



**DAİRESEL VERİLERİN ANALİZİNDE KULLANILAN
İSTATİSTİK YÖNTEMLER**

Gamze KÜÇÜK ÖNTAŞ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HAZİRAN 2020

Gamze KÜÇÜK tarafından hazırlanan “DAİRESEL VERİLERİN ANALİZİNDE KULLANILAN İSTATİSTİK YÖNTEMLER” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi İstatistik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Bülent ÇELİK

İstatistik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Başkan: Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU

İstatistik Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Prof. Dr. Hamza GAMGAM

İstatistik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 12/06/2020

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Cevriye GENCER

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Gamze KÜÇÜK

12/06/2020

DAİRESEL VERİLERİN ANALİZİNDE KULLANILAN İSTATİSTİK YÖNTEMLER

(Yüksek Lisans Tezi)

Gamze KÜÇÜK ÖNTAŞ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2020

ÖZET

Veri toplamak ve bu veriyi doğru istatistiksel yöntemlerle analiz etmek bilimsel araştırmaların önemli basamakları arasındadır. Araştırmada kullanılan istatistiksel yöntem veriye uygun değilse ya da veri kullanılan istatistiksel yöntem uygun değilse elde edilen sonuçlar gerçeği yansıtmayacak ve yanlış yorumlamalara neden olacaktır. Dairesel verilere jeoloji, biyoloji, fizik, tıp, diş hekimliği, astronomi gibi alanlarda rastlamak mümkündür. Dairesel ve doğrusal verilere ait istatistikler ve yapılacak istatistiksel analiz yöntemleri de farklı olacaktır. Yön kavramında herhangi bir büyüklük söz konusu olmadığından, gözlem değerleri merkezi orijin olan bir birim çemberin çevresi üzerinde noktalarla ya da orijini bu noktalarla birleştiren birim vektörlerle gösterilebilir. Dairesel veriler kısaca $[0, 2\pi)$ aralığında tanımlı verilerdir. Bu çalışmada, dairesele verilerin özelliklerini ve doğrusal verilere uygulanan temel istatistiksel yöntemlerle arasındaki farklar incelenmiştir. Bu amaç doğrultusunda dairesele veriler için temel parametre değerlerinin hesaplanması açıklanmış ve dairesele veri analizindeki temel olasılık dağılımı olan von Mises dağılımı incelenmiştir. Yapılan literatür incelemesinde diş hekimliği alanında elde edilen açısal ölçümlerin doğrusal veri olarak değerlendirildiği tespit edilmiş, bu nedenle bu alana ilişkin veri ele alınarak bir uygulama yapılmıştır. Böylece açısal verilere ait istatistiklerin doğrusal verilere ilişkin istatistiklerden farklılıkları ortaya konmuştur.

Bilim Kodu	: 20503
Anahtar Kelimeler	: Dairesel veri, von Mises dağılımı, dairesele regresyon, dairesele dağılım, dairesele istatistik
Sayfa Adedi	: 69
Danışman	: Prof. Dr. Bülent ÇELİK

STATISTICAL METHODS USED IN THE ANALYSIS
OF CIRCULAR DATA

(M. Sc. Thesis)

Gamze KÜÇÜK ÖNTAŞ

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2020

ABSTRACT

Collecting and analyzing the data with the correct methods is among the important steps of scientific research. If the statistical method that is used in the research is not suitable for the data or the data is not suitable for the statistical method; the results do not reflect the truth and cause misinterpretations also. Directional data can be found in places such as geology, biology, physics, medicine, dentistry, astronomy. There are differences between the directional and linear analysis methods and statistics of data. Since there is no size in the direction concept, the center of observation can be represented by the points on the periphery of a unit circle with the origin of the center, or by the standard vectors that arrange the origin with these points. Directional Data are briefly defined in the range $[0, 2\pi]$. In this study, the properties of circular data and the differences between basic statistical methods applied to linear data are examined. For this purpose, the calculation of the basic parameter values for circular data is explained and von Mises distribution, which is the basic probability distribution in the circular data analysis is examined. In the literature review, it is determined that angular measurements obtained in the field of dentistry are evaluated as linear data, therefore an application is made by considering the data related to this field. Thus, the differences of the statistics of the angular data from the statistics of the linear data are revealed.

Science Code : 20503

Key Words : Circular data, von Mises distribution, circular regression, circular distributions, circular statistics

Page Number : 69

Supervisor : Prof. Dr. Bülent ÇELİK

TEŞEKKÜR

Hazırlamış olduğum tez çalışmasında benden hiçbir zaman desteğini esirgemeyen, bilgisi ve deneyimiyle yüksek lisans eğitimim boyunca yanımda olan çok değerli tez danışman hocam Prof. Dr. Bülent ÇELİK'e, İstatistik Anabilim Dalı'nda görev yapan öğretim üyesi hocalarıma, bölüm arkadaşlarıma, yüksek lisans eğitimim boyunca tez çalışmam esnasında tüm sıkıntı ve yorgunluğumu paylaşan en zor zamanlarda bana destek olan arkadaşım Esra BEŞPINAR'a, her daim yanımda olan, en büyük destekçilerim, hayatımın anlamları babam Bekir KÜÇÜK, annem Hilal KÜÇÜK, nişanlım Mehmet Can ÖNTAŞ'a sonsuz teşekkürlerimi ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	x
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xii
1. GİRİŞ.....	1
2. DAİRESEL VERİ	3
2.1. Dairesel Verinin Grafıksel Gösterimi.....	4
2.1.1. Gruplanmamış veri için grafıksel gösterim.....	4
2.1.2. Gruplanmış veri için grafıksel gösterim.....	6
2.2. Dairesel Olasılık Dağılımları	9
2.2.1. Düzgün dağılım.....	10
2.2.2. Kardiod (Kosinüs) dağılım	11
2.2.3. Üçgensel (triangular) dağılım	12
2.2.4. Genel sarmal dağılımlar	12
2.2.5. Sarmal normal dağılım.....	13
2.2.6. Sarmal cauchy dağılımı.....	14
2.2.7. Dairesel normal dağılım (Von Mises).....	14
2.3. Dairesel Verilerde Temel istatistikler.....	15
2.3.1. Dairesel ortalama yön	16
2.3.2. Dairesel bileşke uzunluğu ve ortalaması.....	17
2.3.3. Yoğunlaşma parametresi.....	17

	Sayfa
2.3.4. Dairesel varyans	18
2.3.5. Dairesel standart sapma	21
2.3.6. Dairesel saçılım ölçüsü ve standart hata	21
2.3.7. Çarpıklık ve basıklık ölçüleri	22
2.3.8. Dairesel medyan yönü.....	22
2.3.9. Dairesel mod yönü	23
2.4. Dairesel Normal Dağılımda İstatistiksel Çıkarım İşlemleri	24
2.4.1. Bir örneklem için ortalama yön testleri.....	24
2.4.2. Tek örneklem olduğu durumda ortalama yön için güven aralığı	26
2.4.3. Bir örneklem için yoğunlaşma parametresi için hipotez testi	27
2.4.4. Tek örneklem olduğu durumda yoğunlaşma parametresi için güven aralığı	28
2.4.5. İki örneklem için ortalama yön testleri	29
2.4.6. İki örneklem olduğu durumlarda ortalama yön için güven aralığı.....	32
2.4.7. İki örneklem olduğu durumlarda yoğunlaşma parametresi testleri.....	33
2.4.8. Çok örneklem için ortalama yön testleri	35
2.4.9. Çok örneklem için ağırlaştırılmış ortalama yönün güven aralığı.....	39
2.4.10. Çok örneklem için yoğunlaşma parametrelerinin eşitliğinin testi.....	40
2.5. Dairesel Homojenlik Testleri	41
2.5.1. Rayleigh testi.....	41
2.5.2. V testi	42
2.5.3. Kuiper testi	43
2.5.4. Watson U_2 testi.....	44
2.5.5. Hodges-anje testi.....	45
2.5.6. f Aralık testi.....	46
2.5.7. Rao aralık testi.....	47
2.5.8. Anje An testi	48

	Sayfa
3. ARAŞTIRMA BULGULARI	51
4. SONUÇ VE ÖNERİLER	59
KAYNAKLAR	61
EKLER.....	65
Ek-1. Dairesel homojenlik testlerinden V testi için U kritik değerleri	66
Ek-2. Dairesel homojenlik testlerinden Hodges-Ajne testi için m kritik değerleri.....	67
Ek-3. Dairesel dağılım testlerinden Rao aralık testi için L kritik değerleri	68
ÖZGEÇMİŞ	69

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 2.1. Kalp krizi geçirdiği gerekçesiyle getirilen hastaların varış zamanlarının derece cinsinden gruplandırılmış verileri	7
Çizelge 2.2. Kuiper testi için V 'nin kritik tablo değerleri	43
Çizelge 2.3. Watson U_2 testi için U_2 kritik tablo değerleri.....	45
Çizelge 3.1. Bireylerin ANB açısı değerleri	51
Çizelge 3.2. Veriye ilişkin doğrusal ve dairesel istatistikler.....	53
Çizelge 3.3. Trigonometrik momentler.....	54
Çizelge 3.4. Örneklem özet istatistikleri.....	55
Çizelge 3.5. NCSS özet istatistikler.....	56
Çizelge 3.6. Güven aralıkları	57
Çizelge 3.7. Değişim istatistikleri.....	57
Çizelge 3.8. Von Mises dağılım tahmini	57
Çizelge 3.9. Trigonometrik momentler.....	58

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Dik koordinatlar.....	3
Şekil 2.2. Kutupsal koordinatlar	4
Şekil 2.3. Dairesel ham veri grafiği (nokta olarak).....	5
Şekil 2.4. Dairesel ham verinin dairesele kartezyen grafiği (vektör olarak)	6
Şekil 2.5. Dairesel histogram	8
Şekil 2.6. Doğrusal histogram.....	8
Şekil 2.7. Gül şeması	9
Şekil 2.8. İki nokta arası uzaklık.....	19
Şekil 3.1. ANB açısal ölçümlerinin dairesele histogramı.....	52
Şekil 3.2. ANB açısal ölçümlerinin gül şeması	52

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$\hat{K}$	Yoğunlaşma parametresinin tahmin edicisi
$A_1(\kappa)$	Dönüştürülmüş iki Bessel fonksiyonunun oranı
$I_0(\kappa)$	Sıfırıncı sıra dönüştürülmüş Bessel Fonksiyonu
$I_1(\kappa)$	Birinci sıra dönüştürülmüş Bessel Fonksiyonu
$\bar{R}$	Dairesel ortalama örneklem bileşke uzunluğu
α_p	Kosinüs momenti
β_p	Sinüs momenti
γ_1	Dairesel çarpıklık
γ_2	Dairesel basıklık
$\tilde{\theta}$	Dairesel medyan
$\check{\theta}$	Dairesel mod
$\bar{\theta}$	Dairesel örneklem ortalama yönü
$\bar{\rho}$	Dairesel ortalama yığın bileşke uzunluğu
$F(\theta)$	Dağılım fonksiyonu
$f(\theta)$	Olasılık yoğunluk fonksiyonu
κ	Dairesel yoğunlaşma parametresi
R	Dairesel örneklem bileşke uzunluğu
s	Dairesel standart sapma
V	Dairesel varyans
θ	Dairesel gözlem değeri
ξ	Dairesel uzaklık
δ	Dairesel saçılım ölçüsü
μ	Dairesel yığın ortalama yönü
ρ	Dairesel yığın bileşke uzunluğu
σ	Dairesel standart hata

Kısaltmalar**Açıklamalar****GKT**

Genel kareler toplamı

GSD

Genel serbestlik derecesi

HKT

Hata kareler toplamı

HSD

Hata serbestlik derecesi

MKO

Muamele kareler ortalaması

MKT

Muamele kareler toplamı

MSD

Muamele serbestlik derecesi

VAR

Varyans

VM

Von Mises

1. GİRİŞ

Yapılan bilimsel araştırmalardan elde edilen verileri uygun istatistiksel yöntemlerle değerlendirmek her zaman incelenen verilerden doğru sonuçlar çıkarılmasına ve doğru yorumlanmasına neden olur. Verilerin değerlendirilmesi için uygun istatistik yöntemin seçilmesi ise büyük oranda verinin ölçümleme biçimine bağlıdır. Bilinen veri ölçümleme biçimleri daha çok doğrusal istatistiklerle değerlendirilir. Son yıllarda dairesel (açısal) verilerin de araştırmalarda önemli bir yer tuttuğu gözlemlenmektedir.

Dairesel veriler özellikle biyoloji, jeoloji, astronomi, tıp, psikoloji, fizik ve meteoroloji gibi alanlarda kullanılmaktadır. Açısal veriler direkt ölçülmesinin yanı sıra pusula ve saat olmak üzere iki temel açısal ölçü aleti kullanılarak da elde edilmektedir. Pusula ile ölçülen tipik gözlemler rüzgar yönleri ve kuşların göç yönleri ayrıca bu tür veri ölçümleri açılı ölçer ve su terazisi ile de elde edilmektedir. Saat ile ölçülen tipik gözlemler ise kalp krizi geçiren hastaların bir hastanenin acil servisine (24 saat cinsinden) varış süreleri veya benzer bir biçimde veri yılın zamanları (saat, gün, ay vb.) gibi durumlardan sağlanmaktadır (Mardia ve Jupp, 2000).

İki boyutlu yönler, uygun biçimde seçilmesi gereken bir sıfır yönü ve dönüş doğrultusuna göre ölçülen açılar biçiminde gösterilebilir. Burada sıfır yönü başlangıç noktasını ve dönüş doğrultusu ise pozitif yön olarak saat yönünün mü yoksa saat yönünün tersinin mi kullanacağını belirtmektedir. Yön kavramında herhangi bir büyüklük söz konusu olmadığından, gözlem değerleri merkezi orijin olan birim çemberin çevresi üzerinde noktalarla ya da orijini bu noktalarla birleştiren birim vektörlerle gösterilebilir. Buna göre derece cinsinden ölçülmüş tek bir gözlem θ° ($0^\circ < \theta^\circ < 360^\circ$), birim vektör olacaktır. Bu dairesel gösterimden dolayı, iki boyutlu yönlerle ilişkin gözlemler dairesel (circular) veri olarak adlandırılır. Burada θ° ; vektör ile pozitif x-ekseninin, saat yönünün tersi yönünde yaptığı açığı gösterir. Vektörün Kartezyen koordinatları $(\cos\theta^\circ, \sin\theta^\circ)$ ve kutupsal koordinatları $(1, \theta^\circ)$ ' dir (Peker, 2002).

Dairesel veriler sağlık alanının birçok disiplininde de ortaya çıkmaktadır. Örneğin, daire yılın 365 gününü gösterir ve her gün belli bir açıya denk gelecek şekilde eşit dağıtılsa; bir hastanenin herhangi bir polikliniğine başvuran hasta sayısı uzun bir zaman gözlemlenirse

bu yıllara, mevsimlere veya aylara göre bir dairesellik meydana getirir. 24 saatlik veya diğer ritmik çalışmalarda da bir döngüyü sunmak için daire kullanılabilir (Yıldırım, 2015). Canlıların gözleri ile ilgili yapılan çalışmalarda yine birçok açısal veri elde edilip değerlendirilmektedir. Açısal verilerin elde edildiği diğer bir alan ise Diş hekimliğidir. Özellikle Ortodonti alanında yapılan çalışmalarda açısal veriler oldukça çok kullanılmaktadır. Ancak elde edilen bu verilerin doğrusal istatistik yöntemlerle değerlendirildiği dikkat çekmektedir.

Dairesel verileri doğrusal bir ölçekte ölçülen verilerden ayıran temel karakteristik, maksimum veya minimum olmayan sargı doğasıdır. Yani, “başlangıç” “son” ile çakışır ($0=2\pi$) ve genel olarak ölçüm periyodiktir ve θ herhangi bir p tamsayısı için $\theta + 2p\pi$ ile aynıdır. Dairenin doğal periyodikliği dikkate alınarak dağılım fonksiyonları, karakteristik fonksiyonlar ve dairedeki momentler tanımlanmalıdır.

Doğrusal tanımlayıcı istatistikler, dairesel dağılımların merkezi eğilimini kesin olarak karakterize etmekle sınırlıdır. Klasik doğrusal tekniklerin ve ölçümlerin hepsini anlamsız kılmaya da birçok durumda doğrusal yöntemler yanıltıcı sonuçlar vermektedir. Örnek ortalaması, varyans, moment üreten fonksiyon, olasılık yoğunluk fonksiyonu gibi istatistiksel ölçümlerin yanı sıra korelasyon, regresyonun ve diğer birçok yöntemin de yeniden düzenlenmesi gerekmektedir.

Konuyla alakalı ilk ciddi çalışmayı Mardia (Statistics of Directional Data, 1972) tarafından yapılmıştır. Yapılan çalışmada dairesel veri istatistiğinin teoride nasıl kullanılabileceği ve veriler üzerinde nasıl uygulanabileceği üzerinde durulmuştur. Mardia'nın bu çalışması daha sonra Mardia ve Jupp (2000) tarafından revize edilerek tekrar yayınlanmıştır.

Bu çalışmanın amacı, dairesel veri ve bu veriden elde edilen istatistikleri tanıtmak ve bunların doğrusal istatistiklerle karşılaştırmasını gerçek bir veri seti üzerinde göstermektir. Burada diş hekimliği alanında elde edilen açısal veriler ele alınmış ve açısal istatistik yöntemlerle incelenerek bu alanda çalışan araştırmacılara yol göstermek amaçlanmıştır.

2. DAİRESEL VERİ

Dairesel verilerin en basit gösterimi, her bir gözlem değerinin birim çember üzerinde bir nokta olarak gösterildiği grafiklerdir. Bu noktalar koordinatları ile ifade edilebildiği gibi açısal olarak da ifade edilebilirler. Açısal değerler derece veya radyan cinsinden olabilir. Derece ve radyan aşağıda verilen formüller aracılığı ile birbirlerine dönüştürülebilirler. Radyan olarak bilinen θ değerinin açı olarak ifadesi Eşitlik 2.1’de verilmiştir.

$$\theta^{\circ} = \frac{180 \cdot \theta}{\pi}, \quad 0^{\circ} < \theta^{\circ} < 360^{\circ} \quad (2.1)$$

Açı olarak bilinen θ° ’nın radyan olarak ifadesi ise Eşitlik 2.2’de gösterilmiştir.

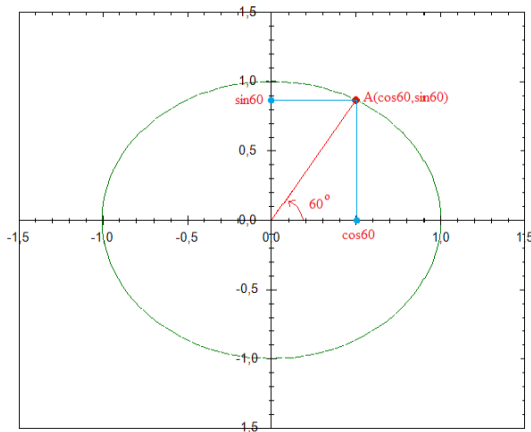
$$\theta_{rad} = \frac{\theta^{\circ} \cdot \pi}{180}, \quad 0 < \theta \leq 2\pi \quad (2.2)$$

Düzlemde herhangi bir P noktasının konumu dik koordinatlar (x, y) ile ya da yön (θ açısı) ve orijine olan mesafe (r) olmak üzere kutupsal koordinatlar (r, θ) ile tanımlanabilir. Dik koordinatlar ve kutupsal koordinatlar arasındaki dönüşüm ise Eşitlik 2.3 ile yapılmaktadır.

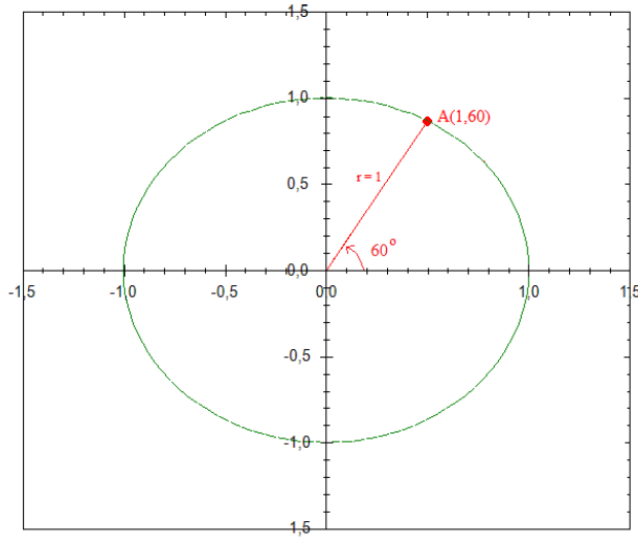
$$x = r \cdot \cos\theta \quad (2.3)$$

$$y = r \cdot \sin\theta$$

Örneğin $\theta = 60^{\circ}$ ve r=1 olan bir A gözlem değerinin dik koordinat düzleminde gösterimi Şekil 2.1’de, kutupsal koordinatları ise Şekil 2.2’de gösterilmiştir.



Şekil 2.1. Dik koordinatlar



Şekil 2.2. Kutupsal koordinatlar

Dairesel veri analizinde vektörün uzunluğu göz ardı edilmelidir, sadece açısal değeri ile işlem yapılmalıdır. Bu nedenle $r = 1$ olarak kabul edilmektedir. Böylece her bir gözlem, çember üzerinde bir nokta ile ifade edilmektedir. Bu nokta değeri bir derece ile ifade edilmektedir. θ açısı ile ifade edilen $X = \cos\theta$ ve $Y = \sin\theta$ olmak üzere birim çember üzerinde (X, Y) ikilisi ile konumlandırılır ve dairesel istatistiklerde bu şekilde işlem yapılır. (Bilgin, 2015)

2.1. Dairesel Verinin Grafikselsel Gösterimi

Dairesel verilerin sunumunda önemli aşamalardan biri grafikselsel gösterimdir. Grafikselsel gösterim gruplanmış ve gruplanmamış veriler için ayrı ayrı yapılmaktadır. Grafikler aracılığı ile veriler hakkında hızlı bir şekilde bilgi sahibi olunabilmektedir.

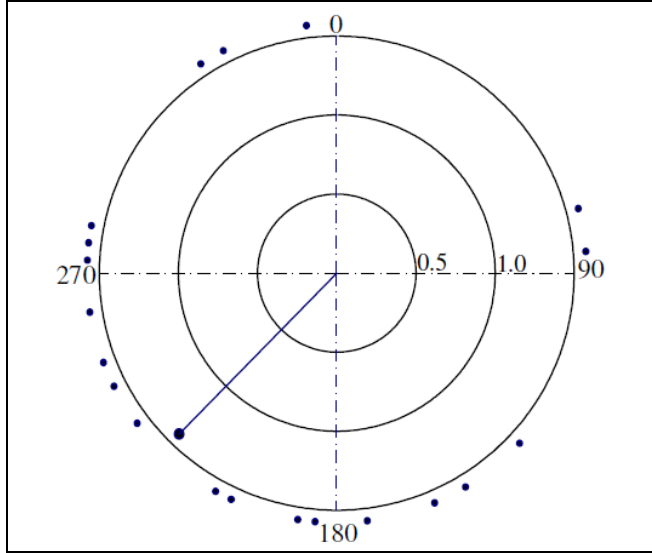
2.1.1. Gruplanmamış veri için grafikselsel gösterim

Dairesel verinin çember etrafında noktalar şeklinde gösterilmesiyle elde edilen grafik türüdür.

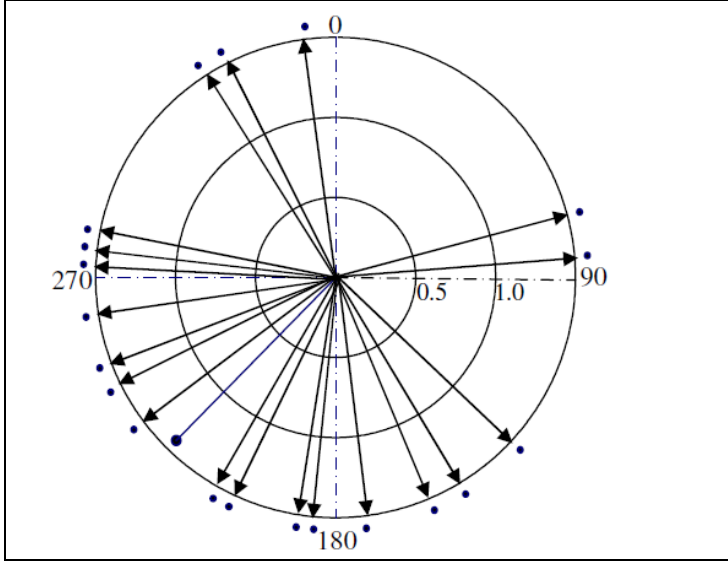
Örnek 1

15/06/2014 ve 07/08/2014 tarihleri arasında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Dursun Odabaş Tıp Fakültesi Hastanesine kalp krizi geçirdiği gerekçesiyle getirilen hastaların varış zamanları

23:29, 14:00, 08:54, 05:42, 16:15, 21:49, 13:44, 17:27, 12:36, 18:12, 05:00, 18:26, 10:29, 22:13, 11:36, 12:23, 18:45, 15:32, 16:36, 9:58 olarak kaydedilmiştir. Bir gün $24 \times 60 = 1440$ dakika olarak ifade edilirse 1 dakikalık bir zaman 0.258'lik bir açıya denk gelmektedir. Buna göre bu ham veriler açı cinsinden yeniden düzenlenirse; 352.25° , 210° , 133.5° , 85.5° , 243.75° , 327.75° , 206° , 261.75° , 189° , 273° , 75° , 276.5° , 157.25° , 333.25° , 174° , 185.75° , 281.25° , 233° , 249° , 149.5° olur. Bu ham veri değerleri birim çember çevresi üzerinde noktaya da gözlem noktaları ile orijini birleştiren birim vektör olarak iki farklı şekilde gösterilmektedir. Şekil 2.1. ve Şekil 2.2.'de verilen grafiklere bakıldığında, verilen tarihler arasında genelde 243.75° ile 281.25° arasında bir yoğunlaşma olduğu görülmekte yani bu tarihte 16:15 ile 18:45 saatleri arasında kalp krizi riskinin arttığı söylenebilir (Yıldırım, 2015).



Şekil 2.3. Dairesel ham veri grafiği (nokta olarak)



Şekil 2.4. Dairesel ham verinin dairesele k artezyen grafiği (vektör olarak)

2.1.2. Gruplanmış veri için grafiksel gösterim

Gruplanmış verilerde grafik çizmek için başlangıçta iki bilgiye ihtiyaç vardır. Bunlardan biri sınıf sayısıdır. Diğeri ise eğer sınıf sayısı bilinmiyorsa sınıf aralığı bilgisidir. Sınıf sayısı biliniyorsa 360° sınıf sayısına bölünerek sınıf aralığı elde edilir. Sınıf aralığı biliniyorsa belirlenen aralığa göre 360° 'ye kadar sınıflar oluşturulur. Belirlenen sınıflarda yer alan veriler çubuklar ile gösterilerek grafik çizilir. Bu şekilde elde edilen grafik dairesele histogram olarak bilinir (Borradaile, 2003).

Örnek 2

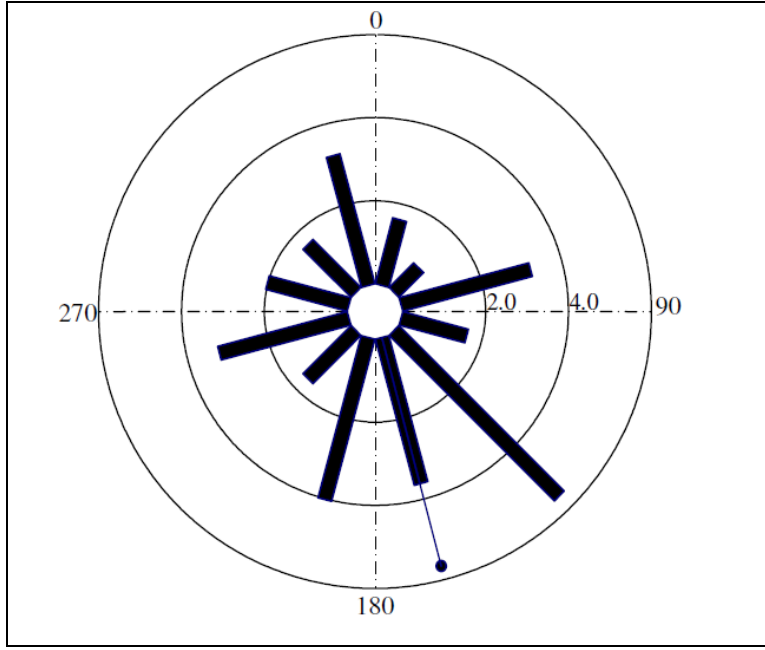
Aşağıda 02/01/2014-27/11/2014 tarihleri arasında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Dursun Odabaş Tıp Fakültesi Hastanesine kalp krizi geçirdiği gerekçesiyle getirilen hastaların varış zamanları derece cinsinden verilmiştir. Buna göre 30° (120 dakika)'lık grup genişliği seçilerek elde edilen dağılım sıklığı Çizelge 2.1.'de verilmiştir (Yıldırım, 2015).

Çizelge 2.1. Kalp krizi geçirdiği gerekçesiyle getirilen hastaların varış zamanlarının derece cinsinden gruplandırılmış verileri

Sınıf sınır değerleri	Sınıf orta değeri	frekans
0,5°-30,5°	15°	4
30,5°-60,5°	45°	2
60,5°-90,5°	75°	8
90,5°-120,5°	105°	4
120,5°-150,5°	135°	14
150,5°-180,5°	165°	9
180,5°-210,5°	195°	10
210,5°-240,5°	225°	4
240,5°-270,5°	255°	8
270,5°-300,5°	285°	5
300,5°-330,5°	315°	4
330,5°-360,5°	345°	8
	Toplam	80

Dairesel histogram

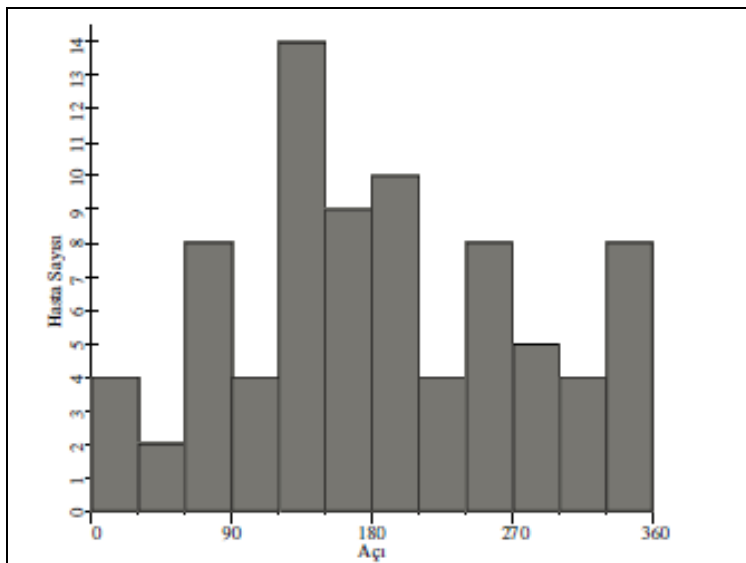
Dairesel histogram doğrusal veriler için kullandığımız histogramın bir çemberin çevresini çevrelemesinden oluşur. 0° ve 360° arasına denk gelen bütün açılar aralıklara ayrılarak her bir gözlem gruplara düşer. Bir grubun göreceli frekans çubuğunun uzunluğu belirlenir. Çubuk alanı grup içindeki frekans ile orantılıdır ve çubuklar bulundukları grubun orta noktalarından ortalanır.



Şekil 2.5. Dairesel histogram

Doğrusal histogram

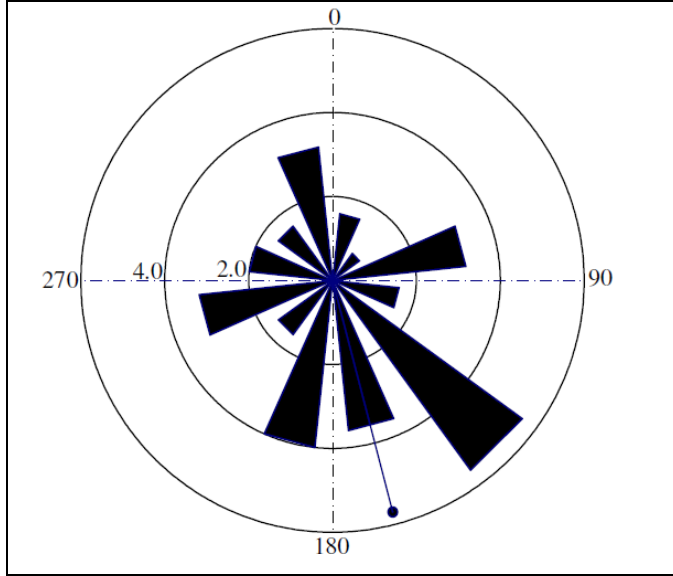
Doğrusal histogramların yorumlanması daha kullanışlıdır. Daire üzerinde uygun bir noktanın seçilmesi ile daireSEL histogram kesilir ve 360° 'lik genişlikteki bir aralık üzerinde daireSEL bir histogramın açılmasıyla doğrusal bir histogram elde edilir (Mardia ve Jupp, 2000).



Şekil 2.6. Doğrusal histogram

Gül şeması

Dairesel histogramın farklı bir gösterimi de çubukların yerine daire dilimleri ile oluşan gül diyagramıdır. Bu tepe noktası merkez olmak üzere sınıf aralığının iki ucu bir yay ile birleştikten sonra her grup bir daire dilimi olarak gösterilir. Her daire dilimi gruptaki frekans ile orantılıdır.



Şekil 2.7. Gül şeması

2.2. Dairesel Olasılık Dağılımları

Olasılık dağılımları istatistik analizinin çok önemli bir parçasını oluşturmaktadır. Eğer dağılımdaki parametrelerin uygun tahmini ile veriler bir olasılık dağılımına uydurulabilirse, parametre tahminiyle belirlenen bir olasılık dağılımının belirli bir biçimi kullanılarak veri seti etkili şekilde özetlenmiş olabilir (Peker, 2002).

Dairesel verilerle ilgili en temel dağılım düzgün dağılımdır. Normal dağılıma benzeyen von Mises dağılımı dairesel verilerde önemli bir role sahiptir. Diğer dağılımlar olarak kardiooid dağılım, sarmal normal dağılım, sarmal Cauchy dağılımı, dairesel normal dağılım kullanılmaktadır.

Yukarıda adı geçen dağılımlar iki parametreye sahiptir. Bunlardan biri konum (merkez) ve ya ortalama yönü, diğeri ise yayılım ölçüsüdür. Normal dağılım için yayılım σ^2 varyansı

ile ölçülmekte, σ^2 değeri 0'a yakın olduğunda dağılım belli bir konum etrafında yoğunlaşmakta, σ^2 değeri büyüdükçe artan bir yayılım göstermektedir. Von Mises dağılımı için yayılım miktarı yoğunlaşma parametresi κ ile ölçülmektedir. Burada $\kappa = 0$ düzgün dağılımı gösterirken κ değeri arttıkça referans yönüne doğru bir yoğunlaşma göstermektedir (Fisher, 1993).

Kesikli dağılımlarda olasılık yığınları sadece sayılabilir sayıdaki yönlerle belirtilirken, sürekli dağılımlar ise $f(\theta)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu ile belirtilmekte ve bu dağılımın aşağıdaki temel özellikleri bulunmaktadır.

- i) $f(\theta) \geq 0; \quad (-\infty, \infty)$
- ii) $\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 1;$
- iii) $f(\theta) = f(\theta + k \cdot 2\pi); \quad (-\infty, \infty);$

f fonksiyonu herhangi bir k tamsayısı için periyodiktir (Gaile ve Burt , 1980).

Dairesel rastgele değişken ya θ , ($0 \leq \theta < 2\pi$) açı cinsinden ya da iki boyutlu birim vector ($x = \cos\theta, y = \sin\theta$) cinsinden gösterilmektedir. Bu bağlamda bir doğru veya düzlem üzerinde bilinen olasılık dağılımlarından çeşitli yöntemlerle birçok dairesel dağılım elde edilmektedir. Genel olarak bu yöntemlerin birkaçı;

- i) Bir doğrusal dağılımın çember etrafında sarılması,
- ii) Maksimum entropi vb. özelliklerin karakterize edilmesi,
- iii) Ofset dağılımlar olarak adlandırılan iki değişkenli doğrusal rastgele değişkenin sadece kendi yönlü bileşenine dönüştürmesi,

şeklinde sıralanabilir (Jammalamadaka ve SenGupta , 2001).

2.2.1. Düzgün dağılım

Çember üzerindeki en temel dağılım düzgün dağılımdır ve sıfır model olarak da isimlendirilmektedir. $\bar{\rho} = 0$ olduğundan $s^2 = 1$ olmakta ve bu durumda özellikle herhangi

bir yöne doğru yoğunlaşma olmadığı bilinmektedir (Mardia ve Jupp , 2000).

Olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (2.4)$$

şeklindedir. Dağılım fonksiyonu;

$$F(\theta) = \frac{\theta}{2\pi}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (2.5)$$

şeklindedir.

Trigonometrik momentler;

Ortalama yön μ tanımsızdır

Ortalama bileşke uzunluk $\bar{\rho}$: 0

Dairesel saçılım δ : ∞

$$\alpha_p: 0, p \geq 1$$

$$\beta_p: 0, p \geq 1 \text{ biçiminde olur(Fisher, 1993).}$$

2.2.2. Kardioid (Kosinüs) dağılım

Kardioid dağılımı tek modlu, iki parametrelili ve ortalama yöne göre de simetrik bir dağılımdır. Olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} [1 + 2\bar{\rho}\cos(\theta - \mu)], \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad |\bar{\rho}| < 1/2 \quad (2.6)$$

şeklindedir. Dağılım fonksiyonu ise;

$$F(\theta) = \frac{\bar{\rho}}{\pi} [\sin(\theta - \mu)] + \frac{\theta}{2\pi}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (2.7)$$

şeklindedir.

Trigonometrik momentler;

Ortalama yön μ

Ortalama bileşke uzunluk $\bar{\rho} \leq 1/2$

Dairesel saçılım $\delta: 1/(2\rho^2)$

$\alpha_p: 0, p \geq 2$

$\beta_p: 0, p \geq 1$ olur. $\rho \rightarrow 0$ biçiminde olurken Kardiod

dağılımında düzgün dağılıma indirgenmiş olmaktadır (Fisher, 1993).

2.2.3. Üçgensel (triangular) dağılım

$\theta = 0$ için simetrik olan bu dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(\theta) = \frac{4 - 2\pi^2 \bar{\rho} \cos|\pi - \theta|}{8\pi}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \bar{\rho} \leq 4/\pi^2 \quad (2.8)$$

olarak tanımlanır ve $\bar{\rho}$, ortalama bileşke uzunluğunu ifade etmektedir.

Trigonometrik momentler;

Ortalama yön $\mu = 0$

Ortalama bileşke uzunluk $\bar{\rho} < 1/2$

Dairesel saçılım $\delta: \frac{4-\bar{\rho}}{8[A_1K]^2}$

$\alpha_p: 0, \forall p$ (*p. kosinüs momenti*)

$\beta_p: 0, \forall p$ (*p. sinüs momenti*)

şeklinde belirtilir (Jammalamadaka ve Sen Gupta, 2001).

2.2.4. Genel sarmal dağılımlar

Doğru üzerinde verilen bir dağılım birim çemberin çevresi etrafına sarılabilir. Yani, gerçek doğru üzerinde herhangi bir rastgele değişken x ile ve buna karşılık gelen birim yarıçaplı bir çember çevresi etrafına sarılı dağılımın rastgele değişkeni x_w ile ifade edilirse;

$$x_w = x[mod 2\pi] \quad (2.9)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

X doğrusal rastgele değişkenin dağılım fonksiyonu $F(x)$, olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ buna karşılık x_w dairesel rastgele değişkenin dağılım fonksiyonu $F(\theta)$ ve olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(\theta)$ ile gösterilirse;

$$f(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\theta + 2\pi k), \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (2.10)$$

$$F(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [F(\theta + 2\pi k) - F(2\pi k)], \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (2.11)$$

eşitlikleri ile ifade edilmektedir (Mardia ve Jupp ,2000).

2.2.5. Sarmal normal dağılım

İki parametrelili, tek modlu ve simetrik bir dağılım olan sarmal normal dağılım, doğru üzerindeki normal dağılımın çember etrafına sarılmasıyla elde edilir. Olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \bar{\rho}^{p^2} \cos p(\theta - \mu) \right], \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \bar{\rho} \leq 1 \quad (2.12)$$

olarak tanımlanır.

Trigonometrik momentler;

Ortalama yön	μ
Ortalama bileşke uzunluk	$\bar{\rho} = e^{\frac{\sigma^2}{2}}$
Dairesel saçılım	$\delta: \frac{1-\bar{\rho}^4}{\bar{\rho}^2}$
	$\alpha_p: \bar{\rho}^{p^2}, p \geq 1$ (<i>p.kosinüs momenti</i>)
	$\beta_p: 0, p \geq 1$ (<i>p.sinüs momenti</i>)

şeklindedir. $\bar{\rho} \rightarrow 0$ iken sarmal normal dağılım, düzgün dağılıma yakınsar (Peker , 2002).

2.2.6. Sarmal cauchy dağılımı

Tek modlu ve simetrik bir dağılım olan dağılım, doğru üzerindeki cauchy dağılımının çember etrafına sarılmasıyla elde edilir. Olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1 - \bar{\rho}^2}{1 + \bar{\rho}^2 - 2\bar{\rho} \cos(\theta - \mu)} \right], \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \bar{\rho} \leq 1 \quad (2.13)$$

olarak tanımlanır ve $\bar{\rho} = e^\sigma$ olarak hesaplanmaktadır.

Trigonometrik momentler;

Ortalama yön	μ
Ortalama bileşke uzunluk	$\bar{\rho} = e^\sigma$
Dairesel saçılım	$\delta: \frac{1-\bar{\rho}^2}{2\bar{\rho}^2}$
	$\alpha_p: \bar{\rho}^p, p \geq 1$ (<i>p. kosinüs moment</i>)
	$\beta_p: 0, p \geq 1$ (<i>p. sinüs moment</i>)

şeklinde belirtilir. $\bar{\rho} \rightarrow 0$ iken sarmal Cauchy dağılımı, düzgün dağılıma yakınsar (Peker, 2002).

2.2.7. Dairesel normal dağılım (Von Mises)

Doğru üzerindeki normal dağılımla benzerliklerini vurgulamak için üretilen simetrik, μ noktasında mod , $\mu+\pi$ noktasında antimod özelliklerine sahip dairese normal dağılımlı bir θ dairese rastgele değişkeni,

$$f(\theta; \mu, \kappa) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} e^{\kappa \cos(\theta - \mu)}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \kappa < \infty, \quad -\pi \leq \mu \leq \pi \quad (2.14)$$

şeklinde gösterilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna ve $VM(\mu, \kappa)$ şeklinde gösterilen dairese normal dağılıma sahiptir. Eşitlikte yer alan $I_0(\kappa)$,

$$I_0(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\kappa \cos(\theta - \mu)} d\theta \quad (2.15)$$

olarak tanımlanan ve μ ortalama yönü, κ yoğunlaşma parametresini göstermek üzere birinci tür ve sıfır sırasında dönüştürülmüş Bessel fonksiyonunu ifade eder.

Langevin (1905) tarafından daha önce ele alınan bu dağılım von Mises (1918) tarafından istatistiksel bir model olarak tanımlanmış ve von Mises atom ağırlıklarının tamsayı değerlerinden sapmaları üzerine yapmış olduğu çalışma sonucunda bu dağılımı elde edilmiştir. Bu dağılımın çeşitli özelliklerini ele alan Gumble ve arkadaşları (1953) dağılımın önemini ve doğru üzerindeki normal dağılıma benzerliğinden dolayı bu dağılımı dairesel normal dağılım olarak adlandırılmıştır. Von Mises dağılımı yoğun olarak çalışılmıştır ve bu dağılım için çeşitli çıkarım teknikleri geliştirilmiştir. Bundan dolayı von Mises dağılımı, dairesel veri setinin tekmodlu örnekleri için en yaygın kullanılan simetrik tekmodlu bir dağılımdır (Jammalamadaka ve SenGupta, 2001).

Trigonometrik momentler;

Ortalama yön	μ
Ortalama bileşke uzunluk	$\bar{\rho} = A_1(\kappa)$
Dairesel saçılım	$\delta: [\kappa A_1(\kappa)]^{-1}$
	$\alpha_p: A_p(\kappa), p \geq 1$ (<i>p. kosinüs momenti</i>)
	$\beta_p: 0, p \geq 1$ (<i>p. sinüs momenti</i>)

olarak tanımlanır (Peker, 2002).

2.3. Dairesel Verilerde Temel istatistikler

Dairesel veri, açı veya birim çemberin çevresindeki noktalarla gösterilebilir. Bununla O orijinli ve O' ya göre birbirine dik X,Y eksenleri ile dik koordinat sistemi kurulabilir. Dik koordinatlar ile uzayda veri noktalarının yeri tespit edilebilir. Bu nedenle kutupsal koordinatlar daha kullanışlıdır. Çünkü sadece birim çember üzerinde değil düzlem üzerinde de noktaların yerini belirlemek için kullanılabilir. Düzlemdeki herhangi bir P noktasının konumu, dik koordinatlar cinsinden (X, Y) olarak veya r orijine olan mesafesi

ve θ 'nin yön olduğu kutupsal koordinat cinsinden (r, θ) olarak gösterilebilir.

Kutupsal koordinatların dik koordinatlara dönüşümü kolaydır. Bu dönüşümler sinüs ve kosinüs trigonometrik fonksiyonları ile yapılır. Dik koordinatlar;

$$X = r \cos \theta, \quad Y = r \sin \theta \quad (2.16)$$

ile bulunabilir (Jammalamadaka ve SenGupta,2001 ; Maling, 1992).

2.3.1. Dairesel ortalama yön

Dairesel verilerden elde ettiğimiz veriler için doğrusal verilerde kullandığımız aritmetik ortalama yön hesaplanırken kullanılamaz. Bunun nedeni açıların çember üzerindeki konumlarının ortalama yönü etkilemesidir. Örneğin çember üzerinde 10° ile 350° nin aritmetik ortalaması 180° iken dairesele veri olduğu göz önünde bulundurulursa gerçek ortalama yön 0° 'dir. O yüzden ki aritmetik ortalama hatalı sonuçlar verdiği için dairesele verilerde kullanılamaz. Dairesel verilerde ortalama yön farklı yöntemlerle hesaplanır.

Herhangi bir dairesele veri için ortalama yön; A_i , birim çemberde θ_i ($i = 1, \dots, n$) açısına sahip herhangi bir nokta olmak üzere; $\theta_1, \dots, \theta_n$ açılarının ortalama yönü $\bar{\theta}$ ile temsil edilir ve $\overline{OA_1}, \dots, \overline{OA_n}$ birim vektörlerinin bileşkesinin yönü olarak tanımlanır (Peker,2002).

A_i , noktalarının ağırlık merkezleri (C, S) ;

$$C = \sum_{i=1}^n \cos \theta_i, \quad S = \sum_{i=1}^n \sin \theta_i \quad (2.17)$$

ve ortalama ağırlık merkezleri $(\bar{C}, \bar{S})$;

$$\bar{C} = \frac{\sum_{i=1}^n \cos \theta_i}{n}, \quad \bar{S} = \frac{\sum_{i=1}^n \sin \theta_i}{n} \quad (2.18)$$

olmak üzere, $\theta_1, \dots, \theta_n$ açılarının ortalama yönü $(\bar{\theta})$ ile gösterilir ;

$$\bar{\theta} = \arctan\left(\frac{S}{C}\right) \quad (2.19)$$

ve arctanjantın tanımına bağlı olarak daha açık bir ifade ile;

$$\bar{\theta} = \arctan\left(\frac{S}{C}\right) = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{S}{C}\right) & , S \geq 0, C > 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{S}{C}\right) + \pi & , C < 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{S}{C}\right) + 2\pi & , S < 0, C \geq 0 \\ \pi/2 & , S > 0, C = 0 \\ \text{tanımsız} & , S = 0, C = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

şeklinde tanımlanmaktadır (Otieno, 2002).

2.3.2. Dairesel bileşke uzunluğu ve ortalaması

Bileşke vektör uzunluğu R olmak üzere;

$$R = \sqrt{C^2 + S^2} , R \in [0, n] \quad (2.21)$$

olarak veya ortalama yön biliniyorsa

$$R = \frac{C}{\cos\bar{\theta}} , R = \frac{S}{\sin\bar{\theta}} \quad (2.22)$$

olarak hesaplanır. Bileşke uzunluğunun hesaplanmasından yola çıkarak ortalama bileşke uzunluğu,

$$\bar{R} = \frac{R}{n} , \bar{R} \in [0,1] \quad (2.23)$$

olarak hesaplanır (Mardia ve Jupp , 2000)

2.3.3. Yoğunlaşma parametresi

Yoğunlaşma parametresi, von Mises dağılımında kullanılan önemli bir parametredir ve bu

parametre dairesel verinin ortalama yön ve mod yönü etrafındaki yoğunlaşmasını ifade etmektedir. κ ile gösterilir. En çok olabilirlik tahmin edicisi;

$$A_1(\kappa) = \frac{R}{n} = \bar{R} \quad (2.24)$$

eşitliğinin çözümünden elde edilir.

$$A_1(\kappa) = \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} \quad (2.25)$$

şeklinde dönüştürülmüş $I_1(\kappa)$ birinci tür birinci sıra , $I_0(\kappa)$ birinci tür sıfırıncı sıra olmak üzere iki Bessel fonksiyonunun birbirine oranını ifade etmektedir. κ 'nın en çok olabilirlik tahmini;

$$\hat{\kappa} = A_1^{-1}(\bar{R}) \quad (2.26)$$

olarak verilir. Buradan $\hat{\kappa}$,

$$\hat{\kappa} = \begin{cases} 2\bar{R} + \bar{R}^3 + \frac{5\bar{R}^5}{6} & , \quad \bar{R} \leq 0,53 \\ -0,4 + 1,39\bar{R} + \frac{0,43}{1-\bar{R}} & , \quad 0,53 < \bar{R} \leq 0,85 \\ \frac{1}{\bar{R}^3 - 4\bar{R}^2 + 3\bar{R}} & , \quad \bar{R} > 0,85 \end{cases} \quad (2.27)$$

eşitliği ile hesaplanır.

2.3.4. Dairesel varyans

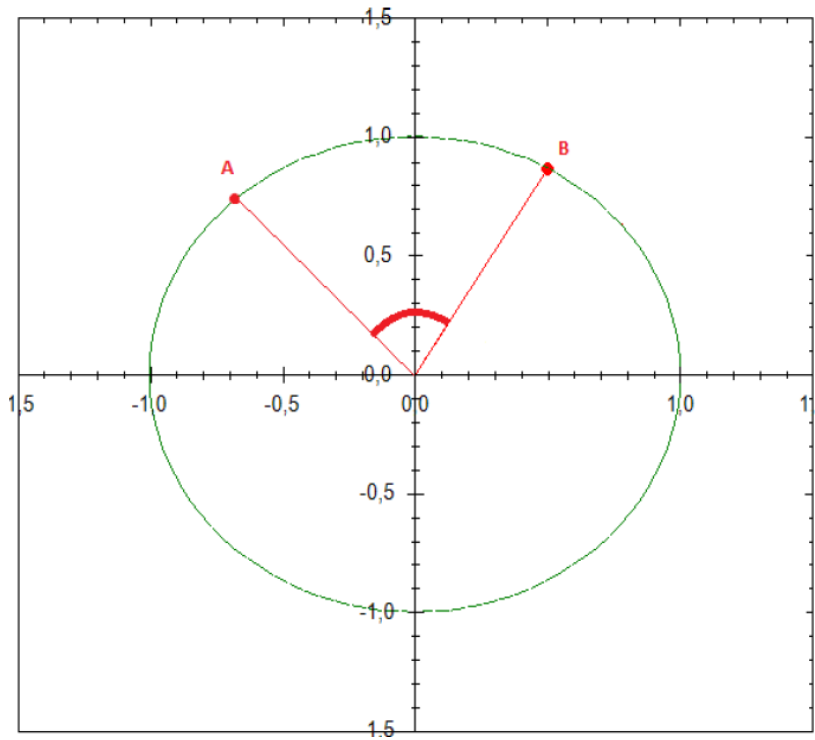
Bileşke vektör sadece ortalama yönü değil aynı zamanda gözlemlerin çember etrafında nasıl dağıldığını veren bir ölçüdür. Bileşke vektörün yönü $\bar{\theta}$ gözlemlerin bir ortalama yönünü gösterirken boyu R ise gözlemlerin merkez etrafında ne derece yoğunlaştığını gösteren tek modlu veriler için kullanışlı bir ölçüdür. Daha önceden belirtildiği gibi eğer gözlemlerin tümü aynı yönde büyük bir yığılma gösteriyorsa R 'nin büyüklüğü n kadar büyük bunun aksine eğer gözlemlerin tümü çember üzerinde düzgün bir şekilde yayılmışsa yani veriler herhangi bir yöne doğru yığılma göstermiyorsa R sıfır kadar küçük olabilir. Bu bilgiler ortalama etrafında bir yayılım ölçüsü olan varyans ile dairesel verilerde bileşke

vektör uzunluğu arasında yakın bir ilişkisi olduğunu göstermektedir (Berens,2009).

A ve B birim çember üzerinde sırasıyla α ve β açılara sahip iki gözlem olsun. Bu açılar arası uzaklık;

$$d_0(\alpha, \beta) = \min(\alpha - \beta, 2\pi - (\alpha - \beta)) = \pi - |\pi - |\alpha - \beta|| \quad (2.28)$$

ile hesaplanır(Mardia ve Jupp,2000).



Şekil 2.8. İki nokta arası uzaklık

Diğer yandan A_i , θ_i açılı bir nokta ve α sabit olsun. $\alpha = 0$ olmak üzere A çember üzerinde buna karşılık gelen nokta olsun. A ve A_i arasındaki dairesel uzaklık (ξ) ile gösterilir ve bu, OA_i 'nin OA ile yaptığı iki açıdan küçük olanıdır. Bu uzaklık aşağıdaki gibidir:

$$\xi_i = \min(\theta_i, 2\pi - \theta_i) = \pi - |\pi - \theta_i| \quad (2.29)$$

Buna göre birim çember her zaman $[0, \pi]$ aralığında olacağı bilinmektedir. $(1 - \cos \xi_i)$, ξ_i 'nin monoton artan bir fonksiyonu olduğu için tüm gözlemlerin bu A noktasından olan uzaklıklarının ortalaması;

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n (1 - \cos \xi_i)}{n} \quad (2.30)$$

ile ifade edilir ve bu değer saçılım ölçüsüdür. Sıfır yönü α ile değiştirilirse,

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n 1 - \cos (\theta_i - \alpha)}{n} \quad (2.31)$$

olarak elde edilir. Bu uzaklığı minimum yapan değeri bulmak için α 'ya göre türev alınıp sıfıra eşitlenirse $\alpha = \bar{\theta}$ için minimum değerde olduğu görülür. $\bar{\theta}$ etrafındaki saçılım ölçüsü V ile gösterilir,

$$V = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (\cos \theta_i - \bar{\theta})}{n} \quad (2.32)$$

$$R = \frac{C}{\cos \bar{\theta}} = \frac{S}{\sin \bar{\theta}} \quad (2.33)$$

eşitliği ile dairesel varyans da buradan,

$$\begin{aligned} V &= 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (\cos \theta_i \cos \bar{\theta} + \sin \theta_i \sin \bar{\theta})}{n} \\ V &= 1 - \frac{\cos \bar{\theta} \sum_{i=1}^n \cos \theta_i + \sin \bar{\theta} \sum_{i=1}^n \sin \theta_i}{n} \\ V &= 1 - \frac{C \cos \bar{\theta} + S \sin \bar{\theta}}{n} \\ V &= 1 - \frac{R \cos \bar{\theta} \cos \bar{\theta} + R \sin \bar{\theta} \sin \bar{\theta}}{n} \\ V &= 1 - \frac{R}{n} \\ V &= 1 - \bar{R} \end{aligned} \quad (2.34)$$

olarak bulunur. Dairesel varyans küçüldükçe dağılım homojenleşir ve $[0,1]$ aralığında değer alır. n birimlik dairesel gözlem ortalama yön etrafında kümelenmiş ise ortalama bileşke uzunluğu 1'e yakın ve dolayısıyla dairesel varyans da 0'a yakın bir değer alacaktır.

Ayrıca sıfır yönü değiştirilse bile dairesel varyansın sabit kalması önemli bir özelliktir (Peker,2002).

2.3.5. Dairesel standart sapma

Doğru üzerindeki varyans $[0, \infty]$ aralığında değer alırken dairesel varyans $[0,1]$ aralığında değerler almaktadır. Dairesel standart sapmanın uygun bir dönüşümü,

$$s = \frac{180^\circ}{\pi} \sqrt{[-2 \ln(1 - s^2)]} \quad (2.35)$$

yada

$$s = \frac{180^\circ}{\pi} \sqrt{[-2 \ln \bar{R}]}$$

şeklinde tanımlanmaktadır(Falta,2011).

Dairesel varyansın küçük değerleri için,

$$s = \frac{180^\circ}{\pi} \sqrt{2(1 - \bar{R})} \quad (2.36)$$

biçiminde yeniden düzenlenmektedir (Mahan,1991).

2.3.6. Dairesel saçılım ölçüsü ve standart hata

Yayılm ölçülerinden biri olan ve güven aralığı hesaplamalarında, farklı örneklem ortalama yönlerinin karşılaştırılmasında veya birleştirilmesinde sıkça kullanılan dairesel saçılım ölçüsü,

$$\delta = \frac{1 - \rho_2}{2\bar{R}^2} \quad (2.37)$$

olarak tanımlanır ve eşitlikte yer alan merkezi ikinci trigonometric moment ise;

$$\rho_2 = \frac{\sum_{i=1}^n \cos 2(\theta_i - \bar{\theta})}{n} \quad (2.38)$$

olarak hesaplanmaktadır. Dairesel saçılım ölçüsünde olduğu gibi güven aralıklarının hesaplanmasında önemli rol oynayan ortalama yönünü dairesel standart hatası,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\delta}{n}} \quad (2.39)$$

olarak ifade edilir(Peker,2002).

2.3.7. Çarpıklık ve basıklık ölçüleri

Simetrisinin bir ölçüsü olarak, dairesel çarpıklık,

$$\gamma_1 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin 2(\theta_i - \bar{\theta})}{(1 - \bar{R})^{3/2}} \quad (2.40)$$

olarak hesaplanmaktadır.

Sivrililiğin bir ölçüsü olarak dairesel basıklık ise,

$$\gamma_2 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos 2(\theta_i - \bar{\theta}) - \bar{R}^4}{(1 - \bar{R})^2} \quad (2.41)$$

biçiminde hesaplanmaktadır (Pewsey ve ark., 2013).

2.3.8. Dairesel medyan yönü

Doğrusal verilerdeki gibi hesaplanmakta ve $\tilde{\theta}$ ile gösterilmektedir. Bu gözlem, veri setini ikiye bölen açıya sahiptir. Veri setindeki gözlem sayısı tek sayıda ise, açılar sıralandıktan sonra ortanca açı medyan yönüne sahiptir. Eğer veri setindeki gözlem sayısı çift sayıda ise ortadaki iki verinin orta noktası medyan yönü olarak alınır. Burada dikkat edilmesi gereken 2 önemli nokta vardır. Bunlar;

- i) Tüm gözlemlerin yarısı $[\tilde{\theta}, \tilde{\theta} + \pi]$ aralığında kalmalı,
- ii) Gözlemlerin büyük çoğunluğu $\tilde{\theta}$ ye $\tilde{\theta} + \pi$ den daha yakın olmalıdır (Mardia ve Jupp,2000).

Gruplanmış veri seti için medyan yönü,

$$\tilde{\theta} = l + \frac{\binom{n}{2} - f_0}{f_{+1} - f_0} * h \quad (2.42)$$

eşitliği ile hesaplanır. Bu eşitlikteki değerler,

l : Medyanın bulunduğu sınıfının alt sınırını,

f_0 : Medyanın bulunduğu sınıfın frekansını,

f_{+1} : Medyanın bulunduğu sınıftan bir sonraki sınıfın frekansını,

h : Sınıf aralığını

ifade etmektedir(Peker,2002).

2.3.9. Dairesel mod yönü

Verinin en çok yoğunlaştığı yön anlamına gelen örneklem mod yönü $\check{\theta}$ ile gösterilmektedir. Modu bulmak için doğrusal verilerde kullanılan yöntemin aynısı dairesel veriler içinde geçerlidir. Bu nedenle dağılım merkezinde maksimum yoğunlaşma meydana gelmiş olur. Gruplandırılmış veriler için mod yönü,

$$\check{\theta} = l + \frac{f_0 - f_{-1}}{2f_0 - f_{-1} - f_{+1}} * h \quad (2.43)$$

eşitliği ile bulunur. Bu eşitlikteki değerler,

l : mod sınıfının alt sınırı,

f_0 : mod sınıfının sıklığı,

f_{-1} : mod sınıfından bir önceki sınıfın sıklığı,

f_{+1} : mod sınıfından bir sonraki sınıfın sıklığı,

h : sınıf aralığının uzunluğunu ifade eder (Gail ve Burt,1980; Peker ve Bacanlı, 2004).

2.4. Dairesel Normal Dağılımda İstatistiksel Çıkarım İşlemleri

Çember üzerindeki dağılımlardan sonuç çıkarmak amacıyla incelememiz gereken tek, iki ve çok örneklem durumunda parametrelerin bilinip bilinmemesine göre ortalama yön ve yoğunlaşma parametresi için test istatistikleri hesaplanmakta ve güven aralıkları saptanmaktadır. İlgili testler uygulandığında, bunlara uygun güven aralıklarından örneklem koşullarının ve parametre tahminlerinin kullanılabilirliklerine göre hipotezler kurulup, test istatistiği hesaplanmaktadır.

2.4.1. Bir örneklem için ortalama yön testleri

Ortalama yön μ_0 ise;

$$\bar{C} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(\theta_i - \mu_0) \quad , \quad \bar{S} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin(\theta_i - \mu_0)$$

şeklinde kullanılmaktadır.

Hesaplamalar dairesel veriler üzerinden yapılmaktadır. Bir örneklem için ortalama yön testleri aşağıda verilmiştir.

Olabilirlik oran testi;

Yoğunlaşma parametresi bilindiğinde,

a. Hipotezler kurulur

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

$$H_1: \mu > \mu_0 \text{ veya } \mu < \mu_0 \quad \text{tek yönlü hipotez}$$

b. Kritik değer X^2 tablosundan belirlenir

c. Test istatistiği değeri hesaplanır

$$x_h^2 = 2n\kappa(\bar{R} - \bar{C}) \quad (2.44)$$

d. Karşılaştırma

$$X_h^2 > X_c^2 \Rightarrow H_0 \quad \text{hipotezi red, } H_1 \text{ hipotezi kabul edilir}$$

$$X_h^2 < X_c^2 \Rightarrow H_0 \quad \text{hipotezi kabul edilir.}$$

şeklinde yapılmaktadır (Stephens, 1962).

Yoğunlaşma parametresi bilinmediğinde,

a. Hipotezler kurulur

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0 \quad \text{iki yönlü hipotez}$$

$$H_1: \mu > \mu_0 \text{ veya } \mu < \mu_0 \quad \text{tek yönlü hipotez}$$

b. Kritik değer X^2 tablosundan belirlenir

c. Test istatistiği değeri hesaplanır

$$x_h^2 = 2n(\hat{R}\bar{R} - \hat{R}\bar{C} - \log I_0\hat{K} + \log I_0\tilde{K}) \quad (2.45)$$

şeklinde olmasına rağmen Eşitlik (2.45)'deki hesaplanan zorluklardan dolayı aşağıdaki gibi,

$$x_h^2 \cong 2n\hat{K}(\bar{R} - \bar{C}) \quad (2.46)$$

hesaplanmaktadır. Örnek hacmi 5’den büyük olduğu durumlarda olabilirlik oran testi Upton (1973) tarafından;

$$X_h^2 \cong \frac{4n(\bar{R}^2 - \bar{C}^2)}{2 - \bar{C}^2}, \quad \bar{C} \leq 2/3 \quad (2.47)$$

$$X_h^2 = \frac{4n^3}{n^2 + (n\bar{C})^2 + 3n} \log\left(\frac{1 - (\bar{C})^2}{1 - (\bar{R})^2}\right), \quad \bar{C} > 2/3 \quad (2.48)$$

olarak verilmektedir.

d. Karşılaştırma

$X_h^2 > X_c^2 \Rightarrow H_0$ hipotezi red, H_1 hipotezi kabul edilir

$X_h^2 < X_c^2 \Rightarrow H_0$ hipotezi kabul edilir.

2.4.2. Tek örneklem olduğu durumda ortalama yön için güven aralığı

Yoğunlaşma parametresi biliniyorsa ortalama yöne ait güven aralığının alt ve üst sınırları $(1-\alpha)$ güven seviyesinde;

$$\bar{\theta} \pm \cos^{-1} \left(\frac{1 - X_{1;\alpha}^2}{2\kappa R} \right) \quad (2.49)$$

eşitliği ile hesaplanmaktadır.

Yoğunlaşma parametresi bilinmediğinde ortalama yöne ait güven aralığı için alt ve üst sınırlar α anlamlılık seviyesinde saptanması için Eşitlik (2.49) da bulunan yoğunlaşma parametresinin yerine tahmin edicisi kullanılarak;

$$\bar{\theta} \pm \cos^{-1} \left(\frac{1 - X_{1;\alpha}^2}{2\hat{\kappa}R} \right) \quad (2.50)$$

olarak verilmektedir (Mardia ve Jupp, 2000). Genel olarak güven aralığının alt ve üst sınırları;

$$\bar{\theta} \pm \sin^{-1} \left(\frac{z_{\alpha}}{2} * \sigma \right) \quad (2.51)$$

eşitliği ile hesaplanmaktadır.

2.4.3. Bir örneklem için yoğunlaşma parametresi için hipotez testi

a. Hipotezler kurulur

$$H_0: \kappa = \kappa_0$$

$$H_1: \kappa \neq \kappa_0 \text{ iki yönlü hipotez}$$

$$H_1: \kappa > \kappa_0 \text{ veya } \kappa < \kappa_0 \text{ tek yönlü hipotez}$$

b. Kritik değer X^2 tablosundan belirlenir

c. Test istatistiği hesaplanır

$$x_h^2 = 2n[(\hat{\kappa} - \kappa_0)\bar{R} - \log I_0 \hat{\kappa} + \log I_0 \kappa_0] \quad (2.52)$$

Ayrıca Watson ve Williams (1956) tarafından bu test istatistiği için;

$$X_h^2 = \frac{2n(1 - \bar{R})}{\frac{1}{\kappa_0} + \frac{3}{8\kappa_0^2}} \quad (2.53)$$

formülünün de kullanılabileceği belirtilmiştir.

d. Karşılaştırma

$$X_h^2 > X_c^2 \Rightarrow H_0 \text{ hipotezi red, } H_1 \text{ hipotezi kabul edilir}$$

$$X_h^2 < X_c^2 \Rightarrow H_0 \text{ hipotezi kabul edilir.}$$

Olabilirlik oran testinde alternatif hipotez $\kappa > \kappa_0$ biçiminde kurulursa $\bar{R}$ 'nin büyük değerleri için H_0 hipotezi reddedilirken alternatif hipotez $\kappa < \kappa_0$ biçiminde kurulursa $\bar{R}$ 'nin küçük değerleri için H_0 hipotezi reddedilmektedir (Mardia ve Jupp, 2000).

2.4.4. Tek örneklem olduğu durumda yoğunlaşma parametresi için güven aralığı

Yoğunlaşma parametresine ait güven aralıklarının alt ve üst sınırları α anlamlılık seviyesinde;

- İki taraflı güven sınırları ($\kappa_A, \kappa_{\bar{U}}$)

$$a = \frac{n - R}{X_{n-1; 1-a/2}^2} \quad (2.54)$$

$$b = \frac{n - R}{X_{n-1; a/2}^2} \quad (2.55)$$

olmak üzere, yoğunlaşma parametresi alt sınır değeri

$$\kappa_A = \frac{1 + \sqrt{1 + 3a}}{4a} \quad (2.56)$$

ve üst sınır değeri de

$$\kappa_{\bar{U}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 3b}}{4b} \quad (2.57)$$

ile hesaplanmaktadır. Böylece güven aralığı;

$$\left[\frac{1 + \sqrt{1 + 3a}}{4a}, \frac{1 + \sqrt{1 + 3b}}{4b} \right]$$

olarak bulunmaktadır (Mardia ve Jupp, 2000).

- Tek taraflı α anlamlılık seviyesinde güven sınırları ($0, \kappa_{\bar{U}}$)

$$b = \frac{n - R}{X_{n-1; a}^2} \quad (2.58)$$

olmak üzere, bu güven aralığı;

$$\left[0; \frac{1 + \sqrt{1 + 3b}}{4b}\right]$$

olarak belirlenmektedir.

- Tek taraflı $(1-\alpha)$ anlamlılık seviyesinde güven sınırları (κ_A, ∞)

$$a = \frac{n - R}{X_{n-1;1-a}^2} \quad (2.59)$$

olmak üzere, bu güven aralığı;

$$\left[\frac{1 + \sqrt{1 + 3a}}{4a}; \infty\right]$$

olarak belirlenmektedir (Fisher,1993).

2.4.5. İki örneklem için ortalama yön testleri

İki örneklem olduğunda ortalama yönlerin birbirlerine eşit olup olmadığı bilinmek istenebilir. $\theta_{11}, \theta_{12}, \dots, \theta_{1n_1}$ ve $\theta_{21}, \theta_{22}, \dots, \theta_{2n_2}$ sırasıyla $VM(\mu_1, \kappa_1)$ ve $VM(\mu_2, \kappa_2)$ von Mises dağılımlarından n_1 ve n_2 hacimli iki rastgele iki örnek olsun. Bu örneklemelerin ortalama yönleri $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2$ ve bileşke uzunlukları da R_1 ve R_2 ile gösterilsin. Buna göre birleştirilmiş örneklemin ortalama yönü $\bar{\theta}$ ve bileşke uzunluğu da R ile ifade edilsin.

- Yoğunlaşma parametreleri biliniyor ve eşit olduğu durumlarda ortalama yönlerin eşitliği testinin adımları aşağıdadır;

a. Hipotezler kurulur

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \quad \text{iki yönlü hipotez}$$

$$H_1: \mu_1 > \mu_2 \text{ veya } \mu_1 < \mu_2 \quad \text{tek yönlü hipotez}$$

b. Kritik cetvel değeri X^2 tablosundan belirlenir

c. Test istatistiği hesaplanır

$$X_h^2 = 2\kappa(R_1 + R_2 - R) \quad (2.60)$$

d. Karşılaştırma

$$X_h^2 > X_c^2 \Rightarrow H_0 \text{ hipotezi red, } H_1 \text{ hipotezi kabul edilir}$$

$$X_h^2 < X_c^2 \Rightarrow H_0 \text{ hipotezi kabul edilir.}$$

Eşitlik (2.60) de yer alan R_1, R_2 ve R değerleri Eşitlik (2.21) yardımıyla bulunup test istatistiği hesaplandıktan sonra bu değer X_c^2 tablo değeri ile karşılaştırılıp hipotez red veya kabul edilmektedir (Mardia ve Jupp, 2000).

- Yoğunlaşma parametreleri bilinip ve eşit olmadığı durumlarda ortalama yönlerin eşitliği testi;

Yukarıdakinden farklı test istatistiğinin değeri;

$$X_h^2 = 2(R_1\kappa_1 + R_2\kappa_2 - R) \quad (2.61)$$

ile hesaplanmakta ve hesaplanan bu değer ile kritik değer ile karşılaştırılmaktadır (Fisher, 1993).

- Yoğunlaşma parametreleri bilinmediği ve yoğunlaşma parametrelerinin eşit olduğu durumlarda ortalama yönlerin eşitliği testinin adımları;

Yoğunlaşma parametreleri bilinmediğinde yoğunlaşma parametrelerinin yerine Eşitlik (2.13) yardımıyla bunların tahminleri ($\hat{R}$) bulunup kullanılmaktadır. Bulunan bu

tahminciler ($\hat{K}$) birbirine eşit ise bu tahmincilerin durumuna göre test istatistiği eğer $\hat{K} \geq 2$ ise;

$$F_h = \frac{(n-2)(R_1 + R_2 - R)}{n - (R_1 + R_2)} \quad (2.62)$$

şeklinde (Wheeler ve Watson, 1964) ve eğer $1 < \hat{K} < 2$ ise;

$$F_h = \left(1 + \frac{3}{8\hat{K}}\right) \left[\frac{(n-2)(R_1 + R_2 - R)}{n - (R_1 + R_2)} \right] \quad (2.63)$$

şeklinde hesaplanmaktadır.

a. Hipotezler kurulur

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \quad \text{iki yönlü hipotez}$$

$$H_1: \mu_1 > \mu_2 \text{ veya } \mu_1 < \mu_2 \quad \text{tek yönlü hipotez}$$

b. Kritik değer F tablosundan belirlenir

c. Test istatistiği hesaplanır

Yoğunlaşma parametresi tahmincisinin ($\hat{K}$) durumuna göre Eşitlik (2.62) yada Eşitlik (2.63) den uygun olanını kullanarak test istatistiği hesaplanır.

d. Karşılaştırma

$$F_h > F_c \Rightarrow H_0 \text{ hipotezi red, } H_1 \text{ hipotezi kabul edilir}$$

$$F_h < F_c \Rightarrow H_0 \text{ hipotezi kabul edilir.}$$

yapılmaktadır. Test istatistiği ile tablo değeri karşılaştırılarak hipotezin reddine yada kabulüne karar verilmektedir (Davis, 2002; Trauth, 2007).

Yoğunlaşma parametreleri bilinmiyor, yoğunlaşma parametre tahminleri birbirine eşit değil ve $n_i \geq 25$ ve $\widehat{\kappa}_1$ ve $\widehat{\kappa}_2 > 2$ ise ortalama yönlerin eşitliği testi

a. Hipotezler kurulur

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \quad \text{iki yönlü hipotez}$$

$$H_1: \mu_1 > \mu_2 \text{ veya } \mu_1 < \mu_2 \quad \text{tek yönlü hipotez}$$

b. Kritik değer X^2 tablosundan belirlenir

c. Test istatistiği hesaplanır

$$X_h^2 = 2(R_1\widehat{\kappa}_1 + R_2\widehat{\kappa}_1 - R) \quad (2.64)$$

d. Karşılaştırma

$$X_h^2 > X_c^2 \Rightarrow H_0 \text{ hipotezi red, } H_1 \text{ hipotezi kabul edilir}$$

$$X_h^2 < X_c^2 \Rightarrow H_0 \text{ hipotezi kabul edilir.}$$

Eşitlik (2.64) de ki $\widehat{\kappa}_1$ ve $\widehat{\kappa}_2$ değerleri Eşitlik (2.27) ile ve R_1 , R_2 ve R değerleri ise Eşitlik (2.21) yardımıyla hesaplanmaktadır. (Fisher,1993).

2.4.6. İki örneklem olduğu durumlarda ortalama yön için güven aralığı

Ortalama yöne ait güven aralığının alt ve üst sınırları α anlamlılık seviyesinde belirlenmesi için her iki örneklemin ortalama yön farkları

$$d = \bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2 \quad (2.65)$$

ile hesaplanarak güven aralığı;

$$[d + \pi - v; d + \pi + v] \quad (2.66)$$

olarak belirlenmektedir.

2.4.7. İki örneklem olduğu durumlarda yoğunlaşma parametresi testleri

İki örneklem olduğu durumlarda yoğunlaşma parametresi için üç farklı durumda olasılık oran test istatistiği hesaplanmaktadır.

i) $\bar{R} < 0.45$ durumunda;

a. Hipotezler kurulur

$$H_0: \kappa_1 = \kappa_2$$

$$H_1: \kappa_1 \neq \kappa_2 \quad \text{iki yönlü hipotez}$$

$$H_1: \kappa_1 > \kappa_2 \text{ veya } \kappa_1 < \kappa_2 \quad \text{tek yönlü hipotez}$$

b. Kritik değer Z tablosundan belirlenir

c. Test istatistiği hesaplanır

$$Z_h = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\frac{g_1(2\bar{R}_1) - g_2(2\bar{R}_2)}{\sqrt{\frac{1}{n_1-4} + \frac{1}{n_2-4}}} \right] \quad (2.67)$$

d. Karşılaştırma

$$|Z_h| > Z_c \Rightarrow H_0 \text{ hipotezi red, } H_1 \text{ hipotezi kabul edilir}$$

$$|Z_h| < Z_c \Rightarrow H_0 \text{ hipotezi kabul edilir.}$$

Eşitlik (2.67) de yer alan $g_1(2\bar{R}_i)$ değeri,

$$g_1(2\bar{R}_i) = \sin^{-1} \left(2 \sqrt{\frac{3}{8}} \bar{R}_i \right)$$

ile hesaplanmaktadır (Gaile ve Burt,1980).

ii. $0.45 < \bar{R} < 0.70$ durumunda

a. Hipotezler kurulur

$$H_0: \kappa_1 = \kappa_2$$

$$H_1: \kappa_1 \neq \kappa_2 \quad \text{iki yönlü hipotez}$$

$$H_1: \kappa_1 > \kappa_2 \text{ veya } \kappa_1 < \kappa_2 \quad \text{tek yönlü hipotez}$$

b. Kritik değer Z tablosundan belirlenir

c. Test istatistiği hesaplanır

$$Z_h = \left[\frac{g_2(\bar{R}_1) - g_2(\bar{R}_2)}{0.893 \sqrt{\frac{1}{n_1-3} + \frac{1}{n_2-3}}} \right] \quad (2.68)$$

d. Karşılaştırma

$|Z_h| > Z_c \Rightarrow H_0$ hipotezi red, H_1 hipotezi kabul edilir

$|Z_h| < Z_c \Rightarrow H_0$ hipotezi kabul edilir.

Eşitlik (2.68) de yer alan $g_2(\bar{R}_i)$ değeri,

$$g_2(\bar{R}_i) = \sinh^{-1} \left(\frac{\bar{R}_i - 1.089}{0.258} \right)$$

ile hesaplanmaktadır (Gaile ve Burt,1980).

$\bar{R} > 0.70$ durumunda izlenecek adımlar:

a. Hipotezler kurulur

$$H_0: \kappa_1 = \kappa_2$$

$H_1: \kappa_1 \neq \kappa_2$ iki yönlü hipotez

$H_1: \kappa_1 > \kappa_2$ veya $\kappa_1 < \kappa_2$ tek yönlü hipotez

b. Kritik değer F tablosundan belirlenir

c. Test istatistiği hesaplanır

$$F_h = \frac{\frac{n_1 - R_1}{n_1 - 1}}{\frac{n_2 - R_2}{n_2 - 1}} \quad (2.69)$$

d. Karşılaştırma

$$F_h > F_{n_1-1, n_2-1; \alpha/2} \text{ veya}$$

$$F_h < \frac{1}{F_{n_2-1, n_1-1; \alpha/2}} \Rightarrow H_0 \text{ hipotezi kabul edilir.}$$

Karşılaştırma kritik değer ve test istatistiğinin değeri ile yapılmaktadır (Stephens,1972; Gaile ve Burt, 1980).

2.4.8. Çok örneklem için ortalama yön testleri

Çok örneklem olduğu durumlarda bu örneklemelerin ortalamaları arasında fark olup olmadığı belirlenmeye çalışılır. Ortalamaların eşitliğinin testi için bir yaklaşık çoklu örneklem testi önerilmiş ve bu test tek yönlü varyans analizine benzemektedir.

$i = 1, 2, \dots, q$ ve $j = 1, 2, \dots, n$ için $\theta_{11}, \theta_{12}, \dots, \theta_{qn}$ örnek hacimler n ve dağılımları $VM(\mu_i, \mu_i)$ olan q bağımsız rastgele örneklem ise i ' inci örneklem ortalama yönü $\bar{\theta}_i$ ve bileşke uzunluğu R_i ile ifade edildiğinde bu örneklemelerin birleşiminin ortalama yönü $\bar{\theta}$ ve bileşke uzunluğu ise R ile ifade edilmektedir(Jones,1983).

$N = n * q$ olduğuna göre her bir örneklem bileşke uzunluğu ve tüm örneklerin bileşiminden elde edilen bileşke uzunluk,

$$R_i = C_i^2 + S_i^2, \quad R = \sqrt{C^2 + S^2} \quad (2.70)$$

şeklinde hesaplanmaktadır.

$$C = \sum_{i=1}^q C_i, \quad S = \sum_{i=1}^q S_i \quad (2.71)$$

Yukarıdaki C_i ve S_i Eşitlik (2.17) ile $\bar{\theta}_i$ ve $\bar{\theta}$ ise Eşitlik (2.20) ile hesaplanmaktadır (Rao ve Sengupta, 1970).

Yüksek yoğunluklu F ile q örneğine ait ortalamaların eşitliğinin testinin adımları aşağıdadır;

a. Hipotezler kurulur

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_q$, ortalamalar arasında fark yoktur.

$H_1: \mu_j$ lerin en az biri diğerlerinden farklıdır.

b. Kritik değer F tablosundan bulunur

c. Test istatistiği hesaplanır

$$F_h = \frac{MKO}{HKO} \quad (2.72)$$

d. Karşılaştırma

$F_h > F_c \Rightarrow H_0$ hipotezi red, H_1 hipotezi kabul edilir. En az iki ortalama birbirinden farklıdır.

$F_h < F_c \Rightarrow H_0$ hipotezi kabul edilir, ortalamalar farksızdır.

Aşağıda muamele kareler ortalaması (MKO) ve hata kareler ortalamasının (HKO) hesaplanması için gerekli formüller verilmiştir;

$$GKT = MKT + HKT$$

$$GKT = N - R$$

$$MKT = \sum_{i=1}^q R_i - R$$

$$HKT = (N - R) - \left(\sum_{i=1}^q R_i - R \right) = N - \sum_{i=1}^q R_i \quad (2.73)$$

Bu kareler toplamaları için serbestlik dereceleri de;

$$\text{Genel serbestlik derecesi(gsd)} = N - 1$$

$$\text{Muamele serbestik derecesi(msd)} = q - 1$$

$$\text{Hata serbestlik derecesi(hsd)} = \text{gsd} - \text{msd} \Rightarrow \text{hsd} = N - q$$

formülleri ile bulunur. Her bir kaynağa ait varyansı ifade eden kareler ortalamaları ise;

$$MKO = \frac{MKT}{msd} \Rightarrow MKO = \frac{(\sum_{i=1}^q R_i - R)}{q - 1} \quad (2.74)$$

$$HKO = \frac{HKT}{hsd} \Rightarrow HKO = \frac{(N - \sum_{i=1}^q R_i)}{N - q} \quad (2.75)$$

eşitlikleri ile hesaplanmaktadır. Böylece test istatistiği aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$F_h = \frac{(\sum_{i=1}^q R_i - R) / q - 1}{(N - \sum_{i=1}^q R_i) / N - q} \quad (2.76)$$

Olasılık oran testi ile ortalamalarının eşitliği hipotezinin test işlemlerinin adımları aşağıdadır;

a. Hipotezler kurulur

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_q, \text{ ortalamalar arasında fark yoktur.}$$

$H_1: \mu_j$ lerin en az biri diğerlerinden farklıdır.

- b. Kritik değer X^2 tablosundan belirlenir
- c. Test istatistiği hesaplanır

Test istatistiği yoğunlaşma parametresinin ve örneklem hacminin durumuna göre üç farklı şekilde hesaplanmaktadır.

κ değeri büyük olduğu durumlarda test istatistiği,

$$X_h^2 = 2\kappa \sum_{i=1}^q R_i [1 - \cos(\bar{\theta}_i - \bar{\theta})] \quad (2.77)$$

eşitliği ile hesaplanmaktadır.

κ değeri küçük ve n değeri büyük olduğu durumlarda test istatistiği,

$$X_h^2 = w = \frac{2}{n} \left[\left(\sum_{i=1}^q R_i \right)^2 - R^2 \right] \quad (2.78)$$

eşitliği ile hesaplanmaktadır (Mardia ve Jupp,2000).

κ ve n değerleri küçük olduğu durumlarda c katsayısı,

$$c = \frac{1}{1 - \frac{\kappa^2}{8} + \frac{q}{2n\kappa^2}} \quad (2.79)$$

olmak üzere

$$X_h^2 = c * w \quad (2.80)$$

eşitliği ile hesaplanmaktadır. Yukarıdaki w istatistiği (2.78) kullanılarak bulunur.

- d. Karşılaştırma

$X_h^2 > X_{q-1;\alpha/2}^2 \Rightarrow H_0$ hipotezi red, H_1 hipotezi kabul edilir. En az iki ortalama

birbirinden farklıdır.

$X_h^2 < X_{q-1;\alpha/2}^2 \Rightarrow H_0$ hipotezi kabul edilir, ortalamalar farksızdır.

2.4.9. Çok örneklem için ağırlaştırılmış ortalama yönün güven aralığı

Ağırlaştırılmış ortalama yöne ait güven aralığı α anlamlılık düzeyinde;

$$\mu_{a(gs)} = \bar{\theta} \pm \sin^{-1}(z_{\alpha/2} \sigma_\alpha) \quad (2.81)$$

ile bulunur eşitlikteki ağırlaştırılmış standart hata da;

$$\sigma_\alpha = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^q a_i^2 \bar{R}_i^2 \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^q a_i^2 \bar{R}_i^2}} \quad (2.82)$$

ile hesaplanır. Eşitlik (2.82) de verilen i. Örneklem için standart hata (σ_i) von Mises dağılımı için;

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{R_i \hat{R}_i}} \quad (2.83)$$

eşitliği ile hesaplanmaktadır.

$$v_i = \frac{1}{\bar{R}_i \sigma_i^2} \quad i = 1.2 \dots, q \quad (2.84)$$

$$v = \sum_{i=1}^q v_i \quad (2.85)$$

olmak üzere i. ağırlaştırılmış değer ise (2.84) ve (2.85) eşitlikleri yardımıyla;

$$a_i = \frac{v_i}{v} \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (2.86)$$

şeklinde hesaplanmaktadır (Fisher ve Powell,1989;Fisher,1983).

2.4.10. Çok örneklem için yoğunlaşma parametrelerinin eşitliğinin testi

Bu yöntemin adımları aşağıda verilmiştir.

a. Hipotezler kurulur

$H_0: \kappa_1 = \kappa_2 = \dots = \kappa_q$, yoğunlaşma parametreleri arasında fark yoktur.

$H_1: \kappa_j$ parametrelerinin en az biri yoğunlaşma parametrelerinden farklıdır.

b. Kritik değer F tablosundan bulunur

c. Test istatistiği hesaplanır

$$F_h = \frac{(N - q) \sum_{i=1}^q n_i (\bar{d}_i - \bar{d})^2}{(q - 1) \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{n_i} (d_{ij} - \bar{d}_i)^2} \quad (2.87)$$

hesaplanmaktadır. Yukarıdaki terimlerin tanımları aşağıdadır;

$$d_{ij} = |\sin(\theta_{ij} - \bar{\theta}_i)| \quad j = 1, 2, \dots, n_i \quad (2.88)$$

$$\bar{d}_i = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{d_{ij}}{n_i} , \quad \bar{d} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^q n_i \bar{d}_i \quad (2.89)$$

d. Karşılaştırma

$F_h > F_c \Rightarrow H_0$ hipotezi red, H_1 hipotezi kabul edilir ve en az bir yoğunlaşma parametresi diğerlerinden farklıdır.

$F_h < F_c \Rightarrow H_0$ hipotezi kabul edilir.

2.5. Dairesel Homojenlik Testleri

Bu bölümde, dairesel verilerin homojenliğinin testi için kullanılabilen testlerden bazıları verilmiştir.

2.5.1. Rayleigh testi

Örneklemin çember etrafında homojen olarak dağılıp dağılmadığının belirlenmesinde kullanılan testlerden birisidir. Rayleigh testi bileşke vektör uzunluğuna dayanmaktadır. Örneklem ortalama vektörü ise 0'dan farklı bileşke vektör büyük olduğu zamanda homojenliğin reddedilmesi gerekmektedir. Ortalama yönün yokluğu homojen bir dağılımı gösterirken varlığı ise daima heterojen bir dağılım gösterdiği anlamına gelmez çünkü bu bileşke vektörün ne kadar büyük olması gerektiği sorusuna bağlıdır(Zar, 2010). Yığın ortalama vektör uzunluğu ρ olmak üzere bu testin adımları aşağıdadır;

a. Hipotezler kurulur

$H_0: \rho = 0$ (Yığın çember etrafında homojen dağılıma sahiptir.)

$H_1: \rho \neq 0$ (Yığın çember etrafında homojen dağılıma sahip değildir.)

b. Kritik değer Rayleigh Z tablosundan belirlenir

c. Test istatistiği hesaplanır

n örneklem hacmine bağlı olarak test istatistiği,

$$Z = n\bar{R}^2 \quad (2.90)$$

ile hesaplanmaktadır.

d. Karşılaştırma yapılır

$Z > Z_{\alpha,n} \Rightarrow H_0$ hipotezi red, H_1 hipotezi kabul edilir.

$Z < Z_{\alpha,n} \Rightarrow H_0$ hipotezi kabul edilir.

2.5.2. V testi

V testi için dairesel homojenlik testi belirli bir ortalama yöne sahipse Rayleigh testinden farklı olarak kullanılmakta ve V testini daha güçlü yapmaktadır. Homojenlik için daha güçlü olan V testinin adımları aşağıda verilmiştir.

a. Hipotezler kurulur

H_0 : Yığın yönleri homojen dağılıma sahiptir

H_1 : Yığın yönleri homojen dağılıma sahip değildir

b. Kritik değer V testinde U tablosunda belirlenir

c. Test istatistiğinin değeri

$$V = R \cos(\bar{\theta} - \mu_0) \quad (2.91)$$

ile hesaplanır ve anlamlılık testi için U istatistiğinin değerinden;

$$u = V \sqrt{\frac{2}{n}} \quad (2.92)$$

ile hesaplanır(Kanji,2006).

d. Karşılaştırma yapılır

$u > U_{\alpha,n} \Rightarrow H_0$ hipotezi red, H_1 hipotezi kabul edilir.

$u < U_{\alpha,n} \Rightarrow H_0$ hipotezi kabul edilir.

2.5.3. Kuiper testi

Çember üzerinde uygulanan dağılımların fonksiyonları tanımlandıktan sonra herhangi bir alternatif hipoteze karşı olan homojenliği test etmek gerekir. İlk olarak çember üzerinde bir başlangıç yönü ve dönüş yönü seçilmelidir. Birikimli dağılım fonksiyonu ve ampirik dağılım fonksiyonu arasındaki sapmayı ölçmeye dayanan bu fonksiyonlar;

$$S_n(\theta_i) = \frac{i}{n} \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (2.93)$$

ve

$$F(\theta_i) = \frac{\theta_i}{360^\circ} \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (2.94)$$

olarak tanımlanır. Bu test bu iki dağılım arasındaki sapmaya dayanır ve;

$$V_n = \max[F(\theta_i) - S_n(\theta_i)] - \min[F(\theta_i) - S_n(\theta_i)] + \frac{1}{n} \quad (2.95)$$

biçiminde tanımlanır(Bass,2000).

Bu testin adımları aşağıdadır;

a. Hipotez kurulur

H_0 : Yığın çember üzerinde dağılımı homojendir

H_1 : Yığın çember üzerinde dağılımı homojen değildir

b. Kritik değerler belirlenir

Çizelge 2.2. Kuiper testi için V'nin kritik tablo değerleri

α	0,150	0,100	0,050	0,025	0,010
V_t	1,537	1,620	1,747	1,862	2,001

c. Test istatistiği hesaplanır

$$V = V_n \left(\sqrt{n} + 0.155 + \frac{0.24}{\sqrt{n}} \right) \quad (2.96)$$

d. Karşılaştırma yapılır

$V > V_t \Rightarrow H_0$ hipotezi red, H_1 hipotezi kabul edilir.

$V < V_t \Rightarrow H_0$ hipotezi kabul edilir.

2.5.4. Watson U^2 testi

Kuiper testi gibi ampirik dağılım fonksiyonu ile düzgün dağılımın birikimli dağılım fonksiyonu arasındaki fark ölçüsünün yerine ortalama kare sapmasını kullanmasıdır.

$\theta_{(1)} \leq \theta_{(2)} \leq \dots \leq \theta_{(n)}$ sıralanmış açıların ifadesine göre;

$$u_{(i)} = \frac{\theta_i}{2\pi} \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (2.97)$$

$$\bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_{(i)} \quad (2.98)$$

olarak tanımlanır. Buna göre θ ve κ 'nın maksimum olabilirlik tahminlerini kullanarak hipotez testi işleminin adımları aşağıdaki gibi gerçekleşmektedir (Hintze, 2007).

a. Hipotezler kurulur

H_0 : Yığın çember üzerinde dağılımı homojendir

H_1 : Yığın çember üzerinde dağılımı homojen değildir

b. Kritik değer belirlenir

Çizelge 2.3. Watson U^2 testi için U^2 kritik tablo değerleri

α	0,150	0,100	0,050	0,025	0,010
U_t^2	1,131	0,152	0,187	0,221	0,267

c. Test istatistiği hesaplanır

$$U^2 = \sum_{i=1}^n \left[u_{(i)} - \bar{u} - \frac{i - \frac{1}{2}}{n} + 0.5 \right]^2 + \frac{1}{12n} \quad (2.99)$$

d. Karşılaştırma yapılır

$U^2 > U_t^2 \Rightarrow H_0$ hipotezi red, H_1 hipotezi kabul edilir.

$U^2 < U_t^2 \Rightarrow H_0$ hipotezi kabul edilir.

2.5.5. Hodges-anje testi

Hodges-Anje testi dairesel homojenlik için Rayleigh testine alternatif bir testtir. Bu test Omnibus testi olarak da anılmaktadır. Temel dağılımlar hakkında varsayımlar yapmamakla birlikte güçlü yanı homojenlikten olan genel sapmaları daha iyi tespit etmesidir (Berens, 2009).

Dairesel bir veri örneği olarak 180° 'lik bir aralıkta ortaya çıkan en küçük veri sayısının belirlenmesi gerekmektedir. Bunun için çemberin çapına eşit çizgi ile çember ikiye bölünmelidir. Bunun için çizgi çemberi öyle bir noktada bölmeli ki çap çizgisinin her iki tarafında kalan noktalar arasındaki fark maksimum olmalıdır. Çap çizgisinin bir tarafı maksimum diğer tarafı da minimum nokta kalmakta ve n hacimli dairesel örnekleme çap çizgisinin herhangi bir tarafında kalan minimum miktardaki nokta sayısı m ile gösterilirse hipotez testi için aşağıdaki işlemler yapılmaktadır (Ajne, 1968).

Bu testin adımları;

a. Hipotezler kurulur

H_0 : Yığın çember etrafına homojen dağılmıştır

H_1 : Yığın çember etrafına homojen dağılmamıştır

b. Kritik değer Hodges-ajne için m tablosundan belirlenir

c. Test istatistiği hesaplanır

m test istatistiği yukarıda belirtildiği gibi bulunmaktadır.

d. Karşılaştırma yapılır

$m > m_{\alpha,n} \Rightarrow H_0$ hipotezi red, H_1 hipotezi kabul edilir.

$m < m_{\alpha,n} \Rightarrow H_0$ hipotezi kabul edilir.

olarak belirtilmiştir(Zar, 2010).

2.5.6. f Aralık testi

Dairesel örneklem aralığı testi parametrik olmayan bir test olup aşağıdaki adımların takibi ile gerçekleştirilir.

a. Hipotezler kurulur

H_0 : Yığın çember etrafına düzgün dağılmıştır

H_1 : Yığın çember etrafına düzgün dağılmamıştır

b. Kritik değer dairesel aralık için w tablosundan belirlenir

c. Test istatistiği hesaplanır

$$T = \max. T_i \quad 1 \leq i \leq n \quad (2.100)$$

olmak üzere test istatistiği aşağıdaki formül ile hesaplanır;

$$w = 2\pi - T \quad (2.101)$$

d. Karşılaştırma yapılır

$w > w_{\alpha,n} \Rightarrow H_0$ hipotezi red, H_1 hipotezi kabul edilir.

$w < w_{\alpha,n} \Rightarrow H_0$ hipotezi kabul edilir.

2.5.7. Rao aralık testi

Homojenlik için kullanılan bir testtir. Diğer testlere göre Rao testi daha güçlüdür. Eğer gözlemler çember çevresi üzerinde simetrik dağılmışsa bu homojenliğin kanıtı olarak kabul edilmektedir. Diğer yandan, gözlemler bir veya daha fazla yönde yığılma eğilimi gösteriyorsa bu durum tercih edilen bir yönün kanıtı kabul edilmektedir(Rao,1969; Rao ve Sengupta,1972).

a. Hipotezler kurulur

H_0 : Çember etrafında ardışık numuneler arasındaki farklar eşittir

H_1 : Çember etrafında ardışık numuneler arasındaki farkların en az biri farklıdır

b. Kritik değer Rao aralık testi için L tablosundan belirlenir

c. Test istatistiği hesaplanır

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left| T_i - \frac{360^\circ}{n} \right| \quad (2.102)$$

d. Karşılaştırma yapılır

$L > L_{\alpha,n} \Rightarrow H_0$ hipotezi red, H_1 hipotezi kabul edilir.

$L < L_{\alpha,n} \Rightarrow H_0$ hipotezi kabul edilir.

2.5.8. Anje A_n testi

Bu test $y_1, y_2, \dots, y_n$ yönlü gözlemlerinin bir kümesi olup bir çember etrafında düzgün dağılan bu n noktaları arasında önemli bir fark olup olmadığını belirlemek için kullanılmaktadır (Dale ve Ballantyne,1980). $N(\alpha)$ pozitif yön olarak saat yönü alınan yarım çember $[\alpha, \alpha + \pi]$ üzerindeki örnek noktalarının sayısı ise çember üzerindeki gözlemlerin homojenliği testi için Ajne istatistiğinin değeri;

$$A_n = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} \left[N(\alpha) - \frac{n}{2} \right]^2 d\alpha \quad (2.103)$$

ile hesaplanır (Ajne,1968).

Bu istatistik i'inci ve j'inci gözlemleri arasında dairesel uzaklık;

$$d_0(x_i, x_j) = \begin{cases} (x_j - x_i) & \text{eğer } x_i < x_j < x_i + \pi \\ 2\pi - (x_j - x_i) & \text{eğer } x_i + \pi < x_j \leq x_i \end{cases} \quad (2.104)$$

olarak bulunmuş ve Eşitlik (2.103) ile Watson(1967) tarafından;

$$A_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{n\pi} \sum_i \sum_j d_0(x_i, x_j) \quad (2.105)$$

biçiminde elde edilmiştir. Bu testin adımları aşağıda belirtilmiştir.

a. Hipotezler kurulur

H_0 : Çember etrafında düzgün dağılan noktalar arasındaki uzaklıklar arasında fark yoktur

H_1 : Çember etrafında düzgün dağılan noktalar arasındaki uzaklıklardan en az biri farklıdır

b. Kritik değer ajne testi için belirlenir

c. Test istatistiği hesaplanır

Test istatistiğinin değeri Eşitlik (2.103) ve Eşitlik (2.105) ile hesaplanır.

d. Karşılaştırma yapılır

$A_n > A_{n,\alpha} \Rightarrow H_0$ hipotezi red, H_1 hipotezi kabul edilir.

$A_n < A_{n,\alpha} \Rightarrow H_0$ hipotezi kabul edilir.

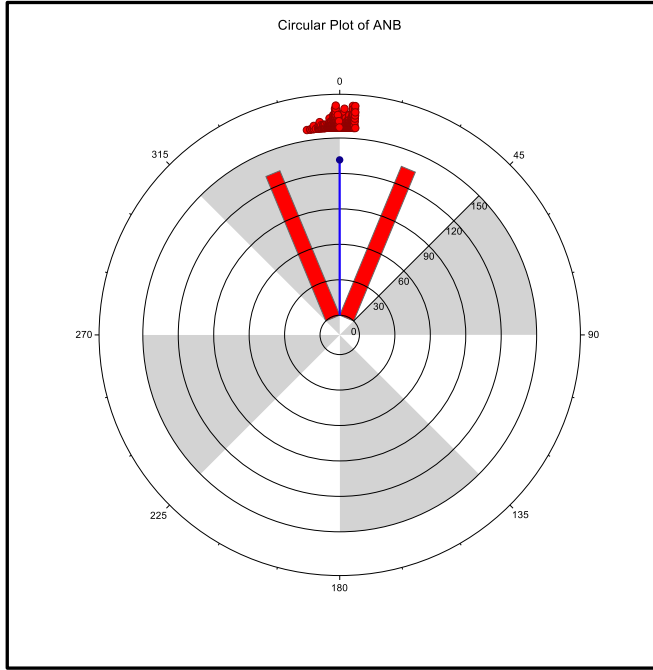
3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu çalışmada incelenen veri 2017 yılı içerisinde Ankara Üniversitesi Diş Hekimliği Fakültesi'nden elde edilen 266 bireye (133 erkek, 133 kadın) ait ANB ölçümlerinden oluşmuştur. ANB açısı Yüz iskelet yapısının sagittal yön (ön-arka) sınıflandırılmasında sıklıkla kullanılan bir açıdır. ANB açısal olarak ölçüldüğü için çalışmanın amacına uygun olarak bu açısal ölçümlerin kullanımı tercih edilmiştir. Kullanılan veri Çizelge 3.1'de verilmiştir.

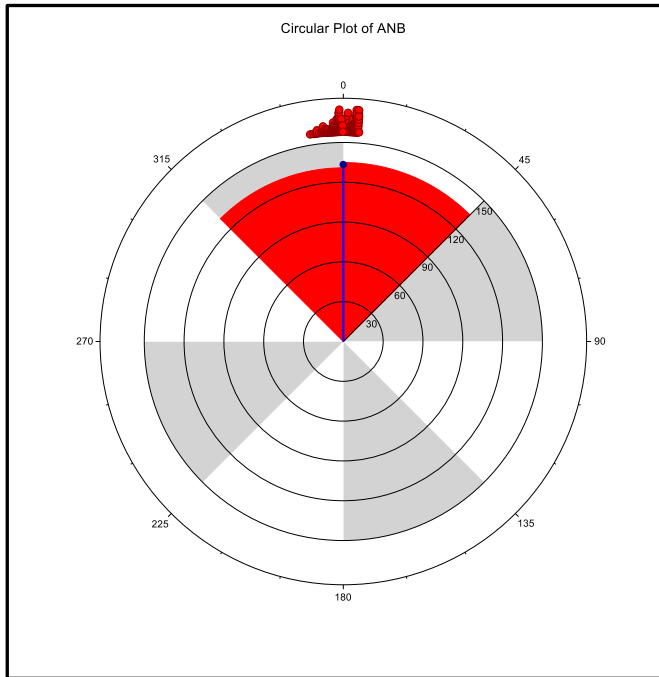
Çizelge 3.1. Bireylerin ANB açısı değerleri

359,9	359,0	358,3	357,1	354,3	3,7	3,1	2,1	1,1
359,8	359,0	358,3	357,0	354,1	3,7	3,1	2,1	1,1
359,8	359,0	358,3	357,0	354,0	3,7	3,0	2,1	1,1
359,8	359,0	358,3	356,9	353,4	3,6	3,0	2,0	1,1
359,7	358,9	358,2	356,9	352,9	3,6	3,0	2,0	1,1
359,7	358,9	358,1	356,8	352,9	3,6	3,0	1,9	1,0
359,6	358,8	358,1	356,7	352,8	3,5	2,9	1,9	1,0
359,6	358,8	358,0	356,6	352,4	3,5	2,9	1,9	1,0
359,6	358,8	358,0	356,5	351,9	3,5	2,9	1,8	1,0
359,5	358,8	357,9	356,5	351,8	3,5	2,8	1,7	0,9
359,5	358,8	357,9	356,2	350,9	3,5	2,8	1,7	0,9
359,5	358,8	357,9	356,1	4,3	3,4	2,7	1,6	0,8
359,5	358,8	357,8	356,0	4,0	3,4	2,7	1,6	0,7
359,5	358,7	357,7	356,0	4,0	3,4	2,7	1,6	0,7
359,4	358,7	357,7	355,9	4,0	3,4	2,6	1,6	0,7
359,4	358,7	357,7	355,8	4,0	3,4	2,6	1,5	0,7
359,4	358,6	357,6	355,7	4,0	3,4	2,5	1,4	0,6
359,4	358,6	357,6	355,7	4,0	3,4	2,5	1,4	0,6
359,3	358,6	357,6	355,6	3,9	3,3	2,5	1,4	0,6
359,3	358,6	357,5	355,6	3,9	3,3	2,5	1,3	0,5
359,2	358,5	357,5	355,5	3,9	3,3	2,5	1,3	0,3
359,2	358,5	357,4	355,5	3,9	3,3	2,4	1,3	0,3
359,2	358,5	357,4	355,2	3,9	3,3	2,4	1,2	0,3
359,1	358,5	357,3	355,0	3,9	3,3	2,4	1,2	0,3
359,1	358,5	357,3	355,0	3,9	3,3	2,4	1,2	0,2
359,1	358,4	357,3	354,9	3,9	3,3	2,4	1,2	0,1
359,0	358,4	357,3	354,6	3,8	3,2	2,3	1,2	
359,0	358,4	357,2	354,6	3,8	3,2	2,3	1,2	
359,0	358,4	357,2	354,6	3,8	3,1	2,3	1,2	
359,0	358,3	357,1	354,3	3,8	3,1	2,2	1,1	

Dairesel verilerin sunumunda grafiklerden yararlanılmaktadır. Bu amaçla kullanılan grafik türleri dairesel histogram ve gül şemasıdır. Veriye ilişkin dairesel histogram Şekil 3.1 ve gül şeması Şekil 3.2’de verilmiştir.



Şekil 3.1. ANB açısal ölçümlerinin dairesel histogramı



Şekil 3.2. ANB açısal ölçümlerinin gül şeması

Şekil 3.1 ve Şekil 3.2 verinin çember etrafında homojen dağılmadığını göstermektedir. Bu durum varyans ve yoğunlaşma katsayısı değerleri ile de anlaşılmaktadır. Varyans (0,0013) değerinin küçük olması tüm ölçümlerin aynı yönü gösterdiğinin, yoğunlaşma katsayısı (383,1681) değerinin büyük olması da bu gözlemlerin belli bir noktada yoğunlaştığını gösterir.

Çizelge 3.1’de ANB açısı ölçümlerine ilişkin hem doğrusal istatistikler hem de dairesel istatistikler verilmiştir. Doğrusal istatistikler için SPSS (Statistical Package for Social Sciences) version 22, dairesel istatistikleri için ise Oriana 4 ve NCSS 2020 yazılımı kullanılmıştır. Elde edilen istatistikler Çizelge 3.2’de sunulmuştur.

Çizelge 3.2. Veriye ilişkin doğrusal ve dairesel istatistikler

İstatistikler	Doğrusal istatistikler	Dairesel istatistikler
Ortalama	177,27	359,97
Standart Hata	10,91	0,18
Ortanca	4,00	0,20
Standart Sapma	177,88	2,93
Varyans	31639,54	0,0013

Çizelge 3.2’de verilen bilgilerden verilere ilişkin doğrusal ve dairesel istatistikler için elde edilen değerlerin arasında büyük farklar olduğu saptanmıştır. Örneğin ANB açısı verilerin ortalaması doğrusal olarak 177,27 olarak elde edilirken dairesel olarak 359,97 olarak elde edilmiştir. Benzer şekilde aynı veriler için elde edilen varyanslar (doğrusalda 31639,54 ve daireselde 0,0013) arasında da büyük farklılık vardır. Bu şekilde farkın olması dairesel verilerin kullanılmasından dolayı doğaldır. Çünkü dairesel verilerin doğrusal istatistik yöntemlerle incelenmesi ve sonuç çıkarılması doğru bir yaklaşım olmamaktadır. Burada ANB ölçümleri açısal olarak elde edildiği için dairesel istatistik yöntemlerle elde edilecek istatistiklerin kullanılması verilerden doğru sonuç çıkarılması ve yorumlanması açısından oldukça önemlidir.

Dairesel verilerde istatistiklerin hesaplanmasında trigonometrik momentlerden yararlanılmaktadır. Çizelge 3.3’de Oriana 4 ve NCSS yazılımlarından elde edilen trigonometrik momentler verilmiştir.

Çizelge 3.3. Trigonometrik momentler

Değişken	Örnek Hacmi (n)	Ortalama Cos (θ_i)	Ortalama Sin (θ_i)	$\bar{R}$	$\bar{\theta}$
ANB açısı	266	0,9987	-0,0005	0,9987	359,974

Bilgisayar yazılımından elde edilen trigonometrik momentler aşağıdaki gibi formüller kullanılarak da hesaplanabilir.

Eşitlik (2.17) kullanılarak gözlemlerin ağırlık merkezleri;

$$C = \sum_{i=1}^n \cos(\theta_i) = \sum_{i=1}^{266} \cos(\theta_i) = \cos 359 + \cos 359,1 + \dots + \cos 3,4 = 265,6527$$

$$S = \sum_{i=1}^n \sin(\theta_i) = \sum_{i=1}^{266} \sin(\theta_i) = \sin 359 + \sin 359,1 + \dots + \sin 3,4 = -0,12208$$

hesaplanır. Ayrıca Eşitlik (2.18) ile ortalama ağırlık merkezleri ve Eşitlik (2.23) ile de ortalama bileşke uzunluğu da, sırasıyla;

$$\bar{C} = \frac{\sum_{i=1}^{266} \cos \theta_i}{266} = \frac{265,6527}{266} = 0,9987$$

$$\bar{S} = \frac{\sum_{i=1}^{266} \sin \theta_i}{266} = \frac{-0,0004}{266} = -0,0005$$

ve

$$\bar{R} = \sqrt{\bar{C}^2 + \bar{S}^2} = \sqrt{(0,9987)^2 + (-0,0005)^2} = 0,9987$$

olarak bulunur. Diğer yandan Eşitlik (2.19) ve Eşitlik (2.20) kullanılarak ve $S < 0$, $C \geq 0$ kriteri de dikkate alınarak açıların ortalama yönü de;

$$\bar{\theta} = \arctan\left(\frac{S}{C}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{S}{C}\right) + 2\pi = \tan^{-1}\left(\frac{-0,12208}{265,6527}\right) + 360 = 359,974$$

olarak hesaplanmıştır.

ANB açısal ölçümlerine ilişkin dairesel istatistikler Çizelge 3.4’de verilmiştir.

Çizelge 3.4. Örneklem özet istatistikleri

Değişken	Örnek Hacmi (n)	Ortalama Yön ($\bar{\theta}$)	Ortalama Bileşke Uzunluğu ($\bar{R}$)	Dairesel Varyans (V)	Standart Sapma (s)	Yoğunlaşma Katsayısı (κ)
ANB açısı	266	359,974	0,9987	0,0013	2,9284	383,1618

Çizelge 3.4’de verilen istatistik değerlerinin formüller yardımıyla elde edilmesi aşağıda sunulmuştur.

Daha önce $C = 265,6527$, $S = -0,12208$ ve $S < 0$, $C \geq 0$ kriterine göre

$\bar{\theta} = 359,974$ bulmuştur. Eşitlik (2.21) yardımıyla bileşke uzunluk değeri de;

$$R = \sqrt{C^2 + S^2} = \sqrt{(265,6527)^2 + (-0,12208)^2} = 265,6527$$

olarak elde edilir. Buna göre ortalama bileşke uzunluk değeri de Eşitlik (2.23) ile;

$$\bar{R} = \frac{R}{n} = \frac{265,6527}{266} = 0,9987$$

elde edilir. Ayrıca Eşitlik (2.34) ile dairesel varyans değeri de;

$$V = 1 - \bar{R} = 1 - 0,9987 = 0,0013$$

olarak elde edildikten sonra Eşitlik (2.35) yardımıyla dairesel standart sapma da;

$$S = \frac{180^\circ}{\pi} \sqrt{[-2 \ln \bar{R}]} = \frac{180^\circ}{\pi} \sqrt{[-2 \ln 0,9987]} = 2,93$$

bulunur. Yoğunlaşma parametresinin tahmin değeri de Eşitlik (2.27) ‘den $\bar{R} > 0,53$ kriterine bağlı olarak;

$$\hat{\kappa} = \frac{1}{\bar{R}^3 - 4\bar{R}^2 + 3\bar{R}} = \frac{1}{0,9986^3 - 4 * 0,9986^2 + 3 * 0,9986} = 383,1618$$

olarak elde edilir. Ortalama yön olarak bulunan değer başlangıç noktası kuzey ve dönüş yönü saatin yönünde olan ve çember etrafında dağılan gözlemlerin ortalama değerinin derece cinsinden değerini göstermektedir ve $\bar{\theta} = 359.974^\circ$ olarak bulunmuştur. Ortalama bileşke uzunluğu $\bar{R} = 0.9987$ olup bu değer (0,1) arasında yer almaktadır. 1'e daha yakın bir değer yüksek konsantrasyonu, değer 0'a yakın olursa gözlemlerin çember etrafına eşit dağıldığını ifade etmektedir. Değere bakarak verilerin yüksek konsantrasyonu olduğu söylenebilir. Dairesel varyans da (0,1) aralığında değer almaktadır. Varyans 0.0013 olduğundan dağılımın homojen yani tüm veriler aynı yönü göstermekte olup minimum olduğu görülmektedir. Standart sapma değeri de $S = 2.92$ elde edilmiştir. Yoğunlaşma parametresi tahmini $\kappa = 383.1618$ bulunmuştur. Bu değer büyümeye gözlemlerin çember çevresinde herhangi bir noktada yoğunlaştığını gösterir, küçülmesi halinde çember etrafında dağıldığını gösterir. Elde edilen değer gözlemlerin belli bir noktada yoğunlaştığını göstermektedir.

NCSS yazılımından elde edilen çıktılar aşağıda sunulmuştur.

Yazılım ilk olarak yukarıda açıklanan özet istatistikleri vermektedir. Elde edilen özet istatistikler aşağıdadır.

Çizelge 3.5. NCSS özet istatistikler

Değişken	Örnek Hacmi (n)	Ortalama Yön ($\bar{\theta}$)	Ortalama Bileşke Uzunluğu ($\bar{R}$)	Dairesel Varyans (V)	Standart Sapma (s)	Yoğunlaşma Katsayısı (κ)	Saçılım Ölçüsü (ξ)
ANB açısı	266	359,974	0,9987	0,0013	2,93	383,1618	0,0026

Özet istatistiklerden sonra ise ortalama yöne ilişkin istatistiklere yer verilmiştir. Burada %95 güven düzeyinde bulunan güven aralıkları çok geniş olduğu için dağılımın von Mises dağılımı olması varsayımını gerektirmediği anlaşılmaktadır.

Çizelge 3.6. Güven aralıkları

Değişken	Örnek Hacmi (n)	Ortalama Yön ($\bar{\theta}$)	%95 Olasılıkla $\bar{\theta}$ 'nın Alt Güven Sınırı	%95 Olasılıkla $\bar{\theta}$ 'nın Üst Güven Sınırı	Ortalama Standart Yönün Hatası
ANB açısı	266	359,9737	359,6217	0,3256	0,1796

Bir sonraki çıktı ise değişime (varyasyona) ilişkin istatistiklerdir. Varyasyon çok küçük bulunmuştur ve bulunan bu değer gözlemlerin belli bir noktada yoğunlaştığını göstermektedir.

Çizelge 3.7. Değişim istatistikleri

Değişken	Örnek Hacmi (n)	Dairesel Varyans (V)	Standart Sapma (s)	Saçılım Ölçüsü (ξ)	Çarpıklık (s)	Basıklık (k)
ANB açısı	266	0,0013	2,9284	0,0026	1,6275	-0,4489

Çıktının diğer bir bölümü de von Mises Dağılımına ilişkin istatistikleri vermektedir. Aşağıda görüldüğü gibi büyük hacimli örneklemeler ile güven aralıkları, verinin von Mises varsayımına uygun olduğunu varsayar. Kappa parametresi için güven aralığı da bu parametre için tahmin değerinin 2'den büyük olduğu durum için hesaplanmıştır.

Çizelge 3.8. Von Mises dağılım tahmini

Değişken	Örnek Hacmi (n)	Ortalama Yön ($\bar{\theta}$)	%95 Olasılıkla $\bar{\theta}$ 'nın Alt Güven Sınırı	%95 Olasılıkla $\bar{\theta}$ 'nın Üst Güven Sınırı	Von Mises (kappa)	%95 Olasılıkla kappa'nın Alt Güven Sınırı	%95 Olasılıkla kappa'nın Üst Güven Sınırı
ANB açısı	266	359,9737	359,6774	0,2700	383,16	161,0813	226,0177

Birçok hesaplamaların yapılmasında kullanılan trigonometrik momentlerde aşağıdaki şekliyle çıktıda sunulmaktadır.

Çizelge 3.9. Trigonometrik momentler

Değişken	Örnek Hacmi (n)	Ortalama Cos (θ_i)	Ortalama Sin (θ_i)	Ortalama Cos ($2\theta_i$)	Ortalama Sin ($2\theta_i$)	$\bar{R}$	$\bar{R}_2$	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}_2$
ANB açısı	266	0,9987	-0,0005	0,9948	-0,0008	0,998	0,9948	359,973	359,9518

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Araştırmalarda parametrelerin iyi bir tahmininin yapılabilmesi için elde edilen verilerin uygun istatistik yöntemlerle analiz edilmesi gerekir. Araştırma verisi dairesel özellikli ise bu tür veriler dairesel analiz yöntemleri ile değerlendirilmelidir. Açısal olarak elde edilmiş verilere klasik doğrusal analiz yöntemlerinin uygulanması sonucunda doğru bilgiler elde edilemeyebilir.

Bu çalışmada diş hekimliği alanında elde edilen ve kullanılan açısal veriler incelenmiştir. Veriler açısal olduğu için doğrusal analiz yöntemleri ile elde edilen istatistiklerin gerçeği yansıtmadığı tespit edilmiştir. Aynı veriler üzerinde dairesel veri analiz yöntemleri uygulanarak elde edilen dairesel istatistiklerin doğrusal istatistiklerden daha iyi olduğu anlaşılmıştır.

Son yıllarda açısal veri ve bu tür verilerin analizlerine ilişkin çalışmalar artış göstermektedir. Ancak literatür incelendiğinde açısal olarak elde edilmiş verilerin doğrusal analiz yöntemleri kullanılarak analiz edildiği çalışma sayısı da oldukça fazladır. Bu çalışma ile dairesel verilere ilişkin dairesel istatistiklerin önemi vurgulanarak özellikle istatistik disiplini dışındaki araştırmacılar için farkındalık oluşturmak amaçlanmıştır. Bu konuda daha çok araştırma yapılması bu farkındalığın artmasında önemli olacaktır.

Burada ele alınan konu dar kapsamlıdır. Dairesel verilerle ilgili hipotez testleri de klasik doğrusal hipotez testlerinden çok farklılık gösterdiği için bu alanda yeni çalışmalar yapılarak araştırmacılar bilgilendirilmelidir.

KAYNAKLAR

- Ajne, B. (1968). A simple test for uniformity of a circular distribution. *Biometrika*, 55(2), 343-354.
- Bass, J. H. (2000). EZ-ROSE: a computer for equal-area circular histograms and statistical analysis of two-dimensional vectorial data. *Computers and Geosciences*, 26(2), 153-166.
- Berens, P. (2009). CircSat: A MATLAB toolbox for circular statistics. *Journal of Statistical Software*, 31(10), 1-21.
- Bilgin, E. A. (2015). *Dairesel verilerde regresyon analizi*. Yüksek Lisans Tezi, Yüzüncü Yıl Üniversitesi Sağlık Bilimleri Enstitüsü, Van, 55-68.
- Borradaile, G. (2003). *Statistics of earth science data: Their distribution in time, space, and orientation*. New York: Springer-Verlag, 351.
- Dale, M. L. and Ballantyne, C. K. (1980). Two statistics for the analysis of orientation data in geography. *Professional Geographer*, 32(2), 184-191.
- Davis, J. C. (2002). *Statistics and data analysis in geology* (Third edition). New York: John Wiley & Sons, 638.
- Demir, Y. (2015). *Sirküler verinin analizi*. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum, 20-100.
- DevaRaaj, V. J. (2012). *Some contributions to circular statistics*. Ph.D. Thesis, Acharya Nagarjuna University, Gudivada, 69-79.
- Falta, K. (2011). *Analysis of orientations of micro cracks via circular statistics*. Graduation Thesis, TU Dortmund University Faculty of Statistics, Dortmund, 3-26.
- Fisher, N. I. (1993). *Statistical analysis of circular data*. New York: Cambridge University Press, 277.
- Fisher, N. I. and Lee, A. J. (1983). A correlation coefficient for circular data. *Biometrika*, 70(2), 327-332.
- Fisher, N. I. and Powell, C. McA. (1989). Statistical analysis of two-dimensional palaeocurrent data: Methods and examples. *Australian Journal of Earth Sciences: An International Geoscience Journal of the Geological Society of Australia*, 36(1), 91-107.
- Gaile, G. L. and Burt, J. E. (1980). *Directional statistics*. London: CAT MOG, 39.
- Hintze, J. L. (2007). Circular data analysis. In J. L. Hintze (Ed.), *NCSS User's guide II*. Utah: NCSS, pp. 927-955.
- Jammalamadaka, S. R. and SenGupta, A. (2001). *Topics in circular data* (Har/Dskt edition). London: World Scientific, 322.

- Jones, C. L. (1983). Analysis of preferences as directional data. *Quality and Quantity*, 17, 387-404.
- Kanji, G. K. (2006). *100 statistical tests* (Third edition). London: SAGE Publications, 242.
- Mahan, R. P. (1991). *Circular statistic methods: Applications in spatial and temporal performance analysis*. Athens: The University of Georgia, 16-28.
- Maling, D. H. (1992). *Coordinate systems and map projections* (Second edition). Oxford: Pergamon Press, 476.
- Mardia, K. V. and Jupp, P. E. (2000). *Directional statistics*. Chichester: John Wiley & Sons, 429.
- Otieno, B. S. (2002). *An alternative estimate of preferred direction for circular data*. Ph.D. Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University Dissertation submitted to the Faculty, Virginia, 3-18.
- Peker, K. Ö. (2002). *Dairesel veriler ve ardışık testlerde kullanımı*. Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 1-14.
- Peker, K. Ö. Bacanlı, S. (2004). Dairesel Verilere Uygulanan Tanımlayıcı İstatistiksel Yöntemler ve Meteorolojik bir Uygulama. *Anadolu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi*, 5(1), 115-122.
- Pewsey, A., Neuhauser, M. and Ruxton, G.D. (2013). *Circular statistics in R*. Oxford: Oxford University Press, 183.
- Rao, J. S. (1969). *Some contributions to the analysis of circular data*. Ph.D. thesis, Indian Statistical Institute, Calcutta, 11-25.
- Rao, J. S. and SenGupta, S. (1970). An optimum Hierarchical sampling procedure for cross-bedding data. *Journal of Geology*, 78(5), 533-544.
- Rao, J. S. and SenGupta, S. (1972). Mathematical techniques for paleocurrent analysis: Treatment of directional data. *Journal of The International Association for Mathematical Geology*, 4(3), 235-248.
- Stephens, M. A. (1962). Exact and appoximate tests for directions I. *Biometrika*, 49(3/4), 463-477.
- Stephens, M. A. (1972). Multisample tests for the von mises distribution. *Journal of the American Statistical Association*, 67(338), 456-461.
- Trauth, M. H. (2007). Statistics on directional data. In M. H. Trauth (Ed.), *MATLAB recipes for earth sciences*, Berlin: Springer-Verlag, pp. 263-277.
- Upton, G. J. G. (1973). Single-samples tests fort he von mises distribution. *Biometrika*, 60(1), 87-99.
- Watson, G. S. and Williams, E. J. (1956). On the construction of significance tests on the circle and teh sphere. *Biometrika*, 344-352.

Wheeler, S. and Watson, G. S. (1964). A distribution-free two-sample test on a circle.
Biometrika, 51(1/2), 256-257.

Zar, J. H. (2010). *Biostatistical analysis* (Fifth edition). New Jersey: Prentice Hall, 944.

EKLER

Ek-1. Dairesel homojenlik testlerinden V testi için U kritik değerleri

n	$\alpha : 0.25$	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
8	0.688	1.290	1.649	1.947	2.280	2.498	2.691	2.916	3.066
9	0.687	1.294	1.649	1.948	2.286	2.507	2.705	2.937	3.094
10	0.685	1.293	1.648	1.950	2.290	2.514	2.716	2.954	3.115
11	0.684	1.292	1.648	1.950	2.293	2.520	2.725	2.967	3.133
12	0.684	1.291	1.648	1.951	2.296	2.525	2.732	2.978	3.147
13	0.683	1.290	1.647	1.952	2.299	2.529	2.738	2.987	3.159
14	0.682	1.290	1.647	1.953	2.301	2.532	2.743	2.995	3.169
15	0.682	1.289	1.647	1.953	2.302	2.535	2.748	3.002	3.177
16	0.681	1.289	1.647	1.953	2.304	2.538	2.751	3.008	3.185
17	0.681	1.288	1.647	1.954	2.305	2.540	2.755	3.013	3.191
18	0.681	1.288	1.647	1.954	2.306	2.542	2.758	3.017	3.197
19	0.680	1.287	1.647	1.954	2.308	2.544	2.761	3.021	3.202
20	0.680	1.287	1.646	1.955	2.308	2.546	2.763	3.025	3.207
21	0.680	1.287	1.646	1.955	2.309	2.547	2.765	3.028	3.211
22	0.679	1.287	1.646	1.955	2.310	2.549	2.767	3.031	3.215
23	0.679	1.286	1.646	1.955	2.311	2.550	2.769	3.034	3.218
24	0.679	1.286	1.646	1.956	2.311	2.551	2.770	3.036	3.221
25	0.679	1.286	1.646	1.956	2.312	2.552	2.772	3.038	3.224
26	0.679	1.286	1.646	1.956	2.313	2.553	2.773	3.040	3.227
27	0.678	1.286	1.646	1.956	2.313	2.554	2.775	3.042	3.229
28	0.678	1.285	1.646	1.956	2.314	2.555	2.776	3.044	3.231
29	0.678	1.285	1.646	1.956	2.314	2.555	2.777	3.046	3.233
30	0.678	1.285	1.646	1.957	2.315	2.556	2.778	3.047	3.235
32	0.678	1.285	1.646	1.957	2.315	2.557	2.780	3.050	3.239
34	0.678	1.285	1.646	1.957	2.316	2.558	2.781	3.052	3.242
36	0.677	1.285	1.646	1.957	2.316	2.559	2.783	3.054	3.245
38	0.677	1.284	1.646	1.957	2.317	2.560	2.784	3.056	3.247
40	0.677	1.284	1.646	1.957	2.317	2.561	2.785	3.058	3.249
42	0.677	1.284	1.646	1.958	2.318	2.562	2.786	3.060	3.251
44	0.677	1.284	1.646	1.958	2.318	2.562	2.787	3.061	3.253
46	0.677	1.284	1.646	1.958	2.319	2.563	2.788	3.062	3.255
48	0.677	1.284	1.645	1.958	2.319	2.564	2.789	3.063	3.256
50	0.677	1.284	1.645	1.958	2.319	2.564	2.790	3.065	3.258
55	0.676	1.284	1.645	1.958	2.320	2.565	2.791	3.067	3.261
60	0.676	1.283	1.045	1.958	2.320	2.566	2.793	3.069	3.263
65	0.676	1.283	1.645	1.958	2.321	2.567	2.794	3.071	3.265
70	0.676	1.283	1.045	1.958	2.321	2.567	2.795	3.072	3.267
75	0.676	1.283	1.645	1.959	2.322	2.568	2.796	3.073	3.269
80	0.076	1.283	1.645	1.959	2.322	2.568	2.796	3.074	3.270
90	0.676	1.283	1.045	1.959	2.322	2.569	2.797	3.076	3.272
100	0.676	1.283	1.045	1.959	2.323	2.570	2.798	3.077	3.274
120	0.675	1.282	1.645	1.959	2.323	2.571	2.800	3.080	3.277
140	0.675	1.282	1.645	1.959	2.324	2.572	2.801	3.081	3.279
160	0.675	1.282	1.645	1.959	2.324	2.572	2.802	3.082	3.280
180	0.675	1.282	1.645	1.959	2.324	2.573	2.802	3.083	3.282
200	0.675	1.282	1.645	1.959	2.325	2.573	2.803	3.084	3.282
300	0.675	1.282	1.645	1.960	2.325	2.574	2.804	3.086	3.285
∞	0.6747	1.2818	1.6449	1.9598	2.3256	2.5747	2.8053	3.0877	3.2873

Ek-2. Dairesel homojenlik testlerinden Hodges-Ajne testi için m kritik değerleri

n	$\alpha \leq 0.50$	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.005	0.002	0.001
7	0	0							
8	1	0	0						
9	1	0	0	0					
10	1	1	0	0	0				
11	2	1	1	0	0				
12	2	1	1	0	0	0			
13	3	2	1	1	0	0	0		
14	3	2	1	1	0	0	0	0	
15	3	2	2	1	1	0	0	0	0
16	4	3	2	2	1	1	0	0	0
17	4	3	2	2	1	1	1	0	0
18	4	3	3	2	2	1	1	0	0
19	5	4	3	3	2	2	1	1	0
20	5	4	3	3	2	2	1	1	1
21	6	4	4	3	3	2	2	1	1
22	6	5	4	4	3	2	2	2	1
23	6	5	4	4	3	3	2	2	1
24	7	6	5	4	3	3	3	2	2
25	7	6	5	5	4	3	3	2	2
26	8	6	6	5	4	4	3	3	2
27	8	7	6	5	4	4	4	3	3
28	8	7	6	6	5	4	4	3	3
29	9	7	7	6	5	5	4	4	3
30	9	8	7	6	6	5	4	4	3
31	10	8	7	7	6	5	5	4	4
32	10	9	8	7	6	6	5	4	4
33	11	9	8	7	7	6	5	5	4
34	11	9	9	8	7	6	6	5	5
35	11	10	9	8	7	7	6	5	5
36	12	10	9	9	8	7	6	6	5
37	12	11	10	9	8	7	7	6	6
38	13	11	10	9	8	8	7	6	6
39	13	11	10	10	9	8	7	7	6
40	13	12	11	10	9	8	8	7	7
41	14	12	11	10	9	9	8	7	7
42	14	13	12	11	10	9	9	8	7
43	15	13	12	11	10	9	9	8	8
44	15	13	12	12	11	10	9	8	8
45	16	14	13	12	11	10	10	9	8
46	16	14	13	12	11	11	10	9	9
47	16	15	14	13	12	11	10	10	9
48	17	15	14	13	12	11	11	10	9
49	17	15	14	13	12	12	11	10	10
50	18	16	15	14	13	12	11	11	10

Ek-3. Dairesel dağılım testlerinden Rao aralık testi için L kritik değerleri

n	α			
	0.005	0.01	0.05	0.10
4	231.2	221.1	186.5	168.2
5	224.0	212.0	183.4	168.7
6	216.1	206.8	180.7	166.3
7	211.6	202.6	177.8	165.1
8	206.5	198.5	175.7	163.6
9	203.2	195.3	173.7	162.4
10	199.9	192.4	172.0	161.2
11	197.0	189.9	170.5	160.2
12	194.5	187.7	169.1	159.3
13	192.3	185.7	167.8	158.5
14	190.2	183.9	166.8	157.8
15	188.4	182.3	165.8	157.1
16	186.8	180.8	164.9	156.5
17	185.2	179.5	164.0	155.9
18	183.8	178.2	163.2	155.3
19	182.5	177.1	162.5	154.8
20	181.3	176.0	161.8	154.3
25	176.3	171.6	160.0	152.3
30	172.7	168.4	156.9	150.8
35	169.8	165.8	155.2	149.6
40	167.4	163.8	153.9	148.6
45	165.4	162.0	152.7	147.8
50	163.8	160.5	151.7	147.1
75	158.1	155.5	148.3	144.6
100	154.8	152.5	146.3	143.0
150	150.7	148.8	143.8	141.2
200	148.3	146.7	142.4	140.1
500	142.5	141.5	138.8	137.3
700	140.3	140.1	137.8	136.6
1000	139.6	138.8	136.9	135.9

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : KÜÇÜK ÖNTAŞ, Gamze
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 05.11.1992, Nevşehir
 Medeni hali : Evli
 Telefon : 0 (537) 223 00 48
 e-mail : gamzekucuk92@gmail.com



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi / İstatistik	Devam ediyor
Lisans	Ankara Üniversitesi / İstatistik	2015
Lise	Avanos Lisesi	2011

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2018-Halen	Vamos Spor Kompleksi	Müşteri İlişkileri Analisti
2016-2017	Paris Kuaför	Muhasebe
2015-2016	Zeka Çocuk Akademisi	Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce

Yayın

Küçük, G. (2019,26-27 Nisan). *Dairesel veri istatistikleri ve sağlık alanına ilişkin bir uygulama*. 6. Uluslararası Multidisipliner Çalışmaları Kongresinde sunuldu, Gaziantep

Hobiler

Yüzme, Fitness, Dans



GAZİ GELECEKTİR..