

**SİNGULER BAŞLANGIÇ VEYA SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN
YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ: DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM VE ADOMİAN
AYRIŞTIRMA METODLARI**

Derya ÜNAL

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ŞUBAT 2010
ANKARA**

Derya ÜNAL tarafından hazırlanan Singuler Başlangıç veya Sınır Değer Problemlerinin Yaklaşık Çözümleri: Diferensiyel Dönüşüm ve Adomian Ayırıştırma Metodları adlı bu tezin Yüksek Lisans olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Fatma AYAZ
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç.Dr. Nuri ÖZALP
Matematik A.D. , Ankara Üniversitesi

Doç. Dr. Fatma AYAZ
Matematik Anabilim Dalı Gazi Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Ülkü DİNLEMEZ.....
Matematik Anabilim Dalı Gazi Üniversitesi

Tarih: 05/02/2010

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans / Doktora derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Derya ÜNAL

**SİNGULER BAŞLANGIÇ VEYA SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN
YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ: DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM VE ADOMIAN
AYRIŞTIRMA METODLARI
(Yüksek Lisans Tezi)**

Derya ÜNAL

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Şubat 2010**

ÖZET

Bu tezde bazı özel tipte başlangıç değer ve sınır değer problemlerinin, diferensiyel dönüşüm yöntemi ve Adomian ayrıştırma metotları yardımıyla çözümleri elde edilmiştir. Bu çalışmada, çözülen denklemlerin çoğu singuler başlangıç değer ve sınır değer problemleri olup, bu problemlerin seri çözümleri elde edilmiş ve farklı noktalar için çözüm grafikleri çizilmiştir.

Diferensiyel dönüşüm metodu ile başlangıç değer ve sınır değer problemlerinin cebirsel denklemleri elde edilmekte, tekrar bağıntısı kurularak dönüşüm katsayıları hesaplamaktadır. Böylece yaklaşık çözümlere veya kapalı form seri çözümlere ulaşılabilir.

Adomian ayrıştırma metodu ile de başlangıç değer ve sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümleri elde edilmektedir, verilen denklem lineer ve nonlinear parçalara ayrılır. Lineer olan $y(x)$ terimi;

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$$

ile tanımlanan $y_n(x)$ terimlerinin sonsuz toplamına ayrıştırılır. Nonlineer $F(y(x,t))$ terimi de, A_n Adomian polinomları olmak üzere,

$$F(y(x,t)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

Şeklinde ayrıştırma serilerine dönüştürülür. Bu tezde her iki metot yardımıyla bazı özel tipte problemler paket program kullanılarak çözülmüş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Bilim Kodu	: 204.1.138
Anahtar Kelimeler	: Diferensiyel dönüşüm metodu, Adomian ayrıştırma metodu, başlangıç ve sınır değer problemleri, singular başlangıç değer ve sınır değer problemleri
Sayfa Adedi	: 115
Tez Yöneticisi	: Doç Dr. Fatma AYZ

**APPROXIMATE SOLUTIONS OF SINGULAR INITIAL OR BOUNDARY
VALUE PROBLEMS: DIFFERENTIAL TRANSFORMATION AND
ADOMIAN DECOMPOSITION METHODS
(M. Sc. Thesis)**

**GAZİ ÜNİVERSİTİ
INSTITUTE OF SCIENCE
February 2010**

ABSTRACT

In this thesis, some special types of initial value and boundary value problems have been solved by differential transformation method and Adomian decomposition method via. In this thesis, most of solved equations were singular initial value and boundary value problems. Solution results of both methods were compared and solution graphics were drawn by composing algorithms.

By Differential Transform method, algebraic equations of initial value and boundary value problems are obtained first then tekrar relation is found. Hence, transformation coefficients are calculated in order to obtain approximate solutions or closed form solutions of the problems. It is shown that the approximate solutions are very close or same with analytic solutions when they are compared. Results are shown in appendix by means of table and graphics.

By Adomian decomposition method, differential equations are divided into linear and nonlinear parts. Linear $y(x)$ term is decomposed to infinite sum of terms defined as;

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$$

Also nonlinear $F(y(x,t))$ term is transformed to decomposition series as,

$$F(y(x,t)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

being A_n is Adomian polynoms. Approximate solutions were found by means of Algorithms. Results are shown on appendix with table and graphics.

Science Code	: 204.1.138
Key words	: Differential transform method, Adomian decomposition method initial value and boundary value problems, singular initial value and boundary value problems.
Number of page	: 115
Thesis advisor	: Doç. Dr. Fatma AYAZ

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlarken benden bilgi birikimini esirgemeyen, kaynaklarla destekleyen ve değerli zamanlarını bana ayıran tez danışmanım Doç. Dr. Fatma AYZA'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, bu çalışma süresince manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme ve çok değerli arkadaşlarım Ersan YEŞİLKAYA ile Kamile AKTA'ya teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	vi
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	xi
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	xii
1. GİRİŞ	1
1.1. Çalışmanın Kapsamı	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	5
2.1. Başlangıç Değer Problemi Tanımı ve Varlık Teklik Teoremi	5
2.2. Sınır Değer Problemi Tanımı ve Varlık Teklik Teoremi	7
2.3. Singuler Başlangıç Değer Problemi.....	14
2.4. Singuler Sınır Değer Problemi.....	17
3. DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ	18
3.1. Bir Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi.....	18
3.2. Bir Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm Yönetiminin 2. Mertebeden Singuler Başlangıç Değer ve Sınır Değer Problemlerine Uygulanışı.....	25
3.2.1. $fx, y = y, gx = 6 + 12x + x^2 + x^3$ olması durumu	25
3.2.2. $fx, y = y^3, gx = 6 + x^6$ olması durumu	29
3.2.3. $fx, y = xy \quad gx = x^5 - x^4 + 44x^2 - 30x$ olması durumu...	32
3.2.4. $fx, y = y^2, gx = 20 + x^4$ olması durumu.....	35
3.3. Yüksek Mertebeden Bazı Lineer Olmayan Sınır Değer Problemleri	39
3.3.1. $n=2, m=-2$ için lineer sınır değer problemi	39
3.3.2. $n=1, m=1$ için lineer sınır değer problemi	43
4. ADOMIAN AYRIŞTIRMA METODU	48
4.1. Adomian Ayırıştırma Yöntemi.....	48

Sayfa

4.2. Adomian Polinomlar	53
4.3. Adomian Ayırıştırma Metodunun Singuler Başlangıç Değer ve Sınır Değer Problemlerine Uygulanışı	61
4.3.1. $fy = y$, $gx = 6 + 12x + x^2 + x^3$ olması durumu.....	61
4.3.2. $fy = y^3$, $gx = 6 + x^6$ olması durumu	65
4.3.3. $fx, y = xy$, $gx = x^5 - x^4 + 44x^2 - 30x$ olması durumu	69
4.3.4. $fy = y$, $gx = x^5 + 30x^3$ olması durumu	71
4.3.5. $fx, y = 6x^2y + y^2$, $gx = 20 + x^4$ olması durumu	73
4.4. (n+1). Mertebeden Nonlineer Singuler Sınır Değer Problemleri	77
4.4.1 $n = 1, m = 1$ olması durumu	77
4.4.2. $n = 1, m = -1$ olması durumu.....	80
4.4.3. $fy = -y - y^2$, $gx = 7x^2 + 6xex - 6ex - x^6e^{2x}$ olması durumu..	83
5. SONUÇ VE TARTIŞMA	85
KAYNAKLAR	91
EKLER	93
EK-1 Eş. 5.4 Başlangıç değer probleminin diferensiyel transform metodu çözümü.....	94
EK-2 Eş. 5.4 Başlangıç değer problem çözümünün Adomian Ayırıştırma Yöntemi	99
EK-3 Eş. 5.5 Sınır değer problemlerinde diferensiyel transform metodu ile çözüm $y''' - \frac{2}{x}y'' - y - y^2 = 7x^2e^x + 6xe^x - 6e^x - x^6e^{2x}$	103
EK- 4 Eş. 5.5 Sınır değer problemlerinin Adomian Ayırıştırma Yöntemi ile çözümü.....	111
ÖZGEÇMİŞ.....	121

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 3.1. Taylor seri açılımında $y(x)$ çözümüne yakınsak olan $\cos x$ için çözüm değerleri çizelgesi	47
Çizelge 5.1. Başlangıç veya sınır değer problemlerinin bir boyutlu Diferansiyel dönüşüm yöntemi ve Adomian ayrıştırma yöntemi çözümlerinin karşılaştırılması	88

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 5.1. Uygulama 4.Başlangıç değer problemlerinin her iki yöntemle de çözümleri verilmektedir.	89
Şekil 5.2. Uygulama 5. Sınır değer probleminin her iki yöntemle de çözümleri verilmektedir.....	90
Şekil 1.1. Başlangıç değer probleminin diferensiyel transform metodu çözümü grafiği.....	98
Şekil 2.1 Eş. 5.4 Başlangıç değer problemi çözümünün Adomian Ayrıştırma Yöntemi grafiği	102
Şekil 3.1 Eş. 5.5 Sınır değer problemlerinde diferensiyel transform metodu ile çözümü.....	110
Şekil 4.1. Eş. 5.5 Sınır değer problemlerinin Adomian Ayrıştırma Yöntemi ile çözümü grafiği.....	120

1. GİRİŞ

1.1. Çalışmanın Kapsamı

Şimdiye kadar 2. mertebeden adi diferensiyel denklemler için singular başlangıç değer ve sınır değer problemi birçok matematikçi ve fizikçi tarafından çalışılmıştır. [4,11,12,16,17]. Singular başlangıç değer problemlerinin en önemli tiplerinden biride Lane-Emden tipi denklemlerdir. Bu denklemler;

$$y'' + \frac{2}{x}y' + f(y) = 0, \quad 0 < x \leq 1 \quad (1.1)$$

$$y(0) = A, y'(0) = B$$

formunda [11,12] olup,

Wazwaz [1] , Eş.1.1 denklemini genelleştirerek $\frac{2}{x}$ yerine $\frac{n}{x}$ getirmiştir ve problem

$$y'' + \frac{n}{x}y' + f(y) = 0, \quad 0 < x \leq 1 \quad (1.2)$$

$$y(0) = A, y'(0) = B$$

formunda yazılmıştır.

Singular başlangıç değer problemlerinin diğer bir tipi

$$y'' + \frac{2}{x}y' + f(x, y) = g(x), \quad 0 < x \leq 1$$

$$y(0) = A, y'(0) = B$$

Formunda [11,12,17] olup

genelleştirilmiş hali Wazvaz [14] tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$y'' + \frac{2n}{x} y' + \frac{n(n-1)}{x^2} y + f(x, y) = g(x), n \geq 0$$

$$y(0) = A, y'(0) = B$$

biçiminde verilmiştir.

Yahya Qaid Hasan ve Liu Ming Zhu [16] ise $(n+1)$. mertebeden singular sınır değer problemlerini:

$$y^{(n+1)} + \frac{m}{x} y^{(n)} + N(y) = g(x) \quad (1.3)$$

$$y(0) = a_0, y'(0) = a_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = a_{n-1}, y(b) = c,$$

formunda vermişlerdir. Burada $n \geq 1$, $n \geq m$, $N(y)$, nonlinear terim olup mertebesi n 'den küçüktür ve $g(x)$ verilen fonksiyon, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b$ 'ler ise birer sabittir.

Yaklaşık hesaplama yöntemlerinden biri olan diferensiyel dönüşüm metodu, diferensiyel denklemlerin çözümünde büyük kolaylık sağlamaktadır. Diferensiyel dönüşüm metodu ilk olarak Puhov [2] ve Zhou [3] tarafından ortaya atılmıştır. Diferensiyel denklemlerin seri çözümünü veren bu yöntem Chen ve Ho [5] tarafından kısmi türevli denklemler için geliştirilmiştir. Ayaz [7] lineer diferensiyel cebirsel denklemlerin çözümünde kullanmıştır. Yine Ayaz [6] diferensiyel denklem sistemlerinde uygulamıştır. Taylor seri açılımındaki

katsayıları iteratif yolla elde etmeye yarayan bu yöntemi Ertürk [4,15] singular başlangıç değer problemlerine uygulamış ve sayısal çözümler elde etmiştir.

Bu tezde Lane- Emden tipi ve bazı özel tipteki singular başlangıç değer ve sınır değer problemleri diferensiyel dönüşüm yöntemi ile çözülmüş, kapalı form çözümleri Algoritma kullanılarak elde edilmiş ve çözüm grafikleri verilmiştir.

Bir diğer yaklaşık yöntemde Adomian ayrıştırma yöntemi olup, Adomian tarafından lineer ve nonlinear problemlerin çözümünde kullanılmıştır. Yöntem hızlı yakınsak bir yaklaşımdır. Bu yöntemde ayrıştırma serileri cinsinden yaklaşık çözümler elde edilir. Çözümler, terimleri kolaylıkla hesaplanabilen yakınsak kuvvet serileri formundadır.

Son yıllarda Modifiye Adomian ayrıştırma yöntemi kullanılarak, yeni bir diferensiyel operatör yardımıyla 2.mertebeden singüler başlangıç değer ve sınır değer problemleri çözülmüştür [17]. Modifiye Adomian ayrıştırma yönteminin yakınsaması oranı standart Adomian ayrıştırma yönteminden daha yüksek bulunmuştur [17].

Bu tezde singular başlangıç değer ve sınır değer problemleri için [17] deki gibi bir diferensiyel operatör kullanılarak, lineer ve nonlinear terimlere ayrılan denklem operatör formda yazılmıştır. Bu yöntemde göre diferensiyel denklemin her iki yanına integral operatörü uygulanır. Nonlinear terimin Adomian polinomları bulunup,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \quad (1.4)$$

Ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonunda yazılarak,

$$y = y_0 + y_1 + y_2 + \dots$$

seri çözümü elde edilir. Eğer seri yakınsak ise,

$$\phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \quad (1.6)$$

n -terim kısmi toplamı yaklaşık çözüm olur. Çünkü Eş. 1.4

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

serisinin tüm terimleri belirlenemediğinden, sonlu sayıda terim kullanılarak denklemlerin yaklaşık sayısal çözümü elde edilebilir. Bu yöntem ile çözülen singular başlangıç değer ve sınır değer problemleri için hesaplamalarda yine Algoritmalar kullanılmış ve çözüm grafikleri verilmiştir.

Tezin 2.Bölümünde, Başlangıç ve Sınır değer problemlerinin varlık ve teklik teoremlerine yer verilmiş ve singular Başlangıç Değer ve Singular Sınır Değer problemlerine değinilmiştir.

3.Bölüm Diferensiyel Dönüşüm metodu ile ilgili temel tanım ve teoremleri ve teoremlerin ispatlarını içermektedir. Aynı bölümde Lane Emden tipi Başlangıç Değer ve Yüksek Mertebeden lineer olmayan bazı sınır değer problemleri bu yöntemle çözülmüştür.

4.Bölümde, Adomian Ayırıştırma Yöntemi ve Modifiye Adomian Ayırıştırma metodları incelenmiş ve bazı özel tipte singular başlangıç değer ve sınır değer problemleri ve yüksek mertebeden başlangıç değer ve sınır değer problemlerinin çözümleri Bölüm 3 de olduğu gibi bu bölümde de Adomian Yöntemi ile hesaplanmıştır.

5.Bölüm sonuç ve öneriler kısmı olup, her iki yöntemle de hesaplanan sonuçların karşılaştırılmaları tablolar yardımıyla varılmıştır.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Başlangıç Değer Problemi Tanımı ve Varlık Teklik Teoremi

n . mertebeden,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.1)$$

formundaki diferensiyel denklem ve $x = x_0$ noktasında $y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$ başlangıç şartları verilmişse probleme Başlangıç Değer Problemi[18] denir.

2.1. Tanım (Lipschitz şartı)

Bir $f(x; u)$ fonksiyonu $D \subset R^2$ de tanımlı olmak üzere

Her $(x; u)$ ve $(x; v) \in R$ için $|f(x; u) - f(x; v)| \leq K|u - v|$ (K ;sabit)

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $K > 0$ sayısı bulunabiliyorsa f 'ye Lipschitz şartını sağlar denir.

2.1. Teorem

Fonksiyon $f(x; u)$ şeklinde verilsin.

$R: a \leq x \leq b, |u| < \infty$ bölgesinde sürekli ve

Her $(x; u)$ ve $(x; v) \in R$ için $|f(x; u) - f(x; v)| \leq K|u - v|$ (K ;sabit)

Lipschitz şartını sağlasın.

$$u' = f(x; u), \quad u(a) = \alpha \quad (2.2)$$

başlangıç değer probleminin

$[a,b] \equiv \{x|a \leq x \leq b\}$ aralığında tanımlı $u = u(x; \alpha)$ şeklinde bir tek çözümü vardır [8,9].

İspat

Eğer Eş.2.2 ile verilen başlangıç değer probleminin bir çözümü varsa, bu çözümü verilen denklem her iki tarafının integrali alınıp başlangıç şartı kullanılarak

$$u(x) = \alpha + \int_a^x f(\xi; u(\xi)) d\xi \quad (2.3)$$

şeklinde elde edilir [2]. Eğer $u(x)$ sürekli ve Eş. 2.3'ü sağlarsa diferensiyellenebilirdir ve Eş. 2.2 denklemini sağlamaktadır. Picard ardışık yaklaşımlar metodunu kullanarak bu integral denkleminin çözümünü oluştursak

$$u^{(0)}(x) = \alpha,$$

$$u^{(v+1)}(x) = \alpha + \int_a^x f(\xi; u^{(v)}(\xi)) d\xi, \quad v = 0, 1 \dots$$

$f(x; u)$ lipschitz sürekli olduğundan

$$|u^{(v+1)}(x) - u^{(v)}(x)| \leq \int_a^x K |u^{(v)}(\xi) - u^{(v-1)}(\xi)| d\xi, \quad v = 1, 2 \dots$$

$[a,b]$ aralığında $|f(x; \alpha)| \leq M$ şartı ile buradan

$$|u^{(v+1)}(x) - u^{(v)}(x)| \leq \frac{M}{K} \frac{(K[x-a])^{v+1}}{(v+1)!}$$

elde edilebilir.

$$\mathbf{u}^{(v+1)}(x) = \mathbf{u}^{(0)} + \sum_{\mu=0}^v [\mathbf{u}^{(\mu+1)}(x) - \mathbf{u}^{(\mu)}(x)] \quad (2.4)$$

olduğundan $\{\mathbf{u}^{(v)}(x)\}$ sürekli fonksiyonlar dizisinin $[a,b]$ 'de düzgün yakınsak olduğu gösterilebilir. Limit fonksiyonu açıkça üstteki integral denklemini ve dolayısıyla da Eş. 2.2'ü sağlar. Böylece herhangi bir α için varlık gösterilmiş olur. $\beta \rightarrow \alpha$ iken $\mathbf{u}(x; \beta)$ 'nin sürekliliğinden de çözümün tekliği bulunur.

2.2. Sınır Değer Problemi Tanımı ve Varlık Teklik Teoremi

Diferensiyel denklemle birlikte verilen ek şartlar birden fazla nokta için tanımlanmışsa bu probleme sınır değer problemi denir.

$(a,b) \subset R$ olmak üzere 2. mertebeden basit bir sınır değer problemi [18]

$$y'' = f(x, y, y') \quad (2.5)$$

$$y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

biçimindedir.

Burada $y(a) = \alpha, y(b) = \beta$ ya sınır şartları denir.

2.2. Teorem

(Fredholm alternatif teoremi [13])

$p(x), q(x), g(x), a \leq x \leq b$ aralığında sürekli olsunlar.

$a_0, a_1, b_0, b_1, \alpha, \beta$ sabitler olmak üzere

$|a_0| + |a_1| > 0$ ve $|b_0| + |b_1| > 0$ olsun.

ya,

α ve β nın herhangi değerleri için

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \quad , \quad a < x < b$$

$$a_0y(a) + a_1y'(a) = \alpha \tag{2.6}$$

$$b_0y(b) + b_1y'(b) = \beta$$

tek çözüme sahiptir.

Ya da,

$$z'' + p(x)z' + q(x)z = 0 \quad , \quad a < x < b$$

$$a_0z(a) + a_1z'(a) = 0 \tag{2.7}$$

$$b_0z(b) + b_1z'(b) = 0$$

Sıfır olmayan çözüme sahiptir.

İspat

$y_1(x), y_2(x)$ ve $Y(x)$ aşağıdaki üç başlangıç değer problemlerinin çözümleri olsunlar.

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0, \quad y_1(a) = a_1, \quad y_1'(a) = -a_0$$

$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0, \quad y_2(b) = -b_1, \quad y_2'(b) = b_0 \tag{2.8}$$

$$Y'' + p(x)Y' + q(x)Y = 0, \quad Y(a) = 0, \quad Y'(a) = 0$$

Her bir başlangıç değer probleminin $a \leq x \leq b$ aralığının da çözümü vardır ve tektir. (Başlangıç değer Teorem 2.1)

Eş. 2.8 başlangıç durumları

$$a_0 y_1(a) + a_1 y_1'(a) = 0$$

$$b_0 y_2(b) + b_1 y_2'(b) = 0$$

gibidir.

$W(x)$, $\{y_1, y_2\}$ çözüm kümesinin Wronksien'i olsun.

$[a, b]$ aralığında

Ya, daima $W(x)=0$ dır.

Ya da, $W(x) \neq 0$ dır.

Teorem 2.2 ü ispatlamak için aşağıdaki (i) ve (ii)'yi göstermeliyiz:

i) Eş. 2.6'nın tek çözüme sahip olduğunu göstermek için $W(x) \neq 0$ olduğunu göstermek yeterlidir.

ii) Eş. 2.7'nin sıfır olmayan çözüme sahip olduğunu göstermek için $[a, b]$ aralığı boyunca $W(x) = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir.

i) $[a, b]$ kapalı aralığında $W(x) \neq 0$ olsun.

Eş. 2.6 diferensiyel denkleminin genel çözümü,

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + Y(x) \quad (2.9)$$

Buradaki c_1 ve c_2 nin tek olduklarını göstereceğiz. $y(x)$ çözümü Eş. 2.6 deki sınır durumlarını sağlar.

Eş. 2.6

$$a_0 y(a) + a_1 y'(a) = \alpha$$

$$b_0 y(b) + b_1 y'(b) = \beta$$

sınır durumlarının sol yanlarını hesaplayalım.

$a_0 y(a) + a_1 y'(a)$ yı hesaplamak için Eş. 2.9'da x yerine a ve b yazalım.

Sonra da Eş. 2.9'nın x 'e göre türevini alıp burada x yerine a ve b yazalım.

$$x = a, \quad y(a) = c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) + Y(a)$$

$$x = b, \quad y(b) = c_1 y_1(b) + c_2 y_2(b) + Y(b)$$

$$y'(x) = c_1 y'_1(x) + c_2 y'_2(x) + Y'(x)$$

$$x = a, \quad y'(a) = c_1 y'_1(a) + c_2 y'_2(a) + Y'(a)$$

$$x = b, \quad y'(b) = c_1 y'_1(b) + c_2 y'_2(b) + Y'(b)$$

bunları Eş. 2.6 sınır durumlarında yazalım.

$$\alpha = a_0 y(a) + a_1 y'(a)$$

$$= a_0 [c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) + Y(a)] + a_1 [c_1 y'_1(a) + c_2 y'_2(a) + Y'(a)]$$

$$= c_2 [a_0 y_2(a) + a_1 y'_2(a)]$$

$$= c_2[y_1(a)y_2'(a) - y_1'(a)y_2(a)]$$

$$= c_2W(a)$$

$$\beta = b_0y(b) + b_1y'(b)$$

$$= b_0[c_1y_1(b) + c_2y_2(b) + Y(b)] + b_1[c_1y_1'(b) + c_2y_2'(b) + Y'(b)]$$

$$= c_1[y_2'(b)y_1(b) - y_2(b)y_1'(b)]$$

$$= \beta - [b_0Y(b) - b_1Y'(b)]$$

$$= c_1W(b)$$

$W(a) \neq 0$ ve $W(b) \neq 0$ olduğu için c_1 ve c_2 sabitleri tektir. Bu değerler Eş. 2.6 sınır değer probleminin tek çözüme sahip olduğunu gösterir.

ii) $[a,b]$ kapalı aralığında her yerde $W(x) = 0$ olsun.

$$z(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x),$$

Eş. 2.7 homojen diferensiyel denklemin çözümüdür ve şimdi göstermeliyiz ki $z(x)$ aşağıdaki homojen sınır durumlarını sağlar.

$$a_0z(a) + a_1z'(a) = 0$$

$$b_0z(b) + b_1z'(b) = 0$$

Seçtiğimiz c_1 ve c_2 için değerler ne olursa olsun, şunları elde ederiz:

$z(x)$ de $x = a$ ve $x = b$ 'yi yazarsak

$$z(a) = c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a)$$

$$z(b) = c_1 y_1(b) + c_2 y_2(b)$$

$$z'(x) = c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x)$$

$z'(x)$ 'de $x = a$ ve $x = b$ yazılırsa,

$$z'(a) = c_1 y_1'(a) + c_2 y_2'(a)$$

$$z'(b) = c_1 y_1'(b) + c_2 y_2'(b)$$

$$a_0 z(a) + a_1 z'(a) = c_1 [0] + c_2 [a_0 y_2(a) + a_1 y_2'(a)]$$

$$= c_2 [y_1(a) y_2'(a) - y_1'(a) y_2(a)]$$

$$= c_2 W(a) = 0$$

$$b_0 z(b) + b_1 z'(b) = c_1 [b_0 y_1(b) + b_1 y_1'(b)] + c_2 [0]$$

$$= c_2 [y_2'(b) y_1(b) - y_2(b) y_1'(b)] = c_1 W(b) = 0$$

Bu nedenle; sınır durumları c_1 ve c_2 üzerinde kısıtlamaya neden olmaz

Eş. 2.8 sınır durumları ve $|a_0| + |a_1| > 0$ ve $|b_0| + |b_1| > 0$ nedeniyle hem $y_1(x)$ hem de $y_2(x)$,

$$\text{Eş. 2.6 } y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

diferensiyel denkleminin sıfır olmayan çözümleridir. Dolayısıyla, Eş. 2.7 denkleminin sıfır olmayan çözümleri olduğunu biliriz. Örneğin $c_1 = 1$ ve $c_2 = 0$ seçersek;

$z(x) = y_1(x)$ sıfır olmayan çözüm olur.

Ayrıca aşağıda verilen iki teorem yine sınır değer problemlerinin varlık ve tekliğine ilişkin teoremlerde ispatsız değinilmiştir.

2.3. Teorem

$p(x)$, $q(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $a \leq x \leq b$ aralığında sürekli ve bu aralıkta $q(x) < 0$ olsun.

a_0, a_1, b_0, b_1 sabitler,

$|a_0| + |a_1| > 0$ ve $|b_0| + |b_1| > 0$ dır.

Farz edelim ki,

$a_0 a_1 \leq 0$, $b_0 b_1 \geq 0$ ve $|a_0| + |b_0| > 0$ dır.

O zaman herhangi α ve β değerleri için

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \quad a < x < b$$

$$a_0 y(a) + a_1 y'(a) = \alpha$$

$$b_0 y(b) + b_1 y'(b) = \beta$$

Sınır değer problemi tek çözüme sahiptir.

2.4. Teorem

$q(x), g(x)$ fonksiyonları $a \leq x \leq b$ aralığında sürekli ve bu aralıkta $q(x) \leq 0$ olsun.

O zaman herhangi α ve β değerleri için

$$y'' + q(x)y = g(x) \quad , \quad a < x < b$$

$$y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

Sınır değer problemi tek çözüme sahiptir.

2.3. Singuler Başlangıç Değer Problemi

2. mertebeden Adi diferensiyel denklemlerde singuler başlangıç değer problemlerinin en önemlilerinden biri Lane-Emden tipi denklemlerdir. Denklem,

$$y'' + \frac{2}{x}y' + f(y) = 0, \quad 0 < x \leq 1 \quad (2.10)$$

$$y(0) = A, y'(0) = B$$

formundadır [11,12].

Wazwaz [14] Eş. 2.10 denklemini genişletilerek $\frac{2}{x}$ yerine $\frac{n}{x}$ getirmiştir ve denklem

$$y'' + \frac{n}{x}y' + f(y) = 0, \quad 0 < x \leq 1, \quad n \geq 0 \quad (2.11)$$

$$y(0) = A, y'(0) = B$$

Singuler başlangıç değer problemlerinin bir başka formu [11,12,17]

$$y'' + \frac{2}{x}y' + f(x, y) = g(x), \quad 0 < x \leq 1 \quad (2.12)$$

$$y(0) = A, \quad y'(0) = B$$

A, B sabitler olup $f(x, y)$, reel değerli sürekli fonksiyon

$g(x) \in C[0, 1]$ dir.

Eş. 2.12 singular başlangıç değer probleminin çözümü için

$$L(.) = x^{-1} \frac{d^2}{dx^2} xy(.) \quad (2.13)$$

Diferensiyel operatörü [17] ve

$$L^{-1}(.) = x^{-1} \int_0^x \int_0^x x(.) dx dx \quad (2.14)$$

Ters(integral) operatörü [17] kullanılmıştır.

Wazwaz [14] Eş. 2.12 denklemini genelleştirmiştir ve genel halini

$$y'' + \frac{2n}{x}y' + \frac{n(n-1)}{x^2}y + f(x, y) = g(x), \quad n \geq 0 \quad (2.15)$$

$$y(0) = A, \quad y'(0) = B$$

biçiminde vermiştir.

Eş. 2.15 singular başlangıç değer probleminin çözümü için

$$L(.) = x^{-n} \frac{d^2}{dx^2} x^n y(.) \quad (2.16)$$

Diferensiyel operatörü ve

$$L^{-1}(.) = x^{-n} \int_0^x \int_0^x x^n (.) dx dx \quad (2.17)$$

Ters (integral) operatörü kullanılmış ve

$$y_0(x) = A + L^{-1}g(x)$$

$$y_{k+1} = -L^{-1}(A_k), k \geq 0$$

$$y_0 = A + L^{-1}(g(x))$$

$$y_1 = -L^{-1}(A_0)$$

$$y_2 = -L^{-1}(A_1)$$

$$y_3 = -L^{-1}(A_2)$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots$$

Adomian ayrıştırma seri çözümü elde edilmiştir [17].

2.4. Singular Sınır Değer Problemi

$(n+1)$ 'inci yüksek mertebeden adi diferensiyel denklemlerin singular sınır değer problemi [16]

$$y^{(n+1)} + \frac{m}{x} y^{(n)} + Ny = g(x) \quad (2.18)$$

$$n \geq 1, n \geq m,$$

$y(0) = a_0, y'(0) = a_1, y''(0) = a_2, \dots, y^{(n-1)}(0) = a_{n-1}, y(b) = c$ formunda olup, N mertebesi n den küçük olan nonlineer diferensiyel operatör, $g(x)$ verilen fonksiyon, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b, c$ ise sabitlerdir.

3. DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ

Birçok fizikçi ve matematikçi tarafından, Başlangıç Değer ve Sınır değer probleminin çözümünde oldukça çeşitli yöntemler kullanılmaktadır. Fakat lineer olmayan terimler problemlerin çözümlerini oldukça zorlaştırdığı için bir takım lineerleştirme yöntemleri kullanılarak denklem linearize edildikten sonra çözümler elde edilmeye çalışılmaktadır. Diferensiyel dönüşüm metodu sayesinde bu zorluklar ortadan kalkmakta nonlineer terimlerin çözümü kolaylıkla elde edilerek yaklaşık seri çözümlerine ya da kapalı form çözümlere ulaşılabilmektedir.

Metodu, Ertürk [4,15] singüler başlangıç değer problemlerinin Lane-Emden tipine ve altıncı mertebeden sınır değer problemlerine, Ayaz [6,7] diferensiyel denklem sistemlerine ve diferensiyel cebirsel denklemlere uygulayarak kapalı form çözümlere ulaşmışlardır.

Bu bölümde, Adi diferensiyel denklemlerde başlangıç değer ve sınır değer problemleri göz önünde bulundurulacağından, bir boyutlu diferensiyel dönüşüm yöntemi analiz edilecektir.

3.1. Bir Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi

Diferensiyel dönüşüm metodu aşağıdaki gibi tanımlanabilir [7].

$y(x)$ orijinal fonksiyonunun T -dönüşüm fonksiyonu altındaki görüntüsü $Y(k)$ dönüşüm fonksiyonudur ve

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (3.1)$$

biçimindedir.

$Y(k)$ nın ters diferensiyel dönüşümü

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k) \quad (3.2)$$

biçiminde tanımlanmıştır.

Eş. 3.1 ve Eş. 3.2 den

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (3.3)$$

Eş. 3.3 denklemi diferensiyel dönüşüm kavramının Taylor seri açılımından elde edildiğini göstermektedir. Reel uygulamalarda $y(x)$ sonlu bir seri ile verilir [7] ve

$$y(x) = \sum_{k=0}^n x^k Y(k) \quad (3.4)$$

Biçiminde yazılır [7].

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k Y(k) \quad (3.5)$$

değeri ihmal edilir [7].

Eş. 3.1 ve Eş. 3.2 den aşağıdaki teoremler elde edilir.

3.1. Teorem

$f(x) \pm g(x) = h(x)$ ise $F(k) \pm G(k) = H(k)$ dır.

İspat

Eş 3.2 den

$$f(x)+g(x)=h(x) \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x^k F(k) + \sum_{k=0}^{\infty} x^k G(k) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k H(k)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x^k (F(k) \pm G(k)) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k H(k)$$

$$\Rightarrow F(k) \pm G(k) = H(k) \text{ dir}$$

3.2. Teorem

Eğer $f(x) = cg(x)$ ise

$F(k) = cG(k)$ dir. Burada c sabittir.

İspat

Eş. 3.2 den

c sabit olmak üzere;

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k F(k) = c \sum_{k=0}^{\infty} x^k G(k)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x^k F(k) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k c G(k)$$

$$\Rightarrow F(k) = cG(k) \text{ dir.}$$

3.3. Teorem

$$f(x) = \frac{d^n(g)}{dx^n} \text{ ise } F(k) = \frac{(k+n)!}{k!} G(k+n) \text{ dir.}$$

İspat

Eş 3.2 den

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k f(g)}{dx^k} \right]_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} \left[\frac{d^n(x)}{dx^n} \right] \right]_{x=0} \\ &= \frac{(k+n)!}{k! ((k+n)!)} \left[\frac{d^{k+n} f(x)}{dx^{k+n}} \right]_{x=0} \\ &= \frac{(k+n)!}{k!} G(k+n) \end{aligned}$$

3.4. Teorem

$f(x)=g(x)h(x)$ ise

$$F(k) = \sum_{r=0}^k G(r)H(k-r) \text{ dir.}$$

İspat

Eş 3.2 den

$k=0,1,2,\dots$ için

$$F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k[f(x)]}{dx^k} \right]_{x=0} = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k[g(x)h(x)]}{dx^k} \right]_{x=0}$$

$$k=0, F(0) = \frac{1}{0!} [g(x)h(x)]_{x=0}$$

$$=G(0)H(0)$$

$$k=1, F(1) = \frac{1}{1!} \left[\frac{d[g(x)h(x)]}{dx} \right]_{x=0}$$

$$= \frac{1}{1!} \left[\frac{dg(x)}{dx} \cdot h(x) + \frac{dh(x)}{dx} \cdot g(x) \right]_{x=0}$$

$$= \frac{1}{1!} [G(0)H(1) + H(0)G(1)]$$

$$k=2, F(2) = \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2[g(x) \cdot h(x)]}{dx^2} \right]_{x=0}$$

$$= \frac{1}{2!} \left[\frac{d}{dx} \left[\frac{dg(x)}{dx} \cdot h(x) + \frac{dh(x)}{dx} \cdot g(x) \right] \right]_{x=0}$$

$$= \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2g(x)}{dx^2} \cdot h(x) + \frac{dg(x)}{dx} \cdot \frac{dh(x)}{dx} + \frac{d^2h(x)}{dx^2} \cdot g(x) + \frac{dh(x)}{dx} \cdot \frac{dg(x)}{dx} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2 g(x)}{dx^2} + \frac{d^2 h(x)}{dx^2} + \frac{2dh(x)}{dx} \frac{dg(x)}{dx} \right]_{x=0} \\
&= \frac{1}{2!} [1.2. G(2). H(0) + 2G(1). H(1) + 1.2G(0). H(2)] \\
&= G(2)H(0) + G(1)H(1) + G(0)H(2)
\end{aligned}$$

Bunları genelleştirirsek;

$$F(k) = \sum_{r=0}^k G(r)H(k-r) \text{ olur.}$$

3.5. Teorem

$f(x)=x^j$ ise

$$F(k) = \delta(k-j) = \begin{cases} 1 & k=j \\ 0 & k \neq j \end{cases}$$

İspat

$$\begin{aligned}
F(k) &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k x^j}{dx^k} \right]_{x=0} \\
&= \frac{1}{k!} [j(j-1)(j-2)(j-3)\dots(j-k+1)x^{j-k}]_{x=0}
\end{aligned}$$

$j=k$ için

$$= \frac{1}{j!} [j(j-1)(j-2) \dots 1 \cdot x^0] = \frac{1}{j!} [j!] = 1$$

olur. $j > k$ ve $j < k$ için $x=0$ da sıfırdır.

$$\Rightarrow F(k) = \delta(k-j) = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases} \quad \text{dır.}$$

3.6. Teorem

$f(x) = e^{\lambda x}$ ise

$$F(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \text{ dır.}$$

İspat

Eş (3.2) den

$$F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k [e^{\lambda x}]}{dx^k} \right]_{x=0}$$

$$= \frac{1}{k!} [\overbrace{\lambda \cdot \lambda \cdot \lambda \dots \lambda}^{k \text{ tane}} e^{\lambda x}]_{x=0}$$

$$= \frac{1}{k!} [\lambda^k e^{\lambda x}]_{x=0}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}$$

3.2. Bir Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm Yönetiminin 2. Mertebeden Singuler Başlangıç Değer ve Sınır Değer Problemlerine Uygulanışı

Burada, bir boyutlu diferensiyel dönüşüm metodu singuler başlangıç değer ve sınır değer problemlerine uygulanmış ve seri yada kapalı form çözümler Algoritma yardımıyla elde edilerek sonuçlar grafiklerle gösterilmiştir. Metod Taylor serisi yöntemi olup, katsayıların hesaplanması alışlagelmiş Taylor yönteminden farklıdır.

2. mertebeden Adi diferensiyel denklemlerin singuler başlangıç değer problemlerinin en önemli tiplerinden biri olan denklem

$$y'' + \frac{2}{x}y' + f(x, y) = g(x), \quad 0 < x \leq 1 \quad (3.6)$$

$$y(0) = A, y'(0) = B \text{ formundadır [11,12].0,0}$$

Burada A, B sabitlerdir, $g(x)$ verilen fonksiyondur.

$f(x, y)$ sürekli reel değerli fonksiyondur [11]. Şimdi $f(x, y)$ 'nin ve $g(x)$ 'in bazı durumları için bu tip problemleri inceleyelim;

3.2.1. $f(x, y) = y$, $g(x) = 6 + 12x + x^2 + x^3$ olması durumu

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 6 + 12x + x^2 + x^3, \quad 0 < x \leq 1 \quad (3.7)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0$$

Başlangıç koşulları altında, Lane-Emden denklemini göz önüne alalım.

Eş. 3.7 denkleminin her iki yanını x ile çarptıktan sonra bir boyutlu diferensiyel dönüşüm uygulayalım:

$$xy'' + 2y' + xy = 6x + 12x^2 + x^3 + x^4 \quad (3.8)$$

$$xy'' \rightarrow \sum_{r=0}^k \delta(r-1)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2) \quad (3.9)$$

$$2y' \rightarrow 2(k+1)Y(k+1) \quad (3.10)$$

$$xy \rightarrow \sum_{r=0}^k \delta(r-1)Y(k-r) \quad (3.11)$$

$$6x + 12x^2 + x^3 + x^4 \rightarrow 6\delta(k-1) + 12\delta(k-2) + \delta(k-3) + \delta(k-4) \quad (3.12)$$

Eş. 3.9 ve Eş. 3.10'dan,

$$\sum_{r=0}^k \delta(r-1)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2) + 2(k+1)Y(k+1) \quad (3.13)$$

Eş. 3.13 de $r=1$ için

$$(k+1)(k+2)Y(k+1) \quad (3.14)$$

elde edilir.

Buradan tekrar bağıntısı

$$Y(k+1) = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \left[- \sum_{r=0}^k \delta(r-1)Y(k-r) + 6\delta(k-1) + 12\delta(k-2) + \delta(k-3) + \delta(k-4) \right] \quad (3.15)$$

olarak bulunur.

Şimdide Eş. 3.2 den yararlanarak başlangıç durumlarından;

$$y(0) = 0 \text{ için}$$

$$Y(0) + Y(1)x + Y(2)x^2 + Y(3)x^3 + Y(4)x^4 + \dots = 0$$

$$Y(0) = 0 \text{ olur.}$$

$$y'(0) = 0 \text{ için}$$

$$y'(x) = Y(1) + 2Y(2)x + 3Y(3)x^2 + 4Y(4)x^3 + \dots = 0$$

$$Y(1) = 0 \text{ olur.}$$

Eş. 3.15 Tekrar bağıntısını kullanarak aşağıdaki diferensiyel dönüşüm katsayılarını elde edelim:

$$k=0, Y(1) = \frac{1}{2}[0] = 0$$

$$k=1, Y(2) = \frac{1}{6}[-Y(0) + 6] = 1$$

$$k=2, Y(3) = \frac{1}{12}[-Y(1) + 12] = 1$$

$$k=3, Y(4) = \frac{1}{20}[-Y(2) + 1] = 0$$

$$k=4, Y(5) = \frac{1}{30}[-Y(3) + 1] = 0$$

$$k=5, Y(6) = \frac{1}{42}[-Y(4) + 0] = 0$$

$k \geq 3$ için $Y(k+1)=0$ dır.

Eş. 3.2

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k)$$

Ters diferensiyel dönüşümünde,

Bulunan diferensiyel dönüşüm katsayıları yerlerine yazılırsa,

$$y(x) = Y(0) + Y(1)x + Y(2)x^2 + Y(3)x^3 + Y(4)x^4 + Y(5)x^5 + Y(6)x^6 \dots (3.16)$$

$$y(x) = 0 + 0x + 1x^2 + 1x^3 + 0x^4 + 0x^5 + 0x^6 + \dots (3.17)$$

$$y(x) = x^2 + x^3 (3.18)$$

Bu ise, Eş. 3.7 denkleminin tam çözümüdür.

3.2.2. $f(x, y) = y^3, g(x) = 6 + x^6$ olması durumu

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y^3 = 6 + x^6 \quad (3.19)$$

$y(0) = 0, y'(0) = 0$ başlangıç durumlarıyla verilen nonlinear singular başlangıç değer problemi tipi olan Lane-Emden denklemini göz önüne alalım:

Eş. 3.19 denkleminin her iki yanını x ile çarpalım.

$$xy'' + 2y' + xy^3 = 6x + x^7 \quad (3.20)$$

Eş. 3.20 deki tüm terimlerin diferensiyel dönüşümünü bulalım.

$$xy'' \rightarrow \sum_{r=0}^k \delta(r-1)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2) \quad (3.21)$$

$$2y' \rightarrow 2(k+1)Y(k+1) \quad (3.22)$$

$$xy^3 \rightarrow \sum_{k_2=0}^k \sum_{k_1=0}^{k_2} \sum_{r=0}^{k_1} \delta(r-1)Y(k_1-r)Y(k_2-k_1)Y(k-k_2) \quad (3.23)$$

$$6x+x^7 \rightarrow 6\delta(k-1) + \delta(k-7) \quad (3.24)$$

Elde edilen diferensiyel dönüşümlerden Eş. 3.21 ve Eş. 3.22 kullanılarak,

$$\sum_{r=0}^k \delta(r-1)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2) + 2(k+1)Y(k+1) \quad (3.25)$$

$$r=1, (k+1)(k+2)Y(k+1) \quad (3.26)$$

elde edilir.

Şimdi de tekrar bağıntısını elde edelim:

$$Y(k+1) = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \left[- \sum_{k_2=0}^k \sum_{k_1=0}^{k_2} \sum_{r=0}^{k_1} \delta(r-1)Y(k_1-r)Y(k_2-k_1)Y(k_2-k_1) + 6\delta(k-1) + \delta(k-7) \right] \quad (3.27)$$

Başlangıç durumları $y(0)=0$ ve $y'(0)=0$ dan ve Eş. 3.2

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k)$$

Ters diferensiyel dönüşümden Eş 3.2 formülünden,

$y(0)=0$ için,

$$y(x) = Y(0) + Y(1)x + Y(2)x^2 + Y(3)x^3 + Y(4)x^4 + Y(5)x^5 + \dots$$

$$y(0) = Y(0) = 0,$$

$$y'(0) = 0 \text{ için,}$$

$$y'(x) = Y(1) + 2Y(2)x + 3Y(3)x^2 + 4Y(4)x^3 + \dots$$

$$y'(0) = Y(1) = 0 \text{ olur.}$$

Eş. 3.27 tekrar bağıntısından diferensiyel dönüşüm katsayılarını elde edelim;

$$k=0, Y(1) = \frac{1}{2}[0] = 0$$

$$k=1, Y(2) = \frac{1}{6}[6] = 1$$

$$k=2, Y(3) = \frac{1}{12}[0] = 0$$

$$k=3, Y(4) = \frac{1}{20}[0] = 0$$

$$k=4, Y(5) = \frac{1}{30}[0] = 0$$

$$k=5, Y(6) = \frac{1}{42}[0] = 0$$

$$k=6, Y(7) = \frac{1}{56}[0] = 0$$

$$k=7, Y(8) = \frac{1}{72}[0] = 0$$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k)$$

Ters diferensiyel dönüşümünde diferensiyel dönüşüm katsayıları yerlerine yazılırsa;

$$y(x) = Y(0) + Y(1)x + Y(2)x^2 + Y(3)x^3 + Y(4)x^4 + Y(5)x^5 + Y(6)x^6 + Y(7)x^7 + Y(8)x^8 + \dots \quad (3.28)$$

$$y(x) = 0 + 0 + x^2 + 0 + 0 + \dots \quad (3.29)$$

$$y(x) = x^2 \quad (3.30)$$

seri çözümü elde edilir.

3.2.3. $f(x, y) = xy$ $g(x) = x^5 - x^4 + 44x^2 - 30x$ olması durumu

$$y'' + \frac{8}{x}y' + xy = x^5 - x^4 + 44x^2 - 30x, 0 < x \leq 1 \quad (3.31)$$

$$y(0)=0, y'(0) = 0$$

Lane-Emden denkleminin çözümü;

Eş. 3.31 denkleminin her iki yanını x ile çarpalım.

Her iki yanı x ile çarpalım;

$$xy'' + 8y' + x^2y = x^6 - x^5 + 44x^3 - 30x^2 \quad (3.32)$$

Eş. 3.32 deki tüm terimlerin diferensiyel dönüşümlerini bulalım.

$$xy'' \rightarrow \sum_{r=0}^k \delta(r-1)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2) \quad (3.33)$$

$$8y' \rightarrow 8(k+1)Y(k+1) \quad (3.34)$$

$$x^2y \rightarrow \sum_{r=0}^k \delta(r-2)Y(k-r) \quad (3.35)$$

$$x^6 - x^5 + 44x^3 - 30x^2 \rightarrow \delta(k-6) - \delta(k-5) + 44\delta(k-3) - 30\delta(k-2) \quad (3.36)$$

Eş. 3.33 ve Eş. 3.34 diferensiyel dönüşümlerinden

$$\sum_{r=0}^k \delta(r-1)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2) + 8(k+1)Y(k+1) \quad (3.37)$$

$r=1,$

$$(k+1)(k+8)Y(k+1) \quad (3.38)$$

elde edilir.

$$(k+1)(k+8)Y(k+1) = \delta(k-6) - \delta(k-5) + 44\delta(k-3) -$$

$$30\delta(k-2) - \sum_{r=0}^k \delta(r-2)Y(k-r) \quad (3.39)$$

Buradan,

$$Y(k+1) = \left[\delta(k-6) - \delta(k-5) + 44\delta(k-3) - 30\delta(k-2) - \sum_{r=0}^k \delta(r-2)Y(k-r) \right] \frac{1}{(k+1)(k+8)} \quad (3.40)$$

Tekrar bağıntısını elde ederiz.

Başlangıç durumları kullanılarak

$$y(0) = Y(0) = 0$$

$$y'(0) = Y(1) = 0$$

bulunur.

Eş. 3.40 tekrar bağıntısından diferensiyel dönüşüm katsayılarını elde edelim

$$k=0, Y(1) = \frac{1}{8}[0] = 0$$

$$k=1, Y(2) = \frac{1}{18}[0] = 0$$

$$k=2, Y(3) = \frac{1}{30}[-30] = -1$$

$$k=3, Y(4) = \frac{1}{44}[44] = 1$$

$$k=4, Y(5) = \frac{1}{60}[0] = 0$$

$$k=5, Y(6) = \frac{1}{78}[0] = 0$$

$$k=6, Y(7) = \frac{1}{98}[1 - 1] = 0$$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k)$$

Ters diferensiyel dönüşümünde diferensiyel dönüşüm katsayıları yazılırsa,

$$\begin{aligned} y(x) = & Y(0) + Y(1)x + Y(2)x^2 + Y(3)x^3 + Y(4)x^4 + Y(5)x^5 + Y(6)x^6 \\ & + Y(7)x^7 + O(x^8) \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$y(x) = 0 + 0x + 0x^2 - 1x^3 + 1x^4 + 0x^5 + 0x^6 + 0x^7 + O(x^8) \quad (3.42)$$

$$y(x) = -x^3 + x^4 \quad (3.43)$$

seri çözümü elde edilir.

3.2.4. $f(x, y) = y^2, g(x) = 20 + x^4$ olması durumu

$n=3$ için,

$$y'' + \frac{6}{x}y' + \frac{6}{x^2}y + y^2 = 20 + x^4 \quad (3.56)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0$$

Nonlinear singular başlangıç değer probleminin çözümü;

Eş. 3.56 denkleminin her iki yanı x^2 ile çarparsak,

$$x^2 y'' + 6xy' + 6y + x^2 y^2 = 20x^2 + x^6 \quad (3.57)$$

olur.

Eş. 3.57 deki her terim için diferensiyel dönüşümleri hesaplırsak,

$$x^2 y'' \rightarrow \sum_{r=0}^k \delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2) \quad (3.58)$$

$$6xy' \rightarrow 6 \sum_{r=0}^k \delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1) \quad (3.59)$$

$$6y \rightarrow 6Y(k) \quad (3.60)$$

$$x^2 y^2 \rightarrow \sum_{k_1=0}^k \sum_{r=0}^{k_1} \delta(r-2)Y(k_1-r)Y(k-k_1) \quad (3.61)$$

$$20x^2 + x^6 \rightarrow 20\delta(k-2) + \delta(k-6) \quad (3.62)$$

Eş. 3.58 ve Eş. 3.59'dan

$$\begin{aligned} x^2 y'' + 6xy' \rightarrow & \sum_{r=0}^k \delta(r-2)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2) \\ & + 6 \sum_{r=0}^k \delta(r-1)(k-r+1)Y(k-r+1) \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$r = 2, k(k-1)Y(k), \quad (3.64)$$

$$r = 1, 6kY(k) \quad (3.65)$$

Eş. 3.64 ve Eş. 3.65'den

$$6kY(k) + k(k-1)Y(k) \quad (3.66)$$

$$6kY(k) + k(k-1)Y(k) = k(k+5)Y(k) \quad (3.67)$$

olur.

$$\begin{aligned} k(k+5)Y(k) + 6Y(k) + \sum_{k_1=0}^k \sum_{r=0}^{k_1} \delta(r-2)Y(k_1-r)Y(k-k_1) \\ = 20\delta(k-2) + \delta(k-6) \end{aligned} \quad (3.68)$$

Denklemini bulunur ve buradan aşağıdaki tekrar bağıntısı yazılır.

$$\begin{aligned} Y(k) = \frac{1}{k(k+5) + 6} [20\delta(k-2) + \delta(k-6) \\ - \sum_{k_1=0}^k \sum_{r=0}^{k_1} \delta(r-2)Y(k_1-r)Y(k-k_1)] \end{aligned} \quad (3.69)$$

Başlangıç durumlarından

$$y(0) = 0 \text{ için } Y(0) = 0$$

$$y'(0) = 0 \text{ için } Y(1) = 0$$

Eş. 3.69 tekrar bağıntısından diferensiyel dönüşüm katsayıları aşağıdaki gibidir:

$$k = 2, Y(2) = \frac{1}{20} [20 - Y(0)Y(0)] = 1$$

$$k = 3, Y(3) = \frac{1}{30} [0] = 0$$

$$k = 4, Y(4) = \frac{1}{40} [0] = 0$$

$$k = 5, Y(5) = \frac{1}{56} [0] = 0$$

$$k = 6, Y(6) = \frac{1}{72} [1 - 1] = 0$$

$$k = 7, Y(7) = \frac{1}{90} [0] = 0$$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k)$$

Ters diferensiyel dönüşümünde diferensiyel dönüşüm katsayıları yazılırsa,

$$y(x) = 0 + 0x + 1x^2 + 0x^3 + 0x^4 + 0x^5 + 0x^6 + 0x^7 + O(x^8) \quad (3.70)$$

elde edilir.

$$y(x) = x^2 \quad (3.71)$$

seri çözümü elde edilir.

3.3. Yüksek Mertebeden Bazı Lineer Olmayan Sınır Değer Problemleri

Yüksek mertebeden,

$$y^{(n+1)} + \frac{m}{x} y^{(n)} + N(y) = g(x)$$

$$y(0) = a_0, y'(0) = a_1, y''(0) = a_2, \dots, y^{(n-1)}(0) = a_{n-1}, y(b) = c \quad [16],$$

$(n+1)$. mertebeden adi diferensiyel denklemin nonlinear singular sınır değer problemidir. . Burada $N(y)$ nonlinear terim, $m \leq n, n \geq 1$ dir.

3.3.1. $n=2, m=-2$ için lineer sınır değer problemi

Aşağıdaki sınır değer problemini $n=2$ ve $m= -2$ için çözelim:

$$y''' - \frac{2}{x} y'' - y - y^2 = 7x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x - x^6 e^{2x} \quad (3.72)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0, y(1) = 2.71828182$$

$$xy''' - 2y'' - xy - xy^2 = 7x^3 e^x + 6x^2 e^x - 6x e^x - x^7 e^{2x} \quad (3.73)$$

$$xy''' \rightarrow \sum_{r=0}^k \delta(r-1)(k-r+1)(k-r+2)(k-r+3)Y(k-r+3) \quad (3.74)$$

$$2y'' \rightarrow 2(k+1)(k+2)Y(k+2) \quad (3.75)$$

$$xy^2 \rightarrow \sum_{k_1=0}^k \sum_{r=0}^{k_1} \delta(r-1)Y(k_1-r)Y(k-k_1) \quad (3.76)$$

$$xy \rightarrow \sum_{r=0}^k \delta(r-1)Y(k-r) \quad (3.77)$$

$$7x^3e^x + 6x^2e^x - 6xe^x - x^7e^{2x} \rightarrow 7 \sum_{r=0}^k \delta(r-3) \frac{1}{(k-r)!} +$$

$$6 \sum_{r=0}^k \delta(r-2) \frac{1}{(k-r)!} - 6 \sum_{r=0}^k \delta(r-1) \frac{1}{(k-r)!} - \sum_{r=0}^k \delta(r-7) \frac{2^{k-r}}{(k-r)!} \quad (3.78)$$

Eş.(3.74) ve Eş.(3.75)'den

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^k \delta(r-1)(k-r+1)(k-r+2)(k-r+3)Y(k-r+3) \\ - 2(k+1)(k+2)Y(k+2) \end{aligned} \quad (3.79)$$

Eş. 3.79'dan

$r=1$ için,

$$(k-2)(k+1)(k+2)Y(k+2) \quad (3.80)$$

Tekrar bağıntısı;

$$\begin{aligned}
Y(k+2) = & \frac{1}{(k-2)(k+1)(k+2)} \left[\sum_{r=0}^k \delta(r-1)Y(k-r) \right. \\
& + \sum_{k_1=0}^k \sum_{r=0}^{k_1} \delta(r-1)Y(k_1-r)Y(k-k_1) \\
& + 7 \sum_{r=0}^k \delta(r-3) \frac{1}{(k-r)!} \\
& + 6 \sum_{r=0}^k \delta(r-2) \frac{1}{(k-r)!} \\
& - 6 \sum_{r=0}^k \delta(r-1) \frac{1}{(k-r)!} \\
& \left. - \sum_{r=0}^k \delta(r-7) \frac{2^{k-r}}{(k-r)!} \right] \quad (3.81)
\end{aligned}$$

bulunur.

Sınır durumlarından,

$$y(0)=0 \text{ ise } Y(0)=0$$

$$y'(0)=0 \text{ ise } Y(1)=0$$

$$y''(0)=c \text{ ise } Y(2)=c$$

Eş. 3.81 tekrar bağıntısından diferensiyel dönüşüm katsayılarını elde edelim:

$$k=0, Y(2) = \frac{1}{-4} [0] = 0$$

$$k = 1, Y(3) = \frac{1}{-6} [Y(0) + 0 + 0 - 6] = 1$$

$$k = 3, Y(5) = \frac{1}{20} \left[Y(2) + 7 + 6 - \frac{6}{2!} \right] = \frac{1}{2}$$

$$k = 4, Y(6) = \frac{1}{60} \left[Y(3) + \frac{7}{1!} + \frac{6}{2!} - \frac{6}{3!} \right] = \frac{1}{6}$$

$$k = 5, Y(7) = \frac{1}{126} \left[Y(4) + c^2 + \frac{7}{2!} - \frac{6}{3!} - \frac{6}{4!} \right] = \frac{1}{126} Y(4) + \frac{17}{504}$$

$$k = 6, Y(8) = \frac{1}{120}$$

$$k = 7, Y(9) = \frac{1}{720}$$

$$k = 8, Y(10) = \frac{253}{68040} Y(4) - \frac{479}{136080}$$

$$k = 9, Y(11) = -\frac{113}{88704} + \frac{1}{770} Y(4)^2$$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k)$$

Eş. 3.2'de denkleminde, diferansiyel dönüşüm katsayıları yerlerine yazılırsa,

$$y(x) = Y(0) + Y(1)x^1 + Y(2)x^2 + Y(3)x^3 + Y(4)x^4 + Y(5)x^5 + Y(6)x^6$$

$$+ Y(7)x^7 + Y(8)x^8 + Y(9)x^9 + Y(10)x^{10} + Y(11)x^{11} + O(x^{12}) \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned}
y(x) = & 0 + 0x + 0x^2 + 1x^3 + Y(4)x^4 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{6}x^6 + \left(\frac{1}{126}Y(4) + \frac{17}{504}\right)x^7 \\
& + \frac{1}{120}x^8 + \frac{1}{720}x^9 + \left(\frac{253}{68040}Y(4) - \frac{479}{136080}\right)x^{10} \\
& + \left(-\frac{113}{88704} + \frac{1}{770}Y(4)^2\right)x^{11} + \dots + O(x^{12})
\end{aligned} \tag{3.83}$$

$y(1) = 2.71828182$ sınır şartı kullanılarak

$y(x)$ denkleminde $x = 1$ için $Y(4)$ hesaplanır ve

$Y(4) = 1.000003007$ bulunur.

$$\begin{aligned}
y(x) = & x^3 + 1.0000x^4 + 0.50000x^5 + 0.16667x^6 + 0.041666x^7 + 0.0083333x^8 \\
& + 0.0013889x^9 + 0.0001984x^{10} + 0.0000248x^{11}
\end{aligned} \tag{3.84}$$

seri formunda çözüm elde edilir. Ayrıca, bu sonucun 10. mertebeden $y(x) = xe^x$ için Taylor seri açılımı çözümüne yakınsak oluşu görülür.

3.3.2. $n=1, m=1$ için lineer sınır değer problemi

$$\begin{aligned}
y'' + \frac{y'}{x} &= -\cos x - \frac{\sin x}{x} \\
y(0) &= 0, \quad y(1) = \cos(1)
\end{aligned} \tag{3.85}$$

singular sınır değer probleminin çözümü:

Eş. 3.85 denkleminin her iki yanını x ile çarpalım.

$$xy'' + y' = -x\cos x - \sin x \tag{3.86}$$

olur.

Eş. 3.86' da her terimin diferensiyel dönüşümünü alalım.

$$xy'' \rightarrow \sum_{r=0}^k \delta(r-1)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2) \quad (3.87)$$

$$y' \rightarrow (k+1)Y(k+1)$$

$$xcosx \rightarrow \sum_{r=0}^k \delta(r-1)C(k-r) \quad (3.88)$$

$$\sin x \rightarrow S(k) = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k!} & , k \text{ tek} \\ 0 & , k \text{ çift} \end{cases}$$

xy'' ve y' nin diferensiyel dönüşümlerini kullanarak

$$r = 1 \text{ için } (k+1)^2 Y(k+1) \quad (3.89)$$

elde edilir.

$$(k+1)^2 Y(k+1) = - \sum_{r=0}^k \delta(r-1)C(k-r) - S(k) \quad (3.90)$$

Denklemden

$$Y(k+1) = \left[- \sum_{r=0}^k \delta(r-1)C(k-r) - S(k) \right] \frac{1}{(k+1)^2} \quad (3.91)$$

tekrar bağıntısı bulunur.

Sınır şartlarından

$y(0) = 0$ ve $y'(0) = c$ için (c , sabit sayı)

$Y(0) = 0, Y(1) = c$ dir.

Sin ve *cos* fonksiyonlarının diferensiyel dönüşümleri;

$$S(k) = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k!} & , k \text{ tek} \\ 0 & , k \text{ çift} \end{cases}$$

$$C(k) = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{k!} & , k \text{ çift} \\ 0 & , k \text{ tek} \end{cases}$$

(3.92)

biçimindedir [13].

Eş. 3.91 Tekrar bağıntısından diferensiyel dönüşüm katsayılarını elde edelim:

$$k = 1, Y(2) = \frac{-C(0)-S(1)}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$k = 2, Y(3) = \frac{-C(1)-S(2)}{9} = 0$$

$$k = 3, Y(4) = \frac{-C(2)-S(3)}{16} = \frac{-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}}{16} = \frac{1}{24}$$

$$k = 4, Y(5) = \frac{-C(3)-S(4)}{25} = 0$$

$$k = 5, \quad Y(6) = \frac{-C(4) - S(5)}{36} = -\frac{1}{720}$$

$$k = 6, \quad Y(7) = \frac{-C(5) - S(6)}{49} = 0$$

Eş. 3.2

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k)$$

Ters diferensiyel dönüşümünde, dönüşüm katsayıları yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} y(x) = & Y(0) + Y(1)x + Y(2)x^2 + Y(3)x^3 + Y(4)x^4 + Y(5)x^5 + Y(6)x^6 \\ & + Y(7)x^7 + O(x^8) \end{aligned} \quad (3.93)$$

$$y(x) = c - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + O(x^8) \quad (3.94)$$

olur. Sınır şartlarından,

$$c = \frac{331}{720} + \cos(1) \quad \text{elde edilir.}$$

$$y(x) = 1.0000 - 0.50000x^2 + 0.041667x^4 - 0.0013889x^6 + O(x^8) \quad (3.95)$$

Seri çözümü elde edilir.

$$y(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 \approx \cos x \quad (3.96)$$

$\cos x$ için Taylor seri açılımı çözümüne yakınsak oluşu görülür.

Diferensiyel dönüşüm yöntemi kullanılarak elde edilen $y(x)$ nümerik çözümünde seçilen x değerleri yerlerine yazıldığında elde edilen sonuçlar ile $y(x)$ çözümüne yakınsak olan $\cos x$ için Taylor seri açılımında x değerleri yerlerine yazılarak aşağıdaki Çizelge 3.1 oluşturulur. Elde edilen sayısal sonuçların birbirine oldukça yakın olduğu görülür.

Çizelge 3.1. Taylor seri açılımında $y(x)$ çözümüne yakınsak olan $\cos x$ için çözüm değerleri çizelgesi

x	$\cos(x)$	$y(x)$
0	1	1.0000
0.1	0.995004	0.995004
0.2	0.980067	0.980067
0.3	0.955336	0.955337
0.4	0.921061	0.921061
0.5	0.877583	0.877582
0.6	0.825336	0.825335
0.7	0.764842	0.764841
0.8	0.696707	0.696703
0.9	0.62161	0.621600
1	0.540302	0.540278

4. ADOMIAN AYRIŞTIRMA METODU

Son yıllarda Adomian ayrıştırma yöntemi ile ilgili çok sayıda makale yayınlanmıştır. Bir çok matematikçi ve fizikçi bu konuyla ilgilenmiştir [17]. Diğer nümerik metotlara göre önemli avantajları vardır. Yöntem doğrulanabilir ve hızlı yakınsaktır. Ayrıştırma yöntemi, Adi diferensiyel denklemlere, cebirsel denklemlere, integral denklemlerine, kısmi türevli diferansiyel denklemlere, bunların lineer ve nonlineer olanların geniş bir sınıfına uygulanarak yaklaşık çözümleri ve ayrıştırma serileri cinsinden nümerik çözümlerinin bulunmasını kolaylaştıran bir yöntemdir. Çözümler seri formunda elde edilmektedir.

1980'li yıllardan itibaren Adomian tarafından problemlerin çözümünde kullanılmış ve geliştirilmiştir.

Bu tezde singular başlangıç değer ve sınır değer problemlerin çözümünde yeni bir diferensiyel operatör kullanılarak Modifiye Adomian Ayrıştırma Yöntemi uygulanmıştır. Vazwaz [17] tarafından genelleştirilen singular başlangıç değer problemlerinin çözümünde Modifiye Adomian Ayrıştırma Yöntemi ile çözüme ulaşılmıştır [17]. Hasan ve Zhou [16] Yüksek mertebeden Adi diferensiyel denklemlerin singular sınır değer problemlerine Modifiye Adomian ayrıştırma yöntemini uygulayarak seri çözümüne ulaşmışlardır.

Adomian'ın bulduğu bu yöntem [19,20] genel olarak anlatacağız ve Standart adomian ayrıştırma yönteminden farklı olarak Modifiye Adomian ayrıştırma metodu aşağıda verilmiş, burada yeni bir diferensiyel operatör ve integral operatörü kullanılmıştır [16,17].

4.1. Adomian Ayrıştırma Yöntemi

Lineer veya lineer olmayan bir çok denkleme kolaylıkla uygulanabilen bir seri çözüm yöntemidir [19].

Lineer ve lineer olmayan terimleri içeren, kendisi lineer olmayan bir adi veya kısmi diferansiyel operatör F , verilen fonksiyon da “ g ” olsun. Kısaca,

$$Fu(x) = g(x) \quad (4.1)$$

denklemini ele alınsın. Bu denklem

$$Lu + Ru + Nu = g \quad (4.2)$$

Bişiminde ayrıştırılarak yazılsın, burada

L : Verilen diferansiyel denklemin en yüksek mertebeden türevi ve tersi kolaylıkla alınan bir Lineer operatördür.

R : Lineer operatörden kalan lineer kısım

N : Diferansiyel denklemde lineer olmayan terim

Eş. 4.2'nin her iki yanına sol taraftan L^{-1} integral operatörü uygulanırsa,

$$L^{-1}Lu + L^{-1}Ru + L^{-1}Nu = L^{-1}g \quad (4.3)$$

eşitliği elde edilir, Eş. 4.3,

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (4.4)$$

şeklinde düzenlenir.

Adi diferansiyel denklemler için Lineer diferansiyel operatör Diferansiyel denklem birinci mertebeden ise

$$L(.) = \frac{d}{dx} (.) \quad (4.5)$$

Diferensiyel denklem ikinci mertebeden ise ,

$$L(.) = \frac{d^2}{dx^2} (.) \quad (4.6)$$

Diferensiyel denklem n -nci mertebeden ise ,

$$L(.) = \frac{d^n}{dx^n} (.) \quad (4.7)$$

İntegral Operatörü,

$$L^{-1}(.) = \int_0^x (.) dx$$

$$L^{-1}(.) = \int_0^x \int_0^x (.) dx dx$$

$$L^{-1}(.) = \int_0^x \int_0^x \int_0^x (.) dx dx dx \quad (4.8)$$

Eş. 4.4'deki nonlinear Nu terimleri

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (4.9)$$

serisine eşit olup A_n 'ler (4.2) de vereceğimiz Adomian polinomlardır.

Eş. 4.4'den

$$u = u(0) + xu'(0) + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (4.10)$$

ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonu elde edilir.

Eş. 4.10 seri çözüm fonksiyonunun birinci terimi olan u_0 , verilen başlangıç değeri

ve denklemin sağ taraf fonksiyonunun integrali alınmak üzere

$$u_0 = u(0) + xu'(0) + L^{-1}g \quad (4.11)$$

şeklinde bulunur

Daha sonra seri çözümün birinci terimi olan u_0 kullanılarak $u_1, u_2, u_3, \dots$ terimleri elde edilir,

Eş. 4.10 aşağıdaki biçimde yazılır,

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \quad (4.12)$$

Eş. 4.12 kullanılarak Eş. 4.10 tekrar yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + xu'(0) + L^{-1}(g) - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (4.13)$$

biçiminde genel seri formu elde edilir.

Bununla beraber, Eş. 4.13

$n=1,2,3,\dots$, değerleri için,

$$u_1 = -L^{-1}R u_0 - L^{-1}A_0$$

$$u_2 = -L^{-1}R u_1 - L^{-1}A_1$$

$$u_3 = -L^{-1}R u_2 - L^{-1}A_2$$

.

.

.

$$u_{n+1} = -L^{-1}R u_n - L^{-1}A_n \quad (4.14)$$

İndirgeme bağıntısı ile u_n terimleri hesaplanır ve Eş. 4.12

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

fonksiyonu kullanılarak ardışık işlemlerle çözüme ulaşılır fakat seri sonsuza gittiğinden,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = u \quad (4.15)$$

için

$$\phi_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k, n \geq 0 \quad (4.16)$$

Kısmi toplamlar dizisi yaklaşık çözüm olarak ele alınır.

4.2. Adomian Polinomlar

A_n , adomian polinomları olmak üzere nonlinear $f(u(x, t))$ terimi

$$f(u(x, t)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (4.17)$$

serisi cinsinden ifade edilir.

Son zamanlarda bunları hesaplayan Adomian [21] Ayrıştırılmış polinomların genel durumu kaynaklara kazandırmıştır;

$$A_n = \sum_{v=1}^n C(v, n) f^{(v)}(u_0), n = 1, 2, \dots \quad (4.18)$$

A_n Adomian polinomların ayrıştırılmış hali kaynaklarda

$$A_0 = f(u_0)$$

$$A_1 = u_1 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0)$$

$$A_2 = u_2 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) + \left(\frac{u_1^2}{2!} \right) \left(\frac{d^2}{du_0^2} \right) f(u_0)$$

$$A_3 = u_3 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) + u_1 u_2 \left(\frac{d^2}{du_0^2} \right) f(u_0) + \left(\frac{u_1^3}{3!} \right) \left(\frac{d^3}{du_0^3} \right) f(u_0) \quad (4.19)$$

biçimindedir.

Burada görülür ki;

A_0 sadece u_0 'a, A_1 sadece u_0, u_1 'e, A_2 ise u_0, u_1, u_2 'ye bağlıdır ve bu biçimde devam eder. $A_0, n \geq 1$ olacak biçimde diğer A_n polinomlarından bağımsız olarak belirlenir ve her zaman $A_0 = f(u_0)$ 'dir.

Özet olarak, verilen denklemin başlangıç ve sınır şartları da göz önüne alınarak, lineer diferensiyel operatör yardımıyla denklem, operatör formda yazılır. Adomian polinomları hesaplanır ve seri çözümünün terimleri bulunur.

Böylece,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n = u(x, t) \quad (4.20)$$

çözümüne ulaşılır.

Tezimizde kullanacağımız bazı nonlinear terimler için Adomian polinomların elde edilişleri aşağıda verilmiştir.

4.1 Durum

$$f(y) = y \quad (4.21)$$

Eş. 4.12

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

ayrıştırmasını Eş.4.21'de yazalım.

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 \dots \quad (4.22)$$

olur. Buradan y nonlinear terimin Adomian polinomları,

$$A_0 = y_0$$

$$A_1 = y_1$$

$$A_2 = y_2$$

$$A_3 = y_3$$

$$A_n = y_n \quad (4.23)$$

elde edilir.

4.2. Durum

$$f(y) = xy \quad (4.24)$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

ayrıştırmasından,

$$\begin{aligned} f(y) &= x \sum_{n=0}^{\infty} y_n = x(y_0 + y_1 + y_2 + y_3 \dots) \\ &= xy_0 + xy_1 + xy_2 + xy_3 \dots \end{aligned} \quad (4.25)$$

Eş. 4.24 nonlinear terimin Adomian polinomları

$$A_0 = xy_0$$

$$A_1 = xy_1$$

$$A_2 = xy_2$$

$$A_3 = xy_3$$

$$A_4 = xy_4$$

$$A_5 = xy_5 \tag{4.26}$$

biçimindedir.

4.3. Durum

$$F(y) = y^2 \tag{4.27}$$

$$y = \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n \right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n \right)$$

$$(y_0 + y_1 + \dots)(y_0 + y_1 + \dots)$$

$$(y_0 + y_1 + \dots)^2$$

$$= y_0^2 + 2y_0y_1 + 2y_0y_2 + y_1^2 + 2y_0y_3 + 2y_1y_2 + 2y_0y_4 + 2y_1y_3 + y_2^2 + 2y_0y_5$$

$$+ 2y_1y_4 + 2y_2y_3 + \dots$$

Bu açılımda y_n bileşenlerinin indisleri toplamı aynı olacak biçimde gruptandırma yapılarak adomian polinomları,

$$A_0 = y_0^2$$

$$A_1 = 2y_0y_1$$

$$A_2 = 2y_0y_2 + y_1^2$$

$$A_3 = 2y_0y_3 + 2y_1y_2$$

$$A_4 = 2y_0y_4 + 2y_1y_3 + y_2^2 \quad (4.28)$$

4.4 Durum

$$F(y) = y^3 \quad (4.29)$$

Durum 4.3'de olduğu gibi,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

ayrıştırmasıyla

$$f(y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n \right)^3$$

$$= (y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots)^3$$

$$= y_0^3 + 2y_0^2y_1 + 3y_0^2y_2 + 3y_0y_1^2 + 3y_0^2y_3 + 6y_0y_1y_2 + y_1^3 + 3y_0^2y_4 + 3y_1^2y_2$$

$$+ 3y_2^2y_0 + 6y_0y_1y_3 + \dots$$

y^3 nonlinear teriminin adomian polinomları

$$A_0 = y_0^3$$

$$A_1 = 3y_0^2 y_1$$

$$A_2 = 3y_0 y_1^2 + 3y_0^2 y_2$$

$$A_3 = 3y_0^2 y_3 + 6y_0 y_1 y_2 + y_1^3 \quad (4.30)$$

biçimdedir.

4.5 Durum

$$f(y) = yy'' \quad (4.31)$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

ayrıştırmasından yararlanarak

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} y_n' \rightarrow y_x = \sum_{n=0}^{\infty} y_{n_x}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} y_n'' \rightarrow y_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} y_{n_{xx}}$$

$$f(y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_{n_{xx}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= (y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \dots)(y_{0xx} + y_{1xx} + y_{2xx} + y_{3xx} + y_{4xx} + \dots) \\
&= y_0 y_{0xx} + y_{0xx} y_1 + y_0 y_{1xx} + y_{0xx} y_2 + y_{1xx} y_1 + y_{2xx} y_0 + y_{0xx} y_3 + y_{1xx} y_2 \\
&\quad + y_{2xx} y_1 + y_{3xx} y_0 + y_{0xx} y_4 + \dots
\end{aligned}$$

Tüm terimleri u_n bileşenlerinin indisleri toplamı aynı olacak şekilde düzenlersek;

$$\begin{aligned}
A_0 &= f(y_0) = y_{0xx} y_0 \\
A_1 &= y_{0xx} y_1 + y_0 y_{1xx} \\
A_2 &= y_{0xx} y_2 + y_{1xx} y_1 + y_{2xx} y_0
\end{aligned} \tag{4.32}$$

şeklinde elde edilir.

4.6. Durum

$$f(y) = e^y \tag{4.33}$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

Ayrıştırması üstel fonksiyonda yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
f(y) &= e^{(y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots)} \\
&= e^{y_0} e^{(y_1 + y_2 + y_3 + \dots)}
\end{aligned}$$

bulunur.

Buradaki ilk çarpan e^{y_0} , aynen yazılır, diğer çarpan için Taylor açılımı yapılır:

$$f(y) = e^{y_0}(1 + (y_1 + y_2 + \dots) + \frac{1}{2!}(y_1 + y_2 + \dots)^2 + \frac{1}{3!}(y_1 + y_2 + \dots)^3 + \dots$$

elde edilir. Tüm terimler indisler toplamı aynı olacak şekilde gruplanırsa,

$$f(y) = e^{y_0} + y_1 e^{y_0} + \left(y_2 + \frac{1}{2!}y_1^2\right) e^{y_0} + \left(y_3 + \frac{1}{3!}y_1^3 + y_1 y_2\right) e^{y_0} + \dots \quad (4.34)$$

Böylece;

$$A_0 = e^{y_0}$$

$$A_1 = e^{y_0} y_1$$

$$A_2 = e^{y_0} \left(y_2 + \frac{1}{2!}y_1^2\right)$$

$$A_3 = e^{y_0} \left(y_3 + \frac{1}{3!}y_1^3 + y_1 y_2\right) \quad (4.35)$$

şeklindedir.

4.3. Adomian Ayırıştırma Metodunun Singuler Başlangıç Değer ve Sınır Değer Problemlerine Uygulanışı

Standart adomian ayırıştırma yöntemi ile seri çözümü elde edilemeyen denklemler için modifiye Adomian ayırıştırması yöntemi [16,17] ile yeni bir diferensiyel operatör [16,17] kullanılarak singuler başlangıç değer ve sınır değer problemleri çözülebilmektedir. Aşağıda farklı durumlar incelenmiştir.

4.3.1. $f(y) = y$, $g(x) = 6 + 12x + x^2 + x^3$ olması durumu

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 6 + 12x + x^2 + x^3, 0 < x \leq 1, \quad (4.43)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0$$

denklemini singuler başlangıç değer probleminin Lane-Emden tipindedir. Önceki bölümde diferensiyel dönüşüm yöntemi ile çözülmüştür. Bu bölümde de Adomian ayırıştırma yöntemi ile aynı problem çözülebilmektedir.

$$L(.) = x^{-1} \frac{d^2}{dx^2} xy$$

Diferensiyel operatörü kullanarak Eş. 4.43 denklemini operatör formda yazılır.

$$Ly = 6 + 12x + x^2 + x^3 - y \quad (4.44)$$

denklemini elde edilir. Şimdide Eş. 4.44 denkleminin her iki yanına

$$L^{-1}(.) = x^{-1} \int_0^x \int_0^x x(.) dx dx \quad (4.45)$$

İntegral operatörü uygulanır.

$$L^{-1}Ly = L^{-1}(6 + 12x + x^2 + x^3) - L^{-1}(y) \quad (4.46)$$

elde edilir. Eş. 4.43'ün ilk iki terimi olan $y'' + \frac{2}{x}y'$ için L^{-1} uygulanınca,

$$\begin{aligned} L^{-1}\left(y'' + \frac{2}{x}y'\right) &= x^{-1} \int_0^x \int_0^x x \left(y'' + \frac{2}{x}y'\right) dx dx \\ &= x^{-1} \int_0^x \int_0^x (xy'' + 2y') dx dx \\ &= x^{-1} \int_0^x (xy' + 2y) dx \\ &= x^{-1} \int_0^x (xy'(x) - 2y(x) - 2y(0)) dx \\ &= x^{-1} \int_0^x (xy'(x) - 2y(x)) dx \\ &= x^{-1}(xy(x)) \\ &= y(x) \end{aligned} \quad (4.47)$$

bulunur. Bu da Eş.4.46 denkleminde bulunan $L^{-1}Ly$ dir. Bulunan Eş. 4.47, Eş. 4.46'da yerine yazılırsa,

$$y(x) = L^{-1}(6 + 12x + x^2 + x^3) - L^{-1}(y) \quad (4.48)$$

bulunur. Şimdide sırasıyla $L^{-1}(6 + 12x + x^2 + x^3)$ elde edelim sonra da nonlineer terim olan y nin Eş. 4.22 Adomian polinomlarını elde edelim.

Öncelikle;

$$\begin{aligned}
 L^{-1}(6 + 12x + x^2 + x^3) &= x^{-1} \int_0^x \int_0^x x(6 + 12x + x^2 + x^3) dx dx \\
 &= x^{-1} \int_0^x \int_0^x (6x + 12x^2 + x^3 + x^4) dx dx \\
 &= x^{-1} \left(x^3 + x^4 + \frac{x^5}{20} + \frac{x^6}{30} \right)
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

Eş. 4.49, Eş.4.48 denkleminde yazılır ve

$$y(x) = x^2 + x^3 + \frac{x^4}{20} + \frac{x^5}{30} - L^{-1}(y) \tag{4.50}$$

olur.

Nonlinear y terimi için elde ettiğimiz Adomian polinomları,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

$A_0=y_0, A_1=y_1, A_2=y_2, A_3=y_3, \dots$ şeklinde durum 1 de bulunmuştu.

ayrıştırma serisinin terimlerini bulalım.

$$y_0 = x^2 + x^3 + \frac{x^4}{20} + \frac{x^5}{30} \tag{4.51}$$

$$y_{k+1} = -L^{-1}(y_k), k \geq 0 \tag{4.52}$$

dır.

$$y_0 = x^2 + x^3 + \frac{x^4}{20} + \frac{x^5}{30} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} y_1 &= -L^{-1}(y_0) \\ &= -x^{-1} \int_0^x \int_0^x x \left(x^2 + x^3 + \frac{x^4}{20} + \frac{x^5}{30} \right) dx dx \\ &= -\frac{x^4}{20} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{840} - \frac{x^7}{1680} \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} y_2 &= -L^{-1}(y_1) \\ &= -x^{-1} \int_0^x \int_0^x x \left(-\frac{x^4}{20} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{840} - \frac{x^7}{1680} \right) dx dx \\ &= \frac{x^6}{840} + \frac{x^7}{1680} + \frac{x^8}{60480} + \frac{x^9}{151200} \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} y_3 &= -L^{-1}(y_2) \\ &= -x^{-1} \int_0^x \int_0^x x \left(\frac{x^6}{840} + \frac{x^7}{1680} + \frac{x^8}{60480} + \frac{x^9}{151200} \right) dx dx \\ &= -\frac{x^8}{60480} - \frac{x^9}{151200} - \frac{x^{10}}{6652800} - \frac{x^{11}}{19958400} \end{aligned} \quad (4.56)$$

Dikkat edersek y_1 teriminin son iki parçası ile y_2 terimin ilk iki parçası sadeleşir.

Bu şekilde devam edildiğinde aynı biçimde sadeleşmeler olacaktır.

Eş. 4.52 indirgeme bağıntısından elde edilen y_n terimleri,

Eş. 4.12

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

Ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonunda yerlerine yazılırsa,

$$y = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \dots$$

$$\begin{aligned} &= x^2 + x^3 + \frac{x^4}{20} + \frac{x^5}{30} - \frac{x^4}{20} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{840} - \frac{x^7}{1680} + \frac{x^8}{60480} + \frac{x^9}{151200} - \frac{x^8}{60480} \\ &- \frac{x^9}{151200} - \frac{x^{10}}{6652800} - \frac{x^{11}}{19958400} + \dots \end{aligned} \quad (4.57)$$

Eş. 4.57 de terimler sadeleşir ve

$$y = x^2 + x^3 \quad (4.58)$$

seri çözümü elde edilir.

4.3.2. $f(y) = y^3$, $g(x) = 6 + x^6$ olması durumu

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y^3 = 6 + x^6. \quad (4.59)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

2.mertebeden adi diferensiyel denklemlerin nonlinear singular başlangıç değer probleminin Lane-Emden [11] tipindeki denkleminin Adomian Ayırıştırma metodu ile çözümü;

Eş. 4.59 denklemini operatör formda yazarsak,

$$Ly = 6 + x^6 - y^3 \quad (4.60)$$

olur. Her yana L^{-1} uygularsak,

$$L^{-1}Ly = L^{-1}(6 + x^6) - L^{-1}(y^3) \quad (4.61)$$

$$L^{-1}(y^3) = L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right) \quad (4.62)$$

Buradaki y^3 nonlinner terimi için adomian polinomlarını durum 3 te elde etmiştik.

Eş. 4.60 denkleminde ki,

$$L^{-1}Ly = x^{-1} \int_0^x \int_0^x x \left(y'' + \frac{2}{x} y' \right) dx dx$$

$$= x^{-1} \int_0^x \int_0^x (xy'' + 2y') dx dx$$

$$= x^{-1} \int_0^x [xy' + 2y] dx$$

$$= x^{-1} \int_0^x [xy' + 2y - 2y(0)] dx$$

$$= x^{-1}[xy + 2xy(0)]$$

$$= x^{-1}[xy + 2xy(0)] = x^{-1}(xy) = y(x) \quad (4.63)$$

elde edilir.

Eş. 4.63, Eş. 4.61 de yazılırsa,

$$y(x) = L^{-1}(6 + x^6) - L^{-1}(y^3) \quad (4.64)$$

$$y_0 = L^{-1}(6 + x^6)$$

Şimdide $L^{-1}(6 + x^6)$ hesaplayalım,

$$L^{-1}(6 + x^6) = x^{-1} \int_0^x \int_0^x x(6 + x^6) dx dx = x^2 + \frac{x^8}{72} \quad (4.65)$$

elde edilir.

Eş. 4.65, Eş. 4.64'de yazılırsa,

$$y(x) = x^2 + \frac{x^8}{72} - L^{-1}(y^3) \quad (4.66)$$

$$y_0 = x^2 + \frac{x^8}{72}$$

$$y_{k+1} = -L^{-1}(y^3) , \quad k \geq 0 \quad (4.67)$$

$$k = 0, y_1 = -L^{-1}(A_0) = -x^{-1} \int_0^x \int_0^x x(y_0^3) dx dx$$

$$= -x^{-1} \int_0^x \int_0^x \left(x^3 + \frac{x^9}{72} \right) dx dx = -\frac{x^8}{72} - \frac{x^{14}}{5040} - \frac{x^{20}}{725760} - \frac{x^{26}}{262020096} \quad (4.68)$$

$$k = 1, y_2 = -L^{-1}(A_1) = \frac{x^{14}}{5040} + \frac{53x^{20}}{12700800} \quad (4.69)$$

$$k = 2, y_3 = -L^{-1}(A_2) \quad (4.70)$$

$$k = 3, y_4 = -L^{-1}(A_3) \quad (4.71)$$

$y_0, y_1, y_2, \dots$ terimleri

Eş. 4.12

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

Ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonunda yazılırsa,

$$y(x) = x^2 + \dots \quad (4.72)$$

seri çözüm formu elde edilir.

$$y(x) = x^2 \quad (4.73)$$

analitik çözümdür.

4.3.3. $f(x, y) = xy$, $g(x) = x^5 - x^4 + 44x^2 - 30x$ olması durumu

$$y'' + \frac{8}{x}y' + xy = x^5 - x^4 + 44x^2 - 30x \quad (4.74)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

Lane-Emden denkleminin çözümü;

Eş. 4.74 denklemini operatör formda yazarsak

$$Ly = x^5 - x^4 + 44x^2 - 30x - xy \quad (4.75)$$

Şimdi Eş. 4.75 denkleminin her iki yanına L^{-1} integral operatörü uygulayalım.

$$L^{-1}Ly = L^{-1}(x^5 - x^4 + 44x^2 - 30x) - L^{-1}(xy) \quad (4.76)$$

xy nonlinear teriminin adomian polinomları durum 2. de verilmişti.

Eş. 4.76 denkleminde ki

$$L^{-1}Ly = x^{-7} \int_0^x x^6 \int_0^x x \left(y'' + \frac{8}{x}y' \right) dx dx$$

$$= x^{-7} \int_0^x x^6 \int_0^x (xy'' + 8y') dx dx$$

$$= x^{-7} \int_0^x x^6 (xy' + 8y) dx$$

$$= x^{-7} \int_0^x (x^7y' + 8x^7y - 8x^7y(0)) dx$$

$$= x^{-7}(x^7 y) = y(x) \quad (4.77)$$

Eş. 4.77, Eş. 4.76 da yazılırsa;

$$y(x) = L^{-1}(x^5 - x^4 + 44x^2 - 30x) - L^{-1}(xy) \quad (4.78)$$

$$L^{-1}(x^5 - x^4 + 44x^2 - 30x) = x^{-7} \int_0^x x^6 \int_0^x x(x^5 - x^4 + 44x^2 - 30x) dx dx$$

$$= -x^3 + x^4 - \frac{x^6}{78} + \frac{x^7}{98} \quad (4.79)$$

$$y_0 = L^{-1}(x^5 - x^4 + 44x^2 - 30x)$$

$$= -x^3 + x^4 - \frac{x^6}{78} + \frac{x^7}{98} \quad (4.80)$$

$$y_{k+1} = -L^{-1}(xy) \quad (4.81)$$

$$k=0, \quad y_1 = -L^{-1}(xy_0) = -x^{-7} \int_0^x x^6 \int_0^x x^2 \left(-x^3 + x^4 - \frac{x^6}{78} + \frac{x^7}{98} \right) dx dx$$

$$= \frac{x^6}{78} - \frac{x^7}{98} + \frac{x^9}{11232} - \frac{x^{10}}{16660}$$

$$k=1, y_2 = -L^{-1}(xy_1) = -\frac{x^9}{11232} + \frac{x^{10}}{16660} - \frac{x^{12}}{2560896} + \frac{x^{13}}{433600}$$

$$k=2, y_3 = -L^{-1}(xy_2) = -\frac{x^{12}}{2560896} - \frac{x^{13}}{433600} + \frac{x^{15}}{845095680} - \frac{x^{16}}{1596028800}$$

$$k=3, y_4 = -L^{-1}(xy_3)$$

$$= -\frac{x^{15}}{845095680} + \frac{x^{16}}{1596028800} - \frac{x^{18}}{380293056000} + \frac{x^{19}}{78745022700}$$

$y_0, y_1, y_2, \dots$ terimleri

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

$$y = y(x) = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 \dots$$

$$y(x) = x^4 - x^3 - \frac{x^{18}}{380293056000} + \frac{x^{19}}{787450227200} \quad (4.82)$$

seri formunda çözüm elde edilir.

Eş. 4.74 denkleminin analitik çözümü;

$$y = x^4 - x^3 \text{ dür.}$$

4.3.4. $f(y) = y, g(x) = x^5 + 30x^3$ olması durumu

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = x^5 + 30x^3 \quad (4.83)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

Lane-Emden tipi denkleminin Adomian Ayırıştırma yöntemi ile çözümü;

Eş. 4.83 denklemini operatör formda yazdıktan sonra integral operatörü (ters diferensiyel operatör) uygulayalım:

$$Ly = x^5 + 30x^3 - y \quad (4.84)$$

$$L^{-1}Ly = L^{-1}(x^5 + 30x^3) - L^{-1}(y) \quad (4.85)$$

$L^{-1}Ly$ yi elde edelim.

$$L^{-1}Ly = x^{-1} \int_0^x \int_0^x x \left(y'' + \frac{2}{x} y' \right) dx dx = y(x) \quad (4.86)$$

Eş. 4.86, Eş. 4.85 de yazılırsa,

$$y(x) = L^{-1}(x^5 + 30x^3) - L^{-1}(y) \quad (4.87)$$

olur.

$$L^{-1}(x^5 + 30x^3) = x^5 + \frac{x^7}{56} \quad (4.88)$$

$$y_0 = L^{-1}(x^5 + 30x^3) = x^5 + \frac{x^7}{56}$$

$$y_{k+1} = -L^{-1}(y_k), k \geq 0$$

$$k = 0, y_1 = -L^{-1}(y_0) = -\frac{x^7}{56} - \frac{x^9}{5040}$$

$$k = 1, y_2 = -L^{-1}(y_1) = \frac{x^9}{5040} + \frac{x^{11}}{665280} \quad (4.89)$$

$$k = 2, y_3 = -L^{-1}(y_2) = -\frac{x^{13}}{121080960} - \frac{x^{15}}{665280}$$

bu şekilde tekrar bağıntısı ile devam edilir.

$y_0, y_1, y_2, y_3 \dots$ terimleri elde edilir. Eş. 4.12

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$$

Ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonunda yerlerine yazılırsa,

$$y(x) = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 \dots$$

$$y = x^5 - \frac{x^{17}}{8892185702400} \quad (4.90)$$

seri çözümü elde edilir.

Eş. 4.83 Denkleminin analitik çözümü

$$y(x) = x^5 \quad (4.91)$$

dir.

4.3.5. $f(x, y) = \frac{6}{x^2}y + y^2$, $g(x) = 20 + x^4$ olması durumu

Wazwaz [14] genelleştirdiği

$n=3$ için Nonlinear singular başlangıç değer problemi

$$y'' + \frac{6}{x}y' + \frac{6}{x^2}y + y^2 = 20 + x^4 \quad (4.92)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

çözümü için

Eş. 4.92 operatör formda yazılır,

$n = 3$ için,

$$Ly = 20 + x^4 - y^2 \quad (4.93)$$

Eş. 4.93 nin her yanına,

$$L^{-1}(.) = x^{-3} \int_0^x \int_0^x x^3(.) dx dx$$

İntegral operatörü uygulanırsa,

$$L^{-1}Ly = L^{-1}(20 + x^4) - L^{-1}(y^2) \quad (4.94)$$

olur.

$$L^{-1}Ly = x^{-3} \int_0^x \int_0^x x^3(y'' + \frac{6}{x}y' + \frac{6}{x^2}y) dx dx$$

$$= x^{-3} \int_0^x \int_0^x (x^3y'' + 6x^2y' + 6xy) dx dx$$

$$= x^{-3} \int_0^x [x^3y' + 6x^2y] dx$$

$$= x^{-3}[x^3y] = x^{-3}x^3y = y(x) \quad (4.95)$$

elde edilir.

Eş. 4.95, Eş. 4.94 de yazılırsa,

$$y(x) = L^{-1}(20 + x^4) - L^{-1}(y^2) \quad (4.96)$$

$$L^{-1}(20 + x^4) = x^{-3} \int_0^x \int_0^x x^3(20 + x^4) dx dx$$

$$= x^{-3} \int_0^x \int_0^x (20x^3 + x^7) dx dx$$

$$= x^{-3} \int_0^x \left(\frac{20x^4}{4} + \frac{x^8}{8} \right) dx = x^{-3} \left[\frac{5x^5}{5} + \frac{x^9}{72} \right]$$

$$= x^2 + \frac{x^6}{72} \quad (4.97)$$

Eş. 4.97, Eş. 4.96'da yazılırsa,

$$y(x) = x^2 + \frac{x^6}{72} - L^{-1}(y^2) \quad (4.98)$$

olur.

$$y_0 = x^2 + \frac{x^6}{72}$$

$$y_{k+1} = -L^{-1}(A_k), k \geq 0 \quad (4.99)$$

y^2 nonlineer teriminin adomian polinomları durum 3' de verilmiştir.

$$k = 0, y_1 = -L^{-1}(A_0)$$

$$= -x^{-3} \int_0^x \int_0^x x^3(A_0) dx dx$$

$$\begin{aligned}
&= -x^3 \int_0^x \int_0^x x^3 (y_0^2) dx dx \\
&= -x^3 \int_0^x \int_0^x x^3 \left(x^2 + \frac{x^6}{72} \right)^2 dx dx \quad (4.100)
\end{aligned}$$

$$k = 1, y_2 = -L^{-1}(A_1) = \frac{x^{10}}{5016} + \frac{25x^{14}}{9165312} + \frac{5x^{18}}{329951232} + \frac{x^{22}}{30457036800}$$

$$k = 2, y_3 = -L^{-1}(A_2)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{37x^{14}}{18330624} - \frac{211}{5774146560}x^{18} - \frac{1351}{5147239219200}x^{22} \\
&\quad - \frac{439}{482256720691200}x^{26} - \frac{211}{157468240694476800}x^{30}
\end{aligned}$$

$y_0, y_1, y_2, y_3 \dots$ terimleri, Eş.(4.12)

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n$$

Ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonunda yerlerine yazılırsa,

$$y(x) = x^2 + \frac{37x^{14}}{18330624} + \frac{x^{22}}{30457036800} + \frac{5x^{18}}{329951232} \quad (4.101)$$

seri çözümü elde edilir.

Eş. 4.92 Denkleminin analitik çözümü

$$y=x^2 \text{ dir.} \quad (4.102)$$

4.4. (n+1). Mertebeden Nonlinear Singular Sınır Değer Problemleri

$N(y)$, nonlinear terim, $n \geq 1$ ve $m \leq n$ olmak üzere,

$$y^{(n+1)} + \frac{m}{x} y^{(n)} + Ny = g(x)$$

$$y(0) = a_0, y'(0) = a_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = a_{n-1}, y(b) = c \quad (4.103)$$

formundaki [16] $(n+1)$. mertebeden adi diferensiyel denklemin nonlinear singular sınır değer problemlerinin çözümünde, önceki bölümde diferensiyel dönüşüm metodunu kullanmıştık şimdide Adomian Ayırıştırma yöntemi kullanılacaktır.

4.4.1 $n = 1, m = 1$ olması durumu

$$y'' + \frac{y'}{x} = -\cos x - \frac{\sin x}{x}$$

$$y(0) = 0, y(1) = \cos(1) \quad (4.104)$$

linear singular sınır değer problemi operatör formda yazılırsa,

$$Ly = -\cos x - \frac{\sin x}{x} \quad (4.105)$$

olur.

Eş. 4.105'in her yanına,

$$L^{-1}(.) = \int_1^x x^{-1} \int_0^x x(.) dx dx$$

İntegral operatörü uygulanır,

$$L^{-1}Ly = -L^{-1}(\cos x) - L^{-1}\left(\frac{\sin x}{x}\right) \quad (4.106)$$

$$L^{-1}Ly = \int_1^x x^{-1} \int_0^x x \left(y'' + \frac{y}{x}\right) dx dx$$

$$= \int_1^x x^{-1} \int_0^x (xy'' + y) dx dx$$

$$= \int_1^x x^{-1} (xy') dx$$

$$= \int_1^x x^{-1} xy' dx = \int_1^x y' dx = y(x) - y(1) \quad (4.107)$$

Eş. 4.107, Eş. 4.106 da yazılırsa,

$$y(x) = y(1) - L^{-1}\left(\cos x + \frac{\sin x}{x}\right) \quad (4.108)$$

elde edilir.

$$y_0 = y(1) - L^{-1}\left(\cos x + \frac{\sin x}{x}\right) \quad (4.109)$$

$$y_{k+1}=0, k \geq 0$$

$$\begin{aligned}
y_0 &= y(1) - L^{-1} \left(\cos x + \frac{\sin x}{x} \right) \\
&= \cos(1) - \int_1^x x^{-1} \int_0^x x \left(\cos x + \frac{\sin x}{x} \right) dx dx \\
&= \cos(1) - \int_1^x x^{-1} \int_0^x (x \cos x + \sin x) dx dx \\
&= \cos(1) - \int_1^x x^{-1} (x \sin x) dx \\
&= \cos(1) - \int_1^x \sin x dx \\
&= \cos(1) + \cos x - \cos(1) = \cos x
\end{aligned} \tag{4.110}$$

Eş. 4.12

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$$

Ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonunda y_0 değeri ve $y_{k+1} = 0, k \geq 0$ yazılırsa

$$y(x) = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \dots = \cos x + 0 + 0 + \dots$$

$$y(x) = \cos x \tag{4.111}$$

çözümü elde edilir.

4.4.2. $n = 1, m = -1$ olması durumu

$$y'' - \frac{1}{x}y' = \frac{4x^2}{4+x^2}e^y,$$

$$y(0) = \ln\left(\frac{1}{4}\right), \quad y(1) = \ln\left(\frac{1}{5}\right) \quad (4.112)$$

Nonlinear singular sınır değer problemini çözelim;

$$L(.) = x^{-1} \frac{d}{dx} x^3 \frac{d}{dx} x^{-2}(.)$$

Diferensiyel operatörü ve,

$$L^{-1}(.) = x^2 \int_1^x x^{-3} \int_0^x x(.) dx dx$$

İntegral operatörü kullanılarak

Eş. 4.112 denklemi operatör formda yazılır ve Eş. 4.114 ün her iki yanına Eş. 4.113 integral operatörü uygulanırsa,

$$Ly = \frac{4x^2}{4+x^2}e^y \quad (4.114)$$

elde edilir.

$$L^{-1}Ly = x^2 \int_1^x x^{-3} \int_0^x x \left(y'' - \frac{y'}{x} \right) dx dx$$

$$\begin{aligned}
&= x^2 \int_1^x x^{-3} \int_0^x (xy'' - y') dx dx \\
&= x^2 \int_1^x x^{-3} [xy' - y] dx \\
&= x^2 \int_1^x x^{-3} (xy' + y(0)) dx \\
&= x^2 \int_1^x (x^{-2}y' - x^{-3}y(0)) dx \\
&= x^2 [x^{-2}y - x^{-2}y(0)] \\
&= x^2 [x^{-2}y(x) - x^{-2}y(0) - y(1) + y(0)] \\
&= y(x) - y(0) - x^2 y(1) + x^2 y(0) \\
&= y(x) - y(0) - x^2 (y(1) - y(0)) \tag{4.116}
\end{aligned}$$

Eş. 4.116, Eş. 4.115'de yazılırsa,

$$\begin{aligned}
y(x) - y(0) - x^2 (y(1) - y(0)) &= L^{-1} \left(\frac{4x^2}{4 + x^2} e^y \right) \\
y(x) &= y(0) + x^2 (y(1) - y(0)) + L^{-1} \left(\frac{4x^2}{4 + x^2} e^y \right) \tag{4.117}
\end{aligned}$$

bulunur.

$$y_0 = y(0) = \ln \left(\frac{1}{4} \right) \tag{4.118}$$

$$y_1 = x^2 \ln\left(\frac{4}{5}\right) + L^{-1}\left(\frac{4x^2}{4+x^2} A_0\right) \quad (4.119)$$

e^y nonlineer teriminin adomian polinomları durum 6 da verilmiştir.

$$y_{k+1} = L^{-1}\left(\frac{4x^2}{4+x^2} A_k\right), k \geq 1 \quad (4.120)$$

Eş. 4.119 denkleminde

$$y_1 = -0.25207x^2 + 0.031250x^4 - 0.0026042x^6 - 0.00032552x^8 \\ -0.000048828x^{10} + 0.0000081380x^{12} + \dots$$

olur.

Eş. 4.120 dan

$$k = 1, y_2 = 0.0022047x^2 - 0.0026258x^6 + 0.00049096x^8 - 0.000081784x^{10} \\ +0.000014309x^{12} - 0.0000026278x^{14} + 2.2706 \cdot 10^{-7}x^{16} \\ -1.7661 \cdot 10^{-8}x^{18} + 1.7661 \cdot 10^{-9}x^{20} - 1.8062 \cdot 10^{-10}x^{22} \\ +1.5052 \cdot 10^{-11}x^{24} + \dots$$

$$k = 2, y_3 = -0.00018169x^2 + 0.000091864x^6 + 0.00015399x^8 \\ -0.000080536x^{10} + 0.000019899x^{12} - 0.000042832x^{14} \\ +9.0548 \cdot 10^{-7}x^{16} + \dots$$

Eş. 4.12

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$$

Ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonunda $y_0, y_1, y_2, y_3 \dots$ yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} y(x) = & -1.3863 - 0.2500387060x^2 + 0.031250x^4 - 0.0051400286x^6 \\ & + 0.0009678120x^8 - 0.0002185884x^{10} - 0.000047342x^{12} \\ & - 0.0000085345x^{14} + 0.00000154670x^{16} + \dots \end{aligned} \quad (4.121)$$

seri çözüm fonksiyonu elde edilir.

4.4.3. $f(y) = -y - y^2$, $g(x) = 7x^2 + 6xe^x - 6e^x - x^6e^{2x}$ olması durumu

$$y''' - \frac{2}{x}y'' - y - y^2 = 7x^2e^x + 6xe^x - 6e^x - x^6e^{2x} \quad (4.122)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 2.71828182$$

Eş. 4.122 nonlinear denklem operatör formda yazılırsa,

$$Ly = y + y^2 + 7x^2e^x + 6xe^x - 6e^x - x^6e^{2x} \quad (4.123)$$

olur ve Eş. 4.123 denkleminin her iki yanına L^{-1} integral operatörü uygulanırsa

$$L^{-1}Ly = L^{-1}(y + y^2) + L^{-1}(7x^2e^x + 6xe^x - 6e^x - x^6e^{2x}) \quad (4.124)$$

$$\begin{aligned}
y(x) - 2.71828182x^4 &= L^{-1}(y + y^2) \\
&+ L^{-1}(7x^2e^x + 6xe^x - 6e^x - x^6e^{2x})
\end{aligned} \tag{4.125}$$

$$y_0 = 2.71828182x^4 + L^{-1}(7x^2e^x + 6xe^x - 6e^x - x^6e^{2x})$$

$$y_{k+1} = L^{-1}(y_k) + L^{-1}(A_k), k \geq 0$$

$$y_0 = x^3 + 1.03388x^4 - 0.5x^5 - 0.15x^6 + \dots$$

$$k = 0, y_1 = -0.01642839x^4 + 0.01666666x^6 + \dots$$

$$k = 1, y_2 = 0.000031338115x^4 - 0.0001303840x^7 + \dots$$

$$A_0 = x^6 + 2.06776x^7 + 2.068908x^8 + \dots$$

$$A_1 = -0.03285678x^7 - 0.003396996x^8 + \dots$$

$$y(x) = x^3 + 1.017483x^4 + 0.5x^5 + 0.1666667x^6 + 0.04180522x^7 + \dots \tag{4.126}$$

Seri çözümü elde edilir.

5. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında Lineer ve lineer olmayan bazı özel tipte singular başlangıç değer ve sınır değer problemleri, oldukça sık tercih edilen diferensiyel dönüşüm metodu ve Adomian ayrışım metodu kullanılarak Algoritma yardımıyla çözülmüştür. Diferensiyel dönüşüm metodu ile, $y(x)$ orijinal fonksiyonunun T-dönüşümü altındaki $Y(k)$ ters diferensiyel dönüşümleri elde edilmekte, bulunan $Y(k)$ katsayıları (Taylor seri katsayıları),

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k) x^k$$

Sonsuz toplamında yerlerine yazılarak $y(x)$ fonksiyonu gerçek uygulamalarda sonlu serilerle aşağıdaki gibi ifade edebilmektedir.

$$y(x) = \sum_{k=0}^n x^k Y(k)$$

Burada serinin kalan toplamı olan

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k Y(k)$$

değeri ihmal edilecek kadar küçüktür.

Adomian ayrışım yöntemi ile, denklem Lineer ve nonlinear parçalara ayrılır, Standart Adomian ayrıştırma yönteminden farklı olarak yakınsama oranı yüksek olan Modifiye Adomian ayrıştırma yöntemi ile yeni bir diferensiyel

operatör kullanılarak $n \geq 0$, y_n “ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonunun terimleri” aşağıdaki toplamla bulunur.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$$

Ayrıştırma seri çözüm fonksiyonunda yazılır. Seri formunda yaklaşık bir çözüm elde edilir.

Bu bölümde, Bölüm 3 ve Bölüm 4 de Diferensiyel Transform ve Adomian Yöntemleri ile çözülen bazı problemlerin sonuçları karşılaştırma yapmak amacıyla Tablolarla gösterilmiştir.

Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi ve Adomian Ayrışım Yöntemi ile çözümleri elde edilen singüler başlangıç değer ve sınır değer problemleri aşağıda sıralanmıştır. Elde edilen sonuçlar tablo ve grafik üzerinde karşılaştırılmıştır.

Uygulama 1

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 6 + 12x + x^2 + x^3, 0 < x < 1 \quad (5.1)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

Uygulama 2

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y^3 = 6 + x^6 \quad (5.2)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

Uygulama 3

$$y'' + \frac{8}{x}y' + xy = x^5 - x^4 + 44x^2 - 30x, \quad 0 < x \leq 1 \quad (5.3)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0$$

Uygulama 4

$n = 3$ için,

$$y'' + \frac{6}{x}y' + \frac{6}{x^2}y + y^2 = 20 + x^4 \quad (5.4)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0$$

Uygulama 5

$n = 2$ ve $m = -2$ durumu

$$y''' - \frac{2}{x}y'' - y - y^2 = 7x^2e^x + 6xe^x - 6e^x - x^6e^{2x} \quad (5.5)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0, y(1) = 2.71828182$$

Uygulama 6

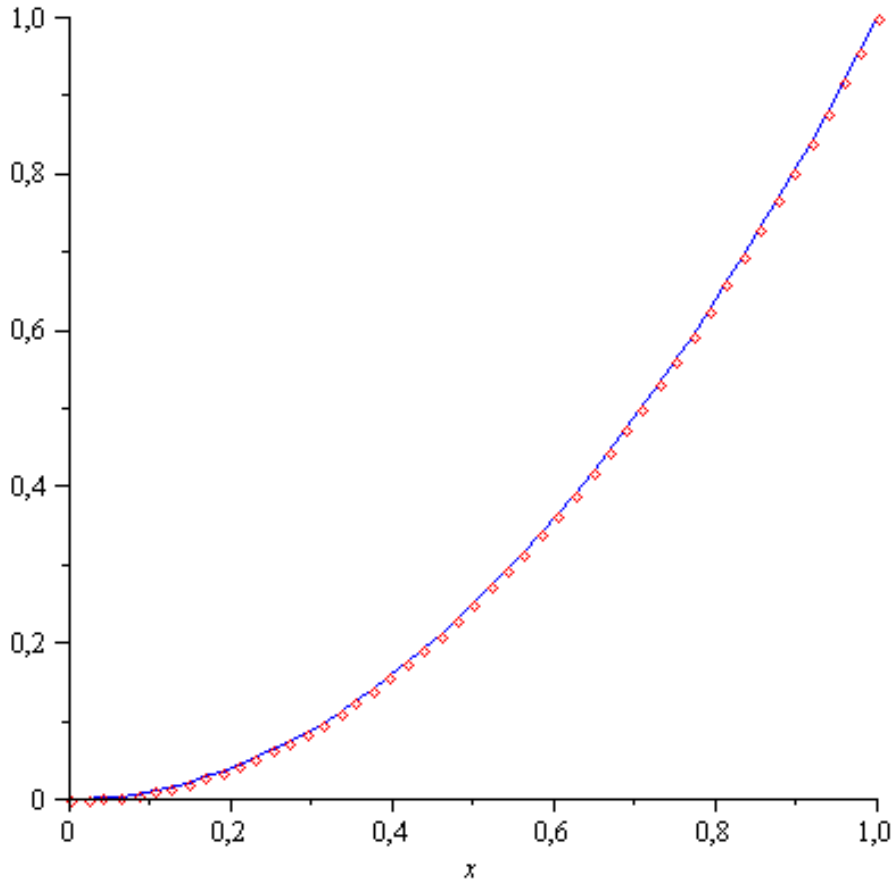
$n = 1, m = 1$ için lineer sınır değer problemi:

$$y'' + \frac{y}{x} = -\cos x - \frac{\sin x}{x} \quad (5.6)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = \cos(1)$$

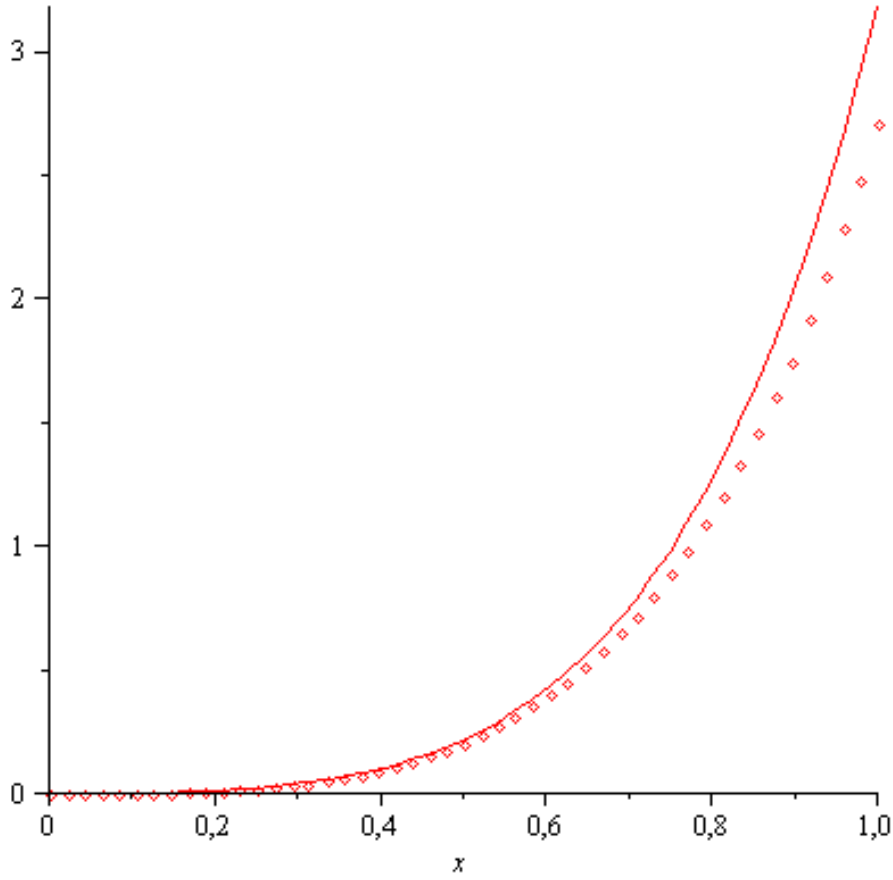
Çizelge 5.1. Başlangıç veya sınır değer problemlerinin bir boyutlu Diferansiyel dönüşüm yöntemi ve Adomian ayrıştırma yöntemi çözümlerinin karşılaştırılması

Uygulamalar	Bir boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi ile elde edilen çözümler	Adomian ayrıştırma yöntemi ile elde edilen çözümler
Uygulama 1	$y(x)=x^2+x^3$	$y(x)=x^2+x^3$
Uygulama 2	$y(x)=x^2$	$y(x)=x^2$
Uygulama 3	$y(x)=-x^3+x^4$	$y(x)=-x^3+x^4$
Uygulama 4	$y(x)=x^2$	$y(x)=x^2$
Uygulama 5	$y(x) = x^3 + 1.0000x^4 + 0.50000x^5 + 0.16667x^6 + 0.041666x^7 + \dots$	$y(x) = x^3 + 1.017483x^4 + 0.5x^5 + 0.1666667x^6 + 0.04180522x^7 + \dots$
Uygulama 6	$y(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 \approx \cos x$	$y(x)=\cos x$



Şekil 5.1. Uygulama 4.Başlangıç değer problemlerinin her iki yöntemle de çözümleri verilmektedir.

Şekil 5.1 de, nokta ile gösterilen grafik diferensiyel dönüşüm ile elde edilen çözümün grafiği, düz çizgi ile gösterilen grafik ise adomian ayrıştırma yöntemi ile elde edilen çözümün grafiğidir.



Şekil 5.2. Uygulama 5. Sınır değer probleminin her iki yöntemle de çözümleri verilmektedir

Şekil 5.2 de, nokta ile gösterilen grafik diferensiyel dönüşüm ile elde edilen çözümün grafiği, düz çizgi ile gösterilen grafik ise adomian ayrıştırma yöntemi ile elde edilen çözümün grafiğidir

Grafiklerden de anlaşılacağı gibi her iki yöntemin de değerleri oldukça birbirine yakın çıkmaktadır.

KAYNAKLAR

1. A.M. Wazwaz, "A new algorithm for solving differential equations of Lane–Emden type," ***Applied Mathematics and Computation***, 118: 287–310 (2001).
2. Pukhov, G.E., "Differential transformations and Mathematical Modeling of physical processes", Kiev, (1986).
3. Zhou, J.K., "Differential transform and its application for electrical circuits". ***Huazhong University Press***, China (1986).
4. Ertürk V.S., "Differential Transformation method for solving differential equations of lane-Emden type", ***Mathematical and computational applications***, 12(3): 135-139 (2007).
5. Chen, C.K. and Ho, S.H., "Solving partial differential equations by two dimensional differential transform method", ***Appl Math Comput*** 106: 171-179 (1999).
6. F. Ayaz, "Solution of the system of differential equations by differential transform method", ***Appl. Math. Comput.***, 147: 547-567 (2004).
7. F. Ayaz, "Applications of differential transform method to differential-algebraic equations", ***Appl. Math. Comput.***, 152: 649-657 (2004).
8. Gümüş, G., "Bazı özel tipte başlangıç değer ve sınır değer problemlerinin maple ve nümerik yöntemler yardımıyla sayısal çözümleri", Yüksek Lisans Tezi, ***Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Ankara, 5-7 (2008).
9. Keller, H.B., "Numerical Methods For Two-Point Boundary-Value Problems", ***Pover publications, Inc***, New York, 1-3:191-209 (1992).
10. Ozdemir, O and M.O. Kaya, "Flapwise bending vibration analysis of a rotating tapered cantilever Bernoulli-Euler beam by differential transform method", ***Journal of Sound and Vibration***, 289: 413-420 (2006).
11. O.Kaymaz and Ş. Mirasyedioğlu, "A newsymbolic computational approach to singular initial value problems in the seconder-order ordinary differential equations", ***Applied Mathematics and Computation***, 171: 1218-1225 (2005).

12. Yahya Qaid Hasan and Liu Ming Zhu, "Solving Singular Initial Value Problems in the Second-order ordinary Differential Equations", **Journal of Applied sciences**, 7(17): 2505-2508 (2007).
13. Werner Kohler, "Lee Johnson.,Elementary Differential Equations with boundary Value Problems". **Addison Wesley**, USA, (2004).
14. Wazwaz A. M., "A new method for solving singular initial value problems in the second-order ordinary differential equations", **Appl. Math. Comput.** 128: 45-57 (2002).
15. Ertürk,V.S. "Application of differential transformation method to linear sixth-order boundary value problems", **Applied Mathematical Sciences**, Vol. 1(2): 51 – 58 (2007).
16. Yahya Qaid Hasan, Liu Ming Zhu, "Solving singular boundary value problems of higher-order ordinary differential equations by modified Adomian decomposition method", **Commun Nonlinear Sci Numer Simulat**, 14: 2592–2596 (2009).
17. Yahya Qaid Hasan, Liu Ming Zhu, "Modified Adomian Decomposition Method For Singular Initial Value Problems In The Second – Order Ordinary Differential Equations", **Surveys in Mathematics and its Applications**, 183-193 (2008).
18. Akin, Ö., "Nümerik analiz", Ankara Üniversitesi Basımevi, Ankara, 201-202 (1998).
19. Adomian, G., "A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equations", **Math. Comp. Modell.**, 13: 17-43 (1990).
20. Adomian, G., "A Review of the Decomposition Method in applied mathematics", **J.Math.Anal.Appl.**, 135(2): 501-544 (1998).
21. Adomian, G., "Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method", **Kluwer Academic Publishers**, Boston, 352 (1994).
22. Seng, V., Abbaouik. and Cherruault, Y., "Adomian's Polynomials for Nonlinear Operators", **Math. Comput. Modelling**, 24: 59- 65 (1996).

EKLER

EK – 1 Eş. 5.4 Başlangıç değer probleminin diferensiyel transform metodu çözümü

$$y'' + \frac{6}{x}y' + \frac{6}{x^2}y + y^2 = 20 + x^4$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0$$

Başlangıç değer probleminin Algoritması ve sonuçları aşağıda verilmektedir.

```
> for k from 0 while k<10 do
Y(0):=0;
Y(1):=0;
k:=k;
delta(k-2):=eval(piecewise(k=2,1,k<>2,0));
delta(k-6):=eval(piecewise(k=6,1,k<>6,0));
delta(r-2):=eval(piecewise(r=2,1,r<>2,0));
Y(k):=(20*delta(k-2)+delta(k-6)-(sum(sum(delta(r-2)*Y(m-r)*Y(k-
m),r=0..m),m=0..k)))/(k*(k+5)+6);
end do;
```

$$Y(0) := 0$$

$$Y(1) := 0$$

$$k := 0$$

$$\delta(-2) := 0$$

$$\delta(-6) := 0$$

$$\delta(r-2) := \begin{cases} 1 & r=2 \\ 0 & r \neq 2 \end{cases}$$

$$Y(0) := 0$$

$$Y(0) := 0$$

$$Y(1) := 0$$

$$k := 1$$

$$\delta(-1) := 0$$

$$\delta(-5) := 0$$

$$\delta(r-2) := \begin{cases} 1 & r=2 \\ 0 & r \neq 2 \end{cases}$$

EK-1 (Devam) Eş. 5.4 Başlangıç değer probleminin diferensiyel transform metodu çözümü

$$Y(1) := 0$$

$$Y(0) := 0$$

$$Y(1) := 0$$

$$k := 2$$

$$\delta(0) := 1$$

$$\delta(-4) := 0$$

$$\delta(r-2) := \begin{cases} 1 & r=2 \\ 0 & r \neq 2 \end{cases}$$

$$Y(2) := 1$$

$$Y(0) := 0$$

$$Y(1) := 0$$

$$k := 3$$

$$\delta(1) := 0$$

$$\delta(-3) := 0$$

$$\delta(r-2) := \begin{cases} 1 & r=2 \\ 0 & r \neq 2 \end{cases}$$

$$Y(3) := 0$$

$$Y(0) := 0$$

$$Y(1) := 0$$

$$k := 4$$

$$\delta(2) := 0$$

$$\delta(-2) := 0$$

$$\delta(r-2) := \begin{cases} 1 & r=2 \\ 0 & r \neq 2 \end{cases}$$

$$Y(4) := 0$$

$$Y(0) := 0$$

$$Y(1) := 0$$

$$k := 5$$

$$\delta(3) := 0$$

$$\delta(-1) := 0$$

EK-1 (Devam) Eş. 5.4 Başlangıç değer probleminin diferensiyel transform metodu çözümü

$$\delta(r-2) := \begin{cases} 1 & r=2 \\ 0 & r \neq 2 \end{cases}$$

$$Y(5) := 0$$

$$Y(0) := 0$$

$$Y(1) := 0$$

$$k := 6$$

$$\delta(4) := 0$$

$$\delta(0) := 1$$

$$\delta(r-2) := \begin{cases} 1 & r=2 \\ 0 & r \neq 2 \end{cases}$$

$$Y(6) := 0$$

$$Y(0) := 0$$

$$Y(1) := 0$$

$$k := 7$$

$$\delta(5) := 0$$

$$\delta(1) := 0$$

$$\delta(r-2) := \begin{cases} 1 & r=2 \\ 0 & r \neq 2 \end{cases}$$

$$Y(7) := 0$$

$$Y(0) := 0$$

$$Y(1) := 0$$

$$k := 8$$

$$\delta(6) := 0$$

$$\delta(2) := 0$$

$$\delta(r-2) := \begin{cases} 1 & r=2 \\ 0 & r \neq 2 \end{cases}$$

$$Y(8) := 0$$

$$Y(0) := 0$$

$$Y(1) := 0$$

EK-1 (Devam) Eş. 5.4 Başlangıç değer probleminin diferensiyel transform metodu çözümü

$$k=9 \quad \delta(7) := 0$$

$$\delta(3) := 0$$

$$\delta(r-2) := \begin{cases} 1 & r=2 \\ 0 & r \neq 2 \end{cases}$$

$$Y(9) := 0$$

```
> topla:=proc(a,s,d,f,g,h,j,k,l,ş)
a+s+d+f+g+h+j+k+l+ş;
end proc;
```

```
topla := proc(a, s, d, f, g, h, j, k, l, ş)
a + s + d + f + g + h + j + k + l + ş
end proc
```

```
> y(x):=topla(Y(0)*x^0,Y(1)*x^1,Y(2)*x^2,Y(3)*x^3,Y(4)*x^4,Y(5)*x^5,Y(6)*
x^6,
Y(7)*x^7,Y(8)*x^8,Y(9)*x^9);
```

$$y(x) := x^2$$

```
> subs(x=0.1,y);
subs(x=0.2,y);
subs(x=0.3,y);
subs(x=0.4,y);
subs(x=0.5,y);
subs(x=0.6,y);
subs(x=0.7,y);
subs(x=0.8,y);
subs(x=0.9,y);
evalf(subs(x=1,y),4);
```

0.01

0.04

0.09

0.16

0.25

0.36

EK-1 (Devam) Eş. 5.4 Başlangıç değer probleminin diferensiyel transform metodu çözümü

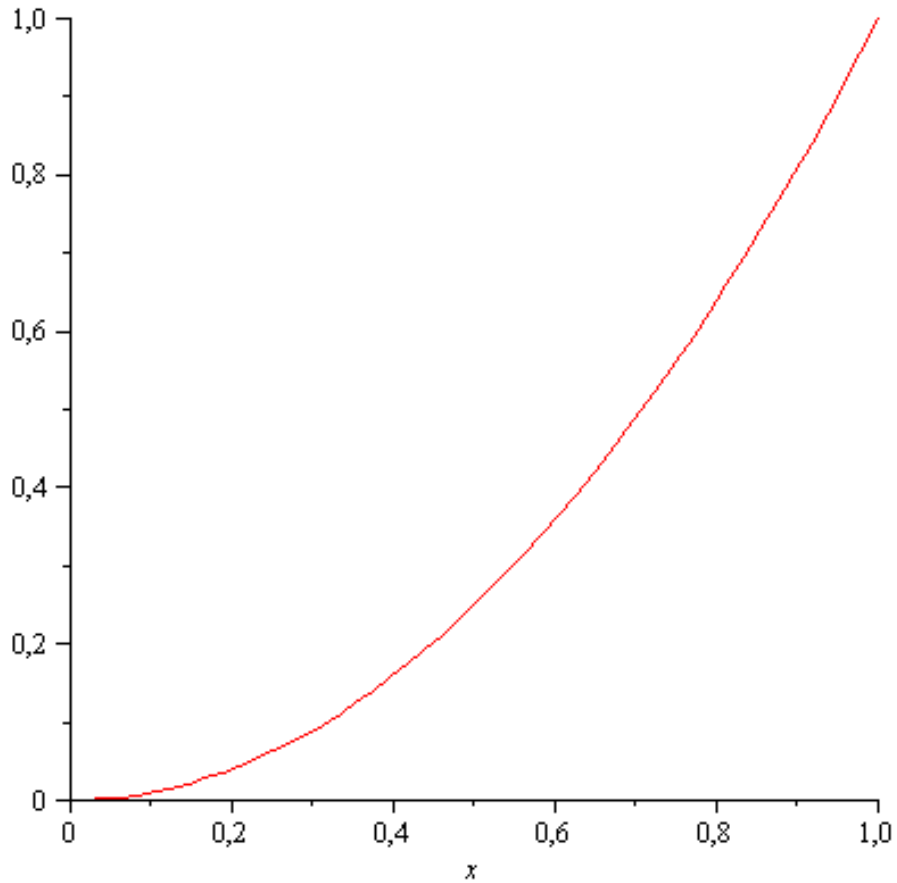
0.49

0.64

0.81

1.

> plot(x^2,x=0..1);



Şekil 1.1. Başlangıç değer probleminin diferensiyel transform metodu çözümü grafiği

EK-2 Eş. 5.4 Başlangıç değer problem çözümünün Adomian Ayrıştırma Yöntemi

$$y'' + \frac{6}{x}y' + \frac{6}{x^2}y + y^2 = 20 + x^4$$

$$y(0)=0, \quad y'(0)=0$$

Başlangıç değer probleminin Algoritması ve sonuçlar aşağıda verilmiştir.

> for k from 0 while k<3 do

k:=k;

y[0]:=expand((x^(-3))*int(int(x^7+20*x^3,x=0..x),x=0..x));

A[0]:=y[0]^2;A[1]:=expand(2*y[0]*y[1]);A[2]:=expand(2*y[0]*y[2]+y[1]^2);

y[k+1]:=expand(-(x^(-3))*int(int((x^3)*(A[k]),x=0..x),x=0..x));

end do;

$$k := 0$$

$$y_0 := \frac{1}{72} x^6 + x^2$$

$$A_0 := \left(\frac{1}{72} x^6 + x^2 \right)^2$$

$$A_1 := \frac{1}{36} y_1 x^6 + 2 y_1 x^2$$

$$A_2 := \frac{1}{36} y_2 x^6 + 2 y_2 x^2 + y_1^2$$

$$y_1 := -\frac{1}{1410048} x^{14} - \frac{1}{5616} x^{10} - \frac{1}{72} x^6$$

$$k := 1$$

$$y_0 := \frac{1}{72} x^6 + x^2$$

$$A_0 := \left(\frac{1}{72} x^6 + x^2 \right)^2$$

EK-2 (Devam) Eş. 5.4 Başlangıç değer problem çözümünün Adomian Ayrıştırma Yöntemi

$$A_1 := -\frac{1}{50761728} x^{20} - \frac{175}{27495936} x^{16} - \frac{25}{33696} x^{12} - \frac{1}{36} x^8$$

$$A_2 := \frac{1}{36} y_2 x^6 + 2 y_2 x^2 + \frac{1}{1988235362304} x^{28} + \frac{1}{3959414784} x^{24} + \frac{49}{953192448} x^{20} + \frac{1}{202176} x^{16} + \frac{1}{5184} x^{12}$$

$$y_2 := \frac{1}{30457036800} x^{22} + \frac{5}{329951232} x^{18} + \frac{25}{9165312} x^{14} + \frac{1}{5616} x^{10}$$

$$k := 2$$

$$y_0 := \frac{1}{72} x^6 + x^2$$

$$A_0 := \left(\frac{1}{72} x^6 + x^2 \right)^2$$

$$A_1 := -\frac{1}{50761728} x^{20} - \frac{175}{27495936} x^{16} - \frac{25}{33696} x^{12} - \frac{1}{36} x^8$$

$$A_2 := \frac{211}{149117652172800} x^{28} + \frac{439}{593912217600} x^{24} + \frac{1351}{8578732032} x^{20} + \frac{211}{13747968} x^{16} + \frac{37}{67392} x^{12}$$

EK-2 (Devam) Eş. 5.4 Başlangıç değer problem çözümünün Adomian Ayrıştırma Yöntemi

$$y_3 := -\frac{211}{157468240694476800} x^{30} - \frac{439}{482256720691200} x^{26} - \frac{1351}{5147239219200} x^{22} - \frac{211}{5774146560} x^{18} - \frac{37}{18330624} x^{14}$$

```
> topla:=proc(a,s,d)
a+s+d;
end proc;
```

topla := proc(a, s, d) a + s + d end proc

```
> y:=topla(y[0],y[1],y[2]);
```

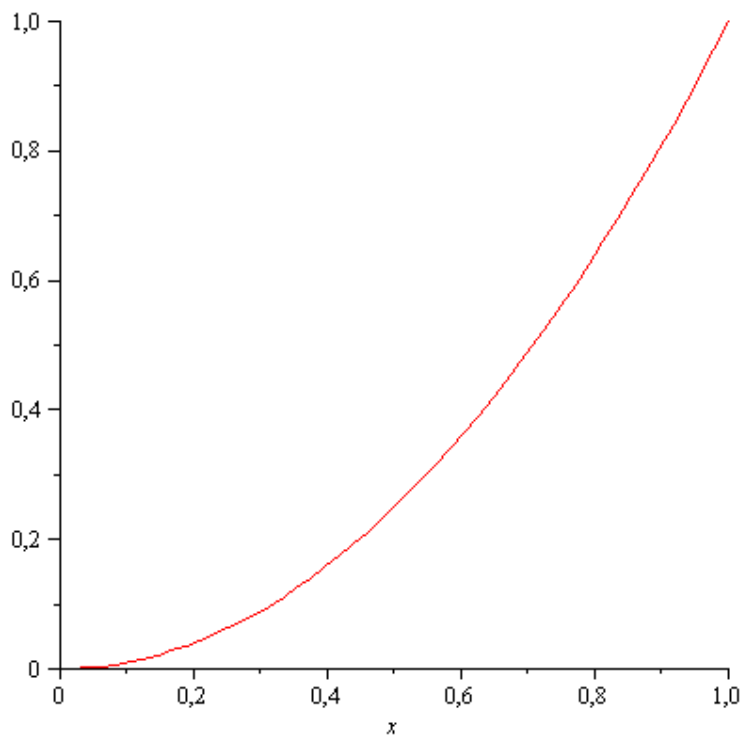
$$y := x^2 + \frac{37}{18330624} x^{14} + \frac{1}{30457036800} x^{22} + \frac{5}{329951232} x^{18}$$

```
> subs(x=0,y);
subs(x=0.1,y);
subs(x=0.2,y);
subs(x=0.3,y);
subs(x=0.4,y);
subs(x=0.5,y);
subs(x=0.6,y);
subs(x=0.7,y);
subs(x=0.8,y);
subs(x=0.9,y);
evalf(subs(x=1,y);
```

```
0
0.01
0.04
0.09
0.1600000000
0.2500000001
0.3600000016
0.4900000137
0.6400000891
0.8100004641
```

EK-2 (Devam) Eş. 5.4 Başlangıç değer problem çözümünün Adomian Ayrıştırma Yöntemi

```
>plot(x^2+(37/18330624)*x^14+(1/30457036800)*x^22+(5/329951232)*x^18,x=0..1);
```



Şekil 2.1 Eş. 5.4 Başlangıç değer problemi çözümünün Adomian Ayrıştırma Yöntemi grafiği

EK-3 Eş. 5.5 Sınır değer problemlerinde diferensiyel transform metodu ile
çözüm

$$y''' - \frac{2}{x}y'' - y - y^2 = 7x^2e^x + 6xe^x - 6e^x - x^6e^{2x}$$

$$y(0)=0, y'(0) = 0, y(1) = 2.71828182$$

$n=2$ ve $m=-2$ için sınır değer probleminin Algoritması ve sonuçlar aşağıda
verilmektedir.

```
> for k from 0 while k<5 do
Y(0):=0;
Y(1):=0;
y(2):=alpha;
k:=k;
delta(r-3):=eval(piecewise(r=3,1,r<>3,0));
delta(r-2):=eval(piecewise(r=2,1,r<>2,0));
delta(r-1):=eval(piecewise(r=1,1,r<>1,0));
delta(r-7):=eval(piecewise(r=7,1,r<>7,0));
Y(k+2):=(sum(delta(r-1)*Y(k-r),r=0..k)+(sum(sum(delta(r-1)*Y(m-r)*Y(k-
m),r=0..m),m=0..k))+7*sum(delta(r-3)/(factorial(k-r)),r=0..k)-6*sum(delta(r-
2)/(factorial(k-r)),r=0..k)-6*sum(delta(r-1)/(factorial(k-r)),r=0..k)-sum((delta(r-
7))*(2^(k-r))/(factorial(k-r)),r=0..k))/((k-2)*(k+1)*(k+2));
end do;

> for k from 3 while k<10 do
Y(0):=0;
Y(1):=0;
y(2):=alpha;
k:=k;
delta(r-3):=eval(piecewise(r=3,1,r<>3,0));
delta(r-2):=eval(piecewise(r=2,1,r<>2,0));
delta(r-1):=eval(piecewise(r=1,1,r<>1,0));
delta(r-7):=eval(piecewise(r=7,1,r<>7,0));
Y(k+2):=(sum(delta(r-1)*Y(k-r),r=0..k)+(sum(sum(delta(r-1)*Y(m-r)*Y(k-
m),r=0..m),m=0..k))+7*sum(delta(r-3)/(factorial(k-r)),r=0..k)+6*sum(delta(r-
2)/(factorial(k-r)),r=0..k)-6*sum(delta(r-1)/(factorial(k-r)),r=0..k)-sum((delta(r-
7))*(2^(k-r))/(factorial(k-r)),r=0..k))/((k-2)*(k+1)*(k+2));
end do;
>
```

$$Y(0) := 0$$

$$Y(1) := 0$$

EK-3 (Devam) Eş. 5.5 Sınır değer problemlerinde diferansiyel transform metodu ile çözümü

$$y(2) := \alpha$$

$$k := 0$$

$$\delta(r-3) := \begin{cases} 1 & r=3 \\ 0 & r \neq 3 \end{cases}$$

$$\delta(r-2) := \begin{cases} 1 & r=2 \\ 0 & r \neq 2 \end{cases}$$

$$\delta(r-1) := \begin{cases} 1 & r=1 \\ 0 & r \neq 1 \end{cases}$$

$$\delta(r-7) := \begin{cases} 1 & r=7 \\ 0 & r \neq 7 \end{cases}$$

$$Y(2) := 0$$

$$Y(0) := 0$$

$$Y(1) := 0$$

$$y(2) := \alpha$$

$$k := 1$$

$$\delta(r-3) := \begin{cases} 1 & r=3 \\ 0 & r \neq 3 \end{cases}$$

$$\delta(r-2) := \begin{cases} 1 & r=2 \\ 0 & r \neq 2 \end{cases}$$

$$\delta(r-1) := \begin{cases} 1 & r=1 \\ 0 & r \neq 1 \end{cases}$$

$$\delta(r-7) := \begin{cases} 1 & r=7 \\ 0 & r \neq 7 \end{cases}$$

$$Y(3) := 1$$

$$Y(0) := 0$$

$$Y(1) := 0$$

$$y(2) := \alpha$$

$$k := 2$$

$$\delta(r-3) := \begin{cases} 1 & r=3 \\ 0 & r \neq 3 \end{cases}$$

EK-3 (Devam) Eş. 5.5 Sınır değer problemlerinde diferensiyel transform metodu ile çözümü

$$\delta(r-2) := \begin{cases} 1 & r=2 \\ 0 & r \neq 2 \end{cases}$$

$$\delta(r-1) := \begin{cases} 1 & r=1 \\ 0 & r \neq 1 \end{cases}$$

$$\delta(r-7) := \begin{cases} 1 & r=7 \\ 0 & r \neq 7 \end{cases}$$

Error, numeric exception: division by zero

$$Y(0) := 0$$

$$Y(1) := 0$$

$$y(2) := \alpha$$

$$k := 3$$

$$\delta(r-3) := \begin{cases} 1 & r=3 \\ 0 & r \neq 3 \end{cases}$$

$$\delta(r-2) := \begin{cases} 1 & r=2 \\ 0 & r \neq 2 \end{cases}$$

$$\delta(r-1) := \begin{cases} 1 & r=1 \\ 0 & r \neq 1 \end{cases}$$

$$\delta(r-7) := \begin{cases} 1 & r=7 \\ 0 & r \neq 7 \end{cases}$$

$$Y(5) := \frac{1}{2}$$

$$Y(0) := 0$$

$$Y(1) := 0$$

$$y(2) := \alpha$$

$$k := 4$$

$$\delta(r-3) := \begin{cases} 1 & r=3 \\ 0 & r \neq 3 \end{cases}$$

$$\delta(r-2) := \begin{cases} 1 & r=2 \\ 0 & r \neq 2 \end{cases}$$

EK-3 (Devam) Eş. 5.5 Sınır değer problemlerinde diferensiyel transform metodu ile çözümü

$$\delta(r-1) := \begin{cases} 1 & r=1 \\ 0 & r \neq 1 \end{cases}$$

$$\delta(r-7) := \begin{cases} 1 & r=7 \\ 0 & r \neq 7 \end{cases}$$

$$Y(6) := \frac{1}{6}$$

$$Y(0) := 0$$

$$Y(1) := 0$$

$$y(2) := \alpha$$

$$k := 5$$

$$\delta(r-3) := \begin{cases} 1 & r=3 \\ 0 & r \neq 3 \end{cases}$$

$$\delta(r-2) := \begin{cases} 1 & r=2 \\ 0 & r \neq 2 \end{cases}$$

$$\delta(r-1) := \begin{cases} 1 & r=1 \\ 0 & r \neq 1 \end{cases}$$

$$\delta(r-7) := \begin{cases} 1 & r=7 \\ 0 & r \neq 7 \end{cases}$$

$$Y(7) := \frac{1}{126} Y(4) + \frac{17}{504}$$

$$Y(0) := 0$$

$$Y(1) := 0$$

$$y(2) := \alpha$$

$$k := 6$$

$$\delta(r-3) := \begin{cases} 1 & r=3 \\ 0 & r \neq 3 \end{cases}$$

$$\delta(r-2) := \begin{cases} 1 & r=2 \\ 0 & r \neq 2 \end{cases}$$

$$\delta(r-1) := \begin{cases} 1 & r=1 \\ 0 & r \neq 1 \end{cases}$$

EK-3 (Devam) Eş. 5.5 Sınır değer problemlerinde diferensiyel transform metodu ile çözümü

$$\delta(r-7) := \begin{cases} 1 & r=7 \\ 0 & r \neq 7 \end{cases}$$

$$Y(8) := \frac{1}{120}$$

$$Y(0) := 0$$

$$Y(1) := 0$$

$$y(2) := \alpha$$

$$k := 7$$

$$\delta(r-3) := \begin{cases} 1 & r=3 \\ 0 & r \neq 3 \end{cases}$$

$$\delta(r-2) := \begin{cases} 1 & r=2 \\ 0 & r \neq 2 \end{cases}$$

$$\delta(r-1) := \begin{cases} 1 & r=1 \\ 0 & r \neq 1 \end{cases}$$

$$\delta(r-7) := \begin{cases} 1 & r=7 \\ 0 & r \neq 7 \end{cases}$$

$$Y(9) := \frac{1}{720}$$

$$Y(0) := 0$$

$$Y(1) := 0$$

$$y(2) := \alpha$$

$$k := 8$$

$$\delta(r-3) := \begin{cases} 1 & r=3 \\ 0 & r \neq 3 \end{cases}$$

$$\delta(r-2) := \begin{cases} 1 & r=2 \\ 0 & r \neq 2 \end{cases}$$

$$\delta(r-1) := \begin{cases} 1 & r=1 \\ 0 & r \neq 1 \end{cases}$$

EK-3 (Devam) Eş. 5.5 Sınır değer problemlerinde diferansiyel transform metodu ile çözümü

$$\delta(r-7) := \begin{cases} 1 & r=7 \\ 0 & r \neq 7 \end{cases}$$

$$Y(10) := \frac{253}{68040} Y(4) - \frac{479}{136080}$$

$$Y(0) := 0$$

$$Y(1) := 0$$

$$y(2) := \alpha$$

$$k := 9$$

$$\delta(r-3) := \begin{cases} 1 & r=3 \\ 0 & r \neq 3 \end{cases}$$

$$\delta(r-2) := \begin{cases} 1 & r=2 \\ 0 & r \neq 2 \end{cases}$$

$$\delta(r-1) := \begin{cases} 1 & r=1 \\ 0 & r \neq 1 \end{cases}$$

$$\delta(r-7) := \begin{cases} 1 & r=7 \\ 0 & r \neq 7 \end{cases}$$

$$Y(11) := -\frac{113}{88704} + \frac{1}{770} Y(4)^2$$

```
> topl:=proc(a,s,d,f,g,h,j,k,l,m,ç,ö)
a+s+d+f+g+h+j+k+l+m+ç+ö;
end proc;
```

```
topla := proc (a, s, d, f, g, h, j, k, l, m, ç, ö)
a + s + d + f + g + h + j + k + l + m + ç + ö
end proc
```

```
>y(x):=topla(Y(0)*x^0,Y(1)*x^1,Y(2)*x^2,Y(3)*x^3,Y(4)*x^4,Y(5)*x^5,Y(6)*
x^6,Y(7)*x^7,Y(8)*x^8,Y(9)*x^9,Y(10)*x^10,Y(11)*x^11);
```


EK-3 (Devam) Eş. 5.5 Sınır değer problemlerinde diferensiyel transform metodu ile çözümü

$$y(x) := x^3 + Y(4) x^4 + \frac{1}{2} x^5 + \frac{1}{6} x^6 + \left(\frac{1}{126} Y(4) + \frac{17}{504} \right) x^7 + \frac{1}{120} x^8 + \frac{1}{720} x^9 + \left(\frac{253}{68040} Y(4) - \frac{479}{136080} \right) x^{10} + \left(-\frac{113}{88704} + \frac{1}{770} Y(4)^2 \right) x^{11}$$

> c:=subs(x=1,y(x)=2.71828182);

$$c := \frac{20421337}{11975040} + \frac{68833}{68040} Y(4) + \frac{1}{770} Y(4)^2 \\ = 2.71828182$$

> z:=solve(c,{Y(4)});

$$z := \{ Y(4) = 1.000003007 \}, \{ Y(4) = -779.9742828 \}$$

> y:=evalf(subs(z,y(x)),5);

$$y := x^3 + 1.0000 x^4 + 0.50000 x^5 + 0.16667 x^6 \\ + 0.041666 x^7 + 0.0083333 x^8 + 0.0013889 x^9 \\ + 0.0001984 x^{10} + 0.0000248 x^{11}$$

> subs(x=0,y);
subs(x=0.1,y);
subs(x=0.2,y);
subs(x=0.3,y);
subs(x=0.4,y);
subs(x=0.5,y);
subs(x=0.6,y);
subs(x=0.7,y);
subs(x=0.8,y);
subs(x=0.9,y);
subs(x=1,y);

0.

0.001105170921

0.009771222270

0.03644619008

0.09547679313

EK-3 (Devam) Eş. 5.5 Sınır değer problemlerinde diferensiyel transform metodu ile çözümü

0.2060902049

0.3935777907

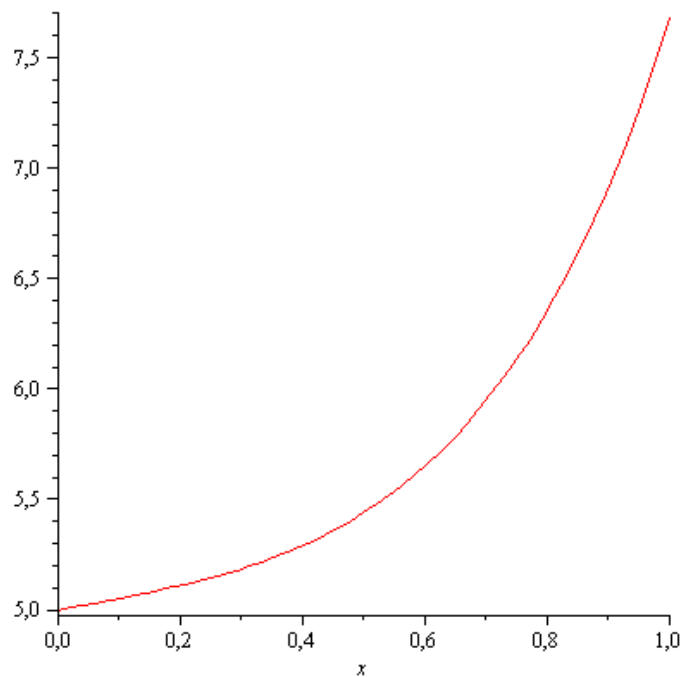
0.6907174731

1.139477478

1.793051251

2.7182814

>plot(x^3+1.0000*x^4+0.50000*x+5+0.16667*x^7+0.0083333*x^8+0.0013889*x^9+0.0001984*x^10+0.0000248*x^11,x=0..1);



Şekil 3.1 Eş. 5.5 Sınır değer problemlerinde diferensiyel transform metodu ile çözümü

EK- 4 Eş. 5.5 Sınır değer problemlerinin Adomian Ayırıştırma Yöntemi ile çözümü

$$y''' - \frac{2}{x}y'' - y - y^2 = 7x^2e^x + 6xe^x - 6e^x - x^6e^{2x}$$

$$y(0)=0, y'(0) = 0, y(1) = 2.71828182$$

$n=2$ ve $m=-2$ için sınır değer probleminin Algoritması ve sonuçları aşağıda verilmektedir.

> for k from 0 while k<3 do

k:=k;

y[0]:=evalf(expand(2.71828182*(x^4)+evalf(expand(x^4*(int((x^(-5))*int(int(-6*x+10*x^3+9*x^4+(17/4)*x^5+(41/30)*x^6-(2/3)*x^7-(325/168)*x^8,x=0..x),x=0..x),x))-1.68439709*x^4),6)),6);

A[0]:=evalf(expand(y[0]*y[0]),7);

A[1]:=evalf(expand(2*y[0]*y[1]),7);

A[2]:=evalf(expand(2*y[0]*y[2]+y[1]*y[1]),7);

A[3]:=evalf(expand(2*y[0]*y[3]+2*y[1]*y[2]),7);

y[k+1]:=evalf(expand((x^4)*((int((x^(-5))*int(int(x*(y[k]-A[k]),x=0..x),x=0..x),x=1..x))))),7);

end do;

>

EK- 4 (Devam) Eş. 5.5 Sınır değer problemlerinin Adomian Ayrıştırma Yöntemi ile çözümü

$$k := 0$$

$$\begin{aligned} y_0 := & 1.03388 x^4 - 0.00358245 x^{10} - 0.00185185 x^9 \\ & + 0.00610119 x^8 + 0.0337302 x^7 + 0.150000 x^6 \\ & + 0.500000 x^5 + x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_0 := & x^6 + 2.06776 x^7 + 2.068908 x^8 + 1.333880 x^9 \\ & + 0.6276244 x^{10} - 0.006291414 x^{14} \\ & + 0.00522617 x^{13} + 0.06514230 x^{12} + 0.2319484 x^{11} \\ & + 0.00001283395 x^{20} + 0.00001326832 x^{19} \\ & - 0.00004028507 x^{18} - 0.0002642706 x^{17} \\ & - 0.001162436 x^{16} - 0.003726416 x^{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 := & 2.06776 y_1 x^4 - 0.00716490 y_1 x^{10} \\ & - 0.00370370 y_1 x^9 + 0.01220238 y_1 x^8 \\ & + 0.0674604 y_1 x^7 + 0.300000 y_1 x^6 + 1.000000 y_1 x^5 \\ & + 2. y_1 x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 := & 2.06776 y_2 x^4 - 0.00716490 y_2 x^{10} \\ & - 0.00370370 y_2 x^9 + 0.01220238 y_2 x^8 \\ & + 0.0674604 y_2 x^7 + 0.300000 y_2 x^6 + 1.000000 y_2 x^5 \\ & + 2. y_2 x^3 + y_1^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3 := & 2.06776 y_3 x^4 - 0.00716490 y_3 x^{10} \\ & - 0.00370370 y_3 x^9 + 0.01220238 y_3 x^8 \\ & + 0.0674604 y_3 x^7 + 0.300000 y_3 x^6 + 1.000000 y_3 x^5 \\ & + 2. y_3 x^3 + 2. y_1 y_2 \end{aligned}$$

EK- 4 (Devam) Eş. 5.5 Sınır değer problemlerinin Adomian Ayrıştırma Yöntemi ile çözümü

$$\begin{aligned}
 y_1 := & -0.01642839 x^4 - 1.334923 \cdot 10^{-9} x^{23} \\
 & - 1.595517 \cdot 10^{-9} x^{22} + 5.642168 \cdot 10^{-9} x^{21} \\
 & + 4.346556 \cdot 10^{-8} x^{20} + 2.265957 \cdot 10^{-7} x^{19} \\
 & + 8.698450 \cdot 10^{-7} x^{18} + 0.000001779246 x^{17} \\
 & - 0.000001814642 x^{16} - 0.00002820013 x^{15} \\
 & - 0.0001274441 x^{14} - 0.0004495776 x^{13} \\
 & - 0.001264898 x^{12} - 0.002678970 x^{11} \\
 & - 0.003766722 x^{10} - 0.002361112 x^9 \\
 & + 0.002232143 x^8 + 0.008205397 x^7 \\
 & + 0.01666666 x^6
 \end{aligned}$$

$$k := 1$$

$$\begin{aligned}
 y_0 := & 1.03388 x^4 - 0.00358245 x^{10} - 0.00185185 x^9 \\
 & + 0.00610119 x^8 + 0.0337302 x^7 + 0.150000 x^6 \\
 & + 0.500000 x^5 + x^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_1 := & -0.03285678 x^7 - 0.03396996 x^8 + 0.01690493 x^9 \\
 & + 0.04594494 x^{10} - 0.01396347 x^{14} \\
 & - 0.006536706 x^{13} + 0.01289824 x^{12} \\
 & + 0.03698948 x^{11} - 0.00007548026 x^{20} \\
 & - 0.0004114102 x^{19} - 0.001382907 x^{18} \\
 & - 0.003603070 x^{17} - 0.007605496 x^{16} \\
 & - 0.01235534 x^{15} + 0.00001075713 x^{22} \\
 & + 0.000004940070 x^{21} + 0.000005185764 x^{23} \\
 & - 1.293572 \cdot 10^{-8} x^{27} + 4.502520 \cdot 10^{-8} x^{26} \\
 & + 4.090830 \cdot 10^{-7} x^{25} + 0.000001704165 x^{24} \\
 & + 9.564590 \cdot 10^{-12} x^{33} + 1.637587 \cdot 10^{-11} x^{32} \\
 & - 5.080548 \cdot 10^{-11} x^{31} - 4.418468 \cdot 10^{-10} x^{30} \\
 & - 2.223782 \cdot 10^{-9} x^{29} - 7.974166 \cdot 10^{-9} x^{28}
 \end{aligned}$$

EK- 4 (Devam) Eş. 5.5 Sınır değer problemlerinin Adomian Ayrıştırma Yöntemi ile çözümü

$$\begin{aligned}
A_0 := & x^6 + 2.06776 x^7 + 2.068908 x^8 + 1.333880 x^9 \\
& + 0.6276244 x^{10} - 0.006291414 x^{14} \\
& + 0.00522617 x^{13} + 0.06514230 x^{12} + 0.2319484 x^{11} \\
& + 0.00001283395 x^{20} + 0.00001326832 x^{19} \\
& - 0.00004028507 x^{18} - 0.0002642706 x^{17} \\
& - 0.001162436 x^{16} - 0.003726416 x^{15} \\
A_2 := & 0.0002698920 x^8 - 0.0005476128 x^{10} \\
& + 0.0002654957 x^{14} + 0.0003510918 x^{13} \\
& + 0.0002044366 x^{12} - 0.0002696030 x^{11} \\
& + 0.000009625577 x^{20} - 0.00002898971 x^{19} \\
& - 0.00009318073 x^{18} - 0.0001468829 x^{17} \\
& - 0.0001177621 x^{16} + 0.00004594986 x^{15} \\
& + 0.00001770814 x^{22} + 0.00002105806 x^{21} \\
& + 0.00001066213 x^{23} + 1.801008 \cdot 10^{-7} x^{27} \\
& + 6.899938 \cdot 10^{-7} x^{26} + 0.000002070776 x^{25} \\
& + 0.000005150702 x^{24} - 1.480241 \cdot 10^{-10} x^{33} \\
& - 6.443809 \cdot 10^{-10} x^{32} - 1.980345 \cdot 10^{-9} x^{31} \\
& - 4.139777 \cdot 10^{-9} x^{30} - 2.299978 \cdot 10^{-9} x^{29} \\
& + 2.926638 \cdot 10^{-8} x^{28} + 1.782019 \cdot 10^{-18} x^{46} \\
& + 4.259784 \cdot 10^{-18} x^{45} - 1.251805 \cdot 10^{-17} x^{44} \\
& - 1.340508 \cdot 10^{-16} x^{43} - 7.118416 \cdot 10^{-16} x^{42} \\
& - 2.554946 \cdot 10^{-15} x^{41} - 3.079779 \cdot 10^{-15} x^{40} \\
& + 2.868103 \cdot 10^{-14} x^{39} + 2.281204 \cdot 10^{-13} x^{38} \\
& + 9.586448 \cdot 10^{-13} x^{37} + 2.693982 \cdot 10^{-12} x^{36} \\
& + 3.195066 \cdot 10^{-12} x^{35} - 1.773452 \cdot 10^{-11} x^{34} \\
& + 2.06776 y_2 x^4 - 0.00716490 y_2 x^{10} \\
& - 0.00370370 y_2 x^9 + 0.01220238 y_2 x^8 \\
& + 0.0674604 y_2 x^7 + 0.300000 y_2 x^6 + 2. y_2 x^3 \\
& + 1.000000 y_2 x^5
\end{aligned}$$

EK- 4 (Devam) Eş. 5.5 Sınır değer problemlerinin Adomian Ayrıştırma Yöntemi ile çözümü

$$\begin{aligned}
 A_3 := & 2.06776 y_3 x^4 - 0.00716490 y_3 x^{10} \\
 & - 0.00370370 y_3 x^9 + 0.01220238 y_3 x^8 \\
 & + 0.0674604 y_3 x^7 + 0.300000 y_3 x^6 + 1.000000 y_3 x^5 \\
 & + 2. y_3 x^3 - 0.0002548882 y_2 x^{14} \\
 & - 0.002529796 y_2 x^{12} - 0.0008991552 y_2 x^{13} \\
 & - 0.005357940 y_2 x^{11} - 2.669846 \cdot 10^{-9} y_2 x^{23} \\
 & - 3.191034 \cdot 10^{-9} y_2 x^{22} + 1.128434 \cdot 10^{-8} y_2 x^{21} \\
 & + 8.693112 \cdot 10^{-8} y_2 x^{20} + 4.531914 \cdot 10^{-7} y_2 x^{19} \\
 & + 0.000001739690 y_2 x^{18} + 0.000003558492 y_2 x^{17} \\
 & - 0.03285678 y_2 x^4 - 0.007533444 y_2 x^{10} \\
 & - 0.004722224 y_2 x^9 - 0.000003629284 y_2 x^{16} \\
 & - 0.00005640026 y_2 x^{15} + 0.004464286 y_2 x^8 \\
 & + 0.01641079 y_2 x^7 + 0.03333332 y_2 x^6
 \end{aligned}$$

EK- 4 (Devam) Eş. 5.5 Sınır değer problemlerinin Adomian Ayrıştırma Yöntemi ile çözümü

$$k := 2$$

$$\begin{aligned} y_0 := & 1.03388 x^4 - 0.00358245 x^{10} - 0.00185185 x^9 \\ & + 0.00610119 x^8 + 0.0337302 x^7 + 0.150000 x^6 \\ & + 0.500000 x^5 + x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_0 := & x^6 + 2.06776 x^7 + 2.068908 x^8 + 1.333880 x^9 \\ & + 0.6276244 x^{10} - 0.006291414 x^{14} \\ & + 0.00522617 x^{13} + 0.06514230 x^{12} + 0.2319484 x^{11} \\ & + 0.00001283395 x^{20} + 0.00001326832 x^{19} \\ & - 0.00004028507 x^{18} - 0.0002642706 x^{17} \\ & - 0.001162436 x^{16} - 0.003726416 x^{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 := & -0.03285678 x^7 - 0.03396996 x^8 + 0.01690493 x^9 \\ & + 0.04594494 x^{10} - 0.01396347 x^{14} \\ & - 0.006536706 x^{13} + 0.01289824 x^{12} \\ & + 0.03698948 x^{11} - 0.00007548026 x^{20} \\ & - 0.0004114102 x^{19} - 0.001382907 x^{18} \\ & - 0.003603070 x^{17} - 0.007605496 x^{16} \\ & - 0.01235534 x^{15} + 0.00001075713 x^{22} \\ & + 0.000004940070 x^{21} + 0.000005185764 x^{23} \\ & - 1.293572 \cdot 10^{-8} x^{27} + 4.502520 \cdot 10^{-8} x^{26} \\ & + 4.090830 \cdot 10^{-7} x^{25} + 0.000001704165 x^{24} \\ & + 9.564590 \cdot 10^{-12} x^{33} + 1.637587 \cdot 10^{-11} x^{32} \\ & - 5.080548 \cdot 10^{-11} x^{31} - 4.418468 \cdot 10^{-10} x^{30} \\ & - 2.223782 \cdot 10^{-9} x^{29} - 7.974166 \cdot 10^{-9} x^{28} \end{aligned}$$

EK- 4 (Devam) Eş. 5.5 Sınır değer problemlerinin Adomian Ayrıştırma Yöntemi ile çözümü

$$\begin{aligned}
 A_2 := & 0.00006276230 x^7 + 0.0003347807 x^8 \\
 & + 0.00003138116 x^9 - 0.0007989664 x^{10} \\
 & + 0.0005540375 x^{14} + 0.0005596720 x^{13} \\
 & + 0.0001670280 x^{12} - 0.0005370888 x^{11} \\
 & + 0.000005821625 x^{20} - 0.00007112887 x^{19} \\
 & - 0.0001874641 x^{18} - 0.0002611989 x^{17} \\
 & - 0.0001528673 x^{16} + 0.0001950174 x^{15} \\
 & + 0.00003075174 x^{22} + 0.00003300649 x^{21} \\
 & + 0.00001936631 x^{23} + 3.224825 \cdot 10^{-7} x^{27} \\
 & + 0.000001285201 x^{26} + 0.000003886047 x^{25} \\
 & + 0.000009578368 x^{24} - 2.951959 \cdot 10^{-10} x^{33} \\
 & - 1.356614 \cdot 10^{-9} x^{32} - 4.368805 \cdot 10^{-9} x^{31} \\
 & - 9.920813 \cdot 10^{-9} x^{30} - 9.992916 \cdot 10^{-9} x^{29} \\
 & + 4.354244 \cdot 10^{-8} x^{28} + 3.481655 \cdot 10^{-18} x^{46} \\
 & + 8.318940 \cdot 10^{-18} x^{45} - 2.458306 \cdot 10^{-17} x^{44} \\
 & - 2.644366 \cdot 10^{-16} x^{43} - 1.421604 \cdot 10^{-15} x^{42} \\
 & - 5.219330 \cdot 10^{-15} x^{41} - 6.884701 \cdot 10^{-15} x^{40} \\
 & + 5.617621 \cdot 10^{-14} x^{39} + 4.669596 \cdot 10^{-13} x^{38} \\
 & + 2.018084 \cdot 10^{-12} x^{37} + 5.942638 \cdot 10^{-12} x^{36} \\
 & + 8.570734 \cdot 10^{-12} x^{35} - 3.008041 \cdot 10^{-11} x^{34}
 \end{aligned}$$

EK- 4 (Devam) Eş. 5.5 Sınır değer problemlerinin Adomian Ayrıştırma Yöntemi ile çözümü

> topla:=proc(a,s,d)

a+s+d;

end proc;

topla := proc(a, s, d) a + s + d end proc

> y:=evalf(topla(y[0],y[1],y[2]),7);

$$\begin{aligned}
 y := & 1.017483 x^4 + x^3 + 0.500000 x^5 + 0.1666667 x^6 \\
 & + 0.04180522 x^7 + 0.008333333 x^8 \\
 & - 0.004166666 x^9 - 0.007273131 x^{10} \\
 & - 0.0001492400 x^{14} - 0.0004849848 x^{13} \\
 & - 0.001283142 x^{12} - 0.002631954 x^{11} \\
 & + 6.363684 \cdot 10^{-7} x^{20} + 0.000001708795 x^{19} \\
 & + 0.000003747329 x^{18} + 0.000005692151 x^{17} \\
 & + 2.98944 \cdot 10^{-7} x^{16} - 0.00003433136 x^{15} \\
 & + 4.790385 \cdot 10^{-8} x^{22} + 1.994485 \cdot 10^{-7} x^{21} \\
 & + 6.520677 \cdot 10^{-9} x^{23} - 1.055472 \cdot 10^{-10} x^{27} \\
 & - 3.627343 \cdot 10^{-10} x^{26} - 8.538676 \cdot 10^{-10} x^{25} \\
 & - 4.469590 \cdot 10^{-10} x^{24} + 1.442812 \cdot 10^{-14} x^{33} \\
 & + 8.006129 \cdot 10^{-14} x^{32} + 3.175693 \cdot 10^{-13} x^{31} \\
 & + 5.718708 \cdot 10^{-13} x^{30} - 2.217990 \cdot 10^{-12} x^{29} \\
 & - 2.254646 \cdot 10^{-11} x^{28} - 2.372170 \cdot 10^{-16} x^{36} \\
 & - 4.439106 \cdot 10^{-16} x^{35} + 1.509373 \cdot 10^{-15} x^{34}
 \end{aligned}$$

EK- 4 (Devam) Eş. 5.5 Sınır değer problemlerinin Adomian Ayrıştırma Yöntemi ile çözümü

> subs(x=0,y);

subs(x=0.1,y);

subs(x=0.2,y);

subs(x=0.3,y);

subs(x=0.4,y);

subs(x=0.5,y);

subs(x=0.6,y);

subs(x=0.7,y);

subs(x=0.8,y);

subs(x=0.9,y);

subs(x=1,y);

0.

0.001106919226

0.009799192972

0.03658767148

0.09592219608

0.2071641017

0.3957329701

0.6944148367

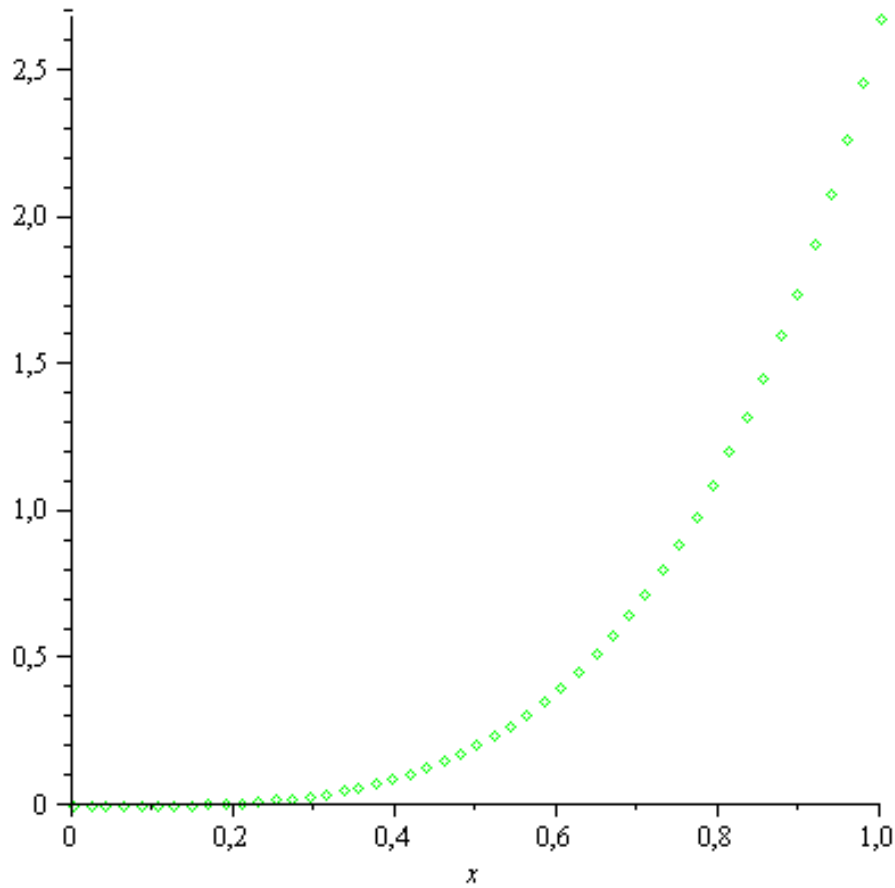
1.144768361

1.798470495

2.718277140

EK- 4 (Devam) Eş. 5.5 Sınır değer problemlerinin Adomian Ayrıştırma Yöntemi ile çözümü

```
>plot(x^3+1.0174830*x^4+0.500000*x^5+0.1666667*x^6,x=0..1,style=box,color=green);
```



Şekil 4.1. Eş. 5.5 Sınır değer problemlerinin Adomian Ayrıştırma Yöntemi ile çözümü grafiği

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı : ÜNAL, Derya
Uyruğu : T.C.
Medeni hali : Bekar
e-mail : ayredlanu@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Gazi Üniv. / Matematik Bölümü	2003
Yüksek lisans	Gazi Üniv./Eğitim Bilimleri	2006

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2009-	Tatvan Atatürk Lisesi	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce,İspanyolca