



**GENELLEŞTİRİLMİŞ BASKAKOV-DURRMEYER-STANCU TİP
OPERATÖRLERİN ASİMTOTİK DAVRANIŐININ İNCELENMESİ**

Meliha MERCAN BOYRAZ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

NİSAN 2021

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,
- bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Meliha MERCAN BOYRAZ

08/04/2021

GENELLEŞTİRİLMİŞ BASKAKOV-DURRMEYER-STANCU TİP OPERATÖRLERİN
ASİMTOTİK DAVRANIŐININ İNCELENMESİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Meliha MERCAN BOYRAZ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Nisan 2021

ÖZET

Kumar,A.S.,Finta,Z. ve Agrawal,P.N.,Baskakov tip operatörlerinin bir çeşidi olan Baskakov-Durrmeyer tip operatörlerini ve ardından da bu operatörlerin bir genelleştirmesi olan Baskakov-Durrmeyer-Stancu operatörlerini tanımlamışlardır. Bu tezde, Baskakov-Durrmeyer-Stancu operatörlerin Voronovskaja tip yaklaşım teoremi verilerek asipmtotik davranışı incelenmiştir.

Bilim Kodu : 20406
Anahtar Kelimeler : Baskakov-Durrmeyer-Stancu operatör, Voronovskaja tip yaklaşım teoremi
Sayfa Adedi : 49
Tez Danışmanı : Doç. Dr. Ülkü DİNLEMEZ KANTAR

INVESTIGATION OF THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF GENERALIZED
BASKAKOV-DURRMEYER-STANCU TYPE OPERATORS

(M. Sc. Thesis)

Meliha MERCAN BOYRAZ

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

April 2021

ABSTRACT

Kumar,A.S.,Finta,Z. and Agrawal,P.N., have introduced a type of Baskakov operators and then Baskakov-Durrmeyer operators a generalization of these operators as Baskakov-Durrmeyer-Stancu operartors are defined. In this thesis, the asymptotic behaviors of Baskakov-Durrmeyer-Stancu operators have been studied by giving Voronovskaja type approach theorem.

Science Code : 20406

Key Words : Baskakov-Durrmeyer-Stancu type operator, Voronovskaja type approach theorem

Page Number : 49

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Ülkü DİNLEMEZ KANTAR

TEŞEKKÜR

Çalışmam boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren ve bana her zaman destek olan sayın hocam Doç. Dr. Ülkü DİNLEMEZ KANTAR'a ve manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan çok değerli eşim Anıl BOYRAZ'a ve aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1.GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE YARDIMCI TEOREMLER.....	5
2.1. Temel Kavramlar	5
2.2. Yardımcı Teoremler	7
3. BASKAKOV OPERATÖRÜ	9
4. BASKAKOV-DURRMEYER-STANCU TİP OPERATÖRLERİN VORONOVSKAJA TİP TEOREM YARDIMIYLA YAKLAŞIM HIZI.....	21
5. SONUÇ	45
KAYNAKLAR	47
ÖZGEÇMİŞ	49

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$B_n^a(f, x)$	Baskakov operatörü
$S_s^{\alpha, \beta}(f, x)$	Stancu operatörü
$L_n^a(f, x)$	Durrmeyer operatörü
$L_{n,a}^{\alpha, \beta}(f, x)$	Durrmeyer- Stancu operatörü
$W_{n,k}^a(x)$	Baskakov taban elemanı
$B(x, y)$	Beta fonksiyonu
$\Gamma(a)$	Gamma fonksiyonu
$C_B[0, \infty)$	$[0, \infty)$ da tanımlı sınırlı sürekli fonksiyonlar uzay
$w(f; \delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü

1.GİRİŞ

Matematiğin bir dalı olan analizin önemli çalışma alanlarından birisi de yaklaşım teorisidir. Yaklaşım teorisi; üzerinde çalışılması zor olan keyfi bir fonksiyona, özellikleri daha kolay, kullanışlı ve daha basit karakterli olan fonksiyonlar veya polinomlar ile yaklaşım sağlanması ve bu yaklaşımın en iyi şekilde elde edilmesi hakkında araştırma yapan ve yapılan çalışmaları kapsayan bir teoridir. Bohman [1] ve Korovkin [2], Bernstein operatörlerinden yola çıkarak, lineer pozitif operatörlerin sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsaması ile ilgili çok önemli bir teorem vermişlerdir. Bu teorem sayesinde birçok yeni lineer pozitif operatörün yaklaşım özellikler incelenmiştir. H. Bohman tarafından kapalı aralıkta sürekli olan fonksiyonun toplam biçimindeki özel tipten bir lineer pozitif operatör dizisine düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir [3]. Bohman'ın teoreminden sonra P. P. Korovkin tarafından daha genel olarak kapalı aralıkta sürekli olan bir fonksiyonun herhangi bir lineer pozitif operatör dizisine düzgün yaklaşımı için gerek ve yeter koşullar verilmiştir [3]. Bu teoremler sayesinde de birçok lineer pozitif operatörün yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Bununla alakalı olarak 1800'lerden bu ana dek birçok matematikçi, fonksiyonlar teorisi içinde de geniş uygulama alanına sahip olan bu teori üzerinde araştırmalar yapmıştır. Bu araştırmalar neticesinde yapılan çalışmalara baktığımızda [4] de Miheşan, a negatif olmayan tamsayı olmak üzere genelleştirilmiş Baskakov operatörü

$$B_n^a(f, x) := \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (1.1)$$

ile tanımlanmıştır. Burada

$$W_{n,k}^a(x) := e^{\frac{-ax}{1+x}} \cdot \frac{P_k(n, a)}{k!} \cdot \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \quad \text{ve}$$

$$(n)_0 = 1 \quad \text{ile} \quad i \geq 1 \quad \text{için} \quad (n)_i := n \cdot (n+1) \dots (n+i-1)$$

olmak üzere.

$$P_k(n, a) := \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (n)_i \cdot a^{k-i}$$

dir.

Yapılan diğer çalışmalar ise şunlar olup; Wafi ve Khatoon, genelleştirilmiş Baskakov operatörlerinin süreklilik modülü yardımıyla yakınsaklık oranını hesap etmiş ve Voronovskaja tipi teorem elde etmişlerdir[5]. Öte yandan Erencin ve Başcanbaz da, bu operatörleri süreklilik modülü açısından yaklaşım durumunu incelemişlerdir[6]. 2008 yılında Wafi ve Khatoon üstel ve polinom ağırlıklı uzayda bir ve iki değişken için genelleştirilmiş Baskakov operatörünün ilk türevlerini kullanarak yakınsaklık ve aynı zamanda Voronovskaja tipi teoremi elde etmişlerdir[7]. Ayrıca son zamanlarda pozitif lineer operatörlerin bazı yeni genellemeleri birçok yazar tarafından tanımlanarak incelenmiştir. Bunlardan 1983 yılından Stancu [8],

$$S_s^{\alpha, \beta}(f, x) := \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} x^i (1-x)^{s-i} \left(\frac{i+\alpha}{s+\beta} \right), \quad (1.2)$$

$0 \leq \alpha \leq \beta$ koşulunu sağlayan Stancu operatörlerini çalışmıştır. Bu operatörlerle bağlantılı olan çalışmalara örnek olarak Baskakov-Szász tip operatörler [9], Baskakov tip operatörler [10], Szász-Mirakyan operatörleri [11], Baskakov-Schurer-Szász operatörleri [12] ve Baskakov-Szász-Stancu operatörleri [13] verilebilir.

İntegrallenebilir fonksiyonlar uzayında yaklaşım yapabilmek için Bernstein operatörlerinin integral tipli genelleştirmesi olan Durrmeyer operatörleri tanımlanmıştır [14]. de Erencin, Tanım 1 doğrultusundaki lineer pozitif operatörlerin bir genelleştirmesi olan $[0, \infty)$ üzerinde sınırlı ve sürekli fonksiyonların uzayı $C_B[0, \infty)$ olmak üzere $f \in C_B[0, \infty)$ olup bu uzay üzerinde $\|f\| = \max_{x \in [0, \infty)} |f(x)|$ şeklinde bir norm tanımlanarak bu koşullar altında “Eş. 1.1” operatörlerinin bir çeşit Durrmeyer tip operatörlerini

$$L_n^a(f, x) := \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) \frac{1}{B(k+1, n)} \int_0^{\infty} \frac{t^k}{(1+t)^{n+k+1}} f(t) dt \quad (1.3)$$

ile tanımlanmıştır. Burada

$$B(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad x, y > 0$$

ile Beta fonksiyonu verilmiş olup “Eş. 1.3” operatörü için ikinci dereceden süreklilik modülleri yardımıyla direkt teoremleri oluşturmuştur.

Kumar ve arkadaşları [15]’de; m pozitif tamsayı olmak üzere

$$\int_0^{\infty} \frac{|f(t)|}{(1+t)^m} dt < \infty,$$

ifadesini sağlayan $[0, \infty)$ üzerinde tanımlı bütün Lebesgue ölçülebilir fonksiyonların sınıfını $\mathcal{L}$ ile göstermişlerdir.

Böylece $f \in \mathcal{L}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için aşağıda; “Eş. 1.2” de tanımlanmış operatörlerin Durrmeyer - Stancu tip genelleştirmeleri

$$L_{n,a}^{\alpha,\beta}(f, x) := \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^{\alpha}(x) \frac{1}{B(k+1, n)} \int_0^{\infty} \frac{t^k}{(1+t)^{n+k+1}} f\left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}\right) dt \quad (1.4)$$

ile vermişlerdir.

Burada $0 \leq \alpha \leq \beta$ negatif olmayan sayılar ve $\int_0^{\infty} \frac{|f(t)|}{(1+t)^m} dt < \infty$ ile m pozitif tamsayısı ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $n > m$ dir.

Kumar, Finta ve Agrawal [15]’de, “Eş. 1.4” ile tanımlanmış operatörler için ikinci dereceden düzgünlük modülü, Lipschitz tip uzay elemanları, ağırlık uzayı ve yaklaşım derecesinden yararlanarak bazı direkt lokal yaklaşım sonuçları elde etmişlerdir. Ayrıca [16],[17]’de farklı operatörler için Voronovskaja tip yaklaşım çalışmaları yapılmıştır.

Bu tez çalışması, ilk bölümü giriş olmak üzere dört bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde, kullanılan teoremler ve temel kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölüm de ise Baskakov tipi operatörler ile ilgili lemmalar ve bu operatörlerin Voronovskaja tipi teorem ile asimtotik davranışları incelenmiştir. Dördüncü bölümde de elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE YARDIMCI TEOREMLER

2.1. Temel Kavramlar

2.1.1. Tanım (Lineer Pozitif Operatörler)

X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere X kümesinden Y kümesine olan bir L dönüşümüne operatör denir. Bu durumda L operatörü, X uzayında tanımlı her f fonksiyonuna Y uzayında bir Lf fonksiyonu karşılık getirir. Lf fonksiyonunun x noktasında aldığı değer, $L(f; x)$ ile gösterilir. Öyleki her $f, g \in X$ için,

$$L(f + g; x) = L(f; x) + L(g; x)$$

koşulunu sağlıyor ise, $L(f; x)$ operatörüne lineerdir denir [18].

Eğer L operatörü pozitif bir f fonksiyonunu pozitif bir Lf fonksiyonuna dönüştürüyorsa; yani her $x \in X$ için

$$f(x) \geq 0 \text{ iken } L(f; x) \geq 0$$

sağlanıyor ise, $L(f; x)$ operatörüne pozitif operatör denir[19].

2.1.2. Tanım (Süreklilik modülü ve özellikleri)

$f(x)$ bir I aralığında tanımlanmış fonksiyon olmak üzere $\delta > 0$ sayısı için ,

$$w(f; \delta) = \max_{x_1, x_2 \in I} |f(x_1) - f(x_2)|$$

ifadesine f fonksiyonunun I aralığında süreklilik modülü adı verilir [20].

$w(f; \delta)$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. $w(f; \delta) \geq 0$
2. $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $w(f; \delta_1) \leq w(f; \delta_2)$

3. $w(f + g; \delta) \leq w(f; \delta) + w(g; \delta)$
4. $m \in \mathbb{N}$ için $w(f; m\delta) \leq mw(f; \delta)$
5. $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $w(f; \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)w(f; \delta)$
6. $|f(t) - f(x)| \leq w(f; |t - x|)$
7. $|f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t-x|}{\delta}\right) w(f; \delta)$

Eğer $f \in C[a, b]$ ise $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} w(f; \delta) = 0$ dir [21].

2.1.3. Tanım (Normlu Uzak)

X bir lineer uzak ve $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Her $x, y \in X$ ve λ skaleri için

- i. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- ii. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlayan X üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzak denir [19].

2.1.4. Tanım (Hölder Eşitsizliği)

$p, q > 0$ reel sayıları $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ şartını sağlasın.

Bu durumda $\forall (a_k), (b_k) \in l_p$ dizileri için ,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik $p = q = 2$ için Cauchy-Schwarz eşitsizliği olarak bilinir [22].

2.2. Yardımcı Teoremler

2.2.1. Teorem (Taylor Teoremi)

f fonksiyonu c noktası yakınlarında n . mertebeden sürekli türevlere sahip bir fonksiyon olsun.

O zaman,

$$r_n(s) = \frac{(x-s)^n}{n!} f^{(n)}(s) \text{ olmak üzere,}$$

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x - c)^{(n-1)} + r_n(s) \quad (2.1)$$

olacak şekilde $s \in [c, x]$ reel sayısı vardır.

Burada f nin incelenen aralıkta sürekli olması önemlidir.

Çünkü, $x \rightarrow c$ için $s \rightarrow c$ olup ve böylece kalan terim $r_n(s) \rightarrow 0$ olur.

2.2.2. Teorem (Korovkin Teoremi)

[17] de, $f(x) \in C[a, b]$ ve tüm reel ekseninde $|f(x)| \leq M_f$ olsun. Eğer $L_n(f)$ lineer pozitif operatör dizisi, her $x \in [a, b]$ ve $e_i = t^i$ olmak üzere $i = 0, 1, 2$ için

$$L_n(e_i; x) \Rightarrow t^i$$

koşullarını sağlıyorsa, bu durumda $[a, b]$ aralığında

$$L_n(f; x) \Rightarrow f(x) \text{ dir.}$$

Korovkin teoremi lineer pozitif operatörlerin sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsaklığını ispatlamada oldukça basit bir yöntem vermiştir. Bernstein polinomları da $[0, 1]$ aralığında lineer pozitif olduğundan bu operatörlerin $[0, 1]$ aralığında sürekli olan f fonksiyonuna düzgün yakınsadığı Korovkin Teoremi yardımıyla kolaylıkla gösterilmiştir [23].

3. BASKAKOV OPERATÖRÜ

Şimdi Baskakov-Durrmeyer-Stancu tip operatörler için bir ön hazırlık olarak “Eş. 1.1” ile tanımlı Baskakov operatörlerinin üçüncü ve dördüncü momentleri hesaplanacaktır. Bunun için aşağıdaki lemma verilsin.

3.1. Lemma

$(n)_0 = 1$ ile $i \geq 1$ için $(n)_i := n \cdot (n + 1) \dots (n + i - 1)$ ve $x \in [0, \infty)$

$$W_{n,k}^a(x) := e^{\frac{-ax}{1+x}} \cdot \frac{P_k(n, a)}{k!} \cdot \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}},$$

olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) = 1 \quad (3.1)$$

elde edilir.

İspat

$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{-n} \cdot e^{\frac{-ax}{1+x}}$ ifadesini oluşturmak için, $\left(\frac{1}{1+x}\right)^{-n}$ ve $e^{\frac{-ax}{1+x}}$ nin seri açılımlarından yararlanılır. Bunun için $|t| < 1$ olmak üzere maclaurin seri açılımı,

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k$$

dir. Bu eşitliğin sırasıyla türevleri alınıp sınır değerleri değiştirilirse,

$$\frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} k t^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) t^k,$$

$$\frac{2}{(1-t)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} (n+1)(n+2)t^n,$$

$$\frac{2.3}{(1-t)^4} = \sum_{k=0}^{\infty} (n+1)(n+2)(n+3)t^n$$

hesaplanır. Son olarak x . mertebeden türev için bir genelleştirme yapılırsa

$$\frac{(x-1)!}{(1-t)^x} = \sum_{k=0}^{\infty} (n+1)(n+2) \dots (n+x-1)t^n,$$

elde edilir. Böylece

$$(1-t)^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2) \dots (n+x-1)t^n}{(x-1)!}$$

olduğu görülür.

Şimdi de $e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^n}{n!}$ olmak üzere,

$$(1-t)^{-x}e^{at} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2) \dots (n+x-1)t^n}{(x-1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^n}{n!},$$

iki sonsuz serinin çarpımından

$$(1-t)^{-x}e^{at} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{k!(k+1)(k+2) \dots (k+x-1)}{k!(x-1)!} \frac{a^{n-k}}{(n-k)!} t^n$$

ve n yerine k , k yerine i yazılıp düzenlendiğinde,

$$(1-t)^{-x}e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \frac{(i+1)(i+2) \dots (i+x-1)}{i!(x-1)!} \frac{a^{k-i}}{(k-i)!} t^k,$$

$$(1-t)^{-x}e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \frac{(i+x-1)}{(x-1)!} a^{k-i} \frac{k!}{i!(k-i)!} \frac{t^k}{k!},$$

$$(1-t)^{-x}e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k x(x+1) \dots (x+i-1) a^{k-i} \binom{k}{i} \frac{t^k}{k!}$$

elde edilir. $\sum_{i=0}^k x(x+1) \dots (x+i-1) a^{k-i} \binom{k}{i} = P_k(n, a)$ olduğu göz önüne alınarak ve

$t = \frac{x}{x+1}$, $x = n$ alındığında

$$\left(1 - \frac{x}{x+1}\right)^{-n} \cdot e^{\frac{ax}{1+x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(n, a)}{k!} \cdot \frac{x^k}{(1+x)^k}$$

$$\left(\frac{1}{x+1}\right)^{-n} \cdot e^{\frac{ax}{1+x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(n, a)}{k!} \cdot \frac{x^k}{(1+x)^k} \quad (3.2)$$

elde edilir. “Eş. 2.2” eşitliğin iki tarafı da $\left(\frac{1}{x+1}\right)^n$ ile çarpıldığında

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(n, a)}{k!} \cdot \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} = e^{\frac{ax}{1+x}},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}} \cdot \frac{P_k(n, a)}{k!} \cdot \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} = e^{\frac{-ax}{1+x}} \cdot e^{\frac{ax}{1+x}},$$

olduğu görülür. Böylece

$$\sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) = 1$$

elde edilir.

“Eş. 1,1” de ifade edilen Baskakov operatörlerinin momentleri için aşağıdaki lemma verilecektir.

3.2. Lemma

“Eş. 1,1” de tanımlanan Baskakov operatörlerinin $e_m(t) = t^m, m = 0,1,2,3,4$ değerleri aşağıdaki eşitliklerle elde edilmiştir.

$$i) B_n^a(1, x) = 1$$

$$ii) B_n^a(t, x) = \frac{x}{n} \left(\frac{a}{(1+x)} + n \right)$$

$$iii) B_n^a(t^2, x) = \frac{x^2}{n^2} \left\{ \frac{a^2}{(1+x)^2} + \frac{2an}{(1+x)} + n(n+1) \right\} + \frac{x}{n^2} \left\{ \frac{a}{(1+x)} + n \right\}$$

$$iv) B_n^a(t^3, x) = \frac{x^3}{n^3} \left\{ \frac{a^3}{(1+x)^3} + \frac{3a^2n}{(1+x)^2} + \frac{3a(n+1)}{1+x} + n(n+1)(n+2) \right\}$$

$$+ \frac{3x^2}{n^3} \left\{ \frac{a^2}{(1+x)^2} + \frac{2an}{(1+x)} + n(n+1) \right\} + \frac{x}{n^3} \left\{ \frac{a}{(1+x)} + n \right\}$$

$$v) B_n^a(t^4, x) = \frac{x^4}{n^4} \left\{ \frac{a^4}{(1+x)^4} + \frac{4a^3n}{(1+x)^3} + \frac{6a^2n(n+1)}{(1+x)^2} + \frac{4an(n+1)(n+2)}{1+x} \right. \\ \left. + n(n+1)(n+2)(n+3) \right\}$$

$$+ \frac{6x^3}{n^4} \left\{ \frac{a^3}{(1+x)^3} + \frac{3a^2n}{(1+x)^2} + \frac{3a(n+1)}{1+x} + n(n+1)(n+2) \right\}$$

$$+ \frac{7x^2}{n^4} \left\{ \frac{a^2}{(1+x)^2} + \frac{2an}{(1+x)} + n(n+1) \right\} + \frac{x}{n^4} \left\{ \frac{a}{(1+x)} + n \right\}.$$

İspat

i) $B_n^a(e_m(t), x)$ operatörlerinde $e_0(t) = t^0$ alınsın,

$$B_n^a(f, x) = \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$B_n^a(1, x) = \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x)$$

olup sağdaki eşitlik “Eş. 3.1” de elde edilmiştir. Buna göre,

$$B_n^a(1, x) = 1$$

olduğu görülür.

ii) $B_n^a(e_m(t), x)$ operatörlerinde $e_1(t) = t$ alınsın,

$$B_n^a(f, x) = \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) f\left(\frac{k}{n}\right),$$

$$B_n^a(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-ax}}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (n)_i a^{k-i} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \frac{k}{n}$$

yazılır.

$$e^{at} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(at)^n}{n!} \quad \text{ve} \quad (1-t)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} t^k$$

fonksiyonların seri açılımları çarpıldığında,

$$e^{at}(1-t)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (n)_i a^{k-i} \frac{t^k}{k!}, \quad (3.3)$$

elde edilir. “Eş. 3.3” eşitliği t ye göre türevlendiğinde

$$ae^{at}(1-t)^{-n} + ne^{at}(1-t)^{-n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (n)_i a^{k-i} \frac{kt^{k-1}}{k!}, \quad (3.4)$$

bulunur ve ardından “Eş. 3.4” ün her iki yanını $\frac{t}{n}$ ile çarpıldığında,

$$\left[\frac{at}{n} + \frac{t}{1-t} \right] = e^{at}(1-t)^n \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (n)_i a^{k-i} \frac{t^k}{k!} \frac{k}{n} \quad (3.5)$$

elde edilir. “Eş. 3.5” eşitliğinde t yerine $\frac{x}{1+x}$ yazıldığında,

$$x + \frac{ax}{n(1+x)} = e^{\frac{-ax}{1+x}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (n)_i a^{k-i} \frac{x^k}{(1+x)^{k+n}} \frac{k}{n} \quad (3.6)$$

bulunur. “Eş. 3.6” da gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$B_n^a(t, x) = \frac{x}{n} \left(\frac{a}{(1+x)} + n \right)$$

elde edilir.

iii) $B_n^a(e_m(t), x)$ operatörlerinde $e_2(t) = t^2$ alınsın,

$$B_n^a(t^2, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{-ax}{1+x}}}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (n)_i a^{k-i} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \left(\frac{k}{n} \right)^2.$$

Burada

$$e^{at} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(at)^n}{n!} \quad \text{ve} \quad (1-t)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} t^k$$

$|t| < 1$ için eşitlikleri var olduğundan tekrar bu seri açılımları çarpıldığında

$$e^{at}(1-t)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (n)_i a^{k-i} \frac{t^k}{k!},$$

bulunur. Elde edilen serisel çarpımın t ye göre birinci türevi

$$ae^{at}(1-t)^{-n} + ne^{at}(1-t)^{-n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (n)_i a^{k-i} \frac{kt^{k-1}}{k!},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (n)_i a^{k-i} \frac{k(k-1)t^{k-2}}{k!} = a^2 e^{at}(1-t)^{-n} + 2ane^{at}(1-t)^{-n-1}$$

$$+ n(n+1)e^{at}(1-t)^{-n-2}$$

ve ardından ikinci türevi

$$e^{at}(1-t)^{-n} \left[a^2 + \frac{2an}{1-t} + \frac{n(n+1)}{(1-t)^2} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (n)_i a^{k-i} \frac{k(k-1)t^{k-2}}{k!},$$

hesaplanır. Son eşitliğin her iki tarafı $\frac{t^2}{n^2}$ ile çarpılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\begin{aligned} e^{at}(1-t)^{-n} \left[\frac{a^2 t^2}{n^2} + \frac{2at^2}{(1-t)n} + \frac{t^2(n+1)}{(1-t)^2 n} \right] &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (n)_i a^{k-i} \frac{(k^2 - k)t^k}{n^2 k!}, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (n)_i a^{k-i} \frac{k^2 t^k}{n^2 k!} - \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (n)_i a^{k-i} \frac{k t^k}{n^2 k!} \right), \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (n)_i a^{k-i} \frac{t^k}{k!} - \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (n)_i a^{k-i} \frac{t^k k}{k! n} \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

elde edilir. “Eş. 3.7” eşitliğinde t yerine $\frac{x}{1+x}$ yazılır ve gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\begin{aligned}
& \frac{a^2 x^2}{(1+x)^2 n^2} + \frac{2ax^2}{(1+x)n} + \frac{(n+1)x^2}{n} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (n)_i a^{k-i} \frac{x^k}{(1+x)^k k!} \left(\frac{1}{1+x}\right)^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \\
&- \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (n)_i a^{k-i} \frac{x^k}{(1+x)^k k!} \left(\frac{1}{1+x}\right)^n \frac{k}{n} \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{a^2 x^2}{(1+x)^2 n^2} + \frac{2ax^2}{(1+x)n} + \frac{(n+1)x^2}{n} = B_n^a(t^2, x) - \frac{1}{n} B_n^a(t, x)$$

olup $B_n^a(t, x) = \frac{x}{n} \left(\frac{a}{(1+x)} + n \right)$ eşitliği kullanılırsa,

$$B_n^a(t^2, x) = \frac{x^2}{n^2} \left\{ \frac{a^2}{(1+x)^2} + \frac{2an}{(1+x)} + n(n+1) \right\} + \frac{x}{n^2} \left\{ \frac{a}{(1+x)} + n \right\}$$

olarak elde edilir.

iv) $B_n^a(e_m(t), x)$ operatörlerinde $e_3(t) = t^3$ alınsın,

$$B_n^a(t^3, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{-ax}{1+x}}}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (n)_i a^{k-i} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \left(\frac{k}{n}\right)^3.$$

Burada “Eş. 3.3” eşitliği kullanılıp t ye göre birinci, ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (n)_i a^{k-i} \frac{kt^{k-1}}{k!} = ae^{at}(1-t)^{-n} + ne^{at}(1-t)^{-n-1},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (n)_i a^{k-i} \frac{k(k-1)t^{k-2}}{k!}$$

$$= a^2 e^{at} (1-t)^{-n} + 2ane^{at} (1-t)^{-n-1} + n(n+1)e^{at} (1-t)^{-n-2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (n)_i a^{k-i} \frac{k(k-1)(k-2)t^{k-3}}{k!}$$

$$= a^3 e^{at} (1-t)^{-n} + a^2 ne^{at} (1-t)^{-n-1} + 2a^2 ne^{at} (1-t)^{-n-1}$$

$$+ 2an(n+1)e^{at} (1-t)^{-n-2} + an(n+1)e^{at} (1-t)^{-n-2}$$

$$+ n(n+1)(n+2)e^{at} (1-t)^{-n-3}$$

olarak bulunur. Burada son eşitliğin sağ tarafı düzenlendiğinde

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (n)_i a^{k-i} \frac{k(k-1)(k-2)}{k!} t^{k-3}$$

$$= e^{at} (1-t)^{-n} \left\{ a^3 + \frac{3a^2 n}{1-t} + \frac{3an(n+1)}{(1-t)^2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{(1-t)^3} \right\} \quad (3.8)$$

elde edilir. “Eş. 3.8” in her iki tarafı $\frac{t^3}{n^3}$ ile çarpıldığında,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (n)_i a^{k-i} \frac{(k^3 - 3k^2 + 2k)}{n^3} \frac{t^k}{k!}$$

$$= e^{at} (1-t)^{-n} \left\{ \frac{a^3 t^3}{n^3} + \frac{3a^2 n t^3}{(1-t)n^3} + \frac{3an(n+1)t^3}{(1-t)^2 n^3} + \frac{n(n+1)(n+2)t^3}{(1-t)^3 n^3} \right\} \quad (3.9)$$

eşitliği elde edilir. “Eş. 3.9” eşitliğinde t yerine $\frac{x}{1+x}$ yazıldığında ve gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$B_n^a(t^3, x) = \frac{x^3}{n^3} \left\{ \frac{a^3}{(1+x)^3} + \frac{3a^2 n}{(1+x)^2} + \frac{3an(n+1)}{1+x} + n(n+1)(n+2) \right\} + \frac{3}{n} B_n^a(t^2, x) - \frac{2}{n^2} B_n^a(t, x) \quad (3.10)$$

elde edilir. “Eş. 3.10” da

$$B_n^a(t, x) = \frac{x}{n} \left(\frac{a}{(1+x)} + n \right) \text{ ve}$$

$$B_n^a(t^2, x) = \frac{x^2}{n^2} \left\{ \frac{a^2}{(1+x)^2} + \frac{2an}{(1+x)} + n(n+1) \right\} + \frac{x}{n^2} \left\{ \frac{a}{(1+x)} + n \right\}$$

eşitlikleri yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} B_n^a(t^3, x) &= \frac{x^3}{n^3} \left\{ \frac{a^3}{(1+x)^3} + \frac{3a^2n}{(1+x)^2} + \frac{3a(n+1)}{1+x} + n(n+1)(n+2) \right\} \\ &+ \frac{3x^2}{n^3} \left\{ \frac{a^2}{(1+x)^2} + \frac{2an}{(1+x)} + n(n+1) \right\} + \frac{3x}{n^3} \left\{ \frac{a}{(1+x)} + n \right\} \\ &- \frac{2x}{n^3} \left\{ \frac{a}{(1+x)} + n \right\} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Son olarak

$$\begin{aligned} B_n^a(t^3, x) &= \frac{x^3}{n^3} \left\{ \frac{a^3}{(1+x)^3} + \frac{3a^2n}{(1+x)^2} + \frac{3a(n+1)}{1+x} + n(n+1)(n+2) \right\} \\ &+ \frac{3x^2}{n^3} \left\{ \frac{a^2}{(1+x)^2} + \frac{2an}{(1+x)} + n(n+1) \right\} + \frac{x}{n^3} \left\{ \frac{a}{(1+x)} + n \right\} \end{aligned}$$

istenilen moment elde edilmiş olur.

v) $B_n^a(e_m(t), x)$ operatörlerinde $e_4(t) = t^4$ alınsın.

$$B_n^a(t^4, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-ax}}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (n)_i a^{k-i} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \left(\frac{k}{n} \right)^4.$$

$e_0(t), e_1(t), e_2(t), e_3(t)$ olduğu gibi “Eş. 2.3” ün t ye göre birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü türevleri sırasıyla alındığında en son olarak

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (n)_i a^{k-i} \frac{k(k-1)(k^2-5k+6)}{k!} t^{k-4} \\
&= e^{at} (1-t)^{-n} \left\{ a^4 + \frac{4a^3n}{1-t} + \frac{6a^2n(n+1)}{(1-t)^2} + \frac{4an(n+1)(n+2)}{(1-t)^3} + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{(1-t)^4} \right\} \quad (3.11)
\end{aligned}$$

hesaplanır. “Eş. 3.11” in her iki tarafı $\frac{t^4}{n^4}$ ile çarpıldığında,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (n)_i a^{k-i} \frac{k(k-1)(k^2-5k+6)}{n^4} \frac{t^k}{k!} \\
&= e^{at} (1-t)^{-n} \left\{ \frac{a^4 t^4}{n^4} + \frac{4a^3 n t^4}{(1-t)n^4} + \frac{6a^2 n(n+1)t^4}{(1-t)^2 n^4} + \frac{4an(n+1)(n+2)t^4}{(1-t)^3 n^4} + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)t^4}{(1-t)^4 n^4} \right\} \quad (3.12)
\end{aligned}$$

elde edilir. “Eş. 3.12” de t yerine $\frac{x}{1+x}$ yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında ve ardından

$$B_n^a(t, x) = \frac{x}{n} \left(\frac{a}{(1+x)} + n \right),$$

$$B_n^a(t^2, x) = \frac{x^2}{n^2} \left\{ \frac{a^2}{(1+x)^2} + \frac{2an}{(1+x)} + n(n+1) \right\} + \frac{x}{n^2} \left\{ \frac{a}{(1+x)} + n \right\}$$

ve

$$\begin{aligned}
B_n^a(t^3, x) &= \frac{x^3}{n^3} \left\{ \frac{a^3}{(1+x)^3} + \frac{3a^2n}{(1+x)^2} + \frac{3a(n+1)}{1+x} + n(n+1)(n+2) \right\} \\
&\quad + \frac{3x^2}{n^3} \left\{ \frac{a^2}{(1+x)^2} + \frac{2an}{(1+x)} + n(n+1) \right\} + \frac{x}{n^3} \left\{ \frac{a}{(1+x)} + n \right\}
\end{aligned}$$

eşitlikleri kullanıldığında,

$$\begin{aligned}
B_n^a(t^4, x) &= \frac{x^4}{n^4} \left\{ \frac{a^4}{(1+x)^4} + \frac{4a^3n}{(1+x)^3n^4} + \frac{6a^2n(n+1)}{(1+x)^2} + \frac{4an(n+1)(n+2)}{1+x} \right. \\
&\quad \left. + n(n+1)(n+2)(n+3) \right\} \\
&+ \frac{6x^3}{n^4} \left\{ \frac{a^3}{(1+x)^3} + \frac{3a^2n}{(1+x)^2} + \frac{3a(n+1)}{1+x} + n(n+1)(n+2) \right\} \\
&+ \frac{7x^2}{n^4} \left\{ \frac{a^2}{(1+x)^2} + \frac{2an}{(1+x)} + n(n+1) \right\} + \frac{x}{n^4} \left\{ \frac{a}{(1+x)} + n \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

4. BASKAKOV-DURRMEYER-STANCU TİP OPERATÖRLERİN VORONOVSKAJA TİP TEOREM YARDIMIYLA YAKLAŞIM HIZI

Şimdi Baskakov-Durrmeyer-Stancu tipi operatörler için aşağıdaki lemma ile gerekli momentler hesaplanıp bu tip operatörlerin yaklaşım hızı Voronovskaja tip teorem yardımıyla belirlenecektir.

Bundan sonra yapılacak tüm işlemlerde kolaylık olması için

$$M_{\beta}(n) = (n + \beta) \quad , \quad \ddot{U}_s(n) = \prod_{i=1}^s (n - i)$$

kısaltmaları kullanılacaktır.

4.1. Lemma “Eş. 2.3” de tanımlanan genelleştirilmiş Baskakov-Durrmeyer-Stancu tip operatörler için,

$$i) L_{n,a}^{\alpha,\beta}(e_0, x) := 1 .$$

$$ii) L_{n,a}^{\alpha,\beta}(e_1, x) := x \left\{ \frac{n}{M_{\beta}(n)\ddot{U}_1(n)} \left(\frac{a}{1+x} + n \right) \right\} + \frac{n}{M_{\beta}(n)\ddot{U}_1(n)} + \frac{a}{M_{\beta}(n)} .$$

$$iii) L_{n,a}^{\alpha,\beta}(e_2, x) := x^2 \left\{ \frac{n^2}{[M_{\beta}(n)]^2 \ddot{U}_2(n)} \left(\frac{a^2}{(1+x)^2} + \frac{2an}{1+x} + n(n+1) \right) \right\}$$

$$+ x \left\{ \frac{4n^2 + 2na(n-2)}{[M_{\beta}(n)]^2 \ddot{U}_2(n)} \left(\frac{a}{1+x} + n \right) \right\}$$

$$+ \left\{ \frac{2n^2 + 2na(n-2)}{[M_{\beta}(n)]^2 \ddot{U}_2(n)} + \frac{\alpha^2}{[M_{\beta}(n)]^2} \right\} .$$

$$iv) L_{n,a}^{\alpha,\beta}(e_3, x) := x^3 \left\{ \frac{n^3}{[M_{\beta}(n)]^3 \ddot{U}_3(n)} \left(\frac{a^3}{(1+x)^3} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3a^2n}{(1+x)^2} + \frac{3an(n+1)}{1+x} + n(n+1)(n+2) \Bigg) \Bigg\} \\
& + x^2 \left\{ \frac{9n^3 + 3n^2a(n-3)}{[M_\beta(n)]^3 \ddot{U}_3(n)} \left(\frac{a^2}{(1+x)^2} + \frac{2an}{1+x} + n(n+1) \right) \right\} \\
& + x \left\{ \frac{18n^3 + 12n^2a(n-3) + 3na^2(n-2)(n-3)}{[M_\beta(n)]^3 \ddot{U}_3(n)} \left(\frac{a}{1+x} + n \right) \right\} \\
& + \left\{ \frac{6n^3 + 6n^2a(n-3) + 3na^2(n-2)(n-3)}{[M_\beta(n)]^3 \ddot{U}_3(n)} + \frac{a^3}{[M_\beta(n)]^3} \right\}. \\
\text{v) } L_{n,a}^{\alpha,\beta}(e_4, x) &:= x^4 \left\{ \frac{n^4}{[M_\beta(n)]^4 \ddot{U}_4(n)} \left(\frac{a^4}{(1+x)^4} + \frac{4a^3n}{(1+x)^3} \right. \right. \\
& + \frac{6a^2n(n+1)}{(1+x)^2} + \frac{4an(n+1)(n+2)}{1+x} + n(n+1)(n+2)(n+3) \Bigg) \\
& + x^3 \left\{ \frac{16n^4 + 4n^3\alpha(n-4)}{[M_\beta(n)]^4 \ddot{U}_4(n)} \left(\frac{a^3}{(1+x)^3} + \frac{3a^2n}{(1+x)^2} \right. \right. \\
& + \frac{3an(n+1)}{1+x} + n(n+1)(n+2) \Bigg) \Bigg\} \\
& + x^2 \left\{ \frac{72n^4 + 36n^3\alpha(n-4) + 6n^2\alpha^2(n-3)(n-4)}{[M_\beta(n)]^4 \ddot{U}_4(n)} \left(\frac{a^2}{(1+x)^2} + \frac{2an}{1+x} + n(n+1) \right) \right\} \\
& + \left\{ \frac{96n^4 + 72n^3\alpha(n-4) + 24n^2\alpha^2(n-3)(n-4)}{[M_\beta(n)]^4 \ddot{U}_4(n)} \right. \\
& + \left. \frac{4n\alpha^3(n-2)(n-3)(n-4)}{[M_\beta(n)]^4 \ddot{U}_4(n)} \right\} \left(\frac{a}{1+x} + n \right) x
\end{aligned}$$

$$+ \frac{24n^4 + 24n^3 \alpha(n-4) + 12n^2 \alpha^2(n-3)(n-4)}{[M_\beta(n)]^4 \ddot{U}_4(n)}$$

$$+ \frac{4n\alpha^3(n-2)(n-3)(n-4)}{[M_\beta(n)]^4 \ddot{U}_4(n)} + \frac{a^4}{[M_\beta(n)]^4}.$$

İspatlar

“Eş. 1.4” de tanımlanan $L_{n,a}^{\alpha,\beta}(e_m(t), x)$ operatörlerinde $e_m(t) = t^m, m = 0$ için birinci moment,

$$L_{n,a}^{\alpha,\beta}(f, x) := \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) \frac{1}{B(k+1, n)} \int_0^{\infty} \frac{t^k}{(1+t)^{n+k+1}} dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) \frac{1}{B(k+1, n)} B(k+1, n)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x)$$

bulunur. “Eş. 2.1” den,

$$L_{n,a}^{\alpha,\beta}(1, x) = 1$$

olduğu görülür.

İkinci momenti hesaplamak için “Eş. 1.4” de tanımlanan $L_{n,a}^{\alpha,\beta}(e_m(t), x)$ operatörlerinde $e_1(t) = t, m = 1$ alınır. Böylece

$$L_{n,a}^{\alpha,\beta}(e_1, x) := \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) \frac{1}{B(k+1, n)} \int_0^{\infty} \frac{t^k}{(1+t)^{n+k+1}} \left(\frac{nt + \alpha}{n + \beta} \right) dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) \frac{1}{B(k+1, n)} \frac{1}{(n+\beta)^2} \left\{ n \int_0^{\infty} \frac{t^{k+1}}{(1+t)^{n+k+1}} dt + \alpha \int_0^{\infty} \frac{t^k}{(1+t)^{n+k+1}} dt \right\} \quad (4.1)$$

yazılır. Genelleştirilmiş Baskakov-Durrmeyer-Stancu tipi operatörlerin çekirdeği $B(x, y)$ beta fonksiyonu olmak üzere ve $x > 0, y > 0$ için

$$B(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt = \frac{\tau(x)\tau(y)}{\tau(x+y)}$$

kullanıldığında

$$L_{n,a}^{\alpha,\beta}(e_1, x) = \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) \frac{1}{B(k+1, n)} \frac{1}{(n+\beta)} \{ nB(k+2, n-1) + \alpha B(k+1, n) \}$$

elde edilir.

Tekrar $B(x, y)$ Beta fonksiyonu kullanılarak

$$L_{n,a}^{\alpha,\beta}(e_1, x) = \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) \frac{1}{B(k+1, n)} \frac{1}{(n+\beta)} \left\{ n \frac{(k+1)}{(n-1)} B(k+1, n) + \alpha B(k+1, n) \right\}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} L_{n,a}^{\alpha,\beta}(e_1, x) &= \frac{1}{(n+\beta)} \left\{ \frac{n}{(n-1)} \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) (k+1) + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) \right\} \\ &= \frac{1}{M_{\beta}(n)} \left\{ \frac{n}{\ddot{U}_1(n)} [nB_n^a(t, x) + 1] + \alpha \right\} \\ &= \frac{1}{M_{\beta}(n)} \left\{ \frac{n}{\ddot{U}_1(n)} \left\{ x \left(\frac{a}{1+x} + n \right) + 1 \right\} + \alpha \right\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

elde edilir. “Eş. 4.2” de gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$L_{n,a}^{\alpha,\beta}(e_1, x) := x \left\{ \frac{n}{M_\beta(n)\ddot{U}_1(n)} \left(\frac{a}{1+x} + n \right) \right\} + \frac{n}{M_\beta(n)\ddot{U}_1(n)} + \frac{a}{M_\beta(n)}$$

olarak hesaplanır.

Üçüncü momenti hesaplamak için “Eş. 1.4” de tanımlanan $L_{n,a}^{\alpha,\beta}(e_m(t), x)$ operatörlerinde $e_2(t) = t^2$, $m = 2$ alınsın. Böylece

$$L_{n,a}^{\alpha,\beta}(e_2, x) := \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) \frac{1}{B(k+1, n)} \int_0^{\infty} \frac{t^k}{(1+t)^{n+k+1}} \left(\frac{nt + \alpha}{n + \beta} \right)^2 dt$$

yazılır ve ardından parantez açıldığında

$$L_{n,a}^{\alpha,\beta}(e_2, x) := \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) \frac{1}{B(k+1, n)} \frac{1}{(n + \beta)^2} \left\{ n^2 \int_0^{\infty} \frac{t^{k+2}}{(1+t)^{n+k+1}} dt \right. \\ \left. + 2n\alpha \int_0^{\infty} \frac{t^{k+1}}{(1+t)^{n+k+1}} dt + \alpha^2 \int_0^{\infty} \frac{t^k}{(1+t)^{n+k+1}} dt \right\}$$

ve $B(x, y)$ eşitliği gerekli yerlerde kullanıldığında

$$L_{n,a}^{\alpha,\beta}(e_2, x) := \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) \frac{1}{B(k+1, n)} \frac{1}{(n + \beta)^2} \{ n^2 B(k+3, n-2) \\ + 2n\alpha B(k+2, n-1) + \alpha^2 B(k+1, n) \} \\ = \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) \frac{1}{B(k+1, n)} \frac{1}{[M_\beta(n)]^2} \left\{ n^2 \frac{(k+2)(k+1)}{\ddot{U}_2(n)} B(k+1, n) \right. \\ \left. + 2n\alpha \frac{(k+1)}{\ddot{U}_1(n)} B(k+1, n) + \alpha^2 B(k+1, n) \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{[M_\beta(n)]^2} \left\{ \frac{n^2}{\ddot{U}_2(n)} \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) (k+2)(k+1) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(2n\alpha)}{\ddot{U}_1(n)} \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) (k+1) + \alpha^2 \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) \right\} \\
&= \frac{1}{[M_\beta(n)]^2 \ddot{U}_2(n)} \left\{ \frac{n^2}{\ddot{U}_2(n)} \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) (k^2 + 3k + 2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(2n\alpha)}{\ddot{U}_1(n)} \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) (k+1) + \alpha^2 \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) \right\}, \\
&= \frac{1}{[M_\beta(n)]^2} \left\{ \frac{n^2}{\ddot{U}_2(n)} [n^2 B_n^a(t^2, x) + 3n B_n^a(t, x) + 2] \right. \\
&\quad \left. + \frac{(2n\alpha)}{\ddot{U}_1(n)} [n B_n^a(t, x) + 1] + \alpha^2 \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Baskakov operatörlerinde $e_m(t) = t^m$, $m = 0, 1, 2$ yazıldığında elde edilen momentler kullanılarak,

$$\begin{aligned}
L_{n,a}^{\alpha,\beta}(e_2, x) &:= x^2 \left\{ \frac{n^2}{[M_\beta(n)]^2 \ddot{U}_2(n)} \left(\frac{a^2}{(1+x)^2} + \frac{2an}{1+x} + n(n+1) \right) \right\} \\
&+ x \left\{ \frac{4n^2 + 2na(n-2)}{[M_\beta(n)]^2 \ddot{U}_2(n)} \left(\frac{a}{1+x} + n \right) \right\} \\
&+ \left\{ \frac{2n^2 + 2na(n-2)}{[M_\beta(n)]^2 \ddot{U}_2(n)} + \frac{\alpha^2}{[M_\beta(n)]^2} \right\}
\end{aligned}$$

bulunur.

Dördüncü momenti hesaplamak için “Eş. 1.4” de tanımlanan $L_{n,a}^{\alpha,\beta}(e_m(t), x)$ operatörlerinde $e_3(t) = t^3$, $m = 3$ alınır.

$$L_{n,a}^{\alpha,\beta}(e_3, x) := \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) \frac{1}{B(k+1, n)} \int_0^{\infty} \frac{t^k}{(1+t)^{n+k+1}} \left(\frac{nt + \alpha}{n + \beta} \right)^3 dt$$

eşitliği kullanılıp gerekli açılım yapıldığında ve $B(x, y)$ eşitliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} L_{n,a}^{\alpha,\beta}(e_3, x) &:= \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) \frac{1}{B(k+1, n)} \frac{1}{(n + \beta)^3} \left\{ n^3 \int_0^{\infty} \frac{t^{k+3}}{(1+t)^{n+k+1}} dt \right. \\ &\quad \left. + 3n^2 \alpha \int_0^{\infty} \frac{t^{k+2}}{(1+t)^{n+k+1}} dt + 3n\alpha^2 \int_0^{\infty} \frac{t^{k+1}}{(1+t)^{n+k+1}} dt + \alpha^3 \int_0^{\infty} \frac{t^k}{(1+t)^{n+k+1}} dt \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) \frac{1}{B(k+1, n)} \frac{1}{(n + \beta)^3} \{ n^3 B(k+4, n-3) \\ &\quad + 3n^2 \alpha B(k+3, n-2) + 3n\alpha^2 B(k+2, n-1) + \alpha^3 B(k+1, n) \} \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlik düzenlenirse

$$\begin{aligned} L_{n,a}^{\alpha,\beta}(e_3, x) &:= \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) \frac{1}{B(k+1, n)} \frac{1}{[M_{\beta}(n)]^3} \left\{ n^3 \frac{(k+3)(k+2)(k+1)}{\ddot{U}_3(n)} B(k+1, n) \right. \\ &\quad \left. + 3n^2 \alpha \frac{(k+2)(k+1)}{\ddot{U}_2(n)} B(k+1, n) + 3n\alpha^2 \frac{(k+1)}{\ddot{U}_1(n)} B(k+1, n) \right. \\ &\quad \left. + \alpha^3 B(k+1, n) \right\} \\ &= \frac{1}{[M_{\beta}(n)]^3} \left\{ \frac{n^3}{\ddot{U}_3(n)} \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) (k^3 + 6k^2 + 11k + 6) \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{(3n^2 \alpha)}{\ddot{U}_2(n)} \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) (k^2 + 3k + 2)$$

$$+ \frac{3n\alpha^2}{\ddot{U}_1(n)} \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) (k + 1) + \alpha^3 \Big\}$$

bulunur. Baskakov operatörlerinde $e_m(t) = t^m, m = 0, 1, 2$ fonksiyonları için bulunan momentler kullanıldığında

$$L_{n,a}^{\alpha,\beta}(e_3, x) = \frac{1}{[M_\beta(n)]^3} \left\{ \frac{n^3}{\ddot{U}_3(n)} [n^3 B_n^a(t^3, x)] + 6n^2 B_n^a(t^2, x) \right.$$

$$+ 11n B_n^a(t, x) + 6 + \frac{(3n^2 \alpha)}{\ddot{U}_2(n)} [n^2 B_n^a(t^2, x) + 3n B_n^a(t, x) + 2]$$

$$\left. + \frac{(3n^2 \alpha)}{\ddot{U}_1(n)} [n B_n^a(t, x) + 1] + \alpha^3 \right\}$$

$$= x^3 \left\{ \frac{n^3}{[M_\beta(n)]^3 \ddot{U}_3(n)} \left(\frac{a^3}{(1+x)^3} + \frac{3a^2 n}{(1+x)^2} + \frac{3an(n+1)}{1+x} + n(n+1)(n+2) \right) \right\}$$

$$+ x^2 \left\{ \frac{9n^3 + 3n^2 a(n-3)}{[M_\beta(n)]^3 \ddot{U}_3(n)} \left(\frac{a^2}{(1+x)^2} + \frac{2an}{1+x} + n(n+1) \right) \right\}$$

$$+ x \left\{ \frac{18n^3 + 12n^2 a(n-3) + 3na^2(n-2)(n-3)}{[M_\beta(n)]^3 \ddot{U}_3(n)} \left(\frac{a}{1+x} + n \right) \right\}$$

$$+ \left\{ \frac{6n^3 + 6n^2 a(n-3) + 3na^2(n-2)(n-3)}{[M_\beta(n)]^3 \ddot{U}_3(n)} + \frac{a^3}{[M_\beta(n)]^3} \right\}$$

elde edilir.

Son olarak da “Eş. 1.3” de tanımlanan $L_{n,a}^{\alpha,\beta}(e_m(t), x)$ operatörlerinde $e_m(t) = t^4$ için moment hesabı, $e_m(t) = t^m, m = 0, 1, 2, 3$ hesaplanırken uygulanan işlemlerim benzerleri yapılarak

$$\begin{aligned}
L_{n,a}^{\alpha,\beta}(e_4, x) &:= \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) \frac{1}{B(k+1, n)} \int_0^{\infty} \frac{t^k}{(1+t)^{n+k+1}} \left(\frac{nt + \alpha}{n + \beta} \right)^4 dt, \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) \frac{1}{B(k+1, n)} \frac{1}{(n + \beta)^4} \left\{ n^4 \int_0^{\infty} \frac{t^{k+4}}{(1+t)^{n+k+1}} dt \right. \\
&\quad + n^3 \alpha \int_0^{\infty} \frac{t^{k+3}}{(1+t)^{n+k+1}} dt + 6n^2 \alpha^2 \int_0^{\infty} \frac{t^{k+2}}{(1+t)^{n+k+1}} dt \\
&\quad \left. + 4n\alpha^3 \int_0^{\infty} \frac{t^{k+1}}{(1+t)^{n+k+1}} dt + \alpha^4 \int_0^{\infty} \frac{t^k}{(1+t)^{n+k+1}} dt + 4 \right\}
\end{aligned}$$

dır. Burada her bir integral için $B(x, y)$ eşitliği kullanıldığında

$$\begin{aligned}
L_{n,a}^{\alpha,\beta}(e_4, x) &:= \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) \frac{1}{B(k+1, n)} \frac{1}{(n + \beta)^4} \{ n^4 B(k+5, n-4) \\
&\quad + 4n^3 \alpha B(k+4, n-3) + 6n^2 \alpha^2 B(k+3, n-2) \\
&\quad + 4n\alpha^3 B(k+2, n-1) + \alpha^4 B(k+1, n) \} \\
&= \frac{1}{[M_{\beta}(n)]^4} \left\{ \frac{n^4}{\ddot{U}_4(n)} \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) (k^4 + 10k^3 + 35k^2 + 50k + 24) \right. \\
&\quad \left. + \frac{4n^3 \alpha}{\ddot{U}_3(n)} \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) (k^3 + 6k^2 + 11k + 6) \right.
\end{aligned}$$

$$+ \frac{6n^2\alpha^2}{\ddot{U}_2(n)} \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) (k^2 + 3k + 2) + \frac{4n\alpha^3}{\ddot{U}_1(n)} \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x) (k + 1) + \alpha^4 \Big\},$$

elde edilir. Burada Baskakov operatörlerinde bulunan $e_m(t) = t^m, m = 0, 1, 2, 3$ fonksiyonları için momentler kullanıldığında;

$$L_{n,a}^{\alpha,\beta}(e_4, x) = \frac{1}{[M_\beta(n)]^4} \left\{ \frac{n^4}{\ddot{U}_4(n)} [n^4 B_n^a(t^4, x) + 10n^3 B_n^a(t^3, x) \right.$$

$$+ 35n^2 B_n^a(t^2, x) + 50n B_n^a(t, x) + 24]$$

$$+ \frac{4n^3\alpha}{\ddot{U}_3(n)} [n^3 B_n^a(t^3, x) + 6n^2 B_n^a(t^2, x) + 11n B_n^a(t, x) + 6]$$

$$+ \frac{6n^2\alpha^2}{\ddot{U}_2(n)} [n^2 B_n^a(t^2, x) + 3n B_n^a(t, x) + 2]$$

$$+ \frac{4n\alpha^3}{\ddot{U}_1(n)} [n B_n^a(t, x) + 1] + \alpha^4 \Big\}$$

yazılır ve gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$L_{n,a}^{\alpha,\beta}(e_4, x) := \left\{ \frac{n^4}{[M_\beta(n)]^4 \ddot{U}_4(n)} \left(\frac{a^4}{(1+x)^4} + \frac{4a^3 n}{(1+x)^3} \right. \right. \\ + \frac{6a^2 n(n+1)}{(1+x)^2} \frac{4an(n+1)(n+2)}{1+x} + n(n+1)(n+2)(n+3) \Big\} x^4 \\ + \left\{ \frac{16n^4 + 4n^3 \alpha(n-4)}{[M_\beta(n)]^4 \ddot{U}_4(n)} \left(\frac{a^3}{(1+x)^3} + \frac{3a^2 n}{(1+x)^2} \right. \right. \\ + \frac{3an(n+1)}{1+x} + n(n+1)(n+2) \Big\} x^3$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \frac{72n^4 + 36n^3 \alpha(n-4) + 6n^2 \alpha^2(n-3)(n-4)}{[M_\beta(n)]^4 \ddot{U}_4(n)} \left(\frac{a^2}{(1+x)^2} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{2an}{1+x} + n(n+1) \right) \right\} x^2 \\
& + \left\{ \frac{96n^4 + 72n^3 \alpha(n-4) + 24n^2 \alpha^2(n-3)(n-4)}{[M_\beta(n)]^4 \ddot{U}_4(n)} \right. \\
& \left. + \frac{4n\alpha^3(n-2)(n-3)(n-4)}{[M_\beta(n)]^4 \ddot{U}_4(n)} \left(\frac{a}{1+x} + n \right) \right\} x \\
& + \left\{ \frac{24n^4 + 24n^3 \alpha(n-4) + 12n^2 \alpha^2(n-3)(n-4)}{[M_\beta(n)]^4 \ddot{U}_4(n)} \right. \\
& \left. + \frac{4n\alpha^3(n-2)(n-3)(n-4)}{[M_\beta(n)]^4 \ddot{U}_4(n)} + \frac{a^4}{[M_\beta(n)]^4} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Yaklaşım hızı, yaklaşımlar teorisinin önemli bir problemidir. Bu tez de Genelleştirilmiş Baskakov-Durrmeyer-Stancu tipi operatörler için yaklaşım hızı süreklilik modülü kullanılarak hesaplanmıştır. Öncelik ile Tanım 4 den $L_n(f; x)$ keyfi bir lineer pozitif operatör dizisi olmak üzere $\|L_n(f; x) - f(x)\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ olmasından dolayı $L_n(f; x)$ in $f(x)$ 'e düzgün yaklaşır. Burada α_n ler $L_n(f; x)$ operatörü ve f fonksiyonuna bağlı olarak değişirler. Yaklaşımlar teorisinde yaklaşım hızı problemi olarak kullanılan bu hesaplamayı yapmak için farklı yollar kullanılır.

Genelleştirilmiş Baskakov-Durrmeyer- Stancu tip operatörlerin Voronovskaja tip teorem ile yaklaşım hızlarını elde edebilmek için ilk önce bu operatörlerin süreklilik modüllerini veren aşağıdaki Lemma 3.2 verilecektir.

4.2. Lemma

Aşağıdaki limitler mevcuttur.

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} n L_{n,a}^{\alpha,\beta}((t-x)^2; x) = 2x^2 + x$$

$$ii) \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 L_{n,a}^{\alpha,\beta}((t-x)^4; x) = 12x^4 - \left(\frac{12\alpha^2}{1+x} - 24 \right) x^3 - (6\alpha^2 - 6\alpha - 12)x^2.$$

İspat

$L_{n,a}^{\alpha,\beta}(f(t), x)$ operatörlerinin lineerlik özelliğinden ve Lemma 2.2 nin ihtiyaç duyulan sonuçları kullanılarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n L_{n,a}^{\alpha,\beta}((t-x)^2; x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n (L_{n,a}^{\alpha,\beta}(t^2, x) - 2x L_{n,a}^{\alpha,\beta}(t, x) + x^2 L_{n,a}^{\alpha,\beta}(1, x))$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ \frac{1}{[M_\beta(n)]^2 \ddot{U}_2(n)} \left(\frac{a^2 n^2}{(1+x)^2} + \frac{2an^3}{(1+x)} + n^3(n+1) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{M_\beta(n) \ddot{U}_1(n)} \left(\frac{2na}{1+x} + 2n^2 \right) + 1 \right\} x^2 \\ &+ \left\{ \frac{4n^2 + 2n(n-2)\alpha}{[M_\beta(n)]^2 \ddot{U}_2(n)} \left(\frac{a}{1+x} + n \right) - \frac{2n}{M_\beta(n) \ddot{U}_1(n)} - \frac{2\alpha}{M_\beta(n)} \right\} x \\ &+ \left\{ \frac{2n^2 + 2n(n-2)\alpha}{[M_\beta(n)]^2 \ddot{U}_2(n)} + \frac{\alpha^2}{[M_\beta(n)]^2} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n L_{n,a}^{\alpha,\beta}((t-x)^2; x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{1}{[M_\beta(n)]^2 \ddot{U}_2(n)} \left\{ \frac{1}{(1+x)^2} (a^2 n^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(1+x)} (4an^2 + 4an\beta - 2an^2\beta) + 2n^3 + n^2\beta^2 + 2n^2\beta \right\} \end{aligned}$$

$$+2n^2 - 3n\beta^2 - 4n\beta + 2\beta^2\}x^2$$

$$+ \left\{ \frac{1}{(1+x)} (4an^2 - 4an\alpha + 2an^2\alpha) + 4\alpha\beta - 4n\beta - 4n\alpha \right.$$

$$+ 2n^2\alpha + 2n^2\beta + 4n^2 + 2n^3 - 6n\alpha\beta + 2n^2\alpha\beta\}x$$

$$+ n^2\alpha^2 + 2n^2\alpha + 2n^2 - 3n\alpha^2 - 4n\alpha + 2\alpha^2\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n L_{n,a}^{\alpha,\beta}((t-x)^2; x) = 2x^2 + 2x$$

elde edilir.

ii) Benzer olarak $L_{n,a}^{\alpha,\beta}(f(t), x)$ lineerlik özelliği kullanıldığında

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 L_{n,a}^{\alpha,\beta}((t-x)^4; x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left\{ (L_{n,a}^{\alpha,\beta}(t^4, x) - 4xL_{n,a}^{\alpha,\beta}(t^3, x) \right.$$

$$+ 6x^2L_{n,a}^{\alpha,\beta}(t^2, x) - 4x^3L_{n,a}^{\alpha,\beta}(t, x) + x^4 \left. \right\}$$

olarak yazılır. Ardından Lemma 2.2 nin sonuçları kullanılarak

$$\begin{aligned} L_{n,a}^{\alpha,\beta}((t-x)^4; x) &= \left\{ \frac{n^4}{[M_\beta(n)]^4 \ddot{U}_4(n)} \left(\frac{a^4}{(1+x)^4} + \frac{4a^3n}{(1+x)^3} \right. \right. \\ &+ \frac{6a^2n(n+1)}{(1+x)^2} + \frac{4an(n+1)(n+2)}{1+x} + n(n+1)(n+2)(n+3) \left. \left. \right) \right\} x^4 \\ &+ \left\{ \frac{16n^4 + 4n^3\alpha(n-4)}{[M_\beta(n)]^4 \ddot{U}_4(n)} \left(\frac{a^3}{(1+x)^3} + \frac{3a^2n}{(1+x)^2} \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3an(n+1)}{1+x} + n(n+1)(n+2) \Big) x^3 \Big\} \\
& + \left\{ \frac{72n^4 + 36n^3 \alpha(n-4) + 6n^2 \alpha^2(n-3)(n-4)}{[M_\beta(n)]^4 \ddot{U}_4(n)} \left(\frac{a^2}{(1+x)^2} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{2an}{1+x} + n(n+1) \right) \right\} x^2 \\
& + \left\{ \frac{96n^4 + 72n^3 \alpha(n-4) + 24n^2 \alpha^2(n-3)(n-4)}{[M_\beta(n)]^4 \ddot{U}_4(n)} \right. \\
& \left. + \frac{4n\alpha^3(n-2)(n-3)(n-4)}{[M_\beta(n)]^4 \ddot{U}_4(n)} \left(\frac{a}{1+x} + n \right) \right\} x \\
& + \left\{ \frac{24n^4 + 24n^3 \alpha(n-4) + 12n^2 \alpha^2(n-3)(n-4)}{[M_\beta(n)]^4 \ddot{U}_4(n)} \right. \\
& \left. + \frac{4n\alpha^3(n-2)(n-3)(n-4)}{[M_\beta(n)]^4 \ddot{U}_4(n)} + \frac{a^4}{[M_\beta(n)]^4} \right\} \\
& - 4 \left\{ \frac{n^3}{[M_\beta(n)]^3 \ddot{U}_3(n)} \left(\frac{a^3}{(1+x)^3} + \frac{3a^2n}{(1+x)^2} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{3an(n+1)}{1+x} + n(n+1)(n+2) \right) \right\} x^4 \\
& - 4 \left\{ \frac{9n^3 + 3n^2 a(n-3)}{[M_\beta(n)]^3 \ddot{U}_3(n)} \left(\frac{a^2}{(1+x)^2} + \frac{2an}{1+x} + n(n+1) \right) \right\} x^3 \\
& - 4 \left\{ \frac{18n^3 + 12n^2 a(n-3) + 3na^2(n-2)(n-3)}{[M_\beta(n)]^3 \ddot{U}_3(n)} \left(\frac{a}{1+x} + n \right) \right\} x^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4 \left\{ \frac{6n^3 + 6n^2a(n-3) + 3na^2(n-2)(n-3)}{[M_\beta(n)]^3 \ddot{U}_3(n)} + \frac{a^3}{[M_\beta(n)]^3} \right\} x \\
& + \left\{ \frac{n^2}{[M_\beta(n)]^2 \ddot{U}_2(n)} \left(\frac{a^2}{(1+x)^2} + \frac{2an}{1+x} + n(n+1) \right) \right\} x^4 \\
& + 6 \left\{ \frac{4n^2 + 2na(n-2)}{[M_\beta(n)]^2 \ddot{U}_2(n)} \left(\frac{a}{1+x} + n \right) \right\} x^3 \\
& + 6 \left\{ \frac{2n^2 + 2na(n-2)}{[M_\beta(n)]^2 \ddot{U}_2(n)} + \frac{\alpha^2}{[M_\beta(n)]^2} \right\} x^2 \\
& - 4 \left\{ \frac{n}{M_\beta(n) \ddot{U}_1(n)} \left(\frac{a}{1+x} + n \right) \right\} x^4 \\
& - 4 \left\{ \frac{n}{M_\beta(n) \ddot{U}_1(n)} + \frac{a}{M_\beta(n)} \right\} x^3 + x^4
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}
L_{n,a}^{\alpha,\beta}((t-x)^4; x) &= \left\{ \frac{n^4}{[M_\beta(n)]^4 \ddot{U}_4(n)} \left(\frac{a^4}{(1+x)^4} + \frac{4a^3n}{(1+x)^3} + \frac{6a^2n(n+1)}{(1+x)^2} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{4an(n+1)(n+2)}{1+x} + n(n+1)(n+2)(n+3) \right) \right. \\
& - \frac{4n^3}{[M_\beta(n)]^3 \ddot{U}_3(n)} \left(\frac{a^3}{(1+x)^3} + \frac{3a^2n}{(1+x)^2} + \frac{3an(n+1)}{1+x} + n(n+1)(n+2) \right) \\
& \left. + \frac{6n^2}{[M_\beta(n)]^2 \ddot{U}_2(n)} \left(\frac{a^2}{(1+x)^2} + \frac{2an}{1+x} + n(n+1) \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{4n}{M_\beta(n)\ddot{U}_1(n)}\left(\frac{a}{1+x}+n\right)+1\Big\}x^4 \\
& +\left\{\frac{16n^4+4n^3a(n-4)}{[M_\beta(n)]^4\ddot{U}_4(n)}\left(\frac{a^3}{(1+x)^3}+\frac{3a^2n}{(1+x)^2}\right.\right. \\
& \left.\left.+\frac{3an(n+1)}{1+x}+n(n+1)(n+2)\right)\right. \\
& -\frac{36n^3+12n^2a(n-3)}{[M_\beta(n)]^3\ddot{U}_3(n)}\left(\frac{a^2}{(1+x)^2}+\frac{2an}{1+x}+n(n+1)\right) \\
& +\frac{24n^2+12na(n-2)}{[M_\beta(n)]^2\ddot{U}_2(n)}\left(\frac{a}{1+x}+n\right)-\left(\frac{4n}{M_\beta(n)\ddot{U}_1(n)}+\frac{4a}{M_\beta(n)}\right)\Big\}x^3 \\
& +\left\{\frac{72n^4+36n^3a(n-4)+6n^2a(n-3)(n-4)}{[M_\beta(n)]^4\ddot{U}_4(n)}\left(\frac{a^2}{(1+x)^2}+\frac{2an}{1+x}+n(n+1)\right)\right. \\
& -\frac{72n^3+48n^2a(n-3)+12na^2(n-2)(n-3)}{[M_\beta(n)]^3\ddot{U}_3(n)}\left(\frac{a}{1+x}+n\right) \\
& +\frac{12n^2+12na(n-2)}{[M_\beta(n)]^2\ddot{U}_2(n)}+\frac{6\alpha^2}{[M_\beta(n)]^2}\Big\}x^2 \\
& +\left\{\frac{96n^4+72n^3\alpha(n-4)+24n^2\alpha^2(n-3)(n-4)}{[M_\beta(n)]^4\ddot{U}_4(n)}\left(\frac{a}{1+x}+n\right)\right. \\
& +\frac{4n\alpha^3(n-2)(n-3)(n-4)}{[M_\beta(n)]^4\ddot{U}_4(n)}\left(\frac{a}{1+x}+n\right) \\
& -\frac{24n^3+24n^2\alpha^2(n-3)+12n\alpha^2(n-2)(n-3)}{[M_\beta(n)]^3\ddot{U}_3(n)}-\frac{4\alpha^3}{[M_\beta(n)]^3}\Big\}x
\end{aligned}$$

$$+ \frac{24n^4 + 24n^3\alpha(n-4) + 12n^2\alpha^2(n-3)(n-4) + 4n\alpha^3(n-2)(n-3)(n-4)}{[M_\beta(n)]^4 \ddot{U}_4(n)}$$

$$+ \frac{\alpha^4}{[M_\beta(n)]^4}$$

elde edilir.

Böylece operatörler n^2 ile çarpılıp $n \rightarrow \infty$ için limit alındığında

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 L_{n,a}^{\alpha,\beta}((t-x)^4; x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \frac{1}{[M_\beta(n)]^4 \ddot{U}_4(n)} \left\{ \left[\frac{a^4 n^4}{(1+x)^4} + \frac{1}{(1+x)^3} (16n^3 a^4 \right. \right. \\ &+ 16n^3 a^3 \beta - 4a^3 n^4 \beta) + \frac{1}{(1+x)^2} (6a^2 \beta^2 n^4 - 42a^2 \beta^2 n^3 + 72a^2 \beta^2 n^2 \\ &- 36a^2 \beta n^4 + 144a^2 \beta n^3 + 12a^2 n^5 + 72a^2 \alpha^4) \\ &+ \frac{1}{(1+x)} (-4a\beta^3 n^4 + 36a\beta^3 n^3 - 104a\beta^3 n^2 + 96a\beta^3 n + 24a\beta^2 n^4 \\ &- 168a\beta^2 n^3 + 288a\beta^2 n^2 - 24a\beta n^5 + 24a\beta n^4 + 288a\beta n^3 + 96an^5 + 96an^4) \\ &+ \beta^4 n^4 - 10\beta^4 n^3 + 35\beta^4 n^2 - 50\beta^4 n + 24\beta^4 - 4\beta^3 n^4 + 36\beta^3 n^3 \\ &- 104\beta^3 n^2 + 96\beta^3 n + 12\beta^2 n^5 - 72\beta^2 n^4 + 60\beta^2 n^3 + 144\beta^2 n^2 - 72\beta n^5 \\ &+ 264\beta n^4 + 96\beta n^3 + 12n^6 + 156n^5 + 24n^4] x^4 \\ &+ \left[\frac{1}{(1+x)^3} (16a^3 n^4 - 16a^3 n^3 \alpha + 4a^3 n^4 \alpha) + \frac{1}{(1+x)^2} (144a^2 n^4 + 12a^2 n^5 \right. \\ &+ 144a^2 n^3 \beta - 36a^2 n^4 \beta - 144a^2 \alpha n^3 + 36a^2 \alpha n^4 - 144a^2 \alpha n^2 \beta \\ &+ 84a^2 \alpha n^3 \beta - 12a^2 \alpha n^4 \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{(1+x)} (576a\beta n^3 - 48a\beta n^4 - 24a\beta n^5 - 288\alpha^2 n^3 + 24\alpha^2 n^4 + 60\alpha^2 n^5 \\
& - 12\alpha^2 n^6 + 288a\beta^2 n^2 - 168a\beta^2 n^3 + 24a\beta^2 n^4 + 288an^4 + 168an^5 \\
& - 576\beta\alpha^2 n^2 - 288\beta^2\alpha^2 n + 336\beta\alpha^2 n^3 - 48\beta\alpha^2 n^4 + 312\beta^2\alpha^2 n^2 \\
& - 108\beta^2\alpha^2 n^3 + 12\beta^2\alpha^2 n^4) \\
& + 72an^5 - 96an^3 - 264an^4 - 96a\beta^3 + 288\beta n^3 + 96\beta^3 n + 408\beta n^4 \\
& - 120\beta n^5 + 288\beta^2 n^2 - 24\beta^2 n^3 - 104\beta^3 n^2 - 60\beta^2 n^4 + 36\beta^3 n^3 \\
& + 12\beta^2 n^5 + 4\beta^3 n^4 + 96n^4 + 360n^5 + 24n^6 - 288a\beta n^2 - 288a\beta^2 n \\
& - 120a\beta n^3 + 200a\beta^3 n + 144a\beta n^4 - 24a\beta n^5 + 312a\beta^2 n^2 - 108a\beta^2 n^3 \\
& - 140a\beta^3 n^2 + 12a\beta^2 n^4 + 40a\beta^3 n^3 - 4a\beta^3 n^4]x^3 \\
& + \left[\frac{1}{(1+x)^2} (94a^2 n^4 + 72a^2 \alpha n^2 - 186a^2 \alpha n^3 + 42a^2 \alpha n^4) \right. \\
& + \frac{1}{(1+x)} (288an^4 - 72an^5 + 188a^3 n^5 - 576a\alpha n^3 + 336a\alpha n^4 - 48a\alpha n^5 \\
& - 288an^3\beta + 72an^4\beta + 288a\alpha^2 n^2 - 312a\alpha^2 n^3 + 108a\alpha^2 n^4 + 144a^3 \alpha n^3 \\
& - 12a\alpha^2 n^5 - 372a^3 \alpha n^4 + 84a^3 \alpha n^5 + 312a\alpha^2 n^2\beta - 108a\alpha^2 n^3\beta + 12a\alpha^2 n^4\beta \\
& + 576a\alpha n^2\beta - 288a\alpha^2 n\beta - 336a\alpha n^3\beta + 48a\alpha n^4\beta) \\
& - 6c^2 n^6 + 48c^2 n^5 + 6c^2 n^4\beta^2 - 12c^2 n^4\beta - 102c^2 n^4 - 60c^2 n^3\beta^2 + 108c^2 n^3\beta \\
& - 12c^2 n^3 + 210c^2 n^2\beta^2 - 312c^2 n^2\beta + 144c^2 n^2 - 300c^2 n\beta^2 + 288c^2 n\beta \\
& \left. + 144c^2\beta^2 + 6cn^6 - 24cn^5\beta + 84cn^5 + 12cn^4\beta^2 + 120cn^4\beta - 378cn^4 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -108 cn^3\beta^2 + 48cn^3\beta - 216cn^3 + 312cn^2\beta^2 - 576 cn^2\beta - 288cn\beta^2 \\
& + 12n^6 - 48n^5\beta + 276n^5 + 12 n^4\beta^2 + 120n^4\beta + 144n^4 - 84n^3\beta^2 \\
& + 288n^3\beta + 144n^2\beta^2]x^2 \\
& + \left[\frac{1}{(1+x)} (4a\alpha^3n^4 - 36a\alpha^3n^3 + 104a\alpha^3n^2 - 96a\alpha^3n + 24a\alpha^2n^4 \right. \\
& - 168a\alpha^2n^3 + 288a\alpha^2n^2 + 72a\alpha n^4 - 288a\alpha n^3 + 966an^4) \\
& + 48cn^5 - 96c^3n - 120cn^4 - 288cn^3 - 96c^3\beta + 96n^3\beta - 24n^4\beta + 288c^2n^2 \\
& - 24c^2n^3 + 104 c^3n^2 - 60c^2n^4 - 36c^3n^3 + 12c^2n^5 + 4c^3n^4 + 96n^4 + 72n^5 \\
& - 312c^2n^2\beta + 108c^2n^3\beta - 140 c^3n^2\beta - 12c^2n^4\beta + 40c^3n^3\beta - 4c^3n^4\beta \\
& - 288 cn^2\beta + 288c^2n\beta + 168cn^3\beta + 200c^3n\beta - 24 cn^4\beta]x \\
& + [\alpha^4n^4 - 10\alpha^4n^3 + 35\alpha^4n^2 - 50\alpha^4n + 24\alpha^4 + 4\alpha^3n^4 - 36\alpha^3n^3 + 104\alpha^3n^2 \\
& - 96\alpha^3n + 12\alpha^2n^4 - 84\alpha^2n^3 + 144\alpha^2n^2 + 24\alpha n^4 - 96\alpha n^3 + 24n^4]\}
\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 L_{n,a}^{\alpha,\beta}((t-x)^4; x) = 12x^4 - \left(\frac{12\alpha^2}{1+x} - 24 \right) x^3 - (6\alpha^2 - 6\alpha - 12)x^2$$

elde edilir.

f fonksiyonların kümesi olmak üzere $[0, \infty)$ dan $\mathbb{R}$ ye tanımlanan $B_\rho[0, \infty)$ için büyüme koşulu, $|f(x)| \leq N_f \rho(x)$ dir. Burada $\rho(x) = 1 + x^2$ ve N_f sadece f ye bağlı bir sabit olup $B_\rho[0, \infty)$ uzayı için bir norm $\|f\|_\rho = \sup \left\{ \frac{|f(x)|}{\rho(x)} : x \in \mathbb{R} \right\}$ ile tanımlanır.

$B_\rho[0, \infty)$ ve $C_\rho^*[0, \infty)$ sürekli fonksiyonların alt uzayı olup $C_\rho[0, \infty)$ için $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{\rho(x)}$ dir.

Şimdi ise $L_{n,a}^{\alpha,\beta}(f(t); x)$ için Lemma 2.2 ve Lemma 3.2 yardımıyla Voronovskaja tip teoremi verilsin.

Teorem 1

$C_\rho^*[0, \infty)$ sürekli fonksiyonların bir alt uzayı olsun. $C_\rho[0, \infty)$ için $f \in C_\rho^*[0, \infty)$ ve $f', f'' \in C_\rho^*[0, \infty)$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(L_{n,a}^{\alpha,\beta}(f(t); x) - f(x)) = f'(x) \left\{ \left(\frac{a - \beta + 1 - \beta x}{1 + x} \right) x + \alpha + 1 \right\} \\ + f''(x) \left\{ \left(\frac{x^2 + 2x - ax + 1 - a}{(1 + x)^2} \right) x^2 - \frac{x}{2} \right\}$$

dir.

İspat:

Taylor teoreminin genişlemesinden

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t - x) + \frac{1}{2}f''(x)(t - x)^2 + \varepsilon(t, x)(t - x)^2 \quad (4.3)$$

yazılır. Burada $t \rightarrow x$ iken $\varepsilon(t, x) \rightarrow 0$ a dır. “Eş. 4.3” eşitliğine $L_{n,a}^{\alpha,\beta}(f(t); x)$ operatörleri uygulandığında;

$$L_{n,a}^{\alpha,\beta}(f(t); x) = f(x) + f'(x)L_{n,a}^{\alpha,\beta}((t - x); x) + \frac{1}{2}f''(x)L_{n,a}^{\alpha,\beta}((t - x)^2; x) \\ + L_{n,a}^{\alpha,\beta}(\varepsilon(t, x)(t - x)^2; x)$$

olur. Burada Lemma 2.2 kullanılarak

$$L_{n,a}^{\alpha,\beta}(f(t); x) = f(x)$$

$$\begin{aligned}
& +f'(x) \left[\left\{ \frac{n}{M_\beta(n)\ddot{U}_1(n)} \left(\frac{a}{1+x} + n \right) - 1 \right\} x + \frac{n}{M_\beta(n)\ddot{U}_1(n)} + \frac{a}{M_\beta(n)} \right] \\
& + \frac{1}{2} f''(x) \left[\frac{n^2}{[M_\beta(n)]^2 \ddot{U}_2(n)} \left(\frac{a^2}{(1+x)^2} + \frac{2an}{1+x} + n(n+1) \right) \right. \\
& + \left. \left\{ \frac{4n^2 + 2na(n-2)}{[M_\beta(n)]^2 \ddot{U}_2(n)} \left(\frac{a}{1+x} + n \right) \right\} x \right. \\
& + \left. \left\{ \frac{2n^2 + 2na(n-2)}{[M_\beta(n)]^2 \ddot{U}_2(n)} + \frac{\alpha^2}{[M_\beta(n)]^2} \right\} \right. \\
& - 2 \left\{ \frac{n}{M_\beta(n)\ddot{U}_1(n)} \left(\frac{a}{1+x} + n \right) \right\} x^2 - \frac{2n}{M_\beta(n)\ddot{U}_1(n)} x \\
& \left. - \frac{2a}{M_\beta(n)} x + x^2 \right] + L_{n,a}^{\alpha,\beta}(\varepsilon(t,x)(t-x)^2; x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$L_{n,a}^{\alpha,\beta}(\varepsilon(t,x)(t-x)^2; x)$ terimi için Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanıldığında,

$$L_{n,a}^{\alpha,\beta}(\varepsilon(t,x)(t-x)^2; x) \leq \left(L_{n,a}^{\alpha,\beta}(\varepsilon(t,x)^2; x) \right)^{\frac{1}{2}} \left(n^2 L_{n,a}^{\alpha,\beta}((t-x)^4; x) \right)^{\frac{1}{2}}$$

ve buradan eşitsizliğin her iki tarafını n ile çarpıp $n \rightarrow \infty$ için limit alındığında

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n L_{n,a}^{\alpha,\beta}(\varepsilon(t,x)(t-x)^2; x) \leq \left(\lim_{n \rightarrow \infty} L_{n,a}^{\alpha,\beta}(\varepsilon(t,x)^2; x) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 L_{n,a}^{\alpha,\beta}((t-x)^4; x) \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği bulunur.

$\lim_{n \rightarrow \infty} n L_{n,a}^{\alpha,\beta}(\varepsilon(t,x)^2; x) = 0$ ve Lemma 4.2 deki (ii) den $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 L_{n,a}^{\alpha,\beta}((t-x)^4; x)$ sonlu olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n L_{n,a}^{\alpha,\beta}(\varepsilon(t,x)(t-x)^2;x) = 0$$

elde edilir.

Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(L_{n,a}^{\alpha,\beta}(f(t);x) - f(x)) = f'(x) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{M_\beta(n)\ddot{U}_1(n)(1+x)} \{an^2 - \beta n^2 + n^2x \right.$$

$$+ \beta n + n^2 - \beta n^2x + \beta nx\}x + \frac{n^2 - \alpha n + n^2\alpha}{M_\beta(n)\ddot{U}_1(n)} \Bigg)$$

$$+ \frac{1}{2} f''(x) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{[M_\beta(n)]^2 \ddot{U}_2(n)(1+x)^2} \{a^2 n^3 - 2an^4x \right.$$

$$- 2an^4 - 2an^3x\beta + 6an^3x - 2an^3\beta + 6an^3 + 4an^2x\beta + 4an^2\beta$$

$$+ 2n^4x^2 + 4n^4x + 2n^4 + n^3x^2\beta^2 - 2n^3x^2\beta + 2n^3x^2 + 2n^3x\beta^2$$

$$- 4n^3x\beta + 4n^3x + n^3\beta^2 - 2n^3\beta + 2n^3 - 3n^2x^2\beta^2 + 4n^2x^2\beta$$

$$- 6n^2x\beta^2 + 8n^2x\beta - 3n^2\beta^2 + 4n^2\beta + 2nx^2\beta^2 + 4nx\beta^2 + 2n\beta^2\}x^2$$

$$+ \frac{1}{[M_\beta(n)]^2 \ddot{U}_2(n)} \{4an^3 - 4n^2\alpha + 4n^2\beta + 2n^3\alpha - 2n^3\beta$$

$$+ 4n^3 - n^4 - 4n\alpha\beta - 4an^2\alpha + 2an^3\alpha + 6n^2\alpha\beta - 2n^3\alpha\beta\}x$$

$$+ \frac{1}{[M_\beta(n)]^2 \ddot{U}_2(n)} \{n^3\alpha^2 + 2n^3\alpha + 2n^3 - 3n^2\alpha^2 - 4n^2\alpha + 2n\alpha^2\} \Bigg)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(L_{n,a}^{\alpha,\beta}(f(t);x) - f(x)) = f'(x) \left\{ \left(\frac{a - \beta + 1 - \beta x}{1+x} \right) x + \alpha + 1 \right\}$$

$$+f''(x)\left\{\left(\frac{x^2+2x-ax+1-a}{(1+x)^2}\right)x^2-\frac{x}{2}\right\}$$

olduğu görülür. Böylece teorem ispatlanmış olur.

5. SONUÇ

Baskakov-Durrmeyer-Stancu tip operatörler için dördüncü dereceye kadar Korovkin test fonksiyonları verilmiş, ardından bu operatörlerin bir genişlemesi olan Baskakov-Durrmeyer-Stancu operatörleri için yine dördüncü dereceye kadar Korovkin test fonksiyonları hesaplanmıştır. Bu bilgiler ışığında Baskakov-Durrmeyer-Stancu operatörlerin Voronovskaja tip yaklaşım teoremi verilerek asimtotik davranışı incelenmiştir [17].

KAYNAKLAR

1. Bohman, H. (1952). On approximation of continuous and of analytic functions. *Arkiv för Mathematics*, 2(1), 43-56.
2. Korovkin, P. P. (1953). On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. *Doklady Akademii Nauk. SSSR*, 90, 961-964.
3. Hacısalihoğlu, H. H., Hacıyev, A. (1995). *Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı*. Ankara: Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 20-45.
4. Miheşan V. (1998). Uniform Approximation with Positive Linear Operators Generated by Generalized Baskakov Method *Automatic Computation Applied Mathematics* 7, 34-37.
5. Wafi A., Khatoon S. (2004). On the Order of Approximation of Functions by Generalized Baskakov Operators. *Indian Jaul Pure Applied Mathematics.*, 35, 347-358.
6. Erençin A., Başcanbaz-Tunca G. (2010). Approximation Properties of a Class of Linear Positive Operators in Weighted Spaces. *Comptes Rendus del ' Acade'mie Bulgare des Sciences*, 63, 1397-1404.
7. Wafi A., Khatoon S. (2008). Convergence and Voronovskaja-Type Theorems for Derivatives of Generalized Baskakov Operators. *Centrel Europe Journal Mathematics*, 6, 325-334.
8. Stancu, D. D. (1983). Approximation of function by means of a new generalized Bernstein operator. *Calcolo*, 20(2), 211-229.
9. Gupta, V., and Srivastava, G. S. (1993). Simultaneous approximation by Baskakov-Szász type operators. *Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, 37(85), 73-85.
10. Erençin, A., Olgun, A., and Taşdelen, F. (2017). Generalized Baskakov type operators. *Mathematica Slovaca*, 67(5), 1269-1277.
11. Aral, A., Ulusoy, G., and Deniz, E. (2018). A new construction of Szász-Mirakyan operators. *Numerical Algorithms*, 77(2), 313-326.
12. Mishra, V. N., and Sharma, P. (2016). On approximation properties of Baskakov-Schurer-Szász operators. *Applied Mathematics and Computation*, 281, 381-393.
13. Mishra, V. N., Mursaleen, M., and Sharma, P. (2015). Some approximation properties of Baskakov-Szász-Stancu operators. *Applied Mathematics Information Sciences*, 9(6), 3159-3167.
14. Erençin A. (2011). Durrmeyer Type Modification of Generalized Baskakov Operators, *Applied Mathematics and Computation*, 218, 4384-4390.

15. Kumar, A. S., Finta, Z., and Agrawal, P. N. (2017). On generalized Baskakov-Durrmeyer-Stancu type operators, *Demonstratio Mathematica*, 50, 144-155.
16. Yüksel İ., Dinlemez Ü. (2014). Voronovskaja type approximation theorem for q-Szasz-Beta operators. *Applied Mathematics and Computation*, 235, 555-559.
17. Kantar Dinlemez Ü., Ergelen G. (2019). A Voronovskaja type theorem for a kind of Durrmeyer-Berstein-Stancu operators. *Gazi University Journal of Science*, 32(4), 1228-1236.
18. Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley & Sons Introductory.
19. Maddox, I. J. (1970). *Element of Functional Analysis*, London, UK: Cambridge University Press.
20. Anastassiou, G., Cottin, C., and Gonska, H. (1991). Global smoothness of approximating functions, *Analysis*, 11, 43-57.
21. Anastassiou, G., and Gonska, H. (1995). On some shift-invariant integral operators, univariate case, *Annales Polonici, Mathematics*. 50(53), 225-243.
22. Lorentz, G. G. (1953). *Bernstein polynomials*, Toronto: University of Toronto Press, 36.
23. Korovkin, P. P. (1953). On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 90, 961- 964.
24. Korovkin, P. P. (1960). Linear operators and approximation theory. *Russian Monographs and Texts on advanced Mathematics*, 3, 1-63.



GAZİ GELECEKTİR..