



BALÁZS OPERATÖRLERİNİN BLEİMANN, BUTZER VE HAHN TİP
GENELLEŞTİRMESİYLE YAKLAŞIM

Mustafa KARATAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EKİM 2018

Mustafa KARATAŞ tarafından hazırlanan "BALÁZS OPERATÖRLERİNİN BLEİMANN, BUTZER VE HAHN TİP GENELLEŞTİRMESİYLE YAKLAŞIM" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. İsmet YÜKSEL

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Başkan: Prof. Dr. Nurhayat İSPİR

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Doç. Dr. Sezgin SUCU

Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Tez Savunma Tarihi: 18/10/2018

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....
Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Mustafa KARATAŞ

18/10/2018

BALÁZS OPERATÖRLERİNİN BLEİMANN, BUTZER VE HAHN TİP
GENELLEŞTİRMESİYLE YAKLAŞIM

(Yüksek Lisans Tezi)

Mustafa KARATAŞ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ekim 2018

ÖZET

Bu tezde, Doğru tarafından çalışılan (A_n) operatörler dizisinin yaklaşım özellikleri incelenmiştir. İlk önce bu operatörlerin yaklaşım hızı sürekli ve sınırlı fonksiyonların bir Lipschitz H_α alt uzayında süreklilik modülü yardımıyla hesaplanmıştır . İkinci olarak, bazı özel koşullar altında Voronovskaja tip teorem sonucu elde edilmiştir. Son olarak, adı geçen operatörlerin belirli bir fonksiyona yakınsaklık oranı grafikler yardımıyla resmedilmiştir.

Bilim Kodu : 20404

Anahtar Kelimeler : Bernstein operatörler, Balázs Operatörler, BBH tip operatörler,
yaklaşım oranı, Voronovskaja tip yaklaşım teorem.

Sayfa Adedi : 79

Danışman : Doç. Dr. İsmet YÜKSEL

APPROXIMATION BY BLEIMANN, BUTZER AND HAHN TYPE
GENERALIZATION OF BALÁZS OPERATORS

(M. Sc. Thesis)

Mustafa KARATAŞ

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

October 2018

ABSTRACT

In this thesis, the approximation properties of the sequences of the (A_n) operators studied by Doğru were examined. Firstly, the degree of approximation of these operators was calculated by means of the continuity module in a Lipschitz H_α subspace of continuous and bounded functions. Secondly, in some special conditions, Voronovskaja type theorem was obtained. Finally, the rate of convergence of the operators to a certain function is illustrated with the help of graphics.

Science Code : 20404

Key Words : Bernstein operators, Balázs operators, BBH type operators,
rate of convergence, Voronovskaja-type theorem.

Page Number : 79

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. İsmet YÜKSEL

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım süresince akademik bilgi, deneyim ve tavsiyelerinden istifade ettiğim kıymetli hocam Sayın Doç. Dr. İsmet YÜKSEL'e teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca tez çalışmamız sırasında fikirleri ve önerileri ile destek veren Sayın Prof. Dr. Nurhayat İSPİR hocama teşekkürlerimi sunarım. Öğrenim hayatım boyunca bana inanan, bildiklerini paylaşan ve bilgiyi paylaşmayı öğreten bütün değerli hocalarıma minnettarım. Gösterdikleri sabır ve verdikleri destek için aileme ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR	x
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	5
2.1. Lineer Pozitif Operatörler	5
2.2. Lineer Pozitif Operatörlerin Özellikleri	6
2.3. Lineer Pozitif Operatörlerin Yaklaşım Hızı	7
2.4. $C[a,b]$ Uzayında Korovkin Teoremi	12
2.4.1. Weierstrass Yaklaşım Teoremi	12
2.4.2. Korovkin Teorem (1953)	13
2.5. Ağırlıklı Uzaylarda Yaklaşım	17
2.6. Fonksiyonların Değişme Mertebesi-Sonsuz Küçülenlerin Karşılaştırılması	22
3. BALÁSZ OPERATÖRLERİNİN BLEİMANN, BUTZER VE HAHN TİP GENELLEŞTİRMESİ	25
3.1. R_n Operatörleri	25
3.2. L_n Operatörleri	30
3.3. A_n Operatörleri	35
3.4. A_n Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri	36
3.5. A_n Operatörlerinin Yaklaşım Hızı	50
3.6. A_n Operatörleri İçin Voronovskaja Tip Teorem	54

Sayfa

4. GRAFİKSEL GÖSTERİMLER	71
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	75
KAYNAKLAR	77
ÖZGEÇMİŞ	79

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 4.1. $n = 2$ için $B_2(f; x)$ operatörlerinin f fonksiyonuna yaklaşımı	71
Şekil 4.2. $n = 8$ için $B_8(f; x)$ operatörlerinin f fonksiyonuna yaklaşımı	71
Şekil 4.3. $n = 15$ için $R_{15}(f; x)$ operatörlerinin f fonksiyonuna yaklaşımı	72
Şekil 4.4. $n = 45$ için $R_{45}(f; x)$ operatörlerinin f fonksiyonuna yaklaşımı	72
Şekil 4.5. $n = 15$ için $L_{15}(f; x)$ operatörlerinin f fonksiyonuna yaklaşımı	73
Şekil 4.6. $n = 45$ için $L_{45}(f; x)$ operatörlerinin f fonksiyonuna yaklaşımı	73
Şekil 4.7. $n = 15$ için $A_{15}(f; x)$ operatörlerinin f fonksiyonuna yaklaşımı	74
Şekil 4.8. $n = 45$ için $A_{45}(f; x)$ operatörlerinin f fonksiyonuna yaklaşımı	74

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$L(f, x)$	L operatörünün f fonksiyonuna uygulanması
$f_n \Rightarrow f$	f_n fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması
$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığındaki sürekli fonksiyonların uzayı
$C[0, \infty)$	$[0, \infty)$ aralığında sürekli fonksiyonların uzayı
$C_B[0, \infty)$	$[0, \infty)$ aralığında sınırlı ve sürekli reel değerli fonksiyonların uzayı
$\omega(f; \delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$Lip_M(\alpha)$	Lipschitz sınıfından fonksiyonlar
$\rho(x)$	Ağırlıklı fonksiyon
$B\rho$	$ f(x) \leq M_f \rho(x)$ şartını sağlayan fonksiyonlar uzayı
C_ρ	$B\rho$ uzayındaki sürekli fonksiyonlar uzayı
C_ρ^*	$\left\{ f \in C_\rho : \lim_{ x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} \in \mathbb{R} \right\}$ alt uzayı
$\ f\ _\rho$	$B\rho$ uzayında tanımlanan norm
$\ L\ _{C_\rho \rightarrow B\rho}$	C_ρ normlu uzayından $B\rho$ normlu uzayına dönüşüm yapan L operatörünün normu
$\varphi_{n,r}(x)$	r — inci merkezi moment
$R_n(f, x)$	Balázs operatörleri
$L_n(f, x)$	Bleimann, Butzer ve Hahn operatörleri
$A_n(f, x)$	Genelleştirilmiş Balázs operatörleri
H_ω	Sınırlı ve sürekli fonksiyonların alt uzayı
H_α	Sınırlı ve sürekli fonksiyonların bir Lipschitz alt uzayı

1. GİRİŞ

Fonksiyonlar teorisinin en çok uygulaması olan dalı yaklaşım teorisidir. Yaklaşım teorisinin amacı, belli özelliklere sahip fonksiyon uzayının elemanlarının bu uzayın bir alt uzayından olan iyi özelliklere sahip fonksiyonlar cinsinden bir gösterimini elde etmektir. Burada iyi özelliklere sahip fonksiyonlar genelde iyi bilinen, polinomlar veya rasyonel fonksiyonlar olarak alınmaktadır.

Fonksiyon uzaylarında "sürekli fonksiyonlara yaklaşım" problemi ilk defa Weierstrass tarafından ele alınmıştır. Bundan dolayı yaklaşım teorisinde en önemli teoremlerden biri Weierstrass yaklaşım teoremidir. 1885 yılında Weierstrass $[a, b]$ aralığında sürekli her f fonksiyonuna bir polinomla yaklaşılabileceğini ifade etmiştir [1]. Ancak Weierstrass bu polinomların ne tür polinomlar olduğu ve polinomların bulunma koşulları hakkında herhangi bir bilgi vermemiştir. Daha sonra birçok matematikçi bu teoreme ifade edilen polinomları açık bir şekilde elde etmişlerdir. Bu polinomların açık bir formu 1912 yılında Bernstein tarafından verilmiştir [2]. 1951 yılında Bohman toplam biçimindeki lineer pozitif bir operatörler dizisinin $[0, 1]$ kapalı aralığında sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsaması için yalnızca üç koşulu gerçeklemesi gerektiğini ifade ve ispat etmiştir [3]. Daha sonra 1953 yılında Korovkin, Bohman tarafından elde edilen bu ifadenin en genel lineer pozitif operatörler dizisine genellemiştir [4]. Bohman ve Korovkin teoremleri lineer pozitif operatörler teorisinin gelişmesine büyük katkı sağlamıştır. Lineer pozitif operatörler dizisinin yaklaşım koşulları Korovkin tarafından verilmiştir [5,6].

Analiz ve fonksiyonlar teorisinde yer alan araştırma alanlarından biri de lineer pozitif operatörlerle yaklaşım konusudur ve matematiğin birçok dalıyla ilişkilidir. Bohman (1952) ve Korovkin (1953), Bernstein polinomlarından yola çıkarak, lineer pozitif operatörler dizisinin sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsaması ile ilgili çok önemli bir teorem vermişlerdir. Sonlu aralıkta düzgün yakınsamanın gerçekleşmesi için sadece üç koşulun incelenmesinin yeterli olduğu bu teoreme ifade edilmiştir. Bu teorem ışığında birçok yeni lineer pozitif operatörün (Meyer-König ve Zeller operatörleri, Szasz operatörleri, Bleimann, Butzer ve Hahn operatörleri gibi) yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Ayrıca, $[0, \infty)$ aralığında ağırlıklı yaklaşım özellikleri de incelenebilmektedir. Sınırsız aralıklarda yaklaşım problemi, ağırlıklı uzaylarda araştırılmıştır. Ağırlıklı uzaylarda yaklaşım koşulları ve Korovkin tip teorem Gadjiev tarafından verilmiştir [7,8].

Yaklaşım teorisinde ve matematiğin diğer alanlarında önemli rol oynayan polinomlardan biri de Bernstein polinomlarıdır.

1912 yılında Bernstein polinomları

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.1)$$

biçiminde tanımlanmıştır [2]. Bernstein polinomlar dizisi $[0, 1]$ aralığında sürekli olan bir f fonksiyonuna aynı aralıkta düzgün yakınsar.

1975 yılında Balázs operatörleri, f fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında tanımlı reel değerli sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$R_n(f, x) = \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{b_n}\right) \binom{n}{k} (a_n x)^k \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.2)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada (a_n) ve (b_n) dizileri, x değişkeninden bağımsız olarak uygun şekilde seçilmiş reel sayı dizileridir [7].

Eş. 1.1 ve Eş. 1.2 ifadelerinde verilen Bernstein operatörlerini ve Balázs operatörlerini karşılaştıracak olursak n nnb

$$q_k(x) = x^k (1-x)^{n-k}$$

ve

$$r_k(x) = \frac{1}{(1 + a_n x)^n} (a_n x)^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

alınırsa $t = \frac{a_n x}{1 + a_n x}$ olmak üzere

$$r_k(x) = q_k(t)$$

elde edilir.

Eş. 1.2 verilen (R_n) operatörler dizisi için

$$a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow \infty \text{ ve } \frac{na_n}{b_n} \rightarrow 1$$

koşullarıyla Korovkin teoreminin hipotezleri gerçekleşir.

1980 yılında G. Bleimann P. L. Butzer ve L. Hahn tarafından $[0, \infty)$ aralığında tanımlı reel değerli sürekli herhangi bir f fonksiyonu için

$$L_n(f, x) = \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n-k+1}\right) \binom{n}{k} x^k \quad (1.3)$$

biçiminde bir operatörler dizisi tanımlanmış ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir [8].

Gadjiyev ve Çakar tarafından Eş. 1.3 ifadesinde verilen (L_n) operatörler dizisi için

$$e_v\left(\frac{x}{1+x}\right) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^v \quad v = 0, 1, 2$$

biçiminde test fonksiyonları kullanılarak pozitif yarı ekseninde sürekli ve sınırlı fonksiyonların bir Lipschitz alt uzayında Korovkin tip teorem ispatı verilmiştir [9].

Doğru tarafından Eş. 1.2 ve Eş. 1.3 ifadelerinde verilen operatörlerin bir genelleşmesi n indisine bağlı (b_n) dizisi yerine n ve k indislerine bağlı $(b_{n,k})$ dizisi alınarak

$$A_n(f, x) = \frac{1}{(1+a_nx)^n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{b_{n,k}}\right) \binom{n}{k} (a_nx)^k \quad (1.4)$$

biçiminde tanımlanmıştır [10].

(A_n) operatörler dizisinde Korovkin teoremi

$$c_n = a_n k + b_{n,k}$$

olmak üzere $n \rightarrow \infty$ iken

$$\frac{n}{c_n} \rightarrow 1$$

koşulunun sağlanması durumunda gerçekleşir.

Eş. 1.4 ifadesindeki (A_n) operatörler dizisinde $(b_{n,k})$ dizisi yerine n indisine bağlı olan bir (b_n) dizisi alınırsa Eş. 1.2 ifadesindeki Balázs operatörlerine, $a_n = 1$ ve $b_{n,k} = n - k + 1$ seçimiyle de Eş. 1.3 ifadesinde tanımlanan Bleimann, Butzer ve Hahn operatörlerine indirgenir.

Bu tezde, (A_n) operatörler dizisinin pozitif yarı ekseninde sürekli ve sınırlı fonksiyonların bir Lipschitz alt uzayında yaklaşım özellikleri incelenecektir. Buna ek olarak, yaklaşım hızı ve Voronovskaja tip sonuç elde edilecektir. Ayrıca, Eş. 1.1, Eş. 1.2, Eş. 1.3 ve Eş. 1.4 ifadelerinde verilen operatörler dizilerinin belirli bir fonksiyona yaklaşımı grafiksel gösterimler biçiminde resmedilecektir.

Bu tez, birinci bölümü giriş bölümü olmak üzere beş bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölüm altı ana başlıktan oluşmaktadır. İlk olarak sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü başlıklarda lineer pozitif operatörlerin tanımına, özelliklerine ve yaklaşım hızına ilişkin bilgiler verilmiştir. Daha sonra dördüncü başlıkta yaklaşım teorisinde merkezi rol oynayan teoremlerden biri olan Weierstrass teoremi ve Korovkin teoremi ifade edilmiştir. Beşinci başlıkta ise Gadjiyev tarafından incelenen reel eksenin tamamında veya sınırsız alt aralıklarda yaklaşım koşulları ve Korovkin teoreminin ispatıyla ilgili tanım ve teoremlere değinilmiştir. Son başlıkta da fonksiyonların değişim mertebesi ve sonsuz küçülenlerin karşılaştırılması ile ilgili tanıma yer verilmiştir.

Üçüncü bölüm altı ana başlıktan oluşmaktadır. Birinci başlıkta K. Balázs tarafından tanımlanan (R_n) operatörler dizisi ifade edilmiş ve hangi koşullar altında Korovkin teoreminin hipotezlerinin sağlandığına ilişkin açıklamalar yapılmıştır. Bu operatörler için test fonksiyonlarına ait sonuçlar elde edilmiştir. İkinci başlıkta Bleimann, Butzer ve Hahn tarafından tanımlanan (L_n) operatörler dizisi ifade edilmiş ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Gadjiyev ve Çakar tarafından bu operatörler için sınırlı ve sürekli fonksiyonların bir Lipschitz alt uzayında Korovkin tip teorem ispatı verilmiştir. Daha sonra üçüncü başlıkta Doğru tarafından çalışılan (A_n) operatörler dizisinin tanımı verilmiştir. Dördüncü ve beşinci başlıklarda ise H_α uzayında bu operatörler dizisi için yaklaşım özellikleri, yaklaşım hızı ve Korovkin tip teorem elde edilmiştir. Son başlıkta ise (A_n) operatörler dizisi için Voronovskaja tip teorem bazı özel koşullar altında incelenmiştir.

Dördüncü bölümde (B_n) , (R_n) , (L_n) ve (A_n) operatör dizilerinin belirli bir fonksiyona yaklaşımları grafiksel gösterimler biçiminde resmedilmiştir.

Beşinci bölümde de elde edilen sonuçlar ve öneriler yer almaktadır.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde, lineer pozitif operatörlerin tanımı, özellikleri ve yaklaşım hızı ile ilgili tanım ve lemmalara yer verilmiştir. Bilinmektedir ki yaklaşım teorisinin amacı herhangi bir fonksiyonun daha kullanışlı olan farklı bir fonksiyon türünde gösterimini elde etmektir. Bundan dolayı bu kısımda Weierstrass tarafından 1885 yılında ifade edilen, sürekli her f fonksiyonuna polinomlar dizisiyle yaklaşılabileceğiyle ilgili teorem verilmiş ve $C[a, b]$ uzayında Korovkin tip teorem ispatlanmıştır. Ayrıca, ağırlıklı uzayda yaklaşım ile ilgili tanım, önerme ve teoremlere değinilmiştir. Bunlara ek olarak, fonksiyonların değişim mertebesi ve sonsuz küçülenlerin karşılaştırılmasına ilişkin tanım ifade edilmiştir.

2.1. Lineer Pozitif Operatörler

2.1.1. Tanım

X ve Y normlu lineer fonksiyon uzayları olsun. Eğer X uzayında alınmış herhangi f fonksiyonuna Y uzayında bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa bu L kuralına X uzayından Y uzayına bir operatör denir. $f \in X$, $g \in Y$ ve x elemanı g fonksiyonunun tanım kümesine ait olmak üzere

$$L(f; x) = L(f)(x) = g(x)$$

ya da daha açık bir şekilde ifade edecek olursak; t değişkeni f fonksiyonunun x değişkeni de, g fonksiyonunun tanım kümesine ait olmak üzere

$$L(f(t); x) = g(x)$$

şeklinde gösterilir [11].

2.1.2. Tanım

$L : X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. Eğer L operatörü her $f_1, f_2 \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$L(\alpha f_1 + \beta f_2; x) = \alpha L(f_1; x) + \beta L(f_2; x)$$

koşulunu sağlıyorsa, L operatörüne lineer operatör denir [11].

2.1.3. Tanım

$X^+ = \{f : f(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$ ve $Y^+ = \{g : g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$ iki fonksiyon uzayı olsun. $L : X \rightarrow Y$ operatörü için $L(X^+) \subset Y^+$ koşulu sağlanıyorsa L operatörüne pozitif operatör denir [11].

2.1.4. Tanım

Lineerlik ve pozitiflik koşullarını sağlayan L operatörüne, lineer pozitif operatör denir [11].

Şimdi lineer pozitif operatörlerin bazı önemli özelliklerini verelim.

2.2. Lineer Pozitif Operatörlerin Özellikleri

2.2.1. Lemma

Lineer pozitif operatörler monotondur [11].

İspat

Gerçekten; her $t \in \mathbb{R}$ için $f(t) \geq g(t)$ ise $f(t) - g(t) \geq 0$ dır. L operatörünün pozitifliğinden

$$L(f - g; x) \geq 0$$

ve L operatörünün lineerliğinden

$$L(f, x) - L(g, x) \geq 0$$

olup

$$L(f, x) \geq L(g, x)$$

elde edilir.

2.2.2. Lemma

L lineer pozitif operatör ise, o takdirde

$$|L(f)| \leq L(|f|)$$

eşitsizliği gerçekleşir [11].

İspat

Herhangi bir f fonksiyonu için

$$-|f| \leq f \leq |f| \tag{2.1}$$

olur. L operatörü lineer pozitif operatör olduğundan dolayı monoton artandır. O zaman 2.1 eşitsizliğinden

$$L(-|f|) \leq L(f) \leq L(|f|) \tag{2.2}$$

eşitsizliği yazılabilir. L operatörünün lineerliğinden

$$L(-|f|) = -L(|f|)$$

olur. Son eşitliğin 2.2 eşitsizliğinde kullanılmasıyla

$$-L(|f|; x) \leq L(f; x) \leq L(|f|; x)$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla lemmanın ispatı tamamlanır.

2.3. Lineer Pozitif Operatörlerin Yaklaşım Hızı

Yaklaşım teoresinin bir diğer önemli problemi yaklaşım hızıdır. Yaklaşım hızı, $n \rightarrow \infty$ iken $\varepsilon_n \rightarrow 0$ olmak üzere

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq C\varepsilon_n$$

eşitsizliğini gerçekleyen ε_n dizisinin bulunmasıyla belirlenir, burada C sabiti n indisinden bağımsız bir sabittir.

Yaklaşım teoresinin önemli problemi olan yaklaşım hızı kavramıyla ilgili hesaplamaları yapmak için birçok araç kullanılır. Bu amaçla, ilk olarak süreklilik modülü kavramı tanımlanıp daha sonra süreklilik modülünün özellikleri verilecektir.

2.3.1. Tanım

$f \in C[a, b]$ olsun. $\delta > 0$ için

$$\omega(f; \delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |t-x| \leq \delta}} |f(t) - f(x)|$$

biçiminde tanımlanan $\omega(f; \delta)$ fonksiyonuna, f fonksiyonunun *süreklilik modülü* denir [12].

Süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri gerçekler.

i) $\omega(f; \delta) \geq 0$

ii) $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$

iii) $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta) = 0$

iv) Her $m \in \mathbb{N}$ için $\omega(f; m\delta) \leq m\omega(f; \delta)$

v) Her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(f; \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(f; \delta)$

vi) $|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|)$

$$\text{vii) } |f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t - x|}{\delta} + 1 \right) \omega(f; \delta)$$

İspat

i) Süreklilik modülünün tanımından açıktır.

ii) $\delta_1 \leq \delta_2$ için $\{|f(t) - f(x)| : t, x \in [a, b] \text{ ve } |t - x| \leq \delta_1\}$ kümesi $\{|f(t) - f(x)| : t, x \in [a, b] \text{ ve } |t - x| \leq \delta_2\}$ kümesinin bir alt kümesi olduğundan, bölge büyüdükçe alınan supremum büyüyeceği özelliğinden ispat açıktır.

iii) f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli olduğundan aynı zamanda düzgün sürekli dir. Yani keyfi $\varepsilon > 0$ için en az bir $\eta > 0$ vardır öyle ki $|t - x| < \eta$ koşulunu sağlayan her $x, t \in [a, b]$ için $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ olur. Eğer $\delta < \eta$ seçilirse süreklilik modülünün tanımına göre;

$$\omega(f; \delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |t - x| \leq \delta}} |f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

olup buradan

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta) = 0$$

bulunur.

iv) Süreklilik modülünün tanımından $m \in \mathbb{N}$ için

$$\omega(f; m\delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |t - x| \leq m\delta}} |f(t) - f(x)|$$

eşitliği yazılabilir. Eğer

$$|t - x| \leq m\delta$$

ise

$$x - m\delta \leq t \leq x + m\delta$$

olmak üzere $t = x + mh$ seçimiyle $|h| \leq \delta$ için

$$\omega(f; m\delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x + mh) - f(x)|$$

eşitliği elde edilir. Diğer yandan

$$\sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x + mh) - f(x)|$$

$$= \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} \left| \sum_{k=0}^{m-1} [f(x + (k+1)h) - f(x + kh)] \right|$$

olup üstteki eşitliğin sağ tarafına üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x + mh) - f(x)|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{m-1} \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x + (k+1)h) - f(x + kh)|$$

$$\leq \omega(f; \delta) + \omega(f; \delta) + \dots + \omega(f; \delta)$$

$$= m\omega(f; \delta)$$

elde edilir.

v) $\lambda \in \mathbb{R}^+$ sayısının tam kısmı $[\lambda]$ ile gösterilsin. Tam değer fonksiyonun tanımı

gereğince

$$[\lambda] \leq \lambda < [\lambda] + 1$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik ve $\omega(f; \delta)$ fonksiyonunun monoton artan özelliğini gözönünde bulundurulursa

$$\omega(f; \lambda\delta) \leq \omega(f; ([\lambda] + 1)\delta)$$

eşitsizliği elde edilir. $[\lambda]$ pozitif bir tamsayı olduğundan elde edilen son eşitsizliğin sağ tarafına 2.3.1. Tanımdaki (iv) özelliği uygulanırsa

$$\omega(f; ([\lambda] + 1)\delta) \leq ([\lambda] + 1) \omega(f; \delta)$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için

$$[\lambda] + 1 \leq \lambda + 1$$

olduğundan dolayı

$$\omega(f; ([\lambda] + 1)\delta) \leq (\lambda + 1) \omega(f; \delta)$$

olur. Buradan

$$\omega(f; \lambda\delta) \leq \omega(f; ([\lambda] + 1)\delta)$$

eşitsizliğiyle

$$\omega(f; \lambda\delta) \leq (\lambda + 1) \omega(f; \delta)$$

ifadesi elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

vi) $\omega(f; \delta)$ ifadesinde δ yerine $|t - x|$ yazılırsa

$$|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|)$$

olduğu açıktır.

vii) 2.3.1. Tanımdaki (vi) özelliğinden

$$|f(t) - f(x)| \leq \omega \left(f; \frac{|t-x|}{\delta} \delta \right)$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikte 2.3.1. Tanımdaki (v) özelliği kullanılırsa

$$|f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1 \right) \omega(f; \delta)$$

yazılır. Böylelikle ispat tamamlanır.

2.3.2. Tanım

$0 < \alpha \leq 1$ ve her $x, t \in [a, b]$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq M |t - x|^\alpha$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar Lipschitz sınıfından fonksiyonlar ve M sabiti de *Lipschitz sabiti* olarak adlandırılır. Lipschitz sınıfından fonksiyonlar $f \in Lip_M(\alpha)$ ile gösterilir [13].

2.4. $C[a, b]$ Uzayında Korovkin Teoremi

1885 yılında Weierstrass $[a, b]$ aralığında sürekli her f fonksiyonuna bir polinomla yaklaşılabileceğini ifade ve ispat etmiştir.

2.4.1. Weierstrass Yaklaşım Teoremi

Her $\varepsilon > 0$ ve $f \in C[a, b]$ için öyle bir P polinomu vardır öyle ki her $x \in [a, b]$ için $|P(x) - f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır. Başka bir ifadeyle kapalı ve sınırlı $[a, b]$ aralığında sürekli her f fonksiyonu için $[a, b]$ aralığında f fonksiyonuna düzgün yakınsayan bir (P_n) polinom dizisi vardır [1].

2.4.1. Tanım

Her $x \in [a, b]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

ise (f_n) fonksiyonlar dizisi f fonksiyonuna $C[a, b]$ uzayında düzgün yakınsaktır denir ve

$$f_n \Rightarrow f$$

ile gösterilir.

1953 yılında P. P. Korovkin tarafından verilen aşağıdaki teorem ifade ve ispat edilecektir.

2.4.2. Korovkin Teorem (1953)

2.4.2. Teorem

Her $n \in \mathbb{N}$ için $L_n : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ olmak üzere (L_n) lineer pozitif operatör dizisi olsun. Her $\nu = 0, 1, 2$ için $e_\nu(t) = t^\nu$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(e_\nu) - e_\nu\|_{C[a, b]} = 0$$

koşulları gerçekleşiyorsa bu durumda $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli olan her f fonksiyonu için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - f\|_{C[a, b]} = 0$$

sağlanır [11, 12, 13].

İspat

$f \in C[a, b]$ olduğunda f fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde düzgün sürekli olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki her $x, t \in [a, b]$ için $|t - x| < \delta$

olduğunda

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

olur. $|t - x| \geq \delta$ olduğunda ise f fonksiyonunun sınırlılığundan ve üçgen eşitsizliğinden dolayı $M > 0$ olmak üzere

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq 2M \quad (2.3)$$

yazılabilir. Diğer taraftan $|t - x| \geq \delta$ ise

$$\frac{|t - x|}{\delta} \geq 1$$

olacağından

$$\frac{(t - x)^2}{\delta^2} \geq 1 \quad (2.4)$$

sağlanır. 2.3 ve 2.4 eşitsizliklerinden

$$|f(t) - f(x)| \leq 2M \frac{(t - x)^2}{\delta^2}$$

ifadesi yazılabilir. O halde

$$|t - x| < \delta \quad \text{için} \quad |f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

ve

$$|t - x| \geq \delta \quad \text{için} \quad |f(t) - f(x)| \leq 2M \frac{(t - x)^2}{\delta^2}$$

olup, dolayısıyla her $t \in \mathbb{R}$ ve her $x \in [a, b]$ için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + 2M \frac{(t - x)^2}{\delta^2} \quad (2.5)$$

eşitsizliği elde edilir. L_n operatörlerinin lineerliğinden

$$\begin{aligned}
& |L_n(f(t); x) - f(x)| \\
&= |L_n(f(t); x) - f(x) + L_n(f(x) \cdot 1; x) - L_n(f(x) \cdot 1; x)| \\
&= |L_n(f(t); x) - L_n(f(x) \cdot 1; x) - f(x) + L_n(f(x) \cdot 1; x)| \\
&= |L_n((f(t) - f(x)); x) + f(x)(L_n(1; x) - 1)|
\end{aligned}$$

yazılır. Yukarıdaki eşitlikte üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq |L_n((f(t) - f(x)); x)| + |f(x)| |L_n(1; x) - 1|$$

eşitsizliği yazılabilir. L_n lineer pozitif operatör olduğundan

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq L_n(|f(t) - f(x)|; x) + |f(x)| |L_n(1; x) - 1|$$

dir. f fonksiyonunun sınırlılığından

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq L_n(|f(t) - f(x)|; x) + M |L_n(1; x) - 1|$$

yazılabilir. L_n monoton artan olup 2.5 eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq L_n\left(\varepsilon + 2M \frac{(t-x)^2}{\delta^2}; x\right) + M |L_n(1; x) - 1| \quad (2.6)$$

bulunur. Diğer taraftan L_n operatörlerinin lineerliğinden

$$L_n\left(\varepsilon \cdot 1 + 2M \frac{(t-x)^2}{\delta^2}; x\right)$$

$$\begin{aligned}
&= L_n(\varepsilon \cdot 1; x) + L_n\left(2M \frac{(t-x)^2}{\delta^2}; x\right) \\
&= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n((t-x)^2; x) \\
&= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n(t^2 - 2xt + x^2; x) \\
&= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M}{\delta^2} [L_n(t^2; x) - 2xL_n(t; x) + x^2L_n(1; x)] \\
&= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M}{\delta^2} [L_n(t^2; x) - x^2 - x^2 + 2x^2 - 2xL_n(t; x) + x^2L_n(1; x)] \\
&= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M}{\delta^2} [L_n(t^2; x) - x^2 + 2x^2 - 2xL_n(t; x) + x^2L_n(1; x) - x^2] \\
&= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M}{\delta^2} [(L_n(t^2; x) - x^2) + 2x(x - L_n(t; x)) + x^2(L_n(1; x) - 1)]
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlik 2.6 eşitsizliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|L_n(f(t); x) - f(x)| &\leq \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M}{\delta^2} [(L_n(t^2; x) - x^2) + 2x(x - L_n(t; x)) \\
&\quad + x^2(L_n(1; x) - 1)] + M |L_n(1; x) - 1|
\end{aligned}$$

sağlanır. Her $\nu = 0, 1, 2$ için $e_\nu(t) = t^\nu$ olmak üzere

$$L_n(1; x) \rightrightarrows 1,$$

$$L_n(t; x) \rightrightarrows x$$

ve

$$L_n(t^2; x) \rightrightarrows x^2$$

oldukları dikkate alınırsa $n > n_0$ olacak şekilde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| < \varepsilon$$

elde edilir. O halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |L_n(f(t); x) - f(x)| = 0$$

dir. Böylelikle ispat tamamlanır.

2.5. Ağırlıklı Uzaylarda Yaklaşım

Bilinmektedir ki Korovkin teoremi sınırlı aralıklarda geçerlidir. Aralık sınırsız alındığında yaklaşım problemini çözebilmek için ağırlıklı uzaylar tanımlanmıştır. Bu yüzden sınırsız aralıklarda Korovkin teoremi ağırlıklı uzaylarda incelenmiştir. Bu bölümde ağırlıklı uzayların tanım ve teoremlerine değinilmiştir.

Korovkin teoremi reel eksenin sınırlı ve kapalı alt aralıklarında verilmiştir. Reel eksenin tamamında veya sınırsız alt aralıklarında yaklaşım koşullarını Gadjiev araştırmıştır [5,6].

2.5.1. Tanım

ρ fonksiyonu, reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer ρ fonksiyonu $\mathbb{R}$ kümesinde sürekli olmak üzere $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \rho(x) = \infty$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için $\rho(x) \geq 1$ özelliklerini sağlıyorsa ρ fonksiyonuna *ağırlıklı fonksiyon* adı verilir.

Tüm reel ekseninde tanımlı ve $|f(x)| \leq M_f \rho(x)$ koşulunu sağlayan fonksiyonların uzayı $B_\rho(\mathbb{R})$ ile gösterilir, burada M_f sadece f fonksiyonuna bağlı bir sabittir. $B_\rho(\mathbb{R})$

uzayındaki sürekli fonksiyonların uzayı da $C_\rho(\mathbb{R})$ ile gösterilir. Yani,

$$B_\rho(\mathbb{R}) = \{f : \forall x \in \mathbb{R} \text{ için } |f(x)| \leq M_f \rho(x)\}$$

ve

$$C_\rho(\mathbb{R}) = \{f : f \in B_\rho(\mathbb{R}) \text{ ve } f \in C(\mathbb{R})\}$$

olup bu uzaylar $\|f\|_\rho = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{\rho(x)}$ normu ile birer normlu uzaydır, burada $B_\rho(\mathbb{R})$ ve $C_\rho(\mathbb{R})$ uzaylarına *ağırlıklı uzay* denir.

Yukarıdaki verilen tanımlarda $\mathbb{R}$ yerine $[0, \infty)$ aralığı alınırsa tanımlar yine geçerli olur.

2.5.2. Tanım

$\varphi(x)$ reel ekseninde sürekli, monoton artan bir fonksiyon olmak üzere $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon ve $\rho(x) = 1 + [\varphi(x)]^2$ olsun. M_f sadece f fonksiyonuna bağlı sabit sayı olmak üzere

$$|f(x)| \leq M_f \rho(x)$$

eşitsizliğini sağlayan reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonların kümesi $B_\rho[0, \infty)$ ve $B_\rho[0, \infty)$ uzayındaki sürekli fonksiyonların kümesi ise $C_\rho[0, \infty)$ ile gösterilir. $B_\rho[0, \infty)$ ve $C_\rho[0, \infty)$ uzaylarına *ağırlıklı uzay* adı verilir. Bu uzaylar

$$\|f\|_\rho = \sup \left\{ \frac{|f(x)|}{\rho(x)} : x \in [0, \infty) \right\}$$

normu ile birer normlu uzaydır. $C_\rho[0, \infty)$ uzayının

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} \in \mathbb{R}$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların kümesi $C_\rho^*[0, \infty)$ ile gösterilir. $C_\rho^*[0, \infty)$ ve $C_\rho[0, \infty)$ uzayları $B_\rho[0, \infty)$ uzayının alt uzayıdır.

2.5.3. Önerme

$C_\rho[0, \infty)$ uzayında tanımlı lineer pozitif bir operatörün $C_\rho[0, \infty)$ uzayından $B_\rho[0, \infty)$ uzayına dönüşüm yapması için gerek ve yeter koşul

$$|L(\rho; x)| \leq M\rho(x)$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısının bulunmasıdır.

İspat

($\implies$) L operatörü $C_\rho[0, \infty)$ uzayından $B_\rho[0, \infty)$ uzayına bir dönüşüm olsun. Yani her $f \in C_\rho[0, \infty)$ için $L(f) \in B_\rho[0, \infty)$ olsun. ρ fonksiyonu sürekli ve $|\rho(t)| \leq M\rho(t)$ koşulunu sağlayacak şekilde $M > 0$ sayısı mevcut olduğundan $\rho \in C_\rho[0, \infty)$ olup $L(\rho) \in B_\rho[0, \infty)$ dir. O halde $|L(\rho; x)| \leq M\rho(x)$ olacak şekilde bir $M > 0$ vardır. Buradan

$$\frac{|L(\rho; x)|}{\rho(x)} \leq M$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece son eşitsizlikten $[0, \infty)$ aralığında üstten sınırlı olan her kümenin bir en küçük üst sınırı olduğundan

$$\sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|L(\rho; x)|}{\rho(x)}$$

mevcuttur. Buradan

$$\|L(\rho; x)\|_\rho \leq M$$

sonucu elde edilir.

($\impliedby$) L operatörü $C_\rho[0, \infty)$ uzayından $B_\rho[0, \infty)$ uzayına bir dönüşüm yaptığını göstereceğiz.

$L(f) \in B_\rho[0, \infty)$ olduğunu göstereceğiz.

$|L(\rho; x)| \leq M\rho(x)$ olacak biçimde bir $M > 0$ sayısının var olsun. Diğer yandan $f \in$

$C_\rho[0, \infty)$ olduğunda her $t \in [0, \infty)$ için

$$|f(t)| \leq M_f \rho(t)$$

olacak biçimde bir $M_f > 0$ sayısı vardır.

$$|L(f; x)| \leq L(|f|; x)$$

$$= L\left(|f(t)| \frac{\rho(t)}{\rho(t)}; x\right)$$

$$\leq \|f\|_\rho L(\rho; x)$$

$$\leq \|f\|_\rho M \rho(x)$$

elde edilir. Dolayısıyla $K := \|f\|_\rho M$ olmak üzere $|L(f; x)| \leq K \rho(x)$ olup bu ifade $L(f) \in B_\rho[0, \infty)$ olduğunu gösterir.

2.5.4. Önerme

$L : C_\rho[0, \infty) \rightarrow B_\rho[0, \infty)$ lineer pozitif bir operatör olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlik

$$\|L\|_{C_\rho \rightarrow B_\rho} = \|L(\rho)\|_\rho$$

gerçeklenir.

İspat

Operatör normunun tanımından ve lineer pozitif operatörlerin monotonluk özelliğinden

$$\|L\|_{C_\rho \rightarrow B_\rho}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{\|f\|_\rho=1} \|L(f; x)\|_\rho \\
&= \sup_{\|f\|_\rho=1} \left\{ \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|L(f; x)|}{\rho(x)} \right\} \\
&\leq \sup_{\|f\|_\rho=1} \left\{ \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{L(|f|; x)}{\rho(x)} \right\} \\
&\leq \sup_{\|f\|_\rho=1} \left\{ \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{L\left(\frac{|f|}{\rho}; x\right)}{\rho(x)} \right\} \\
&\leq \sup_{\|f\|_\rho=1} \left\{ \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{L\left(\rho(t) \sup_{t \in [0, \infty)} \frac{|f(t)|}{\rho(t)}; x\right)}{\rho(x)} \right\} \\
&= \sup_{\|f\|_\rho=1} \left\{ \|f\|_\rho \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{L(\rho(t); x)}{\rho(x)} \right\} \\
&= \|L(\rho)\|_\rho
\end{aligned} \tag{2.7}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan $\|\rho\|_\rho = 1$ olduğundan

$$\|L(\rho)\|_\rho \leq \sup_{\|f\|_\rho=1} \|L(f)\|_\rho = \|L\|_{C_\rho \rightarrow B_\rho} \tag{2.8}$$

eşitsizliği bulunur. Eş. 2.7 ve 2.8 eşitsizliğinden ispat tamamlanır.

2.5.5. Teorem

Her $n \in \mathbb{N}$ için $L_n : C_\rho[0, \infty) \rightarrow B_\rho[0, \infty)$ lineer pozitif bir operatör olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(\varphi^v) - \varphi^v\| = 0; \quad v = 0, 1, 2$$

koşullarını sağlamasına rağmen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f^*) - f^*\|_\rho \geq 1$$

olacak şekilde bir $f^* \in C_\rho[0, \infty)$ bulunabilir [6,11].

2.5.6. Teorem

(L_n) lineer pozitif operatörler dizisi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(\varphi^v; x) - \varphi^v\|_\rho = 0 \quad v = 0, 1, 2$$

şeklinde üç şartı sağlıyorsa her $f \in C_\rho^*[0, \infty)$ için $n \rightarrow \infty$ iken

$$\|L_n(f) - f\|_\rho \rightarrow 0$$

dır.

Buradan da şu açıktır ki yakınsama ρ -normundadır [5,11].

2.6. Fonksiyonların Değişme Mertebesi-Sonsuz Küçülenlerin Karşılaştırılması

2.6.1. Tanım

$\varphi, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon, $x_0 \in (a, b)$ ve x_0 sayısının komşuluğundaki her x noktası için $g(x) \neq 0$ olsun.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{g(x)} = 0$$

gerçekleniyorsa

$$\varphi(x) = o(g(x)), \quad (x \rightarrow x_0)$$

biçiminde gösterilmektedir. Tanımdan görüldüğü üzere, $x \rightarrow x_0$ iken $\varphi(x) = o(1)$ yazılışı ile

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$$

olduğu anlaşılacak olup x_0 noktasında φ fonksiyonu sonsuz küçülen olarak adlandırılacaktır [14].

3. BALÁSZ OPERATÖRLERİNİN BLEİMANN, BUTZER VE HAHN TİP GENELLEŞTİRMESİ

Bu bölümde, ilk olarak K. Balázs tarafından ifade edilen R_n operatörlerinin tanımı ve test fonksiyonlarına ait sonuçlar verilmiştir. İkinci olarak, Bleimann, Butzer ve Hahn tarafından verilen L_n operatörlerinin yaklaşım özelliklerine ait bazı sonuçlar gösterilmiştir. Üçüncü olarak Doğru tarafından çalışılan, R_n ve L_n operatörlerinin bir genelleştirmesi olan A_n operatörlerinin yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Son kısımda ise bazı özel koşullar altında A_n operatörleri için Voronovskaja tip teorem elde edilmiştir.

3.1. R_n Operatörleri

3.1.1. Tanım

(a_n) ve (b_n)

$a_n \rightarrow 0$ ve $b_n \rightarrow \infty$

olacak biçimde pozitif terimli herhangi iki reel sayı dizisi olsun. $n \rightarrow \infty$ iken

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{b_n} = 1$$

koşulu altında $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ ve f fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında reel değişkenli sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$R_n(f; x) = \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{b_n}\right) \binom{n}{k} (a_n x)^k \quad (n = 1, 2, \dots)$$

şeklinde tanımlanan operatörlere Balázs operatörleri denir [7].

3.1.2. Lemma

R_n operatörleri lineer pozitif operatörlerdir.

İspat

Her $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ ve her $f_1, f_2 \in C[0, \infty)$ olmak üzere $x \geq 0$ için toplamın lineerliğinden

$$R_n(\alpha_1 f_1(t) + \beta_1 f_2(t); x)$$

$$= \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k \left[\alpha_1 f_1 \left(\frac{k}{b_n} \right) + \beta_1 f_2 \left(\frac{k}{b_n} \right) \right]$$

$$= \alpha_1 \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k f_1 \left(\frac{k}{b_n} \right)$$

$$+ \beta_1 \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k f_2 \left(\frac{k}{b_n} \right)$$

$$= \alpha_1 R_n(f_1(t); x) + \beta_1 R_n(f_2(t); x)$$

dir. f fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında tanımlı olmak üzere $\binom{n}{k} (a_n x)^k \geq 0$ ve $f \geq 0$ olduğundan $R_n(f; x) \geq 0$ dır. Böylece (R_n) operatörler dizisi lineer pozitif operatörler dizisidir.

3.1.3. Lemma

Her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \geq 0$ olmak üzere Eş. 1.2 ifadesindeki R_n operatörleri için

$$i) R_n(1; x) = 1,$$

$$ii) R_n(t; x) = \frac{n}{b_n} \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right),$$

ve

$$iii) R_n(t^2; x) = \frac{n(n-1)}{b_n^2} \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 + \frac{n}{b_n^2} \frac{a_n x}{1 + a_n x}$$

eşitlikleri gerçekleşir.

İspat

i) Eş. 1.2 ifadesinden

$$R_n(1; x) = \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k$$

$$= \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k$$

dir. Binom açılımından

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k = (1 + a_n x)^n$$

olduğundan

$$R_n(1; x) = 1$$

elde edilir.

ii) Eş. 1.2 ifadesinden

$$R_n(t; x) = \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k \frac{k}{b_n}$$

$$= \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} (a_n x)^k \frac{k}{b_n}$$

$$= \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} (a_n x)^k \frac{1}{b_n}$$

olur. Eşitliğin sağ tarafında k yerine $k+1$ yazılırsa

$$R_n(t; x) = \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n(n-1)!}{(n-k-1)!k!} (a_n x)^{k+1} \frac{1}{b_n}$$

$$= \frac{a_n x}{(1 + a_n x)^n} \frac{n}{b_n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (a_n x)^k$$

biçiminde yazılabilir. Binom açılımından

$$R_n(t; x) = \frac{n}{b_n} \frac{a_n x}{(1 + a_n x)^n} \frac{(1 + a_n x)^n}{(1 + a_n x)}$$

olup

$$R_n(t; x) = \frac{n a_n}{b_n} \frac{x}{1 + a_n x}$$

elde edilir.

iii) Eş. 1.2 ifadesinden

$$R_n(t^2; x) = \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k \frac{k^2}{b_n^2}$$

olmak üzere k^2 yerine $k(k-1) + k$ yazılırsa

$$R_n(t^2; x) = \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k \frac{k(k-1) + k}{b_n^2}$$

$$= \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} (a_n x)^k \frac{k(k-1)}{b_n^2}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} (a_n x)^k \frac{k}{b_n^2} \\
& = \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k(k-1)(k-2)!} (a_n x)^k \frac{k(k-1)}{b_n^2} \\
& + \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k(k-1)!} \frac{k}{b_n^2} \\
& = \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=2}^n \frac{n!}{(n-k)!(k-2)!} (a_n x)^k \frac{1}{b_n^2} \\
& + \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} (a_n x)^k \frac{1}{b_n^2}
\end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlikte birinci terimde k yerine $k+2$, ikinci terimde k yerine $k+1$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
& R_n(t^2; x) \\
& = \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-k-2)!k!} (a_n x)^{k+2} \frac{1}{b_n^2} \\
& + \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n(n-1)!}{(n-k-1)!k!} (a_n x)^{k+1} \frac{1}{b_n^2} \\
& = \frac{(a_n x)^2}{(1+a_n x)^n} \frac{n(n-1)}{b_n^2} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{(n-k-2)!k!} (a_n x)^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_n x}{(1 + a_n x)^n} \frac{n}{b_n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} (a_n x)^k \\
& = \frac{(a_n x)^2}{(1 + a_n x)^n} \frac{n(n-1)}{b_n^2} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} (a_n x)^k \\
& + \frac{a_n x}{(1 + a_n x)^n} \frac{n}{b_n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (a_n x)^k
\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Binom açılımından

$$R_n(t^2; x) = \frac{(a_n x)^2}{(1 + a_n x)^n} \frac{n(n-1)}{b_n^2} \frac{(1 + a_n x)^n}{(1 + a_n x)^2} + \frac{a_n x}{(1 + a_n x)^n} \frac{n}{b_n^2} \frac{(1 + a_n x)^n}{(1 + a_n x)}$$

olup

$$R_n(t^2; x) = \left(\frac{na_n}{b_n} \right)^2 \left(\frac{x}{1 + a_n x} \right)^2 - \frac{n}{b_n^2} \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 + \frac{n}{b_n^2} \frac{a_n x}{1 + a_n x}$$

elde edilir.

3.1.3. Lemmadaki sonuçlardan, R_n operatörleri hem klasik Bohman-Korovkin teoreminin [3,13] hem de ağırlıklı Korovkin teoreminin [15,16] hipotezlerini gerçekleştirmediği görülmektedir. R_n operatörleri için Korovkin tip teorem 3.1.1 Tanımındaki koşulların sağlanması durumunda gerçekleşir [7].

3.2. L_n Operatörleri

3.2.1. Tanım

f fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında tanımlı reel değerli sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$L_n(f; x) = \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n-k+1}\right) \binom{n}{k} x^k$$

biçiminde tanımlanan L_n lineer pozitif operatörlerine Bleimann, Butzer ve Hahn operatörleri denir [8]. Bu kısımda, L_n operatörlerinin Gadjiev ve Çakar tarafından incelenen yaklaşım özellikleri verilmiştir [9].

f fonksiyonunun süreklilik modülü $\omega(f; \delta)$ ve $\delta > 0$ olmak üzere

$$|f(x) - f(t)| \leq \omega\left(f; \left|\frac{x}{1+x} - \frac{t}{1+t}\right|\right) \quad (3.1)$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyonların bir uzayı H_ω olsun.

$[0, \infty)$ aralığında tanımlı olan sınırlı ve sürekli fonksiyonların uzayı $C_B[0, \infty)$ ile gösterilsin.

$C_B[0, \infty)$ uzayındaki norm

$$\|f\|_{C_B} = \sup_{x \geq 0} |f(x)|$$

şeklindedir. Herhangi bir $f \in H_\omega$ için

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \omega(1) \quad x \geq 0$$

eşitsizliği sağlandığından f fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında sınırlıdır. Dolayısıyla $H_\omega \subset C_B[0, \infty)$ dır.

$0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere

$$\omega(t) = Mt^\alpha$$

durumunda H_ω uzayı H_α sembolü ile gösterilecektir [8]. Dolayısıyla 3.1 eşitsizliğinden

$$|f(t) - f(x)| \leq M \left| \frac{a_n t}{1 + a_n t} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right|^\alpha$$

olup ve böylece $H_\alpha \subset Lip_M \alpha$ dır.

Pozitif reel ekseninde sınırlı ve sürekli fonksiyonların bir Lipschitz alt uzayı

$$H_\alpha = \left\{ f : |f(t) - f(x)| \leq M \left| \frac{a_n t}{1 + a_n t} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right|^\alpha \quad x \geq 0 \text{ ve } M > 0 \right\}$$

biçiminde gösterilmiştir.

Gadjiev ve Çakar tarafından Eş. 1.3 ifadesindeki L_n operatörlerinde $\nu = 0, 1, 2$ için $e_\nu\left(\frac{x}{1+x}\right) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^\nu$ test fonksiyonları kullanılarak Korovkin teoreminin ispatı H_α uzayında elde edilmiştir [9].

Bu operatörler için Korovkin tip teorem Gadjiev ve Çakar tarafından aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

3.2.2. Teorem

Her $n \in \mathbb{N}$ için $L_n : H_\alpha \rightarrow C_B[0, \infty)$ olacak şekilde (L_n) lineer pozitif operatör dizisi olsun. Eğer $\nu = 0, 1, 2$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| L_n \left(\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} \right)^\nu ; x \right) - \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^\nu \right\|_{C_B} = 0 \quad (3.2)$$

koşulları sağlanıyorsa bu durumda $f \in H_\alpha$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n f - f\|_{C_B} = 0$$

dır.

İspat

$f \in H_\alpha$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ sayısı için en az bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki

$$\left| \frac{a_n t}{1 + a_n t} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right| < \delta$$

olduğunda

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

gerçeklenir. Diğer taraftan

$$\left| \frac{a_n t}{1 + a_n t} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right| \geq \delta$$

ise

$$\frac{\left| \frac{a_n t}{1 + a_n t} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right|}{\delta} \geq 1$$

olacağından

$$\frac{\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2}{\delta^2} \geq 1 \quad (3.3)$$

sağlanır. Ayrıca f sınırlı olduğundan

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq 2M \quad (3.4)$$

eşitsizliği sağlanır. 3.3 ve 3.4 eşitsizliklerinden

$$|f(t) - f(x)| \leq \frac{2M}{\delta^2} \left[\frac{a_n t}{1 + a_n t} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right]^2$$

olur. Bu durumda her $x, t \in [0, \infty)$ için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \left[\frac{a_n t}{1 + a_n t} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right]^2 \quad (3.5)$$

eşitsizliği yazılabilir. Eş. 3.2 ifadesinden

$$\|L_n(1; x) - 1\|_{C_B} < \varepsilon_n,$$

$$\left\| L_n \left(\frac{a_n t}{1 + a_n t}; x \right) - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right\|_{C_B} < \varepsilon_n,$$

ve

$$\left\| L_n \left(\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} \right)^2 ; x \right) - \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 \right\|_{C_B} < \varepsilon_n$$

eşitsizliklerini sağlayan $n \rightarrow \infty$ iken $\varepsilon_n \rightarrow 0$ olacak şekilde bir (ε_n) dizisi vardır. Buradan C sayısı, n indisinden bağımsız bir sabit olmak üzere

$$\left\| L_n \left(\left[\frac{a_n (t - x)}{(1 + a_n t)(1 + a_n x)} \right]^2 ; x \right) \right\|_{C_B} < C\varepsilon_n \quad (3.6)$$

eşitsizliği yazılır. O halde

$$\|L_n(f; x) - f(x)\|_{C_B}$$

$$\leq \|L_n(f(t) - f(x); x)\|_{C_B}$$

$$+ \|f\|_{C_B} \|L_n(1; x) - 1\|_{C_B} \quad (3.7)$$

olmak üzere

$$\|L_n(f; x) - f(x)\|_{C_B} \leq I'_n + II'_n$$

dir. Açık olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} II'_n = 0$$

sağlanmaktadır $\|f\|_{C_B} \leq M$ olduğundan 3.7 eşitsizliğinde I'_n terimini dikkate alarak birinci terimin limitinin sıfır olduğunu gösterelim. 3.5 ve 3.6 eşitsizliklerinden

$$I'_n < \varepsilon \|L_n(1; x)\|_{C_B} + \frac{2M}{\delta^2} \left\| L_n \left(\left[\frac{a_n (t - x)}{(1 + a_n t)(1 + a_n x)} \right]^2 ; x \right) \right\|_{C_B}$$

$$\leq \varepsilon (1 + \varepsilon_n) + \frac{2M}{\delta^2} C \varepsilon_n$$

elde edilir. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I'_n = 0$$

olur ve ispat tamamlanır.

3.3. A_n Operatörleri

$f \in C_B[0, \infty)$ ve $x \geq 0$ olmak üzere Balász operatörlerinin Bleimann, Butzer ve Hahn tip genelleşmesi olan A_n operatörleri Doğru tarafından

$$A_n(f; x) = \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{b_{n,k}}\right) \binom{n}{k} (a_n x)^k$$

biçiminde tanımlanmıştır, burada (a_n) ve $(b_{n,k})$ dizileri x değişkeninden bağımsız olacak şekilde uygun olarak seçilmiş pozitif reel sayı dizileridir [10].

A_n operatörleri için Korovkin teoremi

$$c_n = a_n k + b_{n,k} \tag{3.8}$$

olmak üzere $n \rightarrow \infty$ iken

$$\frac{n}{c_n} \rightarrow 1 \text{ ve } a_n \rightarrow 1$$

koşullarının sağlanması durumunda gerçekleşir.

3.3.1. Lemma

A_n operatörü lineer pozitif bir operatördür.

İspat

Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve her $g_1, g_2 \in C_B[0, \infty)$ ve $x \geq 0$ için

$$A_n(\alpha g_1(t) + \beta g_2(t); x)$$

$$= \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k \left[\alpha g_1\left(\frac{k}{b_{n,k}}\right) + \beta g_2\left(\frac{k}{b_{n,k}}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k \left[\alpha g_1\left(\frac{k}{b_{n,k}}\right) \right]$$

$$+ \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k \left[\beta g_2\left(\frac{k}{b_{n,k}}\right) \right]$$

$$= \alpha A_n(g_1(t); x) + \beta A_n(g_2(t), x)$$

dir. Ayrıca $x \geq 0$ için $\binom{n}{k} (a_n x)^k > 0$ ve $f \geq 0$ olduğundan $A_n(f; x) \geq 0$ sağlanır. Dolayısıyla A_n operatörleri lineer pozitif operatörlerdir.

3.4. A_n Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri

Bu bölümde, Eş. 1.4 ifadesindeki A_n operatörlerinin yaklaşım özelliklerini elde etmek için Korovkin tip teorem kullanılacaktır. İlk olarak bu operatörlerin test fonksiyonlarının sonuçları elde edilecektir.

3.4.1. Lemma

$n \in \mathbb{N}$, $x \geq 0$ olmak üzere A_n operatörler için

$$\text{i) } A_n(1; x) = 1,$$

$$\text{ii) } A_n \left(\frac{a_n t}{1 + a_n t}; x \right) = \frac{a_n n}{c_n} \frac{a_n x}{1 + a_n x},$$

ve

$$\text{iii) } A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} \right)^2; x \right) = \frac{a_n^2 n (n-1)}{c_n^2} \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 + \frac{a_n^2 n}{c_n^2} \frac{a_n x}{1 + a_n x}$$

eşitlikleri gerçekleşir.

İspat

i) Eş. 1.4 ifadesinden

$$A_n(1; x) = \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k \quad (3.9)$$

olup binom açılımı

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k = (1 + a_n x)^n$$

dikkate alınırsa

$$A_n(1; x) = 1$$

sağlanır.

ii) Eş. 1.4 ifadesinden

$$\begin{aligned} & A_n \left(\frac{a_n t}{1 + a_n t}; x \right) \\ &= \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k \frac{a_n \frac{k}{b_{n,k}}}{1 + a_n \frac{k}{b_{n,k}}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k \frac{a_n k}{b_{n,k}} \frac{b_{n,k}}{b_{n,k} + a_n k}$$

$$= \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k \frac{a_n k}{b_{n,k} + a_n k}$$

dir. Eş. 3.8 ifadesinden

$$A_n \left(\frac{a_n t}{1 + a_n t}; x \right) = \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \frac{a_n}{c_n} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} (a_n x)^k k \quad (3.10)$$

$$= \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \frac{a_n}{c_n} \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} (a_n x)^k$$

olup eşitliğin sağ tarafında k yerine $k+1$ yazılırsa

$$A_n \left(\frac{a_n t}{1 + a_n t}; x \right) = \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \frac{a_n}{c_n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-k-1)!k!} (a_n x)^{k+1}$$

$$= \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \frac{a_n}{c_n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n(n-1)!}{(n-k-1)!k!} (a_n x)^{k+1}$$

$$= \frac{a_n x}{(1 + a_n x)^n} \frac{a_n n}{c_n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} (a_n x)^k$$

$$= \frac{a_n x}{(1 + a_n x)^n} \frac{a_n n}{c_n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (a_n x)^k$$

bulunur. Binom açılımından

$$A_n \left(\frac{a_n t}{1 + a_n t}; x \right) = \frac{a_n x}{(1 + a_n x)^n} \frac{a_n n}{c_n} \frac{(1 + a_n x)^n}{1 + a_n x}$$

olup

$$A_n \left(\frac{a_n t}{1 + a_n t}; x \right) = \frac{a_n n}{c_n} \frac{a_n x}{1 + a_n x}$$

elde edilir.

iii) Eş. 1.4 ve Eş. 3.8 ifadelerinden

$$\begin{aligned} A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} \right)^2; x \right) &= \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k \left(\frac{a_n \frac{k}{b_{n,k}}}{1 + a_n \frac{k}{b_{n,k}}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k \left(\frac{a_n k}{b_{n,k}} \cdot \frac{b_{n,k}}{b_{n,k} + a_n k} \right)^2 \\ &= \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k \left(\frac{a_n k}{b_{n,k} + a_n k} \right)^2 \\ &= \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \frac{a_n^2}{c_n^2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k k^2 \end{aligned} \tag{3.11}$$

bulunur. Bu son ifadede k^2 yerine $k(k-1) + k$ yazılırsa

$$\begin{aligned} A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} \right)^2; x \right) &= \frac{1}{(1 + a_n x)^n} a_n^2 \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} (a_n x)^k \frac{k(k-1)}{c_n^2} \\ &+ \frac{1}{(1 + a_n x)^n} a_n^2 \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} (a_n x)^k \frac{k}{c_n^2} \\ &= \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \frac{a_n^2}{c_n^2} \sum_{k=2}^n \frac{n!}{(n-k)!(k-2)!} (a_n x)^k \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{(1+a_n x)^n} \frac{a_n^2}{c_n^2} \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} (a_n x)^k$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafında k yerine birinci terimde $k+2$ ve ikinci terimde $k+1$ yazılırsa

$$A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1+a_n t} \right)^2 ; x \right) = \frac{1}{(1+a_n x)^n} \frac{a_n^2}{c_n^2} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-k-2)!k!} (a_n x)^{k+2}$$

$$+ \frac{1}{(1+a_n x)^n} \frac{a_n^2}{c_n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n(n-1)!}{(n-k-1)!k!} (a_n x)^{k+1}$$

$$= \frac{(a_n x)^2}{(1+a_n x)^n} \frac{a_n^2 n(n-1)}{c_n^2} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} (a_n x)^k$$

$$+ \frac{a_n x}{(1+a_n x)^n} \frac{a_n^2 n}{c_n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (a_n x)^k$$

gerçeklenir. Binom açılımından

$$A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1+a_n t} \right)^2 ; x \right) = \frac{(a_n x)^2}{(1+a_n x)^n} \frac{a_n^2 n(n-1)}{c_n^2} \frac{(1+a_n x)^n}{(1+a_n x)^2}$$

$$+ \frac{a_n x}{(1+a_n x)^n} \frac{a_n^2 n}{c_n^2} \frac{(1+a_n x)^n}{1+a_n x}$$

olup

$$A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1+a_n t} \right)^2 ; x \right) = \frac{a_n^2 n(n-1)}{c_n^2} \left(\frac{a_n x}{1+a_n x} \right)^2 + \frac{a_n^2 n}{c_n^2} \frac{a_n x}{1+a_n x}$$

elde edilir.

3.4.2. Teorem

Her $f \in H_\alpha$ için $(A_n(f))$ dizisi f fonksiyonuna $[0, \infty)$ aralığında düzgün yakınsaktır.

İspat

3.4.1. Lemmadan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, \infty)} |A_n(1; x) - 1| = 0$$

olduğundan

$$A_n(1; x) \Rightarrow 1$$

elde edilir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, \infty)} \left| A_n \left(\frac{a_n t}{1 + a_n t}; x \right) - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right| = 0$$

olduğundan

$$A_n \left(\frac{a_n t}{1 + a_n t}; x \right) \Rightarrow \frac{x}{1 + x}$$

gerçeklenir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, \infty)} \left| A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} \right)^2; x \right) - \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 \right| = 0$$

olduğundan

$$A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} \right)^2; x \right) \Rightarrow \left(\frac{x}{1 + x} \right)^2$$

sağlanır. Dolayısıyla 3.2.2. Teorem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, \infty)} |A_n(f; , x) - f(x)| = 0$$

olup

$$A_n(f; x) \Rightarrow f(x)$$

sağlanır.

3.4.3. Lemma

Eş. 1.4 ifadesindeki A_n operatörleri için

$$\text{i) } A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} \right)^3 ; x \right) = \frac{a_n^3 n (n-1) (n-2)}{c_n^3} \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^3$$

$$+ \frac{a_n^3 3n (n-1)}{c_n^3} \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 + \frac{a_n^3 n}{c_n^3} \frac{a_n x}{1 + a_n x}$$

ve

$$\text{ii) } A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} \right)^4 ; x \right) = \frac{a_n^4 n (n-1) (n-2) (n-3)}{c_n^4} \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^4$$

$$+ \frac{6a_n^4 n (n-1) (n-2)}{c_n^4} \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^3 + \frac{7a_n^4 n (n-1)}{c_n^4} \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2$$

$$+ \frac{a_n^4 n}{c_n^4} \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)$$

eşitlikleri gerçekleşir.

İspat

i) Eş. 1.4 ve Eş. 3.8 ifadelerinden

$$A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} \right)^3 ; x \right) = \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k \left(\frac{a_n \frac{k}{b_{n,k}}}{1 + a_n \frac{k}{b_{n,k}}} \right)^3$$

$$= \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k \left(\frac{a_n k}{b_{n,k}} \frac{b_{n,k}}{b_{n,k} + a_n k} \right)^3$$

$$= \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k \left(\frac{a_n k}{b_{n,k} + a_n k} \right)^3$$

$$= \frac{1}{(1+a_n x)^n} a_n^3 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k \frac{k^3}{c_n^3}$$

olarak yazılabilir. Bu ifadede k^3 yerine $k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) + k$ yazılırsa

$$A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1+a_n t} \right)^3 ; x \right) = \frac{1}{(1+a_n x)^n} a_n^3 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k \frac{k(k-1)(k-2)}{c_n^3}$$

$$+ \frac{1}{(1+a_n x)^n} a_n^3 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k \frac{3k(k-1)}{c_n^3}$$

$$+ \frac{1}{(1+a_n x)^n} a_n^3 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k \frac{k}{c_n^3}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1+a_n t} \right)^3 ; x \right) = \frac{1}{(1+a_n x)^n} a_n^3 \sum_{k=3}^n \frac{n!}{(n-k)!(k-3)!} (a_n x)^k \frac{1}{c_n^3}$$

$$+ \frac{1}{(1+a_n x)^n} a_n^3 \sum_{k=2}^n \frac{n!}{(n-k)!(k-2)!} (a_n x)^k \frac{3}{c_n^3}$$

$$+ \frac{1}{(1+a_n x)^n} a_n^3 \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} (a_n x)^k \frac{1}{c_n^3}$$

olarak yazılabilir. Eşitliğin sağ tarafında k yerine birinci, ikinci ve üçüncü terimlerde sırasıyla $k + 3$, $k + 2$ ve $k + 1$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} \right)^3 ; x \right) &= \frac{1}{(1 + a_n x)^n} a_n^3 \sum_{k=0}^{n-3} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-k-3)!k!} (a_n x)^{k+3} \frac{1}{c_n^3} \\
&+ \frac{1}{(1 + a_n x)^n} a_n^3 \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-k-2)!k!} (a_n x)^{k+2} \frac{3}{c_n^3} \\
&+ \frac{1}{(1 + a_n x)^n} a_n^3 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n(n-1)!}{(n-k-1)!k!} (a_n x)^{k+1} \frac{1}{c_n^3} \\
&= \frac{(a_n x)^3}{(1 + a_n x)^n} \frac{n(n-1)(n-2)}{c_n^3} a_n^3 \sum_{k=0}^{n-3} \frac{(n-3)!}{(n-k-3)!k!} (a_n x)^k \\
&+ \frac{(a_n x)^2}{(1 + a_n x)^n} \frac{3n(n-1)}{c_n^3} a_n^3 \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{(n-k-2)!k!} (a_n x)^k \\
&+ \frac{a_n x}{(1 + a_n x)^n} \frac{n}{c_n^3} a_n^3 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} (a_n x)^k \\
&= \frac{(a_n x)^3}{(1 + a_n x)^n} \frac{n(n-1)(n-2)}{c_n^3} a_n^3 \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-3}{k} (a_n x)^k \\
&+ \frac{(a_n x)^2}{(1 + a_n x)^n} \frac{3n(n-1)}{c_n^3} a_n^3 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} (a_n x)^k
\end{aligned}$$

$$+ \frac{a_n x}{(1 + a_n x)^n} \frac{n}{c_n^3} a_n^3 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (a_n x)^k$$

bulunur. Binom açılımından

$$A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} \right)^3 ; x \right) = \frac{(a_n x)^3}{(1 + a_n x)^n} \frac{a_n^3 n (n-1) (n-2)}{c_n^3} \frac{(1 + a_n x)^n}{(1 + a_n x)^3}$$

$$+ \frac{(a_n x)^2}{(1 + a_n x)^n} \frac{3a_n^3 n (n-1)}{c_n^3} \frac{(1 + a_n x)^n}{(1 + a_n x)^2}$$

$$+ \frac{a_n x}{(1 + a_n x)^n} \frac{n a_n^3 (1 + a_n x)^n}{c_n^3 (1 + a_n x)}$$

olup

$$A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} \right)^3 ; x \right) = \frac{a_n^3 n (n-1) (n-2)}{c_n^3} \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^3$$

$$+ \frac{a_n^3 3n (n-1)}{c_n^3} \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 + \frac{a_n^3 n}{c_n^3} \frac{a_n x}{1 + a_n x}$$

elde edilir.

ii) Eş. 1.4 ve Eş. 3.8 ifadelerinden

$$A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} \right)^4 ; x \right) = \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k \left(\frac{a_n \frac{k}{b_{n,k}}}{1 + a_n \frac{k}{b_{n,k}}} \right)^4$$

$$= \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k \left(\frac{a_n k}{b_{n,k}} \frac{b_{n,k}}{b_{n,k} + a_n k} \right)^4$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k \left(\frac{a_n k}{b_{n,k} + a_n k} \right)^4 \\
&= \frac{1}{(1 + a_n x)^n} a_n^4 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k \frac{k^4}{c_n^4}
\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Eşitliğin sağ tarafındaki k^4 yerine $k(k-1)(k-2)(k-3) + 6k(k-1)(k-2) + 7k(k-1) + k$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} \right)^4 ; x \right) &= \frac{1}{(1 + a_n x)^n} a_n^4 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{c_n^4} \\
&+ \frac{1}{(1 + a_n x)^n} a_n^4 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k \frac{6k(k-1)(k-2)}{c_n^4} \\
&+ \frac{1}{(1 + a_n x)^n} a_n^4 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k \frac{7k(k-1)}{c_n^4} \\
&+ \frac{1}{(1 + a_n x)^n} a_n^4 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_n x)^k \frac{k}{c_n^4}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
&A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} \right)^4 ; x \right) \\
&= \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \frac{a_n^4}{c_n^4} \sum_{k=4}^n \frac{n!}{(n-k)!(k-4)!} (a_n x)^k
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{(1+a_n x)^n} \frac{6a_n^4}{c_n^4} \sum_{k=3}^n \frac{n!}{(n-k)!(k-3)!} (a_n x)^k$$

$$+ \frac{1}{(1+a_n x)^n} \frac{7a_n^4}{c_n^4} \sum_{k=2}^n \frac{n!}{(n-k)!(k-2)!} (a_n x)^k$$

$$+ \frac{1}{(1+a_n x)^n} \frac{a_n^4}{c_n^4} \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} (a_n x)^k$$

gerçeklenir. Bu eşitiğin sağ tarafındaki k yerine birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü terimlerde sırasıyla $k+4$, $k+3$, $k+2$ ve $k+1$ yazılırsa

$$A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1+a_n t} \right)^4; x \right)$$

$$= \frac{1}{(1+a_n x)^n} \frac{a_n^4}{c_n^4} \sum_{k=0}^{n-4} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-k-4)!k!} (a_n x)^{k+4}$$

$$+ \frac{1}{(1+a_n x)^n} \frac{6a_n^4}{c_n^4} \sum_{k=0}^{n-3} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-k-3)!k!} (a_n x)^{k+3}$$

$$+ \frac{1}{(1+a_n x)^n} \frac{7a_n^4}{c_n^4} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-k-2)!k!} (a_n x)^{k+2}$$

$$+ \frac{1}{(1+a_n x)^n} \frac{a_n^4}{c_n^4} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n(n-1)!}{(n-k-1)!k!} (a_n x)^{k+1}$$

sağlanır. Bu ifadelerden

$$\begin{aligned}
& A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} \right)^4 ; x \right) \\
&= \frac{(a_n x)^4}{(1 + a_n x)^n} \frac{a_n^4 n (n-1) (n-2) (n-3)}{c_n^4} \sum_{k=0}^{n-4} \frac{(n-4)!}{(n-k-4)! k!} (a_n x)^k \\
&+ \frac{6 (a_n x)^3}{(1 + a_n x)^n} \frac{a_n^4 n (n-1) (n-2)}{c_n^4} \sum_{k=0}^{n-3} \frac{(n-3)!}{(n-k-3)! k!} (a_n x)^k \\
&+ \frac{7 (a_n x)^2}{(1 + a_n x)^n} \frac{a_n^4 n (n-1)}{c_n^4} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{(n-k-2)! k!} (a_n x)^k \\
&+ \frac{a_n x}{(1 + a_n x)^n} \frac{a_n^4 n}{c_n^4} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)! k!} (a_n x)^k \\
&= \frac{(a_n x)^4}{(1 + a_n x)^n} \frac{a_n^4 n (n-1) (n-2) (n-3)}{c_n^4} \sum_{k=0}^{n-4} \binom{n-4}{k} (a_n x)^k \\
&+ \frac{6 (a_n x)^3}{(1 + a_n x)^n} \frac{a_n^4 n (n-1) (n-2)}{c_n^4} \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-3}{k} (a_n x)^k \\
&+ \frac{7 (a_n x)^2}{(1 + a_n x)^n} \frac{a_n^4 n (n-1)}{c_n^4} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} (a_n x)^k
\end{aligned}$$

$$+ \frac{a_n x}{(1 + a_n x)^n} \frac{a_n^4 n}{c_n^4} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (a_n x)^k$$

olarak yazılabilir. Binom açılımı kullanılırsa

$$A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} \right)^4 ; x \right) = \frac{(a_n x)^4}{(1 + a_n x)^n} \frac{a_n^4 n (n-1) (n-2) (n-3)}{c_n^4} \frac{(1 + a_n x)^n}{(1 + a_n x)^4}$$

$$+ \frac{6 (a_n x)^3}{(1 + a_n x)^n} \frac{a_n^4 n (n-1) (n-2)}{c_n^4} \frac{(1 + a_n x)^n}{(1 + a_n x)^3}$$

$$+ \frac{7 (a_n x)^2}{(1 + a_n x)^n} \frac{a_n^4 n (n-1)}{c_n^4} \frac{(1 + a_n x)^n}{(1 + a_n x)^2}$$

$$+ \frac{a_n x}{(1 + a_n x)^n} \frac{a_n^4 n}{c_n^4} \frac{(1 + a_n x)^n}{1 + a_n x}$$

olup

$$A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} \right)^4 ; x \right) = \frac{a_n^4 n (n-1) (n-2) (n-3)}{c_n^4} \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^4$$

$$+ \frac{a_n^4 6n (n-1) (n-2)}{c_n^4} \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^3$$

$$+ \frac{a_n^4 7n (n-1)}{c_n^4} \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 + \frac{a_n^4 n}{c_n^4} \frac{a_n x}{1 + a_n x}$$

elde edilir.

3.5. A_n Operatörlerinin Yaklaşım Hızı

Bu kısımda, A_n operatörlerinin yaklaşım hızı H_α uzayında süreklilik modülü yardımıyla incelenmiştir.

$f \in H_\alpha$ olmak üzere süreklilik modülünün (vii) özelliğinden

$$\begin{aligned} |f(x) - f(t)| &\leq \omega\left(f; \left|\frac{x}{1+x} - \frac{t}{1+t}\right|\right) \\ &\leq \left(1 + \frac{\left|\frac{a_n t}{1+a_n t} - \frac{a_n x}{1+a_n x}\right|}{\delta_n}\right) \omega(f; \delta_n) \end{aligned} \quad (3.12)$$

olarak yazılabilir.

3.5.1. Teorem

$f \in H_\alpha$ olmak üzere $A_n : H_\alpha \rightarrow C_B[0, \infty)$ operatörleri için

$$\delta_n = \left| \frac{na_n}{c_n} - 1 \right|$$

olmak üzere

$$|A_n(f, x) - f(x)| \leq 2\omega(f; \delta_n)$$

eşitsizliği yazılabilir.

İspat

Eş. 1.4 ifadesinden

$$\frac{1}{(1+a_n x)^n} \binom{n}{k} (a_n x)^k = P_{n,k}(x)$$

olmak üzere

$$|A_n(f; x) - f(x)| \leq \sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{k}{b_{n,k}}\right) - f(x) \right| P_{n,k}(x) \quad (3.13)$$

eşitsizliği elde edilir. 3.12 eşitsizliğinde $t = \frac{k}{b_{n,k}}$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned} & \left| f\left(\frac{k}{b_{n,k}}\right) - f(x) \right| \\ & \leq \left(1 + \frac{\left| \frac{a_n \frac{k}{b_{n,k}}}{1 + a_n \frac{k}{b_{n,k}}} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right|}{\delta_n} \right) \omega(f; \delta_n) \\ & = \left(1 + \frac{\left| \frac{a_n k}{a_n k + b_{n,k}} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right|}{\delta_n} \right) \omega(f; \delta_n) \end{aligned} \quad (3.14)$$

olarak yazılabilir. Eş. 3.14 ifadesi 3.13 eşitsizliğinde dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} |A_n(f; x) - f(x)| & \leq \sum_{k=0}^n \left(\left(1 + \frac{\left| \frac{a_n k}{a_n k + b_{n,k}} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right|}{\delta_n} \right) \omega(f; \delta_n) \right) P_{n,k}(x) \\ & = \omega(f; \delta_n) \left[\sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) + \frac{1}{\delta_n} \sum_{k=0}^n \left| \frac{a_n k}{a_n k + b_{n,k}} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right| P_{n,k}(x) \right] \end{aligned}$$

sağlanır. Toplamın ikinci kısmına Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$|A_n(f; x) - f(x)| \leq$$

$$\leq \omega(f; \delta_n) \left[1 + \frac{1}{\delta_n} \left(\sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{a_n k}{a_n k + b_{n,k}} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 P_{n,k}(x) \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte 3.4.1. Lemmadaki (i) ifadesi gözönüne alınırsa

$$|A_n(f; x) - f(x)| \leq \omega(f; \delta_n) \left(1 + \frac{1}{\delta_n} \left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{a_n k}{a_n k + b_{n,k}} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 P_{n,k}(x) \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (3.15)$$

gerçeklenir. Ayrıca Eş. 3.9, Eş. 3.10 ve Eş. 3.11 ifadeleri kullanılarak

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \left(\frac{a_n k}{c_n} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 P_{n,k}(x) \\ &= A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} \right)^2; x \right) - 2A_n \left(\frac{a_n t}{1 + a_n t}; x \right) \frac{a_n x}{1 + a_n x} + A_n(1; x) \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. 3.4.1. Lemmadan

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \left(\frac{a_n k}{c_n} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 P_{n,k}(x) \\ &= \frac{a_n^2 n(n-1)}{c_n^2} \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 + \frac{a_n^2 n}{(c_n)^2} \frac{a_n x}{1 + a_n x} \\ & \quad - \frac{2a_n n}{c_n} \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 + \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 \\ &= \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 \left(\frac{a_n^2 n(n-1)}{c_n^2} - \frac{2a_n n}{c_n} + 1 \right) + \frac{a_n^2 n}{c_n^2} \frac{a_n x}{1 + a_n x} \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitlik gözönüne alınırsa

$$|A_n(f; x) - f(x)|$$

$$\leq \omega(f; \delta_n) \left(1 + \frac{1}{\delta_n} \left(\left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 \left(\frac{a_n^2 n (n-1)}{c_n^2} - \frac{2a_n n}{c_n} + 1 \right) + \frac{a_n^2 n}{c_n^2} \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

elde edilir.

$$\delta_n(x) = \left(\left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 \left(\frac{a_n^2 n (n-1)}{c_n^2} - \frac{2a_n n}{c_n} + 1 \right) + \frac{a_n^2 n}{c_n^2} \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

denilirse

$$\sup_{x \in [0, \infty)} \delta_n(x)$$

$$= \left| \frac{a_n^2 n (n-1)}{c_n^2} - \frac{2a_n n}{c_n} + 1 + \frac{a_n^2 n}{c_n^2} \right|^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left| \left(\frac{a_n n}{c_n} \right)^2 - 2 \frac{a_n n}{c_n} + 1 \right|^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left| \frac{na_n}{c_n} - 1 \right|$$

olup

$$\delta_n = \left| \frac{na_n}{c_n} - 1 \right|$$

seçilmesiyle

$$|A_n(f; x) - f(x)| \leq \omega(f; \delta_n) \left[1 + \frac{1}{\delta_n} \delta_n \right] = 2\omega(f; \delta_n)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

3.6. A_n Operatörleri İçin Voronovskaja Tip Teorem

Bernstein operatörleri için Voronovskaja tip teorem [17] çalışmasında verilmiştir. Bu kısımda, A_n operatörleri için aşağıdaki koşullar altında Voronovskaja tip teorem ifade ve ispat edilecektir.

$\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ olmak üzere genel terimleri

$$a_n = 1 + \frac{o(1) + \alpha}{n},$$

$$b_{n,k} = n - a_n k + \gamma$$

ve

$$c_n = a_n k + b_{n,k}$$

olmak üzere

$$\frac{n}{c_n} \rightarrow 1$$

koşullarını sağlayan pozitif terimli (a_n) , (c_n) ve $(b_{n,k})$ dizileri seçilerek (A_n) operatörler dizisi için Voronovskaja tip teorem elde edilecektir.

Bunun için ilk olarak A_n operatörlerinin merkezi momentleri hesaplanacaktır.

3.6.1. Tanım

(A_n) operatörler dizisi için

$$\varphi_{n,r} = A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^r ; x \right), \quad \{r = 0, 1, 2, 3, 4\}$$

biçiminde tanımlanan ifadelere r – *inci* merkezi momentler denir.

3.6.2. Lemma

A_n operatörleri için merkezi momentler

$$i) \varphi_{n,0}(x) = 1, \tag{3.16}$$

$$ii) \varphi_{n,1}(x) = \left(\frac{a_n n}{c_n} - 1 \right) \frac{a_n x}{1 + a_n x}, \tag{3.17}$$

$$iii) \varphi_{n,2}(x) = \left(\frac{a_n^2 n (n-1)}{c_n^2} - \frac{2a_n n}{c_n} + 1 \right) \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 + \frac{a_n^2 n}{c_n^2} \frac{a_n x}{1 + a_n x}, \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} iv) \varphi_{n,3}(x) &= \left(\frac{a_n^3 n (n-1) (n-2)}{c_n^3} - \frac{3a_n^2 n (n-1)}{c_n^2} + \frac{3a_n n}{c_n} - 1 \right) \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^3 \\ &+ \left(\frac{3a_n^3 n (n-1)}{c_n^3} - \frac{3a_n^2 n}{c_n^2} \right) \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 + \frac{a_n^3 n}{c_n^3} \frac{a_n x}{1 + a_n x} \end{aligned} \tag{3.19}$$

ve

$$\begin{aligned} v) \varphi_{n,4}(x) &= \left(\frac{a_n^4 n (n-1) (n-2) (n-3)}{c_n^4} - \frac{4a_n^3 n (n-1) (n-2)}{c_n^3} \right. \\ &\left. + \frac{6a_n^2 n (n-1)}{c_n^2} - \frac{4a_n n}{c_n} + 1 \right) \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{6a_n^4 n (n-1) (n-2)}{c_n^4} - \frac{12a_n^3 n (n-1)}{c_n^3} + \frac{6a_n^2 n}{c_n^2} \right) \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^3 \\
& + \left(\frac{7a_n^4 n (n-1)}{c_n^4} - \frac{4a_n^3 n}{c_n^3} \right) \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 + \frac{a_n^4 n}{c_n^4} \frac{a_n x}{1 + a_n x}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

şeklindedir.

İspat

$r = 0$ için 3.4.1. Lemmadan

$$\varphi_{n,0}(x) = 1$$

olduğu açıktır.

$$A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^1 ; x \right)$$

$$= \frac{a_n n}{c_n} \frac{a_n x}{1 + a_n x} - \frac{a_n x}{1 + a_n x}$$

$$= \left(\frac{a_n n}{c_n} - 1 \right) \frac{a_n x}{1 + a_n x}$$

olup

$$\varphi_{n,1} = \frac{a_n x}{1 + a_n x} \left(\frac{a_n n}{c_n} - 1 \right)$$

bulunur.

$r = 2$ için 3.4.1. Lemmadan

$$A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 ; x \right)$$

$$= \frac{a_n^2 n (n-1)}{c_n^2} \left(\frac{a_n x}{1+a_n x} \right)^2 + \frac{a_n^2 n}{c_n^2} \frac{a_n x}{1+a_n x}$$

$$- \frac{2a_n n}{c_n} \left(\frac{a_n x}{1+a_n x} \right)^2 + \left(\frac{a_n x}{1+a_n x} \right)^2$$

olup

$$\varphi_{n,2} = \left(\frac{a_n^2 n (n-1)}{c_n^2} - \frac{2a_n n}{c_n} + 1 \right) \left(\frac{a_n x}{1+a_n x} \right)^2 + \frac{a_n^2 n}{c_n^2} \frac{a_n x}{1+a_n x}$$

bulunur.

$r = 3$ için 3.4.1. ve 3.4.3. Lemmaları gözönüne alınırsa

$$A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1+a_n t} - \frac{a_n x}{1+a_n x} \right)^3 ; x \right)$$

$$= \frac{a_n^3 n (n-1) (n-2)}{c_n^3} \left(\frac{a_n x}{1+a_n x} \right)^3 + \frac{3a_n^3 n (n-1)}{c_n^3} \left(\frac{a_n x}{1+a_n x} \right)^2$$

$$+ \frac{a_n^3 n}{c_n^3} \frac{a_n x}{1+a_n x} - \frac{3a_n^2 n (n-1)}{c_n^2} \left(\frac{a_n x}{1+a_n x} \right)^3 - \frac{3a_n^2 n}{c_n^2} \left(\frac{a_n x}{1+a_n x} \right)^2$$

$$+ \frac{3a_n n}{c_n} \left(\frac{a_n x}{1+a_n x} \right)^3 - \left(\frac{a_n x}{1+a_n x} \right)^3$$

olup

$$\varphi_{n,3}(x) = \left(\frac{a_n^3 n (n-1) (n-2)}{c_n^3} - \frac{3a_n^2 n (n-1)}{c_n^2} + \frac{3a_n n}{c_n} - 1 \right) \left(\frac{a_n x}{1+a_n x} \right)^3$$

$$+ \left(\frac{3a_n^3 n (n-1)}{c_n^3} - \frac{3a_n^2 n}{c_n^2} \right) \left(\frac{a_n x}{1+a_n x} \right)^2 + \frac{a_n^3 n}{c_n^3} \frac{a_n x}{1+a_n x}$$

bulunur.

$r = 4$ için 3.4.1. ve 3.4.3. Lemmaları dikkate alınır

$$\begin{aligned}
& A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^4 ; x \right) \\
&= \frac{a_n^4 n (n-1) (n-2) (n-3)}{c_n^4} \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^4 + \frac{6a_n^4 n (n-1) (n-2)}{c_n^4} \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^3 \\
&+ \frac{7a_n^4 n (n-1)}{c_n^4} \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 + \frac{a_n^4 n}{c_n^4} \frac{a_n x}{1 + a_n x} - \frac{4a_n^3 n (n-1) (n-2)}{c_n^3} \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^4 \\
&- \frac{12a_n^3 n (n-1)}{c_n^3} \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^3 - \frac{4a_n^3 n}{c_n^3} \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 + \frac{6a_n^2 n (n-1)}{c_n^2} \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^4 \\
&+ \frac{6a_n^2 n}{c_n^2} \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^3 - \frac{4a_n n}{c_n} \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^4 + \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^4
\end{aligned}$$

olup

$$\varphi_{n,4}(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{a_n^4 n (n-1) (n-2) (n-3)}{c_n^4} - \frac{4a_n^3 n (n-1) (n-2)}{c_n^3} \right. \\
&+ \left. \frac{6a_n^2 n (n-1)}{c_n^2} - \frac{4a_n n}{c_n} + 1 \right) \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^4 \\
&+ \left(\frac{6a_n^4 n (n-1) (n-2)}{c_n^4} - \frac{12a_n^3 n (n-1)}{c_n^3} + \frac{6a_n^2 n}{c_n^2} \right) \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^3
\end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{7a_n^4 n(n-1)}{c_n^4} - \frac{4a_n^3 n}{c_n^3} \right) \left(\frac{a_n x}{1+a_n x} \right)^2 + \frac{a_n^4 n}{c_n^4} \frac{a_n x}{1+a_n x}$$

olarak bulunur.

3.6.3. Lemma

(A_n) operatörler dizisinde ikinci ve dördüncü momentlere ait aşağıdaki limitler

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} n A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1+a_n t} - \frac{a_n x}{1+a_n x} \right)^2 ; x \right) = \frac{x}{1+x} - \left(\frac{x}{1+x} \right)^2$$

ve

$$ii) \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1+a_n t} - \frac{a_n x}{1+a_n x} \right)^4 ; x \right)$$

$$= 3 \left(\frac{x}{1+x} \right)^2 - 6 \left(\frac{x}{1+x} \right)^3 + 3 \left(\frac{x}{1+x} \right)^4$$

gerçeklenir.

İspat

i) 3.6.2. Lemmanın (iii) ifadesinden

$$A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1+a_n t} - \frac{a_n x}{1+a_n x} \right)^2 ; x \right)$$

$$= \left(\frac{a_n^2 n(n-1)}{(n+\gamma)^2} - \frac{2a_n n}{n+\gamma} + 1 \right) \left(\frac{a_n x}{1+a_n x} \right)^2 + \frac{a_n^2 n}{(n+\gamma)^2} \frac{a_n x}{1+a_n x}$$

olup eşitliğin her iki tarafını n ile çarpılır ve $n \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1+a_n t} - \frac{a_n x}{1+a_n x} \right)^2 ; x \right) \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n^2 n (n-1)}{(n+\gamma)^2} - \frac{2a_n n}{(n+\gamma)} + 1 \right) \left(\frac{a_n x}{1+a_n x} \right)^2$$

$$+ \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{a_n^2 n}{(n+\gamma)^2} \frac{a_n x}{1+a_n x}$$

olup

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1+a_n t} - \frac{a_n x}{1+a_n x} \right)^2 ; x \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n^2 n (n-1) - 2a_n n (n+\gamma) + (n+\gamma)^2}{(n+\gamma)^2} \right) \left(\frac{a_n x}{1+a_n x} \right)^2 + \frac{x}{1+x}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+\gamma} \left(\frac{a_n^2 n (n-1) - 2a_n n (n+\gamma) + (n+\gamma)^2}{(n+\gamma)} \right) \left(\frac{a_n x}{1+a_n x} \right)^2 + \frac{x}{1+x}$$

biçiminde yazılabilir. Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1+a_n t} - \frac{a_n x}{1+a_n x} \right)^2 ; x \right) \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+\gamma} \left(\frac{n^2 a_n^2 - 2n^2 a_n + n^2 - 2n\gamma a_n + 2n\gamma - n a_n^2 + \gamma^2}{n+\gamma} \right) \left(\frac{a_n x}{1+a_n x} \right)^2$$

$$+ \frac{x}{1+x}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+\gamma} \left(\frac{n^2 (a_n - 1)^2 - n (a_n^2 + 2\gamma a_n - 2\gamma) + \gamma^2}{n+\gamma} \right) \left(\frac{a_n x}{1+a_n x} \right)^2 + \frac{x}{1+x}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n + \gamma} \left(\frac{n}{n + \gamma} \left[n(a_n - 1)^2 - (a_n^2 + 2\gamma a_n - 2\gamma) + \frac{\gamma^2}{n} \right] \right) \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2$$

$$+ \frac{x}{1 + x}$$

gerçeklenir. Buluna bu son eşitlikten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 ; x \right) \right) = \frac{x}{1 + x} - \left(\frac{x}{1 + x} \right)^2$$

elde edilir.

ii) 3.6.2. Lemmanın (v) ifadesinden

$$A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^4 ; x \right)$$

$$= \left(\frac{a_n^4 n (n - 1) (n - 2) (n - 3)}{(n + \gamma)^4} - \frac{4a_n^3 n (n - 1) (n - 2)}{(n + \gamma)^3} + \frac{6a_n^2 n (n - 1)}{(n + \gamma)^2} \right.$$

$$\left. - \frac{4a_n n}{(n + \gamma)} + 1 \right) \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^4$$

$$+ \left(\frac{6a_n^4 n (n - 1) (n - 2)}{(n + \gamma)^4} - \frac{12a_n^3 n (n - 1)}{(n + \gamma)^3} + \frac{6a_n^2 n}{(n + \gamma)^2} \right) \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^3$$

$$+ \left(\frac{7a_n^4 n (n - 1)}{(n + \gamma)^4} - \frac{4a_n^3 n}{(n + \gamma)^3} \right) \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2$$

$$+ \frac{a_n^4 n}{(n + \gamma)^4} \frac{a_n x}{1 + a_n x}$$

olup eşitliğin her iki tarafı n^2 ile çarpılır ve $n \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^4 ; x \right) \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{a_n^4 n (n-1) (n-2) (n-3)}{(n+\gamma)^4} - \frac{4a_n^3 n (n-1) (n-2)}{(n+\gamma)^3} + \frac{6a_n^2 n (n-1)}{(n+\gamma)^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{4a_n n}{(n+\gamma)} + 1 \right) \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^4 \\
&+ \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{6a_n^4 n (n-1) (n-2)}{(n+\gamma)^4} - \frac{12a_n^3 n (n-1)}{(n+\gamma)^3} + \frac{6a_n^2 n}{(n+\gamma)^2} \right) \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^3 \\
&+ \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{7a_n^4 n (n-1)}{(n+\gamma)^4} - \frac{4a_n^3 n}{(n+\gamma)^3} \right) \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 \\
&+ \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \frac{a_n^4 n}{(n+\gamma)^4} \frac{a_n x}{1 + a_n x}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^4 ; x \right) \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{a_n^4 n (n-1) (n-2) (n-3)}{(n+\gamma)^4} - \frac{4a_n^3 n (n-1) (n-2) (n+\gamma)}{(n+\gamma)^4} \right. \\
&\quad \left. + \frac{6a_n^2 n (n-1) (n+\gamma)^2}{(n+\gamma)^4} - \frac{4a_n n (n+\gamma)^3}{(n+\gamma)^4} + \frac{(n+\gamma)^4}{(n+\gamma)^4} \right) \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{6a_n^4 n (n-1) (n-2)}{(n+\gamma)^4} - \frac{12a_n^3 n (n-1) (n+\gamma)}{(n+\gamma)^4} \right. \\
& \left. + \frac{6a_n^2 n (n+\gamma)^2}{(n+\gamma)^4} \right) \left(\frac{a_n x}{1+a_n x} \right)^3 \\
& + \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{7n^2 a_n^4 - 7n a_n^4 - 4a_n^3 n (n+\gamma)}{(n+\gamma)^4} \right) \left(\frac{a_n x}{1+a_n x} \right)^2 \\
& + \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \frac{a_n^4 n}{(n+\gamma)^4} \frac{a_n x}{1+a_n x}
\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1+a_n t} - \frac{a_n x}{1+a_n x} \right)^4 ; x \right) \right) \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+\gamma)^2} \left(\frac{n^4 a_n^4 - 6n^3 a_n^4 + 11n^2 a_n^4 - 6n a_n^4 + 12n^3 a_n^3 - 8n^2 a_n^3 - 4n^4 a_n^3}{(n+\gamma)^2} \right. \\
& + \frac{12n^2 \gamma a_n^3 - 4n^3 \gamma a_n^3 - 8n \gamma a_n^3 + 6n^4 a_n^2 + 12n^3 \gamma a_n^2 - 6n^3 a_n^2}{(n+\gamma)^2} \\
& + \frac{6n^2 \gamma^2 a_n^2 - 12n^2 \gamma a_n^2 - 6n \gamma^2 a_n^2 - 4a_n n^4 - 12a_n n^3 \gamma}{(n+\gamma)^2} \\
& \left. + \frac{-12a_n n^2 \gamma^2 - 4a_n n \gamma^3 + n^4 + 4n^3 \gamma + 6n^2 \gamma^2 + 4n \gamma^3 + \gamma^4}{(n+\gamma)^2} \right) \left(\frac{a_n x}{1+a_n x} \right)^4
\end{aligned}$$

$$+ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n + \gamma)^2} \left(\frac{6n^3 a_n^4 - 18n^2 a_n^4 + 12n a_n^4 + 12n^2 a_n^3 - 12n^3 a_n^3 - 12n^2 \gamma a_n^3 + 12n \gamma a_n^3}{(n + \gamma)^2} \right.$$

$$\left. + \frac{6n^3 a_n^2 + 12n^2 \gamma a_n^2 + 6n \gamma^2 a_n^2}{(n + \gamma)^2} \right) \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^3$$

$$+ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n + \gamma)^2} \left(\frac{7n^2 a_n^4 - 7n a_n^4 - 4n^2 a_n^3 - 4\gamma n a_n^3}{(n + \gamma)^2} \right) \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2$$

olup

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^4 ; x \right) \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n + \gamma)^2} \left(\frac{n^2}{(n + \gamma)^2} n^2 (a_n - 1)^4 - \frac{2n^2}{(n + \gamma)^2} n (a_n - 1)^2 (3a_n^2 + 2\gamma a_n - 2\gamma) \right.$$

$$\left. + \frac{n^2}{(n + \gamma)^2} (6\gamma^2 a_n^2 - 12\gamma^2 a_n + 6\gamma^2 + 12\gamma a_n^3 - 12\gamma a_n^2 + 11a_n^4 - 8a_n^3) \right.$$

$$\left. + \frac{n}{(n + \gamma)^2} (-4\gamma^3 a_n + 4\gamma^3 - 6\gamma^2 a_n^2 - 8\gamma a_n^3 - 6a_n^4) + \frac{\gamma^4}{(n + \gamma)^2} \right) \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^4$$

$$+ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n + \gamma)^2} \left(\frac{6n^2 a_n^2}{(n + \gamma)^2} n (a_n - 1)^2 + \frac{6n^2 a_n^2}{(n + \gamma)^2} (2\gamma + 2a_n - 3a_n^2 - 2\gamma a_n) \right.$$

$$\left. + \frac{n}{(n + \gamma)^2} (6\gamma^2 a_n^2 + 12\gamma a_n^3 + 12a_n^4) \right) \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^3$$

$$+ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n + \gamma)^2} \left(\frac{n^2}{(n + \gamma)^2} a_n^3 (7a_n - 4) - \frac{n}{(n + \gamma)^2} a_n^3 (4\gamma + 7a_n) \right) \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2$$

gerçeklenir. Son eşitlikten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^4 ; x \right) \right)$$

$$= 3 \left(\frac{x}{1 + x} \right)^2 - 6 \left(\frac{x}{1 + x} \right)^3 + 3 \left(\frac{x}{1 + x} \right)^4$$

elde edilir.

3.6.4. Teorem

$f \in H_\alpha$ için $f', f'' \in H_\alpha$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[A_n \left(f \left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} \right) ; x \right) - f \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right) \right]$$

$$= \frac{x}{1 + x} + (\alpha - \gamma) f' \left(\frac{x}{1 + x} \right) \frac{x}{1 + x} - \frac{1}{2} f'' \left(\frac{x}{1 + x} \right) \left(\frac{x}{1 + x} \right)^2$$

gerçeklenir.

İspat

$f, f', f'' \in H_\alpha$ ve $x \in [0, \infty)$ olsun. Bu durumda Taylor formülünden

$$f \left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} \right) = f \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right) + f' \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right) \left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} f'' \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right) \left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 + r(t; x) \left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 \quad (3.21)$$

biçiminde yazılabilir, burada $r(t, x)$ kalan terimin Peano formudur ve

$$\lim_{t \rightarrow x} r(t; x) = 0$$

dır. A_n operatörü Eş. 3.21 ifadesindeki eşitliğin her iki tarafına uygulanırsa

$$\begin{aligned} & A_n \left(f \left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} \right); x \right) \\ &= f \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right) + f' \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right) A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right); x \right) \\ &+ \frac{1}{2} f'' \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right) A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2; x \right) \\ &+ A_n \left(r(t; x) \left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2; x \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} & A_n \left(f \left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} \right); x \right) - f \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right) \\ &= f' \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right) A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right); x \right) \\ &+ \frac{1}{2} f'' \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right) A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2; x \right) \\ &+ A_n \left(r(t; x) \left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2; x \right) \end{aligned} \tag{3.22}$$

biçiminde yazılabilir. Eş. 3.17 ve Eş. 3.18 ifadelerinden

$$\begin{aligned}
& A_n \left(f \left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} \right); x \right) - f \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right) \\
&= f' \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right) \frac{a_n x}{1 + a_n x} \left(\frac{a_n n}{n + \gamma} - 1 \right) \\
&+ \frac{1}{2} f'' \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right) \left\{ \left(\frac{a_n^2 n (n - 1)}{(n + \gamma)^2} - \frac{2 a_n n}{n + \gamma} + 1 \right) \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 \right. \\
&+ \left. \frac{a_n^2 n}{(n + \gamma)^2} \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right\} + A_n \left(r(t; x) \left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2; x \right) \\
&= f' \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right) \frac{a_n x}{1 + a_n x} \left(\frac{a_n n}{n + \gamma} - 1 \right) \\
&+ \frac{1}{2} f'' \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right) \left\{ \left(\frac{a_n^2 n (n - 1) - 2 a_n n (n + \gamma) + (n + \gamma)^2}{(n + \gamma)^2} \right) \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 \right. \\
&+ \left. \frac{a_n^2 n}{(n + \gamma)^2} \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right\} \\
&+ A_n \left(r(t; x) \left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2; x \right)
\end{aligned}$$

olup eşitliğin her iki tarafı n ile çarpılır ve $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[A_n \left(f \left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} \right); x \right) - f \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} n f' \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right) \frac{a_n x}{1 + a_n x} \left(\frac{a_n n}{n + \gamma} - 1 \right) \\
&+ \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{1}{2} f'' \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right) \left\{ \frac{a_n^2 n (n - 1) - 2 a_n n (n + \gamma) + (n + \gamma)^2}{(n + \gamma)^2} \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_n^2 n}{(n + \gamma)^2} \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right\} \\
&+ \lim_{n \rightarrow \infty} n A_n \left(r(t; x) \left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 ; x \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan, eşitliğin sağ tarafındaki en son terime Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} n A_n \left(r(t; x) \left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 ; x \right) \\
&\leq \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n (r^2(t; x); x)} \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 A_n \left(\left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^4 ; x \right)}
\end{aligned}$$

elde edilir. $r^2(x; x) = 0$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n (r^2(t; x); x) = r^2(x; x) = 0$$

olduğu dikkate alınır

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n A_n \left(r(t; x) \left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} - \frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 ; x \right) = 0$$

gerçeklenir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[A_n \left(f \left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} \right); x \right) - f \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right) \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} n f' \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right) \frac{a_n x}{1 + a_n x} \left(\frac{a_n n}{n + \gamma} - 1 \right) \\
&+ \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{1}{2} f'' \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right) \left(\frac{a_n^2 n (n - 1) - 2 a_n n (n + \gamma) + (n + \gamma)^2}{(n + \gamma)^2} \right) \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 \\
&+ \frac{x}{1 + x} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} f' \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right) \frac{n}{n + \gamma} (n (a_n - 1) - \gamma) \frac{a_n x}{1 + a_n x} \\
&+ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} f'' \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right) \frac{n}{n + \gamma} \left(\frac{n^2 a_n^2 - 2 n^2 a_n + n^2 - 2 n \gamma a_n + 2 n \gamma - n a_n^2 + \gamma^2}{(n + \gamma)} \right) \\
&\times \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 + \frac{x}{1 + x} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} f' \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right) \frac{n}{n + \gamma} (n (a_n - 1) - \gamma) \frac{a_n x}{1 + a_n x} \\
&+ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} f'' \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right) \frac{n}{n + \gamma} \left(\frac{n}{n + \gamma} n (a_n - 1)^2 - \frac{n}{n + \gamma} (a_n^2 + 2 \gamma a_n - 2 \gamma) \right)
\end{aligned}$$

$$+ \frac{\gamma^2}{n + \gamma} \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right)^2 + \frac{x}{1 + x}$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[A_n \left(f \left(\frac{a_n t}{1 + a_n t} \right); x \right) - f \left(\frac{a_n x}{1 + a_n x} \right) \right]$$

$$= \frac{x}{1 + x} + (\alpha - \gamma) f' \left(\frac{x}{1 + x} \right) \frac{x}{1 + x} - \frac{1}{2} f'' \left(\frac{x}{1 + x} \right) \left(\frac{x}{1 + x} \right)^2$$

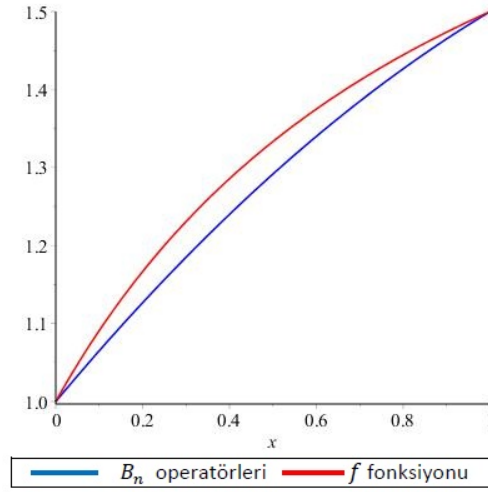
elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

4. GRAFİKSEL GÖSTERİMLER

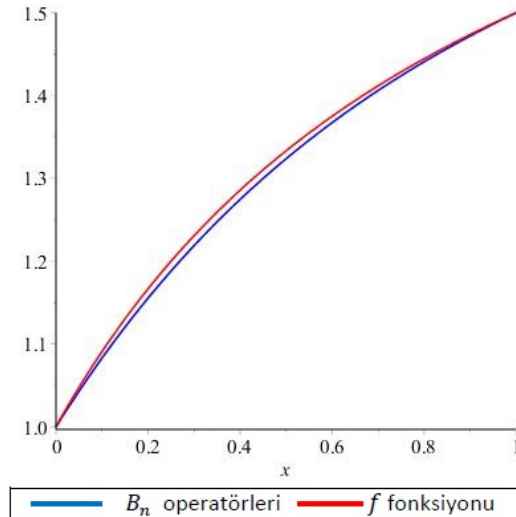
Bu bölümde daha önceki bölümlerde yaklaşım özellikleri verilen ve giriş kısmında tanımlanan operatörlerin belirli bir fonksiyona yakınsaklıkları Maple programı aracılığıyla grafiksel gösterimler biçiminde resmedilmiştir.

Örnek

$n = 2$ ve $n = 8$ için Bernstein operatörleri (siyah), $f(x) = \frac{1+2x}{1+x}$ fonksiyonu (kırmızı) Şekil 4.1. ve Şekil 4.2. grafiklerde gösterilmiştir. n büyüdükçe yaklaşımın daha iyi olduğu görülmektedir.



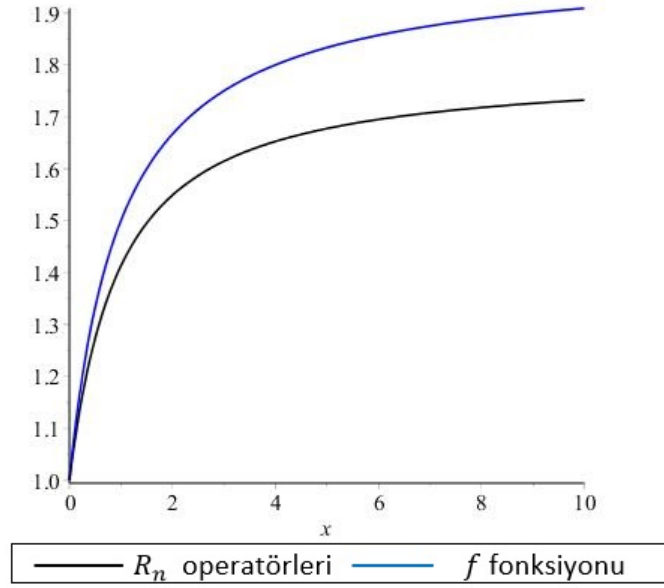
Şekil 4.1. $n = 2$ için $B_2(f; x)$ operatörlerinin f fonksiyonuna yaklaşımı



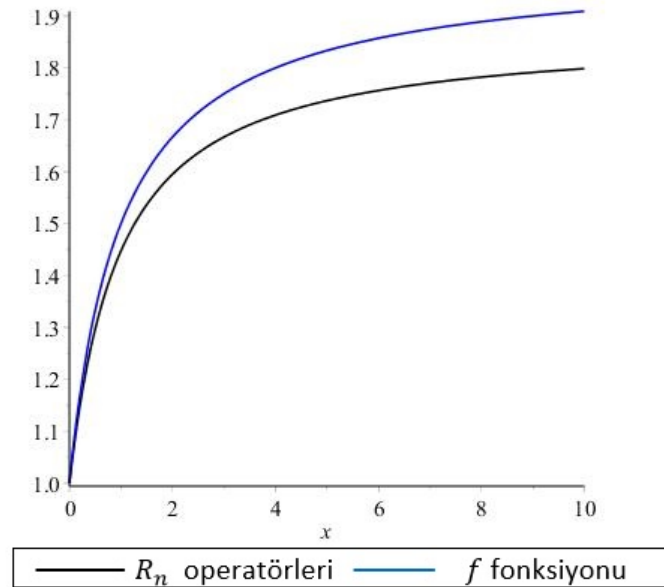
Şekil 4.2. $n = 8$ için $B_8(f; x)$ operatörlerinin f fonksiyonuna yaklaşımı

Örnek

$(a_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ve $(b_n) = \sqrt{n}$ olmak üzere $n = 15$ ve $n = 45$ için Balázs operatörlerinin (siyah), $f(x) = \frac{1+2x}{1+x}$ fonksiyonu (mavi) Şekil 4.3. ve Şekil 4.4. grafiklerde gösterilmiştir. n büyüdükçe yaklaşımın daha iyi olduğu görülmektedir.



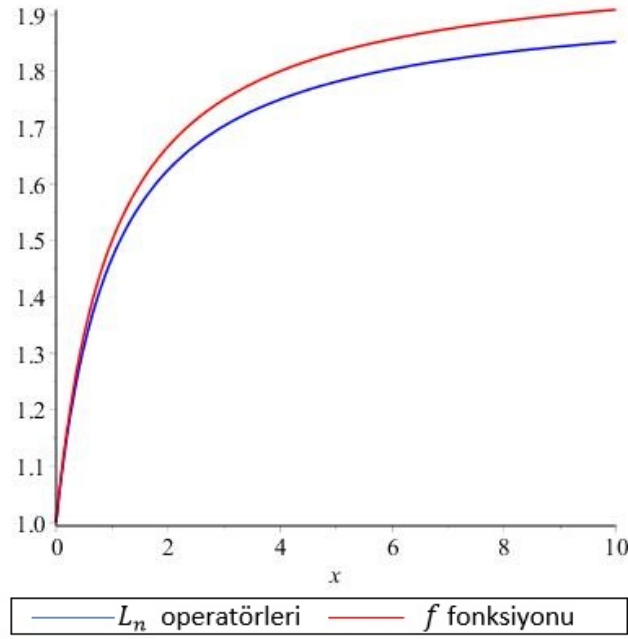
Şekil 4.3. $n = 15$ için $R_{15}(f; x)$ operatörlerinin f fonksiyonuna yaklaşımı



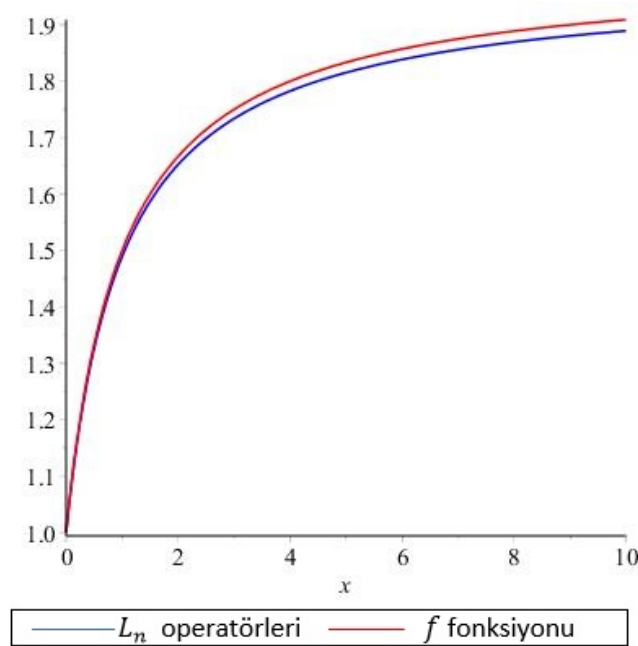
Şekil 4.4. $n = 45$ için $R_{45}(f; x)$ operatörlerinin f fonksiyonuna yaklaşımı

Örnek

$n = 15$ ve $n = 45$ için Bleimann, Butzer ve Hahn operatörleri (mavi), $f(x) = \frac{1+2x}{1+x}$ fonksiyonu (kırmızı) Şekil 4.5. ve Şekil 4.6. grafiklerde gösterilmiştir. n büyüdükçe yaklaşımın daha iyi olduğu görülmektedir.



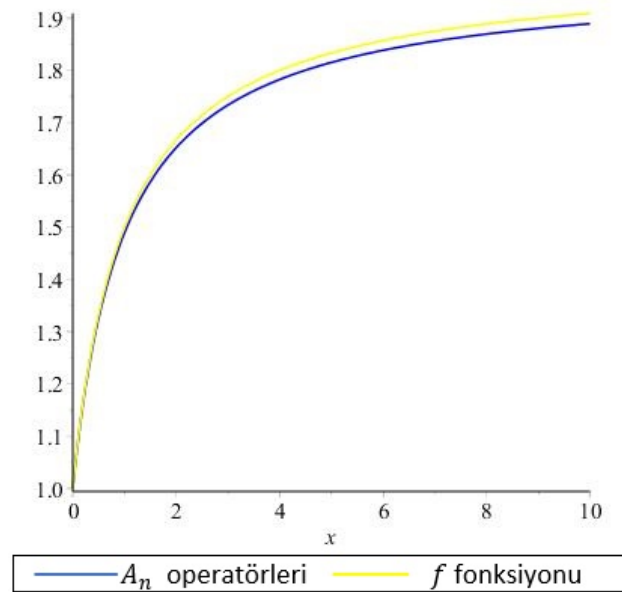
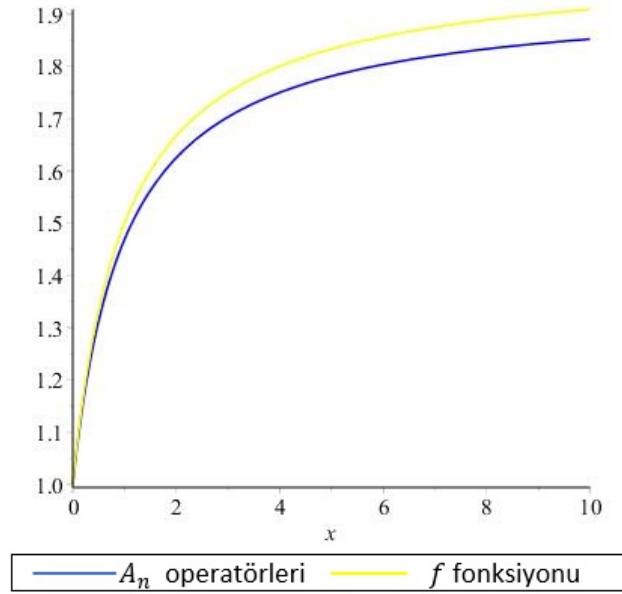
Şekil 4.5. $n = 15$ için $L_{15}(f; x)$ operatörlerinin f fonksiyonuna yaklaşımı



Şekil 4.6. $n = 45$ için $L_{45}(f; x)$ operatörlerinin f fonksiyonuna yaklaşımı

Örnek

$(a_n) = 1$, $(b_{n,k}) = n - k + 1$ ve $(c_n) = n + 1$ olmak üzere $n = 15$ ve $n = 45$ için Balázs operatörlerinin Bleimann, Butzer ve Hahn tip genelleştirmesi olan operatörler (mavi), $f(x) = \frac{1+2x}{1+x}$ fonksiyonu (sarı) Şekil 4.7. ve Şekil 4.8. grafiklerinde gösterilmiştir. n büyüdükçe yaklaşımın daha iyi olduğu görülmektedir.



5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Balázs operatörlerinin Bleimann, Butzer ve Hahn tip genelleştirmesi

$$A_n(f, x) = \frac{1}{(1 + a_n x)^n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{b_{n,k}}\right) \binom{n}{k} (a_n x)^k$$

biçiminde tanımlanmıştır. Bu operatörlerin yaklaşım özellikleri $[0, \infty)$ aralığındaki sınırlı ve sürekli fonksiyonların Lipschitz alt uzayında incelenmiştir. Bu operatörlerin yaklaşım hızı

$$\omega(f; \delta_n) = \sup_{\substack{t, x \geq 0 \\ |t-x| \leq \delta_n}} |f(t) - f(x)|$$

biçiminde tanımlı süreklilik modülü yardımıyla $f \in H_\alpha$ ve

$$\delta_n = \left| \frac{a_n n}{c_n} - 1 \right|$$

olmak üzere

$$|A_n(f; x) - f(x)| \leq 2\omega(f; \delta_n)$$

olduğu gösterilmiştir. Son olarak $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere genel terimi

$$a_n = 1 + \frac{o(1) + \alpha}{n}$$

olan (a_n) dizisi

$$\frac{n}{c_n} \rightarrow 1$$

olacak şekilde genel terimi

$$c_n = a_n k + b_{n,k}$$

olan (c_n) dizisi ve $\gamma \in \mathbb{R}$ olmak üzere genel terimi

$$b_{n,k} = n - a_n k + \gamma$$

olan $(b_{n,k})$ dizisi seçilerek Voronovskaja tip teorem elde edilmiştir.

Bu tezde elde edilen sonuçlar ve teoremler aynı operatörlerin Schurer tipli genelleştirmesi için de verilebilir.

KAYNAKLAR

1. Weierstrass, K. (1885). *Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen reeller Argumente* (Third edition). Berlin: Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, 633-639, 789-805.
2. Bernstein, S.N. (1912). Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. *Mathematical Communications*, 2(13) 1-2.
3. Bohman, H. (1951). On approximation of continuous and analytic functions. *Arkiv Für Mathematik*, 2(3), 43-56.
4. Korovkin, P. P. (1953). On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. *Doklady Akademii Nauk*, 90, 961-964.
5. Gadjiev, A. D. (1976). On Korovkin Type Theorems. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 20(5), 995-998.
6. Gadjiev, A. D. (1974). The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets, and theorems analogous to that of P. P. Korovkin. *Doklady Akademii Nauk*, 218(5), 1001-1004.
7. Balász, K. (1975). Approximation by Bernstein type rational functions. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 26(2), 123-134.
8. Bleimann, G., Butzer, P. L. and Hahn, L. (1980). A Bernstein-type operator approximating continuous functions on the semi-axis. *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, 83(3), 255-262.
9. Cakar, O., and Gadjiev, A.D. (1999). On uniform approximation by Bleimann, Butzer and Hahn operators on all positive semi-axis. *Transactions of Academy of Sciences of Azerbaijan Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences*, 19(5), 21-26.
10. Dogru, O. (2002). On Bleimann, Butzer and Hahn type generalization of Balász operators. *Studia Universitatis, Babeş-Bolyai, Mathematica*, 47(4), 37-45.
11. Hacısalihlioğlu, H. H., ve Hacıyev, A. (1995). *Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı* (Birinci Baskı). Ankara: Ankara Üniversitesi Basımevi, 1-100.
12. Altomare, F. and Campiti, M. (1993). *Korovkin-type approximation theory and its applications* (Third edition). New York: Walter de Gruyter, 627.
13. Korovkin, P. P. (1960). *Linear operators and approximation theory* (Third edition). Hindistan: Hindistan Publishing Corporation, 1-63.
14. Halilov, H., Hasanoğlu, A. ve Can, M. (1999). *Yüksek Matematik* (Birinci baskı).

İstanbul: Literatür Yayınları, 64-82.

15. Dogru, O. (1999). On weighted approximation of continuous functions by linear positive operators on infinite intervals. *Mathematik Cluj*, 41(64), 39-46.
16. Gadjiev, A.D. (1976). Korovkin type theorems. *Zametki*, 20(5), 781-786.
17. Lorentz, G.G. (1953). *Bernstein Polynomials* (Second edition). Toronto: University of Toronto Press, 87-89.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı : KARATAŞ Mustafa
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : Balıkesir Dursunbey
 Medeni hali : Bekar
 Telefon : 05426161308
 e-mail : mkaratas2015@gmail.com



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik Böl.	Devam ediyor.
Lisans	Ahmet Yesevi Üniversitesi Matematik Öğr.	2015
Lise	Dursunbey Anadolu Lisesi	2010

Yabancı Dil

İngilizce
 Kazakça
 Rusça

Yayınlar

Yüksel, İ. ve Karataş, M. (2018, Nisan). Balázs operatörlerinin Bleimann, Butzer ve Hahn tip genelleştirmesi. *13. Ankara Matematik Günleri TOBB ETU*. 49.

İş Deneyimi

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kısmi Zamanlı Öğrenci

Hobiler

Kitap Okumak, Bilimsel araştırmalar yapmak, Şiir yazmak, Sosyal ve Kültürel faaliyetlere katılmak



GAZİ GELECEKTİR..