



q-BASKAKOV-DURRMEYER TİP OPERATÖRLERİN YAKLAŞIMI

Büşra CÖMERT

**YÜKSEK LİSANS
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HAZİRAN 2021

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu bildirir,
- aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Büşra CÖMERT

17/06/2021

q-BASKAKOV-DURRMEYER TİP OPERATÖRLERİN YAKLAŞIMI
(Yüksek Lisans Tezi)

Büşra CÖMERT

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2021

ÖZET

Bu tezde Agrawal ve Kumar[8] tarafından tanımlanan ve çalışılan q-Baskakov-Durrmeyer tip operatörlerinin yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Bu operatörlerin Korovkin tip yaklaşım teoremi ve yakınsama oranlarını tahmin eden bazı teoremler incelenmiştir ve bu operatörlerin ağırlıklı yaklaşım teoremi verilmiştir. Ayrıca Özkan ve Cömert[17] tarafından tanımlanan ve çalışılan iki değişkenli q-Baskakov-Durrmeyer tip operatörlerinin Volkov tip düzgün yakınsaklık ve Gadzhiev tip ağırlıklı yaklaşım teoremleri incelenmiştir.

Bilim Kodu : 20404
Anahtar Kelimeler : Operatörlerin yaklaşımı, q-beta fonksiyonu, q-genelleştirilmiş integral, düzgün yakınsaklık, yakınsama oranı, ağırlıklı yaklaşım
Sayfa Adedi : 47
Danışman : Doç. Dr. Esmâ YILDIZ ÖZKAN

APPROXIMATION OF q -BASKAKOV-DURRMEYER TYPE OPERATORS

(M. Sc. Thesis)

Büşra CÖMERT

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2021

ABSTRACT

In this thesis, the approximation properties of q -Baskakov-Durrmeyer type operators introduced and studied by Agrawal ve Kumar[8] are investigated. The Korovkin type approximation theorem and some theorems estimating the rate of convergence of these operators are investigated, and the weighted approximation theorem of these operators is given. Moreover, Volkov type uniform convergence and Gadzhiev type weighted approximation theorems of the bivariate q -Baskakov-Durrmeyer type operators introduced and studied by Özkan and Cömert[17] are investigated.

Science Code : 20404

Key Words : Approximation of operators, q -beta function, q -improper integral, uniform convergence, rate of convergence, weighted approximation

Page Number : 47

Supervisor : Assoc. Prof. Esma YILDIZ ÖZKAN

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, desteğini hiç esirgemeyen, tez danışmanım değerli hocam sayın Doç. Dr. Esmâ YILDIZ ÖZKAN'a en içten duygularıyla teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan annem Özgül CÖMERT'e, babam Ömer CÖMERT'e ve kardeşim Bekir Buğra CÖMERT'e teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Lineer Pozitif Operatörlerin Tanımı ve Özellikleri.....	3
2.2. q-Analiz'in Temel Kavramları	6
3. q-BASKAKOV-DURRMEYER TİP OPERATÖRLERİN YAKLAŞIMI	11
3.1. Tek Değişkenli Operatörlerin Tanımı ve Özellikleri	11
3.2. q- Baskakov-Durrmeyer Tip Operatörlerin Yaklaşım Özellikleri	12
3.2.1. Korovkin tip yaklaşım.....	12
3.2.2. Ağırlıklı yaklaşım.....	22
4. İKİ DEĞİŞKENLİ q-BASKAKOV-DURRMEYER TİP OPERATÖRLERİN YAKLAŞIMI	25
4.1. İki Değişkenli q-Baskakov-Durrmeyer Tip Operatörlerin Tanımı ve Özellikleri	25
4.2. İki Değişkenli q-Baskakov-Durrmeyer Tip Operatörlerin Yaklaşım Özellikleri	30
4.2.1. Volkov tip yaklaşım.....	35
4.2.2. Ağırlıklı yaklaşım	40
5. SONUÇLAR.....	4

	Sayfa
KAYNAKLAR	46
ÖZGEÇMİŞ	48



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler açıklamaları ile aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

$L_n(f; x)$	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir operatör dizisi
$M_n(f; x)$	q -Baskakov-Durrmeyer tip operatörler dizisi
$M_n(f; q, x)$	q -Baskakov-Durrmeyer tip operatörler dizisinin q -analoğu
$M_n(f; q_1, q_2, x, y)$	İki değişkenli q -Baskakov-Durrmeyer tip operatörler dizisinin q -analoğu
$C[a, b]$	$[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonların uzayı
(f_n)	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir fonksiyon dizisi
$\omega(f; \delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\omega(f; \delta_1, \delta_2)$	İki değişkenli f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\ f\ _{C[a,b]}$	$x \in [a, b]$ için $\ f\ _{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} f(x) $ ile tanımlanan norm
$K(f, \delta)$	f fonksiyonunun Peetre K -fonksiyoneli
$B(\alpha, r)$	Beta fonksiyonu

1. GİRİŞ

Agrawal ve Thamer [1], $[0, \infty)$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlara yaklaşan

$$M_n(f(t); x) = [n-1] \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}(x) \int_0^{\infty} P_{n,k-1}(t) f(t) dt + (1+x)^{-n} f(0) \quad (1.1)$$

olarak verdikleri Baskakov-Durrmeyer tip operatörleri tanımlamışlardır. Bu operatörlerin tanımında

$$P_{n,k}(x) = \binom{n+k-1}{k} x^k (1+x)^{-(n+k)}$$

gösterimi kullanılmıştır. Eş.1 ile tanımlı Baskakov-Durrmeyer tip operatörlerin yakınsama oranı Gupta [2] tarafından çalışılmıştır. Akabinde, Gupta ve Abel [3] Eş. 1'deki operatörün Bezier-Durrmeyer varyantını ele alarak sınırlı salınımlı fonksiyonlar için yakınsama oranı elde etmişlerdir.

Phillip'in [4] q-Bernstein polinomlarını tanımlaması ile q-calculus yaklaşım teorisinde ilgi duyulan bir çalışma alanı olmuştur. Durrmeyer operatörlerinin q- analoğu Gupta ve Heping [5] tarafından tanımlanmış ve yakınsama oranı verilmiştir. Bu çalışmaya ilave olarak Gupta [2] q-Durrmeyer operatörlerinin bazı yaklaşım özelliklerini incelemiştir.

Son zamanlarda, q-Baskakov operatörleri ve onun Kantorovich ve Durrmeyer varyantları Aral-Gupta [6] ve Gupta-Radu [7] ikililerinin çalışmalarıyla ele alınmıştır.

q-Baskakov-Durrmeyer tip operatörler Agrawal ve Kumar[8] tarafından $[0, \infty)$ aralığında sürekli ve sınırlı $\gamma > 0$ ve $t \rightarrow \infty$ iken $f(t) = O(t)^\alpha$ şartını sağlayan reel değerli f fonksiyonları için

$$M_n^q(f(t); x) = [n-1]_q \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}^q(x) \int_0^{\infty/A} q^{k-1} P_{n,k-1}^q(t) f(t) d_q t + P_{n,0}^q(x) f(0) \quad (1.2)$$

olarak tanımlanmıştır. Burada $k, n \in \mathbb{N}, 0 < q < 1, x \in [0, \infty)$ için

$$P_{n,k}^q(x) = \binom{n+k-1}{k}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}_q}$$

notasyonu kullanılmaktadır. $q \rightarrow 1$ iken Eş.2 ile verilen q-Baskakov-Durrmeyer tip operatör, Eş.1 ile verilmiş Baskakov- Durrmeyer tip operatöre indirgenir.

Bu tezde Agrawal ve Kumar [8] tarafından tanımlanan tek değişkenli ve Özkan ve Cömert [17] tarafından tanımlanan iki değişkenli q -Baskakov-Durrmeyer tip operatörlerin yaklaşım özellikleri araştırılmıştır.

Tezin birinci bölümünde tezin konusuyla ilgili literatürdeki çalışmalardan bahsedilerek teze giriş yapılmıştır. Tezin ikinci bölümünde tezin anlaşılmasını kolaylaştıracak bazı temel kavramlar sunulmuştur. Üçüncü bölümde Agrawal ve Kumar [8] tarafından tanımlanan tek değişkenli q - Baskakov-Durrmeyer tip operatörlerin tanımı ve özellikleri verilerek, bu operatörlerin yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde Özkan ve Cömert [17] tarafından tanımlanan iki değişkenli q -Baskakov-Durrmeyer tip operatörlerin tanımı ve özellikleri verilerek bu operatörlerin Volkov tip düzgün yakınsaklık teoremi ve Gadzhiev tip ağırlıklı yaklaşımı incelenmiştir.

2.TEMEL KAVRAMLAR

Tezin içeriğindeki birçok teoremin daha anlaşılır olması açısından aşağıdaki tanım ve teoremleri hatırlatalım.

2.1.Linear Pozitif Operatörlerin Tanımı ve Özellikleri

2.1.1. Tanım

X ve Y iki lineer fonksiyon uzayı olarak verilsin. Eğer X den alınan herhangi bir f fonksiyonuna Y de bir g fonksiyonu karşılık getiren L kuralı var ise buna X uzayında bir operatördür denir ve bu operatör $L(f, x) = g(x)$ [9] şeklinde gösterilir.

Burada $L(f; x) = L(f(t); x)$ olmak üzere L operatörü f fonksiyonunun bağlı olduğu t değişkenine göre uygulanmaktadır. Sonuç olarak x değişkenine bağlı bir fonksiyon elde edilir.

Bundan dolayı x değişkeni L operatöründe sabit gibidir ve $L(f(x); x) = f(x)L(1; x)$ şeklinde yazılabilir.

2.1.2. Tanım

X ve Y lineer fonksiyon uzayları olmak üzere,

$$L: X \rightarrow Y$$

şeklinde tanımlı L operatörü verilsin. Eğer her $f, g \in X$ ve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ için,

$$L(\alpha_1 f + \alpha_2 g; x) = \alpha_1 L(f; x) + \alpha_2 L(g; x)$$

koşulunu sağlıyorsa, L operatörüne lineer operatör denir[9].

2.1.3. Tanım

Eğer bir L operatörü pozitif değerli fonksiyonu yine pozitif değerli bir fonksiyona dönüştürüyor ise; yani f bir fonksiyon ve L bir operatör olmak üzere, $f \geq 0$ olduğunda $L(f; x) \geq 0$

oluyorsa, L operatörüne pozitif operatör denir.

Hem lineerlik hem pozitiflik şartını sağlayan operatöre lineer pozitif operatör denir. [9]

2.1.1. Lemma

Lineer pozitif operatörler monoton artandır. Yani $f \leq g$ ise $L(f) \leq L(g)$ eşitsizliği sağlanır[9].

İspat

Kabul edelim ki, $f \leq g$ olsun. Bu durumda, $g - f \geq 0$ olduğu için ve L pozitif operatör olduğundan,

$$L(g - f) \geq 0 \quad (2.1)$$

şeklinde yazılabilir. Öte yandan, L operatörü lineer olduğundan,

$$L(g - f) = L(g) - L(f)$$

elde edilir. Bunun Eş. 2.1' de kullanılmasıyla $L(g) - L(f) \geq 0$ ise $L(f) \leq L(g)$ bulunur.

2.1.2. Lemma

L bir lineer pozitif operatör ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır,

$$|L(f)| \leq L(|f|).$$

İspat

Herhangi bir f fonksiyonu için,

$$-|f| \leq f \leq |f| \quad (2.2)$$

olarak yazılabilir. L operatörünün lineerlik, monotonluk özelliğinden ve Eş. 2.2 'den,

$$L(-|f|) \leq L(f) \leq L(|f|)$$

yazılabilir. Bu ise,

$$|L(f)| \leq L(|f|)$$

olduğunu gösterir [9].

2.1.4. Tanım

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $f_n(x)$ ifadesine bir fonksiyon dizisi denir. (f_n) ile gösterilir[21].

2.1.5 Tanım

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $L_n(f, x)$ e bir operatör dizi denir ve (L_n) ile gösterilir[20].

2.1.6. Tanım

$[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli ve reel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeye $C[a, b]$ fonksiyon uzayı denir. Bu uzay,

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanan $\|\cdot\|_{C[a,b]}$ normu ile normlu bir uzaydır[20].

2.1.7. Tanım

(f_n) , $C[a, b]$ içinde bir fonksiyon dizisi olsun. Eğer her $x \in [a, b]$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{C[a,b]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

şartı sağlanıyor ise (f_n) fonksiyon dizisi $[a, b]$ kapalı aralığında, f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir[20].

2.1.8. Tanım

$I = [0, r_1] \times [0, r_2]$ olmak üzere, $C(I)$, I üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonlar uzayı olsun. $C(I)$

$$\|f\|_{C(I)} = \max_{(x,y) \in I} |f(x, y)|$$

normu ile bir Banach uzayıdır[20].

2.1.9. Tanım

(f_{n_1, n_2}) , $C(I)$ üzerinde bir fonksiyon dizisi olmak üzere,

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \|f_{n_1, n_2} - f\|_{C(I)} = \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \max_{(x, y) \in I} |f_{n_1, n_2}(x, y) - f(x, y)| = 0$$

koşulu sağlanıyor ise (f_{n_1, n_2}) fonksiyon dizisi I üzerinde f 'ye düzgün yakınsaktır denir[20].

2.1.10. Tanım

$f \in C[a, b]$ olsun. Herhangi bir $\delta > 0$ için

$$\omega(f; \delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |t-x| \leq \delta}} |f(t) - f(x)| \quad (2.3)$$

ile tanımlanan $\omega(f; \delta)$ ifadesine f fonksiyonunun süreklilik modülü denir[9].

2.1.11. Tanım

(x_n) ve (y_n) herhangi iki reel sayı dizisi, $1 < p, q < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olacak şekilde p ve q iki sayı olsun. Eğer

$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q$ serileri yakınsaksa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{1/q}$$

eşitsizliğine Hölder eşitsizliği denir. Burada $p = q = 2$ alınırsa, bu eşitsizlik Cauchy-Schwarz eşitsizliği olarak bilinir [9].

2.1.12. Tanım

$0 \leq \alpha \leq 1$ olmak üzere;

$$|f(t) - f(x)| \leq M|t - x|^\alpha$$

Koşulunu sağlayan fonksiyonlara Lipschitz sınıfından fonksiyonlar, M ye de Lipschitz sabiti denir ve $f \in Lip_M(\alpha)$ ile gösterilir [22].

2.2. q-Analiz'in Temel Kavramları

Bu kısımda q-analiz'in temel kavramlarını hatırlayalım. Ayrıntılı bilgiler [10] referanslı kaynakta bulunabilir.

2.2.1 Tanım

$q > 0$ olmak üzere negatif olmayan herhangi bir n tamsayısı için n 'nin q -analoğu,

$$[n]_q = \begin{cases} \frac{q^n - 1}{q - 1} & , q \neq 1 \\ n & , q = 1 \end{cases} \quad (2.4)$$

olarak tanımlanır [10].

2.2.2. Tanım

$n \geq r \geq 0$ olmak üzere, q -faktöriyel

$$[n]_q! = \begin{cases} [1]_q [2]_q \dots [n]_q & , n = 1, 2, \dots \\ 1 & , n = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

olarak ifade edilir. Ayrıca q -binom katsayısı

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[n-r]_q! [r]_q!} \quad (2.6)$$

olarak ifade edilir ve $q = 1$ durumunda ifadenin klasik binom katsayısına indirgendiği Eş.

2.3'ten açıktır [10].

2.2.3. Tanım

Gamma ve Beta fonksiyonları Euler tarafından sırasıyla

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx, \quad t > 0 \quad (2.7)$$

ve

$$B(t, s) = \int_0^1 x^{t-1} (1-x)^{s-1} dx, \quad s, t > 0 \quad (2.8)$$

olarak tanımlanmıştır. Bu iki fonksiyon için aşağıdaki özellikler sağlanmaktadır:

$$(i) \quad \Gamma(t+1) = t\Gamma(t), \quad (2.9)$$

$$(ii) \quad \Gamma(n) = (n-1)!, n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.10)$$

$$(iii) \quad B(t, s) = \frac{\Gamma(t)\Gamma(s)}{\Gamma(t+s)}. \quad (2.11)$$

$t > 0$ için q - gamma fonksiyonu

$$\Gamma_q(t) = \int_0^\infty x^{t-1} E_q^{-qx} d_q x, \quad (2.12)$$

Burada E_q^{qx} , klasik e^x üstel fonksiyonunun q -analoğunu göstermektedir ve

$$E_q^{qx} = \sum_{j=0}^\infty q^{j(j-1)/2} \frac{x^j}{[j]_q!} \quad (2.13)$$

serisi ile tanımlıdır.

Ayrıca,

$$\int_0^{\infty} f(x) d_q x = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (1-q) f(q^j) q^j$$

dir.

q - gamma fonksiyonu aşağıdaki iki özelliği sağlamaktadır.

$$(i) \quad r_q(t+1) = [t] r_q(t) \quad (2.14)$$

$$(ii) \quad r_q(t+1) = [t]!. \quad (2.15)$$

$t, s > 0$ için q -beta fonksiyonu

$$B_q(t, s) = \int_0^1 x^{t-1} (1-qx)_q^{s-1} d_q x \quad (2.16)$$

olarak tanımlıdır.

q -Beta fonksiyonu için aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$(i) \quad B_q(t, n+1) = \frac{1-q^n}{1+q^{t+n}} B_q(t, n), \quad t > 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.17)$$

$$(ii) \quad B_q(t, 1) = \frac{1}{[t]_q}, \quad (2.18)$$

$$(iii) \quad B_q(t, n) = \frac{(1-q)(1-q)_q^{n-1}}{(1+q^t)_q^n}. \quad (2.19)$$

q -gamma ve q -beta fonksiyonları arasındaki ilişki

$$B_q(t, s) = \frac{\Gamma_q(t) \Gamma_q(s)}{\Gamma_q(t+s)} \quad (2.20)$$

eşitliğiyle bilinmektedir [10].

2.2.4. Tanım

$A > 0$ olmak üzere, q -genelleştirilmiş integral

$$\int_0^{\infty/A} f(x) d_q x = (1-q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{q^n}{A}\right) \frac{q^n}{A} \quad (2.21)$$

olarak tanımlanır.

Ayrıca, q-Beta integral

$$B_q(t, s) = K(A, t) \int_0^{\infty/A} \frac{x^{t-1}}{(1+x)_q^{t+s}} d_q x \quad (2.22)$$

olarak tanımlanır.

Burada, $A > 0$ için,

$$K(A, t+1) = q^t K(A, t) \quad (2.23)$$

ve

$$K(A, t) = \frac{1}{A+1} A^t \left(1 + \frac{1}{A}\right)_q^t (1+A)_q^{1-t}$$

şeklinde tanımlanır [11].

2.2.5. Tanım

q-Binom formülü ise,

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q q^{\frac{j(j-1)}{2}} a^j x^{n-j}$$

olarak tanımlanır [10].

$$(x+a)_q^n = \prod_{j=0}^{n-1} (x + q^j a)$$

notasyonu q-Pochhammer sembolü olarak bilinmektedir.



3. q-BASKAKOV-DURRMEYERTİP OPERATÖRLERİN YAKLAŞIMI

3.1. Tek Değişkenli Operatörlerin Tanımı ve Özellikleri

$C_B[0, \infty)$ ile $[0, \infty)$ üzerinde tanımlı reel değerli, sürekli ve sınırlı fonksiyonların kümesi gösterilsin. $f \in C_B[0, \infty)$ için $C_B[0, \infty)$ üzerindeki norm aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\|f\| = \sup_{0 \leq x < \infty} |f(x)|$$

$n \in \mathbb{N}, 0 < q < 1$ ve $f \in C_\gamma[0, \infty) := \{f \in C[0, \infty) : f(t) = O(t^\gamma), t \rightarrow \infty \text{ ve } \gamma > 0\}$ olsun.

3.1.1. Tanım

$q \in (0, 1), n \in \mathbb{N}$ olsun. Her $f \in C_\gamma[0, \infty)$ için,

$$M_n^q(f, x) = [n-1]_q \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}^q(x) \int_0^{\infty/A} q^{k-1} P_{n,k-1}^q(t) f(t) d_q t + P_{n,0}^q(x) f(0) \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanan operatöre q-Baskakov-Durrmeyer tip operatör denir.

Burada verilen $P_{n,k}^q(x)$ ifadesi aşağıdaki gibi gösterilir,

$$P_{n,k}^q(x) = \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{x^k}{(1+x)_q^{(n+k)}} \quad x \in [0, \infty).$$

$q \rightarrow 1$ 'e yaklaşırken yukarıdaki operatör klasik Baskakov operatörüne indirgenir[8].

q-Baskakov-Durrmeyer tip operatörlerin lineer ve pozitif operatör olduğunu aşağıdaki gibi gösterebiliriz:

Lineerlik: $f, g \in C_\gamma[0, \infty)$ ve $b, c \in \mathbb{R}$ olsun. q-genelleştirilmiş integralin özelliklerini kullanarak,

$$\begin{aligned} M_n^q(bf + cg, x) &= [n-1]_q \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}^q(x) \int_0^{\infty/A} q^{k-1} P_{n,k-1}^q(t) (bf + cg)(t) d_q t \\ &\quad + P_{n,0}^q(x) (bf + cg)(0) \\ &= [n-1]_q \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}^q(x) \int_0^{\infty/A} q^{k-1} P_{n,k-1}^q(t) [bf(t) + cg(t)] d_q t \\ &\quad + P_{n,0}^q(x) bf(0) + P_{n,0}^q(x) cg(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [n-1]_q \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}^q(x) \int_0^{\infty/A} q^{k-1} P_{n,k-1}^q(t) b f(t) d_q t \\
&+ P_{n,0}^q(x) b f(0) + [n-1]_q \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}^q(x) \int_0^{\infty/A} q^{k-1} P_{n,k-1}^q(t) c g(t) d_q t \\
&+ P_{n,0}^q(x) c g(0) \\
&= b M_n^q(f, x) + c M_n^q(g, x)
\end{aligned}$$

olur.

Pozitiflik: $f \in C_V[0, \infty)$ ve $f \geq 0$ olsun. $q \in (0, 1), x \in [0, \infty)$ için

$\sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}^q(x) \geq 0$ olup Eş. 2.5'ten $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_q \geq 0$ olduğundan $M_n^q(f, x) \geq 0$ dır.

3.2. q-Baskakov-Durrmeyer Tip Operatörlerin Yaklaşım Özellikleri

3.2.1. Korovkin Tip Yaklaşım

Öncelikle q-Baskakov-Durrmeyer tip operatörlerin yaklaşım özellikleri incelenirken kullanılacak olan bir lemma verilecektir.

3.2.1. Lemma

$x \in [0, \infty)$ için,

$$\text{i) } M_n^q(1, x) = 1$$

$$\text{ii) } M_n^q(t, x) = \frac{[n]_q x}{q[n-2]_q}$$

$$\text{iii) } M_n^q(t^2, x) = \frac{[n]_q [n+1]_q x^2}{q^4 [n-2]_q [n-3]_q} + \frac{[2]_q [n]_q x}{q^3 [n-2]_q [n-3]_q}$$

eşitlikleri sağlanır[8].

İspat

i) $f(t) = 1$ için,

$$M_n^q(1, x) = [n-1]_q \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}^q(x) \int_0^{\infty/A} q^{k-1} P_{n,k-1}^q(t) d_q t + P_{n,0}^q(x)$$

q-Calculus temel kavramlar kısmındaki özelliklerden [11]

$$\begin{aligned}
M_n^q(1, x) &= \\
&= [n-1]_q \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}^q(x) q^{k-1} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \left[\begin{matrix} n+k-2 \\ k-1 \end{matrix} \right]_q \int_0^{\infty/A} \frac{t^{k-1}}{(1+t)_q^{n+k-1}} d_q t + P_{n,0}^q(x) \\
&= [n-1]_q \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}^q(x) q^{k-1} q^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}} \left[\begin{matrix} n+k-2 \\ k-1 \end{matrix} \right]_q \frac{B_q(k, n-1)}{K(A, k)} + P_{n,0}^q(x) \\
&= [n-1]_q \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}^q(x) q^{k-1} q^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}} \frac{[n+k-2]_q!}{[n+k-2-k+1]_q! [k-1]_q!} \frac{\frac{\Gamma_q(k)\Gamma_q(n-1)}{\Gamma_q(k+n-1)}}{q^{\frac{k(k-1)}{2}}} \\
&\quad + P_{n,0}^q(x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}^q(x) [n-1]_q q^0 \frac{[n+k-2]_q!}{[n-1]_q! [k-1]_q!} \frac{\Gamma_q(k)\Gamma_q(n-1)}{\Gamma_q(k+n-1)} + P_{n,0}^q(x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}^q(x) [n-1]_q \frac{[n+k-2]_q [n+k-3]_q \dots 1}{[n-1]_q [n-2]_q \dots 1} \frac{[k-1]_q! [n-2]_q!}{[n+k-2]_q!} \\
&\quad + P_{n,0}^q(x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}^q(x) + P_{n,0}^q(x) = 1
\end{aligned} \tag{3.2}$$

şeklinde bulunur.

ii) $f(t) = t$ için

$$\begin{aligned}
M_n^q(t, x) &= [n-1]_q \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}^q(x) \int_0^{\infty/A} q^{k-1} P_{n,k-1}^q(t) t d_q t \\
&= [n-1]_q \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}^q(x) q^{k-1} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \left[\begin{matrix} n+k-2 \\ k-1 \end{matrix} \right]_q \int_0^{\infty/A} \frac{t^k}{(1+t)_q^{n+k-1}} d_q t \\
&= [n-1]_q \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}^q(x) q^{k-1} q^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}} \left[\begin{matrix} n+k-2 \\ k-1 \end{matrix} \right]_q \frac{B_q(k+1, n-2)}{K(A, k+1)} \\
&= [n-1]_q \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}^q(x) q^{k-1} q^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}} \frac{[n+k-2]_q!}{[n+k-2-k+1]_q! [k-1]_q!} \times \\
&\quad \times \frac{B_q(k+1, n-2)}{K(A, k+1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [n-1]_q \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}^q(x) q^{k-1} q^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}} \frac{[n+k-2]_q!}{[n-1]_q! [k-1]_q!} \frac{\Gamma_q(k+1) \Gamma_q(n-2)}{\Gamma_q(k+1+n-2)} \times \\
&\times \frac{1}{q^{\frac{k(k+1)}{2}}} \\
&= [n-1]_q \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}^q(x) \frac{q^{k-1+\frac{(k-1)(k-2)}{2}}}{q^{\frac{(k+1)k}{2}}} \frac{[n+k-2]_q!}{[n-1]_q! [n-2]_q! [k-1]_q!} \frac{[k]_q! [n-3]_q!}{[k+n-2]_q!}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Gerekli sadeleştirmeleri yaparsak,

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{[n-2]_q} \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}^q(x) q^{-k} [k]_q \\
&= \frac{1}{[n-2]_q} \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}} q^{-k} [k]_q \\
&= \frac{1}{[n-2]_q} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[n+k-1]_q!}{[n+k-1-k]_q! [k]_q!} q^{\frac{k(k-1)}{2}+k} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}} [k]_q
\end{aligned}$$

$k = 1$ yerine $k = 0$ 'dan başlatırsak,

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{[n-2]_q} \sum_{k=0}^{\infty} q^{-(k+1)} q^{\frac{k(k+1)}{2}} \frac{[n+k]_q!}{[n-1]_q! [k]_q!} \frac{x^{k+1}}{(1+x)_q^{n+k+1}} \\
&= \frac{[n]_q x}{q[n-2]_q} \sum_{k=0}^{\infty} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{[n+k]_q!}{[n-1]_q! [k]_q!} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k+1}} \\
&= \frac{[n]_q x}{q[n-2]_q} \sum_{k=0}^{\infty} P_{n+1,k}^q(x) \\
&= \frac{[n]_q x}{q[n-2]_q}
\end{aligned}$$

bulunur.

iii) $f(t) = t^2$ için,

$$M_n^q(t^2, x) = [n-1]_q \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}^q(x) \int_0^{\infty/A} q^{k-1} P_{n,k-1}^q(t) t^2 d_q t$$

$$\begin{aligned}
&= [n-1]_q \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}^q(x) q^{k-1} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n+k-2 \\ k-1 \end{bmatrix}_q \int_0^{\infty/A} \frac{t^{k+1}}{(1+t)_q^{n+k-1}} d_q t \\
&= [n-1]_q \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}^q(x) q^{k-1} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n+k-2 \\ k-1 \end{bmatrix}_q \frac{B_q(k+2, n-3)}{K(A, k+2)} \\
&= \frac{1}{[n-2]_q [n-3]_q} \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}^q(x) q^{-2k-1} [k]_q [k+1]_q \\
&= \frac{[n]_q}{[n-2]_q [n-3]_q} \sum_{k=0}^{\infty} q^{\frac{(k^2-3k-6)}{2}} \frac{[n+k]_q!}{[n]_q! [k]_q!} \frac{x^{k+1}}{(1+x)_q^{n+k+1}} [k+2]_q
\end{aligned}$$

elde edilir.

Burada $[k+2]_q = [k]_q + [2]_q q^k$ eşitliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned}
&= \frac{[n]_q}{[n-2]_q [n-3]_q} \sum_{k=0}^{\infty} q^{\frac{(k^2-3k-6)}{2}} \frac{[n+k]_q!}{[n]_q! [k]_q!} \frac{x^{k+1}}{(1+x)_q^{n+k+1}} [k]_q \\
&\quad + \frac{[n]_q [2]_q}{[n-2]_q [n-3]_q} \sum_{k=0}^{\infty} q^{\frac{(k^2-3k-6)}{2}} q^k \frac{[n+k]_q!}{[n]_q! [k]_q!} \frac{x^{k+1}}{(1+x)_q^{n+k+1}} \\
&= \frac{[n]_q [n+1]_q x^2}{q^4 [n-2]_q [n-3]_q} \sum_{k=0}^{\infty} P_{n+2}^q(x) + \frac{[2]_q [n]_q x}{q^3 [n-2]_q [n-3]_q} \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^q(x)
\end{aligned}$$

$P_{n+2}^q(x) = P_{n,k}^q(x) = 1$ olduğundan,

$$= \frac{[n]_q [n+1]_q x^2}{q^4 [n-2]_q [n-3]_q} + \frac{[2]_q [n]_q x}{q^3 [n-2]_q [n-3]_q}$$

bulunur.

3.2.1. Sonuç

$$(i) M_n^q((t-x), x) = \frac{(1+q^{n-1})x}{q[n-2]_q},$$

$$(ii) M_n^q((t-x)^2, x) = x^2 \left(\frac{[n]_q [n+1]_q}{q^4 [n-2]_q [n-3]_q} - \frac{2[n]_q}{q[n-2]_q} + 1 \right) + \frac{[2]_q [n]_q x}{q^3 [n-2]_q [n-3]_q} \quad (3.3)$$

eşitlikleri sağlanır [8].

İspat

$$\begin{aligned}
 i) M_n^q((t-x), x) &= M_n^q(t, x) - x M_n^q(1, x) \\
 &= \frac{[n]_q x}{q[n-2]_q} - x 1 \\
 &= \frac{[n]_q x - x q[n-2]_q}{q[n-2]_q} \\
 &= \frac{x([n]_q + 1 - [n-1]_q)}{q[n-2]_q} \\
 &= \frac{(1 + q^{n-1})x}{q[n-2]_q}
 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
 ii) M_n^q((t-x)^2, x) &= M_n^q(t^2 - 2tx + x^2) \\
 &= M_n^q(t^2, x) - 2x M_n^q(t, x) + x^2 \\
 &= \frac{[n]_q [n+1]_q x^2}{q^4 [n-2]_q [n-3]_q} + \frac{[2]_q [n]_q x}{q^3 [n-2]_q [n-3]_q} - 2x \left(\frac{[n]_q x}{q[n-2]_q} \right) + x^2 \\
 &= x^2 \left(\frac{[n]_q [n+1]_q}{q^4 [n-2]_q [n-3]_q} - \frac{2[n]_q}{q[n-2]_q} + 1 \right) + \frac{[2]_q [n]_q x}{q^3 [n-2]_q [n-3]_q}
 \end{aligned}$$

bulunur.

3.2.2. Lemma

$f \in C_B[0, \infty]$ için $\|M_n^q(f, x)\| \leq \|f\|$ eşitsizliği doğrudur[8].

İspat

Eş.2 ve Eş.3.2'den

$$\begin{aligned}
 \|M_n^q(f, x)\| &\leq [n-1]_q \sum_{k=1}^{\infty} P_{n,k}^q(x) \int_0^{\infty/A} q^{k-1} P_{n,k-1}^q(t) |f(t)| d_q t + p_{n,0}^q(x) |f(0)| \\
 &\leq \|f\| M_n^q(1, x) = \|f\|
 \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

3.2.1. Teorem (P.P.Korovkin Teoremi)

Her $n \in \mathbb{N}$ için $L_n: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ şeklinde tanımlı L_n lineer pozitif operatörler dizisi olsun. Her bir $i = 0, 1, 2$ için $e_i(x) = x^i$ olmak üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(e_i) - e_i\|_{C[a, b]} = 0 ; i = 0, 1, 2$$

koşulları sağlıyor ise bu durumda $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli ve tüm reel ekseninde sınırlı olan her $f \in C[a, b]$ fonksiyonu için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - f\|_{C[a, b]} = 0$$

dır [19].

3.2.2. Teorem

$A > 0, (q_n), 0 < q_n < 1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ olacak şekilde bir dizi olsun. Bu durumda her $f \in C_\gamma[0, \infty)$ için $\{M_n^{q_n}(f, x)\}$ dizisi f 'ye $[0, A]$ üzerinde düzgün yakınsar[8].

İspat

$M_n^{q_n}$ operatörünün Teorem 3.2.1. ile verilen Korovkin teoreminin şartlarını sağladığını göstermeliyiz: $x \in [0, A]$ için Lemma 3.2.1 i'den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq A} |M_n^{q_n}(1, x) - 1| = 0$$

olduğu açıktır. Sonuç 3.2.1 i'den,

$$\begin{aligned} 0 \leq |M_n^{q_n}(t, x) - x| &= |M_n^{q_n}(t - x, x)| \\ &= \left| \frac{(1 + q_n^{n-1})x}{q_n[n-2]_{q_n}} \right| \\ &\leq \frac{(1 + q_n^{n-1})A}{q_n[n-2]_{q_n}} \end{aligned}$$

bulunur. $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ olduğundan, sıkıştırma teoreminden,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq A} |M_n^{q_n}(t, x) - x| = 0$$

elde edilir. Sonuç 3.2.1 ii'den,

$$\begin{aligned} 0 \leq |M_n^{q_n}(t^2; x) - x^2| &= |M_n^{q_n}(t^2 - x^2; x)| \\ &\leq \left| \frac{[n]_{q_n}[n+1]_{q_n}}{q_n^4[n-2]_{q_n}[n-3]_{q_n}} - \frac{2[n]_{q_n}}{q_n[n-2]_{q_n}} + 1 \right| |x|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left| \frac{[2]_{q_n} [n]_{q_n} x}{q_n^3 [n-2]_{q_n} [n-3]_{q_n}} \right| \\
& \leq \left| \frac{[n]_{q_n} [n+1]_{q_n}}{q_n^4 [n-2]_{q_n} [n-3]_{q_n}} - \frac{2[n]_{q_n}}{q_n [n-2]_{q_n}} + 1 \right| A^2 \\
& + \frac{[2]_{q_n} [n]_{q_n} A}{q_n^3 [n-2]_{q_n} [n-3]_{q_n}}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ olduğundan, sıkıştırma teoreminden,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq A} |M_n^{q_n}(t^2, x) - x^2| = 0$$

bulunur.

Böylece Korovkin teoreminin şartları sağlanır ve ispat tamamlanır.

3.2.1. Tanım

$\delta > 0$ ve $W_\infty^2 = \{g \in C_B[0, \infty); g', g'' \in C_B[0, \infty)\}$ olsun.

$f \in C_B[0, \infty)$ için Peetre K -fonksiyoneli aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$K_2(f, \delta) = \inf \{ \|f - g\| + \delta \|g''\|; g \in W_\infty^2 \}. \quad (3.4)$$

$f \in C_B[0, \infty)$ için ikinci süreklilik modülü

$$\omega_2(f, \sqrt{\delta}) = \sup_{0 < h \leq \sqrt{\delta}} \sup_{0 \leq x < \infty} |f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)| \quad (3.5)$$

olarak tanımlıdır. $f \in C_B[0, \infty)$ için birinci süreklilik modülü

$$\omega(f, \delta) = \sup_{0 < h \leq \sqrt{\delta}} \sup_{0 \leq x < \infty} |f(x+h) - f(x)|$$

olarak tanımlıdır. Her $f \in C[0, \infty)$ için

$$K_2(f, \delta) \leq C \omega_2(f, \sqrt{\delta}) \quad (3.6)$$

olacak şekilde bir $C > 0$ vardır [12].

3.2.3. Teorem

$f \in C_B[0, \infty)$ ve $0 < q < 1$ olsun. Her bir $x \in [0, \infty)$ için

$$|M_n^q(f, x) - f(x)| \leq C \omega_2\left(f, \sqrt{\gamma_n(x) + \eta_n^2(x)}\right) + \omega(f, \eta_n(x)),$$

olacak şekilde bir $C > 0$ vardır. Burada

$$\gamma_n(x) = M_n^q((t-x)^2; x) \text{ ve } \eta_n(x) = \left| \left(\frac{[n]_q x}{q[n-2]_q} - x \right) \right|$$

dir[8].

İspat

İspatı yapabilmek için

$$\bar{M}_n^q(f, x) = M_n^q(f, x) + f(x) - f\left(\frac{[n]_q x}{q[n-2]_q}\right) \quad (3.7)$$

yardımcı operatörünü alalım.

Lemma 3.2.1'den aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\bar{M}_n^q(1, x) = M_n^q(1, x) = 1 \quad (3.8)$$

ve

$$\bar{M}_n^q(t, x) = M_n^q(t, x) + x - \frac{[n]_q x}{q[n-2]_q} = x. \quad (3.9)$$

$g \in W_\infty^2$ olsun. Taylor formülünü kullanarak

$$g(t) - g(x) = (t-x)g'(x) + \int_x^t (t-v)g''(v)dv \quad (3.10)$$

yazılabilir. Eş. 3.10'a $\bar{M}_n^q$ operatörünü uygularsak

$$\begin{aligned} \bar{M}_n^q(g, x) - g(x) &= \bar{M}_n^q\left(\int_x^t (t-v)g''(v)dv, x\right) \\ &= M_n^q\left(\int_x^t (t-v)g''(v)dv, x\right) - \int_x^{\frac{[n]_q x}{q[n-2]_q}} \left(\frac{[n]_q x}{q[n-2]_q} - v\right)g''(v)dv \end{aligned} \quad (3.11)$$

elde edilir. Eş. 3.11'in mutlak değerini alıp üçgen eşitsizliği uygularsak

$$\begin{aligned} &|\bar{M}_n^q(g, x) - g(x)| \\ &\leq M_n^q\left(\left|\int_x^t (t-v)g''(v)dv\right|, x\right) + \int_x^{\frac{[n]_q x}{q[n-2]_q}} \left|\left(\frac{[n]_q x}{q[n-2]_q} - v\right)\right| |g''(v)|dv \\ &\leq M_n^q((t-x)^2; x) \|g''\| + \left(\frac{[n]_q x}{q[n-2]_q} - x\right)^2 \|g''\| \\ &\leq (\gamma_n(x) + \eta_n^2(x)) \|g''\| \end{aligned} \quad (3.12)$$

elde edilir.

Eş. 3.7'nin mutlak değerine üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$|\bar{M}_n^q(f, x)| \leq |M_n^q(f, x)| + |f(x)| + \left| f\left(\frac{[n]_q x}{q[n-2]_q}\right) \right| \quad (3.13)$$

yazılabilir. Eş.3.13'e Lemma 3.2.2 uygulanırsa

$$|\bar{M}_n^q(f, x)| \leq 3\|f\| \quad (3.14)$$

elde edilir.

Eş.3.7, Eş.3.8 ve Eş.3.9'dan $g \in W_\infty^2$ için

$$\begin{aligned} |M_n^q(f, x) - f(x)| &\leq \left| \bar{M}_n^q(f, x) - f(x) + f\left(\frac{[n]_q x}{q[n-2]_q}\right) - f(x) \right| \\ &\leq |\bar{M}_n^q(f - g, x)| + |\bar{M}_n^q(g, x) - g(x)| + |g(x) - f(x)| + \\ &\quad + \left| f\left(\frac{[n]_q x}{q[n-2]_q}\right) - f(x) \right| \\ &\leq 4\|f - g\| + (\gamma_n(x) + \eta_n^2(x))\|g''\| + \left| f\left(\frac{[n]_q x}{q[n-2]_q}\right) - f(x) \right| \\ &\leq 4\|f - g\| + (\gamma_n(x) + \eta_n^2(x))\|g''\| + \omega\left(f, \left|\frac{([n]_q - q[n-2]_q)x}{q[n-2]_q}\right|\right). \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafının her $g \in W_\infty^2$ için infimumu alınır Eş. 3.4'ten

$$|M_n^q(f, x) - f(x)| \leq 4K_2(f, \gamma_n(x) + \eta_n^2(x)) + \omega(f, \eta_n(x))$$

bulunur.

Şimdi Eş. 3.5'i kullanarak

$$|M_n^q(f, x) - f(x)| \leq C\omega_2\left(f, \sqrt{\gamma_n(x) + \eta_n^2(x)}\right) + \omega(f, \eta_n(x))$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

3.2.4. Teorem

$f \in C_B[0, \infty) \cap Lip_{M'}\alpha, 0 < \alpha \leq 1$ ve $E, [0, \infty)$ aralığının herhangi bir sınırlı alt kümesi olsun. Bu durumda, $x \in [0, \infty)$ için

$$|M_n^q(f, x) - f(x)| \leq M' \left\{ \gamma_n^{\frac{\alpha}{2}}(x) + 2(d(x, E))^\alpha \right\}$$

eşitsizliği doğrudur. Burada M', α ve f 'e bağlı bir sabit olsun. x ile E arasındaki uzaklık,

$$d(x, E) = \inf\{|t - x| : t \in E\}$$

şeklinde tanımlıdır [8].

İspat

$[0, \infty)$ aralığında E kümesinin kapanış kümesi $\bar{E}$ olsun.

$$d(x, E) = |x - x_0|$$

olacak şekilde en az bir tane $x_0 \in \bar{E}$ vardır.

Üçgen eşitsizliğini kullanarak,

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t) - f(x_0)| + |f(x) - f(x_0)|$$

yazılabilir.

$Lip_{M'}\alpha$ tanımı kullanarak,

$$\begin{aligned} |M_n^q(f, x) - f(x)| &\leq M_n^q(|f(t) - f(x_0)|; x) + M_n^q(|f(x) - f(x_0)|; x) \\ &\leq M' \{M_n^q(|t - x_0|^\alpha; x) + |x - x_0|^\alpha\} \\ &\leq M' \{M_n^q(|t - x|^\alpha; x) + 2|x - x_0|^\alpha\} \end{aligned}$$

$p_1 = \frac{2}{\alpha}, p_2 = \frac{2}{2-\alpha}$ ve $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$ olsun. Hölder eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} |M_n^q(f, x) - f(x)| &\leq M' \left\{ [M_n^q(|t - x|^{\alpha p_1}; x)]^{\frac{1}{p_1}} [M_n^q(1^{p_2}, x)]^{\frac{1}{p_2}} + 2(d(x, E))^\alpha \right\} \\ &\leq M' \left\{ [M_n^q(|t - x|^2; x)]^{\frac{\alpha}{2}} + 2(d(x, E))^\alpha \right\} \\ &\leq M' \left\{ \gamma_n^{\frac{\alpha}{2}}(x) + 2(d(x, E))^\alpha \right\} \end{aligned}$$

ispat tamamlanır.

α -yıncı dereceden Lipschitz tip maksimal fonksiyon B. Lenze [13] tarafından

$$\tilde{\omega}_\alpha(f, x) = \sup_{t \neq x, t \in [0, \infty)} \frac{|f(t) - f(x)|}{|t - x|^\alpha}, x \in [0, \infty) \text{ ve } \alpha \in (0, 1] \quad (3.15)$$

olarak tanımlanmıştır.

Şimdi Eş. 3.1 ile tanımlanan operatörün yerel direk tahminini verelim.

3.2.5. Teorem

$f \in C_B[0, \infty)$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. $x \in [0, \infty)$ için

$$|M_n^q(f, x) - f(x)| \leq \tilde{\omega}_\alpha(f, x) \gamma_n^{\frac{\alpha}{2}}(x)$$

eşitsizliği doğrudur [8].

İspat

Eş. 3.15 e göre

$$|f(t) - f(x)| \leq \tilde{\omega}_\alpha(f, x)|t - x|^\alpha$$

elde edilir. Bu eşitsizliğe M_n^q operatörü uygulanırsa

$$|M_n^q(f, x) - f(x)| \leq M_n^q(|f(t) - f(x)|, x) \leq \tilde{\omega}_\alpha(f, x)M_n^q(|t - x|^\alpha, x)$$

elde edilir.

$p = \frac{2}{\alpha}$ ve $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$ için Hölder eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} |M_n^q(f, x) - f(x)| &\leq \tilde{\omega}_\alpha(f, x)M_n^q(|t - x|^2, x)^{\frac{\alpha}{2}} \\ &\leq \tilde{\omega}_\alpha(f, x)\gamma_n^{\frac{\alpha}{2}}(x) \end{aligned}$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

3.2.2. Ağırlıklı Yaklaşım

$f, [0, \infty)$ üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in [0, \infty)$ için

$$|f(x)| \leq M_f(1 + x^2)$$

olacak şekilde f fonksiyonuna bağlı bir $M_f > 0$ mevcut ise bu şekildeki tüm f fonksiyonlarının uzayına ağırlıklı uzay denir ve bu uzay $B_{x^2}[0, \infty)$ ile gösterilir. $B_{x^2}[0, \infty)$ uzayı üzerindeki norm her $f \in B_{x^2}[0, \infty)$ için

$$\|f\|_{x^2} = \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|f(x)|}{1 + x^2}$$

ile tanımlıdır. $B_{x^2}[0, \infty)$ içindeki tüm sürekli fonksiyonların alt uzayı $C_{x^2}[0, \infty)$ ile gösterilsin. Her $f \in C_{x^2}[0, \infty)$ ve her $x \in [0, \infty)$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{1 + x^2}$$

limiti mevcut olacak şekildeki tüm f fonksiyonların alt uzayı $C_{x^2}^*[0, \infty)$ ile gösterilsin [14].

Şimdi Gadjev'in ağırlıklı yaklaşım teoremini hatırlayalım:

3.2.6. Teorem

$L_n, C_{x^2}[0, \infty)$ dan $B_{x^2}[0, \infty)'$ a tanımlı lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(e_k) - e_k\|_{x^2} = 0, \quad k = 0, 1, 2 \quad (3.16)$$

ise o zaman her $f \in C_{x^2}^*[0, \infty)$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - f\|_{x^2} = 0$$

dır [15,16].

Şimdi q-Baskakov-Durrmeyer operatörleri için ağırlıklı yaklaşım sonucunu verelim:

3.2.7. Teorem

$(q_n), 0 < q_n < 1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ olacak şekilde bir dizi olsun.

Her $f \in C_{x^2}[0, \infty)$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|M_n^{q_n}(f) - f\|_{x^2} = 0$$

dır[8].

İspat

Teorem 3.2.6 nın Eş. 3.16 koşullarının sağlandığını göstermeliyiz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|M_n^{q_n}(e_k) - e_k\|_{x^2} = 0, \quad i = 0, 1, 2. \quad (3.17)$$

olduğunu gösterelim:

$k = 0$ için,

$$\|M_n^{q_n}(e_0) - e_0\|_{x^2} = 1 \text{ olduğu açıktır.}$$

Lemma 3.2.1'i kullanarak,

$$\begin{aligned} 0 \leq \|M_n^{q_n}(e_1) - e_1\|_{x^2} &= \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|M_n^{q_n}(t, x) - x|}{1 + x^2} \\ &\leq \left(\frac{[n]_{q_n}}{q_n[n-2]_{q_n}} - 1 \right) \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{x}{1 + x^2} \\ &\leq \left(\frac{[n]_{q_n}}{q_n[n-2]_{q_n}} - 1 \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

$n \rightarrow \infty$ a giderken Eş. 3.18 ifadesinin her iki taraftan limitini alınırsa, sıkıştırma teoreminden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|M_n^{q_n}(e_1) - e_1\|_{x^2} = 0$$

elde edilir. Lemma 3.2.1'den

$$\begin{aligned} 0 \leq \|M_n^{q_n}(e_2) - e_2\|_{x^2} &= \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|M_n^{q_n}(t^2, x) - x^2|}{1+x^2} \\ &\leq \left(\frac{[n]_{q_n}[n+1]_{q_n}}{q_n^4[n-2]_{q_n}[n-3]_{q_n}} - 1 \right) \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{[2]_{q_n}[n]_{q_n}}{q_n^3[n-2]_{q_n}[n-3]_{q_n}} \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{x}{1+x^2} \\ &\leq \left(\frac{[n]_{q_n}[n+1]_{q_n}}{q_n^4[n-2]_{q_n}[n-3]_{q_n}} - 1 \right) + \frac{[2]_{q_n}[n]_{q_n}}{q_n^3[n-2]_{q_n}[n-3]_{q_n}} \end{aligned} \quad (3.19)$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ a giderken Eş. 3.19 ifadesinin her iki tarafının limiti alınır, sıkıştırma teoreminden,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|M_n^{q_n}(e_2) - e_2\|_{x^2} = 0$$

elde edilir.

Böylece Eş. 3.17'de verilen koşul sağlanır. Teorem 3.2.6' dan ispat tamamlanır.

4. İKİ DEĞİŞKENİ q -BASKAKOV-DURRMEYER TİP OPERATÖRLERİN YAKLAŞIMI

Bu bölümde Özkan ve Cömert [17] tarafından tanımlanan ve çalışılan iki değişkenli q -Baskakov-Durrmeyer tip operatörleri verilerek, bu operatörlerin Volkov tip düzgün yakınsaklık ve Gadzhiev tip ağırlıklı yaklaşım teoremleri incelenecektir.

4.1. İki Değişkenli q -Baskakov-Durrmeyer Tip Operatörlerin Tanımı ve Özellikleri

4.1.1. Tanım

$I_1 = [0, r_1]$, $I_2 = [0, r_2]$, $I = I_1 \times I_2 = [0, r_1] \times [0, r_2]$ olsun. $f \in C(I)$, $0 < q_1 < 1$ ve $0 < q_2 < 1$ olsun. $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $f: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve sınırlı olsun.

$$M_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(f(t, s); x, y) = [n_1 - 1]_{q_1} [n_2 - 1]_{q_2} \sum_{k=1}^{\infty} P_{n_1, k}^{q_1}(x) \sum_{j=1}^{\infty} P_{n_2, j}^{q_2}(y) \\ \times \int_0^{\infty/A_1} q_1^{k-1} \int_0^{\infty/A_2} q_2^{j-1} P_{n_1, k-1}^{q_1}(t) P_{n_2, j-1}^{q_2}(s) f(t, s) d_{q_2} s d_{q_1} t + P_{n_1, 0}^{q_1}(x) P_{n_2, 0}^{q_2}(y) f(0, 0) \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır.

$$P_{n_1, k}^{q_1}(x) = \begin{bmatrix} n_1 + k - 1 \\ k \end{bmatrix}_{q_1} q_1^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{x^k}{(1+x)_{q_1}^{n_1+k}}, \quad x \in [0, \infty)$$

$$P_{n_2, j}^{q_2}(y) = \begin{bmatrix} n_2 + j - 1 \\ j \end{bmatrix}_{q_2} q_2^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{y^j}{(1+y)_{q_2}^{n_2+j}}, \quad y \in [0, \infty)$$

Eş. 4.1 de verilen operatör bir lineer pozitif operatördür [17].

q -Baskakov-Durrmeyer tip operatörlerinin lineer ve pozitif olduğu gösterilebilir:

Lineerlik: c keyfi reel sabiti $f, g \in C([0, \infty) \times [0, \infty))$ keyfi fonksiyonları için

$$M_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(cf(t, s); x, y) = [n_1 - 1]_{q_1} [n_2 - 1]_{q_2} \sum_{k=1}^{\infty} P_{n_1, k}^{q_1}(x) \sum_{j=1}^{\infty} P_{n_2, j}^{q_2}(y) \\ \times \int_0^{\infty/A_1} q_1^{k-1} \int_0^{\infty/A_2} q_2^{j-1} P_{n_1, k-1}^{q_1}(t) P_{n_2, j-1}^{q_2}(s) cf(t, s) d_{q_2} s d_{q_1} t$$

$$\begin{aligned}
& +P_{n_1,0}^{q_1}(x)P_{n_2,0}^{q_2}(y)cf(0,0) \\
& = c([n_1 - 1]_{q_1}[n_2 - 1]_{q_2} \sum_{k=1}^{\infty} P_{n_1,k}^{q_1}(x) \sum_{j=1}^{\infty} P_{n_2,j}^{q_2}(y) \\
& \quad \times \int_0^{\infty/A_1} q_1^{k-1} \int_0^{\infty/A_2} q_2^{j-1} P_{n_1,k-1}^{q_1}(t)P_{n_2,j-1}^{q_2}(s)f(t,s)d_{q_2}s d_{q_1}t + P_{n_1,0}^{q_1}(x)P_{n_2,0}^{q_2}(y)f(0,0)) \\
& = cM_{n_1,n_2}^{q_1,q_2}(f(t,s);x,y)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

$$\begin{aligned}
M_{n_1,n_2}^{q_1,q_2}((f+g);x,y) &= [n_1 - 1]_{q_1}[n_2 - 1]_{q_2} \sum_{k=1}^{\infty} P_{n_1,k}^{q_1}(x) \sum_{j=1}^{\infty} P_{n_2,j}^{q_2}(y) \\
& \times \int_0^{\infty/A_1} q_1^{k-1} \int_0^{\infty/A_2} q_2^{j-1} P_{n_1,k-1}^{q_1}(t)P_{n_2,j-1}^{q_2}(s)(f+g)(t,s)d_{q_2}s d_{q_1}t \\
& + P_{n_1,0}^{q_1}(x)P_{n_2,0}^{q_2}(y)(f+g)(0,0) \\
& = [n_1 - 1]_{q_1}[n_2 - 1]_{q_2} \sum_{k=1}^{\infty} P_{n_1,k}^{q_1}(x) \sum_{j=1}^{\infty} P_{n_2,j}^{q_2}(y) \\
& \times \int_0^{\infty/A_1} q_1^{k-1} \int_0^{\infty/A_2} q_2^{j-1} P_{n_1,k-1}^{q_1}(t)P_{n_2,j-1}^{q_2}(s)f(t,s)d_{q_2}s d_{q_1}t \\
& + [n_1 - 1]_{q_1}[n_2 - 1]_{q_2} \sum_{k=1}^{\infty} P_{n_1,k}^{q_1}(x) \sum_{j=1}^{\infty} P_{n_2,j}^{q_2}(y) \\
& \times \int_0^{\infty/A_1} q_1^{k-1} \int_0^{\infty/A_2} q_2^{j-1} P_{n_1,k-1}^{q_1}(t)P_{n_2,j-1}^{q_2}(s)g(t,s)d_{q_2}s d_{q_1}t \\
& + P_{n_1,0}^{q_1}(x)P_{n_2,0}^{q_2}(y)f(0,0) + P_{n_1,0}^{q_1}(x)P_{n_2,0}^{q_2}(y)g(0,0) \\
& = M_{n_1,n_2}^{q_1,q_2}(f(t,s);x,y) + M_{n_1,n_2}^{q_1,q_2}(g(t,s);x,y)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Pozitiflik:

$f \geq 0$ olacak şekilde $f \in C([0, \infty) \times [0, \infty))$ alalım. $M_{n_1,n_2}^{q_1,q_2}(f;x,y) \geq 0$ olduğunu göstermeliyiz:

$q_1, q_2 \in (0,1)$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ve $x, y \in [0, \infty)$ olduğundan

$P_{n_1,k}^{q_1}(x) \geq 0$ ve $P_{n_2,j}^{q_2}(y) \geq 0$ olup, q-genelleştirilmiş integral tanımından,

$$M_{n_1,n_2}^{q_1,q_2}(f; x, y) \geq 0$$

elde edilir.

İspatlarda sıklıkla karşımıza çıkacak aşağıdaki lemmayı verelim.

4.1.1. Lemma

$$(i) \quad M_{n_1,n_2}^{q_1,q_2}(f(t,s); x, y) = M_{n_1}^x(M_{n_2}^y(f(t,s); q_2); q_1) + P_{n_1,0}^{q_1}(x)P_{n_2,0}^{q_2}(y)f(0,0)$$

$$(ii) \quad M_{n_1,n_2}^{q_1,q_2}(f(t,s); x, y) = M_{n_2}^y(M_{n_1}^x(f(t,s); q_1); q_2) + P_{n_1,0}^{q_1}(x)P_{n_2,0}^{q_2}(y)f(0,0)$$

eşitlikleri doğrudur. Burada [17]

$$M_{n_1}^x(f(t,s); q_1) =$$

$$:= [n_1 - 1]_{q_1} \sum_{k=1}^{\infty} P_{n_1,k}^{q_1}(x) \int_0^{\infty/A_1} q_1^{k-1} P_{n_1,k-1}^{q_1}(t) f(t,s) d_{q_1} t \quad (4.2)$$

ve

$$M_{n_2}^y(f(t,s); q_2) =$$

$$:= [n_2 - 1]_{q_2} \sum_{j=1}^{\infty} P_{n_2,j}^{q_2}(y) \int_0^{\infty/A_2} q_2^{j-1} P_{n_2,j-1}^{q_2}(s) f(t,s) d_{q_2} s \quad (4.3)$$

tanımlıdır.

İspat

(i) Eş. 4.3 den,

$$\begin{aligned} & M_{n_1}^x(M_{n_2}^y(f(t,s); q_2); q_1) + P_{n_1,0}^{q_1}(x)P_{n_2,0}^{q_2}(y)f(0,0) \\ &:= M_{n_1}^x \left([n_2 - 1]_{q_2} \sum_{j=1}^{\infty} P_{n_2,j}^{q_2}(y) \int_0^{\infty/A_2} q_2^{j-1} P_{n_2,j-1}^{q_2}(s) f(t,s) d_{q_2} s; q_1 \right) \\ & \quad + P_{n_1,0}^{q_1}(x)P_{n_2,0}^{q_2}(y)f(0,0) \end{aligned}$$

şeklindedir. $M_{n_1}^x$ ' in lineerliğinden

$$\begin{aligned} & M_{n_1}^x(M_{n_2}^y(f(t, s); q_2); q_1) + P_{n_1,0}^{q_1}(x)P_{n_2,0}^{q_2}(y)f(0,0) \\ & := [n_2 - 1]_{q_2} \sum_{j=1}^{\infty} P_{n_2,j}^{q_2}(y) \int_0^{\infty/A_2} q_2^{j-1} P_{n_2,j-1}^{q_2}(s) M_{n_1}^x(f(t, s); q_1) d_{q_2}s \\ & + P_{n_1,0}^{q_1}(x)P_{n_2,0}^{q_2}(y)f(0,0). \end{aligned}$$

Eş. 4.2 den

$$\begin{aligned} & := [n_2 - 1]_{q_2} \sum_{j=1}^{\infty} P_{n_2,j}^{q_2}(y) \int_0^{\infty/A_2} q_2^{j-1} P_{n_2,j-1}^{q_2}(s) [n_1 - 1]_{q_1} \sum_{k=1}^{\infty} P_{n_1,k}^{q_1}(x) \\ & \times \int_0^{\infty/A_1} q_1^{k-1} P_{n_1,k-1}^{q_1}(t) f(t, s) d_{q_1}t d_{q_2}s \\ & + P_{n_1,0}^{q_1}(x)P_{n_2,0}^{q_2}(y)f(0,0) \\ & := M_{n_1,n_2}^{q_1,q_2}(f(t, s); x, y) \end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) Eş. 4.2 den

$$\begin{aligned} & M_{n_2}^y(M_{n_1}^x(f(t, s); q_1); q_2) + P_{n_1,0}^{q_1}(x)P_{n_2,0}^{q_2}(y)f(0,0) \\ & := M_{n_2}^y \left([n_1 - 1]_{q_1} \sum_{k=1}^{\infty} P_{n_1,k}^{q_1}(x) \int_0^{\infty/A_1} q_1^{k-1} P_{n_1,k-1}^{q_1}(t) f(t, s) d_{q_1}t; q_2 \right) \\ & + P_{n_1,0}^{q_1}(x)P_{n_2,0}^{q_2}(y)f(0,0) \end{aligned}$$

şeklindedir. $M_{n_2}^y$ ' nin lineerliğinden

$$\begin{aligned} & M_{n_2}^y(M_{n_1}^x(f(t, s); q_1); q_2) + P_{n_1,0}^{q_1}(x)P_{n_2,0}^{q_2}(y)f(0,0) \\ & := [n_1 - 1]_{q_1} \sum_{k=1}^{\infty} P_{n_1,k}^{q_1}(x) \int_0^{\infty/A_1} q_1^{k-1} P_{n_1,k-1}^{q_1}(t) M_{n_2}^y(f(t, s); q_2) d_{q_1}t \\ & + P_{n_1,0}^{q_1}(x)P_{n_2,0}^{q_2}(y)f(0,0) \end{aligned}$$

Eş. 4.2 den

$$:= [n_1 - 1]_{q_1} \sum_{k=1}^{\infty} P_{n_1,k}^{q_1}(x) \int_0^{\infty/A_1} q_1^{k-1} P_{n_1,k-1}^{q_1}(t) [n_2 - 1]_{q_2} \sum_{j=1}^{\infty} P_{n_2,j}^{q_2}(y)$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^{\infty/A_2} q_2^{j-1} P_{n_2,j-1}^{q_2}(s) f(t,s) d_{q_2}s d_{q_1}t \\
& + P_{n_1,0}^{q_1}(x) P_{n_2,0}^{q_2}(y) f(0,0) \\
& := M_{n_1,n_2}^{q_1,q_2}(f(t,s); x, y) \\
& \text{elde edilir.}
\end{aligned}$$

4.2. İki Değişkenli q-Baskakov Durrmeyer Tip Operatörlerin Yaklaşım Özellikleri

Bu kısımda Eş. 4.1 ile verilen iki değişkenli q-Baskakov-Durrmeyer operatörlerinin Volkov tip düzgün yakınsaklık teoremi incelenecektir.

4.2.1. Lemma

$e_{ij}: I \rightarrow I, e_{ij}(t,s) = t^i s^j$; $i, j = 0, 1, 2$ olmak üzere Eş. 4.1. de tanımlanan operatör için aşağıdaki sonuçlar ortaya çıkar [17].

- (i) $M_{n_1,n_2}^{q_1,q_2}(e_{00}; x, y) = 1$
- (ii) $M_{n_1,n_2}^{q_1,q_2}(e_{10}; x, y) = \frac{[n_1]_{q_1} x}{q_1 [n_1-2]_{q_1}}$
- (iii) $M_{n_1,n_2}^{q_1,q_2}(e_{01}; x, y) = \frac{[n_2]_{q_2} y}{q_2 [n_2-2]_{q_2}}$
- (iv) $M_{n_1,n_2}^{q_1,q_2}(e_{20}; x, y) = \frac{[n_1]_{q_1} [n_1+1]_{q_1} x^2}{q_1^4 [n_1-2]_{q_1} [n_1-3]_{q_1}} + \frac{[2]_{q_1} [n_1]_{q_1} x}{q_1^3 [n_1-2]_{q_1} [n_1-3]_{q_1}}$
- (v) $M_{n_1,n_2}^{q_1,q_2}(e_{02}; x, y) = \frac{[n_2]_{q_2} [n_2+1]_{q_2} y^2}{q_2^4 [n_2-2]_{q_2} [n_2-3]_{q_2}} + \frac{[2]_{q_2} [n_2]_{q_2} y}{q_2^3 [n_2-2]_{q_2} [n_2-3]_{q_2}}$

İspat

(i) $e_{ij}(t,s) = t^i s^j$ eşitliğinde $i = j = 0$ için $e_{00}(t,s) = t^0 s^0 = 1$ bulunur. O halde,

Lemma 4.1.1 (i) den

$$\begin{aligned}
M_{n_1,n_2}(1; q_1, q_2, x, y) &= M_{n_1}^x(M_{n_2}^y(1; q_2); q_1) + P_{n_1,0}^{q_1}(x) P_{n_2,0}^{q_2}(y) \\
&= M_{n_1}^x \left([n_2 - 1]_{q_2} \sum_{j=1}^{\infty} P_{n_2,j}^{q_2}(y) \int_0^{\infty/A_2} q_2^{j-1} P_{n_2,j-1}^{q_2}(s) 1 d_{q_2}s; q_1 \right)
\end{aligned}$$

$$+P_{n_1,0}^{q_1}(x)P_{n_2,0}^{q_2}(y)$$

şeklinde yazılabilir. $M_{n_1}^x$ in lineerliğinden

$$M_{n_1,n_2}(1; q_1, q_2, x, y)$$

$$= \left([n_2 - 1]_{q_2} \sum_{j=1}^{\infty} P_{n_2,j}^{q_2}(y) \int_0^{\infty/A_2} q_2^{j-1} P_{n_2,j-1}^{q_2}(s) M_{n_1}^x(1; q_1) d_{q_2}s \right)$$

$$+P_{n_1,0}^{q_1}(x)P_{n_2,0}^{q_2}(y)$$

$$= M_{n_1}^x(1; q_1) \left([n_2 - 1]_{q_2} \sum_{j=1}^{\infty} P_{n_2,j}^{q_2}(y) \int_0^{\infty/A_2} q_2^{j-1} P_{n_2,j-1}^{q_2}(s) d_{q_2}s \right)$$

$$+P_{n_1,0}^{q_1}(x)P_{n_2,0}^{q_2}(y)$$

$$= \left([n_1 - 1]_{q_1} \sum_{k=1}^{\infty} P_{n_1,k}^{q_1}(x) \int_0^{\infty/A_1} q_1^{k-1} P_{n_1,k-1}^{q_1}(t) 1 d_{q_1}t \right)$$

$$\times \left([n_2 - 1]_{q_2} \sum_{j=1}^{\infty} P_{n_2,j}^{q_2}(y) \int_0^{\infty/A_2} q_2^{j-1} P_{n_2,j-1}^{q_2}(s) d_{q_2}s \right) + P_{n_1,0}^{q_1}(x)P_{n_2,0}^{q_2}(y)$$

$$= [n_1 - 1]_{q_1} [n_2 - 1]_{q_2} \sum_{k=1}^{\infty} P_{n_1,k}^{q_1}(x) \sum_{j=1}^{\infty} P_{n_2,j}^{q_2}(y)$$

$$\times \int_0^{\infty/A_1} q_1^{k-1} \int_0^{\infty/A_2} q_2^{j-1} P_{n_1,k-1}^{q_1}(t) P_{n_2,j-1}^{q_2}(s) 1 d_{q_2}(s) d_{q_1}(t) + P_{n_1,0}^{q_1}(x)P_{n_2,0}^{q_2}(y)$$

$$M_{n_1,n_2}(1; q_1, q_2, x, y) = 1$$

elde edilir.

(ii) $e_{ij}(t, s) = t^i s^j$ eşitliğinde $i = 1$ ve $j = 0$ için $e_{10}(t, s) = t^1 s^0 = t$ bulunur. O halde

Lemma 4.1.1 (ii) den

$$M_{n_1,n_2}(e_{10}; q_1, q_2, x, y) = M_{n_2}^y(M_{n_1}^x(e_{10}; q_1); q_2) + P_{n_1,0}^{q_1}(x)P_{n_2,0}^{q_2}(y) e_{10}(0,0)$$

$e_{10}(t, s) = t$ için $e_{10}(0,0) = 0$ olduğundan

$$M_{n_1,n_2}(e_{10}; q_1, q_2, x, y) = M_{n_2}^y(M_{n_1}^x(e_{10}; q_1); q_2)$$

şeklinde bulunur. O halde

$$\begin{aligned}
M_{n_1, n_2}(e_{10}; q_1, q_2, x, y) &= M_{n_2}^y(M_{n_1}^x(e_{10}; q_1); q_2) \\
&= M_{n_2}^y\left([n_1 - 1]_{q_1} \sum_{k=1}^{\infty} P_{n_1, k}^{q_1}(x) \int_0^{\infty/A_1} q_1^{k-1} P_{n_1, k-1}^{q_1}(t) t d_{q_1} t; q_2\right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. $M_{n_2}^y$ ifadesinin lineerliğinden

$$\begin{aligned}
M_{n_1, n_2}(e_{10}; q_1, q_2, x, y) &= \left([n_1 - 1]_{q_1} \sum_{k=1}^{\infty} P_{n_1, k}^{q_1}(x) \int_0^{\infty/A_1} q_1^{k-1} P_{n_1, k-1}^{q_1}(t) M_{n_2}^y(1; q_2) t d_{q_1} t\right) \\
&= M_{n_2}^y(1; q_2) \left([n_1 - 1]_{q_1} \sum_{k=1}^{\infty} P_{n_1, k}^{q_1}(x) \int_0^{\infty/A_1} q_1^{k-1} P_{n_1, k-1}^{q_1}(t) t d_{q_1} t\right)
\end{aligned}$$

Lemma 3.2.1 (i) ve (ii) den

$$M_{n_1, n_2}(e_{10}; q_1, q_2, x, y) = 1 \frac{[n_1]_{q_1} x}{q_1 [n_1 - 2]_{q_1}} = \frac{[n_1]_{q_1} x}{q_1 [n_1 - 2]_{q_1}}$$

elde edilir.

(iii) $e_{ij}(t, s) = t^i s^j$ eşitliğinde $i = 0$ ve $j = 1$ için $e_{01}(t, s) = t^0 s^1 = s$ bulunur. O halde

Lemma 4.1.1 (i) den

$$M_{n_1, n_2}(e_{01}; q_1, q_2, x, y) = M_{n_1}^x(M_{n_2}^y(e_{01}; q_2); q_1) + P_{n_1, 0}^{q_1}(x) P_{n_2, 0}^{q_2}(y) e_{01}(0, 0)$$

$e_{01}(t, s) = s$ için $e_{01}(0, 0) = 0$ olduğundan

$$M_{n_1, n_2}(e_{01}; q_1, q_2, x, y) = M_{n_1}^x(M_{n_2}^y(e_{01}; q_2); q_1)$$

şeklinde bulunur. O halde

$$\begin{aligned}
M_{n_1, n_2}(e_{01}; q_1, q_2, x, y) &= M_{n_1}^x(M_{n_2}^y(e_{01}; q_2); q_1) \\
&= M_{n_1}^x\left([n_2 - 1]_{q_2} \sum_{j=1}^{\infty} P_{n_2, j}^{q_2}(y) \int_0^{\infty/A_2} q_2^{j-1} P_{n_2, j-1}^{q_2}(s) s d_{q_2} s; q_1\right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. $M_{n_1}^x$ in lineerliğinden

$$\begin{aligned}
M_{n_1, n_2}(e_{01}; q_1, q_2, x, y) &= \left([n_2 - 1]_{q_2} \sum_{j=1}^{\infty} P_{n_2, j}^{q_2}(y) \int_0^{\infty/A_2} q_2^{j-1} P_{n_2, j-1}^{q_2}(s) M_{n_1}^x(1; q_1) s d_{q_2} s\right)
\end{aligned}$$

$$= M_{n_1}^x(1; q_1) \left([n_2 - 1]_{q_2} \sum_{j=1}^{\infty} P_{n_2, j}^{q_2}(y) \int_0^{\infty/A_2} q_2^{j-1} P_{n_2, j-1}^{q_2}(s) s d_{q_2} s \right)$$

Lemma 3.2.1 (i) ve (ii) den

$$M_{n_1, n_2}(e_{01}; q_1, q_2, x, y) = 1 \frac{[n_2]_{q_2} y}{q_2 [n_2 - 2]_{q_2}} = \frac{[n_2]_{q_2} y}{q_2 [n_2 - 2]_{q_2}}$$

elde edilir.

(iv) $e_{ij}(t, s) = t^i s^j$ eşitliğinde $i = 2$ ve $j = 0$ için $e_{20}(t, s) = t^2 s^0 = t^2$ bulunur. O halde

Lemma 4.1.1 (ii) den

$$M_{n_1, n_2}(e_{20}; q_1, q_2, x, y) = M_{n_2}^y(M_{n_1}^x(e_{20}; q_1); q_2) + P_{n_1, 0}^{q_1}(x) P_{n_2, 0}^{q_2}(y) e_{20}(0, 0)$$

$e_{20}(t, s) = t^2$ için $e_{20}(0, 0) = 0$ olduğundan

$$M_{n_1, n_2}(e_{20}; q_1, q_2, x, y) = M_{n_2}^y(M_{n_1}^x(e_{20}; q_1); q_2)$$

şeklinde bulunur. O halde

$$\begin{aligned} M_{n_1, n_2}(e_{20}; q_1, q_2, x, y) &= M_{n_2}^y(M_{n_1}^x(e_{20}; q_1); q_2) \\ &= M_{n_2}^y \left([n_1 - 1]_{q_1} \sum_{k=1}^{\infty} P_{n_1, k}^{q_1}(x) \int_0^{\infty/A_1} q_1^{k-1} P_{n_1, k-1}^{q_1}(t) t^2 d_{q_1} t; q_2 \right) \end{aligned}$$

yazılabilir. $M_{n_2}^y$ in lineerliğinden

$$\begin{aligned} M_{n_1, n_2}(e_{20}; q_1, q_2, x, y) &= \left([n_1 - 1]_{q_1} \sum_{k=1}^{\infty} P_{n_1, k}^{q_1}(x) \int_0^{\infty/A_1} q_1^{k-1} P_{n_1, k-1}^{q_1}(t) M_{n_2}^y(1; q_2) t^2 d_{q_1} t \right) \\ &= M_{n_2}^y(1; q_2) \left([n_1 - 1]_{q_1} \sum_{k=1}^{\infty} P_{n_1, k}^{q_1}(x) \int_0^{\infty/A_1} q_1^{k-1} P_{n_1, k-1}^{q_1}(t) t^2 d_{q_1} t \right) \end{aligned}$$

Lemma 3.2.1 (i) ve (ii) den

$$\begin{aligned} M_{n_1, n_2}(e_{20}; q_1, q_2, x, y) &= 1 \frac{[n_1]_{q_1} [n_1 + 1]_{q_1} x^2}{q_1^4 [n_1 - 2]_{q_1} [n_1 - 3]_{q_1}} + \frac{[2]_{q_1} [n_1]_{q_1} x}{q_1^3 [n_1 - 2]_{q_1} [n_1 - 3]_{q_1}} \\ &= \frac{[n_1]_{q_1} [n_1 + 1]_{q_1} x^2}{q_1^4 [n_1 - 2]_{q_1} [n_1 - 3]_{q_1}} + \frac{[2]_{q_1} [n_1]_{q_1} x}{q_1^3 [n_1 - 2]_{q_1} [n_1 - 3]_{q_1}} \end{aligned}$$

(v) $e_{ij}(t, s) = t^i s^j$ eşitliğinde $i = 0$ ve $j = 2$ için $e_{02}(t, s) = t^0 s^2 = s^2$ bulunur. O halde Lemma 4.1.1 (i) den

$$M_{n_1, n_2}(e_{02}; q_1, q_2, x, y) = M_{n_1}^x(M_{n_2}^y(e_{02}; q_2); q_1) + P_{n_1, 0}^{q_1}(x) P_{n_2, 0}^{q_2}(y) e_{02}(0, 0)$$

$e_{02}(t, s) = s^2$ için $e_{02}(0, 0) = 0$ olduğundan

$$M_{n_1, n_2}(e_{02}; q_1, q_2, x, y) = M_{n_1}^x(M_{n_2}^y(e_{02}; q_2); q_1)$$

şeklinde bulunur. O halde

$$\begin{aligned} M_{n_1, n_2}(e_{02}; q_1, q_2, x, y) &= M_{n_1}^x(M_{n_2}^y(e_{02}; q_2); q_1) \\ &= M_{n_1}^x \left([n_2 - 1]_{q_2} \sum_{j=1}^{\infty} P_{n_2, j}^{q_2}(y) \int_0^{\infty/A_2} q_2^{j-1} P_{n_2, j-1}^{q_2}(s) s^2 d_{q_2} s; q_1 \right) \end{aligned}$$

yazılabilir. $M_{n_1}^x$ ifadesinin lineerliğinden

$$\begin{aligned} M_{n_1, n_2}(e_{02}; q_1, q_2, x, y) &= \left([n_2 - 1]_{q_2} \sum_{j=1}^{\infty} P_{n_2, j}^{q_2}(y) \int_0^{\infty/A_2} q_2^{j-1} P_{n_2, j-1}^{q_2}(s) M_{n_1}^x(1; q_1) s^2 d_{q_2} s \right) \\ &= M_{n_1}^x(1; q_1) \left([n_2 - 1]_{q_2} \sum_{j=1}^{\infty} P_{n_2, j}^{q_2}(y) \int_0^{\infty/A_2} q_2^{j-1} P_{n_2, j-1}^{q_2}(s) s^2 d_{q_2} s \right) \end{aligned}$$

Lemma 3.2.1 (i) ve (ii) den

$$\begin{aligned} M_{n_1, n_2}(e_{02}; q_1, q_2, x, y) &= 1 \left(\frac{[n_2]_{q_2} [n_2 + 1]_{q_2} x^2}{q_2^4 [n_2 - 2]_{q_2} [n_2 - 3]_{q_2}} + \frac{[2]_{q_2} [n_2]_{q_2} x}{q_2^3 [n_2 - 2]_{q_2} [n_2 - 3]_{q_2}} \right) \\ &= \left(\frac{[n_2]_{q_2} [n_2 + 1]_{q_2} x^2}{q_2^4 [n_2 - 2]_{q_2} [n_2 - 3]_{q_2}} + \frac{[2]_{q_2} [n_2]_{q_2} x}{q_2^3 [n_2 - 2]_{q_2} [n_2 - 3]_{q_2}} \right) \end{aligned}$$

şeklinde ispat tamamlanır.

4.2.1. Volkov tip yaklaşım

Öncelikle, Volkov [18] tarafından verilen iki değişkenli fonksiyonlar için Korovkin tip yaklaşım teoremini hatırlayalım.

4.2.1. Teorem (Volkov Teoremi)

$A, \mathbb{R}^{2'}$ de kapalı ve sınırlı bir bölge, $C(A)$, bu A bölgesinde tanımlı sürekli ve reel değerli f fonksiyonların kümesi ve $L_{n,m}(f(t,s); x,y), C(A)$ üzerinde tanımlı bir lineer pozitif operatörler dizisi olsun.

$$f_0 = e_{00}(t,s) = 1$$

$$f_1 = e_{10}(t,s) = t$$

$$f_2 = e_{01}(t,s) = s$$

$$f_3 = e_{20}(t,s) + e_{02}(t,s) = t^2 + s^2$$

olmak üzere, $(L_{n,m})$ lineer pozitif operatörler dizisi

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|L_{n,m}(f_i) - f_i\|_{C(A)} = 0, \quad i = 0,1,2,3$$

koşullarını sağlıyorsa bu durumda her $f \in C(A)$ için A üzerinde

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|L_{n,m}(f) - f\|_{C(A)} = 0$$

gerçeklenir [18].

Şimdi iki değişkenli $M_{n_1,n_2}^{q_1,q_2}$ operatörleri için Volkov tip bir teorem verelim.

4.2.2. Teorem

$0 < q_{1,n_1}, q_{2,n_2} \leq 1$ olmak üzere, (q_{1,n_1}) ve (q_{2,n_2}) dizileri,

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} q_{1,n_1} = 1, \quad \lim_{n_2 \rightarrow \infty} q_{2,n_2} = 1 \quad (4.4)$$

koşullarını gerçekleştiriyorsa, her $f \in C(I)$ için, $\{M_{n_1,n_2}^{q_1,q_2}(f; x,y)\}$ operatörler dizisi I üzerinde $f(x,y)$ ye düzgün yakınsaktır[17].

İspat

Bu teoremin ispatı Teorem 4.2.1'den yararlanılarak yapılacaktır. Bunun için,

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|M_{n,m}(f_i) - f_i\|_{C(A)} = 0, \quad i = 0,1,2,3 \quad (4.5)$$

sağlandığını göstermeliyiz.

Ayrıca $C(I)$ uzayındaki norm tanımından

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \|M_{n_1, n_2}^{q_1, q_2} - f\|_{C(I)} = \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \max_{(x, y) \in I} |M_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(f; x, y) - f(x, y)|$$

yazılabilir.

Lemma 4.2.1 (i) den,

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \max_{(x, y) \in I} |M_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(1; x, y) - 1| = 0$$

olduğu açıktır.

Lemma 4.2.1 (ii) ve Eş. 4.4 den

$$\begin{aligned} 0 \leq |M_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(t; x, y) - x| &= \left| \frac{[n_1]_{q_{n_1}} x}{q_{n_1} [n_1 - 2]_{q_{n_1}}} - x \right| = \left| \frac{[n_1]_{q_{n_1}} x - q_{n_1} [n_1 - 2]_{q_{n_1}} x}{q_{n_1} [n_1 - 2]_{q_{n_1}}} \right| \\ &= |x| \left| \frac{[n_1]_{q_{n_1}} - q_{n_1} [n_1 - 2]_{q_{n_1}}}{q_{n_1} [n_1 - 2]_{q_{n_1}}} \right| \end{aligned}$$

Üçgen eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} 0 \leq |M_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(t; x, y) - x| &\leq r_1 \left| \frac{[n_1]_{q_{n_1}} - q_{n_1} [n_1 - 2]_{q_{n_1}}}{q_{n_1} [n_1 - 2]_{q_{n_1}}} \right| \\ &= r_1 \left| \frac{1 + q_{n_1} - q_{n_1} (1 - q_{n_1}) [n_1 - 2]_{q_{n_1}}}{q_{n_1} [n_1 - 2]_{q_{n_1}}} \right| \\ &\leq r_1 \left(\left| \frac{1 + q_{n_1}}{q_{n_1} [n_1 - 2]_{q_{n_1}}} \right| + \left| \frac{q_{n_1} (1 - q_{n_1}) [n_1 - 2]_{q_{n_1}}}{q_{n_1} [n_1 - 2]_{q_{n_1}}} \right| \right) \\ &= r_1 \left| \frac{1 + q_{n_1}}{q_{n_1} [n_1 - 2]_{q_{n_1}}} \right| + r_1 |(1 - q_{n_1})| \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte eşitsizliğin her iki tarafının maksimumu alınır ve $n_1, n_2 \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa, sıkıştırma teoreminden

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \max_{(x, y) \in I} |M_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(t; x, y) - x| = 0$$

bulunur. O halde, $M_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(t; x, y)$, x 'e I üzerinde düzgün yakınsar.

Lemma 4.2.1 (iii) ve Eş. 4.4'ten,

$$\begin{aligned} 0 \leq |M_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(s; x, y) - y| &= \left| \frac{[n_2]_{q_{n_2}} y}{q_{n_2} [n_2 - 2]_{q_{n_2}}} - y \right| = \left| \frac{[n_2]_{q_{n_2}} y - q_{n_2} [n_2 - 2]_{q_{n_2}} y}{q_{n_2} [n_2 - 2]_{q_{n_2}}} \right| \\ &= |y| \left| \frac{[n_2]_{q_{n_2}} - q_{n_2} [n_2 - 2]_{q_{n_2}}}{q_{n_2} [n_2 - 2]_{q_{n_2}}} \right| \end{aligned}$$

Üçgen eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
0 \leq |M_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(s; x, y) - y| &\leq r_2 \left| \frac{[n_2]_{q_{n_2}} - q_{n_2}[n_2 - 2]_{q_{n_2}}}{q_{n_2}[n_2 - 2]_{q_{n_2}}} \right| \\
&= r_2 \left| \frac{1 + q_{n_2} - q_{n_2}(1 - q_{n_2})[n_2 - 2]_{q_{n_2}}}{q_{n_2}[n_2 - 2]_{q_{n_2}}} \right| \\
&\leq r_2 \left| \frac{1 + q_{n_2}}{q_{n_2}[n_2 - 2]_{q_{n_2}}} \right| + r_2 \left| \frac{q_{n_2}(1 - q_{n_2})[n_2 - 2]_{q_{n_2}}}{q_{n_2}[n_2 - 2]_{q_{n_2}}} \right| \\
&= r_2 \left| \frac{1 + q_{n_2}}{q_{n_2}[n_2 - 2]_{q_{n_2}}} \right| + r_2 |(1 - q_{n_2})|.
\end{aligned}$$

Son eşitsizlikte eşitsizliğin her iki tarafının maksimumu alınır ve $n_1, n_2 \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa sıkıştırma teoreminden,

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \max_{(x, y) \in I} |M_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(s; x, y) - y| = 0$$

bulunur. O halde, $M_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(s; x, y)$ y 'ye I üzerinde düzgün yakınsar.

Lemma 4.2.1 (iv) ve Eş. 4.4'ten,

$$\begin{aligned}
0 \leq |M_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(t^2; x, y) - x^2| &= \left| \frac{[n_1]_{q_{n_1}}[n_1 + 1]_{q_{n_1}}x^2}{q_{n_1}^4[n_1 - 2]_{q_{n_1}}[n_1 - 3]_{q_{n_1}}} + \frac{[2]_{q_{n_1}}[n_1]_{q_{n_1}}x}{q_{n_1}^3[n_1 - 2]_{q_{n_1}}[n_1 - 3]_{q_{n_1}}} - x^2 \right| \\
&= \left| \frac{[n_1]_{q_{n_1}}[n_1 + 1]_{q_{n_1}}x^2 - x^2(q_{n_1}^4[n_1 - 2]_{q_{n_1}}[n_1 - 3]_{q_{n_1}})}{q_{n_1}^4[n_1 - 2]_{q_{n_1}}[n_1 - 3]_{q_{n_1}}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{[2]_{q_{n_1}}[n_1]_{q_{n_1}}x}{q_{n_1}^3[n_1 - 2]_{q_{n_1}}[n_1 - 3]_{q_{n_1}}} \right|
\end{aligned}$$

üçgen eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
0 \leq |M_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(t^2; x, y) - x^2| &\leq r_1^2 \left| \frac{[n_1]_{q_{n_1}}[n_1 + 1]_{q_{n_1}} - (q_{n_1}^4[n_1 - 2]_{q_{n_1}}[n_1 - 3]_{q_{n_1}})}{q_{n_1}^4[n_1 - 2]_{q_{n_1}}[n_1 - 3]_{q_{n_1}}} \right| \\
&\quad + r_1 \left| \frac{[2]_{q_{n_1}}[n_1]_{q_{n_1}}}{q_{n_1}^3[n_1 - 2]_{q_{n_1}}[n_1 - 3]_{q_{n_1}}} \right| \\
&= r_1^2 \left| \frac{[n_1]_{q_{n_1}}[n_1 + 1]_{q_{n_1}}}{q_{n_1}^4[n_1 - 2]_{q_{n_1}}[n_1 - 3]_{q_{n_1}}} - \frac{(q_{n_1}^4[n_1 - 2]_{q_{n_1}}[n_1 - 3]_{q_{n_1}})}{q_{n_1}^4[n_1 - 2]_{q_{n_1}}[n_1 - 3]_{q_{n_1}}} \right|
\end{aligned}$$

$$+r_1 \left| \frac{[2]_{q_{n_1}} [n_1]_{q_{n_1}}}{q_{n_1}^3 [n_1 - 2]_{q_{n_1}} [n_1 - 3]_{q_{n_1}}} \right|$$

Son eşitsizlikte eşitsizliğin her iki tarafının maksimumu alınır ve $n_1, n_2 \rightarrow \infty$ iken limit alınır, sıkıştırma teoreminden

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \max_{(x, y) \in I} |M_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(t^2; x, y) - x^2| = 0$$

bulunur. O halde $M_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(t^2; x, y)$, x^2 'ye I üzerinde düzgün yakınsar.

Lemma 4.2.1 (v) ve Eş. 4.4'ten,

$$\begin{aligned} 0 &\leq |M_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(s^2; x, y) - y^2| \\ &= \left| \frac{[n_2]_{q_{n_2}} [n_2 + 1]_{q_{n_2}} y^2}{q_{n_2}^4 [n_2 - 2]_{q_{n_2}} [n_2 - 3]_{q_{n_2}}} + \frac{[2]_{q_{n_2}} [n_2]_{q_{n_2}} y}{q_{n_2}^3 [n_2 - 2]_{q_{n_2}} [n_2 - 3]_{q_{n_2}}} - y^2 \right| \\ &= \left| \frac{[n_2]_{q_{n_2}} [n_2 + 1]_{q_{n_2}} y^2 - y^2 (q_{n_2}^4 [n_2 - 2]_{q_{n_2}} [n_2 - 3]_{q_{n_2}})}{q_{n_2}^4 [n_2 - 2]_{q_{n_2}} [n_2 - 3]_{q_{n_2}}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{[2]_{q_{n_2}} [n_2]_{q_{n_2}} y}{q_{n_2}^3 [n_2 - 2]_{q_{n_2}} [n_2 - 3]_{q_{n_2}}} \right| \end{aligned}$$

üçgen eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} 0 &\leq |M_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(s^2; x, y) - y^2| \\ &\leq r_2^2 \left| \frac{[n_2]_{q_{n_2}} [n_2 + 1]_{q_{n_2}} - (q_{n_2}^4 [n_2 - 2]_{q_{n_2}} [n_2 - 3]_{q_{n_2}})}{q_{n_2}^4 [n_2 - 2]_{q_{n_2}} [n_2 - 3]_{q_{n_2}}} \right| \\ &\quad + r_2 \left| \frac{[2]_{q_{n_2}} [n_2]_{q_{n_2}}}{q_{n_2}^3 [n_2 - 2]_{q_{n_2}} [n_2 - 3]_{q_{n_2}}} \right| \\ &= r_2^2 \left| \frac{[n_2]_{q_{n_2}} [n_2 + 1]_{q_{n_2}}}{q_{n_2}^4 [n_2 - 2]_{q_{n_2}} [n_2 - 3]_{q_{n_2}}} - \frac{(q_{n_2}^4 [n_2 - 2]_{q_{n_2}} [n_2 - 3]_{q_{n_2}})}{q_{n_2}^4 [n_2 - 2]_{q_{n_2}} [n_2 - 3]_{q_{n_2}}} \right| \\ &\quad + r_2 \left| \frac{[2]_{q_{n_2}} [n_2]_{q_{n_2}}}{q_{n_2}^3 [n_2 - 2]_{q_{n_2}} [n_2 - 3]_{q_{n_2}}} \right| \end{aligned}$$

Son eşitsizlikte eşitsizliğin her iki tarafının maksimumu alınır ve $n_1, n_2 \rightarrow \infty$ iken limit alınır, sıkıştırma teoreminden

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \max_{(x, y) \in I} |M_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(s^2; x, y) - y^2| = 0$$

bulunur. Buradan da $M_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(s^2; x, y)$ I üzerinde y^2 'ye düzgün yakınsar. Eş.

4.5 ile verilen tüm koşullar sağlandığından

Her $f \in C(I)$ için, $(M_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(f; x, y))$ operatörler dizisi I üzerinde $f(x, y)$ ye düzgün yakınsaktır.

4.2.2 Ağırlıklı Yaklaşım

İlk önce ağırlıklı uzay tanımlarını hatırlayalım:

$\rho: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \rho(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ iki değişkenli ağırlık fonksiyonu olsun. B_ρ

ile $[0, \infty) \times [0, \infty)$ üzerinde tanımlı her $(x, y) \in [0, \infty) \times [0, \infty)$ için

$$|f(x, y)| \leq M_f \rho(x, y), M_f > 0$$

şartını sağlayan reel değerli fonksiyonların uzayı gösterilsin. C_ρ ise B_ρ nun tüm sürekli f fonksiyonlarının alt uzayını gösterebilir.

C_ρ ve B_ρ uzayları üzerindeki norm her $f \in C_\rho$ (veya B_ρ) için

$$\|f\|_\rho = \sup_{x, y \geq 0} \frac{|f(x, y)|}{\rho(x, y)}$$

olarak tanımlıdır.

C_ρ^0 ile de

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty} \frac{f(x, y)}{\rho(x, y)} < \infty$$

olacak şekilde bütün f fonksiyonlarının C_ρ içindeki alt uzayı gösterilsin.

Gadzhiev [15,16] aşağıdaki ağırlıklı yaklaşım sonuçlarını vermiştir.

4.2.2. Lemma

$\{L_{n_1, n_2}\}_{n_1, n_2 \in \mathbb{N}}, C_\rho$ dan B_ρ 'ya tanımlı herhangi bir lineer pozitif operatörlerin dizisi olsun.

Bu durumda

$$\|L_{n_1, n_2}(\rho)\|_\rho \leq M$$

olacak şekilde bir $M > 0$ reel sayısı mevcuttur.

4.2.3. Teorem

$$f_0 = e_{00}(t, s) = 1, f_1 = e_{10}(t, s) = t, f_2 = e_{01}(t, s) = s,$$

$$f_3 = e_{20}(t, s) + e_{02}(t, s) = t^2 + s^2, \text{ iki değişkenli test fonksiyonlar, } \{L_{n_1, n_2}\}_{n_1, n_2 \in \mathbb{N}} \subset C_\rho$$

dan B_ρ 'ya lineer pozitif operatörlerin herhangi bir dizisi olsun. Eğer $\{L_{n_1, n_2}\}_{n_1, n_2 \in \mathbb{N}}$

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \|L_{n_1, n_2}(f_i) - f_i\|_\rho = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (4.6)$$

şartlarını sağlar ise bu durumda her $f \in C_\rho^0$ için

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \|L_{n_1, n_2}(f) - f\|_\rho = 0$$

limiti doğrudur [15,16].

$\{a_{n_1}\}_{n_1 \in \mathbb{N}}$ ve $\{b_{n_2}\}_{n_2 \in \mathbb{N}}$ reel sayı dizileri

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} a_{n_1} = \infty$$

$$\lim_{n_2 \rightarrow \infty} b_{n_2} = \infty$$

limitleri sağlansın. $I_{a_{n_1}, b_{n_2}}$ ile

$$I_{a_{n_1}, b_{n_2}} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a_{n_1}, 0 \leq y \leq b_{n_2}\}$$

ile tanımlı bölge gösterilsin.

Aşağıda tanımlanan lineer pozitif operatörü ele alalım.

$$\tilde{M}_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(f(t, s); x, y) = \begin{cases} M_{n_1, n_2}^{q_1, q_2}(f(t, s); x, y), & (x, y) \in I_{a_{n_1}, b_{n_2}} \text{ ise} \\ f(x, y), & (x, y) \notin I_{a_{n_1}, b_{n_2}} \text{ ise} \end{cases} \quad (4.7)$$

4.2.4. Teorem

$0 < q_{1, n_1}, q_{2, n_2} < 1$ olmak üzere $\{q_{1, n_1}\}$ ve $\{q_{2, n_2}\}$ Eş. 4.4 ile verilen koşulu sağlayan diziler,

$\{\tilde{M}_{n_1, n_2}^{q_{1, n_1}, q_{2, n_2}}\}$ Eş. 4.7 ile tanımlı lineer pozitif operatörlerin dizisi olsun. Her $f \in C_\rho^0$ için

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \|\tilde{M}_{n_1, n_2}^{q_{1, n_1}, q_{2, n_2}}(f) - f\|_\rho = 0$$

limiti vardır.

İspat

$\tilde{M}_{n_1, n_2}^{q_1, n_1, q_2, n_2}$ operatörünün C_ρ dan B_ρ 'ya bir operatör olduğunu göstermeliyiz.

Lemma 4.2.1'i dikkate alarak,

$$\begin{aligned}
\|\tilde{M}_{n_1, n_2}^{q_1, n_1, q_2, n_2}(\rho)\|_\rho &= \sup_{x, y \geq 0} \frac{|\tilde{M}_{n_1, n_2}^{q_1, n_1, q_2, n_2}(1 + t^2 + s^2; x, y)|}{1 + x^2 + y^2} \\
&\leq 1 + \sup_{(x, y) \in I_{a_{n_1}, b_{n_2}}} \frac{|1 + M_{n_1, n_2}^{q_1, n_1, q_2, n_2}(t^2; x, y) + M_{n_1, n_2}^{q_1, n_1, q_2, n_2}(s^2; x, y)|}{1 + x^2 + y^2} \\
&\leq 1 + \sup_{(x, y) \in I_{a_{n_1}, b_{n_2}}} \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \left[1 + \frac{[n_1]_{q_1, n_1} [n_1 + 1]_{q_1, n_1} x^2}{q_{1, n_1}^4 [n_1 - 2]_{q_1, n_1} [n_1 - 3]_{q_1, n_1}} \right. \\
&\quad + \frac{[2]_{q_1, n_1} [n_1]_{q_1, n_1} x}{q_{1, n_1}^3 [n_1 - 2]_{q_1, n_1} [n_1 - 3]_{q_1, n_1}} + \frac{[n_2]_{q_2, n_2} [n_2 + 1]_{q_2, n_2} y^2}{q_{2, n_2}^4 [n_2 - 2]_{q_2, n_2} [n_2 - 3]_{q_2, n_2}} \\
&\quad \left. + \frac{[2]_{q_2, n_2} [n_2]_{q_2, n_2} y}{q_{2, n_2}^3 [n_2 - 2]_{q_2, n_2} [n_2 - 3]_{q_2, n_2}} \right] \\
&\leq \left[1 + \frac{[n_1]_{q_1, n_1} [n_1 + 1]_{q_1, n_1}}{q_{1, n_1}^4 [n_1 - 2]_{q_1, n_1} [n_1 - 3]_{q_1, n_1}} + \frac{[2]_{q_1, n_1} [n_1]_{q_1, n_1}}{q_{1, n_1}^3 [n_1 - 2]_{q_1, n_1} [n_1 - 3]_{q_1, n_1}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{[n_2]_{q_2, n_2} [n_2 + 1]_{q_2, n_2} y^2}{q_{2, n_2}^4 [n_2 - 2]_{q_2, n_2} [n_2 - 3]_{q_2, n_2}} + \frac{[2]_{q_2, n_2} [n_2]_{q_2, n_2} y}{q_{2, n_2}^3 [n_2 - 2]_{q_2, n_2} [n_2 - 3]_{q_2, n_2}} \right] \\
&\leq 8.
\end{aligned}$$

Böylece $\tilde{M}_{n_1, n_2}^{q_1, n_1, q_2, n_2}$ C_ρ dan B_ρ 'ya bir lineer operatördür. İspatın kalanı için Eş. 4.6'yı sağlamak yeterlidir.

$f_0 = e_{00}(t, s) = 1$ için

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \|\tilde{M}_{n_1, n_2}^{q_1, n_1, q_2, n_2}(f_0; \cdot) - f_0\|_\rho = 0 \quad (4.8)$$

olduğu açıktır.

Lemma 4.2.1'i dikkate alarak,

$$\begin{aligned}
\|\tilde{M}_{n_1, n_2}^{q_1, n_1, q_2, n_2}(f_1; \cdot) - f_1\|_\rho &= \sup_{x, y \geq 0} \frac{|M_{n_1, n_2}^{q_1, n_1, q_2, n_2}(t; x, y) - x|}{1 + x^2 + y^2} \\
&\leq \left| \frac{[n_1]_{q_1, n_1}}{q_{1, n_1} [n_1 - 2]_{q_1, n_1}} - 1 \right| \sup_{(x, y) \in I_{a_{n_1}, b_{n_2}}} \frac{x}{1 + x^2 + y^2}
\end{aligned}$$

$$= \left| \frac{[n_1]_{q_1, n_1}}{q_{1, n_1} [n_1 - 2]_{q_1, n_1}} - 1 \right| \quad (4.9)$$

Eş. 4.9'dan

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \|\tilde{M}_{n_1, n_2}^{q_1, n_1, q_2, n_2}(f_1; \cdot) - f_1\|_\rho = 0 \quad (4.10)$$

elde edilir.

Benzer şekilde,

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \|\tilde{M}_{n_1, n_2}^{q_1, n_1, q_2, n_2}(f_2; \cdot) - f_2\|_\rho = 0 \quad (4.11)$$

bulunur. Ayrıca Lemma 4.2.1 dikkate alınarak,

$$\begin{aligned} & \|\tilde{M}_{n_1, n_2}^{q_1, n_1, q_2, n_2}(f_3; \cdot) - f_3\|_\rho \\ &= \sup_{x, y \geq 0} \frac{|\tilde{M}_{n_1, n_2}^{q_1, n_1, q_2, n_2}(t^2 + s^2; x, y) - (x^2 + y^2)|}{1 + x^2 + y^2} \\ &\leq \left| \frac{[n_1]_{q_1, n_1} [n_1 + 1]_{q_1, n_1}}{q_{1, n_1}^4 [n_1 - 2]_{q_1, n_1} [n_1 - 3]_{q_1, n_1}} - 1 \right| \sup_{(x, y) \in I_{a_{n_1}, b_{n_2}}} \frac{x^2}{1 + x^2 + y^2} \\ &\quad + \frac{[2]_{q_1, n_1} [n_1]_{q_1, n_1}}{q_{1, n_1}^3 [n_1 - 2]_{q_1, n_1} [n_1 - 3]_{q_1, n_1}} \sup_{(x, y) \in I_{a_{n_1}, b_{n_2}}} \frac{x}{1 + x^2 + y^2} \\ &\quad + \left| \frac{[n_2]_{q_2, n_2} [n_2 + 1]_{q_2, n_2}}{q_{2, n_2}^4 [n_2 - 2]_{q_2, n_2} [n_2 - 3]_{q_2, n_2}} - 1 \right| \sup_{(x, y) \in I_{a_{n_1}, b_{n_2}}} \frac{y^2}{1 + x^2 + y^2} \\ &\quad + \frac{[2]_{q_2, n_2} [n_2]_{q_2, n_2}}{q_{2, n_2}^3 [n_2 - 2]_{q_2, n_2} [n_2 - 3]_{q_2, n_2}} \sup_{(x, y) \in I_{a_{n_1}, b_{n_2}}} \frac{y}{1 + x^2 + y^2} \\ &\leq \left| \frac{[n_1]_{q_1, n_1} [n_1 + 1]_{q_1, n_1}}{q_{1, n_1}^4 [n_1 - 2]_{q_1, n_1} [n_1 - 3]_{q_1, n_1}} - 1 \right| + \frac{[2]_{q_1, n_1} [n_1]_{q_1, n_1}}{q_{1, n_1}^3 [n_1 - 2]_{q_1, n_1} [n_1 - 3]_{q_1, n_1}} \\ &\quad + \left| \frac{[n_2]_{q_2, n_2} [n_2 + 1]_{q_2, n_2}}{q_{2, n_2}^4 [n_2 - 2]_{q_2, n_2} [n_2 - 3]_{q_2, n_2}} - 1 \right| + \frac{[2]_{q_2, n_2} [n_2]_{q_2, n_2}}{q_{2, n_2}^3 [n_2 - 2]_{q_2, n_2} [n_2 - 3]_{q_2, n_2}} \end{aligned} \quad (4.12)$$

elde edilir. Eş. 4.12'den

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \|\tilde{M}_{n_1, n_2}^{q_1, n_1, q_2, n_2}(f_3; \cdot) - f_3\|_\rho = 0 \quad (4.13)$$

bulunur. Eş. 4.8, Eş. 10, Eş. 4.11 ve Eş. 4.13'ten Teorem 4.2.3'ün hipotezleri sağlanır.

Böylece her $f \in C_g^0$ için

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \|\tilde{M}_{n_1, n_2}^{q_1, n_1, q_2, n_2}(f) - f\|_\rho = 0$$

elde edilir.



5. SONUÇLAR

Bu tezde, tek ve iki değişkenli q -Baskakov-Durrmeyer tip operatörlerin yaklaşım özellikleri çalışılmıştır. Teorem 3.2.2’de tek değişkenli operatörlerin düzgün yakınsaklığı Korovkin tip bir teorem ile araştırılmıştır. Teorem 3.2.3’te tek değişkenli operatörlerin yakınsama oranı ikinci süreklilik modülü yardımı ile hesaplanmıştır. Teorem 3.2.4 ve Teorem 3.2.5’te Lipschitz sınıfından fonksiyonlar için tek değişkenli operatörlerin lokal yaklaşım sonuçları verilmiştir. Teorem 3.2.6’da tek değişkenli operatörler için Gadzhiev tip ağırlıklı yaklaşım teoremi verilmiştir. Teorem 4.2.2’ de iki değişkenli operatörlerin düzgün yakınsaklığı Volkov tip bir teorem ile araştırılmıştır.

Son olarak Teorem 4.2.4’te iki değişkenli operatörlerin Gadzhiev tip ağırlıklı yaklaşım teoremi incelenmiştir.

Özetle, bu tezde Agrawal ve Kumar[8] ve Özkan ve Cömert [17] tarafından tanımlanan ve çalışılan sırasıyla tek ve iki değişkenli q -Baskakov-Durrmeyer tip operatörlerinin yaklaşımı araştırılmıştır.



KAYNAKLAR

1. Agrawal, P. N., & Thamer, K. J. (1998). Approximation of unbounded functions by a new sequence of linear positive operators. *Journal of mathematical analysis and applications*, 225(2), 660-672.
2. Gupta, V. (2008). Some approximation properties of q -Durrmeyer operators. *Applied Mathematics and Computation*, 197(1), 172-178.
3. Gupta, V., & Abel, U. (2004). Rate of convergence of bounded variation functions by a Bézier-Durrmeyer variant of the Baskakov operators. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2004(9), 459-468.
4. Phillips, G. M. (2003). Bernstein Polynomials. In *Interpolation and Approximation by Polynomials* (pp. 247-290). New York, NY Springer.
5. Gupta, V., & Heping, W. (2008). The rate of convergence of q -Durrmeyer operators for $0 < q < 1$. *Mathematical methods in the Applied Sciences*, 31(16), 1946-1955.
6. Gupta, V., & Aral, A. (2011). Some approximation properties of q -Baskakov–Durrmeyer operators. *Applied Mathematics and Computation*, 218(3), 783-788.
7. Gupta, V., & Radu, C. (2009). Statistical approximation properties of q -Baskakov-Kantorovich operators. *Open Mathematics*, 7(4), 809-818.
8. Agrawal, P. N., Gupta, V., & Kumar, A. S. (2014). Generalized Baskakov–Durrmeyer type operators. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1952-)*, 63(2), 193-209.
9. Hacısalihoğlu, H. ve Hacıyev, A. (1995). *Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı*, Ankara: A.Ü. Fen Fakültesi Yayınları, 1-20.
10. Kac, V., Cheung, P. (2002). *Quantum Calculus*, Newyork: Springer, 1-85.
11. De Sole, A., Kac, V.G. (2005). On integral representations of q -gamma and q -beta functions. *Rendiconti di Matematica Accademia Lincei Series* (9) 16(1), 11-29.
12. DeVore, R. A., & Lorentz, G. G. (1993). *Constructive approximation* (Vol. 303). Springer Science & Business Media.
13. Lenze, B. (1988, January). On Lipschitz-type maximal functions and their smoothness spaces. In *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*. North-Holland. Vol. 91, No. 1, pp. 53-63.
14. Aral, A., & Gupta, V. (2012). On the q analogue of Stancu-Beta operators. *Applied Mathematics Letters*, 25(1), 67-71.

15. Gadzhiev, A. D. O. (1974). The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets, and theorems analogous to that of PP Korovkin. In *Doklady Akademii Nauk* (Vol. 218, No. 5, pp. 1001-1004). Russian Academy of Sciences.
16. Gadjiev, A. D. (1976). Theorems of the type of PP Korovkin's theorems. *Mat. Zametki*, 20(5), 781-786.
17. Özkan, E. Y. ve Cömert, B. (2020, 29-31 Ekim). *İki Değişkenli q-Baskakov-Durrmeyer Tip Operatörler*, II. Uluslararası 29 Ekim Bilimsel Araştırmalar Sempozyumunda sunuldu, Ankara, Türkiye.
18. Volkov, V. I. (1957). On the convergence of sequences of linear positive operators in the space of continuous functions of two variables. In *Doklady Akademii Nauk* (Vol. 115, No. 1, pp. 17-19). Russian Academy of Sciences.
19. Korovkin, P. P. (1953). On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. In *Dokl. Akad. Nauk SSSR* Vol. 90, No. 953, pp. 961-964.
20. Bayraktar, M., (2006). "*Fonksiyonel Analiz*", Ankara: Gazi Kitabevi, 85-86.
21. Balcı, M. (1997). *Matematik analiz: cilt 1*. Ankara. Balcı yayımları.
22. O'Searcoid, M. (2006). *Metric spaces*. Ireland. Springer Science & Business Media.



GAZİ GELECEKTİR..