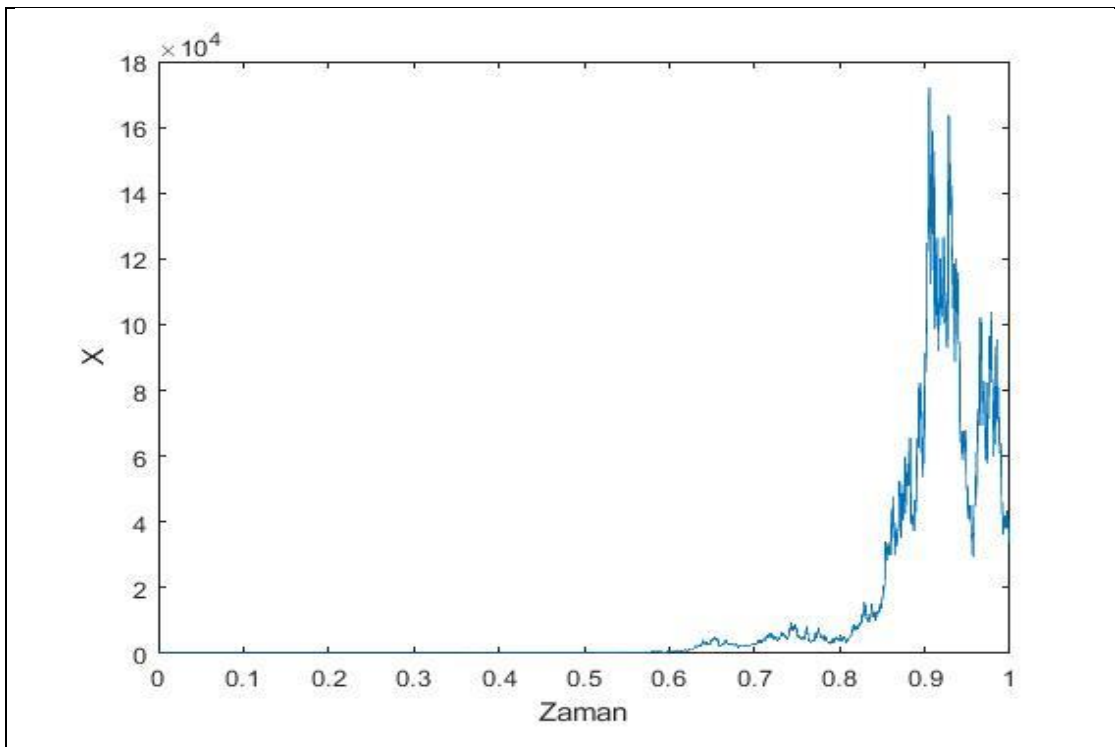
$\lambda=0.5$  ve  $\mu=1$  seçelim. Şekil 6.1. deki sonuç elde edilir. Problemin  $\mu$  ye karşı hassasiyetini görmek için farklı  $\mu$  değerleri için sonuçlara bakalım.



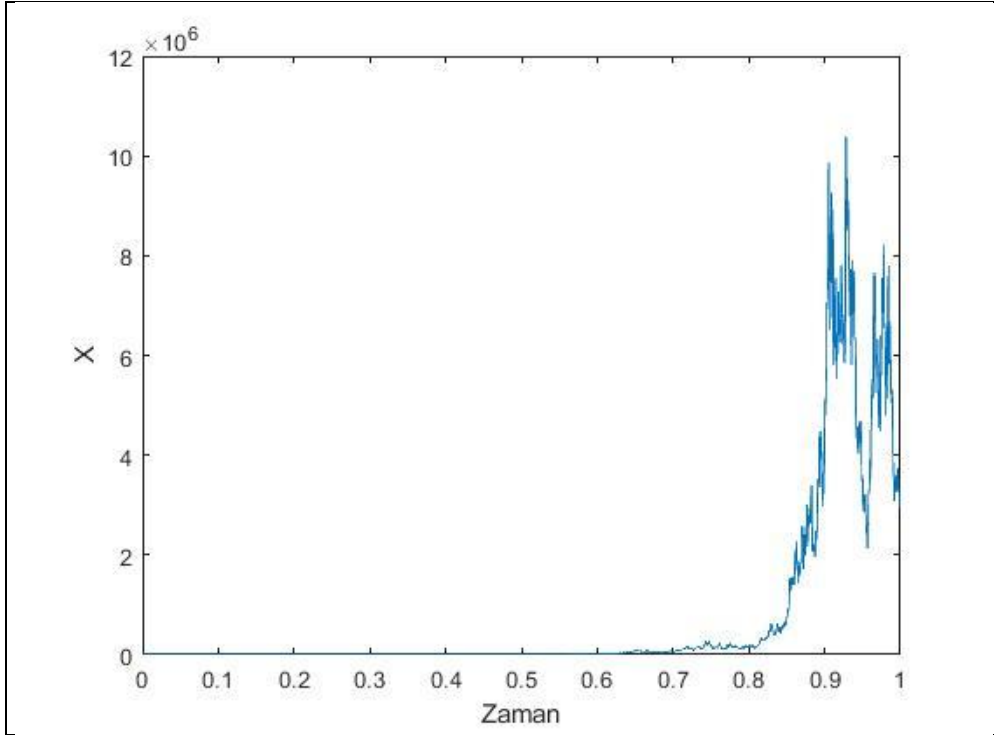
Şekil 6.1. SDD' nin  $\lambda=0.5$  ve  $\mu=1$  için Runge-Kutta yaklaşık çözümü



Şekil 6.2. SDD' nin  $\lambda=0.5$  ve  $\mu=2$  için Runge-Kutta yaklaşık çözümü



Şekil 6.3. SDD' nin  $\lambda=0.5$  ve  $\mu=5$  için Runge-Kutta yaklaşık çözümü



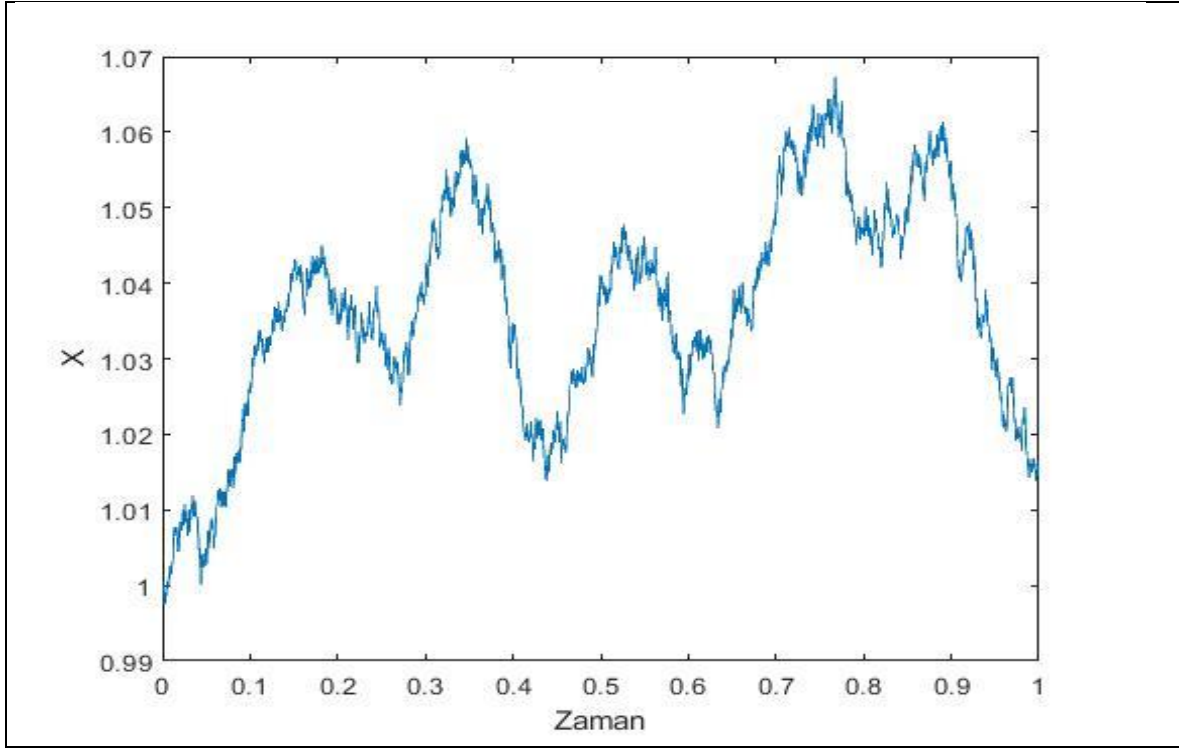
Şekil 6.4. SDD' nin  $\lambda=5$  ve  $\mu=5$  için Runge-Kutta yaklaşık çözümü

Şekil 6.1.-6.4. e bakılırsa eğer  $\mu$  değeri 5 gibi seçildiğinde bile nümerik sonuç yakınsak değildir.

Örnek 6.2. Şimdi de problemi biraz daha karmaşık seçelim.

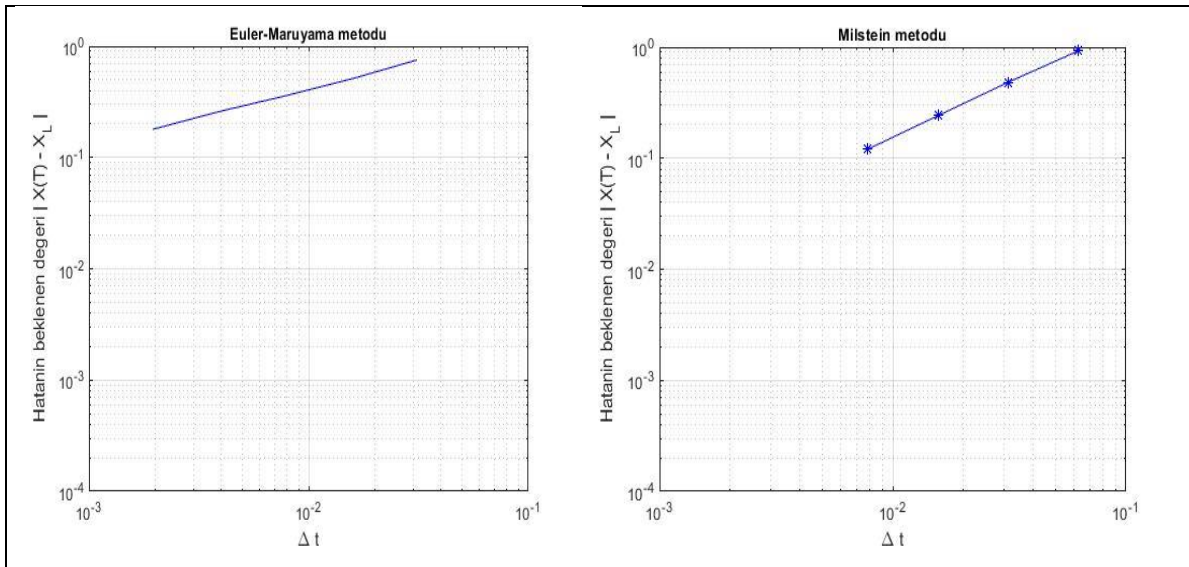
$$\begin{cases} dX = \lambda(1 - X)Xdt + \mu XdW, \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

$t \in [0,1]$  olsun.  $\lambda = 2$ ,  $\mu = 1$  ve  $X_0 = 0.5$  olarak seçelim. Nümerik çözüm Şekil 6.5. deki gibi olur.



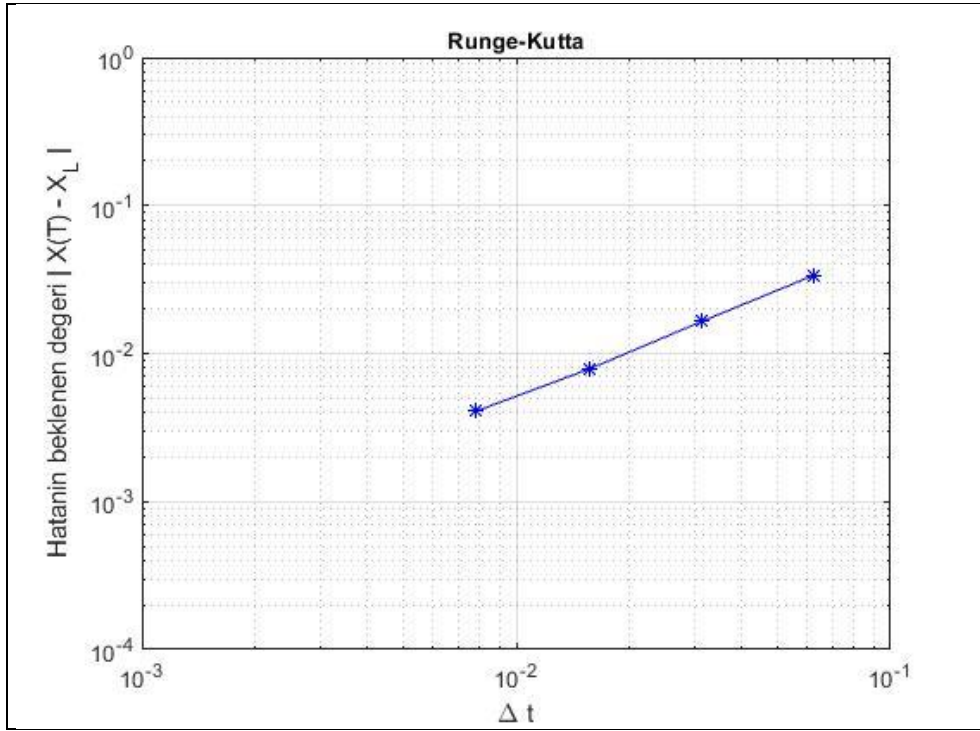
Şekil 6.5. Örnek 6.2. nin  $\lambda = 2$ ,  $\mu = 1$  için Runge-Kutta yaklaşık çözümü

Beklenen mertbe değerini bulmak için Monte-Carlo yönteminde örneklem sayısını  $m=500$  alalım. Her bir Monte-Carlo simülasyonunda hatayı  $err = |X(1) - X^N|$  olarak  $t=1$  noktasında hesaplayalım.  $\Delta t = 2^{-11}, 2^{-10}, 2^{-9}, 2^{-8}, 2^{-7}$  olacak şekilde 5 farklı adım boyutunda hatamızı ölçelim.



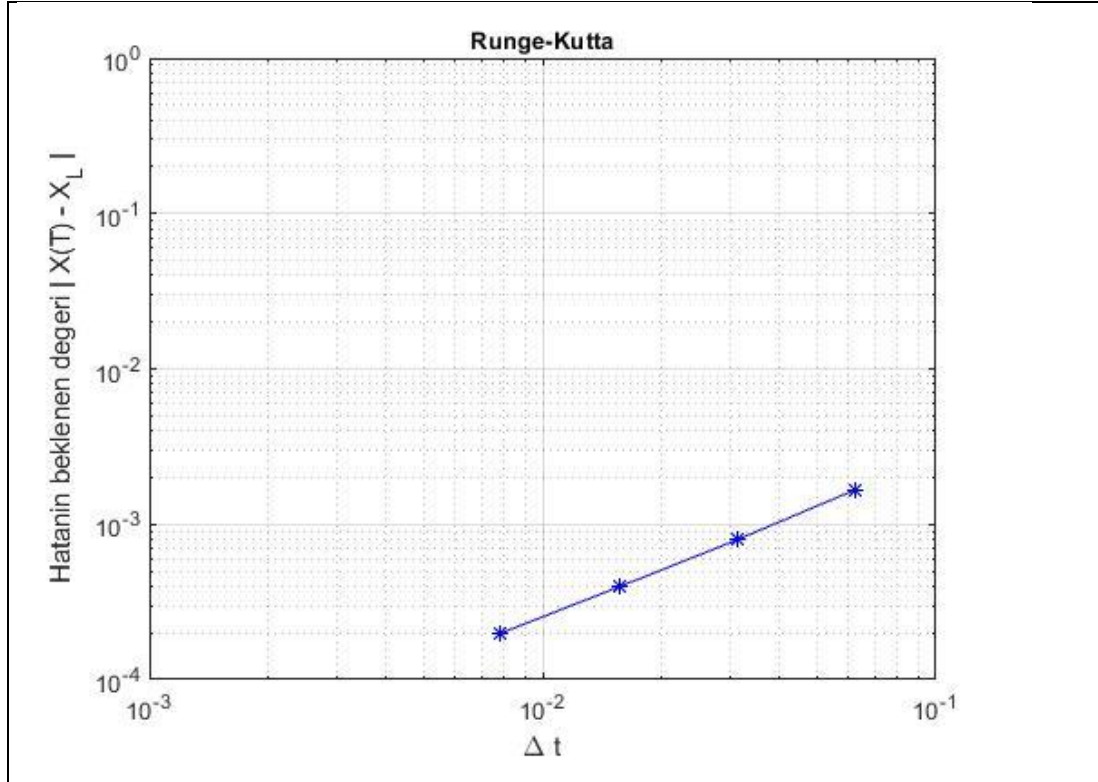
Şekil 6.6. Örnek 6.2. nin Euler ve Milstein yaklaşık çözümlerinin hata değerleri

Şekil 6.6. da görüldüğü üzere problemin Euler ve Milstein yöntemleriyle çözümlerinden elde edilen hata değerleri hesaplanmıştır. Milstein metodunun hatası biraz daha düşük olmakla beraber grafikte elde edilen doğru eğimleri de ufak değişiklikler göstermektedir. Milstein'in eğimi biraz daha büyüktür. Zaten beklenen mertebe değeri Euler-Maruyama 0.5 iken Milstein için 1 dir. Aynı değerler seçilerek Runge-Kutta yöntemi ile çözüldüğünde Şekil 6.7. deki sonuç elde edilir. Hatanın oldukça düşük çıktığı görülmektedir.

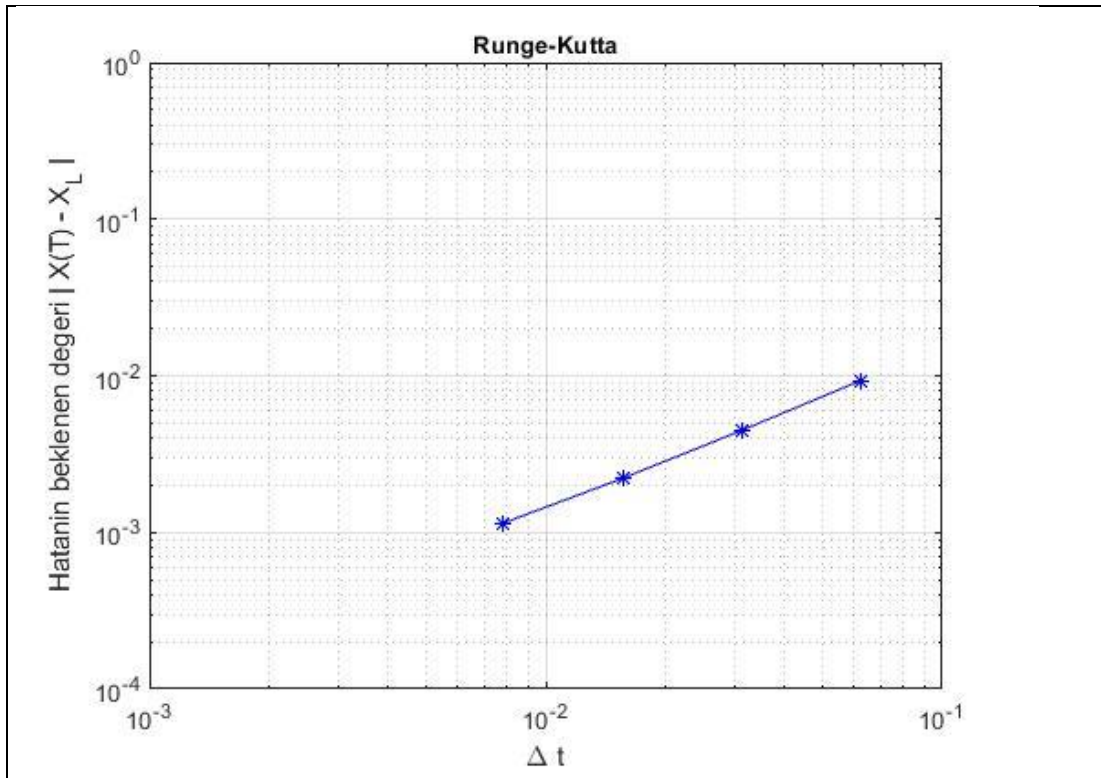


Şekil 6.7. Örnek 6.2. nin Runge-Kutta yaklaşık çözümünün hata değeri

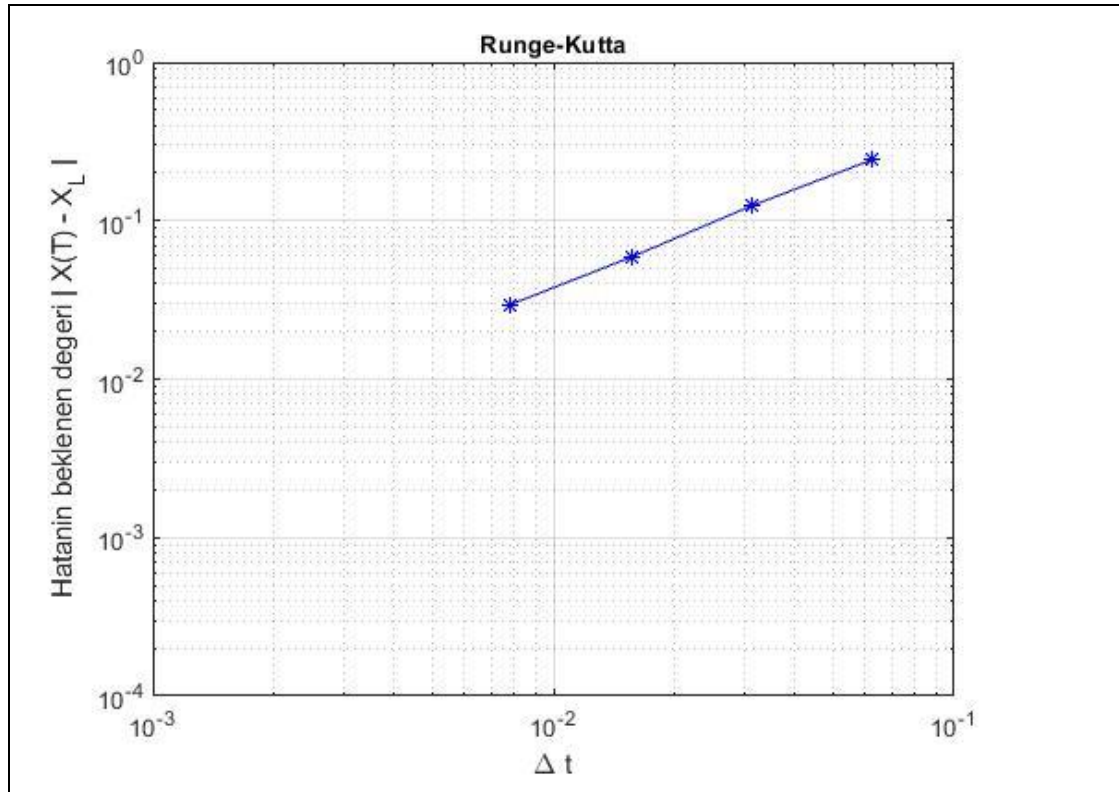
Bu problem  $\mu$  değerine göre hassasiyet göstermektedir. Sebebi ise ikinci terim stokastik olduğundan dolayı  $\mu$  büyüdükçe sonuç güvenilir olmaz.  $\mu$  değeri azaldıkça ise sonuç deterministik hale daha yaklaşır ve hata değeri düşer. Şekil 6.8. de  $\mu = 0.1$ , Şekil 6.9. da  $\mu = 0.5$ , Şekil 6.10. da  $\mu = 1$  ve Şekil 6.11. de  $\mu = 4$  seçilmektedir. Bu değer büyüdükçe hata değeri de büyümektedir.



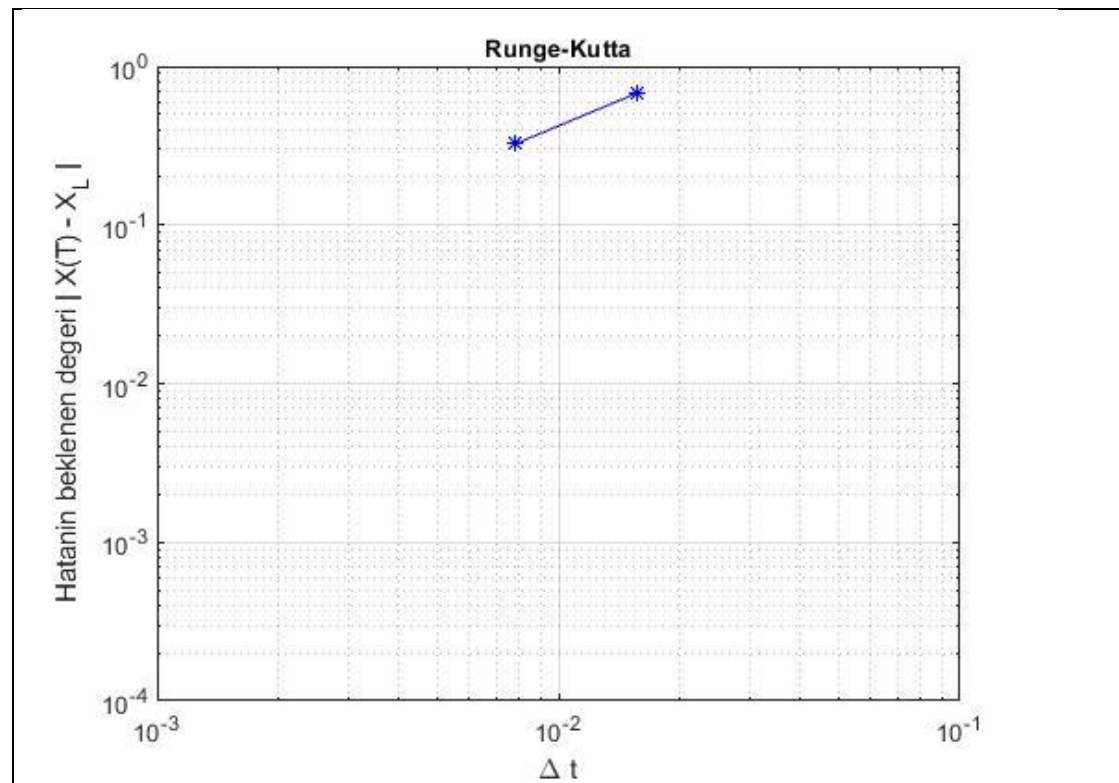
Şekil 6.8. Örnek 6.2. nin Runge-Kutta yaklaşık çözümünün  $\mu = 0.1$  için hata değeri



Şekil 6.9. Örnek 6.2. nin Runge-Kutta yaklaşık çözümünün  $\mu = 0.5$  için hata değeri



Şekil 6.10. Örnek 6.2. nin Runge-Kutta yaklaşık çözümünün  $\mu = 1$  için hata değeri



Şekil 6.11. Örnek 6.2. nin Runge-Kutta yaklaşık çözümünün  $\mu = 4$  için hata değeri

## 7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, SDD' in nümerik çözümleri için Stokostik Runge-Kutta metodunun elde edilişi ve uygulamaları üzerinde durulmuştur.

Bilindiği üzere Adi denklemlerde olduğu gibi nümerik metotların mertebeleri yakınsaklık açısından önem taşımaktadır. Nümerik yöntemler Taylor seri açılımı yardımıyla belli bir yerden kesilerek elde edilir. Mertebeyi ne kadar artırırız sonuca gitmek çok daha zor olacaktır. Bunun sebebi de yüksek mertebeden türev hesabı ile karşılaşılmasıdır. Runge-Kutta yöntemleri bu sıkıntıyı türevler için yakınsaklık yöntemine başvurarak çözmektedir. Hem daha yüksek yakınsaklık mertebesi hem de daha kolay hesaplama sunmaktadır.

SDD' lerde Runge-Kutta yöntemini uygulayıp mertebe koşullarını elde etmek için SDD' nin integral denklemi kullanılmaktadır. Sebebi de daha önce bahsedildiği üzere rassal değişkenin türevli olmamasıdır.

İtô-Taylor seri açılımı yazılarak mertebe koşulları elde edilmiştir. Fakat işlem kolaylığı açısından Stratonovich integrallerine dönüşüm yapılarak işlemler yapılmıştır.

Elde edilen nümerik tabloyu test etmek için bilindik finansal denklemler nümerik olarak çözülmüştür. Runge-Kutta yönteminden elde edilen sonuç Euler-Maruyama ve Milstein yöntemleriyle karşılaştırılmıştır. Beklendiği üzere nümerik hata daha düşük ve sayede mertebe daha yüksek olarak elde edilmiştir. Nümerik uygulamalarda MATLAB programlama dili kullanılmıştır.

İleriye dönük çalışmalar için Runge-Kutta yönteminin kararlılık analizi yapılabilir. Ayrıca, stokastik kısmi diferensiyel denklemlerin Runge-Kutta ile çözümleri incelenebilir.



## KAYNAKLAR

1. Burrage, P.M., Burrage, K. (1996). High Strong Order Explicit Runge-Kutta Methods for Stochastic Ordinary Differential Equations *Applied Numerical Mathematics* 22, 81-101.
2. Arnold, L. (1974). *Stochastic Differential Equations; Theory and Applications*, Willey, New York.
3. Geiss S. (2007). *Brownian Motion and Stochastic Differential Equations*. Probability and Stochastic Processes Basic Graduate Courses at Department of Mathematics, Tampere University of Technology, May 21st–25th.
4. Higham D. (2001). An Algorithmic Introduction of Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations, *SIAM Journal Numeric Analysis* 38, 43(3), 525-546.
5. Lin X. S. (2006). *Introduction Stochastic Analysis for Finance and Insurance*, Willey, New York.
6. Rümelin W. (1982). Numerical Treatment of Stochastic Differential Equations, *SIAM Journal Numeric Analysis*, 19(3), 604-613.
7. Fathel, S.F., Abdulamear, A.A. (2011). Explicit Runge-Kutta Methods for Solving Stochastic Differential Equations. *Journal of Basrah Researches (Sciences)*, 37(4).
8. Kloeden, P.E., Platen, E. and Schurz, H. (1994). *Numerical solution of Stochastic Differential Equations Through Computer Experiments*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
9. Lamba, H. (2005). Stepsize Control for the Milstein Scheme Using First-Exit-Times. *SIAM Journal Numeric Analysis* 43.
10. Abe, K.E.S., Shaw, W. and Giles, M. (2004). *Pricing Exotic Options using Local, Implied and Stochastic Volatility*, Market Data.
11. Önalın, Ö. (2010). *Stokastik Süreçler* (Birinci Baskı). Marmara Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, İşletme Bölümü. Avcıol Basım Yayın, İstanbul.
12. İnternet kaynağı: Evans, L.C. (2013). *An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory Version 0.2*. Department of Mathematics University of California, Berkeley. <http://math.berkeley.edu/~evans/control.course.pdf>.
13. Öz, H. (2013). *Advances and Applications of Stochastic Itô-Taylor Approximation and Change of Time Method: In the Financial Sector*. M. Sc. Thesis, Graduate School of Applied Mathematics of Middle East Technical Universty.
14. İnternet kaynağı: Herzog, F. (2013). *Stochastic Differential Equations*. Lecture note, <http://www.idsc.ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/mavt/dynamic-systems-n-control/idscdam/Lectures/Stochastic-Systems/SDE.pdf>.

15. Schaffter, T. (2010). *Numerical Integration of SDE: A Short Tutorial*. Swiss Federal Institute of Technology in Lausanne (EPFL), Switzerland, Unpublished manuscript, June 28.
16. Panzar, L., Cipu, E.C. (2005). *Using of Stochastic Itô and Stratonovich Integrals Derived Security Pricing*. 3. International Colloquium Mathematics in Engineering and Numerical Physics , 7-9 oct. Bucharest, BSG Proceedings 12, 222-229.
17. Evans, L.C. *An Introduction to Stochastic Differential Equations*. Department of Mathematics, Universty of California, Berkeley.
18. Girgin, Z. (2016). *Sayısal Analiz*. Ders Notları, Pamukkale Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Denizli.
19. Akinbo, B.J., Faniran, T., Ayoola, E.O. (2015). Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. *International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology* 2, 608-616.
20. Kloeden, P. E., Platen, E. (1992). *The Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag.
21. Gard, T.C. (1988). *Introduction to Stochastic Differential Equations*, Marcel Dekker, New York.
22. Burrage, P.M. (1999). *Runge-Kutta Methods for Stochastic Differential Equations*. M. Sc. Thesis, Department of Mathematics at The University of Queensland.
23. Glasserman, P. (2013). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering, Stochastic Modelling and Applied Probability*, Springer, New York.
24. Kroese, D., Taimre, T. and Botev, Z. (2013). *Handbook of Monte Carlo Methods*, Wiley Series in Probability and Statistics, Wiley, New York.
25. SaItô, Y., Mitsui, T. (1996). Stability Analysis of Numerical Schemes for Stochastic Differential Equations, *SIAM Journal Numerical Analysis*, 2254–2267.
26. Artemiev, S.S. (1993). *Certain Aspects of Application of Numerical Methods for Solving SDE Systems*, Bull. Computational Center, Numerical Analysis, 11-16.

## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : YETKİN, Zeynep  
 Uyruğu : T.C.  
 Doğum tarihi ve yeri : 15.10.1991, Ankara  
 Medeni hali : Bekar  
 Telefon : 0(544) 9619841  
 e-mail : zeynep.yetkin.91@gmail.com



### Eğitim

| Derece        | Eğitim Birimi                 | Mezuniyet tarihi |
|---------------|-------------------------------|------------------|
| Yüksek lisans | Gazi Üniversitesi/Matematik   | Devam ediyor     |
| Lisans        | Selçuk Üniversitesi/Matematik | 2013             |
| Lise          | Selahattin Akbilek Lisesi     | 2009             |

### İş Deneyimi

| Yıl        | Yer                                     | Görev    |
|------------|-----------------------------------------|----------|
| 2015-Halen | Zeynel Bey Anadolu İmam<br>Hatip Lisesi | Öğretmen |

### Yabancı Dil

İngilizce

### Yayınlar

1. Yetkin, Z. (2016, Mayıs). *Stokastik Diferansiyel Denklemlerin Runge-Kutta Yöntemi ile Nümerik Çözümleri ve Mertebe Koşulları*, 11. Ankara Matematik Günleri, Ankara Üniversitesi, Ankara.

### Hobiler

Seyahat Etme, Kitap Okuma, Müzik





*GAZİ GELECEKTİR..*