



**SONLU DEVİRLİ GRUPLARIN VE SONLU DİHEDRAL GRUPLARIN
POWER GRAFLARININ ENERJİLERİ, LAPLACIAN ENERJİLERİ VE
DISTANCE ENERJİLERİ İÇİN SINIRLAR**

Nurşah MUTLU VARLIOĞLU

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ŞUBAT 2021

Nurşah MUTLU VARLIOĞLU tarafından hazırlanan “SONLU DEVİRLİ GRUPLARIN VE SONLU DİHEDRAL GRUPLARIN POWER GRAFLARININ ENERJİLERİ, LAPLACIAN ENERJİLERİ VE DISTANCE ENERJİLERİ İÇİN SINIRLAR” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Başkan: Prof. Dr. Dursun TAŞCI

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Doç. Dr. Miraç ÇETİN

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı, Başkent Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Doç. Dr. Oktay ÖLMEZ

Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Gül ÖZKAN KIZILIRMAK

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 01/02/2021

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Cevriye GENCER

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Nurşah MUTLU VARLIOĞLU

01/02/2021

SONLU DEVİRLİ GRUPLARIN VE SONLU DİHEDRAL GRUPLARIN POWER
GRAFLARININ ENERJİLERİ, LAPLACIAN ENERJİLERİ VE DISTANCE
ENERJİLERİ İÇİN SINIRLAR
(Doktora Tezi)

Nurşah MUTLU VARLIOĞLU

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Şubat 2021

ÖZET

Bu çalışmada spektral graf teorideki temel matris kavramları, devirli grup ve dihedral grup yapıları göz önüne alınarak sonlu devirli grupların ve sonlu dihedral grupların power grafları için Laplacian matris, distance matris ve bu matrislerin özdeğerlerini kullanarak enerji, Laplacian enerji ve distance enerji kavramları yeniden tanımlanmıştır. Daha sonra sonlu devirli grupların ve sonlu dihedral grupların power graflarının enerjileri, Laplacian enerjileri, distance enerjileri ve en büyük distance özdeğerleri için bazı alt ve üst sınırlar elde edilmiştir. Ayrıca devirli grubun mertebesi ve power grafın tamlığı arasındaki ilişki göz önüne alınarak sonlu devirli grupların power graflarının tam olduğu durumlar için sonuçlar verilmiştir. Daha sonra devirli grup ve dihedral grup yapıları yardımıyla da sonlu devirli grupların ve sonlu dihedral grupların power graflarının enerjileri ve distance enerjileri için karşılaştırma sonuçları elde edilmiştir.

Bilim Kodu : 20401
Anahtar Kelimeler : Sonlu devirli grup, sonlu dihedral grup, power graf, enerji, Laplacian enerji, distance enerji, sınır
Sayfa Adedi : 156
Danışman : Prof. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE

BOUNDS FOR THE ENERGIES, THE LAPLACIAN ENERGIES AND THE
DISTANCE ENERGIES OF THE POWER GRAPHS OF FINITE CYCLIC GROUPS
AND FINITE DIHEDRAL GROUPS

(Ph. D. Thesis)

Nurşah MUTLU VARLIOĞLU

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

February 2021

ABSTRACT

In this study, considering the basic matrix concepts in spectral graph theory, cyclic group and dihedral group structures, the Laplacian matrix, the distance matrix and using the eigenvalues of these matrices, the energy, the Laplacian energy and the distance energy concepts were redefined for the power graphs of finite cyclic groups and finite dihedral groups. Then some lower and upper bounds for the energies, the Laplacian energies, the distance energies and the largest distance eigenvalues of the power graphs of finite cyclic groups and finite dihedral groups were obtained. Also considering the relationship between the order of the cyclic group and completeness of the power graphs, results were given for the cases where the power graphs of finite cyclic groups were complete. Then, with the help of cyclic group and dihedral group structures, comparison results for the energies and the distance energies of the power graphs of finite cycle groups and finite dihedral groups were obtained.

Science Code : 20401

Key Words : Finite cyclic group, finite dihedral group, power graph, energy, Laplacian energy, distance energy, bound

Page Number : 156

Supervisor : Prof. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE

TEŞEKKÜR

Çalışmam boyunca değerli yardım ve katkılarıyla bana rehberlik eden, fikirleri ve önerileriyle her zaman bana yardımcı olan, kıymetli tecrübelerinden faydalandığım değerli hocam Sayın Prof. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE'ye; tezime önemli katkılarda bulunan, düşünceleri ile yol gösteren değerli hocam Sayın Prof. Dr. Ercan ALTINIŞIK'a; tez çalışmamı 2017, 2211-A kodlu Yurtiçi Doktora Burs Programı ile destekleyerek maddi olanak sağlayan TÜBİTAK'a; her zaman bana cesaret veren, anlayış ve sevgilerini esirgemeyen, manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan sevgili eşim Seydi VARLIOĞLU'na, biricik oğlum Doğu Toprak VARLIOĞLU'na ve çok değerli anne ve babam Güler MUTLU ve Osman MUTLU'ya yürekten teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	ix
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	x
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖZELLİKLERİ	5
2.1. Genel Bilgiler	5
2.2. Graf Teoride Bazı Temel Tanım ve Kavramlar.....	9
2.3. Bazı Özel Graflar.....	13
2.4. Basit Grafların İlgili Matrisleri ve Spektrumları	16
2.5. Basit Grafların Enerjileri, Laplacian Enerjileri ve Distance Enerjileri	21
3. SONLU DEVİRLİ GRUPLARIN VE SONLU DİHEDRAL GRUPLARIN POWER GRAFLARI.....	27
3.1. Gruplar ve Gruplar Üzerindeki Power Graflar	27
3.2. Sonlu Devirli Grupların ve Sonlu Dihedral Grupların Power Graflarının Komşuluk Matrisleri, Laplacian Matrisleri ve Distance Matrisleri	34
3.2.1. Sonlu devirli grupların power graflarının komşuluk matrisleri, Laplacian matrisleri ve distance matrisleri	34
3.2.2. Sonlu dihedral grupların power graflarının komşuluk matrisleri ve distance matrisleri.....	40
3.3. Sonlu Devirli Grupların ve Sonlu Dihedral Grupların Power Graflarının Enerjileri, Laplacian Enerjileri ve Distance Enerjileri	45

3.3.1. Sonlu devirli grupların power graflarının enerjileri, Laplacian enerjileri ve distance enerjileri	45
3.3.2. Sonlu dihedral grupların power graflarının enerjileri ve distance enerjileri	48
4. SONLU DEVİRLİ GRUPLARIN VE SONLU DİHEDRAL GRUPLARIN POWER GRAFLARININ ENERJİLERİ İÇİN SINIRLAR	51
4.1. Sonlu Devirli Grupların Power Graflarının Enerjileri İçin Sınırlar	51
4.2. Sonlu Dihedral Grupların Power Graflarının Enerjileri İçin Sınırlar.....	70
5. SONLU DEVİRLİ GRUPLARIN POWER GRAFLARININ LAPLACIAN ENERJİLERİ İÇİN SINIRLAR	87
6. SONLU DEVİRLİ GRUPLARIN VE SONLU DİHEDRAL GRUPLARIN POWER GRAFLARININ DISTANCE ENERJİLERİ VE EN BÜYÜK DISTANCE ÖZDEĞERLERİ İÇİN SINIRLAR.....	107
6.1. Sonlu Devirli Grupların Power Graflarının Distance Enerjileri İçin Sınırlar	107
6.2. Sonlu Dihedral Grupların Power Graflarının Distance Enerjileri İçin Sınırlar	121
6.3. Sonlu Devirli Grupların ve Sonlu Dihedral Grupların Power Graflarının En Büyük Distance Özdeğerleri İçin Sınırlar.....	143
7. SONUÇ	151
KAYNAKLAR	153
ÖZGEÇMİŞ	155

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 4.1. $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10})$ 'un enerjisi için sınırlar	69
Çizelge 4.2. $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_5)$ 'in enerjisi için sınırlar	70
Çizelge 4.3. $\mathcal{P}(D_6)$ 'nın enerjisi için sınırlar	84
Çizelge 4.4. $\mathcal{P}(D_8)$ 'in enerjisi için sınırlar	85
Çizelge 5.1. $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{11}^*)$ 'in Laplacian enerjisi için sınırlar	104
Çizelge 5.2. $\mathcal{P}(X)$ 'in Laplacian enerjisi için sınırlar	106
Çizelge 6.1. $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_7^*)$ 'in distance enerjisi için sınırlar	120
Çizelge 6.2. $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10}^*)$ 'ın distance enerjisi için sınırlar	121
Çizelge 6.3. $\mathcal{P}(D_{12})$ 'nin distance enerjisi için sınırlar	138
Çizelge 6.4. $\mathcal{P}(D_6)$ 'nın distance enerjisi için sınırlar	139

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. $G = (V, E)$ grafi.....	9
Şekil 2.2. $G = (V, E)$ grafi.....	11
Şekil 2.3. $G = (V, E)$ grafi.....	12
Şekil 2.4. G grafi	13
Şekil 2.5. Basit graf.....	13
Şekil 2.6. G grafi	14
Şekil 2.7. K_4 ve K_5 tam grafları	15
Şekil 2.8. Regüler graf	15
Şekil 2.9. Yönlü graf.....	16
Şekil 2.10. Basit bağlantılı graf.....	17
Şekil 2.11. Basit bağlantılı graf.....	19
Şekil 2.12. Basit bağlantılı graf.....	21
Şekil 2.13. Basit bağlantılı graf.....	22
Şekil 2.14. Basit bağlantılı graf.....	23
Şekil 2.15. Basit bağlantılı graf.....	24
Şekil 3.1. $\vec{\mathcal{P}}(\mathbb{Z}_6)$ yönlü power grafi	30
Şekil 3.2. $\mathcal{P}(S_3)$ power grafi.....	32
Şekil 3.3. $\mathcal{P}(A_4)$ power grafi	33
Şekil 3.4. $\mathcal{P}(D_{2n})$ power grafi	34
Şekil 3.5. $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)$ power grafi	36
Şekil 3.6. Kare.....	41
Şekil 3.7. $\mathcal{P}(D_8)$ power grafi	42

Şekil	Sayfa
Şekil 4.1. $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10})$ power grafi.....	65
Şekil 4.2. $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_5)$ power grafi	69
Şekil 4.3. $\mathcal{P}(D_6)$ power grafi	83
Şekil 5.1. $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{11}^*)$ power grafi.....	102
Şekil 5.2. $\mathcal{P}(X)$ power grafi.....	105
Şekil 6.1. $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_7^*)$ power grafi	118
Şekil 6.2. $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10}^*)$ power grafi.....	120
Şekil 6.3. $\mathcal{P}(D_{12})$ power grafi.....	137

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

F	Cisim
$M_n(F)$	Elemanları F ye ait, n boyutlu matrisler kümesi
A^T	A matrisinin transpozu
$\bar{A}$	A matrisinin eşleniği
$tr(A)$	A matrisinin izi
$K_A(\lambda)$	A matrisinin karakteristik polinomu
$\sigma(A)$	A matrisinin spektrumu
$\rho(A)$	A matrisinin spektral yarıçapı
I	Birim matris
J	Tüm elemanları 1 olan kare matris
$G = (V, E)$ veya G	Graf
v_i	G grafının bir noktası
e_i	G grafının bir kenarı
V	G grafının noktalar kümesi
E	G grafının kenarlar kümesi
$ V $	V noktalar kümesinin kardinalitesi
$ E $	E kenarlar kümesinin kardinalitesi
$v_i \sim v_j$	v_i ve v_j noktalarının komşuluğu
N_{v_i}	v_i noktasının komşuluklar kümesi
$d(v_i)$	v_i noktasının derecesi
$d(v_i, v_j)$	v_i ve v_j noktaları arasındaki uzaklık
$\delta(G)$	G grafının minimum derecesi
$\Delta(G)$	G grafının maksimum derecesi
$d(G)$	G grafının ortalama derecesi
$A(G)$	G grafının komşuluk matrisi
$L(G)$	G grafının Laplacian matrisi

Simgeler**Açıklamalar**

$D(G)$	G grafinın derece matrisi
$\mathcal{D}(G)$	G grafinın distance matrisi
λ_i	G grafinın en büyük i -inci özdeğeri
μ_i	G grafinın en küçük i -inci Laplacian özdeğeri
∂_i	G grafinın en büyük i -inci distance özdeğeri
$\mathcal{E}(G)$	G grafinın enerjisi
$L\mathcal{E}(G)$	G grafinın Laplacian enerjisi
$\mathcal{DE}(G)$	G grafinın distance enerjisi
$P(G)$	G grubunun power grafi
$\vec{P}(G)$	G grubunun yönlü power grafi
W	Yürüme
P	Yol
K_n	n noktalı tam graf
C_n	n -inci mertebeden devirli grup
D_{2n}	$2n$ -inci mertebeden dihedral grup
S_n	n elemanlı simetrik grup
A_n	n elemanlı alterne grup
$\mathbb{Z}_n$	n modülüne göre tam sayılar grubu
$\mathbb{Z}_n^*$	n modülüne göre n ile aralarında asal tam sayı grubu
x	Perron özvektör

1. GİRİŞ

Günümüzde fen bilimleri, kriptoloji, veri tabanları, elektronik devreler gibi pek çok alanda kullanılan cebirsel graf teori, cebirsel yöntemlerin graf ile ilgili problemlere uygulandığı graf teorisinin bir alt alanıdır. Cebirsel graf teori, üç temel alanda incelenir. Bu alanlar; grup teorisi, lineer cebir ve graf değişmezleridir.

Cebirsel graf teori, lineer cebir anlamında incelendiğinde bir alt alanı olan spektral graf teori karşımıza çıkar. Spektral graf teori, herhangi bir grafın ilgili matrislerinin özdeğerleri ve özvektörlerini kullanarak graf yapısı hakkında bilgi edinmemizi sağlar. Spektral graf teorisinin temeli 1931 yılında Hückel'in kuantum kimyasında yaptığı bir çalışmaya dayanır [1]. Bu çalışmada elektron enerji seviyelerini temsil etmekte graf özdeğerlerini kullandığı bilinmektedir. Ayrıca iyi bilinen Matris-Ağaç teoreminin spektral graf teorisinin bir sonucu olduğu 1940 da Brooks ve diğerleri tarafından ispatlanmıştır [2]. Daha sonra 1950'li yıllarda regüler grafların komşuluk matrisi üzerinde yapılan spektral çalışmalar ile spektral graf teori matematik literatüründe sık kullanılır hale gelmiştir.

Cebirsel graf teori, grup teorisi anlamında incelendiğinde otomorfizm grupları ve geometrik grup teorisi ile bağlantılı graflar karşımıza çıkar. Bu alanın iki temel odağı bulunmaktadır. Bunlardan ilki simetrik graf aileleri ve bu aileler arasındaki bağlantılığa dayanan grup yapıları oluşturmaktır. Bu anlamda Frucht, tüm grupların bağlantılı bir grafın otomorfizm grubu olarak temsil edildiğini göstermiştir [3]. Diğer ise herhangi bir grubun, yarı grubun veya monoidin üzerinde elemanları yardımı ile bir graf yapısı oluşturmaktır. Bu graf yapılarından bazıları Cayley grafları, Petersen grafları ve bu çalışmanın temelini oluşturan power graflardır.

Power graf kavramı ilk olarak 2000 yılında Kelarev ve Quinn tarafından sonlu yarı grupların yönlü power grafı olarak tanımlanmıştır [4]. Daha sonra gruplar için yönlü power graf kavramı tanımlanmış, yarı gruplar ve gruplar üzerindeki yönlü power graflar için çeşitli çalışmalar yapılmıştır [5-7]. Chakrabarty ve diğerleri bu çalışmalardan esinlenerek 2009 yılında yaptığı çalışma ile yönsüz power graf kavramını matematik literatürüne kazandırmıştır [8]. Ayrıca bu çalışmada power grafın tamlığı, grubun yapısı ve mertebesi arasındaki ilişkiyi göstermiştir. Daha sonra Cameron ve diğerleri yönsüz power graf

kavramını kısaltarak power graf olarak adlandırmıştır [9-10] ve bu ad matematik literatürüne geçerek bundan sonra yönsüz power graflar için yapılan çalışmalar power graf adı altında yayınlanmıştır.

Power grafın, spektral graf teori bazında çalışılmasına yön veren diğer bir isim ise Chattopadhyay'dır. Chattopadhyay ve diğerlerinin 2018 yılında yaptığı çalışmada sonlu devirli gruplar ve sonlu dihedral grupların power grafları üzerinde komşuluk matrisi kavramı yeniden tanımlanmış, sonlu devirli grupların ve sonlu dihedral grupların power graflarının komşuluk matrislerinin en büyük özdeğerleri için sınırlar elde edilmiştir [11].

Bu tezde, Chattopadhyay ve diğerlerinin [11] makalesinden esinlenerek spektral graf teoride önemli yere sahip olan Laplacian matris, distance matris gibi kavramlar, power graf yapısına uygun şekilde sonlu devirli grupların ve sonlu dihedral grupların power grafları için tekrar tanımlanmıştır. Ayrıca Gutman'ın teorik kimyadaki çalışmalardan ilham alarak matematik literatürüne kazandırdığı grafın enerjisi [12], Laplacian enerjisi [13] ve distance enerjisi [14] kavramlarını baz alarak sonlu devirli grupların ve sonlu dihedral grupların power grafları için enerji, Laplacian enerji ve distance enerji kavramları tanımlanmış ve bu kavramlar için alt ve üst sınırlar elde edilmiştir. Daha sonra devirli grup ve dihedral grup yapıları yardımıyla söz konusu grupların power graflarının enerjilerinin ve distance enerjilerinin karşılaştırıldığı sonuçlar verilmiştir. Ayrıca grubun yapısı ve power grafın tamlığı arasındaki ilişki göz önüne alınarak elde edilen sınırlar yardımıyla da devirli grubun power grafının tam olduğu durumlar için sonuçlar verilmiştir.

Bu tez verilen bilgiler doğrultusunda yedi bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde çalışma boyunca kullanılacak lineer cebir ve graf teori ile ilgili temel kavramlar ve özellikler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, öncelikle gruplar ile ilgili tez boyunca kullanacağımız temel tanımlar ve gruplar üzerinde tanımlı yönlü ve yönsüz power graf kavramları verilmiştir. Daha sonra sonlu devirli grupların ve sonlu dihedral grupların power graflarının komşuluk matrisi, Laplacian matrisi ve distance matrisi kavramları tanımlanmış ve bu matrisler yardımıyla söz konusu power graflar için enerji, Laplacian enerji ve distance enerji kavramları verilmiştir.

Dördüncü bölümde sonlu devirli grupların ve sonlu dihedral grupların power graflarının enerjileri için sınırlar elde edilmiştir. Daha sonra grup yapıları ve bulunan sınırlar yardımıyla enerjilerin karşılaştırıldığı sonuçlar verilmiştir. Ayrıca devirli grubun power grafinin tam oldu durumlar için sonuçlar bulunmuştur.

Beşinci bölümde sonlu devirli grupların power graflarının Laplacian enerjisi için sınırlar elde edilmiştir.

Altıncı bölümde öncelikle sonlu devirli grupların ve sonlu dihedral grupların power graflarının distance enerjileri için alt ve üst sınırlar elde edilmiş, daha sonra devirli grup ve dihedral grup yapıları yardımı ile söz konusu grupların power graflarının distance enerjileri karşılaştırılmıştır. Ayrıca sonlu devirli grupların ve sonlu dihedral grupların power graflarının en büyük özdeğerleri için sınırlar elde edilmiştir.

Yedinci bölümde sonlu devirli grupların ve sonlu dihedral grupların power graflarının enerjileri, Laplacian enerjileri ve distance enerjileri için sınır eşitlik durumları ve sınır karşılaştırmaları hakkında sonuçlar verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde tez boyunca kullanılacak lineer cebir ve graf teori ile ilgili temel kavramlar ve özellikler verilecektir.

2.1. Genel Bilgiler

2.1.1. Tanım

F bir cisim, $A \in M_n(F)$ ve $x \neq 0, n \times 1$ tipinde bir sütun vektörü olmak üzere,

$$Ax = \lambda x \quad (2.1)$$

olacak biçimde $\lambda \in F$ skaleri olsun. Eş. 2.1, I $n \times n$ tipinde birim matris olmak üzere

$$(A - \lambda I)x = 0$$

şeklinde yazılabilir. $(A - \lambda I)$ matrisine A nın karakteristik matrisi denir ve bu matrisin determinantının hesaplanması sonucu λ ya bağlı n -inci dereceden monik bir polinom elde edilir. Bu polinoma A matrisinin karakteristik polinomu denir ve $K_A(\lambda)$ şeklinde gösterilir. Yani,

$$K_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

dir. $K_A(\lambda) = 0$ denkleminde A matrisinin karakteristik denklemi ve bu karakteristik denklemin köklerine de A matrisinin özdeğerleri denir.

$K_A(\lambda) = 0, n$ -inci dereceden bir denklem olduğundan tam olarak n tane köke sahiptir ve bunların hepsi birbirinden farklı olmak zorunda değildir.

$$Ax = \lambda x \text{ veya } (A - \lambda I)x = 0$$

denkleminin sıfır olmayan x çözümlerine A matrisinin λ özdeğerlerine karşılık gelen

özvektörleri denir. Bu tanım doğrultusunda özdeğer ve özvektörler için

$$Ax_i = \lambda x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

temel formülü elde edilir [15].

2.1.2. Tanım

F bir cisim, $A \in M_n(F)$ matrisinin tüm özdeğerlerinin kümesine A nın spektrumu denir ve $\sigma(A)$ ile gösterilir [16].

2.1.3. Tanım

F bir cisim, $A \in M_n(F)$ matrisinin tüm özdeğerleri içinde mutlak değerce en büyük olanına spektral yarıçap denir ve $\rho(A)$ ile gösterilir. Yani

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_i| : i = 1, 2, \dots, n \text{ için } \lambda_i \in \sigma(A)\}$$

dir [16].

2.1.4. Tanım

$A = (a_{ij})$ matrisi elemanları kompleks sayılar olan bir kare matris olmak üzere,

$$A^T = A$$

şartı sağlanıyorsa, o zaman A matrisine simetrik matris denir [15].

2.1.5. Tanım

$A = (a_{ij})$ matrisi elemanları kompleks sayılar olan bir kare matris olmak üzere,

$$A^T = \bar{A}$$

şartı sağlanıyorsa, o zaman A matrisine hermityen matris denir [15].

2.1.6. Tanım

A , $n \times n$ tipinde bir hermityen matris, $x \in \mathbb{C}^n$ sıfırdan farklı kompleks bir vektör ve x^* , x in eşlenik transpozu olmak üzere,

$$x^*Ax > 0$$

eşitsizliği sağlanıyorsa A matrisine pozitif tanımlı;

$$x^*Ax \geq 0$$

eşitsizliği sağlanıyorsa A matrisine yarı pozitif tanımlıdır denir [17].

2.1.7. Tanım

A , $n \times n$ tipinde bir matris olsun. $k = 1, 2, \dots, n - 1$ için

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

matrislerine A nın temel alt matrisleri denir [18].

2.1.8. Tanım

A , $n \times n$ tipinde bir matris olmak üzere A nın herhangi bir temel alt matrisinin determinantına A nın bir temel minörü denir. Yani $k = 1, 2, \dots, n - 1$ için A nın temel minörleri;

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

dır [18].

2.1.9. Tanım

A , $n \times n$ tipinde bir kare matris olmak üzere A nın izi

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

şeklinde tanımlıdır. [18].

2.1.1. Teorem (Cauchy Interlace Teorem)

A , mertebesi n olan bir hermityen matris ve B de mertebesi $n - 1$ olan A nın bir temel alt matrisi olsun. Eğer $\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_1$, A nın özdeğerleri ve $\mu_n \leq \mu_{n-1} \leq \dots \leq \mu_2$, B nin özdeğerleri ise

$$\lambda_n \leq \mu_n \leq \lambda_{n-1} \leq \mu_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_2 \leq \mu_2 \leq \lambda_1$$

dir [19].

2.1.2. Teorem (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği)

$a_1, a_2, \dots, a_n$ ve $b_1, b_2, \dots, b_n$ ler birer reel sayı olmak üzere

$$(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2) \geq (\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2,$$

yani

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$$

dir. Eşitlik durumunun olması için gerek ve yeter koşul $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ve $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ dizilerinin orantılı olmasıdır. Yani;

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$$

olmasıdır [20].

2.2. Graf Teoride Bazı Temel Tanım ve Kavramlar

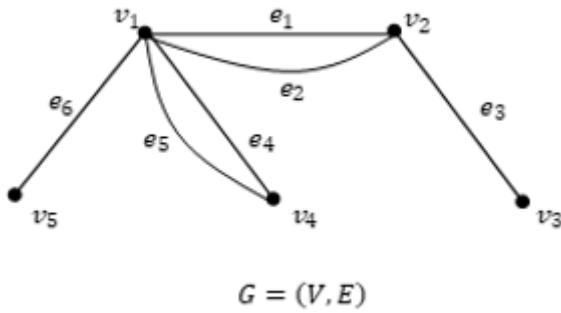
2.2.1. Tanım

Graf, elemanları nokta olarak adlandırılan sonlu, boş olmayan V noktalar kümesi ve elemanları kenar olarak adlandırılan sonlu E kenarlar kümesinden oluşan $G = (V, E)$ ikili yapısına denir. Burada

$$E = \{\{v_i, v_j\}: v_i, v_j \in V\}$$

olup E nin elemanları e_k lar ile gösterilir.

Örnek



Şekil 2.1. $G = (V, E)$ grafi

Şekil 2.1 ile verilen $G = (V, E)$ grafinin noktalar ve kenarlar kümesi sırası ile

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \text{ ve } E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

dır.

2.2.2. Tanım

Bir grafın v_i ve v_j noktaları arasında en az bir kenar bulunuyorsa v_i ve v_j noktalarına komşudur denir ve $v_i \sim v_j$ ile gösterilir. Bir v_i noktasına komşu olan tüm noktaların kümesine v_i nin komşuluklar kümesi denir ve N_{v_i} ile gösterilir. Yani

$$N_{v_i} = \{v_j: v_i \sim v_j, v_j \in V\}$$

dir [21].

2.2.3. Tanım

Bir grafın herhangi bir v_i noktasına bağlı kenar sayısına v_i nin derecesi denir ve d_{v_i} veya $d(v_i)$ ile gösterilir [22].

Şekil 2.1 de verilen $G = (V, E)$ grafi için nokta komşulukları sıra farkı gözetmeksizin

$$v_1 \sim v_2, v_1 \sim v_4, v_1 \sim v_5, v_2 \sim v_3$$

ve her bir noktanın derecesi

$$d_{v_1} = 5, d_{v_2} = 3, d_{v_3} = 1, d_{v_4} = 2, d_{v_5} = 1$$

dir.

2.2.4. Tanım

Bir $G = (V, E)$ grafının minimum ve maksimum dereceleri sırası ile

$$\delta(G) = \min\{d_{v_i}: v_i \in V\},$$

$$\Delta(G) = \max\{d_{v_i}: v_i \in V\}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca

$$d(G) = \frac{1}{|V|} \sum_{v_i \in V} d_{v_i}$$

sayısına G nin ortalama derecesi denir. Burada $|V|$, V noktalar kümesinin kardinalitesi yani eleman sayısıdır. Bu tanıma göre

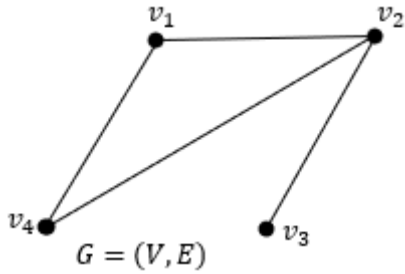
$$\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$$

dir. Ayrıca $|E|$ kenarlar kümesinin kardinalitesi

$$|E| = \frac{1}{2} \sum_{v_i \in V} d_{v_i} = \frac{1}{2} d(G) |V|$$

dir [22].

Örnek



Şekil 2.2. $G = (V, E)$ grafi

Şekil 2.2 ile verilen $G = (V, E)$ grafi için $d_{v_1} = 2, d_{v_2} = 3, d_{v_3} = 1, d_{v_4} = 2$ olup G nin sırası ile maksimum, minimum ve ortalama derecesi;

$$\Delta(G) = \max\{d_{v_i} : v_i \in V\} = 3$$

$$\delta(G) = \min\{d_{v_i} : v_i \in V\} = 1$$

$$d(G) = \frac{1}{|V|} \sum_{v_i \in V} d_{v_i} = \frac{1}{4} (2 + 3 + 1 + 2) = 2$$

olarak bulunur.

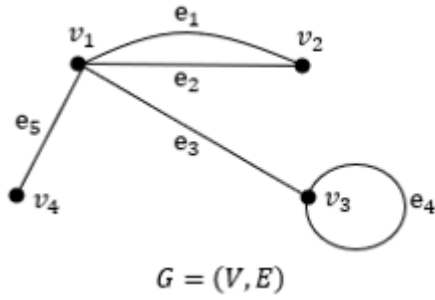
2.2.5. Tanım

Bir grafın herhangi iki noktası arasında birden fazla kenar bulunuyorsa bu kenarlara katlı kenarlar denir [22].

2.2.6. Tanım

Başlangıç ve bitiş noktası aynı olan kenara ilmek denir [22].

Örnek



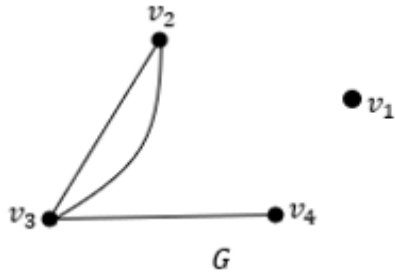
Şekil 2.3. $G = (V, E)$ grafi

Şekil 2.3 de verilen $G = (V, E)$ grafi için e_1 ve e_2 birer katlı kenar, e_4 bir ilmekdir.

2.2.7. Tanım

Bir grafın derecesi sıfır olan noktasına izole nokta, derecesi bir olan noktasına pendant nokta denir [21].

Örnek



Şekil 2.4. G grafi

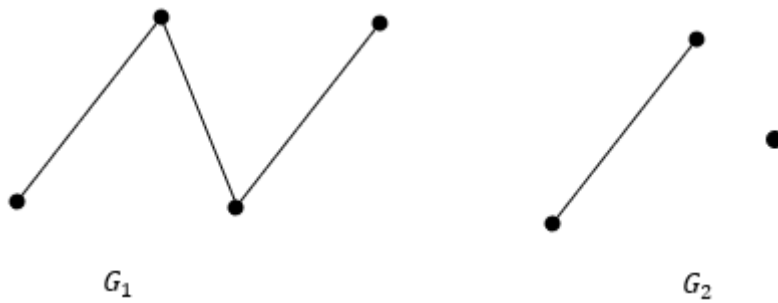
Şekil 2.4 de verilen G grafi için $d_{v_1} = 0, d_{v_2} = 2, d_{v_3} = 2, d_{v_4} = 1$ olduğundan v_1 bir izole nokta ve v_4 bir pendant noktadır.

2.3. Bazı Özel Graflar

2.3.1. Tanım

Katlı kenar ve ilmek içermeyen grafa basit graf denir [21].

Örnek



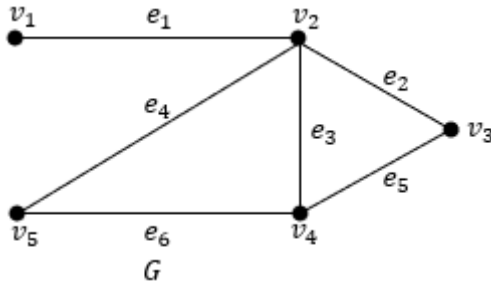
Şekil 2.5. Basit graf

Şekil 2.5 ile verilen G_1 ve G_2 grafları katlı kenar ve ilmek içermediğinden basit graflardır.

2.3.2. Tanım

Bir grafın sonlu sayıda, birbiriyle bağlantılı noktalarından ve kenarlarından oluşan dizisine yürüme denir ve W ile gösterilir. Her bir kenarın ve noktanın en fazla bir kez kullanıldığı yürümeye yol denir ve P ile gösterilir. Özel olarak başlangıç ve bitiş noktası aynı olan yola kapalı yol denir [21].

Örnek



Şekil 2.6. G grafi

Şekil 2.6'da verilen G grafi için $v_2e_2v_3e_5v_4e_3v_2e_1v_1$ bir yürüme, $v_1e_1v_2e_4v_5e_6v_4e_5v_3$ bir yol, $v_2e_2v_3e_5v_4e_6v_5e_4v_2$ bir kapalı yoldur.

2.3.3. Tanım

Herhangi iki noktası arasında bir yol bulunan grafa bağlantılı graf denir [22].

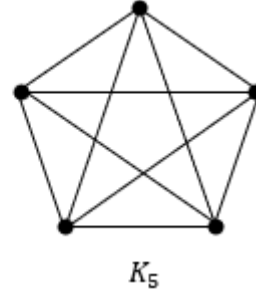
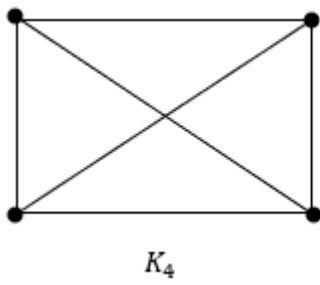
Şekil 2.6'da verilen G grafi bağlantılı bir graftır.

2.3.4. Tanım

Basit bir grafın herhangi iki noktası arasında bir kenar bulunuyorsa yani her bir nokta çifti arasında komşuluk varsa bu grafa tam graf denir ve n noktalı bir tam graf K_n ile gösterilir.

K_n tam grafının kenar sayısı $C \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ dir [21].

Örnek



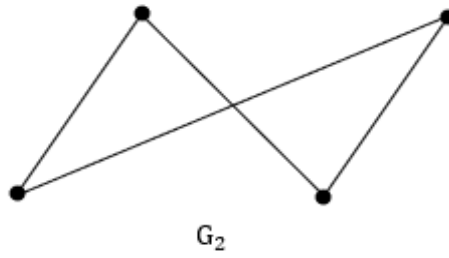
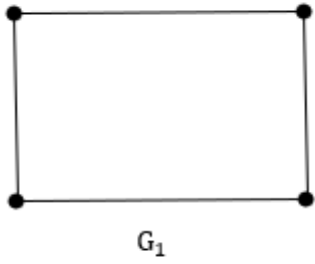
Şekil 2.7. K_4 ve K_5 tam grafları

Şekil 2.7’de verilen K_4 ve K_5 grafları sırası ile 4 nokta ve 5 nokta içeren tam graflardır.

2.3.5. Tanım

Her bir noktası aynı dereceye sahip olan grafa regüler graf denir. Özel olarak her bir noktası r –dereceye sahip olan grafa r -regüler graf denir [21].

Örnek



Şekil 2.8. Regüler graf

Şekil 2.8’de verilen G_1 ve G_2 grafları 2-dereceli regüler graflardır.

2.3.6. Tanım

Her bir kenarına yön verilerek oluşturulan grafa yönlü graf denir. Yönlü grafa yön, kenarın başlangıç noktasından bitim noktasına doğru verilir ve kenarlar özel olarak yay ile adlandırılır [21].

Örnek



Şekil 2.9. Yönlü graf

Şekil 2.9’da verilen G_1 ve G_2 grafları yönlü graflardır.

2.4. Basit Grafların İlgili Matrisleri ve Spektrumları

2.4.1. Tanım

G , noktalar kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ve $|E(G)| = m$ olmak üzere kenarlar kümesi $E(G)$ olan basit bir graf olsun. G nin komşuluk matrisi, $A(G) = (a_{ij})_{n \times n}$ ile gösterilir ve elemanları

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \sim v_j \\ 0, & \text{aksi durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Komşuluk matrisi reel, simetrik bir matris olduğundan tüm özdeğerleri reeldir, $i = 1, 2, \dots, n$ için özdeğerler λ_i ler ile gösterilir ve özdeğerler arasında

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$$

eşitsizliği vardır. Burada λ_1 özdeğerine en büyük özdeğer ve $i = 1, 2, \dots, n$ için en büyük $|\lambda_i|$ değerine de spektral yarıçap denir [23].

2.4.2. Tanım

G , basit bir graf olsun. G nin komşuluk matrisinin özdeğerlerinin ve katlılıklarının oluşturduğu kümeye G nin spektrumu denir [23].

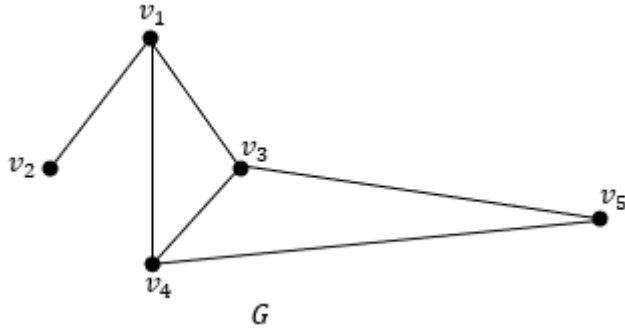
2.4.1. Not

Basit bir grafın komşuluk matrisinin her bir satır ve sütunundaki elemanların toplamı o satır ve sütuna karşılık gelen noktanın derecesini verir. Ayrıca komşuluk matrisinin özdeğerlerinin toplamı sıfırdır. Yani $i = 1, 2, \dots, n$ için λ_i ler komşuluk matrisinin özdeğerleri olmak üzere

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$$

dır.

Örnek



Şekil 2.10. Basit bağlantılı graf

Şekil 2.10 ile verilen G grafı basit bir graf olup bu grafa ait komşuluk matrisi

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ve özdeğerleri

$$\lambda_1 = 2,6411, \lambda_2 = 0,7237, \lambda_3 = -0,5892, \lambda_4 = -1, \lambda_5 = -1,7757$$

olarak bulunur. Buna göre G nin spektrumu $(2,6411, 0,7237, -0,5892, -1, -1,7757)$ olup spektral yarıçapı 2,6411 dir.

2.4.3. Tanım

G , noktalar kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ve $|E(G)| = m$ olmak üzere kenarlar kümesi $E(G)$ olan basit bir graf olsun. G nin Laplacian matrisi, $L(G) = (l_{ij})_{n \times n}$ ile gösterilir ve elemanları

$$l_{ij} = \begin{cases} d_{v_i}, & v_i \neq v_j \\ -1, & v_i \sim v_j \\ 0, & \text{aksi durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Laplacian matrisi reel, simetrik bir matris olduğundan tüm özdeğerleri reeldir, $i = 1, 2, \dots, n$ için özdeğerler μ_i ler ile gösterilir ve özdeğerler arasında

$$0 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$$

eşitsizliği vardır. Burada μ_n özdeğerine en büyük Laplacian özdeğer ve $i = 1, 2, \dots, n$ için en büyük $|\mu_i|$ değerine de Laplacian spektral yarıçap denir. Ayrıca Laplacian matrisi için

$$L(G) = D(G) - A(G)$$

eşitliği vardır. Burada $D(G) = \text{köş}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ yani G nin nokta derecelerinin oluşturduğu köşegen matristir [23].

2.4.2. Not

Basit bir grafın Laplacian matrisinin her bir satır ve sütunundaki elemanların toplamı sıfırdır. Ayrıca Laplacian matrisinin özdeğerlerinin toplamı kenar sayısının iki katına eşittir. Yani; $i = 1, 2, \dots, n$ için μ_i ler Laplacian matrisinin özdeğerleri olmak üzere

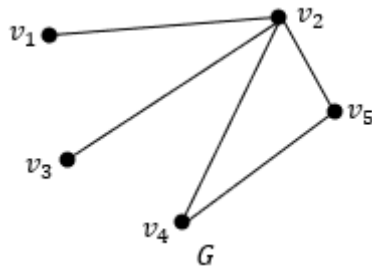
$$\sum_{i=1}^n \mu_i = 2|E| = 2m$$

dir.

2.4.4. Tanım

G , basit bir graf olsun. G nin Laplacian matrisinin özdeğerlerinin ve katlılıklarının oluşturduğu kümeye G nin Laplacian spektrumu denir [23].

Örnek



Şekil 2.11. Basit bağlantılı graf

Şekil 2.11 ile verilen G grafının Laplacian matrisi

$$L(G) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ve Laplacian özdeğerleri

$$\mu_1 = 0, \mu_2 = 1, \mu_3 = 1, \mu_4 = 3, \mu_5 = 5$$

olarak bulunur. Buna göre G nin Laplacian spektrumu $(5, 3, 1, 1, 0)$ olup Laplacian spektral yarıçapı 5 dir.

2.4.5. Tanım

G , noktalar kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ve $|E(G)| = m$ olmak üzere kenarlar kümesi $E(G)$ olan basit bir graf olsun. G nin distance matrisi, $\mathcal{D}(G) = (d_{ij})_{n \times n}$ ile gösterilir ve elemanları

$$d_{ij} = \begin{cases} 0, & v_i = v_j \\ d(v_i, v_j), & \text{aksi durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $d(v_i, v_j)$, v_i ile v_j noktaları arasındaki en kısa yolun uzunluğudur. Distance matrisi reel, simetrik bir matris olduğundan tüm özdeğerleri reeldir, $i = 1, 2, \dots, n$ için özdeğerler ∂_i ler ile gösterilir ve özdeğerler arasında

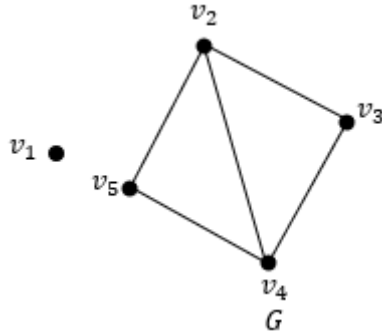
$$\partial_1 \geq \partial_2 \geq \dots \geq \partial_n$$

eşitsizliği vardır. Burada ∂_1 özdeğerine en büyük distance özdeğeri ve $i = 1, 2, \dots, n$ için en büyük $|\partial_i|$ değerine de distance spektral yarıçapı denir [23].

2.4.6. Tanım

G , basit bir graf olsun. G nin distance matrisinin özdeğerlerinin ve katlılıklarının oluşturduğu kümeye G nin distance spektrumu denir [23].

Örnek



Şekil 2.12. Basit bağlantılı graf

Şekil 2.12 de verilen G grafının distance matrisi

$$\mathcal{D}(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olup distance özdeğerleri

$$\partial_1 = 3,5615, \partial_2 = 0, \partial_3 = -0,5615, \partial_4 = -1, \partial_5 = -2$$

olarak bulunur. Buna göre G nin distance spektrumu $(3,5615, 0, -0,5615, -1, -2)$ olup Laplacian spektral yarıçapı 3,5615 dir.

2.5. Basit Grafların Enerjileri, Laplacian Enerjileri ve Distance Enerjileri

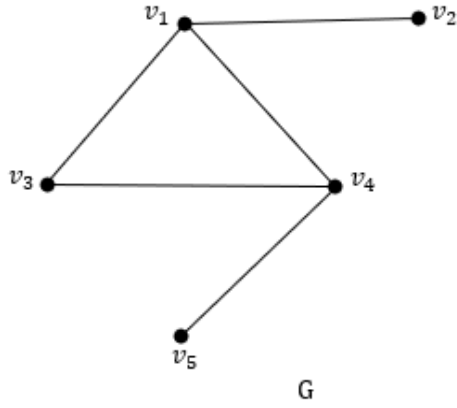
2.5.1. Tanım

G , n noktalı ve m kenarlı basit bir graf olsun. G nin enerjisi, $\mathcal{E}(G)$ ile gösterilir ve $A(G)$ komşuluk matrisinin özdeğerlerinin mutlak değerce toplamı şeklinde tanımlanır. Yani

$$\mathcal{E}(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$$

dir [12].

Örnek



Şekil 2.13. Basit bağlantılı graf

Şekil 2.13 ile verile G grafının komşuluk matrisi

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olup özdeğerleri

$$\lambda_1 = 2,3027, \lambda_2 = 0,618, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -1,3027, \lambda_5 = -1,618$$

olarak bulunur. Buna göre G nin enerjisi

$$\mathcal{E}(G) = \sum_{i=1}^5 |\lambda_i| = 2,3027 + 0,618 + 0 + 1,3027 + 1,618 = 5,8414$$

olarak hesaplanır.

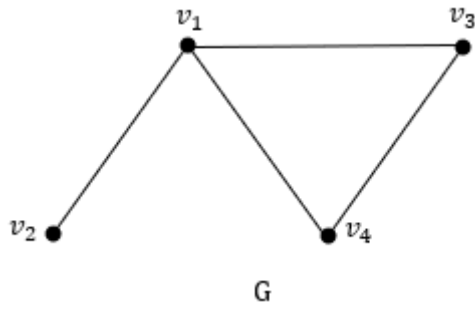
2.5.2. Tanım

G , n noktalı ve m kenarlı basit bir graf olsun. G nin Laplacian enerjisi, $L\mathcal{E}(G)$ ile gösterilir ve $L(G)$ Laplacian matrisinin özdeğerlerinin mutlak değerce toplamı şeklinde tanımlanır. Yani

$$L\mathcal{E}(G) = \sum_{i=1}^n \left| \mu_i - \frac{2m}{n} \right|$$

dir [13].

Örnek



Şekil 2.14. Basit bağlantılı graf

Şekil 2.14 ile verilen G grafının Laplacian matrisi

$$L(G) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

olup özdeğerleri

$$\mu_1 = 0, \mu_2 = 1, \mu_3 = 3, \mu_4 = 4$$

olarak bulunur. Buna göre G nin Laplacian enerjisi

$$L\mathcal{E}(G) = \sum_{i=1}^4 \left| \mu_i - \frac{8}{4} \right| = |0 - 2| + |1 - 2| + |3 - 2| + |4 - 2| = 2 + 1 + 1 + 2 = 6$$

olarak hesaplanır.

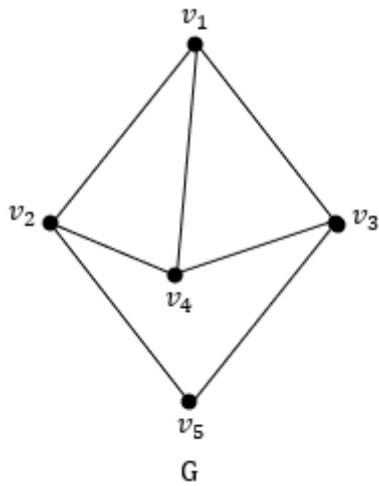
2.5.3. Tanım

G , n noktalı ve m kenarlı basit bir graf olsun. G nin distance enerjisi, $\mathcal{DE}(G)$ ile gösterilir ve $\mathcal{D}(G)$ distance matrisinin özdeğerlerinin mutlak değerce toplamı şeklinde tanımlanır. Yani

$$\mathcal{DE}(G) = \sum_{i=1}^n |\partial_i|$$

dir [14].

Örnek



Şekil 2.15. Basit bağlantılı graf

Şekil 2.15 ile verile G grafının distance matrisi

$$\mathcal{D}(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

olup özdeğerleri

$$\partial_1 = 5,2238, \partial_2 = 0,1605, \partial_3 = -1, \partial_4 = -2, \partial_5 = -2,3844$$

olarak bulunur. Buna göre G nin distance enerjisi

$$\mathcal{DE}(G) = \sum_{i=1}^5 |\partial_i| = 5,2238 + 0,16058 + 1 + 2 + 2,3844 = 10,7687$$

olarak hesaplanır.

3. SONLU DEVİRLİ GRUPLARIN VE SONLU DİHEDRAL GRUPLARIN POWER GRAFLARI

Power graf kavramı ilk olarak Kelarev ve Quinn tarafından sonlu yarı grupların yönlü power grafi şeklinde tanıtılmış [4] daha sonra Chakrabarty ve diğerleri tarafından yönsüz power graf kavramı literatüre kazandırılmıştır [8].

Bu bölümde, öncelikle gruplar ve power graflar ile ilgili tez boyunca kullanılacak temel kavramlar verilecek ve daha sonra çalışmanın temelini oluşturan sonlu devirli grupların ve sonlu dihedral grupların power graflarının komşuluk matrisi, Laplacian matrisi ve distance matrisi kavramları verilecektir. Ayrıca bu matrislerin spektrumları yardımı ile sonlu devirli grupların ve sonlu dihedral grupların power graflarının enerjisi, Laplacian enerjisi ve distance enerjisi kavramları tanımlanacaktır.

3.1. Gruplar ve Gruplar Üzerindeki Power Graflar

3.1.1. Tanım

G boştan farklı bir küme olsun. Eğer

$$G \times G \rightarrow G$$

bir fonksiyon ise bu fonksiyona ikili işlem denir. Bu ikili işlem altında $(a, b) \in G \times G$ nin görüntüsü için birkaç notasyon kullanırız. Bunlardan en yaygın kullanılanları;

- $a \cdot b$ (çarpma notasyonu)
- $a + b$ (toplama notasyonu)

dır [24].

3.1.2. Tanım

G boştan farklı bir küme ve G üzerinde bir ikili işlem verilsin. Eğer

1. $\forall a, b, c \in G$ için $(ab)c = a(bc)$ özelliği varsa G ye bir yarıgrup,
2. G bir yarıgrup olmak üzere $\forall a \in G$ için $ae = ea = a$ olacak biçimde $e \in G$ varsa G ye monoid,
3. G bir monoid olmak üzere $\forall a \in G$ için $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ olacak biçimde $a^{-1} \in G$ varsa G ye grup

denir [24].

3.1.3. Tanım

G bir grup olmak üzere G nin eleman sayısına G nin kardinalitesi denir ve $|G|$ ile gösterilir. Eğer G sonlu sayıda elemandan oluşuyorsa G ye sonlu grup denir [24].

3.1.4. Tanım

G bir grup ve $\emptyset \neq H \subseteq G$ olmak üzere H , G nin grup işlemiyle bir grup yapısı oluşturuyorsa H ye G nin bir alt grubu denir ve $H \leq G$ ile gösterilir [24].

3.1.5. Tanım

G bir grup ve $x \in G$ olmak üzere

$$G = \{x^n : n \in \mathbb{Z}\} = \langle x \rangle$$

oluyorsa G ye x elemanı tarafından üretilen devirli grup ve x e G nin üretici denir. Özel olarak $G = \{x : x^n = e\}$ ise G ye n -inci mertebeden devirli grup denir ve C_n ile gösterilir [24].

3.1.6. Tanım

Düzgün bir çokgenin bütün dönme yansımalarının oluşturduğu küme, fonksiyon bileşke işlemine göre bir grup yapısı oluşturur. Bu gruba $2n$ –inci mertebeden dihedral grup denir ve D_{2n} ile gösterilir. Ayrıca düzgün bir çokgendeki herhangi bir köşegenden geçen doğruya göre yansımayı b ve saat yönündeki (veya saat yönünün tersi yönündeki) $\frac{2\pi}{n}$ dönmesini a ile gösterecek olursak dihedral grup;

$$D_{2n} = \langle a, b: a^n = b^2 = 1, ba = a^{-1}b = a^{n-1}b \rangle$$

şeklinde ifade edilir [24].

3.1.7. Tanım

G bir grup (veya yarıgrup) olmak üzere G nin yönlü power grafi $\vec{\mathcal{P}}(G)$ ile gösterilir ve noktaları G nin elemanları ile temsil edilen ve noktalar arasındaki komşulukları $x, y \in G$ ve $m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$x \sim y (x \text{ den } y \text{ ye bir yay}) \Leftrightarrow x \neq y \text{ ve } y = x^m \text{ (çarpımsal gruplar için)}$$

$$x \sim y (x \text{ den } y \text{ ye bir yay}) \Leftrightarrow x \neq y \text{ ve } y = mx \text{ (toplamsal gruplar için)}$$

şeklinde tanımlanır [25].

Örnek

$\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ devirli grubunun $\vec{\mathcal{P}}(\mathbb{Z}_6)$ yönlü power grafinin noktalar kümesi

$$V(\vec{\mathcal{P}}(\mathbb{Z}_6)) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$$

ve noktalar arası komşulukları;

$$\bar{0} = 6 \times \bar{1}, \bar{0} = 3 \times \bar{2}, \bar{0} = 2 \times \bar{3}, \bar{0} = 3 \times \bar{4}, \bar{0} = 6 \times \bar{5}$$

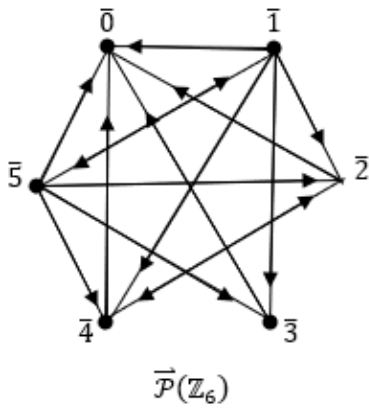
olduğundan

$$\bar{1} \sim \bar{0}, \bar{2} \sim \bar{0}, \bar{3} \sim \bar{0}, \bar{4} \sim \bar{0}, \bar{5} \sim \bar{0}$$

dir. Benzer düşünce ile

$$\bar{1} \sim \bar{2}, \bar{1} \sim \bar{3}, \bar{1} \sim \bar{4}, \bar{1} \sim \bar{5}, \bar{2} \sim \bar{4}, \bar{4} \sim \bar{2}, \bar{5} \sim \bar{1}, \bar{5} \sim \bar{2}, \bar{5} \sim \bar{3}, \bar{5} \sim \bar{4}$$

komşulukları vardır. Buna göre $\vec{\mathcal{P}}(\mathbb{Z}_6)$ yönlü power grafi;



Şekil 3.1. $\vec{\mathcal{P}}(\mathbb{Z}_6)$ yönlü power grafi

dir.

3.1.8. Tanım

G bir grup olmak üzere G nin yönsüz power grafi veya kısaca power grafi $\mathcal{P}(G)$ ile gösterilir ve noktaları G nin elemanları ile temsil edilen ve noktalar arasındaki komşulukları $x, y \in G$ ve $m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$x \sim y \Leftrightarrow x \neq y, x = y^m \text{ ve } y = x^m \text{ (çarpımsal gruplar için)}$$

$$x \sim y \Leftrightarrow x \neq y, x = my \text{ ve } y = mx \text{ (toplamsal gruplar için)}$$

şeklinde tanımlanır [25].

Örnek

$S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$ simetrik grubunun $\mathcal{P}(S_3)$ power grafinin noktalar kümesi

$$V(\mathcal{P}(S_3)) = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

ve noktalar arası komşulukları;

$$(1) = (12)(12) \text{ olduğundan } (1) \sim (12),$$

$$(1) = (13)(13) \text{ olduğundan } (1) \sim (13),$$

$$(1) = (23)(23) \text{ olduğundan } (1) \sim (23),$$

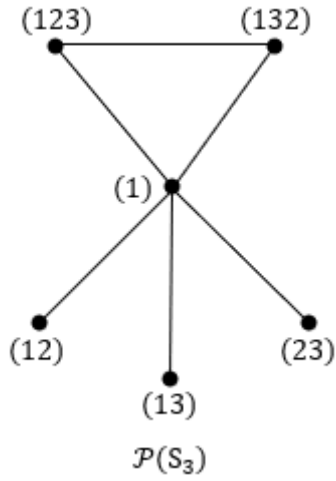
$$(1) = (123)(123)(123) \text{ olduğundan } (1) \sim (123),$$

$$(1) = (132)(132)(132) \text{ olduğundan } (1) \sim (132),$$

dir. Ayrıca

$$(123) = (132)(132) \text{ olduğundan } (123) \sim (132)$$

dir. Dolayısıyla $\mathcal{P}(S_3)$ power grafi;



Şekil 3.2. $\mathcal{P}(S_3)$ power grafi

dir.

Örnek

A_4 alterne grubunun $\mathcal{P}(A_4)$ power grafinin noktalar kümesi

$$V(\mathcal{P}(A_4)) = \{(1), (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243),$$

$$(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

ve noktalar arası komşulukları;

$$(1) = (123)(123)(123) \text{ olduğundan } (1) \sim (123),$$

$$(1) = (132)(132)(132) \text{ olduğundan } (1) \sim (132),$$

ve benzer şekilde

$$(1) \sim (124), (1) \sim (142), (1) \sim (134), (1) \sim (143), (1) \sim (234),$$

$$(1) \sim (243), (1) \sim (12)(34), (1) \sim (13)(24), (1) \sim (14)(23)$$

dir. Ayrıca

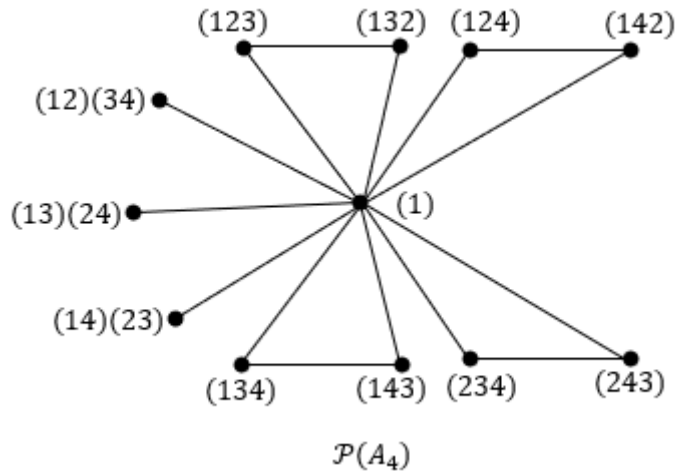
$$(123) = (132)(132) \text{ olduğundan } (123) \sim (132),$$

$$(124) = (142)(142) \text{ olduğundan } (124) \sim (142),$$

$$(134) = (143)(143) \text{ olduğundan } (134) \sim (143),$$

$$(234) = (243)(243) \text{ olduğundan } (234) \sim (243)$$

dir. Dolayısıyla $\mathcal{P}(A_4)$ power grafi;



Şekil 3.3. $\mathcal{P}(A_4)$ power grafi

dir.

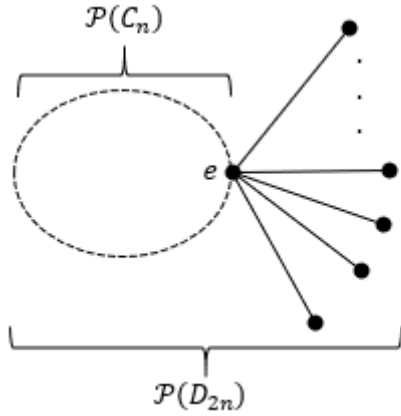
3.1.1. Teorem

G , sonlu bir grup ve $P(G)$, G nin power grafi olsun. $P(G)$ nin tam graf olabilmesi için gerek ve yeter koşul G nin mertebesi 1 veya p^m olan bir devirli grup olmasıdır. Burada p bir asal sayı ve $m \in \mathbb{Z}^+$ dır [8].

3.2. Sonlu Devirli Grupların ve Sonlu Dihedral Grupların Power Graflarının Komşuluk Matrisleri, Laplacian Matrisleri ve Distance Matrisleri

Bölüm boyunca C_n devirli grubunun birim elemanının ve üreteçlerinin oluşturduğu küme V_1 , geri kalan noktalarının oluşturduğu küme V_2 ile gösterilecek ve $|V_1| = \ell$ alınacaktır.

Dihedral grup $D_{2n} = \langle a, b \rangle$, $2n$ –inci mertebeden bir grup olup $o(a) = n$ olduğundan $C_n = \langle a \rangle$ devirli grubu D_{2n} nin n –inci mertebeden bir alt grubudur. Dolayısıyla $\mathcal{P}(C_n)$ power grafi $\mathcal{P}(D_{2n})$ nin bağlantılı bir alt grafıdır.



Şekil 3.4. $\mathcal{P}(D_{2n})$ power grafi

3.2.1. Sonlu devirli grupların power graflarının komşuluk matrisleri, Laplacian matrisleri ve distance matrisleri

3.2.1.1. Tanım

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n sonlu devirli grubunun power grafi olmak üzere $\mathcal{P}(C_n)$ nin komşuluk matrisi $A(\mathcal{P}(C_n))$ ile gösterilir ve

$$A(\mathcal{P}(C_n)) = \begin{pmatrix} J_{\ell \times \ell} - I_{\ell \times \ell} & J_{\ell \times (n-\ell)} \\ J_{(n-\ell) \times \ell} & A(\mathcal{P}(V_2))_{(n-\ell) \times (n-\ell)} \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $A(\mathcal{P}(V_2))$, V_2 ye ait noktaların karakterize ettiği komşuluk matrisidir. Ayrıca I ve J sırası ile birim matris ve tüm elemanları 1 olan matristir. $\mathcal{P}(C_n)$ power grafinin komşuluk matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_1(\mathcal{P}(C_n)), \lambda_2(\mathcal{P}(C_n)), \dots, \lambda_n(\mathcal{P}(C_n))$$

ile gösterilir ve $A(\mathcal{P}(C_n))$ komşuluk matrisi reel simetrik bir matris olduğundan tüm özdeğerleri reeldir ve özdeğerler arasında

$$\lambda_1(\mathcal{P}(C_n)) \geq \lambda_2(\mathcal{P}(C_n)) \geq \dots \geq \lambda_n(\mathcal{P}(C_n))$$

eşitsizliği vardır [11].

Örnek

$\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ devirli grubunun $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)$ power grafının noktalar kümesi

$$V(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$$

ve noktalar arası komşulukları;

$$\bar{0} = 6 \times \bar{1}, \bar{0} = 3 \times \bar{2}, \bar{0} = 2 \times \bar{3}, \bar{0} = 3 \times \bar{4}, \bar{0} = 6 \times \bar{5}$$

olduğundan

$$\bar{0} \sim \bar{1}, \bar{0} \sim \bar{2}, \bar{0} \sim \bar{3}, \bar{0} \sim \bar{4}, \bar{0} \sim \bar{5}$$

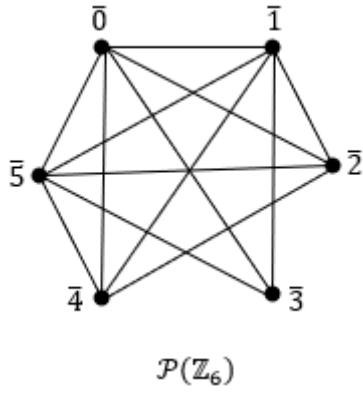
dir. Benzer düşünce ile $(6, k) = 1$ olacak biçimdeki $\bar{k}$ için $s = 0, 1, 2, \dots, 5$ olmak üzere $\bar{k} \sim \bar{s}$ dir. Buna göre

$$\bar{1} \sim \bar{0}, \bar{1} \sim \bar{2}, \bar{1} \sim \bar{3}, \bar{1} \sim \bar{4}, \bar{1} \sim \bar{5}, \bar{5} \sim \bar{0}, \bar{5} \sim \bar{1}, \bar{5} \sim \bar{2}, \bar{5} \sim \bar{3}, \bar{5} \sim \bar{4}$$

komşulukları vardır. Ayrıca

$$\bar{4} = 2 \times \bar{2} \text{ olduğundan } \bar{2} \sim \bar{4}$$

dir. Buna göre $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)$ power grafı;



Şekil 3.5. $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)$ power grafi

dir. Ayrıca $\mathbb{Z}_6$ nin birim elemanının ve üreteçlerinin oluşturduğu küme $V_1 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{5}\}$ ve geri kalan elemanlarının oluşturduğu küme $V_2 = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ dir. Buna göre $|V_1| = \ell = 3$ ve V_2 nin elemanlarının karakterize ettiği $A(\mathcal{P}(V_2))$ komşuluk matrisi

$$A(\mathcal{P}(V_2)) = \begin{matrix} \bar{2} \\ \bar{3} \\ \bar{4} \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olup $A(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6))$ komşuluk matrisi

$$A(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = \begin{pmatrix} J_{3 \times 3} - I_{3 \times 3} & J_{3 \times 3} \\ J_{3 \times 3} & A(\mathcal{P}(V_2))_{3 \times 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve özdeğerleri

$$\lambda_1(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = 4,4278, \lambda_2(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = 0,3756,$$

$$\lambda_3(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = \lambda_4(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = \lambda_5(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = -1, \lambda_6(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = -1,8035$$

olarak bulunur.

3.2.1.2. Tanım

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n sonlu devirli grubunun power grafi olmak üzere $\mathcal{P}(C_n)$ nin Laplacian matrisi $L(\mathcal{P}(C_n))$ ile gösterilir ve

$$L(\mathcal{P}(C_n)) = \begin{pmatrix} nI_{\ell \times \ell} - J_{\ell \times \ell} & -J_{\ell \times (n-\ell)} \\ -J_{(n-\ell) \times \ell} & L(\mathcal{P}(V_2))_{(n-\ell) \times (n-\ell)} \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $L(\mathcal{P}(V_2))$, V_2 ye ait noktaların karakterize ettiği Laplacian matristir. Ayrıca I ve J sırası ile birim matris ve tüm elemanları 1 olan matristir. $\mathcal{P}(C_n)$ power grafinin Laplacian matrisinin özdeğerleri

$$\mu_1(\mathcal{P}(C_n)), \mu_2(\mathcal{P}(C_n)), \dots, \mu_n(\mathcal{P}(C_n))$$

ile gösterilir ve $L(\mathcal{P}(C_n))$ Laplacian matrisi reel simetrik bir matris olduğundan tüm özdeğerleri reeldir ve özdeğerler arasında

$$\mu_n(\mathcal{P}(C_n)) \geq \mu_{n-1}(\mathcal{P}(C_n)) \geq \dots \geq \mu_1(\mathcal{P}(C_n)) = 0$$

eşitsizliği vardır.

Örnek

Şekil 3.5 ile verilen $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)$ power grafi için $\mathbb{Z}_6$ nın birim elemanının ve üreteçlerinin oluşturduğu küme $V_1 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{5}\}$ ve geri kalan elemanlarının oluşturduğu küme $V_2 = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ dir. Buna göre $|V_1| = \ell = 3$ ve V_2 nin elemanlarının karakterize ettiği $L(\mathcal{P}(V_2))$ Laplacian matrisi

$$L(\mathcal{P}(V_2)) = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

dir. O halde $L(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6))$ Laplacian matrisi

$$L(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = \begin{pmatrix} 3I_{3 \times 3} - J_{3 \times 3} & -J_{3 \times 3} \\ -J_{3 \times 3} & L(\mathcal{P}(V_2))_{3 \times 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ve özdeğerleri

$$\mu_1(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = 0, \mu_2(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = 3, \mu_3(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = 5,$$

$$\mu_4(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = \mu_5(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = \mu_6(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = 6$$

olarak bulunur.

3.2.1.3. Tanım

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n sonlu devirli grubunun power grafi olmak üzere $\mathcal{P}(C_n)$ nin distance matrisi $\mathcal{D}(\mathcal{P}(C_n))$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{D}(\mathcal{P}(C_n)) = \begin{pmatrix} J_{\ell \times \ell} - I_{\ell \times \ell} & J_{\ell \times (n-\ell)} \\ J_{(n-\ell) \times \ell} & \mathcal{D}(\mathcal{P}(V_2))_{(n-\ell) \times (n-\ell)} \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $\mathcal{D}(\mathcal{P}(V_2))$, V_2 ye ait noktaların karakterize ettiği distance matrisidir. Ayrıca I ve J sırası ile birim matris ve tüm elemanları 1 olan matristir. $\mathcal{P}(C_n)$ power grafinin distance matrisinin özdeğerleri

$$\partial_1(\mathcal{P}(C_n)), \partial_2(\mathcal{P}(C_n)), \dots, \partial_n(\mathcal{P}(C_n))$$

ile gösterilir ve $\mathcal{D}(\mathcal{P}(C_n))$ Laplacian matrisi reel simetrik bir matris olduğundan tüm özdeğerleri reeldir ve özdeğerler arasında

$$\partial_1(\mathcal{P}(C_n)) \geq \partial_2(\mathcal{P}(C_n)) \geq \dots \geq \partial_n(\mathcal{P}(C_n))$$

eşitsizliği vardır.

Örnek

Şekil 3.5 ile verilen $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)$ power grafi için $\mathbb{Z}_6$ nın birim elemanının ve üreteçlerinin oluşturduğu küme $V_1 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{5}\}$ ve geri kalan elemanlarının oluşturduğu küme $V_2 = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ dir. Buna göre $|V_1| = \ell = 3$ ve V_2 nin elemanlarının karakterize ettiği $\mathcal{D}(\mathcal{P}(V_2))$ distance matrisi

$$\mathcal{D}(\mathcal{P}(V_2)) = \frac{\bar{2}}{3} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

dir. O halde $\mathcal{D}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6))$ distance matrisi

$$\mathcal{D}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = \begin{pmatrix} J_{3 \times 3} - I_{3 \times 3} & J_{3 \times 3} \\ J_{3 \times 3} & \mathcal{D}(\mathcal{P}(V_2))_{3 \times 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ve özdeğerleri

$$\partial_1(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = 5,7565, \partial_2(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = -0,3628,$$

$$\partial_3(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = \partial_4(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = \partial_5(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = -1, \partial_6(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = -2,3937$$

olarak bulunur.

3.2.2. Sonlu dihedral grupların power graflarının komşuluk matrisleri ve distance Matrisleri

3.2.2.1. Tanım

$\mathcal{P}(D_{2n})$, D_{2n} sonlu dihedral grubunun power grafi olmak üzere $\mathcal{P}(D_{2n})$ nin komşuluk matrisi $A(\mathcal{P}(D_{2n}))$ ile gösterilir ve

$$A(\mathcal{P}(D_{2n})) = \begin{pmatrix} A(\mathcal{P}(C_n)) & E_n \\ E_n^T & 0_n \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Ayrıca $\mathcal{P}(D_{2n})$ power grafinin komşuluk matrisinin özdeğerleri

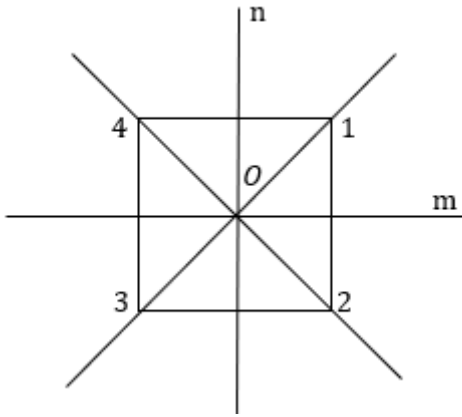
$$\lambda_1(\mathcal{P}(D_{2n})), \lambda_2(\mathcal{P}(D_{2n})), \dots, \lambda_{2n}(\mathcal{P}(D_{2n}))$$

ile gösterilir. Ayrıca $A(\mathcal{P}(D_{2n}))$ komşuluk matrisi reel simetrik bir matris olduğundan tüm özdeğerleri reeldir ve özdeğerler arasında

$$\lambda_1(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq \lambda_2(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq \dots \geq \lambda_{2n}(\mathcal{P}(D_{2n}))$$

eşitsizliği vardır [11].

Örnek



Şekil 3.6. Kare

Karenin simetri grubu $D_8 = \{R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}, T_m, T_n, T_{\{1,3\}}, T_{\{2,4\}}\}$ dir. Burada R_0 , O merkezli saat yönünde 0° lik dönme, R_{90} , O merkezli saat yönünde 90° lik dönme, R_{180} , O merkezli saat yönünde 180° lik dönme, R_{270} , O merkezli saat yönünde 270° lik dönme, $T_m, T_n, T_{\{1,3\}}, T_{\{2,4\}}$ sırası ile $m, n, \{1,3\}, \{2,4\}$ doğrularına göre yansımadır. Her simetri köşeleri köşelere götürdüğünden 1, 2, 3, 4 üzerinde bir permütasyon tanımlar ve karenin her simetrisi bir permütasyon ile temsil edilir. Buna göre aşağıdaki eşlemeler vardır.

$$R_0 \rightarrow (1), R_{90} \rightarrow (1234), R_{180} \rightarrow (13)(24), R_{270} \rightarrow (1432),$$

$$T_m \rightarrow (12)(34), T_n \rightarrow (14)(23), T_{\{1,3\}} \rightarrow (24), T_{\{2,4\}} \rightarrow (13)$$

dir. Üstelik D_8 in ve S_4 ün ikili işlemleri aynı olduğundan yukarıdaki permütasyonların ürettiği grup D_8 ile eş yapılıdır. Bu durumda

$$D_8 = \{(1), (13), (24), (1234), (1432), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

dir. Buna göre D_8 dihedral grubunun $\mathcal{P}(D_8)$ power grafinin noktalar kümesi

$$V(\mathcal{P}(D_8)) = \{(1), (13), (24), (1234), (1432), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

ve noktalar arası komşulukları;

$(1) = (13)(13)$ olduğundan $(1) \sim (13)$,

$(1) = (1234)(1234)(1234)(1234)$ olduğundan $(1) \sim (1234)$,

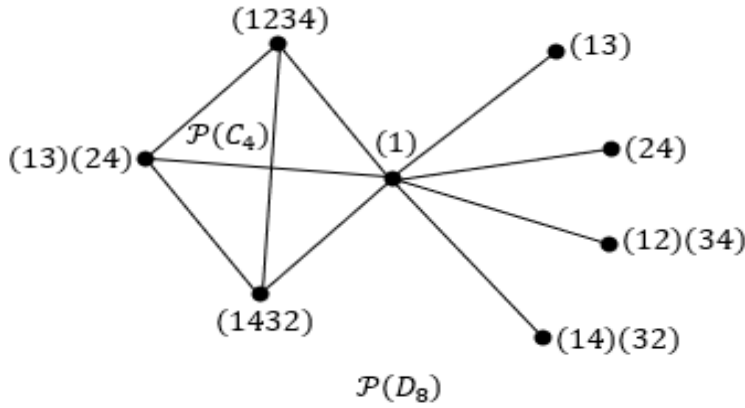
$(1) = (12)(34)(12)(34)$ olduğundan $(1) \sim (12)(34)$,

benzer şekilde $(1) \sim (24)$, $(1) \sim (1432)$, $(1) \sim (13)(24)$, $(1) \sim (14)(23)$ dir. Ayrıca

$(1234)(1234) = (13)(24)$ olduğundan $(1234) \sim (13)(24)$

$(1234)(1234)(1234) = (1432)$ olduğundan $(1234) \sim (1432)$

dir. Dolayısıyla $\mathcal{P}(D_8)$ power grafi;



Şekil 3.7. $\mathcal{P}(D_8)$ power grafi

dir. Ayrıca $A(\mathcal{P}(C_4))$ komşuluk matrisi

$$A(\mathcal{P}(C_4)) = \begin{matrix} (1) \\ (1234) \\ (13)(24) \\ (1432) \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olup $\mathcal{P}(D_8)$ power grafinin $A(\mathcal{P}(D_8))$ komşuluk matrisi

$$A(\mathcal{P}(D_8)) = \begin{pmatrix} A(\mathcal{P}(C_4)) & E_4 \\ E_4^T & 0_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve özdeğerleri

$$\lambda_1(\mathcal{P}(D_8)) = 3,3722, \lambda_2(\mathcal{P}(D_8)) = 1, \lambda_3(\mathcal{P}(D_8)) = \lambda_4(\mathcal{P}(D_8)) = \lambda_5(\mathcal{P}(D_8)) = 0$$

$$\lambda_6(\mathcal{P}(D_8)) = \lambda_7(\mathcal{P}(D_8)) = -1, \lambda_8(\mathcal{P}(D_8)) = -2,3722$$

olarak bulunur.

3.2.2.2. Tanım

$\mathcal{P}(D_{2n})$, D_{2n} sonlu dihedral grubunun power grafi olmak üzere $\mathcal{P}(D_{2n})$ nin distance matrisi $\mathcal{D}(\mathcal{P}(D_{2n}))$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{D}(\mathcal{P}(D_{2n})) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}(\mathcal{P}(C_n)) & M_n \\ M_n^T & 2(J - I)_n \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$$

dir. Ayrıca $\mathcal{P}(D_{2n})$ power grafinin distance matrisinin özdeğerleri

$$\partial_1(\mathcal{P}(D_{2n})), \partial_2(\mathcal{P}(D_{2n})), \dots, \partial_{2n}(\mathcal{P}(D_{2n}))$$

ile gösterilir ve $\mathcal{D}(\mathcal{P}(D_{2n}))$ distance matrisi reel simetrik bir matris olduğundan tüm özdeğerleri reeldir ve özdeğerler arasında

$$\partial_1(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq \partial_2(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq \dots \geq \partial_{2n}(\mathcal{P}(D_{2n}))$$

eşitsizliği vardır.

Örnek

Şekil 3.7 ile verilen $\mathcal{P}(D_8)$ power grafi için

$$\mathcal{D}(\mathcal{P}(C_4)) = \begin{matrix} (1) \\ (1234) \\ (1432) \\ (13)(24) \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olup $\mathcal{P}(D_8)$ in distance matrisi

$$\mathcal{D}(\mathcal{P}(D_8)) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}(\mathcal{P}(C_4)) & M_4 \\ M_4^T & 2(J - I)_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ve özdeğerleri

$$\partial_1(\mathcal{P}(D_8)) = 11,8015, \partial_2(\mathcal{P}(D_8)) = -0,5783, \partial_3(\mathcal{P}(D_8)) = \partial_4(\mathcal{P}(D_8)) = -1$$

$$\partial_5(\mathcal{P}(D_8)) = \partial_6(\mathcal{P}(D_8)) = \partial_7(\mathcal{P}(D_8)) = -2, \partial_8(\mathcal{P}(D_8)) = -3,2231$$

olarak bulunur.

3.3. Sonlu Devirli Grupların ve Sonlu Dihedral Grupların Power Graflarının Enerjileri, Laplacian Enerjileri ve Distance Enerjileri

3.3.1. Sonlu devirli grupların power graflarının enerjileri, Laplacian enerjileri ve distance enerjileri

3.3.1.1. Tanım

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n sonlu devirli grubunun power grafi olmak üzere $\mathcal{P}(C_n)$ nin enerjisi $\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n))$ ile gösterilir ve $A(\mathcal{P}(C_n))$ komşuluk matrisinin özdeğerlerinin mutlak değerce toplamı şeklinde tanımlanır. Yani

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i(\mathcal{P}(C_n))|$$

dir.

Örnek

Şekil 3.5 ile verilen $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)$ power grafinin komşuluk matrisi

$$A(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olup özdeğerleri

$$\lambda_1(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = 4,4278, \lambda_2(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = 0,3756,$$

$$\lambda_3(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = \lambda_4(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = \lambda_5(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = -1, \lambda_6(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = -1,8035$$

dir. Dolayısıyla $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)$ nin enerjisi

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = \sum_{i=1}^6 |\lambda_i(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6))| = 4,4278 + 0,3756 + 1 + 1 + 1 + 1,8035 = 9,6069$$

olarak hesaplanır.

3.3.1.2. Tanım

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n sonlu devirli grubunun power grafi, $k = 1, 2, \dots, n$ için $\mu_k(\mathcal{P}(C_n))$ lar $\mathcal{P}(C_n)$ nin Laplacian özdeğerleri olmak üzere, $\mathcal{P}(C_n)$ nin Laplacian enerjisi

$$L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) = \sum_{k=1}^n |\gamma_k(\mathcal{P}(C_n))|$$

şeklinde tanımlıdır. Burada

$$\gamma_k(\mathcal{P}(C_n)) = \mu_k(\mathcal{P}(C_n)) - \frac{s}{n},$$

$$s = \ell(2n - \ell - 1) - 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} l_{ij}$$

dir.

Örnek

Şekil 3.5 ile verilen $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)$ power grafinin Laplacian matrisi

$$L(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

olup özdeğerleri

$$\mu_1(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = 0, \mu_2(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = 3, \mu_3(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = 5,$$

$$\mu_4(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = \mu_5(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = \mu_6(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = 6$$

dir. Ayrıca

$$s = \ell(2n - \ell - 1) - 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} l_{ij} = 3(12 - 3 - 1) - 2(-1) = 26$$

$$\gamma_1(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = 0 - \frac{26}{6} = -\frac{13}{3},$$

$$\gamma_2(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = 3 - \frac{26}{6} = -\frac{4}{3},$$

$$\gamma_3(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = 5 - \frac{26}{6} = \frac{2}{3},$$

$$\gamma_4(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = \gamma_5(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = \gamma_6(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = 6 - \frac{26}{6} = \frac{5}{3}$$

olup

$$L\mathcal{E}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = \sum_{k=1}^6 |\gamma_k(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6))| = \frac{13}{3} + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{5}{3} + \frac{5}{3} + \frac{5}{3} = \frac{34}{3}$$

bulunur.

3.3.1.3. Tanım

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n sonlu devirli grubunun power grafi olmak üzere $\mathcal{P}(C_n)$ nin distance enerjisi $\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n))$ ile gösterilir ve $\mathcal{D}(\mathcal{P}(C_n))$ distance matrisinin özdeğerlerinin mutlak değerce toplamı şeklinde tanımlanır. Yani

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n)) = \sum_{i=1}^n |\partial_i(\mathcal{P}(C_n))|$$

dir.

Örnek

Şekil 3.5 ile verilen $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)$ power grafinin distance matrisi

$$\mathcal{D}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

olup özdeğerleri

$$\partial_1(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = 5,7565, \partial_2(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = -0,3628,$$

$$\partial_3(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = \partial_4(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = \partial_5(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = -1, \partial_6(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = -2,3937$$

dir. Dolayısıyla $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)$ power grafinin distance enerjisi

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)) = \sum_{i=1}^6 |\partial_i(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_6))| = 5,7565 + 0,3628 + 1 + 1 + 1 + 2,3937 = 11,513$$

olarak hesaplanır.

3.3.2. Sonlu dihedral grupların power graflarının enerjileri ve distance enerjileri

3.3.2.1. Tanım

$\mathcal{P}(D_{2n})$, D_{2n} sonlu dihedral grubunun power grafi olmak üzere $\mathcal{P}(D_{2n})$ nin enerjisi $\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_{2n}))$ ile gösterilir ve $A(\mathcal{P}(D_{2n}))$ komşuluk matrisinin özdeğerlerinin mutlak değerce toplamı şeklinde tanımlanır. Yani

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_{2n})) = \sum_{i=1}^{2n} |\lambda_i(\mathcal{P}(D_{2n}))|$$

dir.

Örnek

Şekil 3.7 ile verilen $\mathcal{P}(D_8)$ power grafinin $A(\mathcal{P}(D_8))$ komşuluk matrisi

$$A(\mathcal{P}(D_8)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olup özdeğerleri

$$\lambda_1(\mathcal{P}(D_8)) = 3,3722, \lambda_2(\mathcal{P}(D_8)) = 1, \lambda_3(\mathcal{P}(D_8)) = \lambda_4(\mathcal{P}(D_8)) = \lambda_5(\mathcal{P}(D_8)) = 0$$

$$\lambda_6(\mathcal{P}(D_8)) = \lambda_7(\mathcal{P}(D_8)) = -1, \lambda_8(\mathcal{P}(D_8)) = -2,3722$$

dir. Dolayısıyla $\mathcal{P}(D_8)$ 'in enerjisi

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_8)) = \sum_{i=1}^8 |\lambda_i(\mathcal{P}(D_8))| = 3,3722 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 2,3722 = 8,7444$$

olarak hesaplanır.

3.3.2.2. Tanım

$\mathcal{P}(D_{2n})$, D_{2n} sonlu dihedral grubunun power grafi olmak üzere $\mathcal{P}(D_{2n})$ nin distance enerjisi $\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n}))$ ile gösterilir ve $\mathcal{D}(\mathcal{P}(D_{2n}))$ distance matrisinin özdeğerlerinin mutlak değerce toplamı şeklinde tanımlanır. Yani

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) = \sum_{i=1}^{2n} |\partial_i(\mathcal{P}(D_{2n}))|$$

dir.

Örnek

Şekil 3.7 ile verilen $\mathcal{P}(D_8)$ power grafinin distance matrisi

$$\mathcal{D}(\mathcal{P}(D_8)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

olup özdeğerleri

$$\partial_1(\mathcal{P}(D_8)) = 11,8015, \partial_2(\mathcal{P}(D_8)) = -0,5783, \partial_3(\mathcal{P}(D_8)) = \partial_4(\mathcal{P}(D_8)) = -1$$

$$\partial_5(\mathcal{P}(D_8)) = \partial_6(\mathcal{P}(D_8)) = \partial_7(\mathcal{P}(D_8)) = -2, \partial_8(\mathcal{P}(D_8)) = -3,2231$$

dir. Dolayısıyla $\mathcal{P}(D_8)$ power grafinin distance enerjisi

$$\begin{aligned} \mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_8)) &= \sum_{i=1}^8 |\partial_i(\mathcal{P}(D_8))| = 11,8015 + 0,5783 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 3,2231 \\ &= 23,6029 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

4. SONLU DEVİRLİ GRUPLARIN VE SONLU DİHEDRAL GRUPLARIN POWER GRAFLARININ ENERJİLERİ İÇİN SINIRLAR

Bu bölümde öncelikle sonlu devirli grupların ve sonlu dihedral grupların power graflarının enerjileri için alt ve üst sınırlar elde edilmiştir. Daha sonra grup yapısı yardımı ile devirli grupların ve dihedral grupların power graflarının enerjileri karşılaştırılmıştır.

Bölüm boyunca C_n devirli grubunun birim elemanın ve üreteçlerinin oluşturduğu küme V_1 , geri kalan noktalarının oluşturduğu küme V_2 ile gösterilecek ve $|V_1| = \ell$ alınacaktır. Bölüm 3 de verildiği üzere $\mathcal{P}(C_n)$ power grafinin enerjisi,

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i(\mathcal{P}(C_n))|$$

şeklinde tanımlı olup burada $i = 1, 2, \dots, n$ için $\lambda_i(\mathcal{P}(C_n))$ ler $\mathcal{P}(C_n)$ nin özdeğerleridir. Diğer taraftan dihedral grup $D_{2n} = \langle a, b \rangle$, $2n$ –inci mertebeden bir grup olup $o(a) = n$ olduğundan $C_n = \langle a \rangle$ devirli grubu D_{2n} nin n –inci mertebeden bir alt grubudur. Dolayısıyla $\mathcal{P}(C_n)$ power grafi $\mathcal{P}(D_{2n})$ nin bağlantılı bir alt grafidir. Ayrıca $\mathcal{P}(D_{2n})$ power grafinin enerjisi;

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_{2n})) = \sum_{i=1}^{2n} |\lambda_i(\mathcal{P}(D_{2n}))|$$

şeklinde tanımlı olup burada $i = 1, 2, \dots, 2n$ için $\lambda_i(\mathcal{P}(D_{2n}))$ ler $\mathcal{P}(D_{2n})$ nin özdeğerleridir.

4.1. Sonlu Devirli Grupların Power Graflarının Enerjileri İçin Sınırlar

4.1.1. Lemma

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n devirli grubunun power grafi, $A(\mathcal{P}(C_n))$, $\mathcal{P}(C_n)$ nin komşuluk matrisi ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(\mathcal{P}(C_n)) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2(\mathcal{P}(C_n)) = \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2$$

dir. Burada $i = 1, 2, \dots, n$ için λ_i ler $A(\mathcal{P}(C_n))$ komşuluk matrisinin özdeğerleridir.

İspat

İz'in tanımından

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(\mathcal{P}(C_n)) = \text{tr}[A(\mathcal{P}(C_n))] = 0$$

dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} A^2(\mathcal{P}(C_n)) &= \begin{pmatrix} \overbrace{J_{\ell \times \ell} - I_{\ell \times \ell}}^{A_{11}} & \overbrace{J_{\ell \times (n-\ell)}}^{A_{12}} \\ \overbrace{J_{(n-\ell) \times \ell}}^{A_{21}} & \overbrace{A(\mathcal{P}(V_2))_{(n-\ell) \times (n-\ell)}}^{A_{22}} \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}^2 + A_{12}A_{21} & A_{11}A_{12} + A_{12}A_{22} \\ A_{21}A_{11} + A_{22}A_{21} & A_{22}^2 + A_{21}A_{12} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2(\mathcal{P}(C_n)) &= \text{tr}[A^2(\mathcal{P}(C_n))] = \text{tr}(A_{11}^2) + \text{tr}(A_{12}A_{21}) + \text{tr}(A_{22}^2) + \text{tr}(A_{21}A_{12}) \\ &= \ell(\ell - 1) + \ell(n - \ell) + \ell(n - \ell) + \text{tr}[A^2(\mathcal{P}(V_2))] \end{aligned}$$

olup

$$\text{tr}[A^2(\mathcal{P}(V_2))] = \sum_{i=\ell+1}^n \sum_{\substack{j=\ell+1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}^2 = 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2$$

olduğundan

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2(\mathcal{P}(C_n)) = \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2$$

bulunur.

4.1.2. Lemma

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n devirli grubunun power grafi, $n \geq 3$ ve $n = p^m$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2(\mathcal{P}(C_n)) = n(n-1)$$

dir. Burada p bir asal sayı ve $m \in \mathbb{Z}^+$ dir.

İspat

$|C_n| = p^m$ olduğundan C_n devirli grubunun power grafi bir tam graftır. Dolayısıyla $A^2(\mathcal{P}(C_n))$ matrisinin esas köşegen üzerindeki elemanları $n-1$ dir. Buna göre

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2(\mathcal{P}(C_n)) = \text{tr}[A^2(\mathcal{P}(C_n))] = n(n-1)$$

olarak elde edilir.

4.1.3. Lemma

$a, b, x, y \in \mathbb{R}^+$ ve $0 < a \leq x \leq y \leq b$ olsun. Bu durumda

$$\frac{\sqrt{xy}}{x+y} \geq \frac{\sqrt{ab}}{a+b}$$

dir [26].

4.1.1. Teorem

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n devirli grubunun power grafi, $\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n))$, $\mathcal{P}(C_n)$ nin enerjisi ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$\sqrt{\ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2} \leq \mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n))$$

ve

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) \leq \sqrt{n\ell(2n - \ell - 1) + 2n \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2}$$

dir.

İspat

Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve Lemma 4.1.1'den

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^2(\mathcal{P}(C_n)) &= \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i(\mathcal{P}(C_n))| \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n \lambda_i^2(\mathcal{P}(C_n)) \\ &= n \left[\ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2 \right] \end{aligned}$$

olup

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) \leq \sqrt{n\ell(2n - \ell - 1) + 2n \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\mathcal{E}^2(\mathcal{P}(C_n)) = \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i(\mathcal{P}(C_n))| \right)^2 \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i^2(\mathcal{P}(C_n))$$

ve Lemma 4.1.1'den

$$= \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2$$

olup

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) \geq \sqrt{\ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

4.1.1. Sonuç

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n devirli grubunun power grafi, $\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n))$, $\mathcal{P}(C_n)$ nin enerjisi, $n \geq 3$ ve $n = p^m$ olmak üzere

$$\sqrt{n(n-1)} \leq \mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) \leq n\sqrt{n-1}$$

dir. Burada p bir asal sayı ve $m \in \mathbb{Z}^+$ dir.

İspat

$|C_n| = p^m$ olduğundan $\mathcal{P}(C_n)$ tam graf olup Lemma 4.1.2 ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\mathcal{E}^2(\mathcal{P}(C_n)) = \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i(\mathcal{P}(C_n))| \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n \lambda_i^2(\mathcal{P}(C_n)) = n^2(n-1)$$

ve buradan

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) \leq n\sqrt{n-1}$$

bulunur. Diğer taraftan Lemma 4.1.2'den

$$\mathcal{E}^2(\mathcal{P}(C_n)) = \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i(\mathcal{P}(C_n))| \right)^2 \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i^2(\mathcal{P}(C_n)) = n(n-1)$$

ve buradan

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) \geq \sqrt{n(n-1)}$$

olarak elde edilir.

4.1.2. Teorem

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n devirli grubunun power grafi, $\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n))$, $\mathcal{P}(C_n)$ nin enerjisi ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) \leq \lambda_1(\mathcal{P}(C_n)) + \sqrt{(n-1)[\ell(2n-\ell-1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2 - \lambda_1^2(\mathcal{P}(C_n))]}$$

dir.

İspat

Enerjinin tanımından

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) - \lambda_1(\mathcal{P}(C_n)) = \sum_{i=2}^n |\lambda_i(\mathcal{P}(C_n))|$$

olup Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve Lemma 4.1.1'den

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) - \lambda_1(\mathcal{P}(C_n)) \right)^2 &= \left(\sum_{i=2}^n |\lambda_i(\mathcal{P}(C_n))| \right)^2 \\ &\leq (n-1) \sum_{i=2}^n \lambda_i^2(\mathcal{P}(C_n)) \\ &= (n-1) \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2(\mathcal{P}(C_n)) - \lambda_1^2(\mathcal{P}(C_n)) \right) \\ &= (n-1) [\ell(2n-\ell-1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2 - \lambda_1^2(\mathcal{P}(C_n))] \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) \leq \lambda_1(\mathcal{P}(C_n)) + \sqrt{(n-1)[\ell(2n-\ell-1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2 - \lambda_1^2(\mathcal{P}(C_n))]}$$

elde edilir.

4.1.2. Sonuç

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n devirli grubunun power grafi, $\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n))$, $\mathcal{P}(C_n)$ nin enerjisi, $n \geq 3$ ve $n = p^m$ olmak üzere

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) = 2(n-1)$$

dir. Burada p bir asal sayı ve $m \in \mathbb{Z}^+$ dir.

İspat

$|C_n| = p^m$ olduğundan $\mathcal{P}(C_n)$ tam graf olup spektrumu $\left\{n-1, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{n-1}\right\}$ dir.

Enerjinin tanımından

$$\left(\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) - \lambda_1(\mathcal{P}(C_n))\right)^2 = \left(\sum_{i=2}^n |\lambda_i(\mathcal{P}(C_n))|\right)^2$$

olup Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve tam grafin spektrumundan

$$\left(\sum_{i=2}^n |\lambda_i(\mathcal{P}(C_n))|\right)^2 = (n-1) \sum_{i=2}^n \lambda_i^2(\mathcal{P}(C_n))$$

dir. Bu durumda

$$\left(\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) - \lambda_1(\mathcal{P}(C_n))\right)^2 = (n-1) \sum_{i=2}^n \lambda_i^2(\mathcal{P}(C_n))$$

ve Lemma 4.1.2'den

$$= (n-1)[n(n-1) - (n-1)^2]$$

$$= (n-1)^2$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) - \lambda_1(\mathcal{P}(C_n)) = \mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) - (n-1) = n-1$$

ve buradan

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) = 2(n-1)$$

olarak elde edilir.

4.1.3. Teorem

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n devirli grubunun power grafi, $\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n))$, $\mathcal{P}(C_n)$ nin enerjisi ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) \geq \sqrt{\ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2 + n(n-1) \det A(\mathcal{P}(C_n))^{\frac{2}{n}}}$$

dir.

İspat

Enerjinin tanımından

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n))^2 &= \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i(\mathcal{P}(C_n))| \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^2(\mathcal{P}(C_n)) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} |\lambda_i(\mathcal{P}(C_n))| |\lambda_j(\mathcal{P}(C_n))| \end{aligned}$$

olup Lemma 4.1.1'den

$$= \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2 + \sum_{i \neq j} |\lambda_i(\mathcal{P}(C_n))| |\lambda_j(\mathcal{P}(C_n))| \quad (4.1)$$

dir. Negatif olmayan sayıların geometrik ortalaması, aritmetik ortalamasından küçük veya eşit olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} |\lambda_i(\mathcal{P}(C_n))| |\lambda_j(\mathcal{P}(C_n))| &\geq (\prod_{i \neq j} |\lambda_i(\mathcal{P}(C_n))| |\lambda_j(\mathcal{P}(C_n))|)^{\frac{1}{n(n-1)}} \\ &= \left(\prod_{i=1}^n |\lambda_i(\mathcal{P}(C_n))|^{2(n-1)} \right)^{\frac{1}{n(n-1)}} \\ &= \prod_{i=1}^n |\lambda_i(\mathcal{P}(C_n))|^{\frac{2}{n}} \end{aligned} \quad (4.2)$$

dir. Diğer taraftan

$$\prod_{i=1}^n |\lambda_i(\mathcal{P}(C_n))| = \det A(\mathcal{P}(C_n)) \quad (4.3)$$

dir. O halde Eş. 4.1, Eş. 4.2 ve Eş. 4.3'den

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) \geq \sqrt{\ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2 + n(n-1) \det A(\mathcal{P}(C_n))}^{\frac{2}{n}}$$

olarak elde edilir.

4.1.3. Sonuç

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n devirli grubunun power grafi, $\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n))$, $\mathcal{P}(C_n)$ nin enerjisi, $n \geq 3$ ve $n = p^m$ olmak üzere

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) \geq \sqrt{n(n-1) \left[1 + (n-1)^{\frac{2}{n}} \right]}$$

dir. Burada p bir asal sayı ve $m \in \mathbb{Z}^+$ dir.

İspat

$|C_n| = p^m$ olduğundan $\mathcal{P}(C_n)$ tam graf olup spectrumu $\left\{n-1, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{n-1}\right\}$ dir.

Teorem 4.1.3 ve Lemma 4.1.2'den

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n))^2 &\geq \sum_{i=1}^n \lambda_i^2(\mathcal{P}(C_n)) + n(n-1) \det A(\mathcal{P}(C_n))^{\frac{2}{n}} \\ &= n(n-1) + n(n-1) [(n-1)(-1)^{n-1}]^{\frac{2}{n}} \\ &= n(n-1) \left[1 + (n-1)^{\frac{2}{n}}\right] \end{aligned}$$

ve buradan

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) \geq \sqrt{n(n-1) \left[1 + (n-1)^{\frac{2}{n}}\right]}$$

bulunur.

4.1.4. Teorem

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n devirli grubunun power grafi, $|\lambda_1(\mathcal{P}(C_n))| \geq |\lambda_2(\mathcal{P}(C_n))| \geq \dots \geq |\lambda_n(\mathcal{P}(C_n))| \geq 0$ olmak üzere $\lambda_1(\mathcal{P}(C_n)), \lambda_2(\mathcal{P}(C_n)), \dots, \lambda_n(\mathcal{P}(C_n))$, $A(\mathcal{P}(C_n))$ komşuluk matrisinin özdeğerleri ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) \geq \frac{\ell(2n-\ell-1)+2\sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2 + n|\lambda_1(\mathcal{P}(C_n))||\lambda_n(\mathcal{P}(C_n))|}{|\lambda_1(\mathcal{P}(C_n))| + |\lambda_n(\mathcal{P}(C_n))|}$$

dir.

İspat

C_n devirli bir grup ve $n \geq 3$ olduğundan $\mathcal{P}(C_n)$ power grafi en az iki kenara sahiptir. Dolayısıyla $A(\mathcal{P}(C_n))$ nin sıfırdan farklı en az bir özdeğeri vardır. Şimdi $i = 1, 2, \dots, n$ için $|\lambda_1(\mathcal{P}(C_n))| \geq |\lambda_i(\mathcal{P}(C_n))| \geq |\lambda_n(\mathcal{P}(C_n))|$ alalım. Bu durumda

$$(|\lambda_1(\mathcal{P}(C_n))| - |\lambda_i(\mathcal{P}(C_n))|)(|\lambda_i(\mathcal{P}(C_n))| - |\lambda_n(\mathcal{P}(C_n))|) \geq 0 \quad (4.4)$$

dir. Diğer taraftan gösterim açısından kolaylık olması amacı ile $i = 1, 2, \dots, n$ için $\lambda_i(\mathcal{P}(C_n))$ leri λ_i şeklinde alacak olursak

$$(|\lambda_1| - |\lambda_i|)(|\lambda_i| - |\lambda_n|) = |\lambda_i|(|\lambda_1| + |\lambda_n|) - (\lambda_i^2 + |\lambda_1||\lambda_n|) \quad (4.5)$$

dir. Bu durumda Eş. 4.4 ve Eş. 4.5'den

$$|\lambda_i|(|\lambda_1| + |\lambda_n|) \geq \lambda_i^2 + |\lambda_1||\lambda_n|$$

dir. $1 \leq i \leq n$ olmak üzere her i değeri için bu işlem yapılırsa

$$(|\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n|)(|\lambda_1| + |\lambda_n|) \geq (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2) + n|\lambda_1||\lambda_n|$$

ve buradan

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) \geq \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + n|\lambda_1||\lambda_n|}{|\lambda_1| + |\lambda_n|}$$

ve Lemma 4.1.1'den

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) \geq \frac{\ell(2n-\ell-1)+2\sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2 + n|\lambda_1||\lambda_n|}{|\lambda_1| + |\lambda_n|}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

4.1.4. Sonuç

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n devirli grubunun power grafi, $\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n))$, $\mathcal{P}(C_n)$ nin enerjisi, $n \geq 3$ ve $n = p^m$ olmak üzere

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) = 2(n - 1)$$

dir. Burada p bir asal sayı ve $m \in \mathbb{Z}^+$ dir.

İspat

$|C_n| = p^m$ olduğundan $\mathcal{P}(C_n)$ tam graf olup spectrumu $\left\{n - 1, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{n-1}\right\}$ dir.

$i = 2, 3, \dots, n$ için

$$|\lambda_1(\mathcal{P}(C_n))| \geq |\lambda_i(\mathcal{P}(C_n))| = |\lambda_2(\mathcal{P}(C_n))| = \dots = |\lambda_n(\mathcal{P}(C_n))|$$

olduğundan

$$(|\lambda_1(\mathcal{P}(C_n))| - |\lambda_i(\mathcal{P}(C_n))|)(|\lambda_i(\mathcal{P}(C_n))| - |\lambda_n(\mathcal{P}(C_n))|) = 0$$

dir. O halde Teorem 4.1.4 ve Lemma 4.1.2'den

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) &= \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2(\mathcal{P}(C_n)) + n|\lambda_1(\mathcal{P}(C_n))||\lambda_n(\mathcal{P}(C_n))|}{|\lambda_1(\mathcal{P}(C_n))| + |\lambda_n(\mathcal{P}(C_n))|} \\ &= \frac{n(n-1) + n(n-1)}{1 + n-1} \\ &= 2(n - 1) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

4.1.5. Teorem

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n devirli grubunun power grafi, $|\lambda_1(\mathcal{P}(C_n))| \geq |\lambda_2(\mathcal{P}(C_n))| \geq \dots \geq |\lambda_n(\mathcal{P}(C_n))| > 0$ olmak üzere $\lambda_1(\mathcal{P}(C_n)), \lambda_2(\mathcal{P}(C_n)), \dots, \lambda_n(\mathcal{P}(C_n))$, $A(\mathcal{P}(C_n))$ komşuluk matrisinin özdeğerleri ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) \geq \frac{2\sqrt{|\lambda_1(\mathcal{P}(C_n))||\lambda_n(\mathcal{P}(C_n))|}\sqrt{n\ell(2n-\ell-1)+2n\sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2}}{|\lambda_1(\mathcal{P}(C_n))|+|\lambda_n(\mathcal{P}(C_n))|}$$

dir.

İspat

C_n devirli bir grup ve $n \geq 3$ olduğundan $\mathcal{P}(C_n)$ power grafi en az iki kenara sahiptir. Dolayısıyla $A(\mathcal{P}(C_n))$ nin sıfırdan farklı en az bir özdeğeri vardır. Teorem 4.1.4'den

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) \geq \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2(\mathcal{P}(C_n)) + n|\lambda_1(\mathcal{P}(C_n))||\lambda_n(\mathcal{P}(C_n))|}{|\lambda_1(\mathcal{P}(C_n))|+|\lambda_n(\mathcal{P}(C_n))|} \quad (4.6)$$

dir. Diğer taraftan $a, b \geq 0$ olmak üzere

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

olduğundan

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + n|\lambda_1||\lambda_n| \geq 2\sqrt{|\lambda_1||\lambda_n|}\sqrt{n\sum_{i=1}^n \lambda_i^2} \quad (4.7)$$

dir. Buna göre Eş. 4.6, Eş. 4.7 ve Lemma 4.1.1'den

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) \geq \frac{2\sqrt{|\lambda_1(\mathcal{P}(C_n))||\lambda_n(\mathcal{P}(C_n))|}\sqrt{n\sum_{i=1}^n \lambda_i^2(\mathcal{P}(C_n))}}{|\lambda_1(\mathcal{P}(C_n))|+|\lambda_n(\mathcal{P}(C_n))|}$$

$$= \frac{2\sqrt{|\lambda_1(\mathcal{P}(C_n))||\lambda_n(\mathcal{P}(C_n))|}\sqrt{n\ell(2n-\ell-1)+2n\sum_{\ell+1\leq i<j\leq n}a_{ij}^2}}{|\lambda_1(\mathcal{P}(C_n))|+|\lambda_n(\mathcal{P}(C_n))|}$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

4.1.6. Teorem

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n devirli grubunun power grafi, $|\lambda_1(\mathcal{P}(C_n))| \geq |\lambda_2(\mathcal{P}(C_n))| \geq \dots \geq |\lambda_n(\mathcal{P}(C_n))|$ olmak üzere $\lambda_1(\mathcal{P}(C_n)), \lambda_2(\mathcal{P}(C_n)), \dots, \lambda_n(\mathcal{P}(C_n))$, $A(\mathcal{P}(C_n))$ komşuluk matrisinin özdeğerleri ve $n \geq 3$ olsun. Eğer $|\lambda_n(\mathcal{P}(C_n))| \geq 1$ ise

$$\varepsilon(\mathcal{P}(C_n)) \geq 2\sqrt{\frac{n-1}{n}[\ell(2n-\ell-1)+2\sum_{\ell+1\leq i<j\leq n}a_{ij}^2]}$$

dir.

İspat

$\Delta(\mathcal{P}(C_n))$, $\mathcal{P}(C_n)$ nin en büyük derecesi olduğundan

$$|\lambda_1(\mathcal{P}(C_n))| \leq \Delta(\mathcal{P}(C_n)) \leq n-1$$

eşitsizliği vardır. Diğer taraftan

$$|\lambda_n(\mathcal{P}(C_n))| \geq 1$$

olduğundan Lemma 4.1.3'den

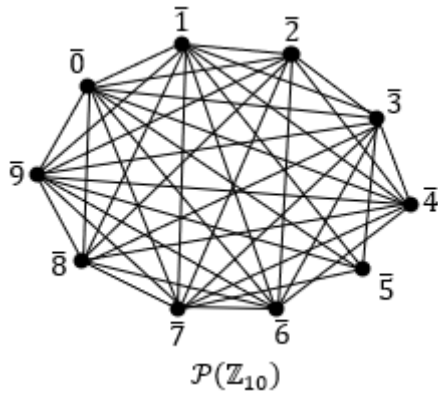
$$\frac{\sqrt{|\lambda_1(\mathcal{P}(C_n))||\lambda_n(\mathcal{P}(C_n))|}}{|\lambda_1(\mathcal{P}(C_n))|+|\lambda_n(\mathcal{P}(C_n))|} \geq \frac{\sqrt{n-1}}{n}$$

ve Teorem 4.1.5'den

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) &\geq \frac{2\sqrt{|\lambda_1(\mathcal{P}(C_n))||\lambda_n(\mathcal{P}(C_n))|}\sqrt{n\ell(2n-\ell-1)+2n\sum_{\ell+1\leq i<j\leq n}a_{ij}^2}}{|\lambda_1(\mathcal{P}(C_n))|+|\lambda_n(\mathcal{P}(C_n))|} \\ &\geq 2\sqrt{\ell(2n-\ell-1)+2\sum_{\ell+1\leq i<j\leq n}a_{ij}^2}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek



Şekil 4.1. $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10})$ power grafi

$\mathbb{Z}_{10}$ devirli grubunun birim elemanı $\bar{0}$ ve üreteçleri $\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}$ ve $\bar{9}$ dir. Buna göre

$$V_1 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{7}, \bar{9}\} \text{ ve } |V_1| = \ell = 5$$

ve

$$V_2 = \mathbb{Z}_{10} - V_1 = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}\}$$

olup

$$A(\mathcal{P}(V_2)) = \begin{bmatrix} \bar{2} & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \bar{4} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \bar{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{6} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \bar{8} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. O halde $A(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10}))$ komşuluk matrisi

$$A(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10})) = \begin{pmatrix} J_{5 \times 5} - I_{5 \times 5} & J_{5 \times 5} \\ J_{5 \times 5} & A(\mathcal{P}(V_2))_{5 \times 5} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ve özdeğerleri

$$\lambda_1(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10})) = 8,3427, \lambda_2(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10})) = 0,8282, \lambda_3(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10})) = \lambda_4(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10})) = -1$$

$$\lambda_5(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10})) = \lambda_6(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10})) = \lambda_7(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10})) = \lambda_8(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10})) = \lambda_9(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10})) = -1,$$

$$\lambda_{10}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10})) = -2,1709$$

olarak elde edilir. Buna göre $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10})$ un enerjisi

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10})) = \sum_{i=1}^{10} |\lambda_i(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10}))| = 18,3418$$

dir. Diğer taraftan

$$\ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2 = 5(20 - 5 - 1) + 2(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 82$$

dir. Şimdi yukarıda verilen teoremlerdeki sınırları bulup $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10})$ un enerjisi ile karşılaştıralım.

Teorem 4.1.1'deki sınırlar:

$$\sqrt{\ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2} = \sqrt{82} = 9,0553 < 18,3418 = \mathcal{E}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10}))$$

ve

$$\sqrt{n\ell(2n - \ell - 1) + 2n \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2} = \sqrt{820} = 28,6356 > 18,3418 = \mathcal{E}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10}))$$

dir. Teorem 4.1.2'deki üst sınır:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \sqrt{(n-1)[\ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2 - \lambda_1^2]} &= 8,3427 + \sqrt{9[82 - 8,3427^2]} \\ &= 8,3427 + 10,5639 = 18,906 \end{aligned}$$

olup

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10})) < \lambda_1 + \sqrt{(n-1)[\ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2 - \lambda_1^2]}$$

dir. Teorem 4.1.3'deki alt sınır:

$$\begin{aligned} \sqrt{\ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2 + n(n-1) \det A(\mathcal{P}(C_n))^{\frac{2}{n}}} &= \sqrt{82 + 90 \times 15^{\frac{2}{10}}} \\ &= 15,3845 < \mathcal{E}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10})) \end{aligned}$$

dir. Teorem 4.1.4'deki alt sınır:

$$|\lambda_1(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10}))| \geq |\lambda_2(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10}))| \geq \dots \geq |\lambda_{10}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10}))|$$

olacak biçimde özdeğerleri düzenlersek $\lambda_1 = 8,3427, \lambda_2 = -2,1709,$

$\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 = -1$ ve $\lambda_{10} = 0,8282$ olup

$$\frac{\ell(2n-\ell-1)+2\sum_{\ell+1\leq i<j\leq n}a_{ij}^2+n|\lambda_1||\lambda_n|}{|\lambda_1|+|\lambda_n|} = \frac{82+10(8,3427)(0,8282)}{8,3427+0,8282} = 16,4753$$

ve buradan

$$\frac{\ell(2n-\ell-1)+2\sum_{\ell+1\leq i<j\leq n}a_{ij}^2+n|\lambda_1||\lambda_n|}{|\lambda_1|+|\lambda_n|} < \varepsilon(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10}))$$

bulunur. Teorem 4.1.5'deki alt sınır:

$$|\lambda_1(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10}))| \geq |\lambda_2(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10}))| \geq \dots \geq |\lambda_{10}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10}))|$$

olacak biçimde özdeğerleri düzenlersek $\lambda_1 = 8,3427, \lambda_2 = -2,1709,$

$\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 = -1$ ve $\lambda_{10} = 0,8282$ olup

$$\frac{2\sqrt{|\lambda_1||\lambda_n|}\sqrt{n\ell(2n-\ell-1)+2n\sum_{\ell+1\leq i<j\leq n}a_{ij}^2}}{|\lambda_1|+|\lambda_n|} = \frac{2\sqrt{(8,3427)(0,8282)}\sqrt{820}}{8,3427+0,8282}$$

$$= \frac{2(2,6285)(28,6356)}{9,1709}$$

$$= 16,4146$$

ve buradan

$$\frac{2\sqrt{|\lambda_1||\lambda_n|}\sqrt{n\ell(2n-\ell-1)+2n\sum_{\ell+1\leq i<j\leq n}a_{ij}^2}}{|\lambda_1|+|\lambda_n|} < \varepsilon(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10}))$$

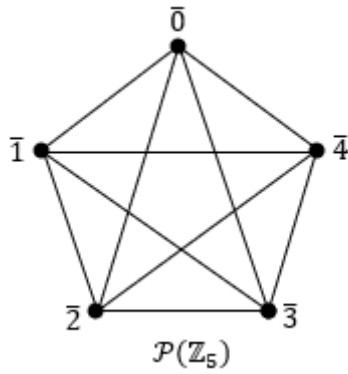
bulunur.

$\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10})$ 'un enerjisi için elde ettiğimiz tüm sınırları aşağıdaki tablo ile özetleyebiliriz.

Çizelge 4.1. $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10})$ 'un enerjisi için sınırlar

$\mathcal{E}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10}))$ =18,3418	Teorem 4.1.1	Teorem 4.1.2	Teorem 4.1.3	Teorem 4.1.4	Teorem 4.1.5
Alt sınır	9,0553	—	15,3845	16,4753	16,4146
Üst sınır	28,6356	18,906	—	—	—

Örnek



Şekil 4.2. $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_5)$ power grafi

$\mathcal{P}(\mathbb{Z}_5)$ power grafi bir tam graf olup $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_5)$ 'in komşuluk matrisi

$$A(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_5)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ve özdeğerleri

$$\lambda_1(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_5)) = 4, \lambda_2(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_5)) = \lambda_3(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_5)) = \lambda_4(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_5)) = \lambda_5(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_5)) = -1$$

dir. Buna göre $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_5)$ 'in enerjisi

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_5)) = \sum_{i=1}^5 |\lambda_i(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_5))| = 8$$

bulunur. O halde yukarıda verilen teoremlerdeki sınırlar doğrultusunda $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_5)$ 'in enerjisi için aşağıdaki tabloyu verebiliriz.

Çizelge 4.2. $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_5)$ 'in enerjisi için sınırlar

$\mathcal{E}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_5))=8$	Sonuç 4.1.1	Sonuç 4.1.2	Sonuç 4.1.3	Sonuç 4.1.4
Alt sınır	4,4721	—	7,4041	8
Üst sınır	10	8	—	—

4.2. Sonlu Dihedral Grupların Power Graflarının Enerjileri İçin Sınırlar

4.2.1. Lemma

$\mathcal{P}(D_{2n})$, D_{2n} dihedral grubunun power grafi, $A(\mathcal{P}(D_{2n}))$, $\mathcal{P}(D_{2n})$ nin komşuluk matrisi ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{2n} \lambda_i(\mathcal{P}(D_{2n})) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{2n} \lambda_i^2(\mathcal{P}(D_{2n})) = 2n + \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2$$

dir. Burada $i = 1, 2, \dots, 2n$ için λ_i ler $A(\mathcal{P}(D_{2n}))$ komşuluk matrisinin özdeğerleridir.

İspat

İz'in tanımından

$$\sum_{i=1}^{2n} \lambda_i(\mathcal{P}(D_{2n})) = \text{tr}[A(\mathcal{P}(D_{2n}))] = 0$$

dir. Şimdi

$$A^2(\mathcal{P}(D_{2n})) = \begin{pmatrix} A(\mathcal{P}(C_n)) & E_n \\ E_n^T & 0_n \end{pmatrix}^2$$

matrisini göz önüne alalım. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^{2n} \lambda_i^2(\mathcal{P}(D_{2n})) = \text{tr}[A^2(\mathcal{P}(D_{2n}))] = \text{tr}[A^2(\mathcal{P}(C_n))] + \text{tr}[E_n E_n^T] + \text{tr}[E_n^T E_n]$$

olup Lemma 4.1.1'den

$$= \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2 + 2n$$

bulunur.

4.2.1. Teorem

$\mathcal{P}(D_{2n})$, D_{2n} dihedral grubunun power grafi, $\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_{2n}))$, $\mathcal{P}(D_{2n})$ nin enerjisi ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$\sqrt{2n + \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2} \leq \mathcal{E}(\mathcal{P}(D_{2n}))$$

ve

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_{2n})) \leq \sqrt{4n^2 + 2n\ell(2n - \ell - 1) + 4n \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2}$$

dir.

İspat

Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve Lemma 4.2.1'den

$$\mathcal{E}^2(\mathcal{P}(D_{2n})) = \left(\sum_{i=1}^{2n} |\lambda_i(\mathcal{P}(D_{2n}))| \right)^2 \leq 2n \sum_{i=1}^{2n} \lambda_i^2(\mathcal{P}(D_{2n}))$$

$$= 2n[2n + \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2]$$

olup

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_{2n})) \leq \sqrt{4n^2 + 2n\ell(2n - \ell - 1) + 4n \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\mathcal{E}^2(\mathcal{P}(D_{2n})) = \left(\sum_{i=1}^{2n} |\lambda_i(\mathcal{P}(D_{2n}))| \right)^2 \geq \sum_{i=1}^{2n} \lambda_i^2(\mathcal{P}(D_{2n}))$$

olup Lemma 4.2.1'den

$$= 2n + \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2$$

ve buradan

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq \sqrt{2n + \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

4.2.1. Sonuç

$C_n = \langle a \rangle$, $D_{2n} = \langle a, b \rangle$ dihedral grubunun devirli alt grubu, $\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_{2n}))$, $\mathcal{P}(D_{2n})$ nin enerjisi ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\mathcal{E}^2(\mathcal{P}(C_n)) + 2n^2} \leq \mathcal{E}(\mathcal{P}(D_{2n})) \leq \sqrt{2n\mathcal{E}^2(\mathcal{P}(C_n)) + 4n^2}$$

dir.

İspat

Teorem 4.1.1'den

$$\mathcal{E}^2(\mathcal{P}(C_n)) \geq \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2 \quad (4.8)$$

ve Teorem 4.2.1'den

$$\mathcal{E}^2(\mathcal{P}(D_{2n})) \leq 2n[2n + \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2] \quad (4.9)$$

dir. Eş. 4.8 ve Eş. 4.9'dan

$$\mathcal{E}^2(\mathcal{P}(D_{2n})) \leq 2n[2n + \mathcal{E}^2(\mathcal{P}(C_n))]$$

ve buradan

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_{2n})) \leq \sqrt{2n\mathcal{E}^2(\mathcal{P}(C_n)) + 4n^2}$$

bulunur. Diğer taraftan Teorem 4.1.1'den

$$\mathcal{E}^2(\mathcal{P}(C_n)) \leq n\ell(2n - \ell - 1) + 2n \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2 \quad (4.10)$$

ve Teorem 4.2.1'den

$$\mathcal{E}^2(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq 2n + \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2 \quad (4.11)$$

dir. Eş. 4.10 ve Eş. 4.11'den

$$\mathcal{E}^2(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq 2n + \frac{\mathcal{E}^2(\mathcal{P}(C_n))}{n}$$

ve buradan

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\mathcal{E}^2(\mathcal{P}(C_n)) + 2n^2}$$

bulunur.

4.2.2. Sonuç

$C_n = \langle a \rangle$, $D_{2n} = \langle a, b \rangle$ dihedral grubunun devirli alt grubu, $\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_{2n}))$, $\mathcal{P}(D_{2n})$ nin enerjisi, $n \geq 3$ ve $n = p^m$ olmak üzere

$$\sqrt{n(n+1)} \leq \mathcal{E}(\mathcal{P}(D_{2n})) \leq n\sqrt{2n+2}$$

dir. Burada p bir asal sayı ve $m \in \mathbb{Z}^+$ dır.

İspat

Teorem 4.2.1, Lemma 4.1.1'den

$$\mathcal{E}^2(\mathcal{P}(D_{2n})) \leq 2n[2n + \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2]$$

$$= 2n[2n + \sum_{i=1}^n \lambda_i^2(\mathcal{P}(C_n))]$$

dir. $|C_n| = p^m$ olduğundan $\mathcal{P}(C_n)$ tam graftır. Buna göre Lemma 4.1.2 den

$$= 2n[2n + n(n-1)]$$

ve buradan

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_{2n})) \leq n\sqrt{2n+2}$$

bulunur. Diğer taraftan Teorem 4.2.1, Lemma 4.1.1'den

$$\mathcal{E}^2(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq 2n + \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2$$

$$= 2n + \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 (\mathcal{P}(C_n))$$

dir. $|C_n| = p^m$ olduğundan $\mathcal{P}(C_n)$ tam graftır. Buna göre Lemma 4.1.2'den

$$= 2n + n(n-1)$$

olup buradan

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq \sqrt{n(n+1)}$$

bulunur.

4.2.2. Teorem

$\mathcal{P}(D_{2n})$, D_{2n} dihedral grubunun power grafi, $\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_{2n}))$, $\mathcal{P}(D_{2n})$ nin enerjisi ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_{2n})) \leq \lambda_1 + \sqrt{(2n-1)[2n + \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2 - \lambda_1^2]}$$

dir.

İspat

Enerjinin tanımından

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_{2n})) - \lambda_1(\mathcal{P}(D_{2n})) = \sum_{i=2}^{2n} |\lambda_i(\mathcal{P}(D_{2n}))|$$

olup Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve Lemma 4.2.1'den

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_{2n})) - \lambda_1(\mathcal{P}(D_{2n})) \right)^2 &= \left(\sum_{i=2}^{2n} |\lambda_i(\mathcal{P}(D_{2n}))| \right)^2 \\ &\leq (2n-1) \sum_{i=2}^{2n} \lambda_i^2(\mathcal{P}(D_{2n})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2n-1)(\sum_{i=1}^{2n} \lambda_i^2(\mathcal{P}(D_{2n})) - \lambda_1^2) \\
&= (2n-1)[2n + \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2 - \lambda_1^2]
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_{2n})) \leq \lambda_1 + \sqrt{(2n-1)[2n + \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2 - \lambda_1^2]}$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

4.2.3. Sonuç

$C_n = \langle a \rangle$, $D_{2n} = \langle a, b \rangle$ dihedral grubunun devirli alt grubu, $\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_{2n}))$, $\mathcal{P}(D_{2n})$ nin enerjisi ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_{2n})) \leq \lambda_1(\mathcal{P}(D_{2n})) + \sqrt{(2n-1)[2n + \mathcal{E}^2(\mathcal{P}(C_n)) - \lambda_1^2(\mathcal{P}(D_{2n}))]}$$

dir.

İspat

Teorem 4.1.1'den

$$\mathcal{E}^2(\mathcal{P}(C_n)) \geq \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2$$

ve Teorem 4.2.2'den

$$\left(\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_{2n})) - \lambda_1(\mathcal{P}(D_{2n})) \right)^2 \leq (2n-1)[2n + \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2 - \lambda_1^2]$$

dir. Bu durumda

$$\left(\varepsilon(\mathcal{P}(D_{2n})) - \lambda_1(\mathcal{P}(D_{2n}))\right)^2 \leq (2n-1)[2n + \varepsilon^2(\mathcal{P}(C_n)) - \lambda_1^2(\mathcal{P}(D_{2n}))]$$

ve buradan

$$\varepsilon(\mathcal{P}(D_{2n})) \leq \lambda_1(\mathcal{P}(D_{2n})) + \sqrt{(2n-1)[2n + \varepsilon^2(\mathcal{P}(C_n)) - \lambda_1^2(\mathcal{P}(D_{2n}))]}$$

bulunur.

4.2.4. Sonuç

$C_n = \langle a \rangle$, $D_{2n} = \langle a, b \rangle$ dihedral grubunun devirli alt grubu, $\varepsilon(\mathcal{P}(D_{2n}))$, $\mathcal{P}(D_{2n})$ nin enerjisi, $n \geq 3$ ve $n = p^m$ olmak üzere

$$\varepsilon(\mathcal{P}(D_{2n})) \leq \lambda_1(\mathcal{P}(D_{2n})) + \sqrt{(2n-1)[n(n+1) - \lambda_1^2(\mathcal{P}(D_{2n}))]}$$

dir. Burada p bir asal sayı ve $m \in \mathbb{Z}^+$ dir.

İspat

Teorem 4.2.2, Lemma 4.1.1'den

$$\begin{aligned} \left(\varepsilon(\mathcal{P}(D_{2n})) - \lambda_1(\mathcal{P}(D_{2n}))\right)^2 &\leq (2n-1)[2n + \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2 - \lambda_1^2] \\ &= (2n-1)[2n + \sum_{i=1}^n \lambda_i^2(\mathcal{P}(C_n)) - \lambda_1^2(\mathcal{P}(D_{2n}))] \end{aligned}$$

dir. $|C_n| = p^m$ olduğundan $\mathcal{P}(C_n)$ tam graftır. Buna göre Lemma 4.1.2' den

$$= (2n-1)[2n + n(n-1) - \lambda_1^2(\mathcal{P}(D_{2n}))]$$

ve buradan

$$\varepsilon(\mathcal{P}(D_{2n})) \leq \lambda_1(\mathcal{P}(D_{2n})) + \sqrt{(2n-1)[n(n+1) - \lambda_1^2(\mathcal{P}(D_{2n}))]}$$

bulunur.

4.2.3. Teorem

$\mathcal{P}(D_{2n})$, D_{2n} dihedral grubunun power grafi, $|\lambda_1(\mathcal{P}(D_{2n}))| \geq |\lambda_2(\mathcal{P}(D_{2n}))| \geq \dots \geq |\lambda_{2n}(\mathcal{P}(D_{2n}))| \geq 0$ olmak üzere $\lambda_1(\mathcal{P}(D_{2n})), \lambda_2(\mathcal{P}(D_{2n})), \dots, \lambda_{2n}(\mathcal{P}(D_{2n})), A(\mathcal{P}(D_{2n}))$ komşuluk matrisinin özdeğerleri ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$\varepsilon(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq \frac{\ell(2n-\ell-1)+2\sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2 + 2n(|\lambda_1(\mathcal{P}(D_{2n}))| |\lambda_{2n}(\mathcal{P}(D_{2n}))| + 1)}{|\lambda_1(\mathcal{P}(D_{2n}))| + |\lambda_{2n}(\mathcal{P}(D_{2n}))|}$$

dir.

İspat

D_{2n} dihedral grup ve $n \geq 3$ olduğundan $\mathcal{P}(D_{2n})$ power grafi en az iki kenara sahiptir. Dolayısıyla $A(\mathcal{P}(D_{2n}))$ nin sıfırdan farklı en az bir özdeğeri vardır. Şimdi $i = 1, 2, \dots, 2n$ için

$$|\lambda_1(\mathcal{P}(D_{2n}))| \geq |\lambda_i(\mathcal{P}(D_{2n}))| \geq |\lambda_{2n}(\mathcal{P}(D_{2n}))|$$

alalım. Bu durumda

$$(|\lambda_1(\mathcal{P}(D_{2n}))| - |\lambda_i(\mathcal{P}(D_{2n}))|)(|\lambda_i(\mathcal{P}(D_{2n}))| - |\lambda_{2n}(\mathcal{P}(D_{2n}))|) \geq 0 \quad (4.12)$$

dir. Diğer taraftan gösterim açısından kolaylık olması amacı ile $i = 1, 2, \dots, 2n$ için $\lambda_i(\mathcal{P}(D_{2n}))$ leri λ_i şeklinde alacak olursak

$$(|\lambda_1| - |\lambda_i|)(|\lambda_i| - |\lambda_{2n}|) = |\lambda_i|(|\lambda_1| + |\lambda_{2n}|) - (\lambda_i^2 + |\lambda_1||\lambda_{2n}|) \quad (4.13)$$

dir. Bu durumda Eş. 4.12 ve Eş. 4.13'den

$$|\lambda_i|(|\lambda_1| + |\lambda_{2n}|) \geq \lambda_i^2 + |\lambda_1||\lambda_{2n}|$$

dir. $1 \leq i \leq 2n$ olmak üzere her i değeri için bu işlem yapılırsa

$$(|\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_{2n}|)(|\lambda_1| + |\lambda_{2n}|) \geq (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_{2n}^2) + 2n|\lambda_1||\lambda_{2n}|$$

ve buradan

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq \frac{\sum_{i=1}^{2n} \lambda_i^2 + 2n|\lambda_1||\lambda_{2n}|}{|\lambda_1| + |\lambda_{2n}|}$$

ve Lemma 4.2.1'den

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq \frac{\ell(2n-\ell-1) + 2\sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2 + 2n(|\lambda_1||\lambda_{2n}| + 1)}{|\lambda_1| + |\lambda_{2n}|}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

4.2.5. Sonuç

$C_n = \langle a \rangle$, $D_{2n} = \langle a, b \rangle$ dihedral grubunun devirli alt grubu, $|\lambda_1(\mathcal{P}(D_{2n}))| \geq |\lambda_2(\mathcal{P}(D_{2n}))| \geq \dots \geq |\lambda_{2n}(\mathcal{P}(D_{2n}))| \geq 0$ olmak üzere $\lambda_1(\mathcal{P}(D_{2n}))$, $\lambda_2(\mathcal{P}(D_{2n}))$, ..., $\lambda_{2n}(\mathcal{P}(D_{2n}))$, $A(\mathcal{P}(D_{2n}))$ komşuluk matrisinin özdeğerleri ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq \frac{\mathcal{E}^2(\mathcal{P}(C_n)) + 2n^2(|\lambda_1||\lambda_{2n}| + 1)}{n(|\lambda_1| + |\lambda_{2n}|)}$$

dir.

İspat

Teorem 4.1.1'den

$$\mathcal{E}^2(\mathcal{P}(C_n)) \leq n\ell(2n - \ell - 1) + 2n \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2 \quad (4.14)$$

ve Teorem 4.2.3'den

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq \frac{\ell(2n-\ell-1)+2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2+2n(|\lambda_1||\lambda_{2n}|+1)}{|\lambda_1|+|\lambda_{2n}|} \quad (4.15)$$

dir. Eş. 4.14 ve Eş. 4.15'den

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq \frac{\mathcal{E}^2(\mathcal{P}(C_n))+2n^2(|\lambda_1||\lambda_{2n}|+1)}{n(|\lambda_1|+|\lambda_{2n}|)}$$

bulunur.

4.2.6. Sonuç

$C_n = \langle a \rangle$, $D_{2n} = \langle a, b \rangle$ dihedral grubunun devirli alt grubu, $|\lambda_1(\mathcal{P}(D_{2n}))| \geq |\lambda_2(\mathcal{P}(D_{2n}))| \geq \dots \geq |\lambda_{2n}(\mathcal{P}(D_{2n}))| \geq 0$ olmak üzere $\lambda_1(\mathcal{P}(D_{2n}))$, $\lambda_2(\mathcal{P}(D_{2n}))$, ..., $\lambda_{2n}(\mathcal{P}(D_{2n}))$, $A(\mathcal{P}(D_{2n}))$ komşuluk matrisinin özdeğerleri, $n \geq 3$ ve $n = p^m$ olmak üzere

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq \frac{n[n-1+2(|\lambda_1||\lambda_{2n}|+1)]}{|\lambda_1|+|\lambda_{2n}|}$$

dir. Burada p bir asal sayı ve $m \in \mathbb{Z}^+$ dir.

İspat

Teorem 4.2.3 ve Lemma 4.1.1'den

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_{2n})) &\geq \frac{\ell(2n-\ell-1)+2\sum_{\ell+1\leq i<j\leq n}a_{ij}^2+2n(|\lambda_1||\lambda_{2n}|+1)}{|\lambda_1|+|\lambda_{2n}|} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2(\mathcal{P}(C_n))+2n(|\lambda_1||\lambda_{2n}|+1)}{|\lambda_1|+|\lambda_{2n}|}\end{aligned}$$

dir. $|C_n| = p^m$ olduğundan $\mathcal{P}(C_n)$ tam graftır. Buna göre Lemma 4.1.2'den

$$= \frac{n(n-1)+2n(|\lambda_1||\lambda_{2n}|+1)}{|\lambda_1|+|\lambda_{2n}|}$$

olup buradan

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq \frac{n[n-1+2(|\lambda_1||\lambda_{2n}|+1)]}{|\lambda_1|+|\lambda_{2n}|}$$

bulunur.

4.2.1. Not

$\mathcal{P}(D_{2n})$ power grafinın komşuluk matrisi

$$A(\mathcal{P}(D_{2n})) = \begin{pmatrix} A(\mathcal{P}(C_n)) & E_n \\ E_n^T & 0_n \end{pmatrix}$$

olup bu matrisin n tane satırı eşit olduğundan $n - 1$ tane özdeğeri sıfırdır.

Yukarıdaki nota bağlı olarak Teorem 4.2.3 için aşağıdaki sonucu verebiliriz.

4.2.7. Sonuç

$\mathcal{P}(D_{2n})$, D_{2n} dihedral grubunun power grafi, $|\lambda_1(\mathcal{P}(D_{2n}))| \geq |\lambda_2(\mathcal{P}(D_{2n}))| \geq \dots \geq |\lambda_{2n}(\mathcal{P}(D_{2n}))| \geq 0$ olmak üzere $\lambda_1(\mathcal{P}(D_{2n})), \lambda_2(\mathcal{P}(D_{2n})), \dots, \lambda_{2n}(\mathcal{P}(D_{2n})), A(\mathcal{P}(D_{2n}))$ komşuluk matrisinin özdeğerleri ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$\varepsilon(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq \frac{2n+\ell(2n-\ell-1)+2\sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2 + (n+1)|\lambda_1(\mathcal{P}(D_{2n}))||\lambda_{n+1}(\mathcal{P}(D_{2n}))|}{|\lambda_1(\mathcal{P}(D_{2n}))| + |\lambda_{n+1}(\mathcal{P}(D_{2n}))|}$$

dir.

İspat

D_{2n} dihedral grup ve $n \geq 3$ olduğundan $\mathcal{P}(D_{2n})$ power grafi en az iki kenara sahiptir. Dolayısıyla $A(\mathcal{P}(D_{2n}))$ nin sıfırdan farklı en az bir özdeğeri vardır. Ayrıca $A(\mathcal{P}(D_{2n}))$ nin n tane satırı eşit olduğundan $n - 1$ tane özdeğeri sıfırdır. O halde

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_{n+1}| \geq |\lambda_{n+2}| = |\lambda_{n+3}| = \dots = |\lambda_{2n}| = 0$$

dir. Şimdi $i = 1, 2, \dots, n + 1$ için

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_i| \geq |\lambda_{n+1}|$$

alalım. Bu durumda

$$(|\lambda_1| - |\lambda_i|)(|\lambda_i| - |\lambda_{n+1}|) \geq 0 \quad (4.16)$$

dir. Diğer taraftan

$$(|\lambda_1| - |\lambda_i|)(|\lambda_i| - |\lambda_{n+1}|) = |\lambda_i|(|\lambda_1| + |\lambda_{n+1}|) - (\lambda_i^2 + |\lambda_1||\lambda_{n+1}|) \quad (4.17)$$

dir. Bu durumda Eş. 4.16 ve Eş. 4.17'den

$$|\lambda_i|(|\lambda_1| + |\lambda_{n+1}|) \geq \lambda_i^2 + |\lambda_1||\lambda_{n+1}|$$

dir. $1 \leq i \leq n + 1$ olmak üzere her i değeri için bu işlem yapılırsa

$$(|\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_{n+1}|)(|\lambda_1| + |\lambda_{n+1}|) \geq (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_{n+1}^2) + (n + 1)|\lambda_1||\lambda_{n+1}|$$

ve buradan

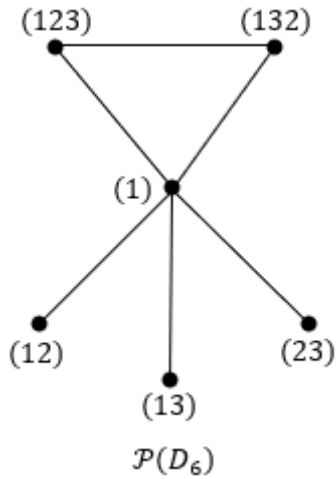
$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq \frac{\sum_{i=1}^{2n} \lambda_i^2 + (n+1)|\lambda_1||\lambda_{n+1}|}{|\lambda_1| + |\lambda_{n+1}|}$$

ve Lemma 4.2.1'den

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq \frac{2n + \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^2 + (n+1)|\lambda_1||\lambda_{n+1}|}{|\lambda_1| + |\lambda_{n+1}|}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek



Şekil 4.3. $\mathcal{P}(D_6)$ power grafi

$\mathcal{P}(D_6)$ power grafinın komşuluk matrisi

$$A(\mathcal{P}(D_6)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve özdeğerleri

$$\lambda_1(\mathcal{P}(D_6)) = 2,5141, \lambda_2(\mathcal{P}(D_6)) = 0,5719, \lambda_3(\mathcal{P}(D_6)) = \lambda_4(\mathcal{P}(D_6)) = 0$$

$$\lambda_5(\mathcal{P}(D_6)) = -1, \lambda_6(\mathcal{P}(D_6)) = -2,0861$$

dir. Buna göre $\mathcal{P}(D_6)$ nın enerjisi

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_6)) = \sum_{i=1}^6 |\lambda_i(\mathcal{P}(D_6))| = 6,1721$$

dir. Diğer taraftan $\mathcal{P}(D_6)$ için yukarıdaki teoremlerde verilen sınırları hesaplayarak $\mathcal{P}(D_6)$ nın enerjisi için aşağıdaki tabloyu verebiliriz.

Çizelge 4.3. $\mathcal{P}(D_6)$ 'nın enerjisi için sınırlar

$\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_6))=6,1721$	Teorem 4.2.1	Teorem 4.2.2	Teorem 4.2.3	Sonuç 4.2.7
Alt sınır	6,1721	—	4,77	5,7521
Üst sınır	8,4852	7,8429	—	—

Örnek

Şekil 3.7 ile verilen $\mathcal{P}(D_8)$ power grafinin $A(\mathcal{P}(D_8))$ komşuluk matrisi

$$A(\mathcal{P}(D_8)) = \begin{pmatrix} A(\mathcal{P}(C_4)) & E_4 \\ E_4^T & 0_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve özdeğerleri

$$\lambda_1(\mathcal{P}(D_8)) = 3,3722, \lambda_2(\mathcal{P}(D_8)) = 1, \lambda_3(\mathcal{P}(D_8)) = \lambda_4(\mathcal{P}(D_8)) = \lambda_5(\mathcal{P}(D_8)) = 0$$

$$\lambda_6(\mathcal{P}(D_8)) = \lambda_7(\mathcal{P}(D_8)) = -1, \lambda_8(\mathcal{P}(D_8)) = -2,3722$$

dir. Buna göre $\mathcal{P}(D_8)$ in enerjisi

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_8)) = \sum_{i=1}^8 |\lambda_i(\mathcal{P}(D_8))| = 3,3722 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 2,3722 = 8,7444$$

bulunur. Diğer taraftan C_4 devirli grubunun $\mathcal{P}(C_4)$ power grafi tam graf olup $\mathcal{P}(D_8)$ 'in alt grafidir. Buna göre $\mathcal{P}(D_8)$ için yukarıdaki sonuçlarda verilen sınırları hesaplayarak $\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_8))$ enerjisi için aşağıdaki tabloyu elde ederiz.

Çizelge 4.4. $\mathcal{P}(D_8)$ 'in enerjisi için sınırlar

$\mathcal{E}(\mathcal{P}(D_8))=8,7444$	Sonuç 4.2.2	Sonuç 4.2.4	Sonuç 4.2.6
Alt sınır	4,4721	—	5,9308
Üst sınır	12,6488	11,1432	—

5. SONLU DEVİRLİ GRUPLARIN POWER GRAFLARININ LAPLACIAN ENERJİLERİ İÇİN SINIRLAR

Bu bölümde sonlu devirli grupların power graflarının Laplacian enerjileri için alt ve üst sınırlar elde edilmiştir.

Bölüm boyunca C_n devirli grubunun birim elemanının ve üreteçlerinin oluşturduğu küme V_1 , geri kalan noktalarının oluşturduğu küme V_2 ile gösterilecek ve $|V_1| = \ell$ alınacaktır. Ayrıca Bölüm 3 de verildiği üzere $k = 1, 2, \dots, n$ için $\mu_k(\mathcal{P}(C_n))$ lar $\mathcal{P}(C_n)$ nin Laplacian özdeğerleri olmak üzere $\mathcal{P}(C_n)$ power grafinin Laplacian enerjisi,

$$L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) = \sum_{k=1}^n |\gamma_k(\mathcal{P}(C_n))|$$

şeklinde tanımlı olup burada

$$\gamma_k(\mathcal{P}(C_n)) = \mu_k(\mathcal{P}(C_n)) - \frac{s}{n},$$

$$s = \ell(2n - \ell - 1) - 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} l_{ij}$$

dir. Şimdi Laplacian enerji ile ilgili teoremlerin ispatlarında kullanılacak temel lemmalar verilecektir.

5.1. Lemma

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n devirli grubunun power grafi, $L(\mathcal{P}(C_n))$, $\mathcal{P}(C_n)$ nin Laplacian matrisi ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^n \mu_k(\mathcal{P}(C_n)) = \ell(2n - \ell - 1) - 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} l_{ij} = s$$

$$\sum_{k=1}^n \mu_k^2(\mathcal{P}(C_n)) = s + \ell(n - 1)^2 + \sum_{i=\ell+1}^n d^2(v_i)$$

dir. Burada $i = 1, 2, \dots, n$ için $d(v_i)$ ler v_i noktalarının dereceleridir.

İspat

İz'in tanımından

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \mu_k(\mathcal{P}(C_n)) &= \text{tr}[L(\mathcal{P}(C_n))] \\
&= \ell(n-1) + \sum_{i=\ell+1}^n d(v_i) \\
&= \ell(n-1) + \sum_{i=\ell+1}^n \left(-\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n l_{ij} \right) \\
&= \ell(n-1) - \sum_{i=\ell+1}^n \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\ell} l_{ij} + \sum_{\substack{j=\ell+1 \\ j \neq i}}^n l_{ij} \right) \\
&= \ell(n-1) - \sum_{i=\ell+1}^n \left(-\ell + \sum_{\substack{j=\ell+1 \\ j \neq i}}^n l_{ij} \right) \\
&= \ell(n-1) + \ell(n-\ell) - \sum_{i=\ell+1}^n \sum_{\substack{j=\ell+1 \\ j \neq i}}^n l_{ij} \\
&= \ell(2n-\ell-1) - 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} l_{ij}
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
L^2(\mathcal{P}(C_n)) &= \begin{pmatrix} \overbrace{nI_{\ell \times \ell} - J_{\ell \times \ell}}^{A_{11}} & -\overbrace{J_{\ell \times (n-\ell)}}^{A_{12}} \\ -\overbrace{J_{(n-\ell) \times \ell}}^{A_{21}} & \overbrace{L(\mathcal{P}(V_2))_{(n-\ell) \times (n-\ell)}}^{A_{22}} \end{pmatrix}^2 \\
&= \begin{pmatrix} A_{11}^2 + A_{12}A_{21} & A_{11}A_{12} + A_{12}A_{22} \\ A_{21}A_{11} + A_{22}A_{21} & A_{22}^2 + A_{21}A_{12} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \mu_k^2(\mathcal{P}(C_n)) &= \text{tr} [L^2(\mathcal{P}(C_n))] = \text{tr}(A_{11}^2) + \text{tr}(A_{12}A_{21}) + \text{tr}(A_{22}^2) + \text{tr}(A_{21}A_{12}) \\
&= \ell((n-1)^2 + \ell - 1) + 2\ell(n - \ell) + \sum_{i=\ell+1}^n d^2(v_i) - 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} l_{ij} \\
&= \ell(2n - \ell - 1) - 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} l_{ij} + \ell(n-1)^2 + \sum_{i=\ell+1}^n d^2(v_i) \\
&= s + \ell(n-1)^2 + \sum_{i=\ell+1}^n d^2(v_i)
\end{aligned}$$

bulunur.

5.2. Lemma

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n devirli grubunun power grafi ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k(\mathcal{P}(C_n)) = 0$$

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k^2(\mathcal{P}(C_n)) = s + \sum_{i=1}^n \left(d(v_i) - \frac{s}{n} \right)^2$$

dir. Burada $i = 1, 2, \dots, n$ için $d(v_i)$ ler v_i noktalarının dereceleridir.

İspat

$\gamma_k(\mathcal{P}(C_n))$ nin tanımı ve Lemma 5.1'den

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \gamma_k(\mathcal{P}(C_n)) &= \sum_{k=1}^n \left(\mu_k(\mathcal{P}(C_n)) - \frac{s}{n} \right) \\
&= -s + \sum_{k=1}^n \mu_k(\mathcal{P}(C_n)) = 0
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k^2(\mathcal{P}(C_n)) = \sum_{k=1}^n \left(\mu_k(\mathcal{P}(C_n)) - \frac{s}{n} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n \left(\mu_k(\mathcal{P}(C_n)) - \frac{\ell(2n-\ell-1)-2\sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} l_{ij}}{n} \right)^2 \\
&= \sum_{k=1}^n \mu_k^2(\mathcal{P}(C_n)) - 2 \frac{\ell(2n-\ell-1)-2\sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} l_{ij}}{n} \sum_{k=1}^n \mu_k(\mathcal{P}(C_n)) \\
&\quad + \frac{(\ell(2n-\ell-1)-2\sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} l_{ij})^2}{n}
\end{aligned}$$

olup Lemma 5.1'den

$$\begin{aligned}
&= \ell(2n - \ell - 1) - 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} l_{ij} + \ell(n - 1)^2 + \sum_{i=\ell+1}^n d^2(v_i) \\
&\quad - \frac{(\ell(2n-\ell-1)-2\sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} l_{ij})^2}{n} \\
&= n^2 \ell - \ell^2 - 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} l_{ij} + \sum_{i=\ell+1}^n d^2(v_i) - \frac{(\ell(2n-\ell-1)-2\sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} l_{ij})^2}{n} \\
&= \sum_{i=\ell+1}^n d^2(v_i) + n^2 \ell - n\ell + \sum_{i=\ell+1}^n d^2(v_i) - \frac{(\ell(2n-\ell-1)-2\sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} l_{ij})^2}{n} \\
&= \ell(2n - \ell - 1) - 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} l_{ij} + \sum_{i=1}^n \left(d(v_i) - \frac{\ell(2n-\ell-1)-2\sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} l_{ij}}{n} \right)^2 \\
&= s + \sum_{i=1}^n \left(d(v_i) - \frac{s}{n} \right)^2
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

5.3. Lemma

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n devirli grubunun power grafi, $n \geq 3$ ve $n = p^m$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k^2(\mathcal{P}(C_n)) = n(n - 1)$$

dir. Burada p bir asal sayı ve $m \in \mathbb{Z}^+$ dır.

İspat

$|C_n| = p^m$ olduğundan C_n devirli grubunun power grafi bir tam graftır. Dolayısıyla $L(\mathcal{P}(C_n))$ matrisinin esas köşegen üzerindeki elemanları $n - 1$ dir. Buna göre

$$\sum_{k=1}^n \mu_k(\mathcal{P}(C_n)) = \text{tr}[L(\mathcal{P}(C_n))] = n(n - 1) \quad (5.1)$$

ve

$$\sum_{k=1}^n \mu_k^2(\mathcal{P}(C_n)) = \text{tr}[L^2(\mathcal{P}(C_n))] = n^2(n - 1) \quad (5.2)$$

dir. Diğer taraftan $|V_1| = \ell = n$ ve $|V_2| = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \gamma_k(\mathcal{P}(C_n)) &= \mu_k(\mathcal{P}(C_n)) - \frac{\ell(2n-\ell-1)-2\sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} l_{ij}}{n} \\ &= \mu_k(\mathcal{P}(C_n)) - \frac{n(2n-n-1)}{n} \\ &= \mu_k(\mathcal{P}(C_n)) - (n - 1) \end{aligned} \quad (5.3)$$

dir. Eş. 5.1, Eş. 5.2, Eş. 5.3'den

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \gamma_k^2(\mathcal{P}(C_n)) &= \sum_{k=1}^n \left(\mu_k(\mathcal{P}(C_n)) - (n - 1) \right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \mu_k^2(\mathcal{P}(C_n)) - 2(n - 1) \sum_{k=1}^n \mu_k(\mathcal{P}(C_n)) + n(n - 1)^2 \\ &= n^2(n - 1) - 2n(n - 1)^2 + n(n - 1)^2 \\ &= n(n - 1) \end{aligned}$$

bulunur.

5.1. Teorem

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n devirli grubunun power grafi, $L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n))$, $\mathcal{P}(C_n)$ nin Laplacian enerjisi ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$\sqrt{s + \sum_{i=1}^n \left(d(v_i) - \frac{s}{n}\right)^2} \leq \mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) \leq \sqrt{ns + n \sum_{i=1}^n \left(d(v_i) - \frac{s}{n}\right)^2}$$

dir. Burada $i = 1, 2, \dots, n$ için $d(v_i)$ ler v_i noktalarının dereceleridir.

İspat

Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve Lemma 5.2'den

$$\begin{aligned} L\mathcal{E}^2(\mathcal{P}(C_n)) &= \left(\sum_{k=1}^n |\gamma_k(\mathcal{P}(C_n))|\right)^2 \\ &\leq n \sum_{k=1}^n \gamma_k^2(\mathcal{P}(C_n)) \\ &= n \left[s + \sum_{i=1}^n \left(d(v_i) - \frac{s}{n}\right)^2 \right] \end{aligned}$$

olup

$$L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) \leq \sqrt{ns + n \sum_{i=1}^n \left(d(v_i) - \frac{s}{n}\right)^2}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} L\mathcal{E}^2(\mathcal{P}(C_n)) &= \left(\sum_{k=1}^n |\gamma_k(\mathcal{P}(C_n))|\right)^2 \\ &\geq \sum_{k=1}^n \gamma_k^2(\mathcal{P}(C_n)) \end{aligned}$$

ve Lemma 5.2'den

$$= s + \sum_{i=1}^n \left(d(v_i) - \frac{s}{n} \right)^2$$

olup

$$L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) \geq \sqrt{s + \sum_{i=1}^n \left(d(v_i) - \frac{s}{n} \right)^2}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

5.1. Sonuç

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n devirli grubunun power grafi, $L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n))$, $\mathcal{P}(C_n)$ nin Laplacian enerjisi, $n \geq 3$ ve $n = p^m$ olmak üzere

$$\sqrt{n(n-1)} \leq L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) \leq n\sqrt{n-1}$$

dir. Burada p bir asal sayı ve $m \in \mathbb{Z}^+$ dir.

İspat

$|C_n| = p^m$ olduğundan $\mathcal{P}(C_n)$ tam graf olup Lemma 5.3 ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} L\mathcal{E}^2(\mathcal{P}(C_n)) &= \left(\sum_{k=1}^n |\gamma_k(\mathcal{P}(C_n))| \right)^2 \\ &\leq n \sum_{k=1}^n \gamma_k^2(\mathcal{P}(C_n)) \\ &= n^2(n-1) \end{aligned}$$

ve buradan

$$L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) \leq n\sqrt{n-1}$$

bulunur. Diğer taraftan Lemma 5.3'den

$$\begin{aligned} L\mathcal{E}^2(\mathcal{P}(C_n)) &= \left(\sum_{k=1}^n |\gamma_k(\mathcal{P}(C_n))| \right)^2 \\ &\geq \sum_{k=1}^n \gamma_k^2(\mathcal{P}(C_n)) \\ &= n(n-1) \end{aligned}$$

ve buradan

$$L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) \geq \sqrt{n(n-1)}$$

olarak elde edilir.

5.2. Teorem

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n devirli grubunun power grafi, $L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n))$, $\mathcal{P}(C_n)$ nin Laplacian enerjisi ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) \leq \frac{s}{n} + \sqrt{(n-1) \left[s + \sum_{i=1}^n \left(d(v_i) - \frac{s}{n} \right)^2 - \frac{s^2}{n^2} \right]}$$

dir. Burada $i = 1, 2, \dots, n$ için $d(v_i)$ ler v_i noktalarının dereceleridir.

İspat

Laplacian enerjinin tanımından

$$L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) = \frac{s}{n} + \sum_{k=2}^n |\gamma_k(\mathcal{P}(C_n))|$$

olup

$$\left(L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) - \frac{s}{n}\right)^2 = \left(\sum_{k=2}^n |\gamma_k(\mathcal{P}(C_n))|\right)^2$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve Lemma 5.2'den

$$\begin{aligned} &\leq (n-1) \sum_{k=2}^n \gamma_k^2(\mathcal{P}(C_n)) \\ &= (n-1) \left(\sum_{k=1}^n \gamma_k^2(\mathcal{P}(C_n)) - \frac{s^2}{n^2} \right) \\ &= (n-1) \left[s + \sum_{i=1}^n \left(d(v_i) - \frac{s}{n} \right)^2 - \frac{s^2}{n^2} \right] \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) \leq \frac{s}{n} + \sqrt{(n-1) \left[s + \sum_{i=1}^n \left(d(v_i) - \frac{s}{n} \right)^2 - \frac{s^2}{n^2} \right]}$$

elde edilir.

5.2. Sonuç

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n devirli grubunun power grafi, $L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n))$, $\mathcal{P}(C_n)$ nin Laplacian enerjisi, $n \geq 3$ ve $n = p^m$ olmak üzere

$$L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) = 2(n-1)$$

dir. Burada p bir asal sayı ve $m \in \mathbb{Z}^+$ dir.

İspat

$|C_n| = p^m$ olduğundan $\mathcal{P}(C_n)$ tam graf olup Laplacian spektrumu $\left\{0, \underbrace{n, n, \dots, n}_{n-1}\right\}$ dir.

Laplacian enerjinin tanımından

$$\left(L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) - \frac{s}{n}\right)^2 = \left(\sum_{k=2}^n |\gamma_k(\mathcal{P}(C_n))|\right)^2$$

olup Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve tam grafin Laplacian spektrumundan

$$\left(\sum_{k=2}^n |\gamma_k(\mathcal{P}(C_n))|\right)^2 = (n-1) \sum_{k=2}^n \gamma_k^2(\mathcal{P}(C_n))$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \left(L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) - \frac{s}{n}\right)^2 &= (n-1) \sum_{k=2}^n \gamma_k^2(\mathcal{P}(C_n)) \\ &= (n-1) \left(\sum_{k=1}^n \gamma_k^2(\mathcal{P}(C_n)) - \frac{s^2}{n^2}\right) \end{aligned}$$

ve Lemma 5.3'den

$$\begin{aligned} &= (n-1) \left[n(n-1) - \frac{(\ell(2n-\ell-1) - 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} l_{ij})^2}{n^2} \right] \\ &= (n-1) \left[n(n-1) - \frac{(n(n-1))^2}{n^2} \right] \\ &= (n-1)^2 \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\left(L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) - \frac{s}{n}\right)^2 = \left(L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) - (n-1)\right)^2 = (n-1)^2$$

ve buradan

$$L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) = 2(n-1)$$

olarak elde edilir.

5.3. Teorem

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n devirli grubunun power grafi, $L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n))$, $\mathcal{P}(C_n)$ nin Laplacian enerjisi ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) \geq \sqrt{s + \sum_{i=1}^n \left(d(v_i) - \frac{s}{n}\right)^2 + n(n-1) \det \left(L(\mathcal{P}(C_n)) - \frac{s}{n}I\right)^{\frac{2}{n}}}$$

dir. Burada $i = 1, 2, \dots, n$ için $d(v_i)$ ler v_i noktalarının dereceleridir.

İspat

Laplacian enerjinin tanımından

$$\begin{aligned} L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n))^2 &= \left(\sum_{k=1}^n |\gamma_k(\mathcal{P}(C_n))|\right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \gamma_k^2(\mathcal{P}(C_n)) + 2 \sum_{1 \leq k < r \leq n} |\gamma_k(\mathcal{P}(C_n))| |\gamma_r(\mathcal{P}(C_n))| \end{aligned}$$

olup Lemma 5.2'den

$$= s + \sum_{i=1}^n \left(d(v_i) - \frac{s}{n}\right)^2 + \sum_{k \neq r} |\gamma_k(\mathcal{P}(C_n))| |\gamma_r(\mathcal{P}(C_n))| \quad (5.4)$$

dir. Negatif olmayan sayıların geometrik ortalaması, aritmetik ortalamasından küçük veya eşit olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k \neq r} |\gamma_k(\mathcal{P}(C_n))| |\gamma_r(\mathcal{P}(C_n))| &\geq \left(\prod_{k \neq r} |\gamma_k(\mathcal{P}(C_n))| |\gamma_r(\mathcal{P}(C_n))|\right)^{\frac{1}{n(n-1)}} \\ &= \left(\prod_{k=1}^n |\gamma_k(\mathcal{P}(C_n))|^{2(n-1)}\right)^{\frac{1}{n(n-1)}} \\ &= \prod_{k=1}^n |\gamma_k(\mathcal{P}(C_n))|^{\frac{2}{n}} \end{aligned} \quad (5.5)$$

dir. Diğer taraftan

$$\prod_{k=1}^n |\gamma_k(\mathcal{P}(C_n))| = \det \left(L(\mathcal{P}(C_n)) - \frac{s}{n} I \right) \quad (5.6)$$

dir. O halde Eş. 5.4, Eş. 5.5 ve Eş. 5.6'dan

$$L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) \geq \sqrt{s + \sum_{i=1}^n \left(d(v_i) - \frac{s}{n} \right)^2 + n(n-1) \det \left(L(\mathcal{P}(C_n)) - \frac{s}{n} I \right)^{\frac{2}{n}}}$$

olarak elde edilir.

5.3. Sonuç

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n devirli grubunun power grafi, $L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n))$, $\mathcal{P}(C_n)$ nin Laplacian enerjisi, $n \geq 3$ ve $n = p^m$ olmak üzere

$$L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) \geq \sqrt{n(n-1) \left[1 + (n-1)^{\frac{2}{n}} \right]}$$

dir. Burada p bir asal sayı ve $m \in \mathbb{Z}^+$ dır.

İspat

$|C_n| = p^m$ olduğundan $\mathcal{P}(C_n)$ tam graf olup Laplacian spektrumu $\left\{ 0, \underbrace{n, n, \dots, n}_{n-1} \right\}$ dir.

Teorem 5.3 ve Lemma 5.3'den

$$\begin{aligned} L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n))^2 &\geq \sum_{k=1}^n \gamma_k^2(\mathcal{P}(C_n)) + n(n-1) \det \left(L(\mathcal{P}(C_n)) - \frac{s}{n} I \right)^{\frac{2}{n}} \\ &= n(n-1) + n(n-1) \det \left(L(\mathcal{P}(C_n)) - \frac{s}{n} I \right)^{\frac{2}{n}} \end{aligned}$$

$$= n(n-1) \left[1 + \det \left(L(\mathcal{P}(C_n)) - \frac{s}{n} I \right)^{\frac{2}{n}} \right]$$

dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \det \left(L(\mathcal{P}(C_n)) - \frac{s}{n} I \right) &= \det \left(L(\mathcal{P}(C_n)) - \frac{n(n-1)}{n} I \right) \\ &= \det \left(L(\mathcal{P}(C_n)) - (n-1)I \right) \\ &= \det \left(-A(\mathcal{P}(C_n)) \right) \\ &= (-1)^n \det \left(A(\mathcal{P}(C_n)) \right) \\ &= 1 - n \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n))^2 &\geq n(n-1) \left[1 + \det \left(L(\mathcal{P}(C_n)) - \frac{s}{n} I \right)^{\frac{2}{n}} \right] \\ &= n(n-1) \left[1 + (1-n)^{\frac{2}{n}} \right] \end{aligned}$$

ve buradan

$$L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) \geq \sqrt{n(n-1) \left[1 + (n-1)^{\frac{2}{n}} \right]}$$

bulunur.

5.4. Teorem

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n devirli grubunun power grafi, $|\gamma_1(\mathcal{P}(C_n))| \geq |\gamma_2(\mathcal{P}(C_n))| \geq \dots \geq |\gamma_n(\mathcal{P}(C_n))| \geq 0$ ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) \geq \frac{s + \sum_{i=1}^n \left(d(v_i) - \frac{s}{n}\right)^2 + n|\gamma_1(\mathcal{P}(C_n))||\gamma_n(\mathcal{P}(C_n))|}{|\gamma_1(\mathcal{P}(C_n))| + |\gamma_n(\mathcal{P}(C_n))|}$$

dir. Burada $i = 1, 2, \dots, n$ için $d(v_i)$ ler v_i noktalarının dereceleridir.

İspat

C_n devirli bir grup ve $n \geq 3$ olduğundan $\mathcal{P}(C_n)$ power grafi en az iki kenara sahiptir. Dolayısıyla $L(\mathcal{P}(C_n))$ nin sıfırdan farklı en az bir özdeğeri vardır. Şimdi $i = 1, 2, \dots, n$ için $|\gamma_1(\mathcal{P}(C_n))| \geq |\gamma_i(\mathcal{P}(C_n))| \geq |\gamma_n(\mathcal{P}(C_n))|$ alalım. Bu durumda

$$(|\gamma_1(\mathcal{P}(C_n))| - |\gamma_i(\mathcal{P}(C_n))|)(|\gamma_i(\mathcal{P}(C_n))| - |\gamma_n(\mathcal{P}(C_n))|) \geq 0 \quad (5.7)$$

dir. Diğer taraftan gösterim açısından kolaylık olması amacı ile $i = 1, 2, \dots, n$ için $\gamma_i(\mathcal{P}(C_n))$ leri γ_i şeklinde alacak olursak

$$(|\gamma_1| - |\gamma_i|)(|\gamma_i| - |\gamma_n|) = |\gamma_i|(|\gamma_1| + |\gamma_n|) - (\gamma_i^2 + |\gamma_1||\gamma_n|) \quad (5.8)$$

dir. Bu durumda Eş. 5.7 ve Eş. 5.8'den

$$|\gamma_i|(|\gamma_1| + |\gamma_n|) \geq \gamma_i^2 + |\gamma_1||\gamma_n|$$

dir. $1 \leq i \leq n$ olmak üzere her i değeri için bu işlem yapılırsa

$$(|\gamma_1| + |\gamma_2| + \dots + |\gamma_n|)(|\gamma_1| + |\gamma_n|) \geq (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \dots + \gamma_n^2) + n|\gamma_1||\gamma_n|$$

ve buradan

$$L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) \geq \frac{\sum_{i=1}^n \gamma_i^2 + n|\gamma_1||\gamma_n|}{|\gamma_1| + |\gamma_n|}$$

ve Lemma 5.2'den

$$L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) \geq \frac{s + \sum_{i=1}^n \left(d(v_i) - \frac{s}{n}\right)^2 + n|\gamma_1||\gamma_n|}{|\gamma_1| + |\gamma_n|}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

5.4. Sonuç

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n devirli grubunun power grafi, $L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n))$, $\mathcal{P}(C_n)$ nin Laplacian enerjisi, $n \geq 3$ ve $n = p^m$ olmak üzere

$$L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) = 2(n - 1)$$

dir. Burada p bir asal sayı ve $m \in \mathbb{Z}^+$ dir.

İspat

$|C_n| = p^m$ olduğundan $\mathcal{P}(C_n)$ tam graf olup Laplacian spkctrumu $\left\{0, \underbrace{n, n, \dots, n}_{n-1}\right\}$ dir.

Ayrıca

$$s = \ell(2n - \ell - 1) - 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} l_{ij} = n(2n - n - 1) = n(n - 1)$$

olup $i = 2, 3, \dots, n$ için

$$|\gamma_1(\mathcal{P}(C_n))| \geq |\gamma_2(\mathcal{P}(C_n))| \geq \dots \geq |\gamma_n(\mathcal{P}(C_n))| \geq 0$$

olacak biçimdeki $\gamma_i = \mu_i - \frac{s}{n}$ ler

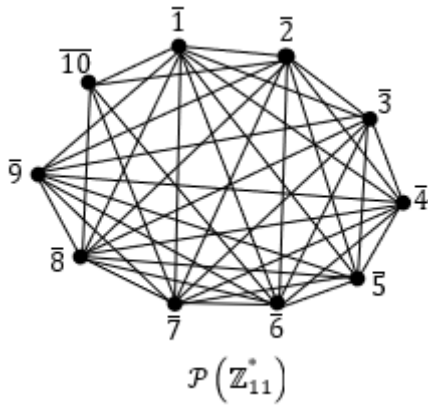
$$\gamma_1(\mathcal{P}(C_n)) = n - 1, \gamma_2(\mathcal{P}(C_n)) = \dots = \gamma_n(\mathcal{P}(C_n)) = 1$$

dir. O halde Teorem 5.4 ve Lemma 5.3'den

$$\begin{aligned} L\mathcal{E}(\mathcal{P}(C_n)) &= \frac{\sum_{i=1}^n \gamma_i^2(\mathcal{P}(C_n)) + n|\gamma_1(\mathcal{P}(C_n))||\gamma_n(\mathcal{P}(C_n))|}{|\gamma_1(\mathcal{P}(C_n))| + |\gamma_n(\mathcal{P}(C_n))|} \\ &= \frac{n(n-1) + n(n-1)}{n-1+1} \\ &= 2(n-1) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Örnek



Şekil 5.1. $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{11}^*)$ power grafi

$\mathbb{Z}_{11}^*$ çarpımsal devirli grubunun birim elemanı $\bar{1}$ ve üreteçleri $\bar{2}, \bar{6}, \bar{7}$ ve $\bar{8}$ dir. Buna göre

$$V_1 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}\} \text{ ve } |V_1| = \ell = 5$$

ve

$$V_2 = \mathbb{Z}_{11}^* - V_1 = \{\bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{9}, \bar{10}\}$$

olup

$$L(\mathcal{P}(V_2)) = \begin{matrix} \bar{3} \\ \bar{4} \\ \bar{5} \\ \bar{9} \\ \bar{10} \end{matrix} \begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 8 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 8 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

dir. O halde $L(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{11}^*))$ Laplacian matrisi

$$L(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{11}^*)) = \begin{bmatrix} 9 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 9 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 9 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 9 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 8 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 8 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 8 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 8 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

ve özdeğerleri

$$\mu_1(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{11}^*)) = 0, \mu_2(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{11}^*)) = 5, \mu_3(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{11}^*)) = \mu_4(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{11}^*)) = \mu_5(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{11}^*)) = 9,$$

$$\mu_6(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{11}^*)) = \mu_7(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{11}^*)) = \mu_8(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{11}^*)) = \mu_9(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{11}^*)) = \mu_{10}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{11}^*)) = 10$$

dir. Diğer taraftan

$$s = \ell(2n - \ell - 1) - 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} l_{ij} = 5(20 - 5 - 1) - 2(-6) = 82$$

olup buradan $k = 1, 2, \dots, n$ için $\gamma_k(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{11}^*)) = \mu_k(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{11}^*)) - \frac{s}{n}$ ler

$$\gamma_1(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{11}^*)) = 0 - \frac{82}{10} = -8,2$$

$$\gamma_2(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{11}^*)) = 5 - \frac{82}{10} = -3,2$$

$$\gamma_3(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{11}^*)) = \gamma_4(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{11}^*)) = \gamma_5(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{11}^*)) = 9 - \frac{82}{10} = 0,8$$

$$\gamma_6(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{11}^*)) = \gamma_7(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{11}^*)) = \dots = \gamma_{10}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{11}^*)) = 10 - \frac{82}{10} = 1,8$$

bulunur. O halde $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{11}^*)$ 'in Laplacian enerjisi

$$L\mathcal{E}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{11}^*)) = \sum_{k=1}^{10} |\gamma_k(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{11}^*))| = 22,8$$

dir. Ayrıca

$$d(v_1) = d(v_2) = d(v_6) = d(v_7) = d(v_8) = 9$$

$$d(v_3) = d(v_4) = d(v_5) = d(v_9) = 8, d(v_{10}) = 5$$

ve buradan

$$s + \sum_{i=1}^n \left(d(v_i) - \frac{s}{n}\right)^2 = 82 + 5 \left(9 - \frac{82}{10}\right)^2 + 4 \left(8 - \frac{82}{10}\right)^2 + \left(5 - \frac{82}{10}\right)^2$$

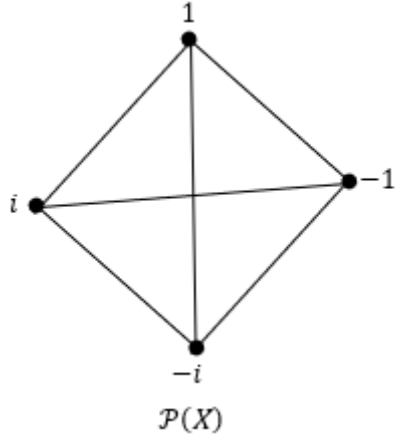
$$= 82 + 3,2 + 0,16 + 10,24 = 95,6$$

dir. Bu durumda $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{11}^*)$ 'in Laplacian enerjisi için verilen sınırları yukarıdaki değerler yardımı ile hesaplırsak Laplacian enerji için aşağıdaki sınır tablosunu elde ederiz.

Çizelge 5.1. $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{11}^*)$ 'in Laplacian enerjisi için sınırlar

$L\mathcal{E}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{11}^*)) = 22,8$	Teorem 5.1	Teorem 5.2	Teorem 5.3	Teorem 5.4
Alt sınır	9,777	—	19,1824	17,9111
Üst sınır	30,919	24,1762	—	—

Örnek



Şekil 5.2. $\mathcal{P}(X)$ power grafi

$X = \{-1, 1, -i, i\} = \langle i \rangle$ çarpımsal devirli grubunun birim elemanı 1 ve üreteçleri $-i$ ve i dir. Buna göre

$$V_1 = \{1, -i, i\} \text{ ve } |V_1| = \ell = 3$$

ve

$$V_2 = X - V_1 = \{-1\}$$

olup

$$L(\mathcal{P}(V_2)) = 3$$

dir. O halde $L(\mathcal{P}(X))$ Laplacian matrisi

$$L(\mathcal{P}(X)) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

ve özdeğerleri

$$\mu_1(\mathcal{P}(X)) = 0, \mu_2(\mathcal{P}(X)) = \mu_3(\mathcal{P}(X)) = \mu_4(\mathcal{P}(X)) = 4$$

dir. Diğer taraftan

$$s = \ell(2n - \ell - 1) - 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} l_{ij} = 3(8 - 3 - 1) - 2(0) = 12$$

olup buradan $k = 1, 2, 3, 4$ için $\gamma_k(\mathcal{P}(X)) = \mu_k(\mathcal{P}(X)) - \frac{s}{n}$ ler

$$\gamma_1(\mathcal{P}(X)) = 0 - \frac{12}{4} = -3$$

$$\gamma_2(\mathcal{P}(X)) = \gamma_3(\mathcal{P}(X)) = \gamma_4(\mathcal{P}(X)) = 4 - \frac{12}{4} = 1$$

bulunur. O halde $\mathcal{P}(X)$ 'in Laplacian enerjisi

$$L\mathcal{E}(\mathcal{P}(X)) = \sum_{k=1}^4 |\gamma_k(\mathcal{P}(X))| = 6$$

dir. Bu durumda $\mathcal{P}(X)$ 'in Laplacian enerjisi için verilen sınırları bularak aşağıdaki sınır tablosunu elde ederiz.

Çizelge 5.2. $\mathcal{P}(X)$ 'in Laplacian enerjisi için sınırlar

$L\mathcal{E}(\mathcal{P}(X)) = 6$	Sonuç 5.1	Sonuç 5.2	Sonuç 5.3	Sonuç 5.4
Alt sınır	3,4641	—	5,7257	6
Üst sınır	6,9282	6	—	—

6. SONLU DEVİRLİ GRUPLARIN VE SONLU DİHEDRAL GRUPLARIN POWER GRAFLARININ DISTANCE ENERJİLERİ VE EN BÜYÜK DISTANCE ÖZDEĞERLERİ İÇİN SINIRLAR

Bu bölümde öncelikle sonlu devirli grupların ve sonlu dihedral grupların power graflarının distance enerjileri için alt ve üst sınırlar elde edilmiştir. Daha sonra grup yapısı yardımı ile devirli grupların ve dihedral grupların power graflarının distance enerjileri karşılaştırılmıştır. Ayrıca devirli grupların ve dihedral grupların power graflarının en büyük özdeğerleri için sınırlar elde edilmiştir.

Bölüm boyunca C_n devirli grubunun birim elemanının ve üreteçlerinin oluşturduğu küme V_1 , geri kalan noktalarının oluşturduğu küme V_2 ile gösterilecek ve $|V_1| = \ell$ alınacaktır. Bölüm 3 de verildiği üzere $\mathcal{P}(C_n)$ power grafinin distance enerjisi,

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n)) = \sum_{i=1}^n |\partial_i(\mathcal{P}(C_n))|$$

şeklinde tanımlı olup burada $i = 1, 2, \dots, n$ için $\partial_i(\mathcal{P}(C_n))$ ler $\mathcal{P}(C_n)$ nin distance özdeğerleridir. Diğer taraftan dihedral grup $D_{2n} = \langle a, b \rangle$, $2n$ –inci mertebeden bir grup olup $o(a) = n$ olduğundan $C_n = \langle a \rangle$ devirli grubu D_{2n} nin n –inci mertebeden bir alt grubudur. Dolayısıyla $\mathcal{P}(C_n)$ power grafi $\mathcal{P}(D_{2n})$ nin bağlantılı bir alt grafıdır. Ayrıca $\mathcal{P}(D_{2n})$ power grafinin distance enerjisi;

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) = \sum_{i=1}^{2n} |\partial_i(\mathcal{P}(D_{2n}))|$$

şeklinde tanımlı olup burada $i = 1, 2, \dots, 2n$ için $\partial_i(\mathcal{P}(D_{2n}))$ ler $\mathcal{P}(D_{2n})$ nin distance özdeğerleridir.

6.1. Sonlu Devirli Grupların Power Graflarının Distance Enerjileri İçin Sınırlar

6.1.1. Lemma

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n devirli grubunun power grafi, $\mathcal{D}(\mathcal{P}(C_n))$, $\mathcal{P}(C_n)$ nin distance matrisi ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^n \partial_i(\mathcal{P}(C_n)) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \partial_i^2(\mathcal{P}(C_n)) = \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2$$

dir. Burada $i, j = 1, 2, \dots, n$ ve $i \neq j$ için $d(v_i, v_j)$ ler v_i ve v_j noktaları arasındaki uzaklıktır.

İspat

$\dot{I}Z$ 'in tanımından

$$\sum_{i=1}^n \partial_i(\mathcal{P}(C_n)) = \text{tr}[\mathcal{D}(\mathcal{P}(C_n))] = 0$$

dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^2(\mathcal{P}(C_n)) &= \begin{pmatrix} \overbrace{J_{\ell \times \ell} - I_{\ell \times \ell}}^{A_{11}} & \overbrace{J_{\ell \times (n-\ell)}}^{A_{12}} \\ \overbrace{J_{(n-\ell) \times \ell}}^{A_{21}} & \overbrace{\mathcal{D}(\mathcal{P}(V_2))}_{(n-\ell) \times (n-\ell)}^{A_{22}} \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}^2 + A_{12}A_{21} & A_{11}A_{12} + A_{12}A_{22} \\ A_{21}A_{11} + A_{22}A_{21} & A_{22}^2 + A_{21}A_{12} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \partial_i^2(\mathcal{P}(C_n)) &= \text{tr}[\mathcal{D}^2(\mathcal{P}(C_n))] = \text{tr}(A_{11}^2) + \text{tr}(A_{12}A_{21}) + \text{tr}(A_{22}^2) + \text{tr}(A_{21}A_{12}) \\ &= \ell(\ell - 1) + \ell(n - \ell) + \ell(n - \ell) + \text{tr}[\mathcal{D}^2(\mathcal{P}(V_2))] \end{aligned}$$

olup

$$\text{tr}[\mathcal{D}^2(\mathcal{P}(V_2))] = \sum_{i=\ell+1}^n \sum_{\substack{j=\ell+1 \\ j \neq i}}^n d(v_i, v_j)^2 = 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2$$

olduğundan

$$\sum_{i=1}^n \partial_i^2(\mathcal{P}(C_n)) = \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2$$

bulunur.

6.1.2. Lemma

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n devirli grubunun power grafi, $n \geq 3$ ve $n = p^m$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^n \partial_i^2(\mathcal{P}(C_n)) = n(n - 1)$$

dir. Burada p bir asal sayı ve $m \in \mathbb{Z}^+$ dır.

İspat

$|C_n| = p^m$ olduğundan C_n devirli grubunun power grafi bir tam graftır. Dolayısıyla $\mathcal{D}^2(\mathcal{P}(C_n))$ matrisinin esas köşegen üzerindeki elemanları $n - 1$ dir. Buna göre

$$\sum_{i=1}^n \partial_i^2(\mathcal{P}(C_n)) = \text{tr}[\mathcal{D}^2(\mathcal{P}(C_n))] = n(n - 1)$$

olarak elde edilir.

6.1.1. Teorem

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n devirli grubunun power grafi, $\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n))$, $\mathcal{P}(C_n)$ nin distance enerjisi ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$\sqrt{\ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2} \leq \mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n))$$

ve

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n)) \leq \sqrt{n\ell(2n - \ell - 1) + 2n \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)}^2$$

dir.

İspat

Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve Lemma 6.1.1'den

$$\begin{aligned} \mathcal{DE}^2(\mathcal{P}(C_n)) &= \left(\sum_{i=1}^n |\partial_i(\mathcal{P}(C_n))| \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n \partial_i^2(\mathcal{P}(C_n)) \\ &= n \left[\ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j) \right] \end{aligned}$$

olup

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n)) \leq \sqrt{n\ell(2n - \ell - 1) + 2n \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)}^2$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\mathcal{DE}^2(\mathcal{P}(C_n)) = \left(\sum_{i=1}^n |\partial_i(\mathcal{P}(C_n))| \right)^2 \geq \sum_{i=1}^n \partial_i^2(\mathcal{P}(C_n))$$

ve Lemma 6.1.1'den

$$= \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)$$

olup

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n)) \geq \sqrt{\ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

6.1.1. Sonuç

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n devirli grubunun power grafi, $\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n))$, $\mathcal{P}(C_n)$ nin distance enerjisi, $n \geq 3$ ve $n = p^m$ olmak üzere

$$\sqrt{n(n-1)} \leq \mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n)) \leq n\sqrt{n-1}$$

dir. Burada p bir asal sayı ve $m \in \mathbb{Z}^+$ dir.

İspat

$|C_n| = p^m$ olduğundan $\mathcal{P}(C_n)$ tam graf olup Lemma 6.1.2 ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\mathcal{DE}^2(\mathcal{P}(C_n)) = \left(\sum_{i=1}^n |\partial_i(\mathcal{P}(C_n))| \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n \partial_i^2(\mathcal{P}(C_n)) = n^2(n-1)$$

ve buradan

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n)) \leq n\sqrt{n-1}$$

bulunur. Diğer taraftan Lemma 6.1.2'den

$$\mathcal{DE}^2(\mathcal{P}(C_n)) = \left(\sum_{i=1}^n |\partial_i(\mathcal{P}(C_n))| \right)^2 \geq \sum_{i=1}^n \partial_i^2(\mathcal{P}(C_n)) = n(n-1)$$

ve buradan

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n)) \geq \sqrt{n(n-1)}$$

olarak elde edilir.

6.1.2. Teorem

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n devirli grubunun power grafi, $\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n))$, $\mathcal{P}(C_n)$ nin distance enerjisi ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n)) \leq \partial_1 + \sqrt{(n-1) \left[\ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2 - \partial_1^2 \right]}$$

dir.

İspat

Distance enerjinin tanımından

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n)) - \partial_1 = \sum_{i=2}^n |\partial_i(\mathcal{P}(C_n))|$$

olup Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve Lemma 6.1.1'den

$$\begin{aligned} (\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n)) - \partial_1)^2 &= \left(\sum_{i=2}^n |\partial_i(\mathcal{P}(C_n))| \right)^2 \leq (n-1) \sum_{i=2}^n \partial_i^2(\mathcal{P}(C_n)) \\ &\leq (n-1) \left(\sum_{i=1}^n \partial_i^2(\mathcal{P}(C_n)) - \partial_1^2 \right) \\ &= (n-1) \left[\ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2 - \partial_1^2 \right] \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n)) \leq \partial_1 + \sqrt{(n-1) \left[\ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2 - \partial_1^2 \right]}$$

elde edilir.

6.1.2. Sonuç

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n devirli grubunun power grafi, $\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n))$, $\mathcal{P}(C_n)$ nin distance enerjisi, $n \geq 3$ ve $n = p^m$ olmak üzere

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n)) = 2(n - 1)$$

dir. Burada p bir asal sayı ve $m \in \mathbb{Z}^+$ dir.

İspat

$|C_n| = p^m$ olduğundan $\mathcal{P}(C_n)$ tam graf olup distance spektrumu $\left\{n - 1, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{n-1}\right\}$

dir. Distance enerjinin tanımından

$$(\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n)) - \partial_1)^2 = \left(\sum_{i=2}^n |\partial_i(\mathcal{P}(C_n))|\right)^2$$

olup Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve tam grafın distance spektrumundan

$$\left(\sum_{i=2}^n |\partial_i(\mathcal{P}(C_n))|\right)^2 = (n - 1) \sum_{i=2}^n \partial_i^2(\mathcal{P}(C_n))$$

dir. Bu durumda

$$(\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n)) - \partial_1)^2 = (n - 1) \sum_{i=2}^n \partial_i^2(\mathcal{P}(C_n))$$

ve Lemma 6.1.2'den

$$= (n - 1)[n(n - 1) - (n - 1)^2]$$

$$= (n - 1)^2$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n)) - \partial_1 = \mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n)) - (n - 1) = n - 1$$

ve buradan

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n)) = 2(n - 1)$$

olarak elde edilir.

6.1.3. Teorem

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n devirli grubunun power grafi, $\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n))$, $\mathcal{P}(C_n)$ nin distance enerjisi ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n)) \geq \sqrt{\ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2 + n(n - 1) |\det \mathcal{D}(\mathcal{P}(C_n))|^{\frac{2}{n}}}$$

dir.

İspat

Distance enerjinin tanımından

$$\begin{aligned} \mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n))^2 &= \left(\sum_{i=1}^n |\partial_i(\mathcal{P}(C_n))| \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \partial_i^2(\mathcal{P}(C_n)) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} |\partial_i(\mathcal{P}(C_n))| |\partial_j(\mathcal{P}(C_n))| \end{aligned}$$

olup Lemma 6.1.1'den

$$= \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2 + \sum_{i \neq j} |\partial_i(\mathcal{P}(C_n))| |\partial_j(\mathcal{P}(C_n))| \quad (6.1)$$

dir. Negatif olmayan sayıların geometrik ortalaması, aritmetik ortalamasından küçük veya eşit olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} |\partial_i(\mathcal{P}(C_n))| |\partial_j(\mathcal{P}(C_n))| &\geq (\prod_{i \neq j} |\partial_i(\mathcal{P}(C_n))| |\partial_j(\mathcal{P}(C_n))|)^{\frac{1}{n(n-1)}} \\
&= \left(\prod_{i=1}^n |\partial_i(\mathcal{P}(C_n))|^{2(n-1)} \right)^{\frac{1}{n(n-1)}} \\
&= \prod_{i=1}^n |\partial_i(\mathcal{P}(C_n))|^{\frac{2}{n}}
\end{aligned} \tag{6.2}$$

dir. Diğer taraftan

$$\prod_{i=1}^n |\partial_i(\mathcal{P}(C_n))| = |\det \mathcal{D}(\mathcal{P}(C_n))| \tag{6.3}$$

dir. O halde Eş. 6.1, Eş. 6.2 ve Eş. 6.3'den

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n)) \geq \sqrt{\ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2 + n(n-1) |\det \mathcal{D}(\mathcal{P}(C_n))|^{\frac{2}{n}}}$$

olarak elde edilir.

6.1.3. Sonuç

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n devirli grubunun power grafi, $\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n))$, $\mathcal{P}(C_n)$ nin distance enerjisi, $n \geq 3$ ve $n = p^m$ olmak üzere

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n)) \geq \sqrt{n(n-1) \left[1 + (n-1)^{\frac{2}{n}} \right]}$$

dir. Burada p bir asal sayı ve $m \in \mathbb{Z}^+$ dir.

İspat

$|C_n| = p^m$ olduğundan $\mathcal{P}(C_n)$ tam graf olup distance spectrumu $\left\{ n-1, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{n-1} \right\}$

dir. Teorem 6.1.3 ve Lemma 6.1.2'den

$$\begin{aligned}
\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n))^2 &\geq \sum_{i=1}^n \partial_i^2(\mathcal{P}(C_n)) + n(n-1) |\det \mathcal{D}(\mathcal{P}(C_n))|^{\frac{2}{n}} \\
&= n(n-1) + n(n-1) [(n-1)(-1)^{n-1}]^{\frac{2}{n}} \\
&= n(n-1) \left[1 + (n-1)^{\frac{2}{n}} \right]
\end{aligned}$$

ve buradan

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n)) \geq \sqrt{n(n-1) \left[1 + (n-1)^{\frac{2}{n}} \right]}$$

bulunur.

6.1.4. Teorem

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n devirli grubunun power grafi, $|\partial_1| \geq |\partial_2| \geq \dots \geq |\partial_n| \geq 0$ olmak üzere $\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n, \mathcal{D}(\mathcal{P}(C_n))$ distance matrisinin özdeğerleri ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n)) \geq \frac{\ell(2n-\ell-1)+2\sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2 + n|\partial_1||\partial_n|}{|\partial_1|+|\partial_n|}$$

dir.

İspat

C_n devirli bir grup ve $n \geq 3$ olduğundan $\mathcal{P}(C_n)$ power grafi en az iki kenara sahiptir. Dolayısıyla $\mathcal{D}(\mathcal{P}(C_n))$ nin sıfırdan farklı en az bir özdeğeri vardır. Şimdi $i = 1, 2, \dots, n$ için $|\partial_1| \geq |\partial_i| \geq |\partial_n|$ alalım. Bu durumda

$$(|\partial_1| - |\partial_i|)(|\partial_i| - |\partial_n|) \geq 0 \tag{6.4}$$

dir. Diğer taraftan

$$(|\partial_1| - |\partial_i|)(|\partial_i| - |\partial_n|) = |\partial_i|(|\partial_1| + |\partial_n|) - (\partial_i^2 + |\partial_1||\partial_n|) \quad (6.5)$$

dir. Bu durumda Eş. 6.4 ve Eş. 6.5'den

$$|\partial_i|(|\partial_1| + |\partial_n|) \geq \partial_i^2 + |\partial_1||\partial_n|$$

dir. $1 \leq i \leq n$ olmak üzere her i değeri için bu işlem yapılırsa

$$(|\partial_1| + |\partial_2| + \dots + |\partial_n|)(|\partial_1| + |\partial_n|) \geq (\partial_1^2 + \partial_2^2 + \dots + \partial_n^2) + n|\partial_1||\partial_n|$$

ve buradan

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n)) \geq \frac{\sum_{i=1}^n \partial_i^2 + n|\partial_1||\partial_n|}{|\partial_1| + |\partial_n|}$$

ve Lemma 6.1.1'den

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n)) \geq \frac{\ell(2n-\ell-1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2 + n|\partial_1||\partial_n|}{|\partial| + |\partial_n|}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

6.1.4. Sonuç

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n devirli grubunun power grafi, $\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n))$, $\mathcal{P}(C_n)$ nin distance enerjisi, $n \geq 3$ ve $n = p^m$ olmak üzere

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n)) = 2(n-1)$$

dir. Burada p bir asal sayı ve $m \in \mathbb{Z}^+$ dır.

İspat

$|C_n| = p^m$ olduğundan $\mathcal{P}(C_n)$ tam graf olup distance spektrumu $\left\{n-1, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{n-1}\right\}$

dir. $i = 2, 3, \dots, n$ için

$$|\partial_1| \geq |\partial_i| = |\partial_2| = \dots = |\partial_n|$$

olduğundan

$$(|\partial_1| - |\partial_i|)(|\partial_i| - |\partial_n|) = 0$$

dir. O halde Teorem 6.1.4 ve Lemma 6.1.2'den

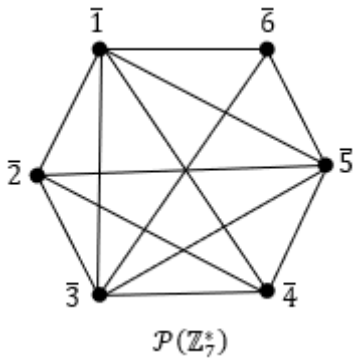
$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n)) = \frac{\sum_{i=1}^n \partial_i^2 + n|\partial_1||\partial_n|}{|\partial_1| + |\partial_n|}$$

$$= \frac{n(n-1) + n(n-1)}{1+n-1}$$

$$= 2(n-1)$$

olarak elde edilir.

Örnek



Şekil 6.1. $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_7^*)$ power grafi

$\mathbb{Z}_7^*$ çarpımsal devirli grubunun birim elemanı $\bar{1}$ ve üreteçleri $\bar{3}$ ve $\bar{5}$ dir. Buna göre

$$V_1 = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\} \text{ ve } |V_1| = \ell = 3$$

ve

$$V_2 = \mathbb{Z}_7^* - V_1 = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$$

olup

$$\mathcal{D}(\mathcal{P}(V_2)) = \begin{matrix} \bar{2} \\ \bar{4} \\ \bar{6} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. O halde $\mathcal{D}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_7^*))$ distance matrisi

$$\mathcal{D}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_7^*)) = \begin{pmatrix} J_{3 \times 3} - I_{3 \times 3} & J_{3 \times 3} \\ J_{3 \times 3} & \mathcal{D}(\mathcal{P}(V_2))_{3 \times 3} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ve özdeğerleri

$$\partial_1(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_7^*)) = 5,7565, \partial_2(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_7^*)) = -0,3628,$$

$$\partial_3(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_7^*)) = \partial_4(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_7^*)) = \partial_5(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_7^*)) = -1, \partial_6(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_7^*)) = -2,3937$$

olarak elde edilir. Buna göre $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_7^*)$ 'in distance enerjisi

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_7^*)) = \sum_{i=1}^6 |\partial_i(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_7^*))| = 11,513$$

dir. Diğer taraftan

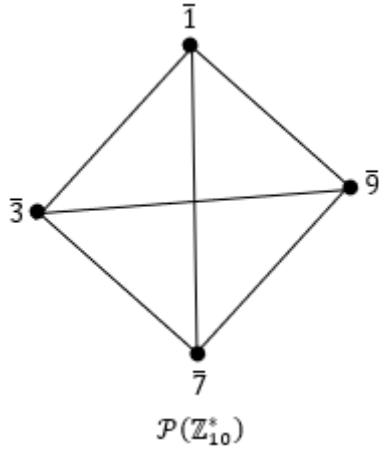
$$\ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2 = 3(12 - 3 - 1) + 2(1 + 4 + 4) = 42$$

dir. Bu durumda $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_7^*)$ 'ın distance enerjisi için verilen sınırları yukarıdaki değerler yardımı ile hesaplırsak distance enerji için aşağıdaki sınır tablosunu elde ederiz.

Çizelge 6.1. $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_7^*)$ 'ın distance enerjisi için sınırlar

$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_7^*)) = 11,513$	Teorem 6.1.1	Teorem 6.1.2	Teorem 6.1.3	Teorem 6.1.4
Alt sınır	6,4807	—	9,659	8,9112
Üst sınır	15,8745	12,4133	—	—

Örnek



Şekil 6.2. $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10}^*)$ power grafi

$\mathbb{Z}_{10}^* = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}, \bar{9}\}$ çarpımsal devirli grubunun birim elemanı $\bar{1}$ ve üreteçleri $\bar{3}$ ve $\bar{7}$ dir. Buna göre

$$V_1 = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}\} \text{ ve } |V_1| = \ell = 3$$

ve

$$V_2 = \mathbb{Z}_{10}^* - V_1 = \{\bar{9}\}$$

olup $\mathcal{D}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10}^*))$ distance matrisi

$$\mathcal{D}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10}^*)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ve özdeğerleri $\partial_1(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10}^*)) = 3, \partial_2(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10}^*)) = \partial_3(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10}^*)) = \partial_4(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10}^*)) = -1$ dir. O halde $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10}^*)$ 'ın distance enerjisi

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10}^*)) = \sum_{i=1}^4 |\partial_i(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10}^*))| = 6$$

bulunur. Bu durumda $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10}^*)$ ' ın distance enerjisi için verilen sınırları hesaplayarak distance enerji için aşağıdaki sınır tablosunu elde ederiz.

Çizelge 6.2. $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10}^*)$ 'ın distance enerjisi için sınırlar

$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_{10}^*)) = 6$	Sonuç 6.1.1	Sonuç 6.1.2	Sonuç 6.1.3	Sonuç 6.1.4
Alt sınır	3,4641	—	5,7257	6
Üst sınır	6,9282	6	—	—

6.2. Sonlu Dihedral Grupların Power Graflarının Distance Enerjileri İçin Sınırlar

6.2.1. Lemma

$\mathcal{P}(D_{2n})$, D_{2n} dihedral grubunun power grafi, $\mathcal{D}(\mathcal{P}(D_{2n}))$, $\mathcal{P}(D_{2n})$ nin distance matrisi ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{2n} \partial_i(\mathcal{P}(D_{2n})) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{2n} \partial_i^2(\mathcal{P}(D_{2n})) = 2n(6n - 5) + \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2$$

dir. Burada $i = 1, 2, \dots, 2n$ için ∂_i ler $\mathcal{D}(\mathcal{P}(D_{2n}))$ distance matrisinin özdeğerleridir.

İspat

İz'in tanımından

$$\sum_{i=1}^{2n} \partial_i(\mathcal{P}(D_{2n})) = \text{tr}[\mathcal{D}(\mathcal{P}(D_{2n}))] = 0$$

dir. Şimdi

$$\mathcal{D}^2(\mathcal{P}(D_{2n})) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}(\mathcal{P}(C_n)) & M_n \\ M_n^T & 2(J - I)_n \end{pmatrix}^2$$

matrisini göz önüne alalım. Burada I birim matris, J tüm elemanları bir olan matris ve

$$M_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \end{bmatrix}$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2n} \partial_i^2(\mathcal{P}(D_{2n})) &= \text{tr}[\mathcal{D}^2(\mathcal{P}(D_{2n}))] = \text{tr}[\mathcal{D}^2(\mathcal{P}(C_n))] + \text{tr}[M_n M_n^T] + \text{tr}[M_n^T M_n] \\ &\quad + \text{tr}[4(J - I)^2] \end{aligned}$$

olup Lemma 6.1.1'den

$$= \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2 + 4n^2 - 3n + 4n^2 - 3n + 4(n^2 - n)$$

$$= \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2 + 2n(6n - 5)$$

bulunur.

6.2.1. Teorem

$\mathcal{P}(D_{2n})$, D_{2n} dihedral grubunun power grafi, $\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n}))$, $\mathcal{P}(D_{2n})$ nin distance enerjisi ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$\sqrt{2n(6n-5) + \ell(2n-\ell-1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2} \leq \mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n}))$$

ve

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) \leq \sqrt{2n \left[2n(6n-5) + \ell(2n-\ell-1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2 \right]}$$

dir.

İspat

Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve Lemma 6.2.1'den

$$\begin{aligned} \mathcal{DE}^2(\mathcal{P}(D_{2n})) &= \left(\sum_{i=1}^{2n} |\partial_i(\mathcal{P}(D_{2n}))| \right)^2 \leq 2n \sum_{i=1}^{2n} \partial_i^2(\mathcal{P}(D_{2n})) \\ &= 2n \left[2n(6n-5) + \ell(2n-\ell-1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2 \right] \end{aligned}$$

olup

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) \leq \sqrt{2n \left[2n(6n-5) + \ell(2n-\ell-1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2 \right]}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\mathcal{DE}^2(\mathcal{P}(D_{2n})) = \left(\sum_{i=1}^{2n} |\partial_i(\mathcal{P}(D_{2n}))| \right)^2 \geq \sum_{i=1}^{2n} \partial_i^2(\mathcal{P}(D_{2n}))$$

olup Lemma 6.2.1'den

$$= 2n(6n - 5) + \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2$$

ve buradan

$$\sqrt{2n(6n - 5) + \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2} \leq \mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n}))$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

6.2.1. Sonuç

$C_n = \langle a \rangle$, $D_{2n} = \langle a, b \rangle$ dihedral grubunun devirli alt grubu, $\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n}))$, $\mathcal{P}(D_{2n})$ nin distance enerjisi ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{2n^2(6n - 5) + \mathcal{DE}^2(\mathcal{P}(C_n))} \leq \mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) \leq \sqrt{4n^2(6n - 5) + 2n\mathcal{DE}^2(\mathcal{P}(C_n))}$$

dir.

İspat

Teorem 6.1.1'den

$$\mathcal{DE}^2(\mathcal{P}(C_n)) \geq \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2 \quad (6.6)$$

ve Teorem 6.2.1'den

$$\mathcal{DE}^2(\mathcal{P}(D_{2n})) \leq 2n \left[2n(6n - 5) + \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2 \right] \quad (6.7)$$

dir. Eş. 6.6 ve Eş. 6.7'den

$$\mathcal{DE}^2(\mathcal{P}(D_{2n})) \leq 2n[2n(6n - 5) + \mathcal{DE}^2(\mathcal{P}(C_n))]$$

ve buradan

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) \leq \sqrt{2n[2n(6n-5) + \mathcal{DE}^2(\mathcal{P}(C_n))]}$$

bulunur. Diğer taraftan Teorem 6.1.1'den

$$\mathcal{DE}^2(\mathcal{P}(C_n)) \leq n\ell(2n - \ell - 1) + 2n \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2 \quad (6.8)$$

ve Teorem 6.2.1'den

$$\mathcal{DE}^2(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq 2n(6n - 5) + \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2 \quad (6.9)$$

dir. Eş. 6.8 ve Eş. 6.9'dan

$$\mathcal{DE}^2(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq 2n(6n - 5) + \frac{\mathcal{DE}^2(\mathcal{P}(C_n))}{n}$$

ve buradan

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{2n^2(6n - 5) + \mathcal{DE}^2(\mathcal{P}(C_n))}$$

bulunur.

6.2.2. Sonuç

$C_n = \langle a \rangle$, $D_{2n} = \langle a, b \rangle$ dihedral grubunun devirli alt grubu, $\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n}))$, $\mathcal{P}(D_{2n})$ nin distance enerjisi, $n \geq 3$ ve $n = p^m$ olmak üzere

$$\sqrt{n(13n - 11)} \leq \mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) \leq n\sqrt{26n - 22}$$

dir. Burada p bir asal sayı ve $m \in \mathbb{Z}^+$ dir.

İspat

Teorem 6.2.1, Lemma 6.1.1'den

$$\begin{aligned}\mathcal{DE}^2(\mathcal{P}(D_{2n})) &\leq 2n \left[2n(6n-5) + \ell(2n-\ell-1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2 \right] \\ &= 2n \left[2n(6n-5) + \sum_{i=1}^n \partial_i^2(\mathcal{P}(C_n)) \right]\end{aligned}$$

dir. $|C_n| = p^m$ olduğundan $\mathcal{P}(C_n)$ tam graftır. Buna göre Lemma 6.1.2' den

$$= 2n[2n(6n-5) + n(n-1)]$$

$$= 2n[13n^2 - 11n]$$

ve buradan

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) \leq n\sqrt{26n-22}$$

bulunur. Diğer taraftan Teorem 6.2.1, Lemma 6.1.1'den

$$\begin{aligned}\mathcal{DE}^2(\mathcal{P}(D_{2n})) &\geq 2n(6n-5) + \ell(2n-\ell-1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2 \\ &= 2n(6n-5) + \sum_{i=1}^n \partial_i^2(\mathcal{P}(C_n))\end{aligned}$$

dir. $|C_n| = p^m$ olduğundan $\mathcal{P}(C_n)$ tam graftır. Buna göre Lemma 6.1.2'den

$$= 2n(6n-5) + n(n-1)$$

$$= 13n^2 - 11n$$

olup buradan

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq \sqrt{n(13n - 11)}$$

bulunur.

6.2.2. Teorem

$\mathcal{P}(D_{2n})$, D_{2n} dihedral grubunun power grafi, $\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n}))$, $\mathcal{P}(D_{2n})$ nin distance enerjisi ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) \leq \partial_1 + \sqrt{(2n - 1)[2n(6n - 5) + \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2 - \partial_1^2]}$$

dir.

İspat

Distance enerjinin tanımından

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) - \partial_1(\mathcal{P}(D_{2n})) = \sum_{i=2}^{2n} |\partial_i(\mathcal{P}(D_{2n}))|$$

olup Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve Lemma 6.2.1'den

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) - \partial_1(\mathcal{P}(D_{2n})) \right)^2 &= \left(\sum_{i=2}^{2n} |\partial_i(\mathcal{P}(D_{2n}))| \right)^2 \\ &\leq (2n - 1) \sum_{i=2}^{2n} \partial_i^2(\mathcal{P}(D_{2n})) \\ &= (2n - 1) \left(\sum_{i=1}^{2n} \partial_i^2(\mathcal{P}(D_{2n})) - \partial_1^2 \right) \\ &= (2n - 1) \left[2n(6n - 5) + \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2 - \partial_1^2 \right] \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) \leq \partial_1 + \sqrt{(2n-1)[2n(6n-5) + \ell(2n-\ell-1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2 - \partial_1^2]}$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

6.2.3. Sonuç

$C_n = \langle a \rangle$, $D_{2n} = \langle a, b \rangle$ dihedral grubunun devirli alt grubu, $\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n}))$, $\mathcal{P}(D_{2n})$ nin distance enerjisi ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) \leq \partial_1(\mathcal{P}(D_{2n})) + \sqrt{(2n-1)[2n(6n-5) + \mathcal{DE}^2(\mathcal{P}(C_n)) - \partial_1^2(\mathcal{P}(D_{2n}))]}$$

dir.

İspat

Teorem 6.1.1'den

$$\mathcal{DE}^2(\mathcal{P}(C_n)) \geq \ell(2n-\ell-1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2$$

ve Teorem 6.2.2'den

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) - \partial_1(\mathcal{P}(D_{2n})) \right)^2 &\leq (2n-1)[2n(6n-5) + \ell(2n-\ell-1) \\ &\quad + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2 - \partial_1^2(\mathcal{P}(D_{2n}))] \end{aligned}$$

dir. Bu durumda

$$\left(\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) - \partial_1(\mathcal{P}(D_{2n})) \right)^2 \leq (2n-1)[2n(6n-5) + \mathcal{DE}^2(\mathcal{P}(C_n)) - \partial_1^2(\mathcal{P}(D_{2n}))]$$

ve buradan

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) \leq \partial_1(\mathcal{P}(D_{2n})) + \sqrt{(2n-1)[2n(6n-5) + \mathcal{DE}^2(\mathcal{P}(C_n)) - \partial_1^2(\mathcal{P}(D_{2n}))]}$$

bulunur.

6.2.4. Sonuç

$C_n = \langle a \rangle$, $D_{2n} = \langle a, b \rangle$ dihedral grubunun devirli alt grubu, $\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n}))$, $\mathcal{P}(D_{2n})$ nin distance enerjisi, $n \geq 3$ ve $n = p^m$ olmak üzere

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) \leq \partial_1(\mathcal{P}(D_{2n})) + \sqrt{(2n-1)[n(13n-11) - \partial_1^2(\mathcal{P}(D_{2n}))]}$$

dir. Burada p bir asal sayı ve $m \in \mathbb{Z}^+$ dır.

İspat

Teorem 6.2.2, Lemma 6.1.1'den

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) - \partial_1(\mathcal{P}(D_{2n})) \right)^2 &\leq (2n-1)[2n(6n-5) + \ell(2n-\ell-1) \\ &\quad + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2 - \partial_1^2(\mathcal{P}(D_{2n}))] \end{aligned}$$

$$= (2n-1)[2n(6n-5) + \sum_{i=1}^n \partial_i^2(\mathcal{P}(C_n)) - \partial_1^2(\mathcal{P}(D_{2n}))]$$

dir. $|C_n| = p^m$ olduğundan $\mathcal{P}(C_n)$ tam graftır. Buna göre Lemma 6.1.2'den

$$= (2n-1)[2n(6n-5) + n(n-1) - \partial_1^2(\mathcal{P}(D_{2n}))]$$

ve buradan

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) \leq \partial_1(\mathcal{P}(D_{2n})) + \sqrt{(2n-1)[n(13n-11) - \partial_1^2(\mathcal{P}(D_{2n}))]}$$

bulunur.

6.2.3. Teorem

$\mathcal{P}(D_{2n})$, D_{2n} dihedral grubunun power grafi, $|\partial_1(\mathcal{P}(D_{2n}))| \geq |\partial_2(\mathcal{P}(D_{2n}))| \geq \dots \geq |\partial_{2n}(\mathcal{P}(D_{2n}))| \geq 0$ olmak üzere $\partial_1(\mathcal{P}(D_{2n})), \partial_2(\mathcal{P}(D_{2n})), \dots, \partial_{2n}(\mathcal{P}(D_{2n})), \mathcal{D}(\mathcal{P}(D_{2n}))$ distance matrisinin özdeğerleri ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq \frac{\ell(2n-\ell-1)+2\sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2 + 2n(|\partial_1(\mathcal{P}(D_{2n}))| |\partial_{2n}(\mathcal{P}(D_{2n}))| + 6n-5)}{|\partial_1(\mathcal{P}(D_{2n}))| + |\partial_{2n}(\mathcal{P}(D_{2n}))|}$$

dir.

İspat

D_{2n} dihedral grup ve $n \geq 3$ olduğundan $\mathcal{P}(D_{2n})$ power grafi en az iki kenara sahiptir. Dolayısıyla $\mathcal{D}(\mathcal{P}(D_{2n}))$ nin sıfırdan farklı en az bir özdeğeri vardır. Şimdi $i = 1, 2, \dots, 2n$ için

$$|\partial_1(\mathcal{P}(D_{2n}))| \geq |\partial_i(\mathcal{P}(D_{2n}))| \geq |\partial_{2n}(\mathcal{P}(D_{2n}))|$$

alalım. Bu durumda

$$(|\partial_1(\mathcal{P}(D_{2n}))| - |\partial_i(\mathcal{P}(D_{2n}))|)(|\partial_i(\mathcal{P}(D_{2n}))| - |\partial_{2n}(\mathcal{P}(D_{2n}))|) \geq 0 \quad (6.10)$$

dir. Diğer taraftan gösterim açısından kolaylık olması amacı ile $i = 1, 2, \dots, 2n$ için $\partial_i(\mathcal{P}(D_{2n}))$ leri ∂_i şeklinde alacak olursak

$$(|\partial_1| - |\partial_i|)(|\partial_i| - |\partial_{2n}|) = |\partial_i|(|\partial_1| + |\partial_{2n}|) - (\partial_i^2 + |\partial_1||\partial_{2n}|) \quad (6.11)$$

dir. Bu durumda Eş. 6.10 ve Eş. 6.11'den

$$|\partial_i|(|\partial_1| + |\partial_{2n}|) \geq \partial_i^2 + |\partial_1||\partial_{2n}|$$

dir. $1 \leq i \leq 2n$ olmak üzere her i değeri için bu işlem yapılırsa

$$(|\partial_1| + |\partial_2| + \dots + |\partial_{2n}|)(|\partial_1| + |\partial_{2n}|) \geq (\partial_1^2 + \partial_2^2 + \dots + \partial_{2n}^2) + 2n|\partial_1||\partial_{2n}|$$

ve buradan

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq \frac{\sum_{i=1}^{2n} \partial_i^2 + 2n|\partial_1||\partial_{2n}|}{|\partial_1| + |\partial_{2n}|}$$

ve Lemma 6.2.1'den

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq \frac{\ell(2n-\ell-1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2 + 2n(|\partial_1||\partial_{2n}| + 6n-5)}{|\partial_1| + |\partial_{2n}|}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

6.2.5. Sonuç

$C_n = \langle a \rangle$, $D_{2n} = \langle a, b \rangle$ dihedral grubunun devirli alt grubu, $|\partial_1(\mathcal{P}(D_{2n}))| \geq |\partial_2(\mathcal{P}(D_{2n}))| \geq \dots \geq |\partial_{2n}(\mathcal{P}(D_{2n}))| \geq 0$ olmak üzere $\partial_1(\mathcal{P}(D_{2n}))$, $\partial_2(\mathcal{P}(D_{2n}))$, $\dots$, $\partial_{2n}(\mathcal{P}(D_{2n}))$, $\mathcal{D}(\mathcal{P}(D_{2n}))$ distance matrisinin özdeğerleri ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq \frac{\mathcal{DE}^2(\mathcal{P}(C_n)) + 2n^2(|\partial_1(\mathcal{P}(D_{2n}))| |\partial_{2n}(\mathcal{P}(D_{2n}))| + 6n-5)}{n(|\partial_1(\mathcal{P}(D_{2n}))| + |\partial_{2n}(\mathcal{P}(D_{2n}))|)}$$

dir.

İspat

Teorem 6.1.1'den

$$\mathcal{DE}^2(\mathcal{P}(C_n)) \leq n\ell(2n - \ell - 1) + 2n \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2 \quad (6.12)$$

ve Teorem 6.2.3'den

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq \frac{\ell(2n-\ell-1)+2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2 + 2n(|\partial_1| |\partial_{2n}| + 6n - 5)}{|\partial_1| + |\partial_{2n}|} \quad (6.13)$$

dir. Eş. 6.12 ve Eş. 6.13'den

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq \frac{\mathcal{DE}^2(\mathcal{P}(C_n)) + 2n^2(|\partial_1| |\partial_{2n}| + 6n - 5)}{n(|\partial_1| + |\partial_{2n}|)}$$

bulunur.

6.2.6. Sonuç

$C_n = \langle a \rangle$, $D_{2n} = \langle a, b \rangle$ dihedral grubunun devirli alt grubu, $|\partial_1(\mathcal{P}(D_{2n}))| \geq |\partial_2(\mathcal{P}(D_{2n}))| \geq \dots \geq |\partial_{2n}(\mathcal{P}(D_{2n}))| \geq 0$ olmak üzere $\partial_1(\mathcal{P}(D_{2n}))$, $\partial_2(\mathcal{P}(D_{2n}))$, ..., $\partial_{2n}(\mathcal{P}(D_{2n}))$, $\mathcal{D}(\mathcal{P}(D_{2n}))$ distance matrisinin özdeğerleri, $n \geq 3$ ve $n = p^m$ olmak üzere

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq \frac{n[13n-11+2|\partial_1(\mathcal{P}(D_{2n}))||\partial_{2n}(\mathcal{P}(D_{2n}))|]}{|\partial_1(\mathcal{P}(D_{2n}))| + |\partial_{2n}(\mathcal{P}(D_{2n}))|}$$

dir. Burada p bir asal sayı ve $m \in \mathbb{Z}^+$ dir.

İspat

Teorem 6.2.3 ve Lemma 6.1.1'den

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq \frac{\ell(2n-\ell-1)+2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2 + 2n(|\partial_1| |\partial_{2n}| + 6n - 5)}{|\partial_1| + |\partial_{2n}|}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n \partial_i^2(\mathcal{P}(C_n)) + 2n(|\partial_1||\partial_{2n}| + 6n - 5)}{|\partial_1| + |\partial_{2n}|}$$

dir. $|C_n| = p^m$ olduğundan $\mathcal{P}(C_n)$ tam graftır. Buna göre Lemma 6.1.2'den

$$= \frac{n(13n-11) + 2n|\partial_1||\partial_{2n}|}{|\partial_1| + |\partial_{2n}|}$$

olup buradan

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq \frac{n[13n-11+2|\partial_1||\partial_{2n}|]}{|\partial_1| + |\partial_{2n}|}$$

bulunur.

6.2.4. Teorem

$\mathcal{P}(D_{2n})$, D_{2n} dihedral grubunun power grafi, $\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n}))$, $\mathcal{P}(D_{2n})$ nin distance enerjisi ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq \sqrt{2n(6n-5) + \ell(2n-\ell-1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2 + 2n(2n-1) |\det \mathcal{D}(\mathcal{P}(D_{2n}))|^{\frac{1}{n}}}$$

dir.

İspat

Distance enerjinin tanımından

$$\begin{aligned} \mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n}))^2 &= \left(\sum_{i=1}^{2n} |\partial_i(\mathcal{P}(D_{2n}))| \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{2n} \partial_i^2(\mathcal{P}(D_{2n})) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 2n} |\partial_i(\mathcal{P}(D_{2n}))| |\partial_j(\mathcal{P}(D_{2n}))| \end{aligned}$$

olup Lemma 6.2.1'den

$$\begin{aligned}
 &= 2n(6n - 5) + \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2 \\
 &\quad + \sum_{i \neq j} |\partial_i(\mathcal{P}(D_{2n}))| |\partial_j(\mathcal{P}(D_{2n}))| \quad (6.14)
 \end{aligned}$$

dir. Negatif olmayan sayıların geometrik ortalaması, aritmetik ortalamasından küçük veya eşit olduğundan

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2n(2n-1)} \sum_{i \neq j} |\partial_i(\mathcal{P}(D_{2n}))| |\partial_j(\mathcal{P}(D_{2n}))| &\geq (\prod_{i \neq j} |\partial_i(\mathcal{P}(D_{2n}))| |\partial_j(\mathcal{P}(D_{2n}))|)^{\frac{1}{2n(2n-1)}} \\
 &= \left(\prod_{i=1}^{2n} |\partial_i(\mathcal{P}(D_{2n}))|^{2(2n-1)} \right)^{\frac{1}{2n(2n-1)}} \\
 &= \prod_{i=1}^{2n} |\partial_i(\mathcal{P}(D_{2n}))|^{\frac{1}{n}} \quad (6.15)
 \end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan

$$\prod_{i=1}^{2n} |\partial_i(\mathcal{P}(D_{2n}))| = |\det \mathcal{D}(\mathcal{P}(D_{2n}))| \quad (6.16)$$

dir. O halde Eş. 6.14, Eş. 6.15 ve Eş. 6.16'dan

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq \sqrt{2n(6n - 5) + \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2 + 2n(2n - 1) |\det \mathcal{D}(\mathcal{P}(D_{2n}))|^{\frac{1}{n}}}$$

olarak elde edilir.

6.2.7. Sonuç

$C_n = \langle a \rangle$, $D_{2n} = \langle a, b \rangle$ dihedral grubunun devirli alt grubu, $\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n}))$, $\mathcal{P}(D_{2n})$ nin distance enerjisi ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{2n^2 \left[6n - 5 + (2n - 1) |\det \mathcal{D}(\mathcal{P}(D_{2n}))|^{\frac{1}{n}} \right] + \mathcal{DE}^2(\mathcal{P}(C_n))}$$

dir.

İspat

Teorem 6.1.1'den

$$\mathcal{DE}^2(\mathcal{P}(C_n)) \leq n\ell(2n - \ell - 1) + 2n \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2$$

ve Teorem 6.2.4'den

$$\begin{aligned} \mathcal{DE}^2(\mathcal{P}(D_{2n})) &\geq 2n(6n - 5) + \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2 \\ &\quad + 2n(2n - 1) |\det \mathcal{D}(\mathcal{P}(D_{2n}))|^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

dir. Bu durumda

$$\mathcal{DE}^2(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq 2n(6n - 5) + \frac{\mathcal{DE}^2(\mathcal{P}(C_n))}{n} + 2n(2n - 1) |\det \mathcal{D}(\mathcal{P}(D_{2n}))|^{\frac{1}{n}}$$

ve buradan

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{2n^2 \left[6n - 5 + (2n - 1) |\det \mathcal{D}(\mathcal{P}(D_{2n}))|^{\frac{1}{n}} \right] + \mathcal{DE}^2(\mathcal{P}(C_n))}$$

bulunur.

6.2.8. Sonuç

$C_n = \langle a \rangle$, $D_{2n} = \langle a, b \rangle$ dihedral grubunun devirli alt grubu, $\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n}))$, $\mathcal{P}(D_{2n})$ nin distance enerjisi, $n \geq 3$ ve $n = p^m$ olmak üzere

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq \sqrt{n \left[13n - 11 + (4n - 2) |\det \mathcal{D}(\mathcal{P}(D_{2n}))|^{\frac{1}{n}} \right]}$$

dir. Burada p bir asal sayı ve $m \in \mathbb{Z}^+$ dir.

İspat

Teorem 6.2.4, Lemma 6.1.1'den

$$\begin{aligned} \mathcal{DE}^2(\mathcal{P}(D_{2n})) &\geq 2n(6n - 5) + \ell(2n - \ell - 1) + 2 \sum_{\ell+1 \leq i < j \leq n} d(v_i, v_j)^2 \\ &\quad + 2n(2n - 1) |\det \mathcal{D}(\mathcal{P}(D_{2n}))|^{\frac{1}{n}} \\ &= 2n(6n - 5) + \sum_{i=1}^n \partial_i^2(\mathcal{P}(C_n)) + 2n(2n - 1) |\det \mathcal{D}(\mathcal{P}(D_{2n}))|^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

dir. $|C_n| = p^m$ olduğundan $\mathcal{P}(C_n)$ tam graftır. Buna göre Lemma 6.1.2'den

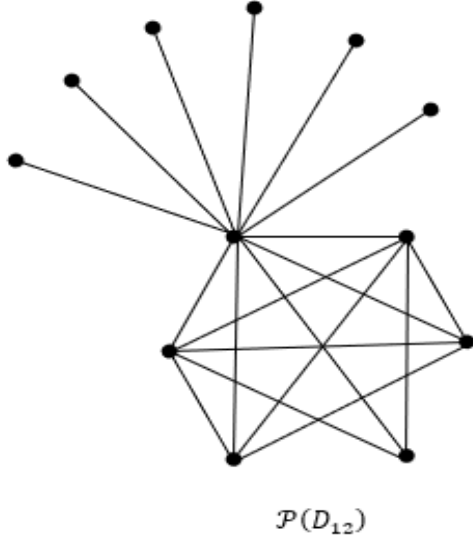
$$= 2n(6n - 5) + n(n - 1) + 2n(2n - 1) |\det \mathcal{D}(\mathcal{P}(D_{2n}))|^{\frac{1}{n}}$$

ve buradan

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) \geq \sqrt{n \left[13n - 11 + (4n - 2) |\det \mathcal{D}(\mathcal{P}(D_{2n}))|^{\frac{1}{n}} \right]}$$

bulunur.

Örnek



Şekil 6.3. $\mathcal{P}(D_{12})$ power grafi

$\mathcal{P}(D_{12})$ power grafinın distance matrisi

$$\mathcal{D}(\mathcal{P}(D_{12})) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

olup özdeğerleri

$$\partial_1(\mathcal{P}(D_{12})) = 19,2386, \partial_2(\mathcal{P}(D_{12})) = -0,3368, \partial_3(\mathcal{P}(D_{12})) = -0,5584$$

$$\partial_4(\mathcal{P}(D_{12})) = \partial_5(\mathcal{P}(D_{12})) = -1$$

$$\partial_6(\mathcal{P}(D_{12})) = \partial_7(\mathcal{P}(D_{12})) = \partial_8(\mathcal{P}(D_{12})) = \partial_9(\mathcal{P}(D_{12})) = \partial_{10}(\mathcal{P}(D_{12})) = -2$$

$$\partial_{11}(\mathcal{P}(D_{12})) = -2,3557, \partial_{12}(\mathcal{P}(D_{12})) = -3,9875$$

dir. Buna göre $\mathcal{P}(D_{12})$ 'nin distance enerjisi

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{12})) = \sum_{i=1}^{12} |\partial_i(\mathcal{P}(D_{12}))| = 38,477$$

bulunur. Diğer taraftan $\mathcal{P}(D_{12})$ için yukarıdaki teoremlerde verilen sınırları hesaplayacak olursak $\mathcal{P}(D_{12})$ 'nin distance enerjisi için aşağıdaki tabloyu elde ederiz.

Çizelge 6.3. $\mathcal{P}(D_{12})$ 'nin distance enerjisi için sınırlar

$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{12}))=38,477$	Teorem 6.2.1	Teorem 6.2.2	Teorem 6.2.3	Teorem 6.2.4
Alt sınır	20,3469	—	25,121	28,9365
Üst sınır	70,484	41,2076	—	—

Örnek

Şekil 4.3 ile verilen $\mathcal{P}(D_6)$ power grafının $\mathcal{D}(\mathcal{P}(D_6))$ distance matrisi

$$\mathcal{D}(\mathcal{P}(D_6)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

olup özdeğerleri

$$\partial_1(\mathcal{P}(D_6)) = 8,2297, \partial_2(\mathcal{P}(D_6)) = -0,6008, \partial_3(\mathcal{P}(D_6)) = -1$$

$$\partial_4(\mathcal{P}(D_6)) = \partial_5(\mathcal{P}(D_6)) = -2, \partial_6(\mathcal{P}(D_6)) = -2,6288$$

bulunur. Buna göre $\mathcal{P}(D_6)$ 'nın distance enerjisi

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_6)) = \sum_{i=1}^6 |\partial_i(\mathcal{P}(D_6))| = 16,4593$$

bulunur. Diğer taraftan C_3 devirli grubunun $\mathcal{P}(C_3)$ power grafi tam graf olup $\mathcal{P}(D_6)$ 'nın alt grafidir. Buna göre $\mathcal{P}(D_6)$ için yukarıdaki sonuçlarda verilen sınırları hesaplayarak $\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_6))$ distance enerjisi için aşağıdaki tabloyu elde ederiz.

Çizelge 6.4. $\mathcal{P}(D_6)$ 'nın distance enerjisi için sınırlar

$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_6))=16,4593$	Sonuç 6.2.2	Sonuç 6.2.4	Sonuç 6.2.6	Sonuç 6.2.8
Alt sınır	9,1651	—	12,8717	13,9991
Üst sınır	22,4499	17,2497	—	—

6.2.5. Teorem

$C_n = \langle a \rangle$, $D_{2n} = \langle a, b \rangle$ dihedral grubunun devirli alt grubu, $\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n))$ ve $\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n}))$ sırası ile $\mathcal{P}(C_n)$ ve $\mathcal{P}(D_{2n})$ power graflarının distance enerjileri ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n)) \leq \mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) \leq \mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n)) + 4(n-1) + 2\sqrt{n}(1 + 2\sqrt{n-1})$$

dir.

İspat

$\mathcal{D}(\mathcal{P}(C_n))$, $\mathcal{D}(\mathcal{P}(D_{2n}))$ nin temel alt matrisi olup Cauchy karşılaştırma teoreminden $i = 1, 2, \dots, n$ için $\partial_i(\mathcal{P}(C_n)) \leq \partial_i(\mathcal{P}(D_{2n}))$ dir. Dolayısıyla

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n)) \leq \mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n}))$$

dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\mathcal{P}(D_{2n})) &= \begin{pmatrix} \mathcal{D}(\mathcal{P}(C_n)) & M_n \\ M_n^T & 2(J-I)_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathcal{D}(\mathcal{P}(C_n)) & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & 2(J-I)_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_n & K_n \\ K_n^T & 0_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_n & L_n \\ L_n^T & 0_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \end{pmatrix}, \quad K_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad L_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$$

dir. Bir matrisin temel minörleri ve karakteristik polinomunun katsayıları arasındaki ilişkiden $\begin{pmatrix} 0_n & L_n \\ L_n^T & 0_n \end{pmatrix}$ matrisinin karakteristik polinomunu

$$p(x) = x^n - 4n(n-1)x^{n-2}$$

dir. Dolayısıyla

$$\sum_{i=1}^{2n} \partial_i \begin{pmatrix} 0_n & L_n \\ L_n^T & 0_n \end{pmatrix} = 4\sqrt{n(n-1)}$$

bulunur. Ayrıca $\begin{pmatrix} 0_n & K_n \\ K_n^T & 0_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & 2(J-I)_n \end{pmatrix}$ matrislerinin distance özdeğerlerinin mutlak değerce toplamı sırası ile $2\sqrt{n}$ ve $4(n-1)$ dir. Diğer taraftan

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}(\mathcal{P}(C_n)) & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & 2(J-I)_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n & K_n \\ K_n^T & 0_n \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} 0_n & L_n \\ L_n^T & 0_n \end{pmatrix}$$

simetrik matrislerdir. Bu durumda

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{2n})) = \sum_{i=1}^{2n} \partial_i(\mathcal{P}(D_{2n}))$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^{2n} \partial_i \begin{pmatrix} \mathcal{D}(\mathcal{P}(C_n)) & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{2n} \partial_i \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & 2(J-I)_n \end{pmatrix} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{2n} \partial_i \begin{pmatrix} 0_n & K_n \\ K_n^T & 0_n \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{2n} \partial_i \begin{pmatrix} 0_n & L_n \\ L_n^T & 0_n \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_n)) + 4(n-1) + 2\sqrt{n}(1 + 2\sqrt{n-1})
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek

Şekil 6.3 ile verilen $\mathcal{P}(D_{12})$ power grafinin distance matrisi

$$\mathcal{D}(\mathcal{P}(D_{12})) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

olup özdeğerleri

$$\partial_1(\mathcal{P}(D_{12})) = 19,2386, \partial_2(\mathcal{P}(D_{12})) = -0,3368, \partial_3(\mathcal{P}(D_{12})) = -0,5584$$

$$\partial_4(\mathcal{P}(D_{12})) = \partial_5(\mathcal{P}(D_{12})) = -1$$

$$\partial_6(\mathcal{P}(D_{12})) = \partial_7(\mathcal{P}(D_{12})) = \partial_8(\mathcal{P}(D_{12})) = \partial_9(\mathcal{P}(D_{12})) = \partial_{10}(\mathcal{P}(D_{12})) = -2$$

$$\partial_{11}(\mathcal{P}(D_{12})) = -2,3557, \partial_{12}(\mathcal{P}(D_{12})) = -3,9875$$

dir. Buna göre $\mathcal{P}(D_{12})$ 'nin distance enerjisi

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{12})) = \sum_{i=1}^{12} |\partial_i(\mathcal{P}(D_{12}))| = 38,477$$

bulunur. Diğer taraftan $\mathcal{P}(C_6)$ power grafinin distance matrisi

$$\mathcal{D}(\mathcal{P}(C_6)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

olup özdeğerleri

$$\partial_1(\mathcal{P}(C_6)) = 5,7565, \partial_2(\mathcal{P}(C_6)) = -0,3628,$$

$$\partial_3(\mathcal{P}(C_6)) = \partial_4(\mathcal{P}(C_6)) = \partial_5(\mathcal{P}(C_6)) = -1, \partial_6(\mathcal{P}(C_6)) = -2,3937$$

dir. Buna göre $\mathcal{P}(C_6)$ 'nin distance enerjisi

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_6)) = \sum_{i=1}^6 |\partial_i(\mathcal{P}(C_6))| = 11,513$$

bulunur. Bu durumda

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_6)) = 11,513 < 38,477 = \mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{12}))$$

olduğu açıktır. Diğer taraftan

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_6)) + 4(n-1) + 2\sqrt{n}(1 + 2\sqrt{n-1}) = 58,3202$$

olup

$$\mathcal{DE}(\mathcal{P}(D_{12})) = 38,477 < 58,3202 = \mathcal{DE}(\mathcal{P}(C_6)) + 4(n-1) + 2\sqrt{n}(1 + 2\sqrt{n-1})$$

olduğu görülür.

6.3. Sonlu Devirli Grupların ve Sonlu Dihedral Grupların Power Graflarının En Büyük Distance Özdeğerleri İçin Sınırlar

6.3.1. Teorem

$\mathcal{P}(C_n)$, C_n devirli grubunun power grafi, $\partial_1(\mathcal{P}(C_n))$, $\mathcal{D}(\mathcal{P}(C_n))$ nin en büyük özdeğeri ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$\partial_1(\mathcal{P}(C_n)) \geq n - 1 \quad (6.17)$$

ve

$$\partial_1(\mathcal{P}(C_n)) \leq \frac{2n-\ell-3+\sqrt{(2n-(2\ell+1))^2+\ell(\ell+2)}}{2} \quad (6.18)$$

dir. Burada ℓ , C_n devirli grubunun birim elemanının ve üreteçlerinin oluşturduğu kümenin kardinalitesidir. Ayrıca Eş. 6.17 ve Eş. 6.18'deki eşitlik durumlarının olması için gerek ve yeter koşul C_n nin mertebesinin bir asalın kuvveti olmasıdır.

İspat

C_n devirli grubunun birim elemanının ve üreteçlerinin oluşturduğu kümeyi

$$V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_\ell\}$$

ve geri kalan noktalarının kümesini

$$V_2 = C_n - V_1 = \{v_{\ell+1}, v_{\ell+2}, \dots, v_n\}$$

ile gösterelim. Bu durumda $|V_1| = \ell$ ve $|V_2| = n - \ell$ dir. Ayrıca $J_{\ell \times \ell} - I_{\ell \times \ell}$, $J_{\ell \times (n-\ell)}$ ve $J_{(n-\ell) \times \ell}$ matrislerinin herhangi bir satır veya sütundaki elemanlarının toplamı sırası ile $\ell - 1$, $n - \ell$ ve ℓ dir. Şimdi $\mathcal{D}(\mathcal{P}(C_n))$ matrisinin $\partial_1(\mathcal{P}(C_n))$ en büyük özdeğerine karşılık gelen Perron özvektörü

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T,$$

ve

$$x_i = \min_{v_k \in V_1} x_k \text{ ve } x_j = \min_{v_k \in V_2} x_k \quad (6.19)$$

alalım. Özdeğer eşitliğinden

$$\mathcal{D}(\mathcal{P}(C_n))x = \partial_1(\mathcal{P}(C_n))x \quad (6.20)$$

yazılabilir. Eş. 6.19'dan ve Eş. 6.20'nin i -inci teriminden

$$\begin{aligned} \partial_1(\mathcal{P}(C_n))x_i &= \sum_{\substack{v_k \in V_1 \\ v_k \neq v_i}} d(v_i, v_k)x_k + \sum_{\substack{v_k \in V_2 \\ v_k \neq v_i}} d(v_i, v_k)x_k \\ &\geq \sum_{\substack{v_k \in V_1 \\ v_k \neq v_i}} d(v_i, v_k)x_i + \sum_{\substack{v_k \in V_2 \\ v_k \neq v_i}} d(v_i, v_k)x_j \\ &= (\ell - 1)x_i + (n - \ell)x_j \end{aligned}$$

olup buradan

$$(\partial_1(\mathcal{P}(C_n)) - \ell + 1)x_i \geq (n - \ell)x_j \quad (6.21)$$

bulunur. Benzer şekilde Eş. 6.19'dan ve Eş. 6.20'nin j -inci teriminden ve $\min_{v_j \neq v_k \in V_2} \{d(v_j, v_k)\} \geq 1$ eşitsizliğinden yararlanarak

$$\partial_1(\mathcal{P}(C_n))x_j = \sum_{\substack{v_k \in V_1 \\ v_k \neq v_j}} d(v_j, v_k)x_k + \sum_{\substack{v_k \in V_2 \\ v_k \neq v_j}} d(v_j, v_k)x_k$$

$$\geq \sum_{\substack{v_k \in V_1 \\ v_k \neq v_j}} d(v_j, v_k) x_i + \sum_{\substack{v_k \in V_2 \\ v_k \neq v_j}} d(v_j, v_k) x_j$$

$$= \ell x_i + \min_{v_j \neq v_k \in V_2} \{d(v_j, v_k)\} x_j$$

$$= \ell x_i + (n - \ell - 1) x_j$$

olup buradan

$$\left(\partial_1(\mathcal{P}(C_n)) - (n - \ell - 1) \right) x_j \geq \ell x_i \quad (6.22)$$

bulunur. Eş. 6.21 ve Eş. 6.22'den

$$\left(\partial_1(\mathcal{P}(C_n)) - \ell + 1 \right) \left(\partial_1(\mathcal{P}(C_n)) - (n - \ell - 1) \right) x_i x_j - \ell(n - \ell) x_i x_j \geq 0$$

ve buradan

$$\partial_1(\mathcal{P}(C_n)) \geq n - 1$$

bulunur. Diğer taraftan

$$x_r = \min_{v_k \in V_1} x_k \text{ ve } x_s = \min_{v_k \in V_2} x_k$$

alıp yukarıdaki benzer işlemleri uygulayarak ve $\max_{v_s \neq v_k \in V_2} \{d(v_s, v_k)\} \leq 2$ eşitsizliğinden yararlanarak

$$\left(\partial_1(\mathcal{P}(C_n)) - \ell + 1 \right) x_r \geq (n - \ell) x_s \quad (6.23)$$

ve

$$\left(\partial_1(\mathcal{P}(C_n)) - 2(n - \ell - 1) \right) x_s \geq \ell x_r \quad (6.24)$$

bulunur. x_r ve x_s pozitif olup Eş. 6.23 ve Eş. 6.24'den

$$(\partial_1(\mathcal{P}(C_n)) - \ell + 1) (\partial_1(\mathcal{P}(C_n)) - 2(n - \ell - 1)) - \ell(n - \ell) \leq 0$$

ve buradan

$$\partial_1(\mathcal{P}(C_n)) \leq \frac{2n - \ell - 3 + \sqrt{(2n - (2\ell + 1))^2 + \ell(\ell + 2)}}{2}$$

elde edilir. Şimdi eşitlik durumunu inceleyelim. $\partial_1(\mathcal{P}(C_n))$ için Eş. 6.17 ve Eş. 6.18'deki eşitlikler olsun. O halde

$$\max_{v_j \neq v_k \in V_2} \{d(v_j, v_k)\} = \min_{v_j \neq v_k \in V_2} \{d(v_j, v_k)\}$$

olup $\mathcal{P}(C_n)$ tam graftır. Bu durumda C_n devirli grubunun mertebesi bir asalın kuvvetidir. Diğer taraftan eğer C_n devirli grubunun mertebesi bir asalın kuvveti ise $\mathcal{P}(C_n)$ bir tam graf olup

$$\max_{v_j \neq v_k \in V_2} \{d(v_j, v_k)\} = \min_{v_j \neq v_k \in V_2} \{d(v_j, v_k)\}$$

dir. Dolayısıyla $\partial_1(\mathcal{P}(C_n))$ en büyük özdeğeri için verilen sınırlardaki eşitlikler vardır. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek

Şekil 6.1 ile verilen $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_7^*)$ power grafının en büyük distance özdeğeri $\partial_1(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_7^*)) = 5,7565$ dir. Bu durumda

$$n - 1 = 6 - 1 = 5 < 5,7565 = \partial_1(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_7^*))$$

dir. Diğer taratan

$$\frac{2n-\ell-3+\sqrt{(2n-(2\ell+1))^2+\ell(\ell+2)}}{2} = \frac{12-3-3+\sqrt{(12-7)^2+3(3+2)}}{2}$$

$$= \frac{6+\sqrt{25+15}}{2} = 6,1622$$

olup

$$\frac{2n-\ell-3+\sqrt{(2n-(2\ell+1))^2+\ell(\ell+2)}}{2} = 6,1622 > 5,7565 = \partial_1(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_7^*))$$

olduğu görülür.

6.3.2. Teorem

$C_n = \langle a \rangle$, $D_{2n} = \langle a, b \rangle$ dihedral grubunun devirli alt grubu, $\partial_1(\mathcal{P}(C_n))$ ve $\partial_1(\mathcal{P}(D_{2n}))$ sırası ile $\mathcal{P}(C_n)$ ve $\mathcal{P}(D_{2n})$ power graflarının en büyük distance özdeğerleri ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$\partial_1(\mathcal{P}(C_n)) \leq \partial_1(\mathcal{P}(D_{2n})) \leq \partial_1(\mathcal{P}(C_n)) + \sqrt{n} + 2\sqrt{n-1}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})$$

dir.

İspat

$\mathcal{D}(\mathcal{P}(C_n))$, $\mathcal{D}(\mathcal{P}(D_{2n}))$ nin temel alt matrisi olup Cauchy Interlace teoreminden $i = 1, 2, \dots, n$ için $\partial_i(\mathcal{P}(C_n)) \leq \partial_i(\mathcal{P}(D_{2n}))$ dir. Diğer taraftan

$$\mathcal{D}(\mathcal{P}(D_{2n})) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}(\mathcal{P}(C_n)) & M_n \\ M_n^T & 2(J - I)_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathcal{D}(\mathcal{P}(C_n)) & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & 2(J - I)_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_n & K_n \\ K_n^T & 0_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_n & L_n \\ L_n^T & 0_n \end{pmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \end{pmatrix}, K_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, L_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$$

dir. Bir matrisin temel minörleri ve karakteristik polinomunun katsayıları arasındaki ilişkiden $\begin{pmatrix} 0_n & L_n \\ L_n^T & 0_n \end{pmatrix}$ matrisinin karakteristik polinomunu

$$p(x) = x^n - 4n(n-1)x^{n-2}$$

dir. Dolayısıyla

$$\partial_1 \begin{pmatrix} 0_n & L_n \\ L_n^T & 0_n \end{pmatrix} = 2\sqrt{n(n-1)}$$

bulunur. $\begin{pmatrix} 0_n & K_n \\ K_n^T & 0_n \end{pmatrix}$ matrisinin en büyük distance özdeğeri $\sqrt{n}$ dir. Ayrıca $\begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & 2(J-I)_n \end{pmatrix}$ matrisinin en büyük distance özdeğeri

$$\partial_1 \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & 2(J-I)_n \end{pmatrix} = \partial_1(2(J-I)_n) = 2(\partial_1(J) - \partial_1(I)) = 2(n-1)$$

dir. Diğer taraftan

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}(\mathcal{P}(C_n)) & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & 2(J-I)_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n & K_n \\ K_n^T & 0_n \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} 0_n & L_n \\ L_n^T & 0_n \end{pmatrix}$$

simetrik matrislerdir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \partial_1(\mathcal{P}(D_{2n})) &\leq \partial_1 \begin{pmatrix} \mathcal{D}(\mathcal{P}(C_n)) & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} + \partial_1 \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & 2(J-I)_n \end{pmatrix} + \partial_1 \begin{pmatrix} 0_n & K_n \\ K_n^T & 0_n \end{pmatrix} \\ &\quad + \partial_1 \begin{pmatrix} 0_n & L_n \\ L_n^T & 0_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \partial_1(\mathcal{P}(C_n)) + 2(n-1) + \sqrt{n} + 2\sqrt{n(n-1)}$$

$$= \partial_1(\mathcal{P}(C_n)) + \sqrt{n} + 2\sqrt{n-1}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek

Şekil 6.3 ile verilen $\mathcal{P}(D_{12})$ power grafinin distance matrisi

$$\mathcal{D}(\mathcal{P}(D_{12})) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

olup en büyük özdeğeri

$$\partial_1(\mathcal{P}(D_{12})) = 19,2386$$

dir. Diğer taraftan $\mathcal{P}(C_6)$ power grafinin distance matrisi

$$\mathcal{D}(\mathcal{P}(C_6)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

olup en büyük özdeğeri

$$\partial_1(\mathcal{P}(C_6)) = 5,7565$$

dir. Bu durumda

$$\partial_1(\mathcal{P}(C_6)) = 5,7565 < 19,2386 = \partial_1(\mathcal{P}(D_{12}))$$

olduğu açıktır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \partial_1(\mathcal{P}(C_6)) + \sqrt{n} + 2\sqrt{n-1}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) &= 5,7565 + \sqrt{6} + 2\sqrt{5}(\sqrt{6} + \sqrt{5}) \\ &= 39,1584 \end{aligned}$$

olup

$$\partial_1(\mathcal{P}(D_{12})) = 19,2386 < 39,1584 = \partial_1(\mathcal{P}(C_6)) + \sqrt{n} + 2\sqrt{n-1}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})$$

olarak bulunur.

7. SONUÇ

Bu çalışmada spektral graf teorideki temel matris kavramları, devirli grup ve dihedral grup yapıları göz önüne alınarak sonlu devirli grupların ve sonlu dihedral grupların power grafları için Laplacian matris, distance matris ve bu matrisler yardımıyla da enerji, Laplacian enerji ve distance enerji kavramları yeniden tanımlanmıştır. Daha sonra sonlu devirli grupların ve sonlu dihedral grupların power graflarının enerjileri, Laplacian enerjileri, distance enerjileri ve en büyük distance özdeğerleri için sınır çalışmaları yapılmıştır. Bulunan sınırlardan bazıları değere daha yakın sonuçlar vermektedir fakat graf yapısı değişikçe sınırların yaklaşımları da değişeceğinden sınır karşılaştırması yapmak her zaman mümkün olmayacaktır. Ayrıca verilen teoremler ve sonuçlardaki sınırların eşitlik durumları, Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin eşitlik durumu göz önüne alınarak incelendiğinde verilen pekçok sınır için power grafların özdeğerlerinin, Laplacian özdeğerlerinin ve distance özdeğerlerinin kendi aralarında eşit olması gerektiği görülür ki bu devirli grupların ve dihedral grupların power graf yapıları için mümkün değildir. Bu sebeple söz konusu teoremler ve sonuçlar için sınır değerlerinde sadece eşitsizlik durumu görülmektedir. Diğer taraftan Sonuç 4.1.2, Sonuç 4.1.4, Sonuç 5.2, Sonuç 5.4, Sonuç 6.1.2 ve Sonuç 6.1.4 de verilen sınırların değere eşit olması için sonlu devirli grupların power graflarının tam olması yeterlidir.

KAYNAKLAR

1. Hückel, E. (1931). Quanten theoretische beitrage zum benzolproblem. *Zeitschrift für Physik*, 70, 204-286.
2. Brooks, R., Smith, C., Stone, A. and Tutte, W. (1940). The dissection of rectangles into squares. *Duke Mathematical Journal*, 7(1), 312-340.
3. Frucht, R. (1938). Herstellung von graphen mit vorgegebener abstracter gruppe. *Compositio Mathematica*, 6, 239-250.
4. Kelarev, A. V. and Quinn, S. J. (2000). A combinatorial property and power graphs of groups. *Contributions to General Algebra*, 12, 229-235.
5. Kelarev, A. V., Quinn, S. J. and Smolikova, R. (2001). Power graphs and semigroups of matrices. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 63(2), 341-344.
6. Kelarev, A. V. and Quinn, S. J. (2002). Directed graphs and combinatorial properties of semigroups. *Journal of Algebra*, 251(1), 16-26.
7. Kelarev, A. V. and Quinn, S. J. (2004). A combinatorial property and power graphs of semigroups. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 45(1), 1-7.
8. Chakrabarty, I., Ghosh, S. and Sen, M. K. (2009). Undirected power graphs of semigroups. *Semigroup Forum*, 78, 410-426.
9. Cameron, P. J. (2010). The power graph of a finite group, II. *Journal of Group Theory*, 13, 779-783.
10. Cameron, P. J. and Ghosh, S. (2011). The power graph of a finite group. *Discrete Mathematics*, 311(3), 1220-1222.
11. Chattopadhyay, S., Panigrahi, P. and Atik, F. (2018). Spectral radius of power graphs on certain finite groups. *Indagationes Mathematicae*, 29(2), 730-737.
12. Gutman, I. (1978). The energy of a graph. *Berichte der Mathematisch-Statistischen Sektion im Forschungszentrum Graz*, 103, 1-22.
13. Gutman, I. and Zhou, B. (2006). Laplacian energy of a graph. *Linear Algebra and its Applications*, 414(1), 29-37.
14. Indual, G., Gutman, I. and Vijayakumar, A. (2008). On distance energy of graphs. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 60, 461-472.
15. Taşcı, D. (2011). *Lineer cebir*. (4). Ankara: Gazi Yayınevi, 45-47, 444-445.
16. Horn, R. A. and Johnson, C. R. (2012). *Matrix analysis*. (2). Cambridge: Cambridge University Press, 45, 52.

17. Zhang, F. (1999). *Matrix theory: basic results and techniques*. (1). New York: Springer-Verlag, 159.
18. Lütkepohl, H. (1996). *Handbook of matrices*. (1). Chichester: John Wiley & Sons, 268, 280.
19. Hwang, S. G. (2004). Cauchy's interlace theorem for eigenvalues of hermitian matrices. *The American Mathematical Monthly*, 111(2), 157-159.
20. Cvetkovski, Z. (2012). *Inequalities theorems, techniques and selected problems*. (1). Berlin: Springer-Verlag, 29-30.
21. Vasudev, C. (2006). *Graph theory with applications*. (1). New Delhi: Age International Publishers, 4-5, 21, 56-57.
22. Diestel, R. (2000). *Graph theory*. (Electronic edition). New York: Springer-Verlag, 2-5, 9, 14, 25.
23. Bapat, R. B. (2010). *Graphs and matrices*. (1). London: Springer-Verlag, 25, 45, 96.
24. Hungerford, T. W. (2003). *Algebra (graduate texts in mathematics)*. (12). New York: Springer-Verlag, 24, 31, 35, 50-51.
25. Abawajy, J., Kelarev, A. and Chowdhury, M. (2013). Power graphs: a survey. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*, 1(2), 125-147.
26. Oboudi, M. R. (2019). A new lower bound for the energy of graphs. *Linear Algebra and its Applications*, 580, 384-395.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : MUTLU VARLIOĞLU, Nurşah
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 11.06.1989, Safranbolu
 Medeni hali : Evli
 Telefon : 05545320141
 e-mail : nursah.mutlu@gazi.edu.tr



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Doktora	Gazi Üniversitesi / Matematik	Devam ediyor
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik	2015
Lisans	Ankara Üniversitesi / Matematik	2012
Lise	Safranbolu Lisesi	2006

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
-	-	-

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Büyükköse, Ş. ve Mutlu, N. (2016). Some bounds for the weighted energy. *Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 1(1), 62-65.
2. Büyükköse, Ş., Mutlu, N. ve Kaya, G. G. (2017). A note on the weighted wiener index and the weighted quasi wiener index. *Gazi University Journal of Science*, 30(4), 413-419.
3. Büyükköse, Ş., Başdaş, N. S. ve Mutlu, N. (2017). Bounds for the energy of $A(G)$, $L(G)$ using 2 adjacency. *Journal of Science and Arts*, 1(38), 49-60.

4. Büyükköse, Ş. ve Mutlu, N. (2017). Some bounds for the largest eigenvalue of weighted distance matrix and weighted distance energy. *Journal of Science and Arts*, 2(39), 245-256.
5. Büyükköse, Ş. ve Mutlu, N. (2015). The upper bound for the largest signless Laplacian eigenvalue of weighted graphs. *Gazi University Journal of Science*, 28(4), 709-714.
6. Büyükköse, Ş., Mutlu, N. ve Kaya, G. G. (2018). A note on the spectral radius of weighted signless Laplacian matrix. *Advances in Linear Algebra & Matrix Theory*, 8, 53-63.
7. Büyükköse, Ş., Mutlu, V. N. ve Altınışik, E. (2019). The distance matrix and the distance energy of the power graphs of C_n and D_{2n} . *Journal of Science and Arts*, 4(49), 823-838.

Hobiler

Resim yapmak, araştırma yapmak, film izlemek, müzik dinlemek, doğa yürüyüşü yapmak



GAZİ GELECEKTİR...