



**STOKASTİK KONTROL PROBLEMLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ
VE FİNANSAL UYGULAMALARI**

Yağmur SARGIN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

EKİM 2019

Yağmur SARGIN tarafından hazırlanan “STOKASTİK KONTROL PROBLEMLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ ve FİNANSAL UYGULAMALARI” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi MATEMATİK Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Fikriye Nuray YILMAZ

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Başkan: Doç. Dr. Aytekin Bayram ÇIBIK

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Tuğba AKMAN YILDIZ

Lojistik Yönetimi Ana Bilim Dalı, Türk Hava Kurumu Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 03/10/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu çalışmanın Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum

.....

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Yağmur SARGIN
03/10/2019

STOKASTİK KONTROL PROBLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ VE FİNANSAL UYGULAMALARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Yağmur SARGIN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ekim 2019

ÖZET

Bu tezde, stokastik optimal kontrol problemleri ve bazı önemli finansal uygulamaları ele alınmıştır. Öncelikle, deterministik optimal kontrol probleminin çözümü kısaca özetlenip daha sonra stokastik kontrol probleminin çözümleri incelenmiştir. En dik iniş yöntemi hesabına dayalı olan yeni bir gradyan yöntemi ele alınıp incelenmiştir. Bu yöntemden elde edilen çözümün optimallığı hem teorik hem de nümerik olarak verilmiştir. Eşlenik denklemi yeni bir tanımlamayla içeren çözüm algoritması sunulmuştur. Monte-Carlo yöntemi yardımıyla beklenen optimal sonuç MATLAB kullanılarak elde edilip nümerik çözümlerin gerçek çözümlere yakınsadığı gösterilmiştir.

Bilim Kodu : 20406
Anahtar Kelimeler : Stokastik diferansiyel denklem, stokastik optimal kontrol, eşlenik denklem, Black Scholes modeli
Sayfa Adedi : 59
Danışman : Doç. Dr. Fikriye Nuray YILMAZ

NUMERICAL SOLUTIONS OF STOCHASTIC CONTROL PROBLEMS AND
FINANCIAL APPLICATIONS

(M. Sc. Thesis)

Yağmur SARGIN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

October 2019

ABSTRACT

In this thesis, stochastic optimal control problems and some important financial applications are discussed. Firstly, the solution of the deterministic optimal control problem is summarized briefly and then the solution of the stochastic control problem is presented. A new gradient method, which is based on the steepest descent method, is discussed and examined. The optimal solution obtained from this method is analyzed both theoretically and numerically. A solution algorithm containing the adjoint equation, which has a new definition, is presented. With the help of Monte-Carlo method, the expected optimal result is obtained by using MATLAB and it is shown that numerical solutions converge to real solutions.

Science Code : 20406
Key Words : Stochastic differential equation, stochastic optimal control, adjoint equation, Black Scholes model
Page Number : 59
Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Fikriye Nuray YILMAZ

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans yaptığım süre boyunca bilgi ve birikimlerini benden hiçbir zaman esirgemeyen, bu tezin geliştirilmesi ve hazırlanmasındaki görüş ve önerileriyle beni yönlendiren ve bana her anlamda destek olan çok değerli hocam sayın Doç. Dr. Fikriye Nuray YILMAZ'a teşekkürlerimi ve saygılarımı sunuyorum. Ayrıca çalışmamda emeği geçen ve bana zaman ayırıp deneyimlerini paylaşarak çalışmama yol gösteren sayın Dr. Alper HEKİMOĞLU'na teşekkür ederim ve tabi ki çalışmalarım boyunca benden desteklerini esirgemeyen aileme ve arkadaşlarıma ve tez yazım sürecinde bana anlayış gösteren ve her zaman destek olan sevgili eşim Aydın SARGIN'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR VE OPTİMAL KONTROL	5
2.1. Temel Kavramlar	5
2.1.1. Banach uzayı	5
2.1.2. Hilbert uzayı.....	6
2.1.3. Gateaux türevi	7
2.1.4. Yönlü türev	7
2.1.5. Frechet türevi	8
2.2. Matematiksel Optimizasyon Problemi	8
2.2.1. Optimal çözüm	9
2.2.2. Dışbükey küme	9
2.2.3. Dışbükey fonksiyon	9
2.2.4. Jensen eşitsizliği.....	9
2.2.5. Dışbükeyliğin gerek ve yeter koşulları	10
2.3. Optimal Kontrol Problemleri	10
2.3.1. Optimal kontrol problemlerinde gereklilik koşulları	11
2.3.2. Pontryagin maksimum ilkesi.....	12
2.3.3. Optimal kontrol probleminin çözümü İçin Hamilton-Jacobi-Bellman yöntemi.....	14

	Sayfa
2.4. Stokastik Optimal Kontrol	16
2.4.1. Stokastik süreç	16
2.4.2. İndeks kümesi	16
2.4.3. Durum uzayı S	17
2.4.4. Filtrasyon ve uyarlanabilirlik	17
2.4.5. Brown hareketi	17
2.4.6. Ito integrali	18
2.4.7. Monte Carlo Simülasyonu.....	19
2.4.8. Stokastik optimal kontrol problemi.....	19
2.5. Hamilton-Jacobi-Bellman Denklemi	20
2.6. Stokastik Pontryagin Maksimum İlkesi	22
3. STOKASTİK OPTİMAL KONTROL İÇİN BİR GRADYAN ALGORİTMASI.....	25
3.1. Giriş.....	25
3.2. İndirgenmiş Amaç Fonksiyonu ve Özellikleri	26
3.3. Adjoint Denklemi ve Optimalite Koşulları	35
4. NÜMERİK SONUÇLAR.....	39
4.1. Giriş.....	39
4.2. Eşlenik Denklemi ile Oluşturulan Algoritma.....	39
4.3. Black Scholes Opsiyon Fiyatlama Modeli	41
4.3.1. Black-Scholes optimal kontrol problemi gerçek çözümü	43
4.3.2. Black-Scholes optimal kontrol problemi nümerik çözümü	44
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	53
KAYNAKLAR	55
ÖZGEÇMİŞ	59

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 4.1. Örnek 1'in $\sigma = 0.0, 0.1$ için nümerik çözümü	48
Şekil 4.2. Örnek 1'in $\sigma = 0.3, 0.5$ için nümerik çözümü	49
Şekil 4.3. Örnek 2'nin $\sigma = 0.2, 0.5$ için nümerik çözümü	50
Şekil 4.4. Örnek 2'nin $\sigma = 0.7, 1.0$ için nümerik çözümü	51

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

F

σ -cebri

$F(t)$

t-zamanına bağlı filtrasyon

$\mathbb{R}$

Reel sayılar kümesi

U_{ad}

Kabul edilebilir kontrol kümesi

L^2

Kare integrallenebilir

Kısaltmalar

Açıklamalar

$W, W(t)$

1-boyutlu Brownian hareket

HJB

Hamilton-Jacobi-Bellman

PMP

Pontryagin Maksimum İlkesi

SDE

Stokastik Diferansiyel Denklem

SMP

Stokastik Maksimum İlkesi

1. GİRİŞ

Optimal kontrol teorisi hem bilim hem de mühendislik alanlarında sayısız uygulamaya sahip bir matematiksel optimizasyon yöntemidir. Matematiksel programlama olarak da bilinen optimizasyon terimi; reel bir fonksiyonu minimize ya da maksimize etmek amacı ile gerçek ya da tamsayı değerlerini tanımlı bir aralıkta seçip fonksiyona yerleştirerek sistematik olarak bir problemi incelemek ya da çözmek işlemlerini ifade eder. Optimal kontrol teorisi, belirli bir sistemde belirli bir optimalite kriterine ulaşılması için kontrol yasası bulma problemi ile ilgilenir. Varyasyonlar analizinin bir uzantısıdır ve kontrol politikalarını türetmek için matematiksel bir optimizasyon yöntemidir [1]. Bu yöntem, Edward J. McShane'nin varyasyon analizi çalışmalarından hareketle 1950'lerde Lev Pontryagin ve Richard Bellman tarafından geliştirilmiştir [2]. Optimal kontrol, kontrol teorisinde bir kontrol stratejisi olarak görülebilir.

Bir optimal kontrol problemi, durum ve kontrol değişkenlerinin bir fonksiyonu olan maliyet fonksiyonunu içerir. Optimal kontrol, maliyet fonksiyonunu en aza indiren kontrol değişkenlerinin yollarını tanımlayan bir diferansiyel denklem setidir. Optimal kontrol, Pontryagin maksimum ilkesi (Pontryagin minimum ilkesi veya basitçe Pontryagin'in İlkesi olarak da bilinen gerekli bir koşul) [3], veya Hamilton-Jacobi-Bellman denklemini (yeterli bir koşul) çözerek elde edilebilir.

Optimal kontrol probleminde optimize edilecek parametreler sabit veya rasgele olarak alınabilir. Stokastik optimal kontrol teorisi, optimal kontrol teorisinin bir alt dalıdır ve rassallık içeren bir matematiksel modeldir. Stokastik optimal kontrolde, kontrollü sistemler stokastik diferansiyel denklemler (SDE'ler) ile tanımlanmaktadır ve kontrol edilen sistem bir durum süreci, kontrol süreci ve bir fonksiyonel performans içermektedir.

Son zamanlarda, stokastik diferansiyel denklemler (SDE'ler) finansal matematik, aktüerya bilimleri, fizik, biyoloji, jeoloji, mekanik, astronomi ve diğer bilim ve mühendislik gibi çeşitli alanlarda oldukça popüler modeller haline gelmiştir. Örneğin, finansal matematikte dalgalı hisse senedi fiyatları, opsiyon fiyatları ve portföy optimizasyon modelleri SDE'ler tarafından modellenebilir [4-7], ya da fizikte, termal gürültünün elektrik devrelerindeki etkisini ve telekomünikasyon sistemlerindeki sayısız parazitleri modellemek için kullanılır

[8,9] ve buna benzer çoğu mühendislik sistemleri uygulamalarında örnekleri mevcuttur [10-14].

Stokastik optimal kontrol teorisinin temelini oluşturan rastgele olaylar, 1827'de Robert Brown'ın Brownian hareketinin keşfi ile modellenmeye başladı. Polen parçacıklarının sıvı içerisinde hareket ettiğini ve bu hareketlerin çok hızlı, oldukça düzensiz ve zigzag benzeri bir hareket izlediğini not etmiştir. Daha sonraki zamanlarda parçacığın bu düzensiz hareketine çok küçük sıvı molekülleri ve polen parçacığı arasındaki çarpışmaların sebep olduğu kabul edilmiştir. 1900 yılında Fransız matematikçi Louis Bachelier “Spekülasyon Teorisi” adlı doktora tezinde hisse senedi fiyatları için bir model olarak Brownian hareketi kullanmıştır. Polen parçacığını hisse senedinin fiyatı, molekül parçacıklarını da hisse senedinin fiyatını hareket ettiren yani piyasada alım satım yapan bireyler olarak düşünmüştür. Piyasadaki alım satımlar, yani küçük hareketler, hisse senedinin fiyatını yukarı ve aşağıya doğru hareket ettirir. Bachelier’in bu çalışması finans alanında ileri matematiği kullanan ilk makale olduğu için, finansal matematik ve stokastik süreçler çalışmalarında öncü olarak düşünülebilir. Norbert Wiener 1923’te Brownian hareketini sürekli zamanlı bir stokastik süreç olarak tanımladı. Bu süreç günümüzde (Standart) Brownian hareket veya Wiener süreci olarak adlandırılmaktadır. Daha sonra Kolmogorov (1931) Brownian hareket için ileriye doğru ve geriye doğru denklemleri türetmiştir [15].

Stokastik integral denklemlerinin modellenmesinde Brownian hareketine dayalı bir problem çıkmaktadır. Brownian hareket, düzensiz yollarından dolayı hiçbir yerde türevlenemez. Bu yüzden genel analiz kuralları ve formülleri ile çözümlenemez. Fakat Kiyoshi Itô 1951’de bu kuralları ve formülleri olağan hesaptan Itô integrali olarak adlandırılan stokastik süreçlere genişletmiştir. Stokastik analiz üzerine birçok makale yayınlamıştır [16,17]. Onun ünlü formülü Itô Lemma [16], SDE’leri çözmemize yardımcı olmaktadır.

Genel olarak birçok stokastik integral, kapalı form çözümleriyle açıkça çözülemez. Bu nedenle literatürde stokastik optimal kontrol problemleri için sayısız sayısal yöntem önerilmiştir. Stokastik optimal kontrolü çözmek için kullanılan nümerik yöntemleri kabaca dört sınıfa ayırmak mümkündür. Bunlar, kontrol problemini sonlu boyutlu stokastik programlamaya aktaranlar [18-22], Dinamik Programlama İlkesine (DPP) dayalı olanlar [23,24], burada özellikle geri bildirim çözümleri için HJB denklemlerini çözenler [25-28], Martingale yöntemine dayalı olanlar [29-31] ve Stokastik Maksimum İlkesini (SMP) esas

alanlar [32] şeklinde gruplandırılabilir. Bu çalışmada stokastik optimal kontrol problemi, iteratif şeması dayalı Stokastik Maksimum İlkesi ile çözülecektir.

Stokastik optimal kontrol, deterministik optimal kontrole kıyasla gerçek uygulamalarla gerçekleştirilebilecek sayısal çözümler elde etmek açısından daha karmaşıktır. Bunun sebeplerinden biri çoğu zaman optimal kontrol $u(t)$ nin t zamanındaki değeri w 'ya bağlıdır yani $u(t, w)$ şeklinde yazılabilir. Bu yüzden deterministik durumda olduğu gibi optimal kontrolün nümerik çözümlerini hesaplamak ve uygulamak çok kullanışlı değildir. Pratik olarak kullanışlı olması için optimal durum ve optimal kontrol arasındaki bazı geribildirim ilişkilerinin Bellman Denkleminin yaklaşımında olduğu gibi nümerik olarak hesaplanması gerekir. Aksi halde optimal kontrolün gerçekleşmesi zordur. Bu çalışmada stokastik optimal kontrol için daha hızlı nümerik algoritmaların geliştirilmesinde ilk adım olarak kontrolün deterministik olduğu (ancak durumun hala stokastik olduğu) durum incelenecektir. Bu durumda optimal kontrol doğrudan w e bağlı değildir ama $y(t)$ e bağlıdır ve bu yüzden optimal kontrolü sadece hesaplamak ve onu geribildirim yasaları olmadan uygulamak anlamlıdır. Bu çalışmada yakınsaklık analizi ile basit ama etkili nümerik algoritmalar elde edilebilir. Daha da önemlisi bu algoritmalar optimal kontrolün stokastik olduğu durumlara genişletilebilir.

Bu çalışmada SMP ve Monte Carlo simülasyon yörüngesi kullanılacaktır. Gradyanı verimli bir şekilde hesaplamak için eşlenik durum denkleminden faydalanılacak ve sonrasında negatif gradyanı kullanarak bir sonraki iniş yönünde arama yapılacaktır. Eşlenik durum denkleminin hesaplanması için direkt olarak geriye dönük stokastik diferansiyel denklem algoritmada kullanılmayıp nümerik çözümleri hızlı bir şekilde yapabilmek için eşlenik durum denkleminin özel bir hali kullanılacaktır. Ayrıca, bu yöntemde herhangi bir PDE veya DPP kullanılmasına gerek yoktur ve bu nedenle uygulanması daha basittir.

Bu çalışmanın planı şu şekildedir: 2. bölümde, bu tezde kullanılacak olan bazı temel kavramlar, optimal kontrol problemi ve çözüm yöntemleri ile stokastik optimal kontrol ve çözüm metodları verilecektir. Daha sonra 3. bölümde stokastik kontrol probleminde ele alınacak amaç fonksiyonu ve algoritma tanıtılarak yakınsaklığı incelenecektir. 4. bölümde ise algoritmayı doğrulayacak finansal uygulama MATLAB programlama dili kullanılarak ve Monte Carlo yönteminden faydalanılarak gerçek ve nümerik çözümler karşılaştırılacaktır.

Son olarak 5. bölümde ise gradyan yönteminin birçok stokastik kontrol problemin optimalite koşullarının elde edilişinde kolaylıklar sağladığı üzerinde durulmuştur.

2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR VE OPTİMAL KONTROL

Bu bölümde öncelikle optimal kontrolün ve stokastik optimal kontrolün tanımlı olduğu uzaylar kısa bir bilgilendirmeye okuyucuya verilip sonrasında tezde kullanılacak olan maliyet fonksiyonunun çözümü için gerekli olan yönlü türev ve çeşitleri tanımlanmıştır. Daha sonrasında ise en basit haliyle matematiksel optimizasyon probleminin tanımı yapılarak optimal kontrolü çözen kısıt denklemlerinin (diferansiyel denklem) çeşitlerine göre nasıl sınıflandırıldığı gösterilmiştir. Sonrasında optimal kontrolü elde etmek için basit örnekler üzerinde Pontryagin Maksimum İlkesi ve Hamilton-Jacobi-Bellman yöntemleri uygulanmıştır. Daha sonra bu tezde kullanılacak olan stokastik optimal kontrol problemi tanımına geçiş yapılarak, öncelikle stokastik süreci oluşturan olasılık uzayı anlatılıp sonrasında stokastik analizin temelini oluşturan Brown Hareketi ve stokastik diferansiyel denklemi çözmemize yarayan Ito İntegrali anlatılmıştır. Son olarak, stokastik optimal kontrol problemini çözmek için kullanılan yöntemlerden Hamilton-Jacobi-Bellman denklemi ve Stokastik Pontryagin Maksimum İlkesi tanımları yapılmıştır.

2.1. Temel Kavramlar

2.1.1. Banach uzayı

Matematikte, özellikle fonksiyonel analizde, bir Banach uzayı tam bir normlu vektör uzayıdır. Böylece, bir Banach uzayı, vektörler arasındaki vektör uzunluğunun ve mesafesinin hesaplanmasına izin veren ve vektörlerin bir Cauchy dizisinin daima uzayda bulunan iyi tanımlanmış bir sınıra yakınsadığı anlamında tamamlanmış bir metrikli vektör uzayıdır.

X bir vektör uzayı ve $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer,

- i) $\forall x \in X$ için $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
 - ii) $\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ için $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
 - iii) $\forall x, y \in X$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
- (2.1)

şartları sağlanıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm, $(X, \|\cdot\|)$ 'e de normlu uzay denir.

X vektör uzayı içerisindeki her Cauchy dizisi $\{x_n\}$ için öyle bir $x \in X$ vardır ki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_X = 0, \quad (2.2)$$

eşitliğini sağlasın. O zaman $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayına tam uzay veya Banach uzayı denir.

2.1.2. Hilbert uzayı

Hilbert uzayı, Öklid uzayı kavramının genelleştirilmesidir. Bir Hilbert uzayı, uzunluk ve açının ölçülmesini sağlayan iç çarpım yapısına sahip olan soyut bir vektör uzayıdır. Ayrıca uzayın içinde yeterli limitlerin varlığını öngören bir özelliğin kullanılabilir tekniklerine izin vermek için Hilbert uzayı tam olmalıdır ve pozitif skaler çarpıma sahiptir.

Bir Hilbert uzayı H , bir reel veya karmaşık iç çarpım uzayıdır. Bu da bir tam metrik uzayı ile sırasıyla uzunluk fonksiyonu iç-çarpımı tarafından uyarılır [33]. H iç çarpımın olduğu kompleks bir vektör uzayıdır ki burada H 'nin her bir x, y ikili elemanlarının iç çarpımı $\langle x, y \rangle$ aşağıdaki özellikleri sağlar;

1. İç çarpımlar eşlenik simetriktir:

$$\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}.$$

2. a ve b bütün karmaşık sayıları iç-çarpımın doğrusal ilk bileşeni içindedir.

$$\langle ax_1 + bx_2, y \rangle = a\langle x_1, y \rangle + b\langle x_2, y \rangle.$$

3. Bir elemanın kendisi ile iç çarpımı pozitif tanımlıdır:

$$\langle x, x \rangle \geq 0$$

eşitlik durumunun tam tuttuğu (örtüştüğü) yer $x = 0$ dır.

Tam normlu uzay olarak Hilbert uzayı tanımı gereği de Banach uzayıdır.

L^p uzayı, sonlu boyutlu vektör uzayı için p -normunun tanımlı bir fonksiyon uzayıdır. Bir reel sayı $p \geq 1$ için, x 'in p -normu,

$$\|x\|^p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \quad (2.3)$$

şeklinde ifade edilir.

$p = 2$ ise L^2 uzayı, Hilbert uzayının bir sınıfıdır.

2.1.3. Gateaux türevi

Gateaux türevi Fransız matematikçi René Gateaux tarafından Banach uzayları gibi yerel konveks topolojik vektör uzayları arasındaki fonksiyonlar için tanımlanmıştır. Banach uzayındaki Fréchet türevi gibi, Gateaux türevi genellikle varyasyonlar ve fizik hesaplarında yaygın olarak kullanılan fonksiyonel türevi resmileştirmek için kullanılır.

X ve Y yerel konveks topolojik vektör uzayları ve $U \subset X$ açık küme, $F: X \rightarrow Y$ olsun. F fonksiyonunun $u \in U$ noktasındaki $\varphi \in X$ yönündeki Gateaux diferansiyeli,

$$dF(u; \varphi) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{F(u+\tau\varphi) - F(u)}{\tau} = \left. \frac{d}{d\tau} F(u + \tau\varphi) \right|_{\tau=0}, \quad (2.4)$$

olarak tanımlanır.

Eğer $\forall \varphi \in X$ yönünde limit varsa, o zaman F fonksiyonu u noktasında Gateaux türevlenebilir.

2.1.4. Yönlü türev

Matematikte verilmiş bir x noktasındaki ve o noktadaki v vektörü boyunca çok değişkenli bir fonksiyonun yönlü türevi, fonksiyonun x noktasında v vektörü boyunca anlık değişim oranını temsil eder. Bu yüzden kısmi türev fikrinin genelleştirmesidir çünkü kısmi türevler alınırken yön her zaman koordinat eksenlerine paralel olarak alınmaktadır. Yönlü türev, Gateaux türevinin özel bir durumudur.

$f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ skaler fonksiyonunun bir $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ vektörü boyunca yönlü türevi,

$$\nabla_{\vec{v}} f(\vec{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{v}) - f(\vec{x})}{h} \quad (2.5)$$

limiti tarafından verilen fonksiyondur.

∇_v yerine D_v de kullanılmaktadır. Eğer f fonksiyonu $\vec{x}$ te türevlenebilir ise, o zaman yönlü türev herhangi bir $\vec{v}$ vektörü boyunca vardır ve

$$\nabla_{\vec{v}} f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{v} \quad (2.6)$$

olur.

2.1.5. Frechet türevi

Frechet türevi Banach uzayında tanımlı bir türevdir. Genellikle tek değişkene bağlı reel değerli fonksiyonun türevini çok değişkenli vektör değerli fonksiyona genellemek için ve varyasyon analizinde yaygın olarak kullanılan fonksiyonel türevi tanımlamada kullanılır. Frechet türevi Gateaux türevine zıt olmalıdır.

V ve W norm vektör uzayları olsun ve $U \subset V$, V 'nin açık alt kümesi olsun. Eğer, sınırlı lineer operatör $A: V \rightarrow W$,

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Ah\|_W}{\|h\|_V} = 0 \quad (2.7)$$

eşitliğini sağlıyorsa, $f: U \rightarrow W$ fonksiyonu $x \in U$ noktasında Frechet türevlenebilir.

Buradaki limit, V ve W metrik uzaylarında tanımlı f fonksiyonunun limitidir.

2.2. Matematiksel Optimizasyon Problemi

Matematiksel bir optimizasyon problemi,

$$(P) \begin{cases} \inf_{u \in S} f(u) \\ u \in S \subseteq U \end{cases} \quad (2.8)$$

şeklinde ifade edilir. Burada

u : Karar değişkeni ve U uzayı içerisinde tanımlı bir S kümesinin elemanıdır.

f : Maliyet fonksiyonu

(P) probleminin çözümü, en düşük maliyet olan f^* 'ın hesaplanmasıdır. Yani $f^* = \inf_{u \in S} f(u)$ değerine (P) nin optimal değeri denir. Bu durumda $\forall u \in S$ için $f(u) \geq f^*$ eşitsizliği geçerlidir.

2.2.1. Optimal çözüm

(P) nin çözümü olan f^* için bir $u^* \in S$ aranır. Yani $f^* = f(u^*)$ biçiminde ifade edilebilir. Burada u^* değerine optimal çözüm denir.

2.2.2. Dışbükey küme

Bir $S \subseteq X$ kümesi verilsin. Her $\lambda \in (0,1)$, $x \in S$ ve $y \in S$ için $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$ koşulu sağlanıyorsa bu kümeye dışbükey (konveks) küme denir.

2.2.3. Dışbükey fonksiyon

S dışbükey bir küme olmak üzere $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x, y \in S$ ve $\lambda \in (0,1)$ için,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (2.9)$$

sağlanıyorsa f fonksiyonuna dışbükey fonksiyon denir.

2.2.4. Jensen eşitsizliği

f fonksiyonu dışbükey bir küme üzerinde tanımlanmış dışbükey bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\forall \lambda_i \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ için,

$$f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \quad (2.10)$$

eşitliği sağlanır.

2.2.5. Dışbükeyliğin gerek ve yeter koşulları

1. Mertebeden Koşullar

f fonksiyonu dışbükey bir küme olan S üzerinde tanımlı ve $f \in C^1$ olsun. O zaman,

$$“f \text{ dışbükeydir}” \Leftrightarrow f(x) + \nabla_x f(x)(y - x) \leq f(y), \forall x, y \in S$$

olur.

2. Mertebeden Koşullar

f fonksiyonu dışbükey bir küme olan S üzerinde tanımlı ve $f \in C^2$ olsun. O zaman,

$$“f \text{ dışbükeydir}” \Leftrightarrow \nabla_x^2 f(x) \geq 0, \forall x \in S$$

olur.

2.3. Optimal Kontrol Problemleri

Bir optimizasyon probleminde kısıtlayıcı olarak bir diferansiyel denklem ele alınabilir. Bu denklem adi diferansiyel denklem (ODE), kısmi diferansiyel denklem (PDE) veya stokastik diferansiyel denklem (SDE) olarak karşımıza çıkabilir. Optimal kontrol probleminde optimizasyonu alınacak maliyet fonksiyonu hem bir karar değişkenine hem de bir durum değişkenine bağlı olur.

Optimal kontrol problemi,

$$(P) \begin{cases} \min_{(y,u)} J(y,u) \\ e(y,u) = 0 \\ g(y,u) \geq 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlanır. Burada,

u : Karar değişkeni (kontrol parametresi),

y : Durum değişkeni (state variable),

$e(y, u) = 0$ Adi diferansiyel denklem/ kısmi diferansiyel denklem/ stokastik diferansiyel denklem,

$g(y, u) \geq 0$ eşitsizlikleri gösterir.

Bazı optimal kontrol problemi örnekleri de şöyle sıralanabilir:

$$(P) \begin{cases} \min_{(x,u)} J(x, u) \\ dx = f(x(t), u(t), t), \\ -1 \leq u(t) \leq 1, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \Rightarrow \text{Adi Diferansiyel Denklemin Optimal Kontrol Problemi}$$

$$(P) \begin{cases} \min_{(y,u)} J(y, u) = \frac{1}{2} \|y - y_d\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|u^2\|, \\ y_t - y_{xx} = \sin x + u, \\ y(0) = y(1) = 1, \\ 0 \leq u \leq 1. \end{cases} \Rightarrow \text{Kısmi Diferansiyel Denklem}$$

$$(P) \begin{cases} \min_{(y,u)} J(y, u) = E(\int_0^1 y^2 + \alpha u^2 ds), \\ dy = (y + u)dt + \lambda dW. \end{cases} \Rightarrow \text{Stokastik Optimal Kontrol Denklemi}$$

dir.

2.3.1. Optimal kontrol problemlerinde gereklilik koşulları

Bir (λ_0, λ) parametresi şu şekilde tanımlansın;

$$(\lambda_0, \lambda) = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n): [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \quad (2.12)$$

Bu parametreye çarpan parametresi (adjoint değişkeni) denir.

Hamilton fonksiyonu,

$H: [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$H(t, x, u, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(t, x, u) + \lambda g(t, x, u) \quad (2.13)$$

şeklinde ifade edilir. O halde Hamilton fonksiyonu için optimizasyon problemi,

$$(P) \begin{cases} \max_{u \in A} J(u) = \int_{t_0}^T f(t, x, u) dt + h(x, t), \\ \dot{x} = g(t, \dot{x}, u), \\ x(t_0) = x^0. \end{cases} \quad (2.14)$$

biçiminde tanımlanır.

2.3.2. Pontryagin maksimum ilkesi

Bir (P) problemi için f ve g sürekli türevlenebilir fonksiyonlar olsun ve u^* bir optimal kontrol, x^* da buna karşılık gelen yörünge (trajectory) olsun. Bu durumda (λ_0^*, λ^*) vardır. Burada λ_0^* sabit olup $\lambda^*: [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de sürekli. Ayrıca her $t \in [t_0, T]$ için,

$$H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda_0^*, \lambda^*(t)) = \max_{v \in U} H(t, x^*(t), v, \lambda_0^*, \lambda^*(t)) \quad (2.15)$$

olur ve eşlenik (adjoint) denklemi,

$$\text{i) } \dot{\lambda}^* = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\nabla_x H \quad (2.16)$$

$$\text{ii) } \lambda^*(T) = 0 \quad (2.17)$$

$$\text{iii) } \lambda^*(0) = 1 \quad (2.18)$$

koşullarını sağlar. Eş. 2.5 'e denk gelen yörünge (çözüm),

$$\dot{x}^* = \nabla_{\lambda} H \quad (2.19)$$

eşitliğini sağlar. Eğer $U = \mathbb{R}^k$ ise,

$$\nabla_{u^*} H = 0 \quad (2.20)$$

olur.

Örnek 2.1

$$(P) \begin{cases} \max_{u \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x - u^2) dt \\ \dot{x} = u \\ g(t, \dot{x}, u) = \dot{x} \\ x(0) = 2 \\ x(t_0) = x^0 \end{cases} \quad (2.21)$$

(P)' yi Pontryagin maksimum ilkesini kullanarak çözelim.

Hamilton fonksiyonunu yazarsak,

$$H(t, x, u, \lambda) = x - u^2 + \lambda u \quad (2.22)$$

elde edilir ve eşlenik denklemi için Eş. 2.16-2.17 kullanılarak,

$$\text{i) } \frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{\lambda}^* = 1 \quad (2.23)$$

$$\text{ii) } \lambda^*(1) = 0 \quad (2.24)$$

eşitlikleri yazılır ve eşlenik denklemi,

$$\lambda^* = -t + 1 \quad (2.25)$$

elde edilir. Daha sonra Eş. 2.10'dan,

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -2u^* + \lambda^* = 0 \Rightarrow u^* = \frac{\lambda^*}{2} = \frac{1-t}{2}$$

yazılır ve bu durumda optimal çözüm,

$$\begin{cases} x^* = \frac{1-t}{2} \\ x^*(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow x^* = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4} + 2 \quad (2.26)$$

elde edilir.

2.3.3. Optimal kontrol probleminin çözümü için Hamilton-Jacobi-Bellman yöntemi

$\forall x \in \mathbb{R}^n$ ve $0 < t < T$ için $V(x, t)$ fonksiyonu eğer mümkün olan maksimum maliyet değerini veriyorsa bu fonksiyona değer fonksiyonu (value function) denir ve

$$\begin{cases} V(x, t) = \sup_{u \in U} J(u) \\ V(x, t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (2.27)$$

şeklinde tanımlanır. Şimdi bu V fonksiyonunun lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklemi sağladığını görelim.

Değer fonksiyonu $V(x, t)$ nin sürekli türevlenebilir olduğu varsayalım. Bu durumda V fonksiyonu,

$$\begin{cases} V(x, t) = \max_{u \in U} \{g(x, u) \cdot \nabla_x V(x, t) + f(x, u)\} = 0 \\ V(x, t) = h(x) \end{cases} \quad (2.28)$$

Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) denklemini sağlar.

HJB denklemi,

$$V_t + H(x, \nabla_x V) = 0 \quad (2.29)$$

biçiminde de kullanılabilir. Buradaki H fonksiyonu Hamilton fonksiyonudur. HJB denklemi için algoritma,

- i) HJB denklemi çözülüp $V(x, t)$ hesaplanır.
- ii) $u^*(t)$ geri dönüt kontrolünü (feedback control) bulmak için $V(x, t)$ kullanılır.
- iii) $V_t + g(t, x, u(x, t)) \cdot \nabla_x V(x, t) + f(t, x, u(x, t)) = 0$ çözülür.
- iv) $x^*(t)$ hesaplanır.

Örnek 2.2

$$(P) \begin{cases} \max \int_0^1 (x - u^2) dt \\ \dot{x} = u \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

(P)'yi HJB yöntemiyle çözelim.

HJB denklemini yazarsak,

$$V_t + \max\{u \cdot V_x + x - u^2\} = 0 \quad (2.30)$$

olur. Şimdi de $V(x, t)$ için $u^*(t)$ yi bulalım.

$V(x, 1) = 0$ yazarız ve Eş. 2.30'un u 'ya göre türevini alırsak,

$$\frac{\partial}{\partial u}(u \cdot V_x + x - u^2) = 0 \Rightarrow V_x - 2u = 0 \Rightarrow u = \frac{V_x}{2} \quad (2.31)$$

elde edilir ve Eş. 2.30'da yerine yazılırsa,

$$V_t + \frac{V_x}{2} \cdot V_x + x - \left(\frac{V_x}{2}\right)^2 = 0 \quad (2.32)$$

olur. Elde edilen bu denklem düzenlenerek,

$$V_t + x + \frac{V_x^2}{4} = 0 \quad (2.33)$$

kısmi diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemi çözersek,

$$V(x, t) = -\frac{t^3}{12} + \frac{t^2}{4} - \frac{t}{4} + x - xt + \frac{1}{12} \quad (2.34)$$

eşitliğini elde ederiz.

Eş. 2.31'den geri dönüt kontrolü,

$$u^*(t) = \frac{1-t}{2} \quad (2.35)$$

bulunur ve optimal çözüm,

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1-t}{2} \\ x(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow x^*(t) = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4} + 2 \quad (2.36)$$

bulunur.

2.4. Stokastik Optimal Kontrol

Stokastik optimal kontrol, optimal kontrol teorisinin bir alt dalıdır ve rassallık içeren matematiksel bir modeldir. Yani zaman içerisinde olasılık kurallarına göre değişen sistemleri modellemek için kullanılır. Belirsizlik altındaki tüm seçimler arasından en iyi parametre değerlerini seçmek stokastik optimal kontrolün amacıdır. Stokastik optimal kontrolde, kontrollü sistemler stokastik diferansiyel denklemler (SDE'ler) ile tanımlanmaktadır.

2.4.1. Stokastik süreç

Bir stokastik süreç, bir olasılık uzayı (Ω, F, P) üzerinde tanımlanmış rassal değişkenlerin bir $X = (X_t)_{t \in T}$ topluluğudur. Burada, Ω örnek uzayı bir rassal deney veya fenomenin tüm mümkün sonuçlarının kümesini göstermektedir. F olayların kümesi bir σ -cebridir. Yani Ω nın aşağıdaki koşulları sağlayan alt kümeleri sınıfıdır.

- i) $A \in F$ ise $A^c = \Omega - A \in F$,
- ii) $n = 1, 2, \dots$ için $A_n \in F$ ise $\bigcup_n A_n \in F$.

$A \in F$ kümelerine olaylar veya ölçülebilir kümeler denir. (Ω, F) ise ölçülebilir uzay olarak adlandırılır. P ise (Ω, F) üzerinde tanımlanmış bir olasılık ölçümüdür. Yani $P: F \rightarrow [0, 1]$ dir.

Stokastik süreci oluşturan her bir rassal değişken $X_t: \Omega \rightarrow S$ şeklinde bir fonksiyondur.

2.4.2. İndeks kümesi

Stokastik sürecin indis parametresi stokastik sürecin tipini belirler. Örneğin $I = \{0, 1, 2, \dots\}$ ise süreç kesikli zamanlı stokastik süreç olarak adlandırılır ve böyle bir süreç $X =$

$\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ şeklinde gösterilir. Eğer $I = [0, \infty]$ ise sürekli parametrelili (zamanlı) stokastik süreç elde edilir ve $X = (X_t)_{0 \leq t < \infty}$ şeklinde gösterilir. t indeksi zamanı temsil eder ve X_t , t zamanındaki sürecin durumu ya da pozisyonu olarak adlandırılır.

2.4.3. Durum uzayı S

Durum uzayı S stokastik süreci oluşturan X_t rassal değişkenlerin aldığı değerlerden oluşur. X_t , sürecin t adım sonunda bulunacağı durum olarak yorumlanır. Rassal değişkenler ve rassal vektörlerle çalışıldığından $S \subset R$ veya $S \subset R^n$ dir. Eğer, t indeksi zaman olarak yorumlanırsa zamanla elde edilen informasyonun da açıklamaya dahil edilmesi gerekir. Bilgi akışını modellemek için filtrasyon (süzgeç) gösterimi kullanılır.

2.4.4. Filtrasyon ve uyarlanabilirlik

Eğer F aşağıdaki şekilde artan sigma cebirlerinin bir dizisini içeriyorsa $(\Omega, F, (F_t)_{t \in I}, P)$ olasılık uzayına filtre edilmiş olasılık uzayı denir.

$$F_s \subseteq F_t, \quad s, t \in T \quad \text{ve} \quad s \leq t. \quad (2.37)$$

İndis kümesindeki t için X_t , F_t ölçülebilir ise $X = (X_t; t \in I)$ stokastik sürecine uyarlanmış denir.

Uygulamada genellikle enformasyon X_t sürecini n kendisinden elde edilir. Yani başka dışsal enformasyon kaynağı mevcut değildir. Bu durumda $X = (X_t; t \in I)$ sürecinin kendisi tarafından doğurulan enformasyona standart filtrasyon denir ve

$$F_t = \sigma(\{X_u; u \leq t, u \in I\}) \quad (2.38)$$

şeklinde gösterilir.

2.4.5. Brown hareketi

Bir stokastik süreç (Ω, F, P) aynı olasılık uzayında tanımlı $X = (X_t; t \in I)$ rassal değişkenlerin topluluğudur. Brown hareket $(T > 0$ için $W_t: t \in [0, T])$ aşağıdaki özellikleri sağlayan reel değerli bir stokastik süreçtir.

- Bağımsız artışlar: Bütün $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_m \leq T$ için artışlar, $W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_m} - W_{t_{m-1}}$ şeklindedir.
- Sabit artışlar: Eğer $0 \leq s < t \leq T$ ise, $W_t - W_s$ ve $W_{t-s} - W_0$ artışları aynı olasılık kanuna sahiptir.
- Sürecin artımları süreklidir.

Eğer Brown hareket P için,

$$W_0 = 0, \quad E(W_t) = 0, \quad E(W_t^2) = t \quad (2.39)$$

eşitlikleri sağlanıyorsa standart Brown hareket ya da Wiener süreci olarak adlandırılır. Şu ana kadar başka bir şey belirtilmediği sürece Brown hareketin standart olduğunu varsaydık.

Standart 1-boyutlu Brown hareket $(W_t)_{t \geq 0}$ için,

$$dW(t).dW(t) = dt, \quad dW(t).dt = 0, \quad dt.dt = 0 \quad (2.40)$$

karakterizasyon özelliklerini sağlar.

2.4.6. Ito integrali

$(B_t)_{t \geq 0}$, F_t filtrasyonuna göre uyarlanmış, standart Brownian hareket ve $(X_t)_{t \geq 0}$, F_t filtrasyonuna göre uyarlanmış bir stokastik süreç olsun. $(X_t)_{t \geq 0}$, $[0, T]$ aralığında kare integrallenebilir bir stokastik süreçtir. Yani, her T için $E(\int_0^T X_t^2 dt) < \infty$ dur. $[0, T]$ aralığının $\pi_n = \{0 = t_0 < \dots < t_n = T\}$ parçalanması için $\|\pi_n\| = \max\{t_{i+1} - t_i\}$ olmak üzere Ito integrali,

$$I(T) = \int_0^T X_t dB_t \quad (2.41)$$

şeklinde gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\lim_{\|\pi_n\| \rightarrow 0} E \left[\sum_{i=0}^{n-1} X(t_i) [B(t_{i+1}) - B(t_i)] - \int_0^T X(t) dB_t \right]^2 = 0. \quad (2.42)$$

2.4.7. Monte Carlo Simülasyonu

Monte Carlo Simülasyonu genelde raslantısal (random) değişkenlerin sisteme etkisinin incelenmesi için kullanılır ve raslantısal değişkenler için rastgele sayılar üreten bir algoritma ile çalışır.

Monte Carlo Simülasyonu yapılacak değişkenler belli bir istatistiksel dağılıma uyacak şekilde üretilebilir. Bunun için olasılık dağılım fonksiyonunun tersi kullanılır. Bilgisayar tarafından belirli bir aralıkta $[0-1]$ düzenli (uniform) olarak üretilen rastgele sayılar olasılık dağılım fonksiyonlarının tersi kullanılarak kolaylıkla herhangi bir dağılıma dönüştürülebilir.

Örneğin iki rassal değişkene (X_1, X_2) bağlı olan Y değişkeninin bu değişkenlerle olan ilişkisi f fonksiyonuyla tanımlanmış olsun.

$$Y = f(X_1, X_2)$$

Eğer X_1 ve X_2 değişkenlerinin dağılımı belliyse (örneğin: Normal Dağılım) ve aynı zamanda dağılım özellikleri de biliniyorsa (μ_x : Ortalama ve σ_x : Standart sapma) X değerleri için defalarca rastgele sayılar üretilerek f fonksiyonuyla Y değerleri hesaplanabilir.

Buradan da Y ile ilgili istatistiksel bilgilere ulaşılabilir. Ne kadar çok örnekleme yapılırsa, o kadar iyi sonuçlar elde edilir.

2.4.8. Stokastik optimal kontrol problemi

$(W(t))_{t_0 \leq t \leq T}$, filtrelenmiş olasılık uzayı $(\Omega, F, (F(t))_{t \in [t_0, T]}, P)$ da 1-boyutlu Brown hareket ve $t_0 > 0$ olmak üzere $\Omega = [t_0, T]$ sabit zaman aralığı olsun. Bu olasılık uzayında reel değerli kare integrallenebilen $F(t)$ -uyarlanmış süreç uzayı $L^2(t_0, T)$ olarak adlandırılır.

Kontrollü bir stokastik diferansiyel denklem,

$$d(y(t)) = f(t, y(t), u(t))dt + h(t, y(t), u(t))dW(t) \quad (t \in [0, T]), \quad y(t_0) = y_0 \quad (2.43)$$

şeklinde ve $f(t, y(t), u(t))$ ile $h(t, y(t), u(t))$, $(t, y(t), u(t))$ e göre sürekli türevlenebilen fonksiyonlardır ve türevleri düzgün sınırlıdır. Bu varsayımlar altında Eş.

2.43' ün tek bir çözümü vardır. Ayrıca $u = (u(t))_{t \in [t_0, T]}$, kontrol uzayı $L^2(t_0, T)$ de kapalı bir konveks küme olan A da kontrol sürecidir.

Optimal kontrol probleminin maliyet fonksiyonu;

$$(P) \begin{cases} \min_{u \in A} E \left[\phi(T, y(T)) + \int_{t_0}^T g(s, y(s), u(s)) ds \right] \\ d(y(t)) = f(t, y(t), u(t)) dt + h(t, y(t), u(t)) dW(t), (t \in [0, T]) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.44)$$

şeklinde ve $\phi(T, y(T))$ ve $g(t, y(t), u(t))$ birinci dereceden türevlenebilen sürekli düzgün fonksiyonlardır. Bu problemi çözen kontrol süreci $u^*(t)$ ise optimal kontrol olarak adlandırılır.

2.5. Hamilton-Jacobi-Bellman Denklemi

Maliyet fonksiyonu $J(t, y)$,

$$J(t, y) = \min_{u \in A} E \left[\phi(T, y(T)) + \int_t^T g(s, y, u) ds \right] \quad (2.45)$$

olsun ve bu maliyet fonksiyonunu yeterince küçük bir $\Delta t > 0$ için iki kısma ayıralım:

$$J(t, y) = \min_{u \in A} E \left[\int_t^{t+\Delta t} g(s, y, u) ds + \underbrace{\phi(T, y(T)) + \int_{t+\Delta t}^T g(s, y, u) ds}_{J(t+\Delta t, y)} \right] \quad (2.46)$$

olur. Burada y ve u değişkenleri s 'e bağlı ve y ile u sırasıyla $y(s)$ ve $u(s)$ yerine kullanılacaktır. Bundan sonraki aşamalarda da sadelik için bu kısaltmayı değişkenler, Brown hareketi W ve dW artışı için dW_s yerine kullanacağız.

Eş. 2.46'dan hareketle Ito formülü kullanılarak,

$$\begin{aligned} J(t + \Delta t, y) = J(t, y) + \int_t^{t+\Delta t} & \left(\frac{\partial J(s, y)}{\partial s} + f^T(s, y, u) \frac{\partial J(s, y)}{\partial y} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \frac{\partial^2 J(s, y)}{\partial y^2} h^T(s, y, u) h(s, y, u) \right\} \right) ds \end{aligned}$$

$$+ \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{\partial J(s,y)}{\partial s} h(s,y,u) \right) dW \quad (2.47)$$

yazılır. Burada $tr \left\{ \frac{\partial^2 J(s,y)}{\partial y^2} h^T(s,y,u) h(s,y,u) \right\}$ ifadesi $\frac{\partial^2 J(s,y)}{\partial y^2} h^T(s,y,u) h(s,y,u)$ matrisinin izini temsil eder. Bir boyutlu durumda,

$$\frac{\partial^2 J(s,y)}{\partial y^2} h^T(s,y,u) h(s,y,u) = \frac{\partial^2 J(s,y)}{\partial y^2} h^2(s,y,u) \quad (2.48)$$

olur.

Şimdi Eş. 2.47'i Eş. 2.46'da yerine koyarsak,

$$\begin{aligned} J(t,y) &= \min_{u \in A} E \left[\int_t^{t+\Delta t} g(s,y,u) ds + J(t+\Delta t,y) \right] \\ &= \min_{u \in A} E \left[\int_t^{t+\Delta t} g(s,y,u) ds + J(t,y) + \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{\partial J(s,y)}{\partial s} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + f^T(s,y,u) \frac{\partial J(s,y)}{\partial y} + \frac{1}{2} tr \left\{ \frac{\partial^2 J(s,y)}{\partial y^2} h^T(s,y,u) h(s,y,u) \right\} \right) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{\partial J(s,y)}{\partial s} h(s,y,u) \right) dW \right] \\ &= \min_{u \in A} E \left[\int_t^{t+\Delta t} g(s,y,u) ds + J(t,y) + \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{\partial J(s,y)}{\partial s} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + f^T(s,y,u) \frac{\partial J(s,y)}{\partial y} + \frac{1}{2} tr \left\{ \frac{\partial^2 J(s,y)}{\partial y^2} h^T(s,y,u) h(s,y,u) \right\} \right) ds \right] \end{aligned} \quad (2.49)$$

eşitliği elde edilir. Yeterince küçük bir $\Delta t > 0$ için eşitlik,

$$\begin{aligned} 0 &= \min_{u \in A} E \left[\int_t^{t+\Delta t} \left(g(s,y,u) + \frac{\partial J(s,y)}{\partial s} + f^T(s,y,u) \frac{\partial J(s,y)}{\partial y} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} tr \left\{ \frac{\partial^2 J(s,y)}{\partial y^2} h^T(s,y,u) h(s,y,u) \right\} \right) ds \right] \end{aligned} \quad (2.50)$$

olur ve böylece aşağıdaki Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) denklemini elde edilir:

$$\begin{aligned} 0 &= \min_{u \in A} \left(g(t,y,u) + \frac{\partial J(t,y)}{\partial t} + f^T(t,y,u) \frac{\partial J(t,y)}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} tr \left\{ \frac{\partial^2 J(t,y)}{\partial y^2} h^T(t,y,u) h(t,y,u) \right\} \right). \end{aligned} \quad (2.51)$$

2.6. Stokastik Pontryagin Maksimum İlkesi

Optimal kontrol problemi (P) için Hamiltonian fonksiyonu;

$$H(t, y, p, u, q) := g(t, y, u) + f^T(t, y, u)p + \frac{1}{2} \text{tr}\{qh(t, y, u)h^T(t, y, u)\} \quad (2.52)$$

olur. Burada $(p(t), q(t))$ süreci $(F(t))_{t \in [t_0, T]}$ e göre uyarlanmıştır ve

$$p(t) = J_y(t, y), \quad (2.53)$$

$$q(t) = \frac{\partial p}{\partial y} = J_{yy}(t, y) \quad (2.54)$$

eşitliklerini sağlar.

Bu çalışmada t, y, yy vb. altındisleri $J(t, y)$ nin bu değişkenlere göre parçalı türevleri olarak kullanılacaktır.

Şimdi Hamiltonian fonksiyonunu kullanarak, HJB denklemini yani Eş.2.51'i yeniden yazarsak,

$$-J_t(t, y) = \min_{u \in A} H(t, y(t), u(t), p(t), q(t)) \quad (2.55)$$

halini alır.

Varsayalım ki burada bilinen bir optimal kontrol $u^*(t, y(t), p(t), q(t))$, optimal kontrol problemini şu şekilde çözsün;

$$\begin{aligned} H^*(t, y, p, q) &= H(t, y, u^*(t, y, p, q), p, q) \\ &= g(t, y, p, q) + f^T(t, y, p, q)p + \frac{1}{2} \text{tr}\{qh(t, y, p, q)h^T(t, y, p, q)\} \\ &= -J_t(t, y). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Buna göre, dy ve dp durum ve adjoint diferansiyelleri için SDE leri yazarız.

$$\begin{aligned}
dy &= f(t, y, u^*)dt + h(t, y, u^*)dW \\
&= H_p^*(t, y, p, q)dt + h(t, y, p, q)dW
\end{aligned} \tag{2.57}$$

ve Eş. 2.53’de $p(t)$ için Ito formülünü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
dp &= J_{yt}(t, y)dt + J_{yy}(t, y)dy + \frac{1}{2}J_{yyy}(t, y)dydy \\
&= (J_{yt}(t, y) + J_{yy}(t, y)f(t, y, u) + \frac{1}{2}tr\{J_{yyy}(t, y)h(t, y, u)h^T(t, y, u)\})dt \\
&\quad + J_{yy}(t, y)h(t, y, u)dW
\end{aligned} \tag{2.58}$$

elde edilir. Böylece, Eş. 2.56’nın parçalı türevini y ’e göre $J_{yt}(t, y)$ yi elde etmek için alırsak,

$$\begin{aligned}
-J_{yt}(t, y) &= H_y^*(t, y, p, q) + H_p^*(t, y, p, q)\frac{\partial p}{\partial y} + H_q^*(t, y, p, q)\frac{\partial q}{\partial y} \\
&= H_y^*(t, y, p, q) + J_{yy}(t, y)f(t, y, u) \\
&\quad + \frac{1}{2}tr\{J_{yyy}(t, y)h(t, y, u)h^T(t, y, u)\}
\end{aligned} \tag{2.59}$$

eşitliği elde edilir. Eş. 2.59’u da Eş. 2.58’de yerine koyarak,

$$dp = -H_y^*(t, y, p, q)dt + J_{yy}(t, y)h(t, y, p, q)dW \tag{2.60}$$

$$= -H_y^*(t, y, p, q)dt + qh(t, y, p, q)dW \tag{2.61}$$

eşlenik denklemi elde edilir.

Sonuç olarak, (P) probleminin ileri-geri stokastik diferansiyel denklem sistemi (FBSDE) ifade edilebilir. Stokastik Maksimum İlkesi,

$$\begin{cases}
dy = H_p(t, y, u, p, q)dt + h(t, y, u, p, q)dW, (t \in [t_0, T]) \\
dp = -H_y(t, y, u, p, q)dt + qh(t, y, u, p, q)dW, (t \in [t_0, T]) \\
0 = H_u(t, y, u, p, q), (t \in [t_0, T]) \\
y(t_0) = y^0, \\
p(T) = \phi_y(T, y(T)), \\
H^*(t, y, p, q) = \min_{u \in A} H(t, y, u, p, q)
\end{cases} \quad (2.62)$$

şeklinde yazılır.

3. STOKASTİK OPTİMAL KONTROL İÇİN BİR GRADYAN ALGORİTMASI

3.1. Giriş

Stokastik optimal kontrol problemlerinde amaç beklenen en iyi sonuca ulaşmaktır ve bu amaçla karar vericiler tüm olası kararlar için en uygun kararı seçmelidir. Bu bölümde ise bir stokastik optimal kontrol problemi çözümü için basit ama etkili bir gradyan projeksiyon algoritması önerilmektedir. Temel iterasyon şeması, bazı Euler metotları aracılığıyla durum ve yardımcı durum denklemlerini çözerek ve Monte Carlo simülasyonu kullanarak maliyet fonksiyonunun gradyan projeksiyonunu hesaplamaktır.

$(\Omega, F, \{F_t\}_{t \geq 0}, P)$ 1-boyutlu standart Brown hareket $\{W_t\}_{t \geq 0}$ tarafından üretilen doğal filtrasyonu $\{F_t\}_{t \geq 0}$ olan tam bir olasılık uzayı olsun. $T > 0$ zaman değişkeni ve $L^2(\Omega, F_t; R)$ ise reel değerli kare integrallenebilir F_t –ölçülebilir rassal değişkenler uzayı olsun. $L_F^2([0, T]; R)$ tarafından reel değerli kare integrallenebilir F_t uyarlanmış süreç uzayı,

$$E \left\{ \int_0^T |y_t|^2 dt \right\} < +\infty \quad (3.1)$$

eşitsizliğini sağlar.

Bu çalışmada kullanılacak olan stokastik kontrol problemin amaç fonksiyonu,

$$J(y, u) = \int_0^T E[h(y, u)] dt + \int_0^T j(u) dt \quad (3.2)$$

şeklinde ve fonksiyonda yer alan h ve j sürekli birinci mertebeden türevlenebilen düzgün fonksiyonlardır. $u \in U_{ad}$ ise deterministik kontroldür ve burada U_{ad} , $L^2(0, T)$ kontrol uzayında kapalı bir konveks kümedir.

Eğer $(J(y, u), u)$ nun minimumu elde edilirse kabul edilir kontrol u^* optimal olarak adlandırılır ve burada durum değişkeni $y(u) \in L_F^2([0, T]; R)$ ifadesi,

$$dy = f(t, y, u)dt + g(t, y)dW_t, \quad y(0) = y_0 \quad (3.3)$$

tarafından üretilen bir stokastik süreçtir.

Bu tezde kullanılacak olan f ve g , (t, y, u) ve (t, y) ye göre sürekli türevlenebilir ve türevleri sınırlı fonksiyonlardır. Yukarıdaki varsayımlar altında Eş. 3.3'ün tek çözümünün $y(\cdot) \in L_F^2([0, T]: R)$ olduğu $(y_0, u(\cdot)) \in R \times U_{ad}$ için kabul edilir [33]. Böyle bir $y(\cdot)$ ise karşılık gelen yörünge olarak adlandırılır.

3.2. İndirgenmiş Amaç Fonksiyonu ve Özellikleri

$J(u) = J(y(u), u)$ indirgenmiş amaç fonksiyonu ve $y(u)$ ise Eş. 3.3 ün çözümü olsun. Öncelikle genel uzayda indirgenmiş kontrol problemi için bu projeksiyon metodunu ifade edelim. U gerçekte Hilbert uzayında $U' = U$ ve K ' da U ' nun kapalı konveks alt kümesi olsun. U ' da kapalı fonksiyon olan $J(u)$ 'nun

$$\min_{u \in K} J(u) \quad (3.4)$$

değerine bakalım. Eş. 3.4 için yaygın olarak kullanılan gerekli ve yeterli optimalite koşulu;

$$(J'(u), v - u) \geq 0, \quad \forall v \in K \quad (3.5)$$

şeklindedir. Bunun için Teorem 3.1'e bakacağız fakat teoreme geçmeden önce U gerçekte Hilbert uzayı için bazı özellikler verelim.

$u, v \in U$ olmak üzere,

i) U uzayında sürekli bir bilinear form simetrik;

$$u, v \rightarrow b(u, v), \quad b(u, v) = b(v, u) \quad \forall u, v \in U.$$

ii) U uzayında sürekli bir lineer form;

$$v \rightarrow L(v).$$

iii) U_{ad} , U 'da kapalı konveks bir kümedir.

Ayrıca bu çalışmada U nun normu $\|\cdot\|$ olarak gösterilecek olup $\|\cdot\|_b = \sqrt{b(\cdot, \cdot)}$ ise $\|\cdot\|_U$ 'ya denktir. U_{ad} ise kabul edilebilir kontrollör kümesidir.

Teorem 3.1

İkinci dereceden (kuadratik) fonksiyon,

$$J(v) = b(v, v) - 2L(v) \quad (3.6)$$

U_{ad} kümesi üzerinde minimize edilmelidir. Ayrıca $b(u, v)$ sürekli bilineer formu c_0 ve c_1 sabit olmak üzere,

$$|b(u, v)| \leq c_1 \|u\|_U \|v\|_U, \quad \forall u, v \in U \quad (3.7)$$

$$b(u, u) \geq c_0 \|u\|_U^2 \quad (3.8)$$

eşitsizliklerini sağlar ve U_{ad} de öyle bir u elemanı vardır ki

$$J(u) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v) \quad (3.9)$$

eşitliğini sağlar.

O halde U_{ad} nin minimize edici elemanı u ,

$$b(u, v - u) \geq L(v - u), \quad \forall v \in U_{ad} \quad (3.10)$$

tarafından karakterize edilir.

İspat

u minimize edici eleman olsun. O zaman $\forall v \in U_{ad}$ ve $\theta \in [0,1]$ için,

$$J(u) \leq J((1 - \theta)u + \theta v) \quad (3.11)$$

yazılır ve düzenlenerek eşitsizliğin her iki tarafı θ a bölünürse,

$$\frac{1}{\theta} [J(u + \theta(v - u)) - J(u)] \geq 0 \quad (3.12)$$

elde edilmiş olunur. O halde Eş. 3.11'in limiti alınır,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} [J(u + \theta(v - u)) - J(u)] \geq 0 \quad (3.13)$$

şeklinde yazılır ve eğer limit varsa Eş. 3.11 yerine

$$J'(u) \cdot (v - u) \geq 0, \quad \forall v \in U_{ad} \quad (3.14)$$

denkliği yazılır. Böylece Eş. 3.4'ü sağlayan gerekli ve yeterli optimalite koşulu elde edilmiş oldu.

Şimdi izdüşüm operatörü $P_K^b U \rightarrow K$ yı şu şekilde tanımlayalım: $w \in U$ için $P_K^b w \in K$ aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$b(P_K^b w - w, P_K^b w - w) = \min_{u \in K} b(u - w, u - w) \quad (3.15)$$

Bu eşitlik de

$$b(P_K^b w - w, v - P_K^b w) \geq 0, \quad \forall v \in K \quad (3.16)$$

eşitliğine denktir.

P_K^b 'nin U da herhangi bir kapalı konveks alt küme için iyi tanımlı olduğu açıktır.

Eş. 3.5'i kullanarak Eş. 3.4'de yer alan u kontrolünün çözümü $\forall \rho > 0$ için,

$$u = P_K^b(u - \rho b^{-1} J'(u)) \quad (3.17)$$

olur. Burada eşitliğin her iki tarafı soldan b operatörü ile çarpılarak Eş. 3.17'i sağladığı görülür.

$$u = P_K^b(u - \rho b^{-1} J'(u))$$

$$bu = bP_K^b u - P_K^b \rho b b^{-1} J'(u)$$

$$(bu, u) = (bP_K^b u, u) - (P_K^b \rho J'(u), u)$$

$$(u, u) = (P_K^b u, u) - (P_K^b \rho J'(u), u)$$

$$(u, u) = P_K^b(u - \rho J'(u), u).$$

Şimdi de Eş. 3.4 'ün indirgenmiş kontrol problemi için iteratif şeması ($n = 0, 1, 2, \dots$) tanımlayalım:

$$\begin{cases} b(u_{n+\frac{1}{2}}, v) = b(u_n, v) - \rho_n(J'_n(u_n), v), \forall v \in U \\ u_{n+1} = P_b^K(u_{n+\frac{1}{2}}). \end{cases} \quad (3.18)$$

Burada J'_n , n . iterasyonda J' nin yaklaşık fonksiyonudur. Bu şema için aşağıdaki yakınsama sonucuna ulaşılır.

Teorem 3.2

J' nin Lipschitz ve düzgün monoton olduğunu varsayarsak c ve C pozitif sabitleri için,

$$|J'(u) - J'(v)| \leq C \|u - v\|_U, \quad \forall u, v \in U \quad (3.19)$$

$$(J'(u) - J'(v), u - v) \geq c \|u - v\|_U^2, \quad \forall u, v \in U \quad (3.20)$$

eşitlikleri sağlanır.

Ayrıca eğer J'_n, J' e aşağıdaki gibi düzgün yakınsıyorsa;

$$\|J'_n(u) - J'(u)\|_b \leq \varepsilon_n \rightarrow 0 \quad (3.21)$$

o zaman öyle bir $\varepsilon > 0$ vardır ki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\|_b = 0 \quad (3.22)$$

eşitliği $\rho_n < \varepsilon$ olması şartıyla sağlanır.

İspat

İterasyon şeması (Eş. 3.18) için,

$$u_{n+1} = P_K^b(u_n - \rho_n b^{-1} J'_n(u_n)) \quad (3.23)$$

denklemini yazılır.

Eş. 3.17 kullanılarak Eş. 3.19'dan çıkartılırsa,

$$u_{n+1} - u = P_K^b(u_n - \rho_n b^{-1} J'_n(u_n)) - P_K^b(u - \rho_n b^{-1} J'(u)) \quad (3.24)$$

elde edilir. Her iki tarafın normunun karesi alınırsa,

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - u\|_b^2 &= \|P_K^b(u_n - \rho_n b^{-1} J'_n(u_n)) - P_K^b(u - \rho_n b^{-1} J'(u))\|_b^2 \\ &\leq \|u_n - u - \rho_n b^{-1} (J'_n(u_n) - J'(u))\|_b^2 \\ &= \|u_n - u\|_b^2 + \underbrace{\|\rho_n b^{-1} (J'_n(u_n) - J'(u))\|_b^2}_{(3.25.1)} - 2b \underbrace{(\rho_n b^{-1} (J'_n(u_n) - J'(u)), u_n - u)}_{(3.25.2)} \end{aligned} \quad (3.25)$$

elde edilir. Bu eşitliği kısım kısım çözerek gidelim.

Eş. 3.25.1 için,

$$\begin{aligned} \|\rho_n b^{-1} (J'_n(u_n) - J'(u))\|_b^2 &= \|\rho_n b^{-1} (J'_n(u_n) - J'(u_n) + J'(u_n) - J'(u))\|_b^2 \\ &\leq \|\rho_n b^{-1} (J'_n(u_n) - J'(u_n))\|_b^2 + \|\rho_n b^{-1} (J'(u_n) - J'(u))\|_0^2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

eşitliği yazılır ve Eş. 3.19-3.21 kullanılarak,

$$\|\rho_n b^{-1} (J'_n(u_n) - J'(u))\|_b^2 \leq C \rho_n^2 (\|u_n - u\|_b^2 + \varepsilon_n^2) \quad (3.27)$$

elde edilir.

Daha sonra Eş. 3.25.2 için,

$$\begin{aligned}
& -2b(\rho_n b^{-1}(J'_n(u_n) - J'(u)), u_n - u) \\
& = -2b(\rho_n b^{-1}(J'_n(u_n) - J'(u_n) + J'(u_n) - J'(u)), u_n - u) \\
& \leq \underbrace{(-2\rho_n(J'_n(u_n) - J'(u_n)), u_n - u)}_{(3.28.1)} + \underbrace{(-2\rho_n(J'(u_n) - J'(u)), u_n - u)}_{(3.28.2)} \tag{3.28}
\end{aligned}$$

eşitliği yazılır. Bu eşitliği de iki parça halinde çözersek;

Eş. 3.28.1 için Eş. 3.20'den hareketle,

$$-2\rho_n(J'(u_n) - J'(u), u_n - u) \leq -c\rho_n\|u_n - u\|_b^2 \tag{3.29}$$

eşitliği yazılır.

Eş. 3.28.2 için ise Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
-2\rho_n(J'_n(u_n) - J'(u_n), u_n - u) & \leq 2\rho_n |-(J'_n(u_n) - J'(u_n), u_n - u)| \\
& \leq \underbrace{2\rho_n \|J'_n(u_n) - J'(u_n)\|_b}_{(3.30.1)} \cdot \|u_n - u\|_b \tag{3.30}
\end{aligned}$$

yazılır ve burada Eş. 3.30.1 için Eş. 3.21 kullanılarak Eş. 3.30,

$$-2\rho_n(J'_n(u_n) - J'(u_n), u_n - u) \leq 2\rho_n \varepsilon_n \|u_n - u\|_b \tag{3.31}$$

halini alır.

Daha sonra Eş. 3.29 ve Eş. 3.31, Eş. 3.28.1-2'de yerlerine yazılarak,

$$\begin{aligned}
-2b(\rho_n b^{-1}(J'_n(u_n) - J'(u)), u_n - u) & \leq -c\rho_n\|u_n - u\|_b^2 + 2\varepsilon_n\rho_n\|u_n - u\|_b \\
& \leq -c\rho_n\|u_n - u\|_b^2 + \rho_n^2\|u_n - u\|_b^2 + \varepsilon_n^2 \tag{3.32}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Sonuç olarak Eş. 3.25.1 yerine Eş. 3.27 ve Eş. 3.25.2 yerine de Eş. 3.32'yi Eş. 3.25'te yazılırsa,

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - u\|_b^2 &\leq \|u_n - u\|_b^2 + C\rho_n^2(\|u_n - u\|_b^2 + \varepsilon_n^2) - c\rho_n\|u_n - u\|_b^2 + \rho_n^2\|u_n - u\|_b^2 \\ &\quad + \varepsilon_n^2 \\ &\leq \|u_n - u\|_b^2(1 + C\rho_n^2 - c\rho_n + \rho_n^2) + (C\rho_n^2 + 1)\varepsilon_n^2 \end{aligned} \quad (3.33)$$

eşitliği elde edilir ve bu eşitlik de düzenlenirse,

$$\|u_{n+1} - u\|_b^2 \leq \left[1 - c\rho_n\left(1 - \frac{c+1}{c}\rho_n\right)\right] \|u_n - u\|_b^2 + (C\rho_n^2 + 1)\varepsilon_n^2 \quad (3.34)$$

eşitliği elde edilmiş olur.

Eş. 3.34' te $\left[1 - c\rho_n\left(1 - \frac{c+1}{c}\rho_n\right)\right]$ katsayısının,

$$0 \leq 1 - c\rho_n\left(1 - \frac{c+1}{c}\rho_n\right) \leq \delta < 1 \quad (3.35)$$

Eş. 3.35'te ki gibi yeterince küçük bir aralıkta yer alması için $\rho_n < \varepsilon$ seçilir ve $\hat{\varepsilon}_n = (C\rho_n^2 + 1)\varepsilon_n^2$ olarak gösterilirse Eş. 3.34 en sade haliyle,

$$\|u_{n+1} - u\|_b^2 \leq \delta \|u_n - u\|_b^2 + \hat{\varepsilon}_n \quad (3.36)$$

olur.

Daha sonra Eş. 3.36'a tümevarım yöntemi uygulayarak genelleştirirsek;

$n = 0$ için

$$\|u_1 - u\|_b^2 \leq \delta \|u_0 - u\|_b^2 + \hat{\varepsilon}_0 \quad (3.37)$$

$n = 1$ için

$$\begin{aligned}
\|u_2 - u\|_b^2 &\leq \delta \|u_1 - u\|_b^2 + \hat{\varepsilon}_1 \\
&\leq \delta(\delta \|u_0 - u\|_b^2 + \hat{\varepsilon}_0) + \hat{\varepsilon}_1 \\
&\leq \delta^2 \|u_0 - u\|_b^2 + \delta \hat{\varepsilon}_0 + \hat{\varepsilon}_1
\end{aligned} \tag{3.38}$$

$n = k$ için sağlansın,

$$\|u_{k+1} - u\|_b^2 \leq \delta^{k+1} \|u_0 - u\|_b^2 + \sum_{i=0}^k \hat{\varepsilon}_i \delta^{k-i} \tag{3.39}$$

$n = k + 1$ için bakalım,

$$\begin{aligned}
\|u_{k+2} - u\|_b^2 &\leq \delta \|u_{k+1} - u\|_b^2 + \hat{\varepsilon}_{k+1} \\
&\leq \delta(\delta^{k+1} \|u_0 - u\|_b^2 + \sum_{i=0}^k \hat{\varepsilon}_i \delta^{k-i}) + \hat{\varepsilon}_{k+1} \\
&= \delta^{k+2} \|u_0 - u\|_b^2 + \sum_{i=0}^k \hat{\varepsilon}_i \delta^{k+1-i} + \hat{\varepsilon}_{k+1} \\
&= \delta^{k+2} \|u_0 - u\|_b^2 + \sum_{i=0}^{k+1} \hat{\varepsilon}_i \delta^{k+1-i}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

eşitliği elde edilir. Böylece,

$$\|u_{n+1} - u\|_b^2 \leq \delta^{n+1} \|u_0 - u\|_b^2 + \sum_{i=0}^n \hat{\varepsilon}_i \delta^{n-i} \tag{3.41}$$

genel terimi elde edilmiş olur.

Şimdi $S_n = \sum_{i=0}^n \hat{\varepsilon}_i \delta^{n-i}$ olsun ve $n \rightarrow \infty$ giderken S_n nin 0'a yakınsadığını gösterelim.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\varepsilon}_n = 0$ olduğundan burada $K > 0$ sabiti için $|\hat{\varepsilon}_n| \leq K$ sağlanır. Ayrıca burada $\forall \varepsilon > 0$ için bir pozitif tam sayı $m(m < n)$ vardır ve

$$\hat{\varepsilon}_i < \frac{1-\delta}{2} \varepsilon \tag{3.42}$$

eşitsizliğini sağlar ve böylece S_n ;

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=0}^n \hat{\varepsilon}_i \delta^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^m \hat{\varepsilon}_i \delta^{n-i} + \sum_{i=m+1}^n \hat{\varepsilon}_i \delta^{n-i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq K(\delta^n + \delta^{n-1} + \delta^{n-2} + \dots + \delta^{n-m}) + \frac{1-\delta}{2} \varepsilon (\delta^{n-m-1} + \delta^{n-m-2} + \dots + 1) \\
&\leq K\delta^n (1 + \delta^{-1} + \dots + \delta^{-m}) + \frac{1-\delta}{2} \varepsilon (1 + \dots + \delta^{n-m-2} + \delta^{n-m-1}) \\
&\leq K\delta^n \delta^{-m} (\delta^m + \delta^{m-1} + \dots + 1) + \frac{1-\delta}{2} \varepsilon (1 + \dots + \delta^{n-m-2} + \delta^{n-m-1}) \\
&\leq K \frac{1-\delta^{m+1}}{1-\delta} \delta^{n-m} + \frac{1-\delta}{2} \varepsilon \frac{1-\delta^{n-m}}{1-\delta}
\end{aligned} \tag{3.43}$$

şeklinde yazılır.

Eş. 3.35'ten hatırlanıldığı üzere δ değeri $0 < \delta < 1$ arasında yer aldığından ve dolayısıyla δ^{m+1} ve δ^{n-m} çok küçük değerler alacağından $1 - \delta^{m+1}$ ve $1 - \delta^{n-m}$ 1'e yakın bir değer alır ve S_n dizisi;

$$S_n \leq \frac{K}{1-\delta} \delta^{n-m} + \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.44}$$

bu şekilde yazılabilir.

Ayrıca $0 < \delta < 1$ den dolayı yeterince büyük bir n tam sayısı için $\frac{K}{1-\delta} \delta^{n-m} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ve $\delta^n \leq \varepsilon$ olur. Böylece yakınsaklık sağlanmış olur.

Gerçek hesaplama sürecinde ayrık J'_n fonksiyonu genellikle sabit bir parça, $J'_n = J'_h$ vb., için değişmeden kalır ve buna karşılık gelen iteratif şeması,

$$\begin{cases} b(u_{n+\frac{1}{2}}, v) = b(u_n, v) - \rho_n(J'_h(u_n), v), \forall v \in U \\ u_{n+1} = P_b^K(u_{n+\frac{1}{2}}) \end{cases} \tag{3.45}$$

olur. Burada h maksimum adım boyutudur. Bu yüzden mevcut şemanın stabilitesine bakmalıyız.

Sonuç

Teorem 3.2’de J'_n nin J' e yakınsadığı hariç diğer bütün koşullarının sağlandığını varsayalım. O zaman $\varepsilon > 0$ için,

$$\|J'_h(u) - J'(u)\|_b \leq \varepsilon \quad (3.46)$$

yazılır ve $\hat{C} > 0$ sabiti için

$$\|u - u_n\|_b < \delta^n \|u_0 - u\|_b^2 + \hat{C} \varepsilon^2 \quad (3.47)$$

elde edilir.

İspat

Teorem 3.2’nin ispatıyla hemen hemen aynıdır. Sadece J'_n yerine J'_h ve ε_n yerine ε gelir. Böylece,

$$\|u_{n+1} - u\|_b^2 \leq \delta \|u_n - u\|_b^2 + (C\rho_n^2 + 1)\varepsilon^2 \leq \delta \|u_n - u\|_b^2 + \bar{C}\varepsilon^2 \quad (3.48)$$

elde edilir ve bu eşitlikte $\bar{C}$, $C\rho_n^2 + 1$ nin üst sınırıdır. Eş. 3.48’nin genel terimini yazarsak;

$$\|u_{n+1} - u\|_b^2 \leq \delta^{n+1} \|u_0 - u\|_b^2 + \bar{C}\varepsilon^2 \sum_{i=0}^n \delta^{n-i} \leq \delta^{n+1} \|u_0 - u\|_b^2 + \frac{\bar{C}}{1-\delta} \varepsilon^2 \quad (3.49)$$

olur. $\hat{C} = \frac{\bar{C}}{1-\delta}$ olduğunda ispat tamamlanır.

3.3. Adjoint Denklemi ve Optimalite Koşulları

Stokastik kontrol problemimizdeki soyut algoritmayı uygulayabilmek için eşlenik denklemini kullanarak amaç fonksiyonunun yönlü türevini hesaplamalıyız.

$u(\cdot)$ Eş. 3.2 ve Eş. 3.3’ün optimal kontrolü olsun ve $y(\cdot)$ de buna karşılık gelen optimal yörünge olsun. $v(\cdot) \in L^2(0, T)$ kontrol uzayında $v(\cdot) \in U_{ad}$ kapalı konveks kümesinin elemanı olsun. $0 \leq \rho \leq 1$ olduğu aralıkta $v^\rho = u(\cdot) + \rho v(\cdot)$ bu şekilde alınsın. U_{ad}

konveks olduğundan $v^\rho \in U_{ad}$ olur. O zaman $J(u)$ fonksiyonunun $v \in L^2(0, T)$ olmak üzere v yönündeki yönlü türevi,

$$\begin{aligned} J'(u)(v) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{J(u+\rho v) - J(u)}{\rho} \\ &= E \left[\int_0^T h'(y) D(y)(v) dt \right] + \int_0^T j'(u) v dt \end{aligned} \quad (3.50)$$

olur ve

$$D(y)(v) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} [y(u + \rho v) - y(u)] \quad (3.51)$$

eşitliği yazılır [17,34].

Burada $dy = f(t, y, u)dt + g(t, y)dW_t$, $y(0) = y_0$ olduğunu Eş. 3.3'ten biliyoruz ve bu diferansiyel denklemin integral halini şu şekilde yazabiliriz;

$$y = y_0 + \int_0^t f(s, y, u)ds + \int_0^t g(s, y)dW_s. \quad (3.52)$$

O halde Eş. 3.51'nin v yönündeki yönlü türevi alınır,

$$D(y)(v) = \int_0^t [f'_y(s, y, u)D(y)(v) + f'_u(s, y, u)v] ds + \int_0^t g'_y(s, y)D(y)(v)dW_s \quad (3.53)$$

elde edilir ve Eş. 3.53'nin de türevi alınır,

$$d(D(y)(v)) = [f'_y(t, y, u)D(y)(v) + f'_u(t, y, u)v]dt + g'_y(t, y)D(y)(v)dW_t \quad (3.54)$$

eşitliği elde edilir.

Ayrıca $E \left\{ \int_0^T |p_t|^2 dt \right\} < +\infty$ ifadesini sağlayan geriye doğru uyarlanmış bir eşlenik durum p tanımlansın [16].

$$-dp = [h'(y) + p f'_y(t, y, u) - p (g'_y(t, y))^2]dt + p g'_y(t, y)dW_t, \quad p(T) = 0 \quad (3.55)$$

Şimdi Eş. 3.50'de tanımlanan amaç fonksiyonunu stokastik kısmi integralini kullanarak

düzenleyelim;

$$\begin{aligned}
J'(u)(v) &= E \left[\int_0^T h'(y) D(y)(v) dt \right] + \int_0^T j'(u) v dt \\
&= E \left[\int_0^T (-dp - p f'_y(t, y, u) dt + p (g'_y(t, y))^2 dt - p g'_y(t, y) dW_t) D(y)(v) \right] \\
&\quad + \int_0^T j'(u) v dt \\
&= E \left[\int_0^T -dp D(y)(v) - \int_0^T p f'_y(t, y, u) D(y)(v) dt + \int_0^T p (g'_y(t, y))^2 D(y)(v) dt \right. \\
&\quad \left. - \int_0^T p g'_y(t, y) D(y)(v) dW_t \right] + \int_0^T j'(u) v dt \tag{3.56}
\end{aligned}$$

Burada Eş. 3.55'te tanımlanan eşlenik denkleminden $h'(y)$ yi çekip Eş. 3.56'te yerine koyarak Eş. 3.56'i elde ettik. Diğer taraftan Ito çarpım kuralından faydalanarak,

$$\begin{aligned}
d(p \cdot D(y)(v)) &= 0 \\
p \cdot d(D(y)(v)) + dp \cdot D(y)(v) + dp \cdot d(D(y)(v)) &= 0 \\
-dp \cdot D(y)(v) &= p \cdot d(D(y)(v)) + dp \cdot d(D(y)(v)) \tag{3.57}
\end{aligned}$$

yazılır. Elde edilen bu eşitliği de Eş. 3.56'de yerine koyarsak,

$$\begin{aligned}
J'(u)(v) &= E \left[\int_0^T p d(D(y)(v)) + \int_0^T dp \cdot d(D(y)(v)) \right. \\
&\quad \left. - \int_0^T p f'_y(t, y, u) D(y)(v) dt + \int_0^T p (g'_y(t, y))^2 D(y)(v) dt \right. \\
&\quad \left. - \int_0^T p g'_y(t, y) D(y)(v) dW_t \right] + \int_0^T j'(u) v dt \tag{3.58}
\end{aligned}$$

olur.

Ayrıca Eş. 3.54'de tanımlanan yönlü türev $d(D(y)(v))$ yi Eş. 3.58'de yerine koyarsak,

$$\begin{aligned}
J'(u)(v) &= E \left[\int_0^T p [f'_y(t, y, u) D(y)(v) + f'_u(t, y, u) v] dt + g'_y(t, y) D(y)(v) dW_t \right] \\
&\quad + \int_0^T dp \cdot d(D(y)(v)) - \int_0^T p f'_y(t, y, u) D(y)(v) dt \\
&\quad + \int_0^T p (g'_y(t, y))^2 D(y)(v) dt - \int_0^T p g'_y(t, y) D(y)(v) dW_t \Big] + \int_0^T j'(u) v dt \tag{3.59}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Daha sonra denklemde yer alan $dp \cdot d(D(y)(v))$ çarpımı için Eş. 3.54 ve Eş. 3.55'ü çarparsak;

$$\begin{aligned} \int_0^T dp \cdot d(D(y)(v)) &= \left((-h'(y) - pf_y'(t, y, u) + p(g_y'(t, y))^2)dt - pg_y'(t, y)dW_t \right) \\ &\cdot \left((f_y'(t, y, u)D(y)(v) + f_u'(t, y, u)v)dt + g_y'(t, y)D(y)(v)dW_t \right) \end{aligned} \quad (3.60)$$

yazılır. Bu çarpımda Eş. 2.40'da tanımladığımız 1-boyutlu Brown hareketin karakterizasyon özelliklerini kullanarak,

$$\int_0^T dp \cdot d(D(y)(v)) = \int_0^T p(g_y'(t, y))^2 D(y)(v)dt \quad (3.61)$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliği de Eş. 3.59'de yerine koyup düzenlersek,

$$\begin{aligned} J'(u)(v) &= E \left[\int_0^T p [f_y'(t, y, u)D(y)(v) + f_u'(t, y, u)v]dt + g_y'(t, y)D(y)(v)dW_t \right] \\ &\quad - \int_0^T p(g_y'(t, y))^2 D(y)(v)dt - \int_0^T pf_y'(t, y, u)D(y)(v)dt \\ &\quad + \int_0^T p(g_y'(t, y))^2 D(y)(v)dt - \int_0^T pg_y'(t, y)D(y)(v)dW_t \Big] + \int_0^T j'(u)vdt \\ &= \int_0^T E[p(f_u'(t, y, u)) + j'(u)]vdt \end{aligned} \quad (3.62)$$

sonucu elde edilir.

p yi tanımlamadaki amaç gradyan projeksiyon algoritmasının amaç fonksiyonunun gradyanını hesaplamak için daha uygun bir yol elde etmektir. Stokastik optimal kontrolde SMP elde etmek amacıyla bir eşlenik durumunu tanımlamanın farklı yolları vardır. Bunun için literatürde farklı birçok çalışma mevcuttur [35]. Çalışmada yer alan $J'(u)(v)$ türevinde p nin F_t –uyarlanmış süreç olmadığını varsaydık; çünkü, Eş. 3.55'ün yani eşlenik durum denkleminin F_t –uyarlanmış bir çözümü yoktur.

4. NÜMERİK SONUÇLAR

4.1. Giriş

Bu bölümde yukarıdaki bölümde gösterilen metodlar ve ayırıklaştırma şemaları için bazı sayısal uygulamalar yapılacaktır. Bunun için öncelikle Eş. 3.47’de tanımlanan iteratif şemasına gradyan metodu aracılığıyla çözdüğümüz amaç fonksiyonunun türevi uygulanacaktır. Sonrasında bu algoritmayı çözen Euler şeması adımları verilerek finansal uygulamalara geçiş yapılacaktır. Finansal uygulamalarda ise stokastik optimal kontrolün çıkış noktalarından biri olan hisse senedi hesaplamalarında kullanılan Black-Scholes tipi optimal kontrol problemlerine bakılacaktır. Bunun için öncelikle Black-Scholes opsiyon fiyatlama modelinin tanımı yapılarak sonrasında 3. bölümde tanımlanan eşlenik denklemi yardımıyla Black-Scholes optimal kontrol problemi çözülecektir. Daha sonra Ito formülünden hareketle farklı bir optimalite koşulu elde edilerek amaç fonksiyonu olan Black-Scholes optimal kontrol probleminin kesin çözümü elde edilerek her iki çözümde karşılaştırılacaktır.

4.2. Eşlenik Denklemi ile Oluşturulan Algoritma

Bu bölümde 3. Bölümde tanımlanan projeksiyon (izdüşüm) algoritmasını optimal kontrol probleminde uygulayarak Euler şemasını verelim.

$U = L^2(0, T)$ ve $b(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)$ şeklinde alalım. Eş. 3.47’den,

$$J'(u)(v) = (E[p(f'_u(t, y, u))]) + j'(u), v \quad (4.1)$$

eşitliğini biliyoruz ve burada y ve p Eş. 3.3 ve Eş. 3.55’te tanımlanan dy ve dp durum ve yardımcı durum denklemlerinin çözümleridir. Türevi nümerik olarak hesaplayabilmek için öncelikle y ve p ’nin çözümünde Euler metodunu kullanıp daha sonra optimal kontrol problemini sayısal olarak çözmek için gradyan metodunu uygulayalım. O halde algoritma;

$$\begin{cases} b(u_{n+\frac{1}{2}}, v) = b(u_n, v) - \rho_n(E[p_n(f'_u(t, y_n, u_n))]) + j'(u_n), v \\ u_{n+1} = P_b^K(u_{n+\frac{1}{2}}) \\ u_{n+\frac{1}{2}}, u_n \in U, \forall v \in U. \end{cases} \quad (4.2)$$

şeklinde yazılır. Algoritmada yer alan y_n , p_n ve u_n Euler şemasının durum ve eş durum denklemleriyle inşa edilen adım fonksiyonlarıdır. Algoritma şöyle özetlenebilir:

i. Başlangıç koşulu u_0 keyfi seçilir.

$n = 0, 1, \dots$ için $u = u_n$ alıp, aşağıdaki iterasyon döngüsü (ii)-(v) adımlarında tekrarlanır.

ii. İleri Euler şemasını kullanarak durum denklemi hesaplanır:

$$\begin{cases} y^0 = y_0, \\ y^{m+1} = y^m + f(t^m, y^m, u^m)\Delta t_m + g(t^m, y^m)\Delta W_m, \\ m = 0, 1, \dots, M-1. \end{cases} \quad (4.3)$$

Burada M , adım uzunluklarının toplam sayısıdır. $\Delta t_m = t^{m+1} - t^m$ için m inci adım boyutunu temsil eder, $\Delta W_m = W_{t^{m+1}} - W_{t^m}$ ise Brown hareket W_t nin $[t^m, t^{m+1}]$ aralığındaki $N(0, \Delta t_m)$ artışıdır.

iii. Geri Euler şeması eşlenik denklemi hesaplamak için kullanılır:

$$\begin{cases} p^M = 0 \\ p^m = p^{m+1} + [h'(y^m) + p^m f'_y(t^m, y^m, u^m) - p^m (g'_y(t^m, y^m))^2] \Delta t_m \\ \quad + p^m g'_y(t^m, y^m) \Delta W_m \\ m = M-1, M-2, \dots, 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Adım (ii) ve (iii) birkaç yörünge için simüle edilmiştir ve sonra $E[p^m(f'_u(t^m, y^m, u^m))]$, $m = 0, 1, \dots, M$ için yaklaşık olarak elde edilebilir.

iv. Gradyan metodu kullanarak kontrol güncellenir:

$$\begin{cases} u_{n+\frac{1}{2}}^m = u^m - \rho_n(E[p^m(f'_u(t^m, y^m, u^m))] + j'(u^m)), m = 0, 1, \dots, M \\ u_{n+1}^m = P_K^b(u_{n+\frac{1}{2}}^m) \end{cases} \quad (4.5)$$

v. $\varepsilon_n = \|u_n - u_{n+1}\|_\infty$ hesaplanır. Eğer ε_n yeterince küçükse algoritma sonlandırılır. Değilse $u = u_{n+1}$ için iterasyon döngüsü (ii)-(v) için tekrarlanır.

4.3. Black Scholes Opsiyon Fiyatlama Modeli

Black-Scholes Eşitliği, 1973 yılında Fischer Black ve Myron Scholes tarafından yazılan "the pricing of options and corporate liabilities" adlı makalede ilk defa bahsedilen bir opsiyon fiyatlama tekniğidir [36,37,38]. O zamana kadar yapılan en iyi modellemedir ve halen kullanılmaktadır. Black-Scholes modeli Avrupa tipi kar payı ödemeyen hisse senedinin söz konusu olduğu opsiyonların fiyatlandırılmasına yönelik olarak dizayn edilmiş bir opsiyon fiyatlama modelidir. Avrupa tipi call opsiyonu getirisi için, kısaca vade sonundaki dayanak varlık fiyatı uygulama fiyatından düşükse opsiyonun kullanılması anlamsızdır ve opsiyonu uygulamak yerine piyasadan varlığı almak daha karlıdır. Yani opsiyonun değeri sıfırdır. Eğer vade sonundaki dayanak varlık fiyatı uygulama fiyatından yüksekse opsiyon uygulamaya konulabilir ve alınan varlık piyasada satılarak aradaki fark kadar kar elde edilir. Bu durumda S_T dayanak varlığın fiyatı, K uygulama fiyatı olan Avrupa tipi call opsiyonun getirisi,

$$V(t) = E(\max(S_T - K, 0)) \quad (4.6)$$

olarak yazılabilir. Söz konusu hissenin fiyatının hareketleri (S_t), geometrik Brownian Motion izlemektedir. Sabit bir sapma (μ) ve volatilité (σ) olmak üzere S_t için,

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (4.7)$$

stokastik diferansiyel denklemi yazılır. Burada;

S_t : Dayanak varlığın fiyatı log-normal dağılıma sahip

dS_t : Fiyattaki küçük değişim

μ : Fiyattaki küçük değişimin zamanla değişen beklenen değişimi

σ : Fiyattaki küçük değişimin zamanla değişen varyansı

Söz konusu hisse fiyatı S_t , lognormal dağılıma sahip olduğu için

$$f(x, t) = \ln S_t \quad (4.8)$$

yazılır ve stokastik diferansiyel denkleminde Ito formülü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
df(x, t) &= d(\ln S_t) = \frac{\partial \ln S_t}{\partial t} dt + \frac{\partial \ln S_t}{S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln S_t}{\partial (\ln S_t)^2} dS_t \cdot dS_t \\
&= \frac{1}{S_t} (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{S_t^2} \right) S_t^2 \sigma^2 dt \\
&= \mu dt + \sigma dW_t - \frac{1}{2} \sigma^2 dt \\
&= \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t
\end{aligned} \tag{4.9}$$

eşitliği elde edilir ve ayrıca

$$\begin{aligned}
dS_t \cdot dS_t &= S_t (\mu dt + \sigma dW_t) \cdot S_t (\mu dt + \sigma dW_t) \\
&= S_t^2 (\mu^2 dt^2 + 2\mu dt \cdot dW_t + \sigma^2 dW_t^2) \\
&= S_t^2 \sigma^2 dt
\end{aligned} \tag{4.10}$$

eşitliği Eş.4.9'da yerine yazılarak

$$d(\ln S_t) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t \tag{4.11}$$

eşitliği elde edilir. Her iki tarafın integrali alınarak,

$$\begin{aligned}
\int_0^t d(\ln S_t) &= \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \int_0^t \sigma dW_t \\
\ln S_t &= \ln S_0 \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \\
S_t &= S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)t + \sigma W_t}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

elde edilen bu eşitlikte bir dayanak varlığın fiyatının nelere bağlı olduğu Ito formülü kullanılarak görülmektedir. Bu eşitliğin beklenen getirisini hesaplayalım:

$$E(S_t) = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)t} E(e^{\sigma W_t}) \tag{4.13}$$

eşitliğinde $E(e^{\sigma W_t})$ yerine $e^{\frac{1}{2} \sigma^2 t}$ yazarsak,

$$E(S_t) = S_0 e^{(\mu)t} \tag{4.14}$$

eşitliği elde edilir.

4.3.1. Black-Scholes optimal kontrol problemi gerçek çözümü

Öncelikle deterministik kontrolü $u(t) \in L^2(0, T)$ olan Black-Scholes tipi optimal kontrol problemini inceleyelim;

$$\min_{u \in L^2(0, T)} J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T E[(y - y^*)^2] dt + \frac{1}{2} \int_0^T u^2 dt \quad (4.15)$$

maliyet fonksiyonunda y^* deterministiktir. $\min_{u \in L^2(0, T)} J(u)$ yu çözen durum denklemi ise,

$$dy(t) = u(t)y(t)dt + \sigma y(t)dW_t, \quad y(0) = y_0 \quad (4.16)$$

olur ve σ sabit bir sayıdır.

Bölüm 3'deki işlemlere göre optimal kontrol problemi şu şekilde çözülür;

$$dy = u y dt + \sigma y dW_t, \quad y(0) = y_0 \quad (4.17)$$

diferansiyel denklemin integral formunun,

$$y = y_0 + \int_0^t f(s, y, u) ds + \int_0^t g(s, y) dW_s \quad (4.18)$$

olduğu bilinmektedir ve 3. bölümde tanımlanan

$$-dp = [h'(y) + p f'_y(t, y, u) - p (g'_y(t, y))^2] dt + p g'_y(t, y) dW_t, \quad p(T) = 0 \quad (4.19)$$

eşlenik durum denklemine göre, Eş. 4.15'i çözen eşlenik durum denklemi

$$-dp = (y - y^* + up - p\sigma^2) dt + p\sigma dW_t, \quad p(T) = 0 \quad (4.20)$$

olur.

Bölüm 3'te tanımlanan amaç fonksiyonunun Eş. 4.21'de ki gibi yönlü türevinin,

$$J'(u)(v) = E \left[\int_0^T h'(y) D(y)(v) dt \right] + \int_0^T j'(u) v dt \quad (4.21)$$

Eş. 3.47'deki işlemlerin sonucunda

$$J'(u)(v) = \int_0^T E[p(f'_u(t, y, u)) + j'(u)] v dt \quad (4.22)$$

eşitliğine denk olduğu bilinmektedir. Buna göre Eş. 4.15'in yönlü türevi Eş. 4.20'den

$$\begin{aligned} J'(u)(v) &= \int_0^T E[py + u] v dt \\ &= \int_0^T E[py] v dt + \int_0^T u v dt \end{aligned} \quad (4.23)$$

yazılır ve buradan

$$u = -E[py] \quad (4.24)$$

eşitliği elde edilir. Özetle optimal kontrol problemini çözen şema;

$$\begin{cases} dy = u y dt + \sigma y dW_t, y(0) = 0 \\ -dp = (y - y^* + up - p\sigma^2) dt + p\sigma dW_t, p(T) = 0 \\ u = -E[py] \end{cases} \quad (4.25)$$

yazılır.

4.3.2. Black-Scholes optimal kontrol problemi nümerik çözümü

Kesin çözümler tam optimal kontrolü çözmek için farklı bir optimal koşula dayanır. Aşağıda optimal kontrolün kapalı formu için Ito formülünden hareketle farklı bir optimalite koşulu elde edilecektir.

Eş. 4.12'den hareketle,

$$y(t) = y_0 e^{\int_0^t u(s) ds - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W_t} \quad (4.26)$$

yazılır ve eşitliğin beklenen değeri alınır,

$$\begin{aligned}
E(y) &= y_0 e^{\int_0^t u(s)ds - \frac{\sigma^2}{2}t} E(e^{\sigma W_t}) \\
&= y_0 e^{\int_0^t u(s)ds - \frac{\sigma^2}{2}t + \frac{\sigma^2}{2}t} \\
&= y_0 e^{\int_0^t u(s)ds}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

elde edilir ve böylece diferansiyel hali,

$$dE(y) = u(t)E(y)dt \tag{4.28}$$

olur.

Eş. 4.15'te tanımlanan amaç fonksiyonunda yer alan durum değişkeni fonksiyonu için,

$$E[(y - y^*)^2] = E(y^2) - 2y^*E(y) + (y^*)^2 \tag{4.29}$$

aşağıda yer alan düzenlemeler yapılır. Eş. 4.24'ten hareketle,

$$\begin{aligned}
y(t)^2 &= y_0^2 e^{2 \int_0^t u(s)ds - \sigma^2 t + 2\sigma W_t}, \\
E[y(t)^2] &= y_0^2 e^{2 \int_0^t u(s)ds - \sigma^2 t} E[e^{2\sigma W_t}]
\end{aligned} \tag{4.30}$$

yazılır. Burada $E(e^{\sigma W_t}) = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t}$ eşitliği yardımıyla, $E[e^{2\sigma W_t}]$ için $\sigma = \frac{\bar{\sigma}}{2}$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{\bar{\sigma}^2}{4} \Rightarrow \bar{\sigma}^2 = 4\sigma^2 \\
E(e^{\frac{\bar{\sigma}}{2}W_t}) &= e^{\frac{4\sigma^2 t}{2}} = e^{2\sigma^2 t}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

eşitliği elde edilir ve Eş. 4.30'da yerine yazılarak,

$$\begin{aligned}
E[y(t)^2] &= y_0^2 e^{2 \int_0^t u(s)ds} e^{-\sigma^2 t + 2\sigma^2 t} \\
E[y(t)^2] &= [E(y)]^2 e^{\sigma^2 t}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

bulunur. Dolayısıyla Eş. 4.29

$$E[(y - y^*)^2] = [E(y)]^2 e^{\sigma^2 t} - 2y^* E(y) + (y^*)^2 \quad (4.33)$$

halini alır ve elde edilen bu eşitlik Eş. 4.15'te yerine yazılarak v yönünde u 'ya göre türevi alınarak,

$$\begin{aligned} J'(u)(v) &= \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^T [E(y)E(y)'(u)(v) e^{\sigma^2 t} - y^* E(y)'(u)(v)] dt + \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^T uv dt \\ &= \int_0^T [E(y)e^{\sigma^2 t} - y^*] [E(y)'(u)(v)] dt + \int_0^T uv dt \end{aligned} \quad (4.34)$$

elde edilir. Burada y^* determinist olduğu için u 'ya göre türevi sıfırdır.

Diğer taraftan Eş. 4.34'i çözen farklı bir eşlenik durum denklemi p tanımlansın;

$$-dp(t) = (u(t)p(t) + E(y)e^{\sigma^2 t} - y^*)dt, \quad p(T) = 0. \quad (4.35)$$

Bu eşitlikten p çekilirse,

$$E(y)e^{\sigma^2 t} - y^* = \left(-\frac{dp(t)}{dt} - up \right) \quad (4.36)$$

şeklinde yazılır ve Eş. 4.34'de yerine konularak,

$$J'(u)(v) = \int_0^T \left(-\frac{dp(t)}{dt} - up \right) [E(y)'(u)(v)] dt + \int_0^T uv dt \quad (4.37)$$

elde edilir. Burada $d(p \cdot E(y)') = 0$ çarpım kuralından hareketle,

$$dp \cdot E(y)' + p \cdot d(E(y)') = 0 \Rightarrow -dp \cdot E(y)' = p \cdot d(E(y)') \quad (4.38)$$

eşitliği Eş. 4.37'te yerine konulur.

$$J'(u)(v) = \int_0^T p \frac{d[E(y)'(u)(v)]}{dt} dt - \int_0^T up [E(y)'(u)(v)] dt + \int_0^T uv dt \quad (4.39)$$

Ayrıca $dE(y) = u(t)E(y)dt$ eşitliğinden $\frac{dE(y)}{dt} = uE(y)$ yazılır ve türevi alınırsa,

$$\frac{d[E(y)'(u)(v)]}{dt} = (E(y) + uE(y)'(u))v \quad (4.40)$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlik Eş. 4.39'da yerine konulursa,

$$\begin{aligned} J'(u)(v) &= \int_0^T p(E(y) + uE(y)'(u))v dt - \int_0^T up [E(y)'(u)(v)] dt + \int_0^T uv dt \\ &= \int_0^T pE(y)v dt + \int_0^T up [E(y)'(u)(v)] dt - \int_0^T up [E(y)'(u)(v)] dt + \int_0^T uv dt \\ &= \int_0^T (u + pE(y))v dt = 0, \quad \forall v \in L^2(0, T) \end{aligned} \quad (4.41)$$

olur ve buradaki eşitlikten de,

$$u = -pE(y) \quad (4.42)$$

eşitliği yazılır.

Yukarıdaki çıkarıma göre iki tane örnek yapalım:

Örnek 4.1

$p = t - T$ olsun. O halde,

$$dE(y) = u(t)E(y)dt = -p(E(y))^2, \quad E(y)(0) = y_0$$

$$dE(y) = (T - t)(E(y))^2$$

$$\int \frac{dE(y)}{(E(y))^2} = \int (T - t)dt$$

$$-\frac{1}{E(y)} = -\frac{1}{y_0} + Tt - \frac{t^2}{2}$$

$$E(y) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - Tt + \frac{t^2}{2}} \quad (4.43)$$

elde edilir. O zaman optimal kontrol u 'da Eş. 4.42'dan,

$$u = \frac{T-t}{\frac{1}{y_0} - Tt + \frac{t^2}{2}} \quad (4.44)$$

bulunur. Deterministik y^* Eş. 4.35'ten,

$$y^* = \frac{dp}{dt} + u(t)p(t) + E(y)e^{\sigma^2 t} \quad (4.45)$$

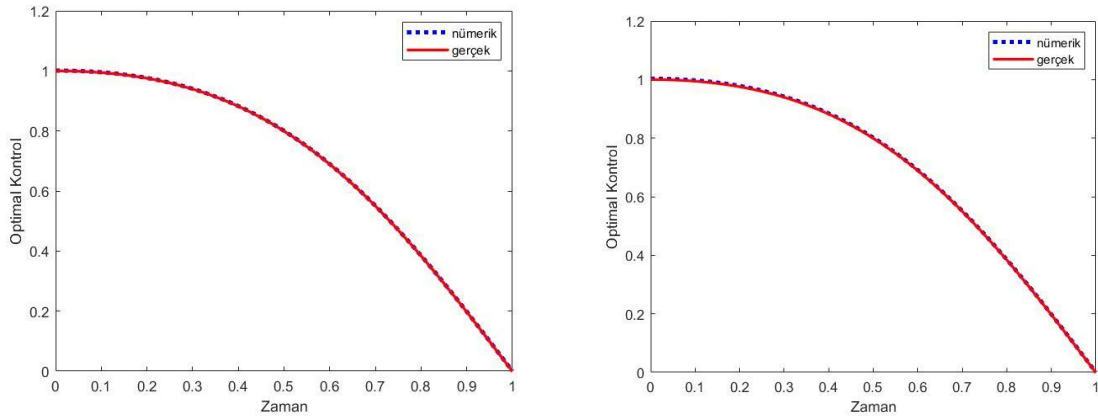
şeklinde yazılır. Bulunan eşitlikler denklemde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} y^* &= 1 - p^2 E(y) + E(y)e^{\sigma^2 t} \\ &= 1 + E(y)(e^{\sigma^2 t} - (t - T)^2) \\ &= \frac{e^{\sigma^2 t} - (T-t)^2}{\frac{1}{y_0} - Tt + \frac{t^2}{2}} + 1 \end{aligned} \quad (4.46)$$

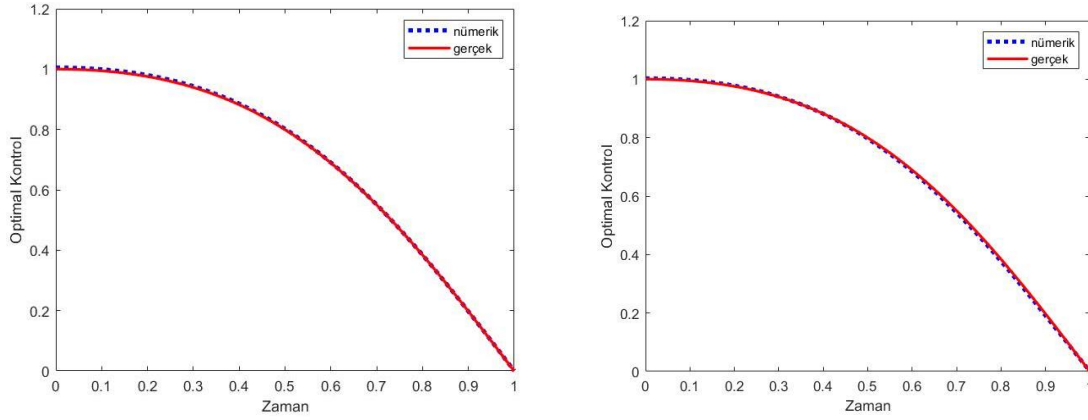
gerçek çözümü bulunur.

Şimdi gerçek ve nümerik çözümü karşılaştırmak için farklı σ değerleri için Black Scholes optimal kontrol çözümünü Şekil 4.1. ve Şekil 4.2. de gösterelim. Burada Monte Carlo simülasyonunda 2000 yörünge kullanılmıştır ve iterasyon için çıkış koşulu $\varepsilon_n < 0.01$ dir.

Nümerik hesaplamada $T = 1$, $y_0 = 1$ seçelim.



Şekil 4.1. $\sigma = 0.0$ ve $\sigma = 0.1$ için gerçek ve nümerik çözümün sonucu



Şekil 4.2. $\sigma = 0.3$ ve $\sigma = 0.5$ için gerçek ve nümerik çözümün sonucu

Şekil 4.1. de görülen gerçek ve nümerik çözümün neredeyse tam uyumu volatilitenin çok küçük olması yani $\sigma = 0.0$ ve 0.1 olmasından kaynaklanmaktadır. Şekil 4.2. de ise nümerik çözümün gerçek çözümden çok az uzaklaştığı görülmektedir. Bunun sebebi de volatilitenin $\sigma = 0.3 - 0.5$ olmasıdır.

Örnek 4.2

Benzer şekilde $p = e^{-t} - e^{-T}$ olsun. O halde $dE(y) = -p(E(y))^2$ eşitliği için,

$$\int \frac{dE(y)}{(E(y))^2} dy = \int_0^t (-e^{-t} + e^{-T}) dt$$

$$-\frac{1}{E(y)} = -\frac{1}{y_0} + [e^{-t} + e^{-T}t] \Big|_0^t$$

$$-\frac{1}{E(y)} = -\frac{1}{y_0} + (e^{-t} + e^{-T}t - 1)$$

$$E(y) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} + 1 - e^{-t} - e^{-T}t} \quad (4.47)$$

eşitliği elde edilir. Optimal kontrol u da Eş. 4.42'den,

$$u = \frac{e^{-T} - e^{-t}}{\frac{1}{y_0} + 1 - e^{-t} - e^{-T}t} \quad (4.48)$$

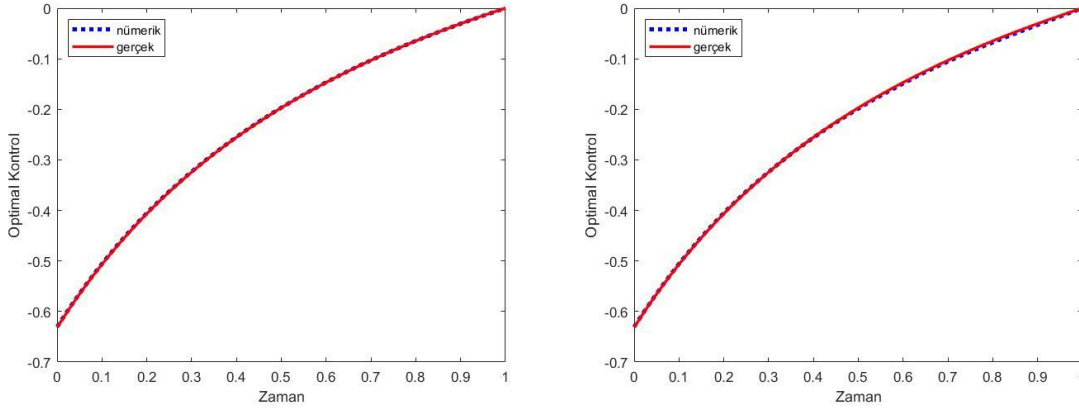
bulunur. Bulunan eşitlikler deterministik y^* için Eş. 4.35'te yerlerine konularak,

$$\begin{aligned}
y^* &= \frac{dp}{dt} + u(t)p(t) + E(y)e^{\sigma^2 t} \\
&= -e^{-t} - p^2 E(y) + E(y)e^{\sigma^2 t} \\
&= E(y)(e^{\sigma^2 t} - p^2) - e^{-t} \\
&= \frac{e^{\sigma^2 t} - (e^{-T} - e^{-t})^2}{\frac{1}{y_0} + 1 - e^{-t} - e^{-T}} - e^{-t}
\end{aligned} \tag{4.49}$$

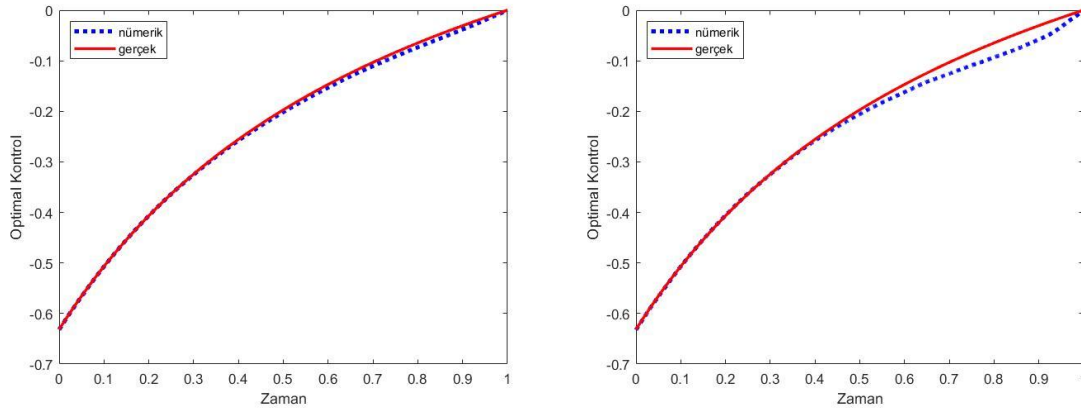
gerçek çözümü bulunur.

Şimdi gerçek ve nümerik çözümü karşılaştırmak için farklı σ değerleri için Black Scholes optimal kontrol çözümünü Şekil 4.3. ve Şekil 4.4. de gösterelim. Burada Monte Carlo simülasyonunda 2000 yörünge kullanılmıştır ve iterasyon için çıkış koşulu $\varepsilon_n < 0.01$ dir.

Bu örnekte de nümerik hesaplama için $T = 1$ ve $y_0 = 1$ seçelim.



Şekil 4.3. $\sigma = 0.2$ ve $\sigma = 0.5$ için gerçek ve nümerik çözümün sonucu



Şekil 4.4. $\sigma = 0.7$ ve $\sigma = 1.0$ için gerçek ve nümerik çözümün sonucu

İlk örneğe benzer şekilde, Şekil 4.3. de volatilité küçük olduğu için gerçek ve nümerik çözümler birbirine oldukça yakındır. Fakat, volatilitenin artmasından dolayı Şekil 4.4. de nümerik çözümün gerçek çözümünden uzaklaştığı görülmektedir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, öncelikle stokastik optimal kontrol problemi tanıtılarak, problemin çözümü için takip edilebilecek yöntemler sıralanmıştır. Üzerinde durduğumuz yöntem, en dik iniş yöntemine dayalı olup birçok stokastik kontrol problemin optimalite koşullarının elde edilmesinde kolaylıklar sağlamaktadır. Stokastik kontrol probleminin çözümü Lagrange benzeri bir yöntemle ele alınırsa ek bir eşlenik değişkenle karşılaşilmektedir. Fakat bu tezde sunulan yöntem tek bir eşlenik parametre ile çözüme gitmektedir.

Yöntemden elde edilen sonucun optimal çözümü verdiği teoremlerle ispatlanmıştır. Nümerik olarak çözümün yakınsaklığını test etmek için Euler yöntemi kullanılmıştır. Beklenen değerin nümerik hesabı Monte-Carlo yöntemiyle hesaplanmıştır. Finansal matematikte önemli uygulamalardan birisi olan Black-Sholes modeli ele alınıp, sonuçlar MATLAB programı kullanılarak elde edilmiştir.

Geleceğe yönelik olarak bu yöntem stokastik gecikmeli denklemlerin optimal kontrolüne, kısmi stokastik denklemlerin kontrol problemlerine uygulanabilir. Kısıtlamalı stokastik kontrol problemlerinde etkisi araştırılabilir.

KAYNAKLAR

1. Sargent, R. W. H. (2000). Optimal Control, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 124 (1–2), 361–371.
2. Bryson, A. E. (1996). Optimal Control 1950 to 1985, *IEEE Control Systems Magazine*, 16 (3), 26–33.
3. Särkkä, S. (2012). *Applied Stochastic Differential Equations Lecture Notes*, Department of Mathematics, Tampere University of Technology.
4. Hull, J. C. (2000). *Options, Futures, and Other Derivatives* (Eight edition). Toronto: Prentice Hall, 7.
5. Merton, R. C. (1992). *Continuous Time Finance* (Revised Edition). Cambridge: Basil Blackwell, 142.
6. Shi, J. T. and Wu, Z. (2011). A stochastic maximum principle for optimal control of jump diffusions and applications to finance, *Chinese Journal of Applied Probability and Statistics*, 27, 127-137.
7. Xu, W. S. (1998). Maximum principle for a stochastic optimal control problem and application to portfolio/consumption choice, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 98(3), 719-731.
8. Itô, K. (1944). *Stochastic integral*, Proceedings of the Imperial Academy Tokyo, 20(8), 519–524.
9. Itô, K. (1951). *On stochastic differential equations*, Memoirs of the American Mathematical Society, 4, 1–51.
10. Campillo, F., Nekkachi, J. and Pardoux, E. (1990). *Numerical methods in ergodic stochastic control, application to semi active vehicle suspensions*, In Proceedings of the 29th IEEE conference on Decision and Control, Honolulu.
11. Kuhn, D., Parpas, P. and Rustem, B. (2008). Stochastic optimization of investment planning problems in the electric power industry, *Process Systems Engineering: Energy Systems Engineering*, 5, 215-230.
12. Li, A., Feng, E. M. and Sun, X. L. (2008). Stochastic optimal control and algorithm of the trajectory of horizontal wells, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 212(2), 419-430.
13. Raffard, R., Hu, J. and Tomlin, C. (2005). *Adjoint-based optimal control of the expected exit time for stochastic hybrid systems*, in *Hybrid Systems: Computation and Control*, LNCS 3414 (Eds. M. Morari, L. Thiele), Springer-Verlag, p.557-572.
14. Sethi, S. P. and Zhang, Q. (1994). *Hierarchical decision making in stochastic manufacturing systems*, Birkhauser Verlag Basel, Switzerland.
15. Önalın, Ö. (2010). *Stokastik Süreçler*. İstanbul: Avcıol Basım Yayın, 1(1), 211-321.

16. Du, N., Shi, J. T. and Liu, W. B. (2013). An effective gradient projection method for stochastic optimal control, *International Journal of Numerical Analysis and Modelling*, 1(4), 757-774.
17. Elliott, R. J. (1990). The optimal control of diffusions, *Applied Mathematics and Optimization*, 22(1), 229-240.
18. Chen, J. (2007). *Some Problems of Optimal Control and the Application in Financial Mathematics*, Master's Thesis, Tongji University, China.
19. Girardeau, P. (2010). *A comparison of sample-based stochastic optimal control methods*, Humboldt University, Berlin.
20. Gentle, E. J., Härdle, W. and Mori, Y. (2012). *Handbook of Computational Statistics* (Second edition). New York: Springer-Verlag, 169-197.
21. Shapiro, A. and Ruszczyński, A. (2003). Stochastic Programming, *Handbooks in Operations Research and Management Science*, 10, 483–554.
22. Heitsch, H. and Romisch, W. (2003). Scenario reduction algorithms in stochastic programming, *Computational Optimization and Applications*, 24, 187-206.
23. Kushner, H. J. and Dupuis, P. (2001). *Numerical methods for stochastic control problems in continuous time* (Second edition). New York: Springer-Verlag, 7-28.
24. Bertsekas, D. P. (2007). *Dynamic Programming and Optimal Control*, (Fourth edition). Massachusetts: Athena Scientific, 378.
25. Bardi, M. and Capuzzo-Dolcetta, I. (1997). *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton- Jacobi-Bellman equations*, Boston: Birkhäuser, 25.
26. Bensoussan, A. (1981). *Lecture on Stochastic Control*, in *Nonlinear Filtering and Stochastic Control*, Lecture Notes in Mathematics 972, Springer-Verlag, Berlin, New York.
27. Crandall, M. and Lions, P. L. (1983). *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Transactions of the American Mathematical Society, 277, 1-42.
28. Huang, C. S., Wang, S. and Teo, K. L. (2000). *Solving Hamilton-Jacobi-Bellman equations by a modified method of characteristics*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 40, 279-293.
29. Korn, R. (1997). *Optimal Portfolios: Stochastic Models for Optimal Investment and Risk Management in Continuous Time*, World Scientific Singapore.
30. Korn, R. and Kraft, H. (2001). A stochastic control approach to portfolio problems with stochastic interest rates, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 40(4), 1250-1269.
31. Rogers, L. C. G. (2007). Pathwise Stochastic Optimal Control, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 46(3), 1116-1132.

32. Hausmann, U. G. (1981). Some examples of optimal stochastic controls or: the stochastic maximum principle at work, *SIAM Review*, 23(3), 292-307.
33. Ikeda, N. and Watanabe, S. (1989). *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North-Holland, Kodansha.
34. Peng, S. G. (1990). A general stochastic maximum principle for optimal control problems, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 28(4), 966-979.
35. Yoneyama, T. (1983). *Adjoint processes in stochastic optimal control*, Ph. D Thesis, Imperial College, London.
36. Mandelbrot, B. and Hudson, R. L. (2006). *The Misbehavior of Markets: A Fractal View of Financial Turbulence*, Basic Books, New York, 72–75.
37. Derman, E. (2004). *My Life as a Quant: Reflections on Physics and Finance*, John Wiley and Sons, New Jersey.
38. Thorp, E. O. (2017). *A Man for all Markets from Las Vegas to Wall Street, How I beat the dealer and the market*, Random House, England.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : SARGIN, Yağmur
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 05.10.1987, Ankara
 Medeni hali : Evli
 Telefon : 0 (506) 2257154
 e-mail : yagmuratli@gmail.com



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi /Uygulamalı Matematik	Devam Ediyor
Yüksek lisans	Hacettepe Üniversitesi / İktisat	2018
Lisans	Yeditepe Üniversitesi/Matematik	2013
Lise	Keçiören Anadolu Lisesi	2006

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2016-Halen	Gelir İdaresi Başkanlığı	Gelir Uzmanı

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

Atlı Sargin, Y. (Mayıs, 2019). *Optimal control of stochastic differential equations and optimality conditions*, International Workshop on Dynamical Systems and Applications IWDSA , Gazi Üniversitesi, Ankara.

Hobiler

Pilates, Yüzme, Kitap okuma



GAZİ GELECEKTİR..