



**SONLU ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE GENEL SINIR KOŞULLU
2.MERTEBEDEN LİNEER DİNAMİK DENKLEMİN ÜRETTİĞİ
OPERATÖRÜN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ**

Nihal SESLİ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

OCAK 2016

Nihal SESLİ tarafından hazırlanan “SONLU ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE GENEL SINIR KOŞULLU 2.MERTEBEDEN LİNEER DİNAMİK DENKLEMİN ÜRETTİĞİ OPERATÖRÜN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Esra KIR ARPAT

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Başkan : Prof. Dr. Elgiz BAYRAM

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Üye : Doç. Dr. Cüneyt ÇEVİK

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Tez Savunma Tarihi: 27/01/2016

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Metin GÜRÜ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Nihal SESLİ

27.01.2016

SONLU ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE GENEL SINIR KOŞULLU 2. MERTEBEDEN
LİNEER DİNAMİK DENKLEMİN ÜRETTİĞİ OPERATÖRÜN SPEKTRAL

ÖZELLİKLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Nihal SESLİ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2016

ÖZET

Bu tezde, zaman skalasında, analizin temel kavramları verilmiş, sürekli ve diskret analiz arasındaki fark vurgulanmıştır. Sonlu zaman skalasında dinamik denklem tanımlanmış, denklemin ürettiği operatörün spektral özellikleri incelenmiştir. Ayrıca özfonksiyonlara göre seri biçiminde L_2 metriğine göre yakınsak açılım formülü elde edilmiştir.

Bilim Kodu : 204.1.095

Anahtar Kelimeler : Zaman skalası, delta ve nabla türevler, dinamik denklem, özdeğer, özfonksiyon

Sayfa Adedi : 39

Danışman : Doç. Dr. Esra KIR ARPAT

THE SPECTRAL PROPERTIES OF THE OPERATOR GENERATED BY THE
SECOND ORDER LINEAR DYNAMIC EQUATION WITH GENERAL BOUNDARY
CONDITION ON A FINITE TIME SCALE

(M. Sc. Thesis)

Nihal SESLİ

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2016

ABSTRACT

In this thesis, on a time scale, basic notions of analysis are given and the difference between continuous and discrete analysis are emphasized. Dynamic equation is defined on a finite time scale, spectral properties of the operator generated by the equation are examined. Furthermore, the formula of convergent expansion which is a form of series in terms of the eigen functions with respect to L_2 metric is obtained.

Science Code : 204.1.095

Key Words : Time scale, delta and nabla derivatives, dynamic equation, eigenvalue, eigenfunction.

Page Number : 39

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Esra KIR ARPAT

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımın her aşamasında yardım ve desteğini esirgemeyen, ilminden faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek aldığım, birlikte çalışmaktan onur duyduğum sayın hocam Doç. Dr. Esra Kır Arpat' a ve her zaman sabırla yanımda olan, hayatımın her anında desteklerini esirgemeyen sevgili aileme, özellikle annem Elif Sesli' ye teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Analizin Temel Tanımları	3
2.2. Sürekli Analiz ve Diskrit Analiz	7
2.3. Zaman Skalası.....	7
2.4. Zaman Skalasında Türev.....	12
2.5. Zaman Skalasında İntegral.....	16
2.6. Dinamik Denklem	21
3. İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİNAMİK DENKLEMİN ÜRETTİĞİ OPERATÖR	23
3.1. İkinci Mertebeden Lineer Dinamik Denklemin Ürettiği Operatörün Tanımı ve Özellikleri	23
3.2. Dinamik Denklemin Ürettiği Operatörün Green Fonksiyonu	26
4. SONLU ZAMAN SKALASI ARALIĞI ÜZERİNDE ÖZFONKSİYONLAR CİNSİNDEN AÇILIM.....	29
4.1. Parseval Eşitliği	29
4.2. Özfonksiyonlar Cinsinden Düzgün Yakınsak Açılım.....	30
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	35
KAYNAKLAR	37

Sayfa

ÖZGEÇMİŞ	39
----------------	----

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	Negatif olmayan tam sayılar kümesi
$h\mathbb{Z}$	$\{hk: k \in \mathbb{Z}\}$
$\mathbb{K}_q$	$\{q^k: k \in \mathbb{Z}\}$
$\mathbb{T}$	Zaman skalası
σ	İleri sıçrama operatörü
ρ	Geri sıçrama operatörü
Δ	Delta türev operatörü
∇	Nabla türev operatörü
$\mathcal{H}$	Hilbert uzayı
$\langle ., . \rangle$	İç çarpım
λ	Spektral parametre
$\mu(t), \nu(t)$	Granül fonksiyonları
$W_t(y, z)$	y ve z fonksiyonlarının Wronskian'ı
L^*	L operatörünün adjointi

1. GİRİŞ

Klasik analizde, bir fonksiyonun türev ve integrali reel sayılar kümesinde veya onun bir alt aralığında tanımlanır.

1990 yılında Alman matematikçiler Bernd Aulbach ve Stefan Hilger tanım kümesi zaman skalası olarak isimlendirilen fonksiyonlar için türev kavramını tanımlamışlardır. Bu türevi klasik türevden farklı, delta türev olarak isimlendirmişlerdir. Zaman skalası $\mathbb{T}$, reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ nin boş olmayan kapalı bir alt kümesi olarak tanımlanır. Bu analiz $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ halinde klasik sürekli analizi ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ halinde de klasik diskrit analizi vermektedir. Çalışmalardan, genellikle zaman skalası $\mathbb{T}$ kümesi, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{Z}$ den farklıdır. Fonksiyonun bağlı olduğu değişken zamanı gösterdiğinden $\mathbb{T}$ tanım kümesine zaman skalası adı verilmiştir.

İlk olarak analizin temel tanımları verilmiş, önemli teoremler örneklerle açıklanmıştır. Dinamik denklemin ürettiği operatörün tanımı yapıp, bu operatörün selfadjoint ve pozitif olduğu ispatlanmıştır. Operatörün Green fonksiyonu tanıtılıp, Parseval eşitliği ifade edilmiştir [8]. Son olarak bir ξ fonksiyonunun özfonksiyonlar cinsinden düzgün yakınsak açılımı elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, zaman skalasının bazı temel tanımları ve önemli teoremleri ifade edildikten sonra, sonlu zaman skalası üzerinde genel sınır koşullu 2. mertebeden lineer dinamik denklemin ürettiği operatör incelenecektir.

2.1. Analizin Temel Tanımları

2.1.1. Tanım

H, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\langle , \rangle : H \times H \rightarrow F$ fonksiyonu

1. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
2. $\langle ax, y \rangle = a\langle x, y \rangle \quad (a \in F)$
3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
4. $\langle x, x \rangle \geq 0 ; \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

şartlarını sağlıyorsa bu fonksiyona iç çarpım (veya iç çarpım fonksiyonu) denir.

Üzerinde iç çarpım fonksiyonunun tanımlandığı vektör uzayına iç çarpım uzayı denir.

İç çarpım uzayı $(H, \langle , \rangle)$ veya kısaca H ile gösterilir.

3. şarttaki çizgi kompleks eşleniği gösterdiğine göre H reel lineer uzay ise yani $F = \mathbb{R}$ ise $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ dir [1].

2.1.2. Tanım

H , bir lineer uzay olsun. $\| \cdot \| : H \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim.

Bu fonksiyon için

1. $\|x\| \geq 0 ; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|ax\| = |a|\|x\| \quad (a \in F)$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen eşitsizliği)

şartları sağlanıyorsa $\| \cdot \|$ fonksiyonuna H de (veya H üzerinde) norm denir. Normlu uzaylar genellikle $(H, \| \cdot \|)$ ile gösterilir [1].

2.1.3. Tanım

H bir iç çarpım uzayı ve $\| \cdot \|$ iç çarpım normu olsun.

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$$

olarak tanımlanırsa (H, d) bir metrik uzay olur. İç çarpım normuyla tanımlanan bu d metriğine göre H iç çarpım uzayı tam ise H ya Hilbert uzayı denir [1].

2.1.4. Tanım

L ve L' aynı bir F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $T: L \rightarrow L'$ operatörü her $x, y \in L$,

$a \in F$ için

$$T(x + y) = T(x) + T(y)$$

ve

$$T(ax) = aT(x)$$

şartlarını sağlıyorsa T ye lineer operatör denir [1].

2.1.5. Tanım

L ve L' normlu uzay ve $T: L \rightarrow L'$ lineer bir operatör olsun. Her $x \in L$ ve bir $K \geq 0$ reel sayısı için

$$\|T(x)\| \leq K\|x\|$$

oluyorsa T ye sınırlı lineer operatör denir [1].

2.1.6. Tanım

H Hilbert uzayı ve L bu uzayda lineer operatör olmak üzere L nin tanım kümesi $D(L)$ şeklinde gösterilir. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi, X topolojik vektör uzayı, $L(X)$, X de tanımlı lineer operatörlerin uzayı olsun.

$L \in L(X)$ ve $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ için $(L - \lambda_0 I)x = 0$ denkleminin $x = 0$ aşıkâr çözümünden başka bir $x \neq 0$ çözümü bulunursa, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ sayısına L operatörünün özdeğeri, bu denklemin her bir $x \neq 0$ çözümüne ise L operatörünün λ_0 özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu denir [2].

2.1.7. Tanım

E bir vektör uzayı, ϕ E üzerinde reel veya kompleks bir yapı olsun. ξ , E üzerindeki cebirsel işlemlere göre sürekli bir topoloji,

- x, y için $x + y$ sürekli fonksiyon

- λ, x için λx sürekli fonksiyon

olmak üzere ϕ vektör uzayı, uygun bir topoloji ile birlikte topolojik vektör uzayını oluşturur [10].

2.1.8. Tanım

H Hilbert uzayı ve L bu uzayda lineer operatör olmak üzere L nin tanım kümesi $D(L)$, H Hilbert uzayında yoğun olsun. $f \in D(L)$ için

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, L^* g \rangle$$

eşitliğini sağlayan L^* operatörüne L nin adjoint operatörü denir [2].

2.1.9. Tanım

Eğer $L = L^*$ ise L ye self-adjoint operatör adı verilir [2].

2.1.10. Tanım

L operatörünün tanım kümesi olan $D(L)$ kümesi D Hilbert uzayında yoğun bir alt küme olsun. Eğer her $f, g \in D(L)$ için

$$(Lf, g) = (f, Lg)$$

oluyorsa L lineer operatörüne simetrik operatör denir [2].

2.1.11. Tanım

Her sınırlı kümeyi pre-kompakt kümeye dönüştüren operatöre kompakt operatör denir [2].

2.1.12. Tanım

H_1 ve H_2 Hilbert uzayları ve $L \in L(H_1, H_2)$ olsun. Her $x \in H_1, y \in H_2$ için

$$\langle Lx, y \rangle = \langle x, L^* y \rangle$$

olacak biçimde tanımlı sürekli lineer L^* operatörüne Hilbert – Adjoint (veya Hermit-adjoint) operatörü adı verilir [2].

2.1.1. Teorem

H bir Hilbert uzayı ve $L: H \rightarrow H$ bir kompakt lineer Hilbert-adjoint operatör olsun. Bu durumda her $x \in H$ için Lx vektörü L operatörünün ortonormal özvektörleri sistemine göre yakınsak Fourier serisi şeklinde yazılabilir [2].

2.1.13. Tanım

$X \neq \{ \}$ kompleks normlu bir uzay $L: D(L) \subset X \rightarrow Y$ lineer bir operatör olsun. $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere $R_\lambda(L) = (L - \lambda I)^{-1}$ operatörüne L nin rezolvent operatörü ya da kısaca rezolventi denir [2].

2.1.14. Tanım

$R_\lambda(L)$ mevcut olmayacak şekilde λ kompleks sayılarının cümlesine L operatörünün diskret spektrumu ya da nokta spektrumu adı verilir [2].

2.1.15. Tanım

Boş olmayan bir $X \subset \mathbb{R}$ alt kümesi verilsin.

- Her $x \in X$ için $x \leq b$ olacak şekilde bir $b \in \mathbb{R}$ sayısı varsa, X kümesine üstten sınırlıdır denir ve b sayısına da X kümesinin bir üst sınırı denir.
- Her $x \in X$ için $a \leq x$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{R}$ sayısı varsa, X kümesine alttan sınırlıdır denir ve a sayısına da X kümesinin bir alt sınırı denir.
- X hem alttan hem üstten sınırlı ise (yani her $x \in X$ için $a \leq x \leq b$ olacak şekilde a ve b sayıları varsa) X e sınırlı küme denir.
- Her $x \in X$ için ve $x \leq M$ olacak şekilde bir $M \in X$ elemanı varsa, M ye X kümesinin maksimal (veya en büyük) elemanı denir ve $M = \max\{x: x \in X\}$ şeklinde gösterilir.
- Her $x \in X$ için $m \leq x$ olacak şekilde bir $m \in X$ elemanı varsa, m ye X kümesinin minimal (veya en küçük) elemanı denir ve $m = \min\{x: x \in X\}$ şeklinde gösterilir [3].

2.1.16. Tanım

- a) $X \subset \mathbb{R}$ alt kümesi üstten sınırlı ise $B = \{b \in \mathbb{R} : b, X \text{ in üst sınırıdır}\}$ kümesinin üst sınırlarının en küçüğüne X kümesinin en küçük üst sınırı veya supremumu denir ve $\sup X$ (veya eküs X) ile gösterilir.
- b) $X \subset \mathbb{R}$ alt kümesi alttan sınırlı ise $A = \{a \in \mathbb{R} : a, X \text{ in alt sınırıdır}\}$ kümesinin alt sınırlarının en büyüğüne X kümesinin en büyük alt sınırı veya infimumu denir ve $\inf X$ (veya ebas X) ile gösterilir [3].

2.2. Sürekli Analiz ve Diskrit Analiz

Sürekli analiz tanım kümesi reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{R}$ nin bir aralığı olan fonksiyonların analizini (türevini, integralini vs.), diskrit analiz de tanım kümesi tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}$ veya $h > 0$ bir reel sayı olmak üzere " h – sayılar" kümesi

$$h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}$$

olan fonksiyonların analizini yapar.

Diğer bir diskrit analiz de tanım kümesi $q > 1$ bir reel sayı olmak üzere " q – sayılar" kümesi

$$q^{\mathbb{Z}} = \{q^k : k \in \mathbb{Z}\}$$

olan fonksiyonların analizidir. Belirtelim ki $h\mathbb{Z}$ nin elemanları bir aritmetik dizi, $q^{\mathbb{Z}}$ nin elemanları da bir geometrik dizi oluşturmaktadır [4].

2.3. Zaman Skalası

2.3.1. Tanım

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin herhangi bir kapalı alt kümesine bir zaman skalası denir ve $\mathbb{T}$ ile gösterilir. Bu küme üzerindeki metrik $\mathbb{R}$ deki alışılmış metrik olarak alınacaktır.

Yani $s, t \in \mathbb{T}$ için

$$d(s, t) = |s - t|$$

olarak alınacaktır [6].

Örnek

$\mathbb{R}, \{a\}, \mathbb{Z}, [a, b], h\mathbb{Z}, [1, 4] \cup \{6\}, [0, 1] \cup [3, 4], \mathbb{K}_q \cup \{0\}, \mathbb{N}, \mathbb{N}_0$ kümeleri kapalı kümelerdir.

Bu kümeleri zaman skalalarına örnek olarak verebiliriz.

$\mathbb{Q}, (a, b], (a, b)$ zaman skalası olmayan kümelerdir.

2.3.2. Tanım

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $t \in \mathbb{T}$ için

$$\sigma: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$$

$$t \rightarrow \sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T}: s > t\} \text{ veya eğer } \sup\mathbb{T} = t \Rightarrow \sigma(t) = t$$

ile tanımlı σ operatörüne ileri sıçrama operatörü denir [6].

Örnek

$$\mathbb{T} = \mathbb{Z}, \quad \sigma: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} n \rightarrow \sigma(n) &= \inf\{s \in \mathbb{Z}: s > n\} \\ &= \inf\{n+1, n+2, n+3, \dots\} \\ &= n+1 \end{aligned}$$

Örnek

$$\mathbb{T} = \{k: k \in \mathbb{Z} \text{ ve } 1 \leq k \leq 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\sigma(1) = \inf\{s \in \mathbb{T}: s > 1\} = \inf\{2, 3, 4\} = 2$$

$$\sigma(2) = 3, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 4$$

Örnek

$$\mathbb{T} = \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \text{ için}$$

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \inf\{s \in \mathbb{R}: s > t\} \\ &= \inf(t, \infty) \\ &= t \end{aligned}$$

2.3.3. Tanım

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası, $t \in \mathbb{T}$ için

$$\rho: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$$

$$t \rightarrow \rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\} \text{ veya eğer } \inf \mathbb{T} = t \Rightarrow \rho(t) = t$$

ile tanımlı ρ operatörüne geri sıçrama operatörü denir [6].

Örnek

$$\mathbb{T} = \mathbb{Z}, \rho: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} n \rightarrow \rho(n) &= \sup\{s \in \mathbb{Z} : s < n\} \\ &= \sup\{\dots, n-3, n-2, n-1\} \\ &= n-1 \end{aligned}$$

Örnek

$$\mathbb{T} = \{k : k \in \mathbb{Z} \text{ ve } 1 \leq k \leq 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\rho(4) = 3, \rho(3) = 2, \rho(2) = 1, \rho(1) = 1$$

Örnek

$\mathbb{T} = \left\{\frac{1}{3^n}, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ bir zaman skalası olsun $t \in \mathbb{T}$ için en az bir $m \in \mathbb{N}$ vardır ve

$$t = \frac{1}{3^m} \text{ dir.}$$

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}, \quad \sigma(t) = \left(\frac{1}{3^m}\right) = \frac{1}{3^{m-1}} = \frac{3}{3^m} = 3t$$

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}, \quad \rho(t) = \rho\left(\frac{1}{3^m}\right) = \frac{1}{3^{m+1}} = \frac{1}{3 \cdot 3^m} = \frac{1}{3}t$$

2.3.4. Tanım

Bir $\mathbb{T}$ zaman skalası verildiğinde bir $t \in \mathbb{T}$ noktasının karakterizasyonu şöyledir;

- $\sigma(t) = t$ ise $t \in \mathbb{T}$ elemanına sağ yoğun denir.
- $\sigma(t) > t$ ise $t \in \mathbb{T}$ elemanına sağ saçılımlı denir.

- $\rho(t) = t$ ise $t \in \mathbb{T}$ elemanına sol yoğun denir.
- $\rho(t) < t$ ise $t \in \mathbb{T}$ elemanına sol saçılımlı denir.
- $\rho(t) = t = \sigma(t)$ ise $t \in \mathbb{T}$ elemanına yoğun denir.
- $\rho(t) < t < \sigma(t)$ ise $t \in \mathbb{T}$ elemanına izole denir [6].

2.3.5. Tanım

$$\mu: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+ := [0, \infty)$$

$$t \rightarrow \mu(t) = \sigma(t) - t$$

ve

$$\nu: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+ := [0, \infty)$$

$$t \rightarrow \nu(t) = t - \rho(t)$$

ile tanımlı μ ve ν fonksiyonlarına granül fonksiyonları denir [6].

Örnek

Aşağıdaki dört durumu inceleyelim.

1. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alınırsa her $t \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \inf\{s \in \mathbb{R}: s > t\} \\ &= \inf(t, \infty) \\ &= t \end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \sup\{s \in \mathbb{R}: s < t\} \\ &= \sup(-\infty, t) \\ &= t \end{aligned}$$

olur. Burada her $t \in \mathbb{R}$ noktası yoğundur. Her $t \in \mathbb{T}$ için μ ve ν fonksiyonu $\mu(t) = 0$ ve $\nu(t) = 0$ olarak bulunur.

2. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alınırsa her $t \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \inf\{s \in \mathbb{Z}: s > t\} \\ &= \inf(t + 1, t + 2, t + 3, \dots) \\ &= t + 1 \end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{Z}: s < t\}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup(\dots, t-3, t-2, t-1) \\
&= t-1
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Burada her $t \in \mathbb{Z}$ noktası izole noktadır. Her $t \in \mathbb{T}$ için μ ve ν fonksiyonları

$$\mu(t) = t + 1 - t = 1$$

$$\nu(t) = t - (t-1) = 1$$

olur.

3. $\mathbb{T} = \{3^n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ kümesini düşünelim. Yığılma noktası olan 0, kümeye dahil olduğu için kapalı kümedir. $t = 3^n$ olacak şekilde en az bir $n \in \mathbb{Z}$ vardır. O halde

$$\sigma(t) = \sigma(3^n) = 3^{n+1} = 3t$$

$$\rho(t) = \rho(3^n) = 3^{n-1} = \frac{1}{3}t$$

dır. Burada her $t \in \mathbb{T}$ noktası izole noktadır. Her $t \in \mathbb{T}$ için μ ve ν fonksiyonları

$$\mu(t) = 3t - t = 2t$$

$$\nu(t) = t - \frac{1}{3}t = \frac{2t}{3}$$

olarak bulunur.

4. $\mathbb{T} = \{\sqrt{n} : n \in \mathbb{N}_0\}$ olsun. $t = \sqrt{n}$ olacak şekilde en az bir $n \in \mathbb{N}_0$ vardır. O halde

$$\sigma(t) = \sqrt{n+1} = \sqrt{t^2 + 1}$$

$$n = 0 \text{ için } \rho(0) = 0, n \geq 1 \text{ için } \rho(t) = \sqrt{t^2 - 1}$$

olur.

2.3.6. Tanım

$\mathbb{T}$ zaman skalası verilmiş olsun.

$$\mathbb{T}^K = \begin{cases} \mathbb{T} \setminus \{m\}; & \text{eğer } \sup \mathbb{T} = m \text{ ve } m \text{ sol saçılımlı ise} \\ \mathbb{T}; & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

$$\mathbb{T}_K = \begin{cases} \mathbb{T} \setminus \{m\}; & \text{eğer } \inf \mathbb{T} = m \text{ ve } m \text{ sağ saçılımlı ise} \\ \mathbb{T}; & \text{diğer hallerde} \end{cases} [6].$$

2.3.7. Tanım

$\mathbb{T}$ zaman skalası $t_n, t \in \mathbb{T}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n > N$ iken $d(t_n, t) < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $N_\varepsilon = N$ doğal sayısı varsa t_n dizisi t noktasına yakınsaktır denir ve

$\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow t$ veya $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$

biçiminde gösterilir [6].

2.3.8. Tanım

$\mathbb{T}$ zaman skalası ve $f, t_0 \in \mathbb{T}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için her $t \in u_{\delta}(t_0)$ iken $|f(t) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $u_{\delta}(t_0)$ (en az bir $\delta > 0$ için $u = (t - \delta, t + \delta)_{\mathbb{T}} \cap \mathbb{T}$) komşuluğu varsa f fonksiyonunun $t_0 \in \mathbb{T}$ noktasında limiti vardır ve

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = L$$

biçiminde gösterilir [6].

2.3.9. Tanım

Bir $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve bir $t \in \mathbb{T}$ noktası verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için her $s \in u_{\delta}(t)$ iken $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $u_{\delta}(t) = (t - \delta, t + \delta)_{\mathbb{T}} \cap \mathbb{T}$ komşuluğu varsa f fonksiyonuna $t \in \mathbb{T}$ noktasında süreklidir denir [6].

2.4. Zaman Skalasında Türev

2.4.1. Tanım

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin ve $t \in \mathbb{T}^K$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için t nin en az bir $u_{\delta}(t)$ komşuluğu vardır öyle ki her $s \in u_{\delta}(t)$ için

$$\left| [f(\sigma(t)) - f(s)] - f^{\Delta}(t) \cdot [\sigma(t) - s] \right| \leq \varepsilon \cdot |\sigma(t) - s|$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f^{\Delta}(t)$ ye f nin t noktasındaki Delta türevi (Hilger türevi) denir [6].

2.4.1. Teorem

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $t \in \mathbb{T}^K$ verilmiş olsun.

1. f, t de sürekli ve t sağ saçılımı nokta ise f fonksiyonu t noktasında türevlenebilirdir ve

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t}$$

$$= \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

dir.

2. t sağ yoğun nokta ve $\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$ limiti mevcut ise

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

dir [6].

Örnek

Eğer $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = a$ ise $f^\Delta(t) = 0$ olur. Burada $a \in \mathbb{R}$ sabittir. Gerçekten $\varepsilon > 0$ ve $s \in \mathbb{T}$ için

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - 0(\sigma(t) - s)| = |0 - 0| = 0 \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

olması sebebiyle doğrudur. Yani sabitin türevi 0 dır.

Örnek

Eğer $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = t$ ise $f^\Delta(t) = 1$ olur. Gerçekten $\varepsilon > 0$ ve her $s \in \mathbb{T}$ için

$$\begin{aligned} |f(\sigma(t)) - f(s) - 1 \cdot (\sigma(t) - s)| &= |\sigma(t) - s - (\sigma(t) - s)| \\ &= 0 \leq \varepsilon|\sigma(t) - s| \end{aligned}$$

olur.

Örnek

Eğer $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = t^2$ ise

$$\begin{aligned} f^\Delta(t) &= \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} \\ &= \lim_{s \rightarrow t} \frac{(\sigma(t))^2 - s^2}{\sigma(t) - s} \\ &= \lim_{s \rightarrow t} (\sigma(t) + s) \\ &= \sigma(t) + t \end{aligned}$$

$$\mathbb{T} = \mathbb{Z} \Rightarrow \sigma(t) = t + 1, \quad (t^2)^\Delta = 2t + 1$$

$$\mathbb{T} = \mathbb{R} \Rightarrow \sigma(t) = t, \quad (t^2)^\Delta = 2t$$

2.4.2. Teorem

Kabul edelim ki $f, g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}^K$ noktasında türeve sahip olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

i) $f + g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ toplamı t noktasında türevlenebilirdir ve

$$(f + g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) + g^\Delta(t)$$

dir.

ii) Keyfi bir a sabiti için $af: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ çarpımı t noktasında türevlenebilirdir ve

$$(af)^\Delta(t) = af^\Delta(t)$$

dir.

iii) $f \cdot g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ çarpımı t noktasında türevlenebilirdir ve

$$\begin{aligned} (f \cdot g)^\Delta(t) &= f^\Delta(t)g(t) + f(\sigma(t)) \cdot g^\Delta(t) \\ &= f(t)g^\Delta(t) + f^\Delta(t) \cdot g(\sigma(t)) \end{aligned}$$

dir. Burada, $f \cdot g = g \cdot f$ olduğuna dikkat edilmelidir.

iv) $f(t) \cdot f(\sigma(t)) \neq 0$ olmak üzere $\frac{1}{f}$ fonksiyonu t noktasında türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{1}{f}\right)^\Delta(t) = -\frac{f^\Delta(t)}{f(t) \cdot f(\sigma(t))}$$

dir.

v) $g(t) \cdot g(\sigma(t)) \neq 0$ olmak üzere $\frac{f}{g}$ fonksiyonu t noktasında türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\Delta(t) = \frac{f^\Delta(t)g(t) - f(t)g^\Delta(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

olur [6].

2.4.2. Tanım

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $t \in \mathbb{T}_K$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için t nin en az bir $u_\delta(t)$ komşuluğu var ve her $s \in u_\delta(t)$ için

$$\left| [f(s) - f(\rho(t))] - f^\nabla(t) \cdot (s - \rho(t)) \right| \leq \varepsilon \cdot |s - \rho(t)|$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f^\nabla(t)$ ye f nin t noktasındaki nabla türevi denir [6].

2.4.3. Teorem

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. $t \in \mathbb{T}_K$ verilmiş olsun.

1. f, t noktasında sürekli ve t sol saçılımlı nokta ise f fonksiyonu t noktasında türevlenebilirdir ve

$$\begin{aligned} f^\nabla(t) &= \frac{f(t) - f(\rho(t))}{t - \rho(t)} \\ &= \frac{f(t) - f(\rho(t))}{v(t)} \end{aligned}$$

dir.

2. t sol yoğun nokta ve $\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$ limiti mevcut ise

$$f^\nabla(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

dir [6].

Örnek

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $f^\nabla(t) = f'(t)$ dir.

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$\begin{aligned} f^\nabla(t) &= \frac{f(t) - f(\rho(t))}{t - \rho(t)} \\ &= \frac{f(t) - f(t-1)}{t - (t-1)} \\ &= f(t) - f(t-1) \\ &= \nabla f(t) \end{aligned}$$

Burada ∇ geri fark operatörüdür.

2.4.4. Teorem

Kabul edelim ki ; $f, g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}_K$ noktasında türeve sahip olsunlar. O zaman, aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

i) $f + g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ toplamı t noktasında nabla türevlenebilirdir ve

$$(f + g)^\nabla(t) = f^\nabla(t) + g^\nabla(t)$$

dir.

ii) Keyfi bir a sabiti için, $af: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ çarpımı t noktasında nabla türevlenebilirdir ve

$$(af)^\nabla(t) = af^\nabla(t)$$

dir.

iii) $f \cdot g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ çarpımı t noktasında nabla türevlenebilirdir ve

$$\begin{aligned} (f \cdot g)^\nabla(t) &= f^\nabla(t) \cdot g(t) + f(\rho(t)) \cdot g^\nabla(t) \\ &= f(t) \cdot g^\nabla(t) + f^\nabla(t) \cdot g(\rho(t)) \end{aligned}$$

dir. Burada, $f \cdot g = g \cdot f$ olduğuna da dikkat edilmelidir.

iv) $f(t) \cdot f^\rho(t) \neq 0$ olmak üzere, $\frac{1}{f}$ fonksiyonu t noktasında nabla türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{1}{f}\right)^\nabla(t) = -\frac{f^\nabla(t)}{f(t) \cdot f^\rho(t)}$$

dır.

v) $g(t)g^\rho(t) \neq 0$ olmak üzere, $\frac{f}{g}$ fonksiyonu t noktasında nabla türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\nabla(t) = \frac{f^\nabla(t)g(t) - f(t)g^\nabla(t)}{g(t)g^\rho(t)}$$

olur [6].

2.5. Zaman Skalasında İntegral

2.5.1. Tanım

$\mathbb{T}$ bir zaman skalamı ve $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu $\mathbb{T}$ nin tüm sağ yoğun noktalarında sürekli ve sol yoğun noktalarında sonlu bir sol limite sahip ise f fonksiyonuna $\mathbb{T}$ üzerinde rd- sürekli denir.

Benzer şekilde $\mathbb{T}$ nin tüm sol yoğun noktalarında sürekli ve sağ yoğun noktalarında sonlu bir sağ limite sahip fonksiyonlara $\mathbb{T}$ üzerinde ld-sürekli denir [6].

2.5.1. Teorem

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ rd-sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda D türevlenebilme bölgesinde tanımlı $F^\Delta(t) = f(t)$ özelliğine sahip bir $F(t)$ fonksiyonu vardır.

Burada tanımlanan $F(t)$ fonksiyonuna $f(t)$ nin anti-türevi denir [6].

2.5.2. Tanım

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve F de f nin bir anti-türevi olsun. Bu durumda, c keyfi bir sabit olmak üzere,

$$\int f(t) \Delta t = F(t) + c$$

şeklinde tanımlanan ifadeye f fonksiyonunun belirsiz delta integrali denir [6].

Örnek

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ zaman skalası verilmiş olsun. $(a^t)^\Delta$ türevinin eşiti nedir?

$$\begin{aligned} f^\Delta(t) &= (a^t)^\Delta \\ &= \Delta f(t) \\ &= a^{t+1} - a^t \\ &= a^t(a - 1) \end{aligned}$$

$$\frac{(a^t)^\Delta}{a - 1} = a^t \Rightarrow \left(\frac{a^t}{a - 1} \right)^\Delta = a^t$$

O halde

$$\int a^t \Delta t = \frac{a^t}{a - 1} + c$$

olur.

Örnek

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ zaman skalası verilmiş olsun.

$$\begin{aligned} \left[(t + a)^{(k)} \right]^\Delta &= k \cdot (t + a)^{(k-1)} \\ \left[(t + a)^{(k+1)} \right]^\Delta &= (k + 1) \cdot (t + a)^{(k)} \\ \left[\frac{(t + a)^{(k+1)}}{k + 1} \right]^\Delta &= (t + a)^{(k)}, \quad k \neq -1 \end{aligned}$$

O halde

$$\int (t + a)^{(k)} \Delta t = \frac{(t + a)^{(k+1)}}{k + 1} + c$$

olur.

2.5.3. Tanım

Kabul edelim ki $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun her $t, t_0 \in \mathbb{T}, r \in \mathbb{T}^K$ için $F^\Delta(t) = \int_{t_0}^t f(r) \Delta r$ olacak şekilde $F: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ anti-türevi olsun. Bu durumda $a, b \in \mathbb{T}$ olmak üzere f nin a dan b ye belirli integrali

$$\int_a^b f(t) \Delta t = F(b) - F(a)$$

olarak tanımlanır [6].

2.5.2 Teorem (Δ – İntegralinin Özellikleri)

$a, b, c \in \mathbb{T}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, f, g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ de Δ – integrallenebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$1. \int_a^b [\alpha f(t) + \beta g(t)] \Delta t = \alpha \int_a^b f(t) \Delta t + \beta \int_a^b g(t) \Delta t$$

$$2. \int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^c f(t) \Delta t + \int_c^b f(t) \Delta t$$

3. Kısmi İntegrasyon Formülü

$$\begin{aligned} \int_a^b f^\Delta(t) g(t) \Delta t &= (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f(\sigma(t)) g^\Delta(t) \Delta t \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(\sigma(t)) g^\Delta(t) \Delta t \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) g^\Delta(t) \Delta t &= (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t) g(t) \Delta t \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f^\Delta(t) g(t) \Delta t \end{aligned}$$

şeklindedir.

4. Eğer $f(t) \geq 0, t \in [a, b]_{\mathbb{T}}$ ise $\int_a^b f(t) \Delta t \geq 0$ dır.

5. Eğer f, Δ – integrallenebilir ise $|f(t)|$ de Δ – integrallenebilirdir ve

$$\left| \int_a^b f(t) \Delta t \right| \leq \int_a^b |f(t)| \Delta t$$

dir [6].

2.5.3. Teorem

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon olsun. Eğer $t \in \mathbb{T}$ ve $\sigma(t) > t$ ise

$$\int_t^{\sigma(t)} f(s) \Delta s = f(t)[\sigma(t) - t]$$

eşitliği sağlanır [6].

Örnek

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}, a, b \in \mathbb{Z}, a < b, t_0 \in \mathbb{Z}$ ve $t_0 < a$ olsun.

$$F(t) = \sum_{k=t_0}^{t-1} f(k)$$

olarak tanımlansın. $f, F: \mathbb{T} = \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F^\Delta(t) &= \Delta F(t) \\ &= F(t+1) - F(t) \\ &= \sum_{k=t_0}^t f(k) - \sum_{k=t_0}^{t-1} f(k) \\ &= f(t) \end{aligned}$$

dir. O halde

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \Delta t &= F(b) - F(a) \\ &= \sum_{k=t_0}^{b-1} f(k) - \sum_{k=t_0}^{a-1} f(k) \\ &= \sum_{k=a}^{b-1} f(k) \end{aligned}$$

bulunur.

2.5.4. Teorem

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ld-sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda D türevlenebilme bölgesinde tanımlı

$F^\nabla(t) = f(t)$ özelliğine sahip bir $F(t)$ fonksiyonu vardır [6].

2.5.4. Tanım

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve F de f nin bir anti-türevi olsun. Bu durumda, c keyfi bir sabit olmak üzere,

$$\int f(t) \nabla t = F(t) + c$$

şeklinde tanımlanan ifadeye f fonksiyonunun belirsiz nabla integrali denir [6].

2.5.5. Tanım

Kabul edelim ki, $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $t, t_0 \in \mathbb{T}, r \in \mathbb{T}_K$ için $F^\nabla(t) := \int_{t_0}^t f(r) \nabla r$ olacak şekilde $F: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ anti-türevi varolsun. Bu durumda $a, b \in \mathbb{T}$ olmak üzere f nin a dan b ye integrali alınır

$$\int_a^b f(t) \nabla t = F(b) - F(a)$$

olarak tanımlanır [6].

2.5.5. Teorem (∇ – integralinin özellikleri)

$a, b, c \in \mathbb{T}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, f, g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ de ∇ – integrallenebilir fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda

$$1. \int_a^b [\alpha f(t) + \beta g(t)] \nabla t = \alpha \int_a^b f(t) \nabla t + \beta \int_a^b g(t) \nabla t$$

$$2. \int_a^b f(t) \nabla t = \int_a^c f(t) \nabla t + \int_c^b f(t) \nabla t$$

3. Kısmi İntegrasyon Formülü

$$\int_a^b f(\rho(t)) g^\nabla(t) \nabla t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\nabla(t) g(t) \nabla t$$

$$\int_a^b f(t) g^\nabla(t) \nabla t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\nabla(t) g(\rho(t)) \nabla t$$

şeklindedir [6].

2.5.6. Tanım

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, sağdan yoğun sürekli (rd-sürekli) fonksiyonların kümesi

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

ile gösterilir [6].

2.5.7. Tanım

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı diferansiyellenebilir ve türevi rd-sürekli fonksiyonların kümesi

$$C_{rd}^1 = C_{rd}^1(\mathbb{T}) = C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

ile gösterilir [6].

2.6. Dinamik Denklem

2.6.1. Tanım

$f: \mathbb{T} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ olsun.

$$y^\Delta = f(t, y, y^\sigma) \tag{2.1}$$

diferensiyel denklemine birinci mertebeden dinamik denklem denir [6].

2.6.2. Tanım

$$f(t, y, y^\sigma) = f_1(t) + f_2(t)$$

ve

$$f(t, y, y^\sigma) = f_1(t)y^\sigma + f_2(t)$$

olacak şekilde f_1 ve f_2 fonksiyonları var ise Eş. (2.1) denklemine lineer denklem adı verilir [6].

2.6.3. Tanım

$y: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}^K$ için

$$y^\Delta(t) = f(t, y(t), y(\sigma(t)))$$

denklemini sağlıyorsa y ye Eş. (2.1) denkleminin bir çözümü denir. Eş. (2.1) denkleminin genel çözümü, bütün çözümlerinin kümesi olarak tanımlanır [6].

2.6.4. Tanım

$t_0 \in \mathbb{T}$ ve $y_0 \in \mathbb{R}$ olsun.

$$y^\Delta = f(t, y, y^\sigma), \quad y(t_0) = y_0$$

problemi başlangıç değer problemi olarak adlandırılır ve y , Eş. (2.1) denkleminin $y(t_0) = y_0$ şartını sağlayan çözümü adını alır [6].

2.6.5. Tanım

$$y^{\Delta\Delta}(t) + p(t)y^\Delta(t) + q(t)y(t) = f(t) \quad (2.2.)$$

denklemine $p, q, f \in C_{rd}$ olmak üzere 2. mertebeden lineer dinamik denklem denir [6].

2.6.6. Tanım

$L: C_{rd}^2 \rightarrow C_{rd}$ için

$Ly(t) = y^{\Delta\Delta}(t) + p(t)y^\Delta(t) + q(t)y(t)$ olmak üzere

$t \in \mathbb{T}^K$ için Eş. (2.2.) denklemini $Ly = f$ biçiminde yazabiliriz. $y \in C_{rd}^2$ ve her $t \in \mathbb{T}^{K^2}$ için $Ly(t) = f(t)$ ise $y, Ly = f$ probleminin $\mathbb{T}$ de bir çözümüdür.

Gerçekten L bir lineer operatör olduğu için Eş. (2.2.) denklemine bir lineer denklem adı verilir.

Eğer her $t \in \mathbb{T}^{K^2}$ için $f(t) = 0$ ise $Ly = 0$ homogen dinamik denklemi elde edilir. Diğer durumlarda ise $Ly = f$ biçiminde homogen olmayan dinamik denklem elde edilir [6].

3. İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİNAMİK DENKLEMİN ÜRETTİĞİ OPERATÖR

3.1. İkinci Mertebeden Lineer Dinamik Denklemin Ürettiği Operatörün Tanımı ve Özellikleri

$$-[y^\Delta(t)]^\nabla + [q(t) + \lambda]y(t) = f(t), \quad t \in [a, b] \quad (3.1)$$

$$y(a) - hy^\Delta(a) = 0, \quad y(b) + Hy^\Delta(b) = 0 \quad (3.2)$$

sınır değer problemi yardımıyla

$$L_\nabla^2[a, b] := \left\{ y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_a^b y^2(t) \nabla t < \infty \right\}$$

uzayında üretilen L operatörünü göz önüne alalım.

Aşağıdaki 3 şartı sağlayan bütün $y \in H$ fonksiyonlarının kümesini de D ile gösterelim.

(i) $y, [a, \sigma(b)]$ üzerinde süreklidir.

(ii) $t \in [a, b]$ için $y^\Delta(t)$ tanımlıdır ve

$y(a) - hy^\Delta(a) = 0$, $y(b) + Hy^\Delta(b) = 0$ dır.

(iii) $y^\Delta(t), [a, b]$ de ∇ – türevlenebilir ve $[y^\Delta(t)]^\nabla \in H$ dır.

Her $y \in D$ için

$$L: D \subset H \rightarrow H$$

$$(Ly)(t) := -[y^\Delta(t)]^\nabla + [q(t) + \lambda]y(t) \quad , \quad t \in [a, b]$$

dir.

Burada

(C1) $q(t), [a, b]$ aralığında parçalı-süreklî, h, H reel sayılar

(C2) $t \in [a, b]$ için $q(t) \geq 0$ ve $h \geq 0, H \geq 0$ dır.

H, b sola saçılmış iken $y(b) = 0$ ve $H = 0$ olmak üzere $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bütün reel ∇ – ölçülebilir fonksiyonların Hilbert uzayını gösterebilir ve

$$\langle y, z \rangle = \int_a^b y(t)z(t) \nabla t$$

iç çarpımı ve

$$\|y\| = \sqrt{\langle y, y \rangle} = \left\{ \int_a^b y^2(t) \nabla t \right\}^{1/2}$$

normu ile birlikte

$$\int_a^b y^2(t) \nabla t < \infty$$

dur [9].

3.1.1. Tanım

$$-[y^\Delta(t)]^\nabla + [q(t) + \lambda]y(t) = 0, \quad t \in [a, b]$$

olmak üzere, $y \in D$ için özdeş olarak sıfır olmayan bir fonksiyon varsa, $\lambda \in \mathbb{C}$ Eş. (3.1) – Eş. (3.2) probleminin bir özdeğeri olarak isimlendirilir. y fonksiyonu da λ özdeğerine ilişkin Eş. (3.1) – Eş. (3.2) probleminin özfonksiyonu olarak isimlendirilir.

Eş. (3.1) – Eş. (3.2) özdeğer problemi

$$Ly - \lambda y = -[y^\Delta(t)]^\nabla + [q(t)]y(t) = f(t) - \lambda y, \quad y \in D, \quad y \neq 0 \quad (3.3)$$

denkleminde denktir.

3.1.1. Teorem

L operatörü lineerdir.

İspat

Her $x, y \in D, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, t \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned} L(\alpha x + \beta y)(t) &= -[(\alpha x + \beta y)^\Delta(t)]^\nabla + [q(t) + \lambda](\alpha x + \beta y)(t) \\ &= -[(\alpha x^\Delta + \beta y^\Delta)(t)]^\nabla + [q(t) + \lambda](\alpha x(t) + \beta y(t)) \\ &= -[\alpha x^\Delta(t)]^\nabla - [\beta y^\Delta(t)]^\nabla + [q(t) + \lambda]\alpha x(t) + [q(t) + \lambda]\beta y(t) \\ &= \alpha\{-[x^\Delta(t)]^\nabla + [q(t) + \lambda]x(t)\} + \beta\{-[y^\Delta(t)]^\nabla + [q(t) + \lambda]y(t)\} \\ &= \alpha Lx(t) + \beta Ly(t) \end{aligned}$$

dir.

3.1.2. Teorem

(C1) şartı altında, her $y, z \in D$ için

$$\langle Ly, z \rangle = \langle y, Lz \rangle \quad (3.4)$$

dir.

İspat

Her $y, z \in D$ için

$$\begin{aligned} \langle Ly, z \rangle &= \int_a^b \left\{ -[y^\Delta(t)]^\nabla + [q(t) + \lambda]y(t) \right\} z(t) \nabla t \\ &= -y^\Delta(t)z(t) \Big|_a^b + \int_a^b y^\Delta(t)z^\Delta(t) \Delta t + \int_a^b [q(t) + \lambda]y(t)z(t) \nabla t \\ &= -y^\Delta(t)z(t) \Big|_a^b + y(t)z^\Delta(t) \Big|_a^b - \int_a^b y(t)[z^\Delta(t)]^\nabla \nabla t + \int_a^b [q(t) + \lambda]y(t)z(t) \nabla t \\ &= \int_a^b y(t) \left\{ -[z^\Delta(t)]^\nabla + [q(t) + \lambda]z(t) \right\} \nabla t \\ &= \langle y, Lz \rangle \end{aligned}$$

Burada $y, z \in D$ fonksiyonları için Eş. (3.2) sınır şartları ile Eş. (3.4) ifadesi L operatörünün simetrik (self-adjoint) olduğunu gösterir.

3.1.3. Teorem

(C1) ve (C2) şartı altında, her $y \in D$ için

$$\langle Ly, y \rangle \geq 0$$

dır.

İspat

$$\begin{aligned} \langle Ly, y \rangle &= \int_a^b \left\{ -[y^\Delta(t)]^\nabla + [q(t) + \lambda]y(t) \right\} y(t) \nabla t \\ &= -y^\Delta(t)y(t) \Big|_a^b + \int_a^b [y^\Delta(t)]^2 \Delta t + \int_a^b [q(t) + \lambda]y^2(t) \nabla t \\ &= h[y^\Delta(a)]^2 + H[y^\Delta(b)]^2 + \int_a^b [y^\Delta(t)]^2 \Delta t + \int_a^b [q(t) + \lambda]y^2(t) \nabla t \end{aligned} \quad (3.5)$$

Eş. (3.5) ifadesi her $y \in D, y \neq 0$ için $\langle Ly, y \rangle \geq 0$ olduğunu gösterir. Bu yüzden L operatörünün tüm özdeğerleri reeldir, pozitifdir.

3.4.1. Teorem

$$\text{Ker } L = \{y \in D : Ly = 0\} = \{0\}$$

dır.

İspat

$y \in D$ ve $Ly = 0$ ise o zaman Eş. (3.5) den ve (C2) şartından $t \in [a, b]$ için $y^\Delta(t) = 0$ dır. Dolayısıyla $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde $y(t)$ sabittir. O zaman Eş. (3.2) sınır şartları kullanılarak $y(t) \equiv 0$ elde edilir. O halde L operatörü 1: 1 ve örtendir.

3.2. Dinamik Denklemin Ürettiği Operatörün Green Fonksiyonu

3.2.1. Teorem

Eş. (3.1) – (3.2) probleminin Green fonksiyonu $G(t, s)$

$$G(t, s) = \begin{cases} G_1(t, s), & \text{Im}\lambda \leq 0 \\ G_2(t, s), & \text{Im}\lambda \geq 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlanır. Buna ilaveten Green fonksiyonu simetriktir, yani t, s için

$$G(t, s) = G(s, t)$$

dir. $\text{Im}\lambda \leq 0$ düzlemindeki $G_1(t, s)$

$$G_1(t, s) = -\frac{1}{w_1} \begin{cases} u_1(t)v_1(s), & t \leq s \\ u_1(s)v_1(t), & t \geq s \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $\text{Im}\lambda \geq 0$ düzlemindeki $G_2(t, s)$

$$G_2(t, s) = -\frac{1}{w_2} \begin{cases} u_2(t)v_2(s), & t \leq s \\ u_2(s)v_2(t), & t \geq s \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ sınır koşullarını sağlayan Eş. (3.1) in çözümleridir.

$$u_1(a) = h, \quad u_1^\Delta(a) = 1$$

$$v_1(b) = H, \quad v_1^\Delta(b) = -1$$

ve

$$u_2(a) = h, \quad u_2^\Delta(a) = 1$$

$$v_2(b) = H, \quad v_2^\Delta(b) = -1$$

dir ve sırasıyla w_1 ve w_2 aşağıdaki tanımlandığı gibi u ve v çözümlerinin Wronskian'ıdır.

$$w_1 = w_t(u_1, v_1) = u_1(t)v_1^\Delta(t) - u_1^\Delta(t)v_1(t)$$

ve

$$w_2 = w_t(u_2, v_2) = u_2(t)v_2^\Delta(t) - u_2^\Delta(t)v_2(t)$$

$w_1 \neq 0$ ve $w_2 \neq 0$ dır.

O zaman, herhangi bir $f \in H$ için

$$(L^{-1}f)(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)\nabla s, \quad \forall f \in H \quad (3.7)$$

dir [8].

Şimdi analizde iyi bilinen Hilbert-Schmidt teoremi kullanılarak L^{-1} operatörünün özelliklerini belirtelim.

Eş. (3.6) ve Eş. (3.7) nolu eşitlikler L^{-1} in H Hilbert uzayında tamamıyla sürekli (kompakt) self-adjoint lineer bir operatör olduğunu gösterir.

$$Ly - \lambda y = -[y^\Delta(t)]^\nabla + [q(t)]y(t) = 0, \quad y \in D, y \neq 0 \quad (3.3)$$

özdeğer problemi aşağıdaki özdeğer problemi ile eşdeğerdir.

$$Bg = \mu g, \quad g \in H, \quad g \neq 0$$

Burada,

$$B = L^{-1} \text{ ve } \mu = \frac{1}{\lambda}$$

dır. Başka bir ifadeyle, eğer $y \in D$ ve λ, L için bir özfonksiyona ilişkin bir özdeğer ise o zaman $\mu = \lambda^{-1}$, y ile aynı özfonksiyona ilişkin B deki bir özdeğerdir.

Şimdi Hilbert-Schmidt teoremini kullanalım. Bir H Hilbert uzayında her tam olarak sürekli self-adjoint lineer operatörü B için $\{\mu_k\}$ ($\mu_k \neq 0$) özdeğerlerine ilişkin özvektörlerin $\{\varphi_k\}$ bir ortonormal sistemi vardır. Öyle ki, $\psi \in \ker B$, yani $B\psi = 0$ iken $f \in H$

$$f = \sum_k \mu_k c_k \varphi_k + \psi$$

şeklinde bir tek olarak yazılabilir. Ayrıca

$$Bf = \sum_k \mu_k c_k \varphi_k$$

ve $\{\varphi_k\}$ sistemi sonsuz ise o zaman

$$\lim \mu_k = 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

dır.

Hilbert-Schmidt teoreminin bir sonucu olarak eğer B, H Hilbert uzayında tamamıyla sürekli self-adjoint lineer bir operatör ise ve eğer $\text{Ker} B = \{0\}$ ise o zaman B nin özvektörleri H nin ortonormal bazlarını oluşturur.

Hilbert-Schmidt teoreminin sonuçlarını $B = L^{-1}$ operatörüne uygulayarak ve B nin özdeğerleri ve özfonksiyonları ve L nin özdeğerleri ve özfonksiyonları arasında tanımlanan bağlantı kullanılarak aşağıdaki sonuca ulaşılır [8].

4. SONLU ZAMAN SKALASI ARALIĞI ÜZERİNDE ÖZFONKSİYONLAR CİNSİNDEN AÇILIM

4.1. Parseval Eşitliği

4.1.1. Teorem

(C1) ve (C2) şartları altında Eş. (3.1) – (3.2) özdeğer problemi için $\{\lambda_k\}$ özdeğerine ilişkin $\{\varphi_k\}$ özfonksiyonlarının bir ortonormal sistemi vardır. Her λ_k özdeğeri pozitif ve basittir. $\{\varphi_k\}$ sistemi H Hilbert uzayı için bir ortonormal baz oluşturur. Bu yüzden özdeğerlerinin sayısı $N = \dim H$ ye eşittir. Herhangi bir $\xi \in H$ fonksiyonu aşağıdaki gibi φ_k özfonksiyonuna genişletilebilir.

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k(t) \quad (4.1)$$

Burada c_k

$$c_k = \int_a^b \xi(t) \varphi_k(t) \nabla t \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlanan ξ nin Fourier katsayılarıdır.

$N = \infty$ olması durumunda Eş. (4.1) deki toplam bir seri olur ve o seri, H uzayındaki metriğe göre ξ fonksiyonuna yakınsar. Yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left[\xi(t) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(t) \right]^2 \nabla t = 0 \quad (4.3)$$

dır.

$$\int_a^b \left[\xi(t) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(t) \right]^2 \nabla t = \int_a^b \xi^2(t) \nabla t - \sum_{k=1}^n c_k^2$$

olduğundan Eş. (4.3) den aşağıdaki Parseval eşitliği elde edilir [8].

$$\int_a^b \xi^2(t) \nabla t = \sum_{k=1}^N c_k^2 \quad (4.4)$$

4.2. Özfonksiyonlar Cinsinden Düzgün Yakınsak Açılım

4.2.1. Teorem

$\xi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, (a, b) aralığına ait sonlu $t_1, t_2, \dots, t_m$ noktaları hariç $[a, b]$ üzerinde her yerde bir $\xi^\Delta(t)$, Δ - türevine sahip olsun. Ayrıca ξ nin aşağıdaki sınır koşullarını sağladığı kabul edilir.

$$\xi(a) - h\xi^\Delta(a) = 0, \quad \xi(b) + H\xi^\Delta(b) = 0$$

O zaman

$$c_k = \int_a^b \xi(t) \varphi_k(t) \nabla t \quad (4.5)$$

iken

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(t) \quad (4.6)$$

serisi $[a, b]$ üzerinde ξ fonksiyonuna düzgün yakınsar [8].

İspat

ξ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde her yerde Δ - türevlenebilir ve $\xi^\Delta, [a, b]$ üzerinde sürekli olsun.

Şimdi,

$$J(y) = h[y^\Delta(a)]^2 + H[y^\Delta(b)]^2 + \int_a^b [y^\Delta(t)]^2 \Delta t + \int_a^b [q(t) + \lambda] y^2(t) \nabla t$$

fonksiyoneli göz önüne alalım. $J(y) \geq 0$ dır. c_k Eş. (4.5) deki gibi tanımlı iken

$$y = \xi(t) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(t)$$

eşitliğini $J(y)$ de yerine koyarsak

$$\begin{aligned} J\left(\xi - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(t)\right) &= h\left[\xi^\Delta(a) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k^\Delta(a)\right]^2 + H\left[\xi^\Delta(b) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k^\Delta(b)\right]^2 \\ &+ \int_a^b \left[\xi^\Delta - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k^\Delta\right]^2 \Delta t + \int_a^b [q(t) + \lambda] \left[\xi - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k\right]^2 \nabla t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= h \left(\xi^\Delta(a) \right)^2 + H \left(\xi^\Delta(b) \right)^2 - 2 \sum_{k=1}^n c_k [h \xi^\Delta(a) \varphi_k^\Delta(a) + H \xi^\Delta(b) \varphi_k^\Delta(b)] \\
&+ \sum_{k,l=1}^n c_k c_l [h \varphi_k^\Delta(a) \varphi_l^\Delta(a) + H \varphi_k^\Delta(b) \varphi_l^\Delta(b)] + \int_a^b (\xi^\Delta)^2 \Delta t + \int_a^b (q(t) + \lambda) \xi^2 \Delta t \\
&- 2 \sum_{k=1}^n c_k \left[\int_a^b \xi^\Delta \varphi_k^\Delta \Delta t + \int_a^b (q(t) + \lambda) \xi \varphi_k \nabla t \right] \\
&+ \sum_{k,l=1}^n c_k c_l \left(\int_a^b \varphi_k^\Delta \varphi_l^\Delta \Delta t + \int_a^b (q(t) + \lambda) \varphi_k \varphi_l \nabla t \right) \tag{4.7}
\end{aligned}$$

Şimdi

$$\int_a^b \xi^\Delta \varphi_k^\Delta \Delta t + \int_a^b (q + \lambda) \xi \varphi_k \nabla t$$

formülüne kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \xi^\Delta \varphi_k^\Delta \Delta t + \int_a^b (q + \lambda) \xi \varphi_k \nabla t = \xi(t) \varphi_k^\Delta \Big|_a^b + \int_a^b \xi(t) (-\varphi_k^\Delta)^\nabla \nabla t + \int_a^b (q + \lambda) \xi \varphi_k \nabla t \\
&= \xi(b) \varphi_k^\Delta(b) - \xi(a) \varphi_k^\Delta(a) + \lambda_k \int_a^b \xi \varphi_k \nabla t \\
&= -H \xi^\Delta(b) \varphi_k^\Delta(b) - h \xi^\Delta(a) \varphi_k^\Delta(a) + \lambda_k c_k
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi de

$$\int_a^b \varphi_k^\Delta \varphi_l^\Delta \Delta t + \int_a^b (q + \lambda) \varphi_k \varphi_l \nabla t$$

formülüne kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \varphi_k^\Delta \varphi_l^\Delta \Delta t + \int_a^b (q + \lambda) \varphi_k \varphi_l \nabla t = \varphi_k(t) \varphi_l^\Delta(t) \Big|_a^b + \int_a^b \varphi_k [(-\varphi_l^\Delta)^\nabla + (q + \lambda) \varphi_k \varphi_l] \nabla t \\
&= \varphi_k(b) \varphi_l^\Delta(b) - \varphi_k(a) \varphi_l^\Delta(a) + \lambda_l \int_a^b \varphi_k \varphi_l \nabla t \\
&= -h \varphi_k^\Delta(a) \varphi_l^\Delta(a) - H \varphi_k^\Delta(b) \varphi_l^\Delta(b) + \lambda \delta_{kl}
\end{aligned}$$

elde edilir. δ_{kl} Kronecker sembolüdür ve Eş. (3.2) sınır şartları kullanılır.

$$\varphi_k(a) - h \varphi_k^\Delta(a) = 0, \quad \varphi_k(b) + H \varphi_k^\Delta(b) = 0 \tag{4.8}$$

ve denklem

$$-[\varphi_k^\Delta(t)]^\nabla + (q + \lambda)\varphi_k(t) = \lambda_k \varphi_k(t)$$

dır. Böylece Eş. (4.7) den

$$\begin{aligned} J\left(\xi - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(t)\right) &= h[\xi^\Delta(a)]^2 + H[\xi^\Delta(b)]^2 \\ &- 2 \sum_{k=1}^n c_k [h\xi^\Delta(a)\varphi_k^\Delta(a) + H\xi^\Delta(b)\varphi_k^\Delta(b)] + \sum_{k,l=1}^n c_k c_l [h\varphi_k^\Delta(a)\varphi_l^\Delta(a) + H\varphi_k^\Delta(b)\varphi_l^\Delta(b)] \\ &+ \int_a^b (\xi^\Delta)^2 \Delta t + \int_a^b (q(t) + \lambda)\xi^2 \Delta t - 2 \sum_{k=1}^n c_k (-h\xi^\Delta(a)\varphi_k^\Delta(a) - H\xi^\Delta(b)\varphi_k^\Delta(b) + \lambda_k c_k) \\ &+ \sum_{k,l=1}^n c_k c_l (-h\varphi_k^\Delta(a)\varphi_l^\Delta(a) - H\varphi_k^\Delta(b)\varphi_l^\Delta(b) + \lambda_l \delta_{kl}) \\ &= h[\xi^\Delta(a)]^2 + H[\xi^\Delta(b)]^2 + \int_a^b [\xi^{\Delta 2} + (q + \lambda)\xi^2] \Delta t - \sum_{k=1}^n \lambda_k c_k^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

Sol taraf negatif olmadığından,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k c_k^2 \leq h[\xi^\Delta(a)]^2 + H[\xi^\Delta(b)]^2 + \int_a^b [\xi^{\Delta 2} + (q + \lambda)\xi^2] \Delta t \quad (4.9)$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu eşitsilik Bessel eşitsizliğine benzer ve soldaki serinin yakınsaklığını takip eder. $\lambda_k > 0$ olduğundan bu serinin bütün terimleri pozitiftir.

Eğer ξ fonksiyonunun sadece teoremden belirtilen şartları sağladığını varsayarsak Eş. (4.9) un ispatı değişmez. Gerçekten, ξ^Δ nın sürekli olduğu aralıklar üzerinde integral almak yeterlidir. Sonra bütün integraller toplanır. (İntegrali alınan terimler Eş. (3.2) ve Eş. (4.8) kullanılarak yok edilir.)

Şimdi

$$\sum_{k=1}^n |c_k \varphi_k(t)| \quad (4.10)$$

serisinin $[a, b]$ aralığı üzerinde düzgün yakınsak olduğu gösterilir.

$$\varphi_k(t) = \lambda_k \int_a^b G(t, s) \varphi_k(s) \nabla s$$

olmak üzere

Eş. (3.7) den $\varphi_k = \lambda_k L^{-1} \varphi_k$ iken Eş. (4.10) yeniden

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k |c_k g_k(t)| \quad (4.11)$$

şeklinde yazılabilir.

Burada

$$g_k(t) = \int_a^b G(t, s) \varphi_k(s) \nabla s$$

s nin bir fonksiyonu olan $G(t, s)$ nin Fourier katsayısı olarak kabul edilebilir.

Eş. (4.9) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k g_k^2 &\leq h \left[G^{\Delta s}(t, a) \right]^2 + H \left[G^{\Delta s}(t, b) \right]^2 \\ &+ \int_a^b [G^{\Delta s}]^2(t, s) + (q(s) + \lambda) G^2(t, s) \Delta s \end{aligned} \quad (4.12)$$

yazılabilir. Burada $G^{\Delta s}(t, s)$, s ye göre $G(t, s)$ nin delta türevidir. İntegral işareti altında görünen fonksiyon sınırlıdır ve M bir sabit olmak üzere Eş. (4.12) den

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k g_k^2 \leq M$$

dir. Şimdi $\sqrt{\lambda_k}$, uygun şekilde λ_k yerine koyularak Eş. (4.11) serisine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanır.

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{m+p} \lambda_k |c_k g_k(t)| &= \sum_{k=m}^{m+p} |\sqrt{\lambda_k} c_k| |\sqrt{\lambda_k} g_k(t)| \\ &\leq \sqrt{\sum_{k=m}^{m+p} \lambda_k c_k^2} \sqrt{\sum_{k=m}^{m+p} \lambda_k g_k^2(t)} \\ &\leq \sqrt{M} \sqrt{\sum_{k=m}^{m+p} \lambda_k c_k^2} \end{aligned}$$

ve bu eşitsizlik, $\lambda_k c_k^2$ terimleri içeren serinin yakınsaklığı ile birlikte ilk olarak Eş. (4.11) serisini oluşturur ve böylece Eş. (4.10) serisi $[a, b]$ aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır.

Eş. (4.6) serisinin toplamı $\xi_1(t)$ olsun.

$$\xi_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(t) \quad (4.13)$$

Eş. (4.13) serisi $[a, b]$ aralığında düzgün yakınsak olduğundan Eş. (4.13) ün her iki tarafı $\varphi_1(t)$ ile çarpılır ve ardından aşağıdaki denklemi elde etmek üzere terim-terim $\nabla -$ integre edilir.

$$\int_a^b \xi_1(t) \varphi_l(t) \nabla t = c_l$$

Böylece ξ_1 ve ξ nin Fourier katsayıları aynı ve $\xi_1 - \xi$ farkının Fourier katsayıları sıfırdır. Parseval eşitliğini $\xi_1 - \xi$ ye uygulanırsa $\xi_1 - \xi = 0$ elde edilir. Bu yüzden Eş. (4.6) serisinin toplamı $\xi(t)$ ye eşittir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Zaman skalası üzerinde operatörler için spektral teori son zamanlarda gelişmeye başlamıştır ve bu konuda az sayıda çalışmalar yapılmıştır. Bu tez çalışmasında, zaman skalasının temel kavramları öğrenilmiş, sonlu zaman skalası üzerinde Dinamik denklemin ürettiği operatörün spektral özellikleri incelenmiştir. Sonlu zaman skalası aralığı üzerindeki problemin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının varlığını göstermek ve özfonksiyonları cinsinden L_2 metriğine göre yakınsak açılım formülünü elde etmek için Hilbert uzayı içinde kendine-eşlenik tamamen sürekli operatörler için bilinen Hilbert-Schmidt teoremi uygulanmıştır.

Son 20 yılın konusu olan bu konu orijinal çalışmalara açıktır.

KAYNAKLAR

1. Bayraktar, M. (2006). *Fonksiyonel Analiz*. (Üçüncü Baskı). Ankara: Gazi Kitabevi, 81-206.
2. Musayev, B. ve Alp, M. (2000). *Fonksiyonel Analiz*. Ankara: Balcı Yayınları, 168-411.
3. Musayev, B., Alp, M., Mustafayev, N. ve Ekinçioğlu, İ. (2007). *Analiz I*. (İkinci Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık, 27-28.
4. Naimark, M. A. (1968). *Linear Differential Operators I*. New York: Frederick Ungar Publishing Company, 28-30.
5. Naimark, M. A. (1968). *Linear Differential Operators II*. New York: Frederick Ungar Publishing Company, 292-322.
6. Bohner, M. and Peterson, A. (2001). *Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications*, Boston: Birkhawser, 1-333.
7. Huseynov, A. (2010). Eigenfunction Expansion Associated with The One-Dimensional Schrödinger Equation on Semi-Infinite Time Scale Intervals. *Reports on Mathematical Physics*, 66.
8. Huseynov, A. and Bairamov, E. (2009). On Expansions in Eigenfunctions for Second Order Dynamic Equations on Time Scales. *Nonlinear Dynamics and System Theory*, 9(1), 77-88.
9. Guseinov, G. S. (2007). Eigenfunction Expansions for a Sturm-Liouville Problem on Time Scales. *International Journal of Difference Equations*, 2, 93-104.
10. Robertson, A. P., Robertson, W. (1973). *Topological Vector Spaces*. (Second Edition). Cambridge: Cambridge University Press, 9.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : SESLİ, Nihal
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 02.04.1991, Ankara
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0553 498 06 05
e-mail : nihalesli.ns@gmail.com



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi /Matematik	Devam Ediyor
Lisans	Gazi Üniversitesi /Matematik	2013
Lise	Cumhuriyet Anadolu Lisesi	2009

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Spor, kitap, sinema



GAZİ GELECEKTİR..