

**ZAMAN SERİLERİ ANALİZİNDE ARTIK TÜRLERİ VE
UYGULAMALARI**

Mehmet Güray ÜNSAL

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ŞUBAT 2010
ANKARA**

Mehmet Güray ÜNSAL tarafından hazırlanan ZAMAN SERİLERİ ANALİZİNDE ARTIK TÜRLERİ VE UYGULAMALARI adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Reşat KASAP

.....

Tez Danışmanı, İstatistik Anabilim Dalı Başkanı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile İstatistik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmistir.

Prof. Dr. Reşat KASAP

.....

İstatistik Anabilim Dalı, G.Ü.

Prof. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU

.....

İstatistik Anabilim Dalı, G.Ü.

Doç. Dr. Gül ERGÜN

.....

İstatistik Anabilim Dalı, H.Ü.

Tarih:21/01/2010

Bu tez ile G. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Mehmet Güray ÜNSAL

ZAMAN SERİLERİ ANALİZİNDE ARTIK TÜRLERİ VE UYGULAMALARI
(Yüksek Lisans Tezi)

Mehmet Güray ÜNSAL

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Şubat 2010

ÖZET

Artık değerleri, zaman serileri analizi için model uygunluğunun incelenmesinde önemli rol oynarlar. Bu çalışmada, hesaplama farklılıklarına göre dört farklı tür olarak “koşullu artıklar”, “koşulsuz artıklar”, “inovasyonlar” ve “normalleştirilmiş artıklar” şeklinde sınıflandırılan artıklar ele alınmıştır. Bunun için durağan tek değişkenli otoregresif hareketli ortalama (ARMA) modeli için yapılan benzetim çalışmasıyla ARMA(1,1) modeli için belli parametre değerleri altında farklı gözlem sayıları için farklı artık değerleri hesaplanmakta ve model uygunluğunun test edilmesinde Ljung Box’a ait test istatistiği kullanılarak bu artık türlerinin model uygunluğunun belirlenmesindeki durumlar incelenmiştir.

Bilim Kodu : 205.1.066
Anahtar Kelimeler : Zaman serileri, ARMA(1,1) modeli, koşullu artıklar, koşulsuz artıklar, inovasyonlar, normalleştirilmiş artıklar, model uygunluğunun incelenmesi
Sayfa Adedi : 103
Tez Yöneticisi : Prof.Dr. Reşat KASAP

RESIDUALS TYPES IN TIME SERIES ANALYSIS AND THEIR APPLICATIONS

(M.Sc.Thesis)

Mehmet Güray ÜNSAL

**GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

February 2010

ABSTRACT

Residuals play an important role for diagnostic checking for time series analysis. In this study, in terms of their difference of calculation, residuals which are classified as “conditional residuals”, “unconditional residuals”, “innovations” and “normalized residuals” are dealt with as four different types of residuals. Through simulation study done on stationary univariate autoregressive moving average (ARMA) model, different residuals values for different number of observations under certain parameter values for ARMA(1,1) model were calculated and cases for diagnostic checking of these residual types by using test statistics belonging to Ljung-Box were analyzed.

Science Code : 205.1.066

Key Words : Time series, ARMA(1,1) model, conditional residuals, unconditional residuals, innovations, normalized residuals, diagnostic checking

Page Number : 103

Adviser : Prof. Dr. Reşat KASAP

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım süresince, beni yönlendiren ve her türlü desteğini esirgemeyen tez danışmanım değerli hocam Prof. Dr. Reşat KASAP' a, bilgisayar programlama konusundaki uzman yardımlarından dolayı Yrd. Doç. Dr. Erkan TÜRKER'e ve hayatımda bana destek olan tüm sevdiklerime teşekkür ederim.

Mehmet Güray ÜNSAL

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	ix
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	xii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xvi
1. GİRİŞ	1
2. TEK DEĞİŞKENLİ ZAMAN DİZİLERİ VE MODELLERİ	4
2.1. Zaman Serileri.....	4
2.2. Box-Jenkins Tahmin Yöntemleri	5
2.3. Durağan ve Durağan Olmayan Zaman Serileri.....	6
2.4. Gecikme Operatörleri.....	7
2.5. Rastgele Yürüyüş Serisi	9
2.6. Durağan Serilerin Özellikleri	11
2.7. Otokorelasyon Fonksiyonu (ACF) ve Durağan Serilerde	
Örnek Otokorelasyon Fonksiyonu	12
2.8. Kısmi Otokorelasyon Fonksiyonu (PACF) ve Durağan Serilerde	
Örnek Kısmi Otokorelasyon Fonksiyonu	14
2.9. Zaman Serileri Modelleri	15
2.9.1. Otoregresif AR(p) modelleri	16
2.9.2. Hareketli ortalama MA(q) modelleri.....	18

Sayfa

2.9.3. Otoregresif ve hareketli ortalama ARMA(p,q) modelleri	21
2.10. Tek Değişkenli Zaman Serilerinde Modelleme	23
2.11. Tek Değişkenli Zaman Serilerinde Modelin Uygunluğunun İncelenmesi....	25
3. ZAMAN DİZİLERİNDE ARTIK TÜRLERİ	28
3.1. Tek Değişkenli ARMA Modelinde Artık Tanımlaması ve Hesaplaması	28
3.2. Tek Değişkenli Modellerde Artık Özellikleri	33
3.3. Tek Değişkenli Modellerde Artık Uygunluğunun Sınanması.....	37
3.4. ARMA(1,1) modeli için Koşullu ve Koşulsuz Artıkların Başka Bir	
Yöntemden Hesaplanması İçin Kullanılan Matrisler	39
4. ARMA(1,1) MODELİ İÇİN ARTIK TÜRLERİ HESAPLAMA	
UYGULAMASI VE SİMÜLASYON ÇALIŞMASI.....	42
4.1. ARMA(1,1) Modeli İçin Artık Türleri Hesaplama Uygulaması.....	42
4.2. ARMA(1,1) Modeli İçin Artık Türleri Benzetim Çalışması.....	49
4.2.1. Benzetim planı.....	49
4.2.2. Koşullu ve koşulsuz artıkların hesaplanmasında kullanılan	
programın algoritma ve akış şeması.....	50
4.2.3. Benzetim sonuçları	52
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	91
KAYNAKLAR	95
EKLER	97
EK-1. Koşullu ve koşulsuz artıkların hesaplanmasında kullanılan program	98
ÖZGEÇMİŞ	103

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 2.1. Tek değişkenli durağan Box- Jenkins modellerinde ACF ve PACF grafiklerinin durumları	24
Çizelge 4.1. $\phi=0.3$ ve $\theta=0.7$ olan $n=12$ gözlemlilik ARMA (1,1) zaman serisi verileri	42
Çizelge 4.2. $\phi=0.3$ ve $\theta=0.7$ olan $n=12$ gözlemlilik ARMA (1,1) zaman serisi verilerine ait koşullu artık değerleri	42
Çizelge 4.3. $\phi=0.3$ ve $\theta=0.7$ olan $n=12$ gözlemlilik ARMA (1,1) zaman serisi verilerine ait koşulsuz artık değerleri	43
Çizelge 4.4. $n=10$ için 100 denemede $\phi=0.5$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı	52
Çizelge 4.5. $n=25$ için 100 denemede $\phi=0.5$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı	54
Çizelge 4.6. $n=50$ için 100 denemede $\phi=0.5$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı	55
Çizelge 4.7. $n=100$ için 100 denemede $\phi=0.5$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı	57
Çizelge 4.8. $n=250$ için 100 denemede $\phi=0.5$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı	58
Çizelge 4.9. $n=500$ için 100 denemede $\phi=0.5$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı	60

Çizelge**Sayfa**

Çizelge 4.10. $n=10$ için 100 denemede $\phi=0.9$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı.....	62
Çizelge 4.11. $n=25$ için 100 denemede $\phi=0.9$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı.....	63
Çizelge 4.12. $n=50$ için 100 denemede $\phi=0.9$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı.....	65
Çizelge 4.13. $n=100$ için 100 denemede $\phi=0.9$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı.....	66
Çizelge 4.14. $n=250$ için 100 denemede $\phi=0.9$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı.....	68
Çizelge 4.15. $n=500$ için 100 denemede $\phi=0.9$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı.....	69
Çizelge 4.16. $n=10$ için 100 denemede $\phi=0.1$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı.....	71
Çizelge 4.17. $n=25$ için 100 denemede $\phi=0.1$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı.....	73
Çizelge 4.18. $n=50$ için 100 denemede $\phi=0.1$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı.....	74

Çizelge**Sayfa**

Çizelge 4.19. $n=100$ için 100 denemede $\phi=0.1$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı.....	76
Çizelge 4.20. $n=250$ için 100 denemede $\phi=0.1$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı.....	77
Çizelge 4.21. $n=500$ için 100 denemede $\phi=0.1$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı.....	78
Çizelge 4.22. $n=10$ için 100 denemede $\phi=0.2$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı.....	81
Çizelge 4.23. $n=25$ için 100 denemede $\phi=0.2$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı.....	82
Çizelge 4.24. $n=50$ için 100 denemede $\phi=0.2$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı.....	84
Çizelge 4.25. $n=100$ için 100 denemede $\phi=0.2$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı.....	85
Çizelge 4.26. $n=250$ için 100 denemede $\phi=0.2$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı.....	87
Çizelge 4.27. $n=500$ için 100 denemede $\phi=0.2$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı.....	88

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 4.1. Koşullu ve koşulsuz artıkların hesaplanmasında kullanılan programın akış şeması	51
Şekil 4.2. $n=10$ için 100 denemede $\phi=0.5$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması.....	53
Şekil 4.3. $n=25$ için 100 denemede $\phi=0.5$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması.....	54
Şekil 4.4. $n=50$ için 100 denemede $\phi=0.5$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması.....	56
Şekil 4.5. $n=100$ için 100 denemede $\phi=0.5$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması.....	57
Şekil 4.6. $n=250$ için 100 denemede $\phi=0.5$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması.....	59
Şekil 4.7. $n=500$ için 100 denemede $\phi=0.5$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması.....	60
Şekil 4.8. $n=10$ için 100 denemede $\phi=0.9$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması.....	62

Şekil	Sayfa
Şekil 4.9. $n=25$ için 100 denemede $\phi=0.9$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması.....	64
Şekil 4.10. $n=50$ için 100 denemede $\phi=0.9$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması.....	65
Şekil 4.11. $n=100$ için 100 denemede $\phi=0.9$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması.....	67
Şekil 4.12. $n=250$ için 100 denemede $\phi=0.9$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması.....	68
Şekil 4.13. $n=500$ için 100 denemede $\phi=0.9$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması.....	70
Şekil 4.14. $n=10$ için 100 denemede $\phi=0.1$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması.....	72
Şekil 4.15. $n=25$ için 100 denemede $\phi=0.1$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması.....	73
Şekil 4.16. $n=50$ için 100 denemede $\phi=0.1$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması.....	75

Şekil	Sayfa
Şekil 4.17. $n=100$ için 100 denemede $\phi=0.1$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması.....	76
Şekil 4.18. $n=250$ için 100 denemede $\phi=0.1$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması.....	77
Şekil 4.19. $n=500$ için 100 denemede $\phi=0.1$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması.....	79
Şekil 4.20. $n=10$ için 100 denemede $\phi=0.2$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması.....	81
Şekil 4.21. $n=25$ için 100 denemede $\phi=0.2$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması.....	83
Şekil 4.22. $n=50$ için 100 denemede $\phi=0.2$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması.....	84
Şekil 4.23. $n=100$ için 100 denemede $\phi=0.2$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması.....	86
Şekil 4.24. $n=250$ için 100 denemede $\phi=0.2$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması.....	87

Şekil**Sayfa**

Şekil 4.25. $n=500$ için 100 denemede $\phi=0.2$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması.....	88
--	----

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
w_t	W değişkeninin t dönemine ait gözlenen değeri
γ	Otokovaryans katsayısı
ρ	Otokorelasyon katsayısı
ϕ	Otoregresif parametre
θ	Hareketli ortalama parametresi
u_t	Artık terim
a_0	Koşullu artık
a	Koşulsuz artık
e	İnovasyon
v	Normalleştirilmiş artık
U_*	Geri kestirim vektörü

Kısaltmalar	Açıklama
AR(p)	p. dereceden otoregresif model
MA(q)	q. dereceden hareketli ortalama modeli
ARMA(p,q)	Otoregresif-hareketli ortalama modeli
Q_{BP}	Box-Pierce test istatistigi
Q_{LB}	Ljung-Box test istatistigi
ACF	Otokorelasyon fonksiyonu
PACF	Kısmi otokorelasyon fonksiyonu

1. GİRİŞ

Zaman serileri (dizileri) model uygulamaları Box-Jenkins’le birlikte yaklaşık 40 yıldır incelenmektedir. Bu yaklaşım daha sonra yapılan bir çok araştırmayla desteklenmiş ve geliştirilmiştir. Yüzyıllardan beri geleceği tahmin etmek veya gelecekte meydana gelecek olayları kestirebilmek her alanda insanlığın gereksinim duyduğu bir durumdur. Bu sayede gelecekte meydana gelecek olaylara karşı önceden tedbir olarak oluşabilecek olumsuzlukları bertaraf etmek veya bu olumsuzluklardan en az düzeyde etkilenmek istenir. Ekonomi, mühendislik, tıbbi çalışmalar, jeofizik, meteoroloji ve sosyal bilimler gibi alanlarda geleceğe ait değerlerin bilinmesi her zaman çok önemli olmuştur. Zaman serileri analizi gelecekle ilgili değerlerin geçmişe ait veriler kullanılarak tahmin edilmesinde kullanılan, istatistik biliminin bir uygulama alanıdır.

Box ve Jenkins bir zaman serisini, ardışık olarak üretilmiş bir grup gözlemi olarak tanımlamaktadır. Zaman serileri; ekonomide hisse senetleri günlük kapanış fiyatları, aylık fiyat indeksleri, haftalık faiz oranları, dönemsel satış hacimleri ve yıllık kazançlar, mühendislikte ses, elektrik sinyalleri ve voltaj, tıbbi çalışmalarda elektroensefalografi (EEG) ve elektro kardiyografi (EKG) , meteorolojide günlük rüzgar hızları, günlük sıcaklıklar ve yıllık yağışlar, kalite kontrolünde belirli bir hedefe göre süreç takibinde, sosyal bilimlerde yıllık doğum oranları, ölüm oranları, kaza oranları ve çeşitli suç oranları olarak sayılabilir [Box, Jenkins and Reinsel, 1994; Wei, 1990]. Ekonomik veriler için, örneğin geçmiş yıllara ait ihracat miktarlarına dayanarak, önümüzdeki yılın ihracat miktarları için iyi bir öngörü, bütçe hazırlıkları zamanında önemlidir [Wei, 1990; Kasap ve Saraçoğlu,1998; Akdi, 2003].

Zaman serilerine uygun verileri analiz etmek, bunları grafiksel olarak ifade etmek ve modellemek başlı başına bir iştir. Zaman geçtikçe daha çok alanda kullanılmakta olan bu konu, özellikle zamana dayalı ekonomi verilerinin analiz edilmesinde ve yorumlanmasında kullanılmaktadır. Zaman serilerinde çalışırken modelin belirlenmesi ve belirlenen modelin veriye uygunluğu büyük önem taşımaktadır.

Çünkü yanlış belirlenmiş bir model çok farklı sonuçlar doğurabilir. Bu nedenle, model belirleme aşamasının hemen ardından belirlenen modelin veriye uygunluğu mutlaka test edilmelidir. Bunun için geliştirilmiş farklı model yapıları için pek çok test mevcuttur [Sancak, 2008].

Model kurmanın en önemli aşamalarından biri onu doğru bir şekilde teşhis edebilmektir. Özelde, tahmin edilen modelin artıklarının beyaz gürültü olup olmaması sonucu ile ilgilenilmektedir. Yani eldeki dizinin hangi zaman serisi modeline uyduğuna bakılmaktadır. Eldeki dizinin hangi zaman serisi modeline uyduğuna iki şekilde bakılabilir. Birinci tercih, serilerin kendi grafikleri dışında ACF ve PACF grafiklerine bakmaktır. Grafik, ACF ve PACF'nin gecikmelerini gösterir. Aynı zamanda, bu grafikler durağanlık yapıları hakkında da bilgi verilmesinde katkı sağlarlar. İkinci tercih, artıkların m gecikmede sıfıra eşit olduğu (H_0) yokluk hipotezini test etmek için bir test istatistiği kurmaktır. Özelde, sadece durağan değil aynı zamanda durağan olmayan yapılar da söz konusu olabilir. Bu testler, ortalamada durağan dışılık ve varyansta durağan dışılık durumlarını kontrol etmek için ayrı ayrı uygulanabilir [Arranz, 2005].

Bu çalışmada, literatürde fazla değinilmemiş olan zaman serilerinde teorik ve sayısal olarak birkaç gruba ayrılmış artıklar incelenmekte ve sadece durağan tek değişkenli otoregresif hareketli ortalama modelleri (ARMA) detaylı olarak ele alınmaktadır. Box-Jenkins yaklaşımındaki her iki modelin de yapısını içermekte ve literatürde yapılmış çalışmalarla karşılaştırılabilir olması için ARMA(1,1) modelinin kullanılması uygun görülmüştür. Artıkların 4 farklı türü olarak, “koşullu artıklar”, “koşulsuz artıklar”, “inovasyonlar (yenileştirme artıkları)” ve “normalleştirilmiş artıklar” hesaplamalarına göre sınıflandırılmaktadır. Zaman serileri analizinde farklı artık türlerinin hesaplanması ve bazı özellikleri hakkında bilgi verilmekte ve bu artık türlerinin model uygunluğunun incelenmesindeki durumları belli parametre değerleri için farklı gözlem sayıları üzerinden ARMA(1,1) modeli için incelenmektedir. Birinci Bölümde bu çalışmanın yapılmasındaki amaç ve hedef belirtilmektedir. İkinci Bölümde tek değişkenli zaman serileri ve modelleri, Box-Jenkins tahmin yöntemleri, durağan ve durağan olmayan zaman serileri, gecikme

operatörleri, rastgele yürüyüş serisi, durağan zaman serilerinin özellikleri, otokorelasyon fonksiyonu, kısmi otokorelasyon fonksiyonu açıklanmakta, Box-Jenkins modellerinden tek değişkenli durağan zaman serisi modelleri olan AR (otoregresif model), MA (hareketli ortalama modeli) ve ARMA (otoregresif hareketli ortalama modeli) ve bu çalışmada model uygunluğunun incelenmesinde kullanılan Ljung-Box test istatistiği hakkında bilgi verilmiştir. Üçüncü Bölümde tek değişkenli ARMA modelinde artıkların tanımlaması, hesaplaması ve bazı özellikleri verilmekte, artık türlerinin hesaplatılmasında kullanılan matrislerin ARMA(1,1) modeli için genelleştirilmiş formülleri verilmektedir. Dördüncü Bölümde ilk olarak küçük çaplı bir zaman serisi üzerinden bu farklı artık türlerinin hesaplamasındaki işlemler basamak basamak gösterilmekte, daha sonra uygun modelin otoregresif katsayısı $\phi=0.5$ ve hareketli ortalama katsayısı $\theta=0.6$ için, otoregresif katsayısı $\phi=0.9$ ve hareketli ortalama katsayısı $\theta=0.6$ için, otoregresif katsayısı $\phi=0.1$ ve hareketli ortalama katsayısı $\theta=0.9$ için ve otoregresif katsayısı $\phi=0.2$ ve hareketli ortalama katsayısı $\theta=0.9$ olmak üzere ARMA(1,1) modeli olduğu varsayımına göre benzetim çalışmasıyla üretilen veriler deneme sayısı $k=100$ olmak üzere gözlem sayısı $n=10$, $n=25$, $n=50$, $n=100$, $n=250$ ve $n=500$ alınarak modelin uygunluğunun incelenmesi durumu farklı gecikme sayılarında ($m=10$, $m=5$, $m=3$ ve $m=2$), bu farklı artık değerleri üzerinden hesaplanan test istatistiği değerlerinden “ H_0 : Model uygundur.” hipotezini red oranları karşılaştırılmaktadır. Beşinci Bölümde ise, çalışmanın sonucuna ilişkin sonuç ve öneriler verilmektedir.

2. TEK DEĞİŞKENLİ ZAMAN SERİLERİ VE MODELLERİ

2.1. Zaman Serileri

Zaman içinde gözlenen ölçümlerin bir serisi olarak, rastgele değişkenlerin bir koleksiyonu şeklinde, kronolojik sırayla elde edilen verilere sahip değişkenlere zaman serisi (serisi) adı verilmektedir. Genel olarak zaman serisi, n gözlem sayısı olmak üzere t , $t=1, \dots, n$ biçiminde gösterilir. Buna göre t -inci gözlenen veri w_t ile ifade edilir [Wei, 1990; Akdi, 2003 ve Kadılar, 2005].

Eğer zaman serileri kesin olarak tahminlenebiliyorsa “deterministik zaman serileri” olarak isimlendirilir [Kaya, 1999]. Fakat, olasılık teorisinde zaman serileri sonlu bir rastgele değişkenler kümesi olup $\{w_t : t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ stokastik sürecinden üretilmektedir. Böyle zaman serilerine “stokastik zaman serileri” denir [Wei, 1990; Kasap, 1998 ve Akdi, 2003].

Veriler zaman içinde belirli aralıklarla elde ediliyorsa böyle serilere “kesikli zaman serileri”, zamanın tüm noktalarında ölçülebiliyorsa böyle serilere “sürekli zaman serileri” denir. Zaman serileri analizinin yapılabilmesi için parametre tahminleri için yanlılığa sebep olan, yani ileri sürülen varsayımların göz önünde tutulmasına yol açan trend, konjonktürel dalgalanma, mevsimlik etki ve rastgele değişkenlerin kontrol edilmesi gerekmektedir. Zaman serileri çeşitli amaçlar için analiz edilir. Bu amaçlar zaman serilerini unsurlarına ayırma, zaman serileri arasındaki ilişkiyi açıklama, kontrol ve ileriye dönük tahmin amaçlarından oluşmaktadır [Box and Jenkins, 1976; Kaya, 1999]. İstatistikçiler eldeki veriye en uygun modeli belirlemeyi amaçlarlar. Bu nedenle, çalışmaların temelini veriye en uygun model nasıl belirleneceği sorusu oluşturur [Sancak, 2008].

Zaman serilerinde farklı modeller mevcuttur. Bu farklı modeller için, modelin veriye uygun olup olmadığının test edilmesi amacıyla kullanılmakta olan testler genel

olarak Portmanteau test istatistikleri altında sınıflandırılmaktadır [Box,Jenkins, Reinsel, 1994; Sancak,2008].

Tek değişkenli zaman serileri analizinde geçmiş gözlem değerleri kullanılarak ileriye yönelik tahmin yapmak için kullanıldığından geçmiş gözlem değerleri ile bir bağımlılık söz konusudur.

Tek değişkenli zaman serileri yönteminin dayandığı varsayımlar şu şekilde sıralanabilir;

1-Bir zaman serisinde mevcut olan zaman serisi unsurlarının gelecek dönemde de aynı kalacağı kabul edilir. Bu varsayım nedeniyle geçmiş dönem gündem değerlerine dayanarak gelecek dönem tahmini değerlerin elde edilmesi sağlanır.

2-Bu yöntem zaman serilerini meydana getiren unsurları birbirlerinden ve tesadüfi unsurlardan ayırmak suretiyle dizinin gelecekte alabileceği değerleri tahmin etmeyi amaçlar.

3-Bu yöntemler eşit zaman aralıklarıyla elde edilen gözlem değerlerinden meydana gelen kesikli zaman serilerine uyarlanır [Özmen, 1986].

Bu çalışmada ardışık bağımlılığı içeren Box-Jenkins yöntemleri anlatılacaktır.

2.2. Box-Jenkins Tahmin Yöntemleri

Durağan ve durağan olmayan durumuna göre Box-Jenkins tahmin modelleri olarak da bilinen zaman serileri modelleri iki grupta incelenirler. Bu tahmin yöntemi tek değişkenli zaman serilerinin ileriye dönük tahminleri (forecasting, kestirim) için kullanılan başarılı bir yöntemdir. Box-Jenkins grubu modeller zamana bağlı olayların rastgele karakterde olması ve bu olaylarla ilgili zaman serilerinin stokastik süreç olduğu varsayımına dayanarak geliştirilmişlerdir. Ayrıca bu modellerde rastgele değişkenin zaman içinde aldığı ardışık değerler arasında mevcut olan otokorelasyon

en etkili şekilde dikkate alınır. Bunlardan dolayı söz konusu modellere stokastik modeller adı verilmektedir [Box-Jenkins, 1976; Özmen, 1986].

2.3. Durağan ve Durağan Olmayan Zaman Serileri

Herhangi bir zaman serisi modeli geliştirildiğinde elde edilen stokastik sürecin zamana bağlı olarak değişip değişmediğinin bilinmesi gerekir. Stokastik sürecin niteliği zaman boyunca değişiyorsa dizi durağan değildir. Eğer dizi durağan değilse, dizinin geçmiş ve gelecek yapısını basit bir cebirsel modelle ifade etmek mümkün değildir. Eğer stokastik süreç zaman boyunca sabit ise, dizinin geçmiş değerleri kullanılarak diziye ait sabit katsayılı bir model elde edilebilir. Bu mantık tek denklemlili regresyon modellerindeki değişkenler arasındaki değişmeyen ilişki şeklinde anlaşılabilir.

Bir başka ifadeyle, bir *durağan (stationary) zaman serisinde*, bir dizide peş peşe gelen iki değer arasındaki fark, zamanın kendisinden kaynaklanmamakta, sadece zaman aralığından kaynaklanmaktadır. Durağan dizideki bu ilişkinin pratik sonucu dizinin ortalamasının zamanla değişeceği'dir. Gerçek dünyada karşılaştığımız zaman serileri verilerinin çoğu durağan değildir ve dizinin ortalaması zamanla değişir. Dizi genelde artan veya azalan bir trende sahip olur. Bazen dizideki büyük dalgalanmalardan dolayı da durağanlık ortadan kalkar.

Şayet dizi durağan değilse (nonstationary), otokorelasyonlar önemli ölçüde sıfırdan sapar veya gecikmeler arttıkça sıfırdan uzaklaşır. Zaman serilerini uygun bir modele oturtabilmemiz için bu serilerin önce durağan hale getirilmesi gerekir [Box-Jenkins, 1976; Kutlar, 2000].

2.4. Gecikme Operatörleri

Belirli bir çözümle elde edilen katsayılar yerine, daha sık *gecikme işlemcileri* veya *gecikme operatörleri* kullanılmaktadır. Doğrusal gecikme operatörü kısaca

$$B^i w_t = w_{t-i} \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilir. Kısaca $B^i w_t$ 'nin i gecikmesine sahip w_t değerini göstermektedir. Gecikme operatörü ile ilgili bazı özellikler;

(i) Bir sabitin gecikmesi sabitin kendisidir. $Bc = c$

(ii) Dağılım özelliği;

$$(B^i + B^j)w_t = B^i w_t + B^j w_t = w_{t-i} + w_{t-j}$$

(iii) Birleşme özelliği;

$$B^i B^j w_t = B^i (B^j w_t) = w_{t-i-j}$$

(iv) Negatif değerler alabilir;

$$B^{-i} w_t = w_{t+i} \text{ veya } j = -i \text{ ise } B^j w_t = w_{t-j} = w_{t+i}$$

(v) $|\alpha| < 1$ olduğu durumda,

$$(1 + \alpha B + \alpha^2 B^2 + \dots + \alpha^p B^p) w_t = \frac{w_t}{(1 - \alpha B)} \quad (2.2)$$

eşitliğinden hareketle,

$Y(B) = 1 - \alpha B$ olmak üzere,

$$(1 - \alpha B)(1 + \alpha B + \alpha^2 B^2 + \dots + \alpha^p B^p)w_t = 1 - \alpha^{p+1} B^{p+1}$$

$p \rightarrow \infty \quad \alpha^{p+1} B^{p+1} \rightarrow 0$ olur. ($|\alpha| < 1$ olduğu için)

$$Y^{-1}(B) = \frac{1}{(1 - \alpha B)} = 1 + \alpha B + \alpha^2 B^2 + \dots + \alpha^p B^p \quad (2.3)$$

(vi) $|\alpha| > 1$ olduğu durumda,

$$1 + (\alpha B)^{-1} + \dots + (\alpha B)^{-p} = \frac{-\alpha B w_t}{(1 - \alpha B)} \text{ veya}$$

$$\frac{w_t}{(1 - \alpha B)} = (-\alpha B)^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha B)^{-i} w_t \quad (2.4)$$

olur.

$$w_t = m + \alpha_1 w_{t-1} + \dots + \alpha^p w_{t-p} + u_t$$

m sabit ve u_t artık terim olmak üzere p 'inci mertebeden (dereceden) bir denklemi gecikme operatörü ile göstermek istersek;

$$(1 + \alpha B + \alpha^2 B^2 + \dots + \alpha^p B^p)w_t = m + u_t \quad (2.5)$$

eşitliği elde edilir. Bu denklemi daha yoğunlaştırılmış halde ifade etmek istersek,

$$Y(B) = m + u_t \quad (2.6)$$

şeklinde gösterilebilir. Burada $Y(B)$, $1 + \alpha B + \alpha^2 B^2 + \dots + \alpha^p B^p$ değerine karşılık gelmektedir. Benzer bir denkleme artık terimi ilave ederek yeniden gecikme operatörleri ile yazmak istersek,

$$w_t = m + \alpha_1 w_{t-1} + \dots + \alpha_p w_{t-p} + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \dots + \theta_q u_{t-q} \quad (2.7)$$

Denklemini, daha yoğun olarak,

$$Y(B)w_t = m + Z(B)u_t \quad (2.8)$$

şeklinde kısaca ifade edilir [Box-Jenkins, 1976; Kutlar,2000].

2.5. Rastgele Yürüyüş Serisi

Stokastik zaman serilerinin en basiti rastgele yürüyüş sürecidir. En basit rastgele yürüyüş süreci, bir dizide peş peşe gelen w_t değerleri sıfır ortalamaya sahip ve birbirinden bağımsız normal dağılıma sahiptirler. w_t aşağıdaki şekilde ifade edilir;

$$w_t = w_{t-1} + u_t \quad (2.9)$$

ve dizi $E(u_t)=0$ ve $E(u_t u_s)=0$, $t \neq s$ özelliklerine sahiptir. Böyle bir dizi havaya atılan bir paranın yazı mı, tura mı geleceği şeklindeki her denemenin peş peşe alabileceği değerler şeklinde elde edilebilir. Burada yazıya 1, turaya -1 denildiğinde ve böyle bir dizi için tahmin yapıldığında öngörü denklemi,

$$\hat{w}_{n+1} = E(w_{n+1} | w_n \dots w_1) \quad (2.10)$$

olacaktır. $w_{n+1} = w_n + u_{n+1}$, $w_{n-1}, \dots, w_1$ 'den bağımsızdır. Bir adım ilerideki tahmin değeri

$$\hat{w}_{n+1} = w_n + E(u_{n+1}) = w_n \quad (2.11)$$

ve iki adım sonraki tahmin değeri ise,

$$\hat{w}_{n+2} = E(w_{n+2} | w_n \dots w_1) = E(w_{n+1} + u_{n+2})$$

$$E(w_n + u_{n+1} + u_{n+2}) = w_n$$

olur. Benzer yolu izlersek h adım ilerisi için tahmin değeri yine w_n olacaktır. $\hat{w}_{n+h}$ dönemi tahmini için h ne kadar ilerde ise varyans o kadar büyük olur. Bir dönemlik tahmin için tahmin hatası;

$$u_1 = w_{n+1} - \hat{w}_{n+1} = w_n + u_{n+1} - w_n = u_{n+1} \quad (2.12)$$

olur ve varyansı ise,

$$E(u_n^2) = \sigma_u^2 \text{ olur. İki dönemlik tahmin için tahmin hatası,}$$

$$u_2 = w_{n+2} - \hat{w}_{n+2} = w_n + u_{n+1} + u_{n+2} - w_n = u_{n+1} + u_{n+2} \quad (2.13)$$

olarak elde edilirken, varyans ise,

$$E((u_{n+1} + u_{n+2})^2) = E(u_{n+1}^2) + E(u_{n+2}^2) + 2E(u_{n+1}u_{n+2}) \quad (2.14)$$

olur.

Son denklemin sağ tarafındaki $n+1$ ve $n+2$ dönemlerine ait artık terimler birbirinden bağımsızdır. Üçüncü değeri ise sıfıra, hata varyansı ise $2\sigma_u^2$ 'a eşittir. Aynı şekilde h dönemlik tahmin için hata varyansı $h\sigma_u^2$ olarak elde edilir. Bu tahminler için güven aralığı tahmin dönemi arttıkça hata güven aralığı genişleyecektir. Tahminin standart

hatası h değerinin karekökü şeklinde büyüyecektir. Bütün tahminler w_n 'nin son gözlenen değerine eşit iken, güven aralığı gittikçe h 'ın karekökü ile doğru orantılı olarak genişleyecektir [Kutlar, 2000; Box-Jenkins, 1976].

2.6. Durağan Serilerin Özellikleri

Stokastik zaman serisi $w_1...w_n$ şeklinde aynı dağılımlı tesadüfi değişkenlerden oluşsun. Veri noktaları aynı olasılık dağılım fonksiyonunun $p(w_1...w_n)$ belirli bir sonucunu gösterebilir. Benzer şekilde gelecekteki gözlenen w_{n+1} değerinin koşullu olasılık dağılım fonksiyonu $p(w_{n+1}|w_1...w_n)$ tarafından oluşturulduğu düşünülebilir. Yani w_{n+1} değerleri için olasılık dağılımı $w_1...w_n$ tarafından sağlanmıştır. Böylece durağanlık durumunda ne olasılık dağılımı ne de koşullu olasılık dağılımı zamana bağlı olarak değişme gösterir. Yani dizi durağan ise,

$$p(w_t...w_{t+k}) = p(w_{t+l}...w_{t+k+l}) \quad (2.15)$$

$$p(w_t) = p(w_{t+l}) \quad (2.16)$$

olur.

Dizinin durağan olduğu durumda dizinin ortalaması

$$\mu_w = E(w_t) \quad (2.17)$$

olur. Birbirinden farklı t ve l değerleri için $E(w_t) = E(w_{t+l})$ olur. Dizinin varyansı $\sigma_w^2 = E[(w_t - \mu_w)^2]$ şeklinde sabit olmalı ve $E[(w_t - \mu_w)^2] = E[(w_{t+l} - \mu_w)^2]$ olur. Sonuç olarak k gecikme için dizinin kovaryansı,

$$\gamma_k = Kov(w_t, w_{t+k}) = E[(w_t - \mu_w)(w_{t+k} - \mu_w)] \quad (2.21)$$

şeklinde durağan olması gerekir. Bunun sonucu olarak $Kov(w_t, w_{t+k}) = Kov(w_{t+l}, w_{t+l+k})$ olur.

Literatürde zamandan etkilenmeyen ortalaması, varyansı ve kovaryansı sabit olan durağan seriler *zayıf durağan* seriler olarak veya *ikinci mertebe*, geniş anlamda durağanlık olarak bilinir. Güçlü durağanlıkta sonlu ortalama veya varyansa gerek yoktur. Zayıf durağanlık güçlü durağanlığa göre daha kısıtlı şartları taşımaktadır [Box,Jenkins, 1976; Kutlar,2000]. Güçlü durağan bir zaman serisinin zayıf durağan olmasını, ayrıca zayıf durağan bir zaman serisinin de güçlü durağan olmasını gerektirmez [Box,Jenkins, Reinsel, 1994; Akdi,2003].

2.7. Otokorelasyon Fonksiyonu (ACF) ve Durağan Serilerde Örnek

Otokorelasyon Fonksiyonu

Bir stokastik süreci tamamen tanımlamak mümkün değildir. Bunun için süreci kısmen tanımlayan otokorelasyon fonksiyonu model oluşturmada önemli bir yere sahiptir. Otokorelasyon fonksiyonu bize, herhangi bir dizideki komşu veri noktalar arasında ne kadar korelasyon olduğunu gösterir. k gecikmeli otokorelasyon fonksiyonu,

$$\rho_k = \frac{E[(w_t - \mu_w)(w_{t+k} - \mu_w)]}{\sqrt{E[(w_t - \mu_w)^2(w_{t+k} - \mu_w)^2]}} = \frac{Cov(w_t, w_{t+k})}{\sigma_w \sigma_{w+k}} \quad (2.18)$$

şeklinde gösterilebilir. Bir durağan süreç için t dönemindeki varyans ile $t+k$ dönemindeki varyans değeri aynı olduğundan, yukarıdaki formülün paydasındaki değer bir sayılabilir;

$$\rho_k = \frac{E[(w_t - \mu_w)(w_{t+k} - \mu_w)]}{\sigma_w^2} \quad (2.19)$$

şeklinde ifade edilebilir. Son denklemdeki pay w_t ile w_{t+k} arasındaki kovaryans γ_k değeri olduğundan otokorelasyon fonksiyonu (ACF),

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \quad (2.20)$$

olur ve herhangi bir stokastik süreç için $\rho_0 = 1$ değerini alır.

Stokastik süreç basitçe $w_t = u_t$ şeklindedir. u_t sıfır ortalama ve bağımsız olarak dağılmış tesadüfi değişkenlerden oluşur. Bu süreç için otokorelasyon fonksiyonu $\rho_0 = 1$ ve $k > 0$ için $\rho_k = 0$ 'dır. Denklemdeki süreç *beyaz gürültü* olarak adlandırılır. Eğer otokorelasyon fonksiyonu $k > 0$ için sıfır ise, modeli tahmin etmek için çok az veya hiçbir değer bulunmamaktadır. Daha önce gördüğümüz Eş. 2.19 denklemi pür teorik otokorelasyon fonksiyonunu göstermektedir. Çünkü sınırlı sayıda tanımlanan stokastik sürecin sınırlı sayıdaki gözlemlerini tanımlar. Pratikte otokorelasyon fonksiyonunun tahmin değeri olan örnek otokorelasyon fonksiyonu kullanılır [Box-Jenkins, 1976; Kutlar, 2000].

Ele alınan durağan bir dizide örnek ortalama, varyans ve otokorelasyon değerleri kullanılarak gerçek veri üreten sürecin parametreleri tahmin edilebilir. n gözleme sahip bir dizide gerçek μ, σ^2, ρ_k değerleri yerine örnek $\bar{w}, \hat{\sigma}^2, \hat{\rho}_k$ değerleri aşağıdaki şekilde hesap edilebilir;

$$\bar{w} = \frac{\sum_{t=1}^n w_t}{n} \quad (2.21)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=1}^n (w_t - \bar{w})^2}{n} \quad (2.22)$$

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (w_t - \bar{w})(w_{t+k} - \bar{w})}{\sum_{t=1}^n (w_t - \bar{w})^2} \quad (2.23)$$

Otokorelasyon fonksiyonu simetriktir; yani, korelasyon pozitif ve negatif yer değiştirmeler için aynıdır; $\rho_k = \rho_{-k}$. Otokorelasyon fonksiyonunun değeri k gecikmesine karşı işaretlendiğinde sapmalar pozitifmiş gibi düşünülebilir [Box-Jenkins, 1976; Kutlar,2000].

$Var(\hat{\rho}_k)$ örnek otokorelasyonu $\hat{\rho}_k$ 'nın varyansını gösterebilir,

$$Var(\hat{\rho}_k) = n^{-1} \quad k=1 \quad (2.24)$$

$$Var(\hat{\rho}_k) = \frac{[1 + 2 \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\rho}_j^2]}{n} \quad k > 1 \quad (2.25)$$

şeklinde yazılır. Bilindiği üzere, korelasyon katsayısı (ρ) -1 ile +1 arasında değer almaktadır. Otokorelasyon katsayısı da zaman serileri arasındaki ilişkiyi ifade ettiğinden, -1 ile +1 arasında değer alır [Kadılar, 2005; Wei, 1990; Box Jenkins, 1976].

2.8. Kısmi Otokorelasyon Fonksiyonu (PACF) ve Durağan Serilerde Örnek

Kısmi Otokorelasyon Fonksiyonu

Kısmi korelasyon katsayısı da regresyondan bilindiği üzere, diğer değişkenler sabit iken iki değişken arasındaki ilişkiyi verir. Kısmi otokorelasyon katsayısı yine

benzer bakış açısıyla, zaman serisinin, diğer gecikmeli serilerin etkileri ihmal edilerek ilgili gecikmeye ait zaman serisi ile arasındaki ilişkidir. Örnek kısmi otokorelasyon fonksiyonu;

$$\hat{\phi}_{k+1,k+1} = \frac{\hat{\rho}_{k+1} - \sum_{i=1}^k \hat{\phi}_{ki} \hat{\rho}_{k+1-i}}{1 - \sum_{i=1}^k \hat{\phi}_{ki} \hat{\rho}_i} \quad (2.26)$$

$$\hat{\phi}_{k+1,j} = \hat{\phi}_{kj} - (\hat{\phi}_{k+1,k+1})(\hat{\phi}_{k,k+1-j}) \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (2.27)$$

Örnek kısmi otokorelasyonun standart hatası;

$$S_{\hat{\phi}_{kk}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (2.28)$$

olarak gösterilmektedir. Tüm gecikmelere ait kısmi otokorelasyon katsayısı değerleri kısmi otokorelasyon fonksiyonunu oluşturmaktadır [Kadılar, 2005; Wei, 1990; Box Jenkins, 1976].

2.9. Zaman Serileri Modelleri

Herhangi bir zaman serisinin durağan olabilmesi için, ortalaması, varyansı, kovaryansı ve daha yüksek dereceden momentleri zamana göre sabit olması gerekir. Eğer model durağan değilse dizinin durağanlaştırılması gerekir [Box and Jenkins, 1976].

Bu bölümde, bazı tek değişkenli doğrusal durağan zaman serileri ele alınacaktır. Pratikte, çok kullanılan zaman serileri modellerinin özellikleri incelenecektir. Hareketli ortalama $MA(q)$, otoregresif $AR(p)$ ve otoregresif hareketli ortalama $ARMA(p,q)$ modelleri incelenecektir.

2.9.1. Otoregresif AR(p) modelleri

p 'ninci dereceden (mertebeden) otoregresif sürece sahip gözlenen w_t serisi, w_t değerlerinin p dönem geriye doğru giden ağırlıklı ortalaması ile artık terimin toplam değerine eşittir. Bir otoregresif sürece sahip denklem aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$w_t = m + \phi_1 w_{t-1} + \phi_2 w_{t-2} + \dots + \phi_p w_{t-p} + u_t \quad (2.29)$$

Burada m bir sabittir, stokastik sürecin ortalaması ile ilgilidir. Eğer otoregresif süreç durağan ise ortalamayı μ ile gösterirsek ortalama, zamandan bağımsız olarak sabit kalır;

$E(w_t) = E(w_{t-1}) = E(w_{t-2}) = \dots = \mu$ olur ve $\mu = \phi_1 \mu + \phi_2 \mu + \dots + \phi_p \mu + m$ olmak üzere, aşağıdaki denklem yazılabilir;

$$\mu = \frac{m}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p} \quad (2.30)$$

Sürecin durağan olması için ortalamanın sonlu olması gerekir. Şayet bu şart sağlanmıyorsa dizi çıkış noktasından itibaren gittikçe artan bir trendle başlangıç noktasından uzaklaşır. Durağan olan bir dizide zorunlu olarak yukarıdaki denklemin paydası $1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p < 1$ olmalıdır. Bu şart durağanlık için zorunlu fakat yeterli değildir [Box-Jenkins, 1976; Kutlar, 2000].

Birinci dereceden (mertebeden) otoregresif AR(1) modeli

Otoregresif modellerin en basitinden yola çıkarak bu sürecin bazı özellikleri ele alınabilir;

$$w_t = m + \phi_1 w_{t-1} + u_t \quad (2.31)$$

$$\mu = \frac{m}{1 - \phi_1} \quad (2.32)$$

Şayet $|\phi_1| < 1$ ise dizi durağandır. AR(1) modelinin otokovaryans fonksiyonu,

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1}, \quad k \geq 1$$

olur. AR(1) için otokorelasyon fonksiyonu (ACF) $k=0$ için $\rho_0 = 1$ olur ve gittikçe sifıra yaklaşır.

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi_1^k \quad (2.33)$$

olur [Wei,1990; Kutlar, 2000].

İkinci dereceden (mertebeden) otoregresif AR(2) modeli

$$w_t = m + \phi_1 w_{t-1} + \phi_2 w_{t-2} + u_t \quad (2.34)$$

$$\mu = \frac{m}{1 - \phi_1 - \phi_2} \quad (2.35)$$

olur.

Bu modelin durağan olması için $\phi_1 + \phi_2 < 1$, $\phi_1 - \phi_2 < 1$ ve $-1 < \phi_2 < 1$ olmalıdır.

AR(2) için otokovaryans fonksiyonu $\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2}$, $k \geq 1$ olur.

Otokorelasyon fonksiyonu,

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} \quad (2.36)$$

$$\rho_2 = \phi_2 + \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} \quad (2.37)$$

$k \geq 2$ için

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} \quad (2.38)$$

genel denklemi kullanılır [Wei,1990; Kutlar,2000].

2.9.2. Hareketli ortalama MA(q) modelleri

q derecesindeki bir hareketli ortalama sürecinde, her gözlenen w_t , q değerine kadar gecikmesi uzanan artık terimlerin ağırlıklı ortalamasından ibarettir:

$$w_t = \mu + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2} - \dots - \theta_q u_{t-q} \quad (2.39)$$

denklemden parametreler negatif veya pozitif olarak gösterilebilir. Denklemden zaman boyunca artık terimler bağımsız beyaz gürültü süreci oluşturur. Yani artık terimler normal dağılıma, sabit varyansa, sıfır ortalamaya sahiptir $N(0, \sigma^2)$ ve kovaryansları sıfırdır ($\gamma_k = 0, k \neq 0$).

Hareketli ortalama sürecinin ortalaması $E(w_t) = \mu$ olduğundan, zamandan bağımsız her u_t değeri bir beyaz gürültü süreci tarafından üretildiğinden;

$E(u_t) = 0, E(u_t^2) = \sigma^2$ ve $E(u_t u_{t-k}) = 0 (k \neq 0)$ olur. Hareketli ortalamasının varyansı γ_0 ile gösterildiğinde,

$$\begin{aligned} Var(w_t) &= \gamma_0 = E(w_t - \mu)^2 \\ &= E(u_t^2 + \theta_1^2 u_{t-1}^2 + \dots + \theta_q^2 u_{t-q}^2 - 2\theta_1 u_t u_{t-1} - \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma_u^2 + \theta_1^2 \sigma_u^2 + \dots + \theta_q^2 \sigma_u^2 \\
&= \sigma_u^2 (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2)
\end{aligned} \tag{2.40}$$

sonucuna ulaşılır. w_t 'nin varyansının sonlu olduğu kabul edilir, aksi takdirde herhangi bir t döneminde başlayan stokastik süreç gittikçe başlangıç noktasından sapacaktır. Böyle bir durum varsayımımız için geçersiz olur. Eğer gerçekleşen w_t serisi durağan ise,

$$\sum_{i=1}^q \theta_i^2 < \infty \tag{2.41}$$

olmalıdır. Bir anlamda bu sonuç kaçınılmazdır. Çünkü sonlu θ_i değerlerinin kareleri toplamı da sonlu olacaktır. Oysa sonsuz sayıda gecikme değerlerinin katsayıları düşünüldüğünde, gecikme değeri arttıkça θ_i değeri azalacaktır.

Sonuçta Eş. 2.41 ifadesi sonlu olacaktır. Aşağıda hareketli ortalama modellerinin en basitlerinden olan ikisini ele alarak bu süreçle ilgili ortalama, varyans, kovaryans ve otokorelasyon fonksiyonları türetilacaktır [Box-Jenkins, 1976; Kutlar, 2000].

Birinci dereceden (mertebeden) hareketli ortalama MA(1) modeli

$$w_t = \mu + u_t - \theta_1 u_{t-1} \tag{2.42}$$

Bu modelin ortalaması μ ve varyansı $\gamma_0 = \sigma_u^2 (1 + \theta_1^2)$ 'a eşittir. Bir gecikme için kovaryans;

$$\gamma_1 = E[(w_t - \mu)(w_{t-1} - \mu)] = E[(u_t - \theta_1 u_{t-1})(u_{t-1} - \theta_1 u_{t-2})] = -\theta_1 \sigma_u^2 \tag{2.43}$$

k gecikme için;

$$\gamma_k = E[(u_t - \theta_1 u_{t-1})(u_{t-k} - \theta_1 u_{t-k-1})] = 0, k > 1 \tag{2.44}$$

olur.

MA(1) için bir dönemden sonra kovaryans değeri sıfır olur. Çünkü süreç sadece tek bir gecikmiş değere sahiptir. MA(1) süreci için otokorelasyon fonksiyonu aşağıdaki şekilde olur;

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} \rho = \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2} & k=1 \\ 0 & k>1 \end{cases} \quad (2.45)$$

[Box-Jenkins, 1976; Kutlar, 2000].

İkinci dereceden (mertebeden) hareketli ortalama MA(2) modeli

$$w_t = \mu + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2} \quad (2.46)$$

Bu modelin ortalaması μ ve varyansı $\gamma_0 = \sigma_u^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)$ 'a ve kovaryansı;

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= E[(u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2})(u_{t-1} - \theta_1 u_{t-2} - \theta_2 u_{t-3})] \\ &= -\theta_1 \sigma_u^2 + \theta_2 \theta_1 \sigma_u^2 \\ &= -\theta_1 (1 - \theta_2) \sigma_u^2 \end{aligned} \quad (2.47)$$

$k > 2$ için γ_0 olur.

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1(1-\theta_2)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} \quad (2.48)$$

$$\rho_2 = \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} \quad (2.49)$$

$k > 2$ için $\rho_k = 0$ olur.

Hareketli ortalama modellerinin q derecedeki gecikme için otokorelasyon fonksiyonu;

$$\begin{cases} \rho_k = \frac{-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2} & k = 1, \dots, q \\ 0 & k > q \end{cases} \quad (2.50)$$

şeklinde olur [Wei, 1990; Kutlar, 2000].

2.9.3. Otoregresif ve hareketli ortalama ARMA(p,q) modelleri

Çoğu durumda seriler tek başına AR(p) veya MA(q) süreçleri tarafından ifade edilemezler. Bu seriler otoregresif ve hareketli ortalama modellerinin toplamı şeklinde ifade edilirler. Bir ARMA(p,q) modeli,

$$w_t = m + \phi_1 w_{t-1} + \dots + \phi_p w_{t-p} + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \dots - \theta_q u_{t-q} \quad (2.51)$$

şeklinde gösterilebilir.

Sürecin durağan olduğunu kabul ettiğimizde ortalaması zaman boyunca sabit kalacaktır.

$$\mu = \frac{m}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p}$$

Sürecin durağanlığı için zorunlu şart, $1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p < 1$ olması gerekir [Box, Jenkins, 1976; Kutlar, 2000].

ARMA(1,1) modeli

$$w_t = m + \phi_1 w_{t-1} + u_t - \theta_1 u_{t-1} \quad (2.52)$$

Sürecin varyans ve kovaryansını ele alalım (m=0);

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= E(w_t(\phi_1 w_{t-1} + u_t - \theta_1 u_{t-1})) = E[(\phi_1 w_{t-1} + u_t - \theta_1 u_{t-1})]^2 \gamma_0 \\ &= \phi_1^2 \gamma_0 - 2\phi_1 \theta_1 E(w_{t-1} u_{t-1}) + \sigma_u^2 + \theta_1^2 \sigma_u^2 \end{aligned} \quad (2.53)$$

Denklemden $E(w_{t-1} u_{t-1}) = \sigma_u^2$ olduğundan, elde edeceğimiz denklem,

$$\gamma_0(1 - \phi_1^2) = \sigma_u^2(1 + \theta_1^2 - 2\phi_1 \theta_1) \quad (2.54)$$

şekline gelir, buradan da varyansı bulursak,

$$\gamma_0 = \frac{(1 + \theta_1^2 - 2\phi_1 \theta_1)}{(1 - \phi_1^2)} \quad (2.55)$$

olur.

Şimdi de kovaryans değerlerini bulmaya çalışırsak;

$$\gamma_1 = E(w_{t-1}(\phi_1 w_{t-1} + u_t - \theta_1 u_{t-1})) \quad (2.56)$$

$$\phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_u^2 = \frac{(1 - \phi_1 \theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{(1 - \phi_1^2)} \sigma_u^2 \quad (2.57)$$

sonucuna ulaşılır. γ_2 için aynı işlemlere devam edildiğinde,

$$\gamma_2 = E(w_{t-2}((\phi_1 w_{t-1} + u_t - \theta_1 u_{t-1}))) = \phi_1 \gamma_{k-1} \quad (2.58)$$

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} \quad (2.59)$$

$k \geq 2$ olmalıdır. Otokorelasyon fonksiyonu,

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{(1 - \phi_1 \theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{(1 + \theta_1^2 - 2\phi_1 \theta_1)} \quad (2.60)$$

olarak elde edilir. k birden büyük değerler için aşağıdaki genel formül kullanılır;

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} \quad (k \geq 2) \quad (2.61)$$

Otokorelasyon fonksiyonu ρ_1 'den başlayıp gittikçe azalır [Box,Jenkins, 1976; Kutlar, 2000].

2.10. Tek Değişkenli Zaman Serilerinde Modelleme

Bu kısımda genel olarak düşünülecek model, ARMA(p,q) olacaktır. Bir zaman serisinin modellenmesinde ve tanımlanmasında kullanılan önemli araçlardan bazıları şunlardır: Varyans, otokovaryans, otokorelasyon, kısmi otokorelasyon fonksiyonları ve korelogram gibi diğer grafikler. Öyleyse, verilen bir zaman serisinde kabaca modeli belirlemek için genellikle sırasıyla şu aşamalar uygulanır;

Zaman serisinin modelinin belirlenmesi için öncelikle verinin plotu çizilmelidir. Verinin plotu dikkatle incelendiğinde veri hakkında genel bilgiler elde edilebilir; trend, mevsimsellik, aykırı değer, değişen ve değişmeyen varyans ile diğer doğrusal olmayan ve durağan olmayan durumlar kabaca görülebilir. Bu ise çoğunlukla gerekebilecek dönüşümlerin yapılabilmesine yardımcı olur. Daha sonra, orijinal dizinin örnek ACF ve PACF'leri elde edilerek, grafikleri çizilir ve incelenir. Verinin plotu ve örnek ACF ve PACF grafikleri dikkate alınarak, gerekiyorsa uygun

düzgünleştirme ya da fark alma işlemlerinden sonra yeni dizinin plotu çizilip, örnek ACF ve PACF'ler yeniden hesaplanır ve grafikleri çizilerek incelenir.

Yukarıdaki maddelerin ışığında, p ve q 'nın kabaca dereceleri belirlenir. ACF ve PACF'ler bazı teorik modeller için şöyle özetlenmektedir.

Çizelge 2.1. Tek değişkenli durağan Box- Jenkins modellerinde ACF ve PACF grafiklerinin durumları

Model	ACF	PACF
AR(p)	Üstel veya sinüzoidal olarak azalır	p gecikmeden sonra aniden kesilir
MA(q)	q gecikmeden sonra aniden kesilir	Üstel veya sinüzoidal olarak azalır
ARMA(p,q)	$(p-q)$ gecikmeden sonra azalır	$(p-q)$ gecikmeden sonra azalır

Yukarıdaki veriler, modelleme açısından şöyle yorumlanabilir. ACF'ler MA(q) modellerinin kabaca derecesini verirler. PACF değeri, AR(p) modellerinin derecesini kabaca belirlenmesine yardımcı olur. ACF ve PACF'lerin her ikisinde birlikte yorumlandığında ise, ARMA(p,q) modelinin kabaca derecesinin belirlenmesini sağlar.

Kabaca modelin derecesinin belirlenmesinden sonra sıra bunlara ilişkin parametrelerin tahminine gelir. Bunun için literatürde geçen üç farklı parametre tahmin yöntemi vardır. Bunlar, momentler yöntemi, en çok olabilirlik yöntemi ve bilinen en küçük kareler yöntemidir.

Parametre tahminlerinin elde edilmesi aşamasından sonra bu modelin veriye uygun olup olmadığı artık terimlere dayalı olarak incelenir. Bu inceleme u_t 'lerin beyaz gürültü sürecine sahip olması, normal dağılması ve artıklara ilişkin otokorelasyonların sıfır olması gerekliliği üzerinedir. Modelin uygunluğunun incelenmesi üzerine bir başka yaklaşım ise artıkların örnek ACF'lerinin kullanılarak test istatistiği kurulmasıdır [Wei, 1990; Kasap 1998].

Bir modelleme sürecinde birden fazla alternatif model varsa, bunlardan en iyisini seçmek için literatürde birden çok model seçme ölçütü vardır. Bunlardan en sık kullanılanları AIC (Akaike Information Criteria, Akaike Bilgi Kriteri) ve SC (Schwarz Criteria, Schwarz Kriteri) bilgi ölçütleridir. Bu ölçütlere göre en iyi model AIC ve SC değerlerine göre değeri sayısal olarak en küçük olan modeldir [Grasa, 1989, Lutkepohl, 1991].

2.11. Tek Değişkenli Zaman Serilerinde Modelin Uygunluğunun İncelenmesi

Eldeki veriye uygun model kurmanın en önemli aşamalarından biri modeli doğru bir şekilde teşhis edebilmektir. İlgilenilen durum tahmin edilen modelin artıklarının beyaz gürültü olup olmamasıdır. Yani eldeki dizinin hangi zaman serisi modeline uyduğuna bakılmaktadır. İki yoldan eldeki dizinin hangi zaman serisi modeline uyduğuna bakılabilir. Birinci tercih, serilerin kendi grafikleri dışında ACF ve PACF grafiklerine bakmaktır. Grafik, ACF ve PACF'nin gecikmelerini gösterir. Bununla beraber, bu grafikler durağanlık yapıları hakkında da bilgi verilmesinde katkı sağlarlar. İkinci tercih, artıkların m gecikmede sıfıra eşit olduğu (H_0) yokluk hipotezini test etmek için bir test istatistiği kurmaktır [Arranz, 2005].

İkinci yaklaşımda kullanılan test istatistiği, Portmanteau istatistiği olarak ifade edilir. Model uygunluğunun incelenmesinde Portmanteau istatistiklerinden faydalanılır [Battaglia, 1990]. Bu çalışmada modifiye edilmiş Ljung-Box (1986) Portmanteau test istatistiği kullanılmaktadır.

Ljung-Box test istatistiği

Yukarıda bahsedildiği gibi model uygunluğunun incelenmesi üzerine bir diğer yaklaşım ise artıkların örnek ACF'leri için kullanılan test istatistiklerinin yapılmasıdır. Bunun için hipotez aşağıdaki gibi kurulur.

H_0 : Model uygundur.

H_1 : Model uygun değildir.

Box-Pierce 1970 yılında model uygunluğunun incelenmesinde yaklaşık olarak m serbestlik dereceli ki kare dağılımına sahip aşağıdaki Q_{BP} istatistiğini türetmişlerdir [Box,Pierce, 1970].

$$Q_{BP} = n \sum_{k=1}^m r_k^2 \quad (2.62)$$

[Ljung ve Box, 1978] ve [Prothero ve Wallis, 1976] Q_{LB} istatistiğinin kullanımını önermişler ve aşağıdaki test istatistigini türetmişlerdir,

$$Q_{LB} = n(n+2) \sum_{k=1}^m r_k^2 / (n-k) \quad (2.63)$$

Yukarıda Eş. 2.63’de ifade edilen Ljung-Box test istatistiğinin elde edilmesinde de kullanılmakta olan artıkların otokorelasyon katsayısı,

$$r_k = \sum_{t=k+1}^n u_t u_{t-k} / \sum_{t=1}^n u_t^2, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (2.64)$$

kullanılmaktadır.

Burada $r = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ sıfır ortalama ve $Var(r_k) = (n-k) / \{n(n+2)\}$ varyans, $Kov(r_k, r_1) = 0$ ($k \neq 1$) ile çok değişkenli normal dağılıma sahip olduğundan büyük n için artıkların otokorelasyon katsayısı m serbestlik dereceli ki-kare dağılır [Box and Pierce, 1970].

Artık otokorelasyonlarının dağılımı $N(0, n^{-1} I_m)$ olduğundan, hem Ljung-Box’ın Q_{LB} ’sinin, hem de Box-Pierce’nin Q_{BP} ’sinin yaklaşık dağılımları m serbestlik

dereceli ki kare dağılır ve beklenen değerleri m ve varyansları $2m$ olur. Sonlu sayıdaki n değeri için Q_{LB} 'nin beklenen değeri m 'dir, oysa,

$$E(Q_{BP}) = \frac{mn}{n+2} \left(1 - \frac{m+1}{2n} \right) \quad (2.65)$$

şeklinde yazılır. Burada n , m 'den daha büyük olmadıkça, $E(Q_{BP})$ m 'den daha küçük olacaktır. Ayrıca m 'den büyük n 'ler için sırasıyla Q_{BP} ve Q_{LB} varyansları ,

$$V(Q_{BP}) = 2m \left(1 + \frac{m-10}{n} \right) \quad V(Q_{LB}) = 2m \left(1 + \frac{2m-5}{n} \right) \quad (2.66)$$

şeklinde yazılır. Burada Q_{LB} 'nin varyansı $2m$ değerini aşar, ancak dağılımının m serbestlik dereceli ki kareye Q_{BP} 'nin dağılımından çok daha yakın olduğu Monte Carlo benzetim yöntemiyle gösterilmiştir [Box, Pierce, 1970; Ljung, Box, 1978].

Literatürde bu test istatistiğinin ve model uygunluğunun belirlenmesinde kullanılan diğer Portmanteau test istatistiklerinin yapıları ve dağılımları hakkında daha ayrıntılı bilgiler verilmiştir [Box, Pierce, 1970; Ljung, Box, 1978; Davies, Triggs ve Newbold, 1977; Sancak, 2008].

3. ZAMAN DİZİLERİNDE ARTIK TÜRLERİ

Artıkların 4 farklı türü olarak, “koşullu artıklar”, “koşulsuz artıklar”, “inovasyonlar (yenileştirme artıkları)” ve “normalleştirilmiş artıklar” hesaplamaları ve model uygunluğunun incelenmesi uygulamalarına göre sınıflandırılmaktadır.

Artıklar eldeki veriye uygun modelin belirlenmesinde önemli rol oynarlar. Genel yaklaşım hesaplanan artıkların desenleri ile uygun model kullanıldığındaki beklenen yaklaşık dağılımlarının karşılaştırılmasını içerir. Bu nedenle, model uygunluğunun incelenmesinde hangi artıkların kullanılması gerektiği, ve bu artıkların hangi dağılım özelliğinde şekil göstermeleri gerektiği önemlidir. Artıkların önemi vurgulanmalıdır, çünkü gözlenmiş yapılarının plotlarındaki basit otokorelasyonlar (olası dışarı uzantılar (outliers)) uygunsuz model yapısına işaret eder. Bu fikri uygulamada olabildiğince etkili kullanabilmek için, model uygunluğunun incelenmesinde kullanılan artıkların genel yapısı olabildiğince iyi bilinmelidir [Mauricio, 2008].

3.1. Tek Değişkenli ARMA Modelinde Artık Tanımlaması ve Hesaplaması

$\{W_t\}$ durağan sürecinden $w = [w_1, w_2, \dots, w_n]'$ gözlemlenmiş zaman serisi olsun.

$\phi(B)\tilde{W}_t = \theta(B)A_t$ Eş. 3.1 teorik gösteriminde $\phi(B) = 1 - \sum_{i=1}^p \phi_i B^i$ ve $\theta(B) = 1 - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i$

p ve q derecelerine göre B 'li polinomlardır. B gecikme operatörü, $\tilde{W}_t = W_t - E[W_t]$ ve $\{A_t\}$ varyansı $\sigma^2 > 0$ olan beyaz gürültü sürecidir. $t = 1, 2, \dots, n$ için Eş. 3.1 gösterimi göz önünde bulundurulursa $\tilde{W} = [\tilde{W}_1, \tilde{W}_2, \dots, \tilde{W}_n]'$, $A = [A_1, A_2, \dots, A_n]'$ ve $U_* = [\tilde{W}_{1-p}, \dots, \tilde{W}_0, A_{1-q}, \dots, A_0]'$ şeklindedir.

$W = [W_1, W_2, \dots, W_n]'$ rastgele vektöründen kısmi olarak elde edilen gözlenmiş zaman serisi $w = [w_1, w_2, \dots, w_n]'$ olsun. Buradan Eş. 3.1'deki model;

$$D_\phi \hat{W} = D_\theta A + VU_* \quad (3.2)$$

olarak yazılırsa D_ϕ ve D_θ parametre matrisleri $n \times n$ boyutlu ana köşegenleri birlerden ve j . altköşegenleri $-\phi_j$ ve $-\theta_j$ 'den oluşan köşegen matrislerdir.

$$V, n \times (p+q) \text{ boyutlu}; V_{ij} = \phi_{p+i-j} (i=1, \dots, p; j=1, \dots, p)$$

ve $V_{ij} = -\theta_{q+i-j+p} (i=1, \dots, q; j=p+1, \dots, p+q)$ kalan elemanları ise sıfır olan bir matristir.

Tahmin edilmiş ARMA modellerinden artıkların hesabı için farklı yaklaşımlar içerisinde Eş. 3.1 ve Eş. 3.2'deki tek değişkenli dağılımlar için en çok olabilirlik yaklaşımı göz önünde bulundurulur.

$\{W_t\}$ 'nin Gauss süreci olduğu varsayımı altında en çok olabilirlik yöntemiyle verilen parametre tahminleri seti $\hat{\beta} = [\hat{\mu}, \hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_p, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_q]'$ ve $\hat{\sigma}^2$ şu şekilde yazılabilir;

$$\log L(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2 | w) = -\frac{1}{2} [n \log(2\pi\hat{\sigma}^2) + \log |\hat{\Sigma}_w| + \hat{\sigma}^{-2} \tilde{w}' \hat{\Sigma}_w^{-1} \tilde{w}] \quad (3.3)$$

Burada;

$\tilde{w} = [\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_n]'$ ve $\tilde{w}_t = w_t - \hat{\mu}$ olarak tanımlanır. $\hat{\mu}$, $E[W_t]$ 'nin tahmini, $n \times n$ 'lik $\hat{\Sigma}_w$, teorik otokovaryans matrisi $\Sigma_w = \sigma^{-2} E[\tilde{W}\tilde{W}']$ 'nin tahminidir. Eş. 3.2'deki eşitlikten otokovaryans matrisi şu şekilde verilebilir;

$$\Sigma_w = D_\phi^{-1} (D_\phi D_\theta' + V \Omega V') D_\phi^{-1} = K^{-1} (I + Z \Omega Z') K^{-1} \quad (3.4)$$

Eş. 3.4'de $K = D_\theta^{-1} D_\phi$, $Z = -D_\theta^{-1} V$ ve $\Omega = \sigma^{-2} E[U_* U_*']$ 'dir. Eş. 3.4 eşitliği kullanılarak Eş. 3.3'teki $\tilde{w}' \hat{\Sigma}_w^{-1} \tilde{w}$ şu şekilde yazılabilir [Ljung Box, 1979];

$$\tilde{w}' \hat{\Sigma}_w^{-1} \tilde{w} = \tilde{w}' \hat{K}' (I + \hat{Z} \hat{\Omega} \hat{Z}') \hat{K} \tilde{w} \quad (3.5)$$

Buradaki $\hat{K}$, $\hat{Z}$ ve $\hat{\Omega}$ Eş. 3.4'te tanımlanan parametre matrislerinin tahminlerini simgelemektedir. Eş. 3.5'teki eşitlik göz önüne alınarak artıklar 3 farklı sınıfta tanımlanabilirler;

3.1. Tanım. Koşullu artıklar

Koşullu artıklar, Eş. 3.5 ile ilişkilendirilerek $n \times 1$ 'lik $\hat{a}_0 = \hat{K} \tilde{w}$ vektörü şeklinde tanımlanır.

3.2. Tanım. Koşulsuz artıklar

Koşulsuz artıklar Eş. 3.5 ile ilişkilendirilerek $n \times 1$ 'lik $\hat{a} = (I + \hat{Z} \hat{\Omega} \hat{Z}')^{-1} \hat{K} \tilde{w} = \hat{\Sigma}_0^{-1} \hat{a}_0$ vektörü şeklinde tanımlanır.

Burada $\hat{\Sigma}_0$, $\Sigma_0 = I + Z \Omega Z' = [I - Z(\Omega^{-1} + Z'Z)^{-1}Z']^{-1}$ 'nin tahminidir.

3.3. Tanım. İnovasyonlar (yenileştirme artıkları)

İnovasyon artıklar Eş. 3.5 ile ilişkilendirilerek $n \times 1$ 'lik $\hat{e} = \hat{L}^{-1} \tilde{w} = (\hat{K} \hat{L})^{-1} \hat{a}_0$ vektörü şeklinde tanımlanır. Buradaki $\hat{L}$ aşağıda tanımlanacak $n \times n$ boyutlu L alt üçgen matrisinin tahminidir.

$$\Sigma_w = LFL' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ L_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L_{21} & \dots & L_{n1} \\ 0 & 1 & \dots & L_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_t > 0 \quad (t = 1, 2, \dots, n)$$

Tanım 3.1- Tanım 3.3 kullanarak şu 4'lü eşitlik yazılabilir;

$$\tilde{w}' \hat{\Sigma}_w^{-1} \tilde{w} = \hat{a}_0' \hat{\Sigma}_0^{-1} \hat{a}_0 = \hat{a}' \hat{\Sigma}_0 \hat{a} = \hat{e}' \hat{F}^{-1} \hat{e}$$

$\hat{F}$, F köşegen matrisinin tahminidir. Ayrıca $|\hat{\Sigma}_w|$, $|\hat{\Sigma}_0|$ ve $|\hat{F}|$ birbirlerine eşittir, bundan dolayı Eş. 3.3'te verilen en çok olabilirlik fonksiyonunda, tanımlanan üç artık tipi de kullanılabilir. İzleyen gözlemler artıkların tanımlarındaki bazı farklılıkları ve klasik zaman serileri analizinde artıkların genel fikrini içermektedir.

3.1. Gözlem

Eş. 3.2'de verilen tek değişkenli ARMA modeli $A = K\tilde{W} + ZU_*$ şeklinde yazılabilir. Burada K ve Z , Eş. 3.4'de tanımlandığı gibidir. Böylece verilen bir parametre tahmini seti için koşullu artık vektörü şu şekilde yazılabilir;

$$\hat{a}_0 = \hat{K}\tilde{w} = \hat{E}[A|W = w, U_* = 0]. \quad (3.6)$$

Burada, verilen w gözlenmiş zaman serisi ve $U_* = 0$ koşulu altında A vektörünün beklenen değerinin tahminini simgelenmektedir ($\tilde{W}_{1-p} = \dots = \tilde{W}_0 = A_{1-p} = \dots = A_0 = 0$ koşulu altında). Diğer taraftan Tanım 3.2'deki koşulsuz artık vektörü şu şekilde yazılabilir;

$$\begin{aligned} \hat{a} &= (I + \hat{Z}\hat{\Omega}\hat{Z}')^{-1} \hat{K}\tilde{w} = [I - \hat{Z}(\hat{\Omega}^{-1} + \hat{Z}'\hat{Z})^{-1} \hat{Z}'] \hat{K}\tilde{w} \\ &= \hat{K}\tilde{w} - \hat{Z}(\hat{\Omega}^{-1} + \hat{Z}'\hat{Z})^{-1} \hat{Z}' \hat{K}\tilde{w} = \hat{K}\tilde{w} + \hat{Z}\hat{u}_* \end{aligned}$$

Burada $\hat{u}_*$, $-(\hat{\Omega}^{-1} + \hat{Z}'\hat{Z})^{-1} \hat{Z}' \hat{K}\tilde{w}$ olarak tanımlanır. w gözlenmiş zaman serileri verildiğinde ve herhangi bir ek koşul söz konusu değil iken A 'nın beklenen değerinin tahmini;

$$\hat{a} = \hat{K}\tilde{w} + \hat{Z}\hat{u}_* = \hat{E}[A|W = w] \quad (3.7)$$

3.2. Gözlem

$\hat{a}_0 = \hat{K}\tilde{w}$ ve $K = D_\theta^{-1}D_\phi$ eşitliklerinden $\hat{D}_\theta\hat{a}_0 = \hat{D}_\phi\tilde{w}$ olarak yazılabilir. $\hat{a}_0$, verilen $\hat{\mu}, \hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_p, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_q$ parametre tahmin setinden şu şekilde hesap edilebilir;

$$\hat{a}_{0t} = w_t - [\hat{\mu} + \sum_{i=1}^p \hat{\phi}_i(w_{t-i} - \hat{\mu}) - \sum_{i=1}^q \hat{\theta}_i \hat{a}_{0t-i}] \quad (t = 1, 2, \dots, n)$$

Burada $w_j = \hat{\mu} (w_j - \hat{\mu} = 0)$ ve $j < 1$ iken $\hat{a}_{0j} = 0$ 'dır. Diğer taraftan Eş. 3.7'deki eşitlikten $K = D_\theta^{-1}D_\phi$ ve $Z = -D_\theta^{-1}V$ olduğu hatırlanırsa $\hat{D}_\theta\hat{a} = \hat{D}_\phi\tilde{w} - \hat{V}\hat{u}_*$ yazılabilir. Böylece $\hat{a}$, verilen parametre tahmin seti için şu şekilde hesaplanabilir;

$$\hat{a}_t = w_t - [\hat{\mu} + \sum_{i=1}^p \hat{\phi}_i(w_{t-i} - \hat{\mu}) - \sum_{i=1}^q \hat{\theta}_i \hat{a}_{t-i}] \quad (t = 1, 2, \dots, n)$$

Burada $w_j - \hat{\mu}$ için $j = 1 - p, \dots, 0$ ve $\hat{a}_j$ için $j = 1 - q, \dots, 0$ 'dır.

3.3. Gözlem

ARMA model yapılandırma literatüründe başka artık türleri de daha önceki dönemlerde göz önünde bulundurulmuştur. Örneğin, bu artıklardan uygulamada sıkça kullanılanlardan biri şu şekilde ifade edilebilir;

$$\hat{c}_t = w_t - [\hat{\mu} + \sum_{i=1}^p \hat{\phi}_i(w_{t-i} - \hat{\mu}) - \sum_{i=1}^q \hat{\theta}_i \hat{c}_{t-i}] \quad (t = p + 1, \dots, n)$$

$j < p+1$ için $\hat{c}_j$ ya sıfır alınır ya da mevcut veriden geriye dönük tahmin edilir. Bu nedenle bu tip artıklarda p 'nin baştaki değerleri için $\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_p$ değerleri genelde bilgi vermez, bu da önemli derecede bilgi kaybına sebep olur [Mauricio, 1995; Mauricio, 2008].

3.2. Tek Değişkenli Modellerde Artık Özellikleri

Yukarıda tanımlanan 3 artık tipi ve bunlara ek olarak ileride tanımlanacak olan “normalleştirilmiş artıklar”ın her biri birbirinden farklıdır. Bu bazı bilgisayar programlarının benzer parametre tahminleri bulmalarına rağmen neden farklı artık değerleri hesapladığını açıklamaktadır. Tek değişkenli modellerde artık özellikleriyle ilgili bazı teoremler şunlardır ;

3.1. Teorem

Eş. 3.2'deki durağan modelin gerçek parametre değerleri $\mu, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q$ bilindiği varsayımı altında Tanım 3.1'de verilen koşullu artıklar, $\hat{A}_0 = K\tilde{W}$ rastgele vektörüyle ilişkilendirilirse;

$$(A) \quad E[\hat{A}_0] = 0, Var[\hat{A}_0] = \sigma^2(I + Z\Omega Z') \text{ ve}$$

$$(B) \quad E[(\hat{A}_0 - A)(\hat{A}_0 - A)'] = \sigma^2 Z\Omega Z' \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

İspat

(A) kısmı $\hat{A}_0 = K\tilde{W}$, $E[\tilde{W}] = 0$ ve $Var[\tilde{W}] = \sigma^2 \Sigma_w$ olduğundan dolayı ortaya çıkar. (B) kısmı $\hat{A}_0 - A = -ZU_*$ ve Ω 'nın tanımından ortaya çıkar.

3.2. Teorem

Eş. 3.2'deki durağan modelin gerçek parametre değerleri $\mu, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q$ bilindiği varsayımı altında Tanım 3.2'de verilen koşulsuz artıklar, $\hat{A} = \Sigma_0^{-1} \hat{A}_0$ rastgele vektörüyle ilişkilendirilirse;

$$(A) \quad E[\hat{A}] = 0, \text{Var}[\hat{A}] = \sigma^2 (I + Z\Omega Z')^{-1} \text{ ve}$$

$$(B) \quad E[(\hat{A} - A)(\hat{A} - A)'] = \sigma^2 Z(\Omega^{-1} + Z'Z)^{-1} Z' \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

İspat

Teorem 1'deki (A) kısmı ve Tanım 2'den $\Sigma_0 = I + Z\Omega Z' = [I - Z(\Omega^{-1} + Z'Z)^{-1} Z']^{-1}$ olduğu hatırlanırsa buradan (A) kısmı görülebilir. (B) kısmı, $\hat{A}_0 - A = -ZU_*$ olduğu hatırlanırsa, $\hat{A} - A = \hat{\Sigma}_0^{-1} \hat{A}_0 - A = \hat{\Sigma}_0^{-1} (A - ZU_*) - A = -[(I - \hat{\Sigma}_0^{-1})A + \hat{\Sigma}_0^{-1} ZU_*]$ eşitliğinden ve $E[(\hat{A} - A)(\hat{A} - A)'] = \sigma^2 [(I - \hat{\Sigma}_0^{-1})(I - \hat{\Sigma}_0^{-1}) + \hat{\Sigma}_0^{-1} \hat{Z}\hat{\Omega}\hat{Z}'\hat{\Sigma}_0^{-1}]$ 'dan elde edilebilir.

3.3. Teorem

(Koşullu ve koşulsuz artıkların kovaryansı) Teorem 3.1 ve Teorem 3.2 yaklaşımları altında, tersi alınabilir durağan ARMA modeli ek olarak şunları açıklar;

Artan i ve sabit j için (küçük ya da büyük değerlerde);

$$(A) \quad E[(\hat{A}_{0i} - A_i)^2] \rightarrow 0, E[\hat{A}_{0i}^2] \rightarrow \sigma^2, \text{ ve } E[\hat{A}_{0i}\hat{A}_{0j}] \rightarrow 0 (i \neq j)$$

Artan i ve sabit j için (küçük ya da büyük değerlerde);

$$(B) \quad E[(\hat{A}_i - A_i)^2] \rightarrow 0, E[\hat{A}_i^2] \rightarrow \sigma^2, \text{ ve } E[\hat{A}_i \hat{A}_j] \rightarrow 0 \quad (i \neq j)$$

Ayrıca $i \geq p+1$ ve $j \geq 1$ için ve $q = 0$ iken (A) ve (B) aynen sağlanır.

İspat

$Z = -D_\theta^{-1}V$ olduğu hatırlanırsa, Teorem 1'in (B) kısmı şu şekilde yazılabilir;

$$E[(\hat{A}_0 - A)(\hat{A}_0 - A)'] = \sigma^2 D_\theta^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \Omega V_1' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} D_\theta^{-1} = \sigma^2 H V_1 \Omega V_1' H' \quad (3.8)$$

Burada V_1 , $g \times (p+q)$ boyutlu olan, V 'nin satırlarından ilk g tanesini ($g = \max\{p, q\}$) içerecek şekilde bir matristir. H ise D_θ^{-1} köşegen matrisinin ilk g sütununu içeren $n \times g$ boyutlu matristir.

Benzer şekilde Teorem 3.2'nin (B) kısmı şu şekilde yazılabilir;

$$\begin{aligned} E[(\hat{A} - A)(\hat{A} - A)'] &= \sigma^2 D_\theta^{-1} \begin{bmatrix} V_1(\Omega^{-1} + Z'Z)^{-1}V_1' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} D_\theta^{-1}, \\ &= \sigma^2 H V_1(\Omega^{-1} + Z'Z)^{-1}V_1' H' \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ek olarak Teorem 3.1 ve Teorem 3.2 şunları belirtir;

$$Var[\hat{A}_0] = \sigma^2 I + E[(\hat{A}_0 - A)(\hat{A}_0 - A)'] \quad (3.10)$$

$$Var[\hat{A}] = \sigma^2 I - E[(\hat{A} - A)(\hat{A} - A)'] \quad (3.11)$$

Verilen 3 teorem durağan bir modelin gerçek parametrelerinin bulunduğu varsayımı altında şu şekilde özetlenebilir;

$$(i) \quad \hat{A}_0 = K\tilde{W} \sim (0, \sigma^2 \Sigma_0), \quad \Sigma_0 = I + Z\Omega Z'$$

$$(ii) \quad \hat{A} = \Sigma_0^{-1} \hat{A}_0 \sim (0, \sigma^2 \Sigma_0^{-1}) \quad \Sigma_0^{-1} = I - Z(\Omega^{-1} + Z'Z)^{-1}Z'$$

Ek olarak tersinir olan (tersi alınabilir) bir model varsayımı altında;

(iii) Hem koşullu hem de koşulsuz artıklar beyaz gürültü sürecine yakınsarlar.

(iv) Hem koşullu hem de koşulsuz artıklar ilişkisizdirler (korelasyon yoktur).
 $Var[\hat{A}_{0t}]$ üstten, $Var[\hat{A}_t]$ alttan σ^2 'ye yaklaşır.

(iii) ve (iv) $t = p + 1$ iken gerçekleşir.

Tanım 3.1 ve Tanım 3.2'de hesaplanan koşullu ve koşulsuz artıkların gözlenen görüntüleri teorik yapılarından dolayı model uygunluğunun incelenmesinde model uygunsuzluğuna işaret edebilir. Teorem 3.3'den , sınaması yapılacak modelin en az bir kökü olan veya birim çembere yakın olan hareketli ortalama değeri içerirken özellikle küçük gözlem sayıları için bu olayın gerçekleşmesi daha mümkün görünmektedir.

Yukarıda $Var[\hat{A}_{0t}]$ 'nin üstten, $Var[\hat{A}_t]$ 'nin alttan σ^2 'ye yaklaştığı belirtilmişti. Bu nedenle verilen zaman serisi için koşullu artıkların hesaplanması koşulsuz artıkların hesaplanmasından daha etkin bilgi sağlar.

3.4. Gözlem

Eş. 3.3'teki durağan modelin $\mu, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q$ gerçek parametre değerleri varsayımı altında inovasyonların teorik özellikleri bulunabilir. Tanım 3.3'ü izleyecek şekilde $\hat{E} = L^{-1}\tilde{W} \sim (0, \sigma^2 F)$ gösterimi $E[\hat{E}_t] = 0, V[\hat{E}_t] = \sigma^2 F_t$ ve $Cov[\hat{E}_t, \hat{E}_{t+k}] = 0$ ($t = 1, 2, \dots, n; k \neq 0$) olmasını açıklar. Ayrıca $\hat{E}$ inovasyon vektörü

Teorem 3.1- Teorem 3.3'deki $\hat{A}_0$ ve $\hat{A}$ için verilen benzer teorik özellikleri gösterir [Mauricio, 2008].

3.3. Tek Değişkenli Modellerde Artıklarla Model Uygunluğunun Sınanması

Özellikle küçük çaplı örnekler ve hareketli ortalama parametreleri tersi alınamaması durumuna yakinken, bu üç tip artıktan hiç birisi için model tahmininden sonraki hesaplamalarında beyaz gürültü yapısı göstermeleri beklenmez. Bununla birlikte $\Sigma_0 = I + Z\Omega Z' = PP'$ olacak şekilde bir P alt üçgen matrisinin tanımlarsak ve Teorem 3.1 ve Teorem 3.2'nin (A) kısımları ile Gözlem 3.4'ü göz önünde bulundurursak $P^{-1}\hat{A}_0, P'\hat{A}$ ve $F^{-1/2}\hat{E}$, $(0, \sigma^2 I)$ dağılımına sahiptir.

$$P'\hat{A} = P'\Sigma_0^{-1}\hat{A}_0 = P'(PP')^{-1}\hat{A}_0 = P^{-1}\hat{A}_0, \text{ Eş.3.5 ve Eş 3.10'dan;}$$

$$\Sigma_w = K^{-1}PP'K^{-1} = LF^{1/2}F^{1/2}L' \text{ olarak yazılabilir.}$$

Bununla birlikte,

$$F^{-1/2}\hat{E} = F^{-1/2}L^{-1}\tilde{W} = (LF^{1/2})^{-1}K^{-1}\hat{A}_0 = (K^{-1}P)^{-1}K^{-1}\hat{A}_0 = P^{-1}\hat{A}_0 \text{ 'dır.}$$

Buradan,

$$P^{-1}\hat{A}_0 = P'\hat{A} = F^{-1/2}\hat{E} \tag{3.12}$$

yazılabilmesi bize, durağan modelin gerçek parametre değerleri bilindiği varsayımı altında bir beyaz gürültü süreci vektörü olan normalleştirilmiş artıkların, koşullu, koşulsuz veya inovasyon artıklardan herhangi biri kullanılarak tanımlanabileceğini göstermektedir.

Ayrıca $\hat{A}_0 = A - ZU_*$ olduğu göz önüne alınırsa, Eş. 3.12'nin ilk kısmı

$P^{-1}\hat{A}_0 - A = -(I - P^{-1})A - P^{-1}ZU_*$ olarak yazılabilir. Buradan,

$$E[(P^{-1}\hat{A}_0 - A)(P^{-1}\hat{A}_0 - A)'] = \sigma^2[(I - P^{-1}) + (I - P^{-1})'] \quad (3.13)$$

yazılabilir.

Tersi alınabilir model için $\Sigma_0 = I + Z\Omega Z' = PP'$ 'in (i,i) . elemanını, i 'nin artışıyla 1'e üstten, P^{-1} 'in (i,i) . elemanı i 'nin artışıyla 1'e aşağıdan yakınsar. Böylece Eş. 3.13, Eş. 3.12'nin elemanlarının kare ortalamalarının beyaz gürültü süreci dağılımı izlemelerini açıklar, tam yakınsama $t=p+1$ ve $q=0$ olduğunda gerçekleşir. Bu nedenle, kareler toplamı, Eş. 3.12'deki lineer dönüşümler sayesinde üç artık tarafından da paylaşılır.

Pratikte bu sonucun anlamı, gerçek parametre değerleri yerine tutarlı tahminler geldiğinde, hesaplanan “normalleştirilmiş artık” vektörü olan $\hat{v} = \hat{P}^{-1}\hat{a}_0 = \hat{P}'\hat{a} = \hat{F}^{-1/2}\hat{e}$ 'nin elemanlarının beyaz gürültü yapısı izlemesidir. Özel olarak, model uygunluğunun incelenmesinde koşullu ve koşulsuz artık yerine normalleştirilmiş artık kullanılması artık otokorelasyonlarının olası yanlış yorumunu önlemeye yardımcı olur.

Hesaplama açısından $\hat{v}$ “normalleştirilmiş artık” vektörü elemanlarının elde edilmesinin en iyi yolu $\hat{e}$ vektörünün kullanılmasıdır. Çünkü $\hat{P}$ 'nin elde edilmesinde kullanılan $\hat{\Sigma}_0 = I + \hat{Z}\hat{\Omega}\hat{Z}'$ 'nin hesaplanması çok sayıda işlem gerektirmektedir. $\hat{P}$, $\hat{P}^{-1}\hat{a}_0$ veya $\hat{P}'\hat{a}$ 'dan herhangi birinde kullanılacağı için bu iki artık türü yerine $\hat{e}$ artık vektörü üzerinden normalleştirilmiş artık hesaplanması tercih edilebilir [Mauricio,2008].

Genelde hem $\hat{e}_t$, hem de onlara karşılık gelen $\hat{v}_t = \hat{F}_t^{-1/2} \hat{e}_t$ değerleri hesaplanır [Brockwell, Davis, 2002]. Oysa bazı bilgisayar programlarında bir diğer temel yaklaşım sadece koşullu veya koşulsuz artık değerlerinin verilmesidir.

Ansley ve Newbold (1979), geliştirdikleri bir benzetim deneyinde koşulsuz artık vektörü a yerine, normalleştirilmiş artık vektörü v kullandığında model uygunluğunun incelenmesinde sıklıkla kullanılan ve asimtotik anlamlılık düzeyine çevrilebilen istatistiğin büyüdüğünü göstermişlerdir. Ayrıca bu yazarlar v 'nin sadece bir yoldan hesaplanmasını göstermişlerdir [Mauricio,2008].

Mauricio (2008), bu bulguları şu şekilde genişletmiştir; (i) normalleştirilmiş artık vektörü v yukarıda gösterilmiş birden çok yöntemle hesaplanabilir. (ii) a yerine v kullanımının uygulamadaki avantajı Eş.3.11'in köşegen bir matris olmayışdır, böylece koşulsuz artıklar sadece σ^2 değerinden daha küçük varyansa sahip değil, aynı zamanda bu koşulsuz artıklar ilişkili (otokorelasyonlu) olmaktadır.

Bu çalışmada koşullu, koşulsuz, inovasyon ve normalleştirilmiş artık türlerinin durağan ARMA(1,1) modeli için artık türleri hesaplama uygulaması yapılmakta ve model uygunluğunun belirlenmesinde kullanılan Ljung Box istatistiği üzerinden model uygunluğunu belirlenmesinde ARMA(1,1) modelinde $n=10$, $n=25$, $n=50$, $n=100$, $n=250$ ve $n=500$ gözlem sayıları için model uygunluğunun incelenmesinde farklılığa sahip olup olmadıkları benzetim çalışmalarıyla farklı parametre ($\phi=0.5$ ve $\theta=0.6$, $\phi=0.9$ ve $\theta=0.6$, $\phi=0.1$ ve $\theta=0.9$, $\phi=0.2$ ve $\theta=0.9$) değerleri için gösterilmektedir.

3.4. ARMA(1,1) Modelinde Koşullu ve Koşulsuz Artıkların Başka Bir Yöntemden Hesaplanması İçin Kullanılan Bazı Matrisler

w_t sıfır ortalamalı ARMA(1,1) süreci olmak üzere, ARMA(p,q) için geri kestirim vektörü $U_* = [\tilde{W}_{1-p}, \dots, \tilde{W}_0, A_{1-q}, \dots, A_0]'$ şeklinde tanımlandığı daha önce verilmişti.

Ayrıca $A=[A_1, A_2, \dots, A_n]'$ ve $\tilde{W}=[\tilde{W}_1, \tilde{W}_2, \dots, \tilde{W}_n]'$ vektörleri geri kestirim değerleridir ve $U_*=[\tilde{W}', A']'=D^{-1}R'u$ eşitliğinden elde edilmektedirler. Burada U_* geri kestirim vektörüdür. Ayrıca burada u vektörüne ait u_t değerleri, $t=1,2,\dots,n$ için $u_t = a_{0t} + \theta_1 u_{t-1} + \dots + \theta_q u_{t-q}$ geriye doğru döngüsünden başlangıç değerleri $u_{n+1} = \dots = u_{n+q} = 0$ alınarak elde edilir. Koşullu artık vektörünün başlangıç değerleri $a_{01-q} = \dots = a_{00} = 0$ ve $w_{01-p} = \dots = w_{00} = 0$ alınarak $a_{0t} = w_t - \phi_1 w_{t-1} - \dots - \phi_p w_{t-p} + \theta_1 a_{0t-1} + \dots + \theta_q a_{0t-q}$ döngüsünden elde edilir. Koşulsuz artık vektörü için başlangıç değerleri U_* vektöründen alınarak $a_t = w_t - \phi_1 w_{t-1} - \dots - \phi_p w_{t-p} + \theta_1 a_{t-1} + \dots + \theta_q a_{t-q}$ döngüsünden elde edilir.

Daha önce tanımladığımız geri kestirim vektörü olan $U_*=[\tilde{W}', A']'=D^{-1}R'u$ ARMA(1,1) için $U_*=[\tilde{W}_0, A_0]'$ şeklinde yazılır. Geri kestirim vektörü ARMA(1,1) için $DU_* = R'u = [\phi, -\theta]'u_1$ eşitliğinin çözülmesinden elde edilir. Burada $D = \Omega^{-1} + R'D_\theta'^{-1}D_\theta^{-1}R$ şeklinde ifade edildiğinde özel olarak ARMA(1,1) modeli için Ω ve R matrisleri şu şekilde yazılır;

$$\Omega = \begin{pmatrix} (1 + \theta^2 - 2\phi\theta)/(1 - \phi^2) & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} A_p & B_q \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Burada A_p ve B_q matrisleri aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır;

$$A_p = \begin{pmatrix} \phi_p & \phi_{p-1} & \dots & \phi_1 \\ 0 & \phi_p & \dots & \phi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \phi_p \end{pmatrix} \quad B_q = \begin{pmatrix} -\theta_q & -\theta_{q-1} & \dots & -\theta_1 \\ 0 & -\theta_q & \dots & -\theta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\theta_q \end{pmatrix}$$

Buradan R matrisi p ve q 'nin 1 değerlerini alması durumunda;

$$R = \begin{pmatrix} \phi & -\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ şeklinde yazılır.}$$

Ayrıca D matrisinin hesaplanmasında kullanılan $R'D_{\theta}'^{-1}D_{\theta}^{-1}R$ ifadesi özel olarak ARMA(1,1) modeli için şu şekilde ifade edilebilir;

$$R'D_{\theta}'^{-1}D_{\theta}^{-1}R = \frac{1-\theta^{2n}}{1-\theta^2} \begin{pmatrix} \phi^2 & -\phi\theta \\ -\phi\theta & \theta^2 \end{pmatrix}$$

Sonuç olarak D matrisi ARMA(1,1) modeli için aşağıdaki şekilde hesaplanabilir;

$$D = \Omega^{-1} + R'D_{\theta}'^{-1}D_{\theta}^{-1}R = \frac{1}{(\phi-\theta)^2/(1-\phi^2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & (1+\theta^2-2\phi\theta)/(1-\phi^2) \end{pmatrix} + \frac{1-\theta^{2n}}{1-\theta^2} \begin{pmatrix} \phi^2 & -\phi\theta \\ -\phi\theta & \theta^2 \end{pmatrix}$$

[Box, Jenkins, Reinsel, 1994].

4. ARMA(1,1) MODELİ İÇİN ARTIK TÜRLERİ HESAPLAMA UYGULAMASI VE SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

4.1. ARMA(1,1) Modeli İçin Artık Türleri Hesaplama Uygulaması

Bu bölümde Bölüm 3’de tanımları yapılan artık türlerinin küçük gözlem sayısı içeren bir zaman serisi üzerinden matris işlemleriyle hesaplanışı gösterilmektedir.

Parametreleri $\phi=0.3$ ve $\theta=0.7$ olan $n=12$ gözlemlilik ARMA (1,1) modeli elimizde olsun [Box, Jenkins, Reinsel, 1994] ;

Çizelge 4.1. $\phi=0.3$ ve $\theta=0.7$ olan $n=12$ gözlemlilik ARMA (1,1) zaman serisi verileri

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
w_t	1,10	4,30	3,00	-0,70	1,60	3,20	0,30	-1,90	-0,30	-0,30	0,80	2,00

Öncelikle koşullu ve koşulsuz artıkları hesaplayalım. Koşullu artıklar hesaplanırken başlangıç değeri olarak w_0 ve a_0 değerlerini “0” (sıfır) alarak $a_{0t} = w_t - 0.3 w_{t-1} + 0.7 a_{0t-1}$ döngüsü $t=1,2,...,n$ için çözümlendiğinde koşullu artık değerleri aşağıdaki gibi elde edilir;

Çizelge 4.2. $\phi=0.3$ ve $\theta=0.7$ olan $n=12$ gözlemlilik ARMA (1,1) zaman serisi verilerine ait koşullu artık değerleri

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_{0t}	0	1,10	4,74	5,03	1,92	3,15	4,93	2,79	-0,04	0,24	-0,04	0,86	2,36

Koşulsuz artıklar için $U_* = [\tilde{W}', A']' = D^{-1} R' u$ vektörü;

[illegible]

D_ϕ ve D_θ parametre matrisleri $n \times n$ boyutlu ana köşegeni 1'ler ve j 'inci alt köşegeni $-\phi_j$ ve $-\theta_j$ 'den oluşan köşegen matrislerdir. Bu iki matris, parametreleri $\phi=0.3$ ve $\theta=0.7$ olan ARMA (1,1) modeli için yukarıdaki gibi oluşturulur.

Daha önce Bölüm 3’de tanımlanmış olan matrislerden bir diğeri $n \times (p+q)$ boyutlu; $V_{ij} = \phi_{p+i-j} (i=1,...,p; j=1,...,p)$ ve $V_{ij} = -\theta_{q+i-j+p} (i=1,...,q; j=p+1,...,p+q)$ kalan elemanları ise sıfır olan V matrisidir. Bu matris yukarıdaki tanımdan parametreleri $\phi=0.3$ ve $\theta=0.7$ olan ARMA (1,1) modeli için aşağıdaki gibi oluşturulur.

[illegible]

Yukarıda elde edilen D_θ ve V matrislerinden $Z = -D_\theta^{-1}V$ matrisi şu şekilde hesaplanır;

$$Z = \begin{bmatrix} -0.3000 & 0.7000 \\ -0.2100 & 0.4900 \\ -0.1470 & 0.3430 \\ -0.1029 & 0.2401 \\ -0.0720 & 0.1681 \\ -0.0504 & 0.1176 \\ -0.0353 & 0.0824 \\ -0.0247 & 0.0576 \\ -0.0173 & 0.0404 \\ -0.0121 & 0.0282 \\ -0.0085 & 0.0198 \\ -0.0059 & 0.0138 \end{bmatrix}$$

Ayrıca $K = D_\theta^{-1}D_\phi$ matrisi yukarıda belirtilen D_ϕ ve D_θ parametre matrislerinden şu şekilde hesaplanır;

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4000 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2800 & 0.4000 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1960 & 0.2800 & 0.4000 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1372 & 0.1960 & 0.2800 & 0.4000 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0960 & 0.1372 & 0.1960 & 0.2800 & 0.4000 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0672 & 0.0960 & 0.1372 & 0.1960 & 0.2800 & 0.4000 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0471 & 0.0672 & 0.0960 & 0.1372 & 0.1960 & 0.2800 & 0.4000 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0329 & 0.0471 & 0.0672 & 0.0960 & 0.1372 & 0.1960 & 0.2800 & 0.4000 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0231 & 0.0329 & 0.0471 & 0.0672 & 0.0960 & 0.1372 & 0.1960 & 0.2800 & 0.4000 & 1 & 0 & 0 \\ 0.0161 & 0.0231 & 0.0329 & 0.0471 & 0.0672 & 0.0960 & 0.1372 & 0.1960 & 0.2800 & 0.4000 & 1 & 0 \\ 0.0113 & 0.0161 & 0.0231 & 0.0329 & 0.0471 & 0.0672 & 0.0960 & 0.1372 & 0.1960 & 0.2800 & 0.4000 & 1 \end{bmatrix}$$

Ω matrisinin Bölüm 3'teki tanımına göre hesaplanan değeri aşağıdadır.

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1.1758 & 1.0000 \\ 1.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

Yine Bölüm 3'te tanımlanan $\Sigma_0 = I + Z\Omega Z'$ ve $\Sigma_w = K^{-1}(I + Z\Omega Z')K^{-1}$ matrislerinin hesaplanan değerleri şu şekildedir;

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} 1.1758 & 0.1231 & 0.0862 & 0.0603 & 0.0422 & 0.0296 & 0.0207 & 0.0145 & 0.0101 & 0.0071 & 0.0050 & 0.0035 \\ 0.1231 & 1.0862 & 0.0603 & 0.0422 & 0.0296 & 0.0207 & 0.0145 & 0.0101 & 0.0071 & 0.0050 & 0.0035 & 0.0024 \\ 0.0862 & 0.0603 & 1.0422 & 0.0296 & 0.0207 & 0.0145 & 0.0101 & 0.0071 & 0.0050 & 0.0035 & 0.0024 & 0.0017 \\ 0.0603 & 0.0422 & 0.0296 & 1.0207 & 0.0145 & 0.0101 & 0.0071 & 0.0050 & 0.0035 & 0.0024 & 0.0017 & 0.0012 \\ 0.0422 & 0.0296 & 0.0207 & 0.0145 & 1.0101 & 0.0071 & 0.0050 & 0.0035 & 0.0024 & 0.0017 & 0.0012 & 0.0008 \\ 0.0296 & 0.0207 & 0.0145 & 0.0101 & 0.0071 & 1.0050 & 0.0035 & 0.0024 & 0.0017 & 0.0012 & 0.0008 & 0.0006 \\ 0.0207 & 0.0145 & 0.0101 & 0.0071 & 0.0050 & 0.0035 & 1.0024 & 0.0017 & 0.0012 & 0.0008 & 0.0006 & 0.0004 \\ 0.0145 & 0.0101 & 0.0071 & 0.0050 & 0.0035 & 0.0024 & 0.0017 & 1.0012 & 0.0008 & 0.0006 & 0.0004 & 0.0003 \\ 0.0101 & 0.0071 & 0.0050 & 0.0035 & 0.0024 & 0.0017 & 0.0012 & 0.0008 & 1.0006 & 0.0004 & 0.0003 & 0.0002 \\ 0.0071 & 0.0050 & 0.0035 & 0.0024 & 0.0017 & 0.0012 & 0.0008 & 0.0006 & 0.0004 & 1.0003 & 0.0002 & 0.0001 \\ 0.0050 & 0.0035 & 0.0024 & 0.0017 & 0.0012 & 0.0008 & 0.0006 & 0.0004 & 0.0003 & 0.0002 & 1.0001 & 0.0001 \\ 0.0035 & 0.0024 & 0.0017 & 0.0012 & 0.0008 & 0.0006 & 0.0004 & 0.0003 & 0.0002 & 0.0001 & 0.0001 & 1.0001 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_w = \begin{bmatrix} 1.1758 & -0.3473 & -0.1042 & -0.0313 & -0.0094 & -0.0028 & -0.0008 & -0.0003 & -0.0001 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ -0.3473 & 1.1758 & -0.3473 & -0.1042 & -0.0313 & -0.0094 & -0.0028 & -0.0008 & -0.0003 & -0.0001 & -0.0000 & -0.0000 \\ -0.1042 & -0.3473 & 1.1758 & -0.3473 & -0.1042 & -0.0313 & -0.0094 & -0.0028 & -0.0008 & -0.0003 & -0.0001 & -0.0000 \\ -0.0313 & -0.1042 & -0.3473 & 1.1758 & -0.3473 & -0.1042 & -0.0313 & -0.0094 & -0.0028 & -0.0008 & -0.0003 & -0.0001 \\ -0.0094 & -0.0313 & -0.1042 & -0.3473 & 1.1758 & -0.3473 & -0.1042 & -0.0313 & -0.0094 & -0.0028 & -0.0008 & -0.0003 \\ -0.0028 & -0.0094 & -0.0313 & -0.1042 & -0.3473 & 1.1758 & -0.3473 & -0.1042 & -0.0313 & -0.0094 & -0.0028 & -0.0008 \\ -0.0008 & -0.0028 & -0.0094 & -0.0313 & -0.1042 & -0.3473 & 1.1758 & -0.3473 & -0.1042 & -0.0313 & -0.0094 & -0.0028 \\ -0.0003 & -0.0008 & -0.0028 & -0.0094 & -0.0313 & -0.1042 & -0.3473 & 1.1758 & -0.3473 & -0.1042 & -0.0313 & -0.0094 \\ -0.0001 & -0.0003 & -0.0008 & -0.0028 & -0.0094 & -0.0313 & -0.1042 & -0.3473 & 1.1758 & -0.3473 & -0.1042 & -0.0313 \\ -0.0000 & -0.0001 & -0.0003 & -0.0008 & -0.0028 & -0.0094 & -0.0313 & -0.1042 & -0.3473 & 1.1758 & -0.3473 & -0.1042 \\ -0.0000 & -0.0000 & -0.0001 & -0.0003 & -0.0008 & -0.0028 & -0.0094 & -0.0313 & -0.1042 & -0.3473 & 1.1758 & -0.3473 \\ -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0001 & -0.0003 & -0.0008 & -0.0028 & -0.0094 & -0.0313 & -0.1042 & -0.3473 & 1.1758 \end{bmatrix}$$

Bununla birlikte Bölüm 3'te belirtildiği gibi $\Sigma_0 = I + Z\Omega Z' = PP'$ olacak şekilde bir P alt üçgen matrisi tanımladığımızda buradan yukarıda $n=12$ 'lik gözlem setinden bulduğumuz $\Sigma_0 = I + Z\Omega Z'$ matrisini ayrıştırdığımızda oluşan P alt üçgen matrisi, ayrıca yine Bölüm 3'te tanımlandığı gibi L köşegen elemanları 1 olan bir alt üçgen matris ve F bir köşegen matris olmak üzere $\Sigma_w = LFL'$ olacak şekilde yine $n=12$ 'lik gözlem setinden bulunan Σ_w matrisinin üzerinden yapılan bu ayrıştırma sonucunda elde edilecek F matrisi $v = P^{-1}a_0 = P'a = F^{-1/2}e$ ifadesinde normalleştirilmiş artıklar vektörü olan v ve inovasyon artıklar vektörü olan e aşağıda gösterilen aşamalardan şu şekilde hesaplanmıştır;

$$v = P' a = \begin{bmatrix} 1.0844 & 0.1135 & 0.0795 & 0.0556 & 0.0389 & 0.0273 & 0.0191 & 0.0134 & 0.0093 & 0.0065 & 0.0046 & 0.0032 \\ 0 & 1.0360 & 0.0495 & 0.0347 & 0.0243 & 0.0170 & 0.0119 & 0.0083 & 0.0058 & 0.0041 & 0.0029 & 0.0020 \\ 0 & 0 & 1.0166 & 0.0230 & 0.0161 & 0.0113 & 0.0079 & 0.0055 & 0.0039 & 0.0027 & 0.0019 & 0.0013 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0079 & 0.0110 & 0.0077 & 0.0054 & 0.0038 & 0.0026 & 0.0019 & 0.0013 & 0.0009 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0038 & 0.0053 & 0.0037 & 0.0026 & 0.0018 & 0.0013 & 0.0009 & 0.0006 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0019 & 0.0026 & 0.0018 & 0.0013 & 0.0009 & 0.0006 & 0.0004 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0009 & 0.0013 & 0.0009 & 0.0006 & 0.0004 & 0.0003 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0004 & 0.0006 & 0.0004 & 0.0003 & 0.0002 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0002 & 0.0003 & 0.0002 & 0.0001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0001 & 0.0001 & 0.0001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0001 & 0.0001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.1500 \\ 3.8700 \\ 4.4200 \\ 1.4900 \\ 2.8500 \\ 4.7200 \\ 2.6400 \\ -0.1400 \\ 0.1700 \\ -0.0900 \\ 0.8300 \\ 2.3400 \end{bmatrix}$$

Buradan v olarak gösterilen normleştirilmiş artıkların vektörü aşağıdaki gibi hesaplanmış olur,

$$v = \begin{bmatrix} 1.0110 \\ 4.4669 \\ 4.6520 \\ 1.5868 \\ 2.8980 \\ 4.7371 \\ 2.6434 \\ -0.1392 \\ 0.1705 \\ -0.0896 \\ 0.8302 \\ 2.3401 \end{bmatrix}$$

Yukarıda belirtilen $\sum_w = LFL'$ ayrıştırması yapıldığında $n=12$ 'lik zaman serisi için oluşturulan F matrisi ve tersi aşağıdaki şekilde oluşturulur.

$$F = \begin{bmatrix} 1.1758 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0733 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0335 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0159 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0077 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0037 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0018 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0009 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0004 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0001 \end{bmatrix}$$

$$F^{-1/2} = \begin{bmatrix} 0.9222 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9653 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9837 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9922 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9962 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9981 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9991 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9996 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9998 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9999 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9999 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

Buradan e olarak gösterilen inovasyon vektörü aşağıdaki gibi hesaplanmış olur.

$$e = F^{1/2} P' a = F^{1/2} v = \begin{bmatrix} 0.9222 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9653 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9837 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9922 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9962 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9981 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9991 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9996 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9998 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9999 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9999 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0110 \\ 4.4669 \\ 4.6520 \\ 1.5868 \\ 2.8980 \\ 4.7371 \\ 2.6434 \\ -0.1392 \\ 0.1705 \\ -0.0896 \\ 0.8302 \\ 2.3401 \end{bmatrix}$$

$$e = \begin{bmatrix} 1.0963 \\ 4.6277 \\ 4.7292 \\ 1.5993 \\ 2.9090 \\ 4.7459 \\ 2.6458 \\ -0.1393 \\ 0.1706 \\ -0.0897 \\ 0.8303 \\ 2.3401 \end{bmatrix}$$

4.2. ARMA(1,1) Modeli İçin Artık Türleri Benzetim Çalışması

4.2.1. Benzetim planı

Bu bölümde, Ljung Box test istatistiği kullanılarak Bölüm 3’te teorik olarak ifade edilen koşullu, koşulsuz, inovasyon ve normalleştirilmiş artıkların model uygunluğunun incelenmesinde durumları ARMA(1,1) modeli için karşılaştırılmaktadır.

Burada asıl amaç modelin uygun olup olmadığı H_0 yokluk hipotezinin test edilmesi değil, artık türlerinin model uygunluğunun incelenmesinde bizi aynı sonuca götürüp götürmediğinin karşılaştırılmasıdır. Veri üretim sürecinde uygun modelin otoregresif parametre değerleri $\phi=0.5$ ve $\theta=0.6$, $\phi=0.9$ ve $\theta=0.6$, $\phi=0.1$ ve $\theta=0.9$, $\phi=0.2$ ve $\theta=0.9$ olan ARMA(1,1) modeli olduğu varsayımı altında veri üretimi yapılmaktadır. Bu parametre durumları göz önünde bulundurularak benzetim (simülasyon) çalışması yapılmakta, üretilen her bir zaman serisi için artık türleri hesaplatılmaktadır. Benzetim çalışmasında 100 deneme yapılmaktadır. “ H_0 : Model uygundur” hipotezinin, her test için reddedilme oranının bulunması amacıyla tekrar işlemi 100 defa tekrarlanarak red sayıları 100’e bölünmüş böylece sonuçlar elde edilmiştir.

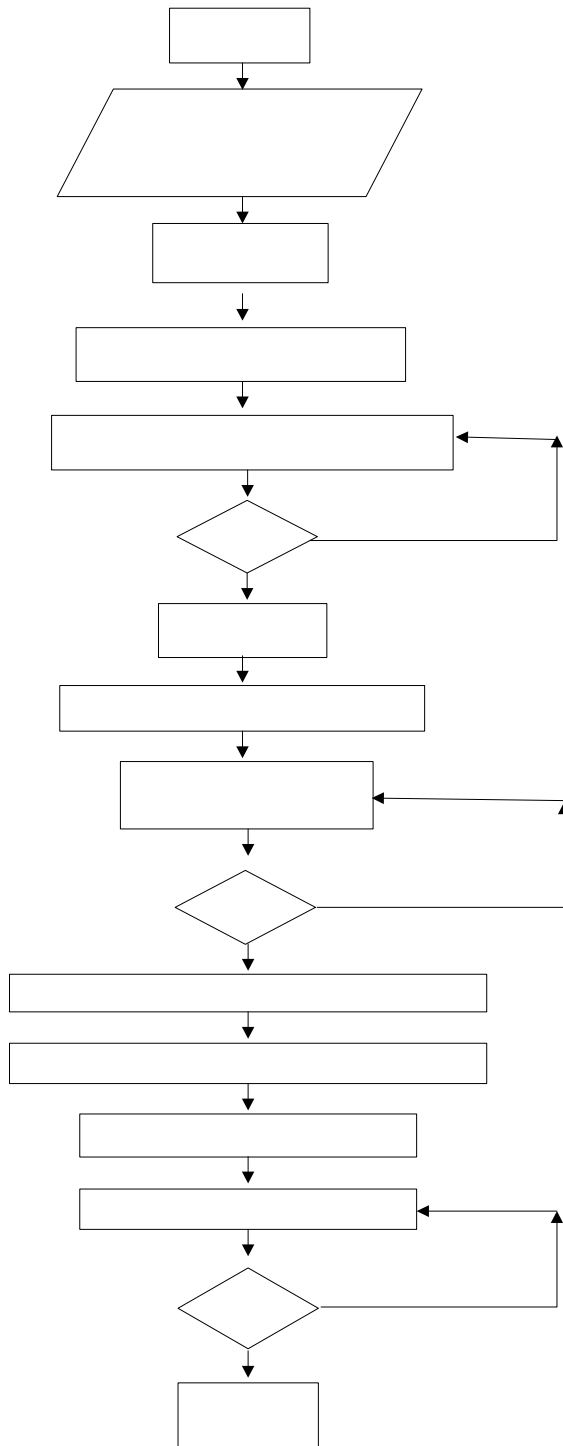
Ayrıca gözlem sayılarının değişiminin test sonuçlarını etkileyip etkilemediğini görmek açısından, gözlem sayısı $n=10$, $n=25$, $n=50$, $n=100$, $n=250$ ve $n=500$ alınarak dört farklı gözlem sayısı durumunda sonuçlara bakılmıştır.

Benzetim çalışması için veri üretirken MINITAB paket programı kullanılmıştır. Koşullu ve koşulsuz artıkların hesaplanması Visual Basic Programlama diliyle yazılmış bir programla yapılmış, inovasyon ve normalleştirilmiş artıkların hesaplanmasında ise MATLAB ve SCIENTIFIC WORKPLACE paket programlarından yararlanılmıştır.

4.2.2. Koşullu ve koşulsuz artıkların hesaplanmasında kullanılan programın algoritma ve akış şeması

Koşullu ve koşulsuz artıkları hesaplatmak için aşağıdaki diyagrama ilişkin adımlar izlenmektedir. Artıkların hesaplanmasında, uygun modelin ARMA(1,1) modeli olduğunda benzetim çalışması yaparak elde edilen zaman serisini kullanan diyagram burada verilmektedir. Öyleyse;

1. Başlangıç olarak ϕ ve θ değerleri belirlenmelidir.
2. Eldeki zaman serisi üzerinden $w_0=0$ ve $a_0=0$ alarak koşullu artıkların hesaplanması için $a_{0t} = w_t - \phi w_{t-1} + \theta a_{0t-1}$ işlemi için n sayısına göre ($t = 1, 2, \dots, n$) ilk döngü başlatılır.
3. Yukarıdaki döngü bittikten sonra $u_{t+1}=0$ alarak $u_t = a_{0t} + \theta u_{t+1}$ döngüsü başlatılır.
4. Geri kestirim vektörü olan $u_* = [w_0, a_0]$ vektörü bulunur.
5. Buradan yeni bulunan w_0 ve a_0 değerleri yerine konarak $a_t = w_t - \phi w_{t-1} + \theta a_{t-1}$ döngüsü üzerinden koşulsuz artıklar hesaplanır.



Şekil 4.1. Koşullu ve koşulsuz artıkların hesaplanmasında kullanılan programın akış şeması

Hesaplamayı
($t = 1, \dots, n$)

$$a_{0t} = w_t -$$

BA

n gözlem
ARM
modelin
tetha de
be

$w_0 =$

4.2.3. Benzetim sonuçları

$\phi=0.5$ ve $\theta=0.6$ için ARMA(1,1) modeli sonuçları

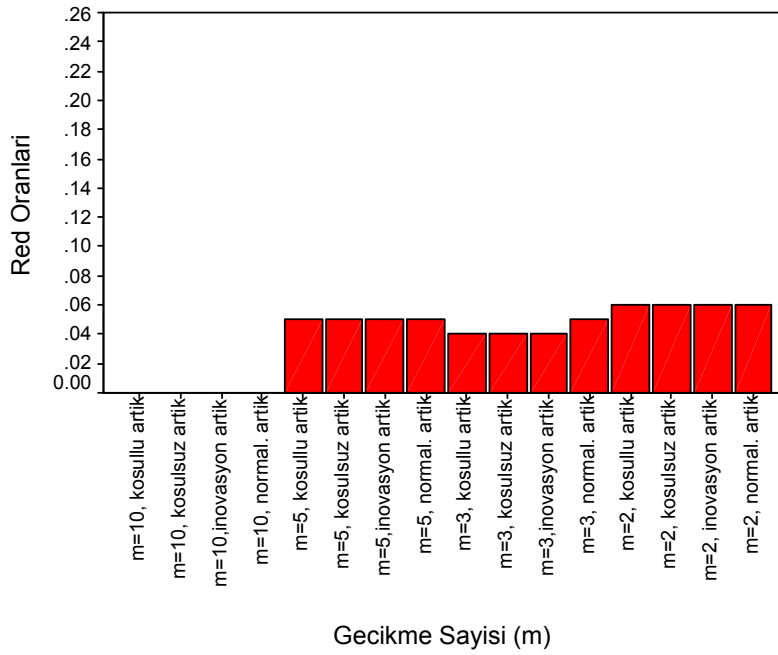
Bu kısımda, $\phi = 0.5$ ve $\theta = 0.6$ için ARMA(1,1) modelinden Monte Carlo benzetim yöntemi kullanılarak 100 denemede veri üretimi yapılmakta, bu veriler üzerinden artık türlerinin değerleri hesaplanmakta ve modelin uygunluğunun incelenmesi durumu farklı artık türleri üzerinden hesaplanan test istatistiği ile “ H_0 : Model uygundur” hipotezi test edilmekte ve H_0 hipotezinin red edilme yüzdelikleri karşılaştırılmaktadır. Burada veri üretiminde kullanılan model şu şekildedir:

$$\text{Model: } w_t = 0.5w_{t-1} + a_t - 0.6a_{t-1}$$

Bu model kullanılarak her bir artık türü için elde edilen red oranları (yüzdelikleri) gözlem sayısı $n=10$ için Çizelge 4.4’te, $n=25$ için Çizelge 4.5’te, $n=50$ için Çizelge 4.6’da, $n=100$ için Çizelge 4.7’de, $n=250$ için Çizelge 4.8’de ve $n=500$ için Çizelge 4.9’da verilmektedir.

Çizelge 4.4. $n=10$ için 100 denemede $\phi=0.5$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı

Artık Türü Gecikme Sayısı	Koşullu Artıklar	Koşulsuz Artıklar	İnovasyon Artıklar	Normalleştiril- miş Artıklar
m=5	0.05	0.05	0.05	0.05
m=3	0.04	0.04	0.04	0.05
m=2	0.06	0.06	0.06	0.06

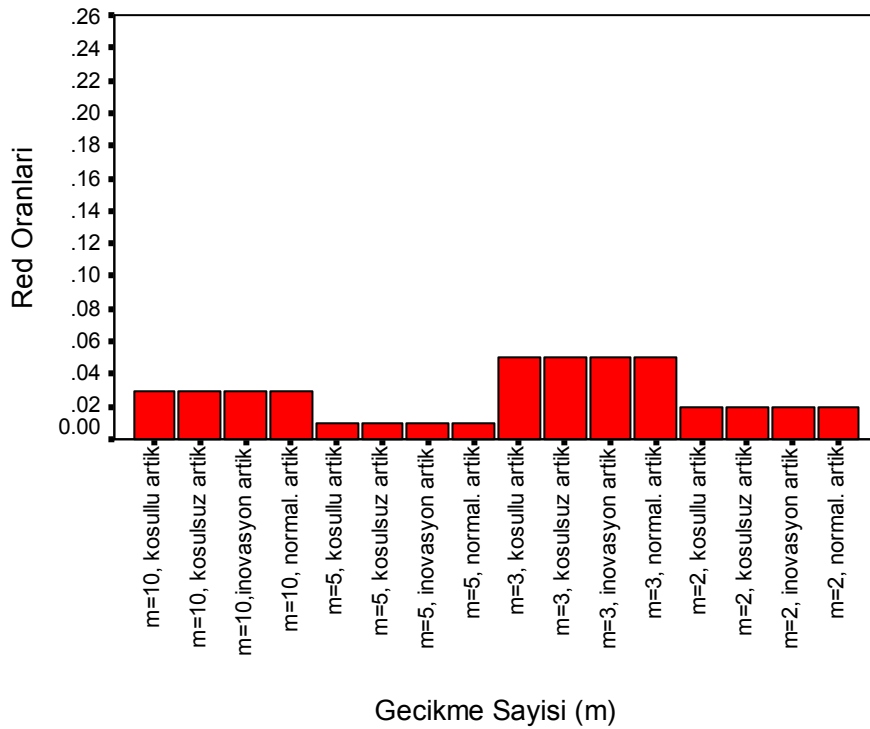


Şekil 4.2. $n=10$ için 100 denemede $\phi=0.5$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması

Çizelge 4.4’te ve Şekil 4.2’de gözlem sayısı $n=10$ için, otoregressif parametre değeri $\phi=0.5$, hareketli ortalama parametre değeri $\theta=0.6$ ve değişen gecikme sayısı ($m=10, m=5, m=3, m=2$) alınarak ARMA(1,1) modelinin uygunluğunun testinde “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin red edilme oranları verilmektedir. Bu parametre değerlerine sahip tersi alınabilir ve durağan ARMA(1,1) modeli uygunluğunun sınanmasında farklı artık türleri arasında göze çarpan bir fark yoktur. Yukarıdaki çizelgeye bakıldığında aynı gecikme sayısı üzerinden H_0 hipotezinin reddedilmesi oranları arasında fark sadece $m=3$ durumu için normalleştirilmiş artıklara ait oran değerinde söz konusudur. Farka sebep olan denemede normalleştirilmiş artıklar üzerinden hesaplanan ki kare istatistik değeri (Ljung-Box test istatistiği) diğer artık türleriyle hesaplanan ki kare değerine çok yakın olmasına rağmen, $m=3$ serbestlik dereceli ki kare tablo değerinin az bir farkla sayı doğrusu üzerinde sağında kalmasından dolayı ortaya çıkmıştır.

Çizelge 4.5. $n=25$ için 100 denemede $\phi=0.5$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı

Artık Türü Gecikme Sayısı	Koşullu Artıklar	Koşulsuz Artıklar	İnovasyon Artıklar	Normalleştiril- miş Artıklar
m=10	0.03	0.03	0.03	0.03
m=5	0.01	0.01	0.01	0.01
m=3	0.05	0.05	0.05	0.05
m=2	0.02	0.02	0.02	0.02



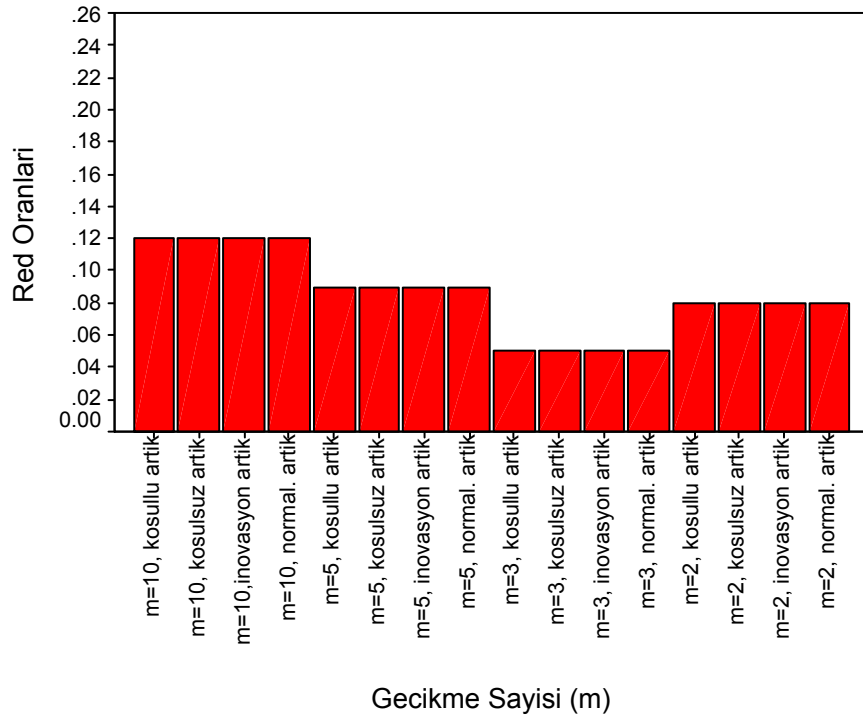
Şekil 4.3. $n=25$ için 100 denemede $\phi=0.5$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması

Çizelge 4.5’te ve Şekil 4.3’te gözlem sayısı $n=25$ için, otoregressif parametre değeri $\phi=0.5$, hareketli ortalama parametre değeri $\theta=0.6$ ve değişen gecikme sayısı

alınarak ARMA(1,1) modelinin uygunluğunun testinde “ H_0 : Model uygundur” hipotezinin red edilme oranları verilmektedir. Buna göre; bu parametre değerlerine göre tersi alınabilir ve durağan ARMA(1,1) modeli uygunluğunun sınanması testinde aynı gecikme sayıları ($m= 2,3,5,10$) üzerinden H_0 hipotezinin reddedilmesi oranları farklı artık türleri için aynıdır.

Çizelge 4.6. $n=50$ için 100 denemede $\phi=0.5$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı

Artık Türü Gecikme Sayısı	Koşullu Artıklar	Koşulsuz Artıklar	İnovasyon Artıklar	Normalleştiril- miş Artıklar
m=10	0.12	0.12	0.12	0.12
m=5	0.09	0.09	0.09	0.09
m=3	0.05	0.05	0.05	0.05
m=2	0.08	0.08	0.08	0.08

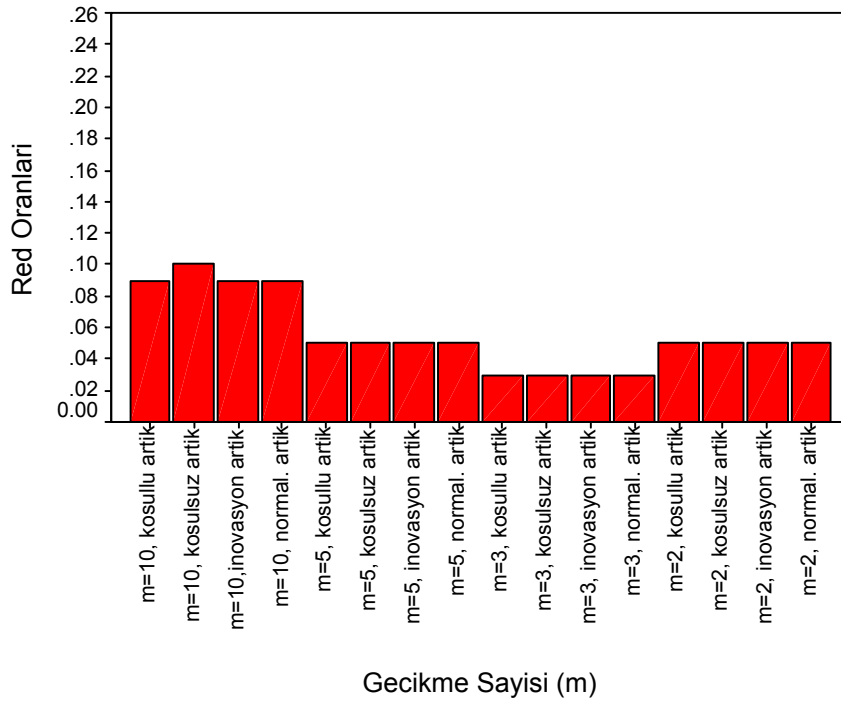


Şekil 4.4. $n=50$ için 100 denemede $\phi=0.5$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması

Çizelge 4.6’da ve Şekil 4.4’te gözlem sayısı $n=50$ için, otoregressif parametre değeri $\phi=0.5$, hareketli ortalama parametre değeri $\theta=0.6$ ve değişen gecikme sayısı alınarak ARMA(1,1) modelinin uygunluğunun testinde “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin red edilme oranları verilmektedir. Buna göre; bu parametre değerlerine göre tersi alınabilir ve durağan ARMA(1,1) modelinde model uygunluğunun sınanmasında aynı gecikme sayısı ($m= 2,3,5,10$) üzerinden farklı artık türleri red oranları aynıdır.

Çizelge 4.7. $n=100$ için 100 denemede $\phi=0.5$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı

Gecikme Sayısı \ Artık Türü	Koşullu Artıklar	Koşulsuz Artıklar	İnovasyon Artıklar	Normalleştiril- miş Artıklar
m=10	0.09	0.10	0.09	0.09
m=5	0.05	0.05	0.05	0.05
m=3	0.03	0.03	0.03	0.03
m=2	0.05	0.05	0.05	0.05



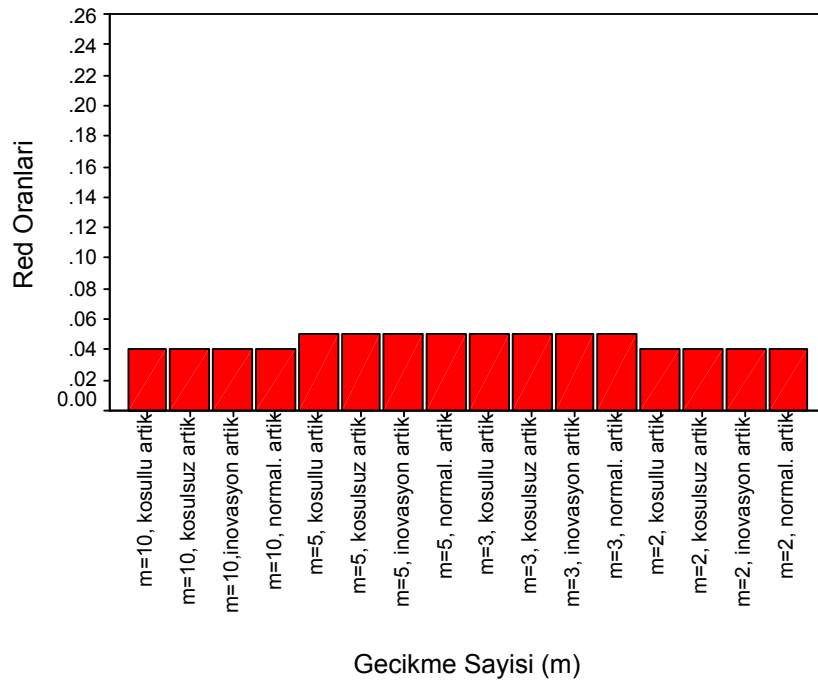
Şekil 4.5. $n=100$ için 100 denemede $\phi=0.5$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımında karşılaştırılması

Çizelge 4.7’de ve Şekil 4.5’te gözlem sayısı $n=100$ için, otoregressif parametre değeri $\phi=0.5$, hareketli ortalama parametre değeri $\theta=0.6$ ve değişen gecikme sayısı alınarak ARMA(1,1) modelinin uygunluğunun testinde “ H_0 : Model Uygundur”

hipotezinin red edilme oranları verilmektedir. Buna göre; bu parametre değerlerine göre tersi alınabilir ve durağan ARMA(1,1) modelinde model uygunluğunun sınanmasında aynı gecikme sayısı ($m=2,3,5,10$) üzerinden farklı artık türleri red oranları arasında göze çarpan bir farklılık yoktur. Sadece denemelerden birinde $m=10$ iken koşulsuz artıklardan hesaplanan ki kare test istatistiği değerinin az bir farkla sayı doğrusu üzerinde ilgili tablo değerinin sağında kalmasından dolayı ortaya çıkmıştır.

Çizelge 4.8. $n=250$ için 100 denemede $\phi=0.5$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı

Artık Türü Gecikme Sayısı	Koşullu Artıklar	Koşulsuz Artıklar	İnovasyon Artıklar	Normalleştiril- miş Artıklar
$m=10$	0.04	0.04	0.04	0.04
$m=5$	0.05	0.05	0.05	0.05
$m=3$	0.05	0.05	0.05	0.05
$m=2$	0.04	0.04	0.04	0.04

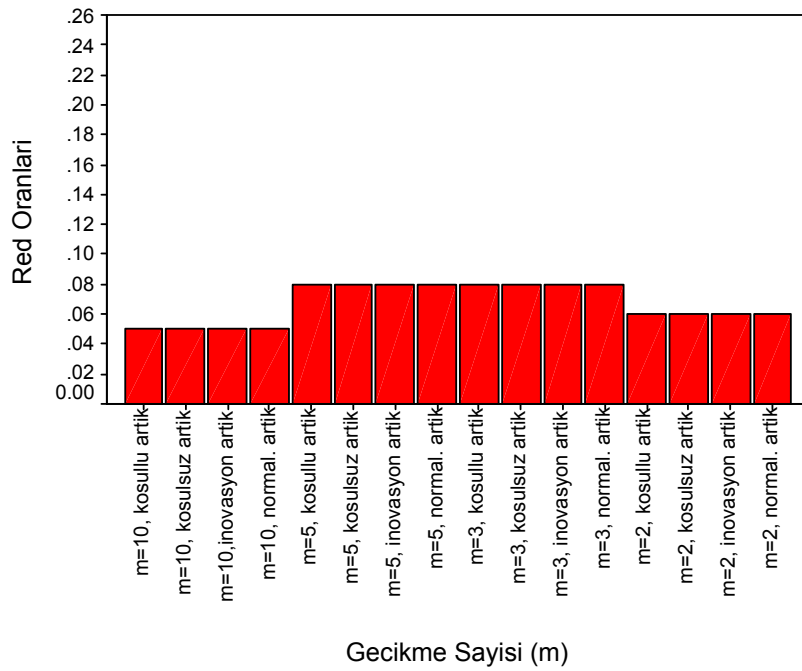


Şekil 4.6. $n=250$ için 100 denemede $\phi=0.5$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımında karşılaştırılması

Çizelge 4.8’de ve Şekil 4.6’da gözlem sayısı $n=250$ için, otoregressif parametre değeri $\phi=0.5$, hareketli ortalama parametre değeri $\theta=0.6$ ve değişen gecikme sayısı alınarak ARMA(1,1) modelinin uygunluğunun testinde “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin red edilme oranları verilmektedir. Buna göre; bu parametre değerlerine göre tersi alınabilir ve durağan ARMA(1,1) modelinde model uygunluğunun sınanmasında aynı gecikme sayıları üzerinden farklı artık türleri red oranları aynıdır.

Çizelge 4.9. $n=500$ için 100 denemede $\phi=0.5$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı

Artık Türü Gecikme Sayısı	Koşullu Artıklar	Koşulsuz Artıklar	İnovasyon Artıklar	Normalleştiril- miş Artıklar
m=10	0.05	0.05	0.05	0.05
m=5	0.08	0.08	0.08	0.08
m=3	0.08	0.08	0.08	0.08
m=2	0.06	0.06	0.06	0.06



Şekil 4.7. $n=500$ için 100 denemede $\phi=0.5$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımında karşılaştırılması

Çizelge 4.9’da ve Şekil 4.7’de gözlem sayısı $n=500$ için, otoregressif parametre değeri $\phi=0.5$, hareketli ortalama parametre değeri $\theta=0.6$ ve değişen gecikme sayısı alınarak ARMA(1,1) modelinin uygunluğunun testinde “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin red edilme oranları verilmektedir. Buna göre; bu parametre değerlerine

göre tersi alınabilir ve durağan ARMA(1,1) modelinde model uygunluğunun sınanmasında aynı gecikme sayıları üzerinden farklı artık türleri red oranları ayıdır.

Özellik olarak F köşegen matrisinin köşegen değerleri her gözlem sayısı için F 'nin bir özelliği olarak son köşegen değerlerine gittikçe 1'e üstten yakınsamaktadır.

Ayrıca P^{-1} alt üçgen matrisinin köşegen elemanlarının yine her gözlem sayısı için son köşegen değerlerine gittikçe 1'e aşağıdan yakınsadığı görülmektedir. Gözlem sayısı n büyüdükçe 1'e olan yakınsamalar daha fazla olmaktadır.

$\phi=0.9$ ve $\theta=0.6$ için ARMA(1,1) modeli sonuçları

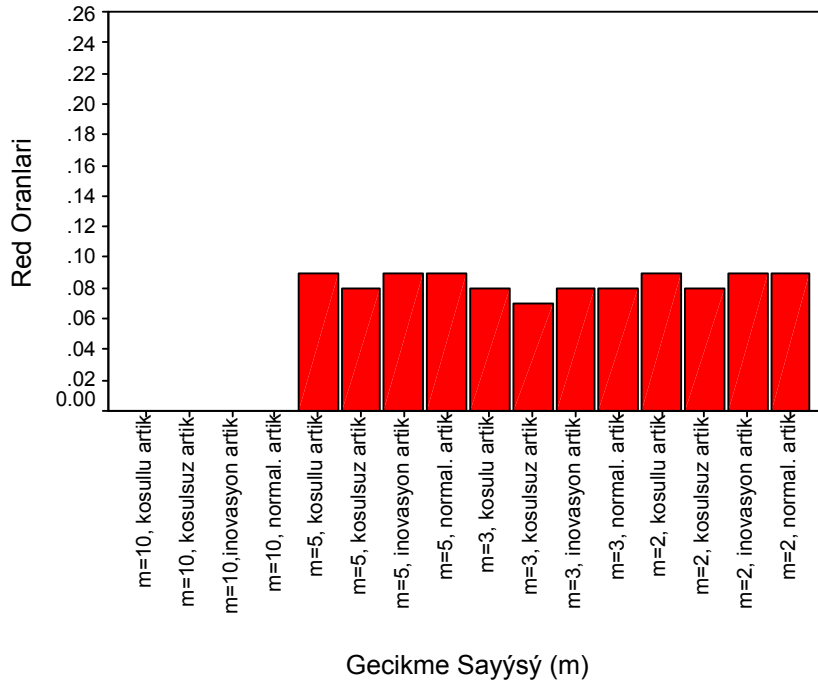
Bu kısımda, $\phi = 0.9$ ve $\theta = 0.6$ için ARMA(1,1) modelinden Monte Carlo benzetim yöntemi kullanılarak 100 denemede veri üretimi yapılmakta, bu veriler üzerinden artık türlerinin değerleri hesaplanmakta ve modelin uygunluğunun incelenmesi durumu farklı artık türleri üzerinden hesaplanan test istatistiği ile “ H_0 : Model uygundur” hipotezi test edilmekte ve H_0 hipotezinin red edilme yüzdelikleri karşılaştırılmaktadır. Burada veri üretiminde kullanılan model şu şekildedir:

$$\text{Model: } w_t = 0.9w_{t-1} + a_t - 0.6a_{t-1}$$

Bu model kullanılarak her bir artık türü için elde edilen sonuçlar gözlem sayısı $n=10$ için Çizelge 4.10'da, $n=25$ için Çizelge 4.11'de, $n=50$ için Çizelge 4.12'de, $n=100$ için Çizelge 4.13'de, $n=250$ için Çizelge 4.14'te ve $n=500$ için Çizelge 4.15'te verilmektedir.

Çizelge 4.10. $n=10$ için 100 denemede $\phi=0.9$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı

Artık Türü Gecikme Sayısı	Koşullu Artıklar	Koşulsuz Artıklar	İnovasyon Artıklar	Normalleştiril- miş Artıklar
m=5	0.09	0.08	0.09	0.09
m=3	0.08	0.07	0.08	0.08
m=2	0.09	0.08	0.09	0.09



Şekil 4.8. $n=10$ için 100 denemede $\phi=0.9$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması

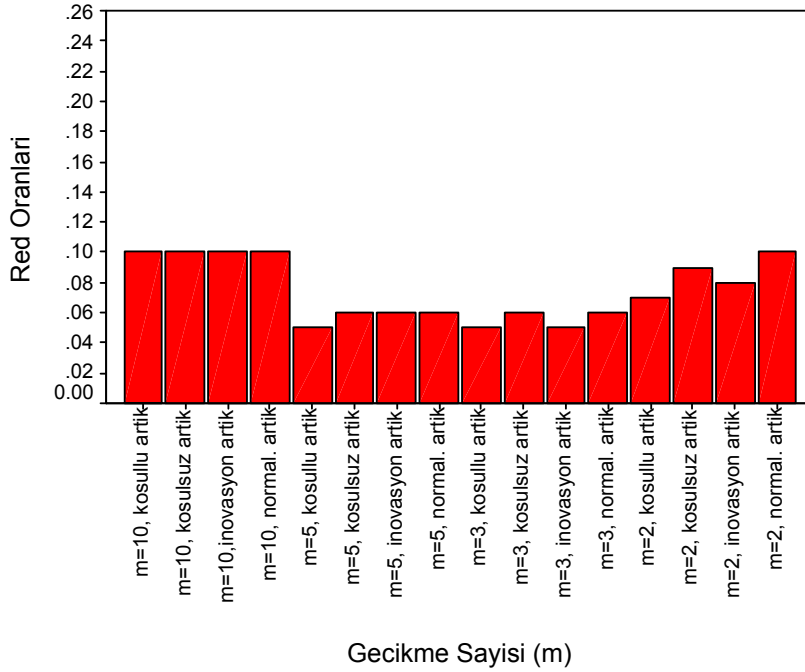
Çizelge 4.10’da ve Şekil 4.8’de gözlem sayısı $n=10$ için, otoregressif parametre değeri $\phi=0.9$, hareketli ortalama parametre değeri $\theta=0.6$ ve değişen gecikme sayısı alınarak ARMA(1,1) modelinin uygunluğunun testinde “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin red edilme oranları verilmektedir. Buna göre; bu parametre değerlerine sahip tersi alınabilir ve durağan ARMA(1,1) modelinde model uygunluğunun

sınanmasında model durağan olmama durumuna yakınken bu farklı artık türleri arasında göze çarpan bir fark yoktur. Yukarıdaki çizelgeye bakıldığında aynı gecikme sayısı üzerinden H_0 hipotezinin reddedilmesi oranında farka sebep olan denemelerde hesaplanan ki kare değeri birbirlerine çok yakın olmasına rağmen, koşulsuz artıklar üzerinden hesaplanan bazı test istatistiği değerlerinin ki kare tablo değerlerinin az bir farkla sayı doğrusu üzerinde solunda kalmasından dolayı ortaya çıkmıştır.

F köşegen matrisinin özelliği olarak köşegen değerleri gittikçe azalmakta ve 1'e yakınsamaktadır. Ayrıca yine P^{-1} alt üçgen matrisinin özelliği olarak köşegen elemanlarının 1'e aşağıdan yakınsadığı görülmektedir.

Çizelge 4.11. $n=25$ için 100 denemede $\phi=0.5$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygunur” hipotezinin reddedilme oranı

Artık Türü Gecikme Sayısı	Koşullu Artıklar	Koşulsuz Artıklar	İnovasyon Artıklar	Normalleştiril- miş Artıklar
m=10	0.10	0.10	0.10	0.10
m=5	0.05	0.06	0.06	0.06
m=3	0.05	0.06	0.05	0.06
m=2	0.07	0.09	0.08	0.10

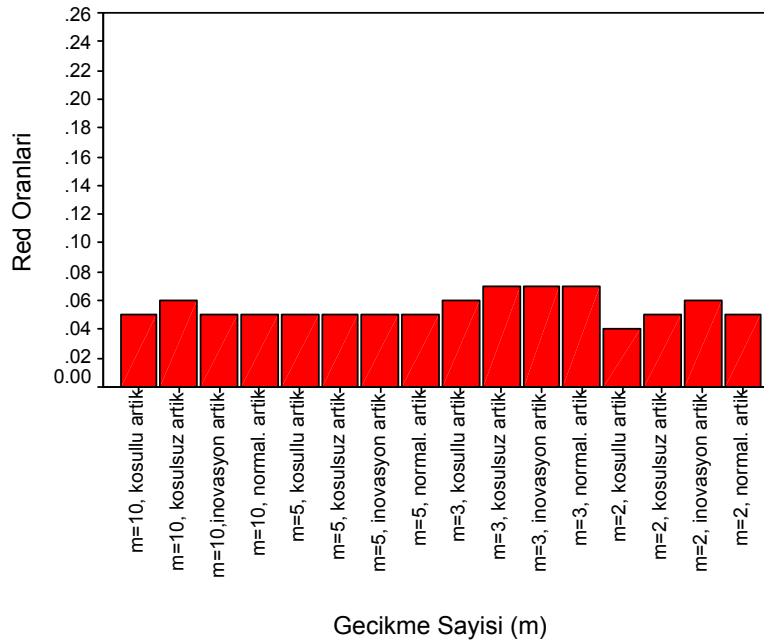


Şekil 4.9. $n=25$ için 100 denemede $\phi=0.5$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması

Çizelge 4.11’de ve Şekil 4.9’da gözlem sayısı $n=25$ için, otoregressif parametre değeri $\phi=0.9$, hareketli ortalama parametre değeri $\theta=0.6$ ve değişen gecikme sayısı alınarak ARMA(1,1) modelinin uygunluğunun testinde “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin red edilme oranları verilmektedir. Buna göre; bu parametre değerlerine göre tersi alınabilir ve durağan ARMA(1,1) modelinde model uygunluğunun sınanmasında model durağan olmama durumuna yakinken bu farklı artık türleri arasında çok düşük düzeyde yüzdelik farklar vardır. Bu durum yine aynı gecikme düzeylerinde farklı artık türleri üzerinden hesaplanan test istatistiği değerlerinin çok yakın olmalarına rağmen, aralarındaki küçük farklardan dolayı ortaya çıkmıştır. Yüzdeliklerde meydana gelen farkların sebebi budur.

Çizelge 4.12. $n=50$ için 100 denemede $\phi=0.9$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı

Artık Türü Gecikme Sayısı	Koşullu Artıklar	Koşulsuz Artıklar	İnovasyon Artıklar	Normalleştiril- miş Artıklar
m=10	0.05	0.06	0.05	0.05
m=5	0.05	0.05	0.05	0.05
m=3	0.06	0.07	0.07	0.07
m=2	0.04	0.05	0.06	0.05



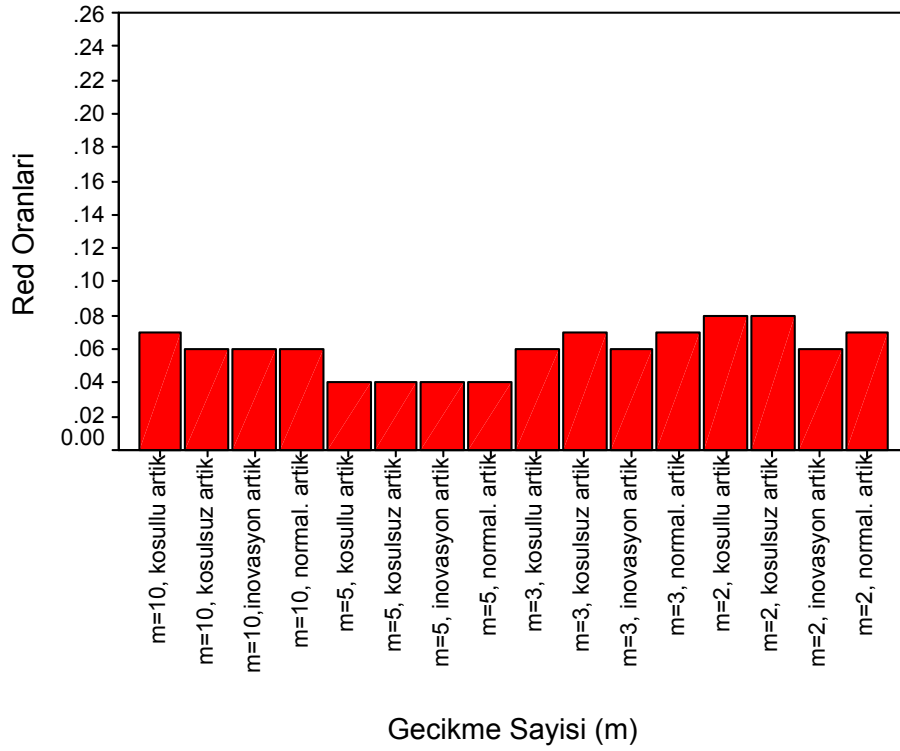
Şekil 4.10. $n=50$ için 100 denemede $\phi=0.9$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması

Çizelge 4.12’de ve Şekil 4.10’da gözlem sayısı $n=50$ için, otoregressif parametre değeri $\phi=0.9$, hareketli ortalama parametre değeri $\theta=0.6$ ve değişen gecikme sayısı alınarak ARMA(1,1) modelinin uygunluğunun testinde “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin red edilme oranları verilmektedir. Buna göre; bu parametre değerlerine

göre tersi alınabilir ve durağan ARMA(1,1) modelinde model uygunluğunun sınanmasında model durağan olmama durumuna yakinken bu farklı artık türleri arasındaki yüzdelik farkları yukarıda Çizelge 4.11'deki farklılıklara benzer olarak aynı nedenlerden dolayı ortaya çıkmıştır. Dört farklı artık türü ile hesaplanan test istatistiği değerleri birbirlerine yakındır. Yüzdeliklerde meydana gelen küçük farklılıkların sebebi budur.

Çizelge 4.13. $n=100$ için 100 denemede $\phi=0.9$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı

Artık Türü Gecikme Sayısı	Koşullu Artıklar	Koşulsuz Artıklar	İnovasyon Artıklar	Normalleştiril- miş Artıklar
m=10	0.07	0.06	0.06	0.06
m=5	0.04	0.04	0.04	0.04
m=3	0.06	0.07	0.06	0.07
m=2	0.08	0.08	0.06	0.07

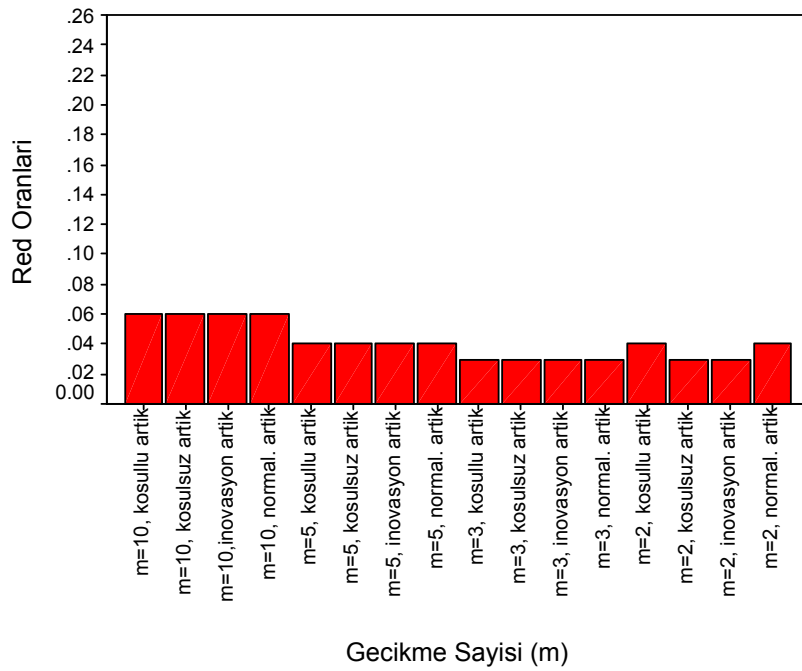


Şekil 4.11. $n=100$ için 100 denemede $\phi=0.9$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygunudur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması

Çizelge 4.13’de ve Şekil 4.11’de gözlem sayısı $n=100$ için, otoregressif parametre değeri $\phi=0.9$, hareketli ortalama parametre değeri $\theta=0.6$ ve değişen gecikme sayısı alınarak ARMA(1,1) modelinin uygunluğunun testinde “ H_0 : Model Uygunudur” hipotezinin red edilme oranları verilmektedir. Buna göre; bu parametre değerlerine göre tersi alınabilir ve durağan ARMA(1,1) modelinde model uygunluğunun sınanmasında model durağan olmama durumuna yakinken bu farklı artık türleri arasındaki yüzdelik farkları yukarıda Çizelge 4.12’deki farklılıklara benzerdir. Sonuç olarak aynı gecikme değerleri üzerinden bulunan ki kare değerleri ve bunların sonucunda oluşturulan yüzdelikler arasında göze çarpan bir farklılık görülmemektedir.

Çizelge 4.14. $n=250$ için 100 denemede $\phi=0.9$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı

Artık Türü Gecikme Sayısı	Koşullu Artıklar	Koşulsuz Artıklar	İnovasyon Artıklar	Normalleştiril- miş Artıklar
m=10	0.06	0.06	0.06	0.06
m=5	0.04	0.04	0.04	0.04
m=3	0.03	0.03	0.03	0.03
m=2	0.04	0.03	0.03	0.04



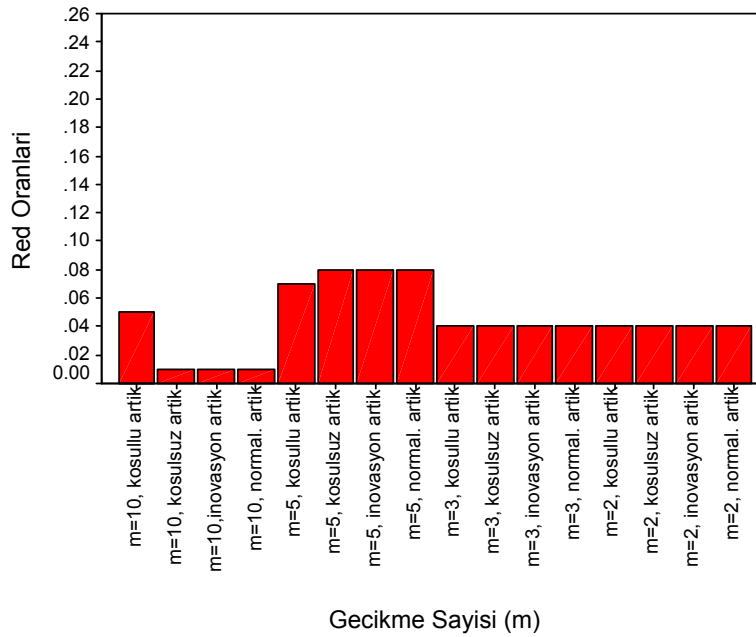
Şekil 4.12. $n=250$ için 100 denemede $\phi=0.9$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması

Çizelge 4.14’te ve Şekil 4.12’de gözlem sayısı $n=250$ için, otoregressif parametre değeri $\phi=0.9$, hareketli ortalama parametre değeri $\theta=0.6$ ve değişen gecikme sayısı alınarak ARMA(1,1) modelinin uygunluğunun testinde “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin red edilme oranları verilmektedir. Buna göre; bu parametre değerlerine

göre tersi alınabilir ve durağan ARMA(1,1) modelinde model uygunluğunun sınanmasında model durağan olmama durumuna yakınken sadece $m=2$ durumunda bir farklılık görülmektedir. Bu durum yine aynı gecikme düzeyinde farklı artık türleri üzerinden hesaplanan test istatistiği değerlerinin çok yakın olmalarına rağmen, aralarındaki küçük farklardan dolayı ortaya çıkmıştır.

Çizelge 4.15. $n=500$ için 100 denemede $\phi=0.9$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı

Artık Türü Gecikme Sayısı	Koşullu Artıklar	Koşulsuz Artıklar	İnovasyon Artıklar	Normalleştiril- miş Artıklar
$m=10$	0.05	0.01	0.01	0.01
$m=5$	0.07	0.08	0.08	0.08
$m=3$	0.04	0.04	0.04	0.04
$m=2$	0.04	0.04	0.04	0.04



Şekil 4.13. $n=500$ için 100 denemede $\phi=0.9$ ve $\theta=0.6$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması

Çizelge 4.15’te ve Şekil 4.13’te gözlem sayısı $n=500$ için, otoregressif parametre değeri $\phi=0.9$, hareketli ortalama parametre değeri $\theta=0.6$ ve değişen gecikme sayısı alınarak ARMA(1,1) modelinin uygunluğunun testinde “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin red edilme oranları verilmektedir. Buna göre; bu parametre değerlerine göre tersi alınabilir ve durağan ARMA(1,1) modelinde model durağan olmama durumuna yakinken model uygunluğunun sınanmasında sadece $m=10$ için koşullu artık türü üzerinden hesaplanan test istatistikleri bazı denemelerde anlamlı derecede diğer artık türlerinden daha yüksek değerler vermiştir. $m=5$, $m=3$ ve $m=2$ gecikme sayıları için dört artık türü üzerinden hesaplanan test istatistikleri birbirlerine yakındır. Bunlar arasında red oranları yönünden sadece $m=5$ için koşullu artık türünde bir fark vardır, bu fark koşullu artık türü üzerinden hesaplanan test istatistiği ile diğer artık türleri üzerinden hesaplanan test istatistikleri arasındaki çok küçük bir farklılıktan dolayı ortaya çıkmıştır.

Özellik olarak F köşegen matrisinin köşegen değerleri her gözlem sayısı için F 'nin bir özelliği olarak son köşegen değerlerine gittikçe 1'e üstten yakınsamaktadır. Ayrıca P^{-1} alt üçgen matrisinin köşegen elemanlarının yine her gözlem sayısı için son köşegen değerlerine gittikçe 1'e aşağıdan yakınsadığı görülmektedir. Gözlem sayısı n büyüdükçe 1'e olan yakınsamalar daha fazla olmaktadır.

$\phi=0.1$ ve $\theta=0.9$ için ARMA(1,1) modeli sonuçları

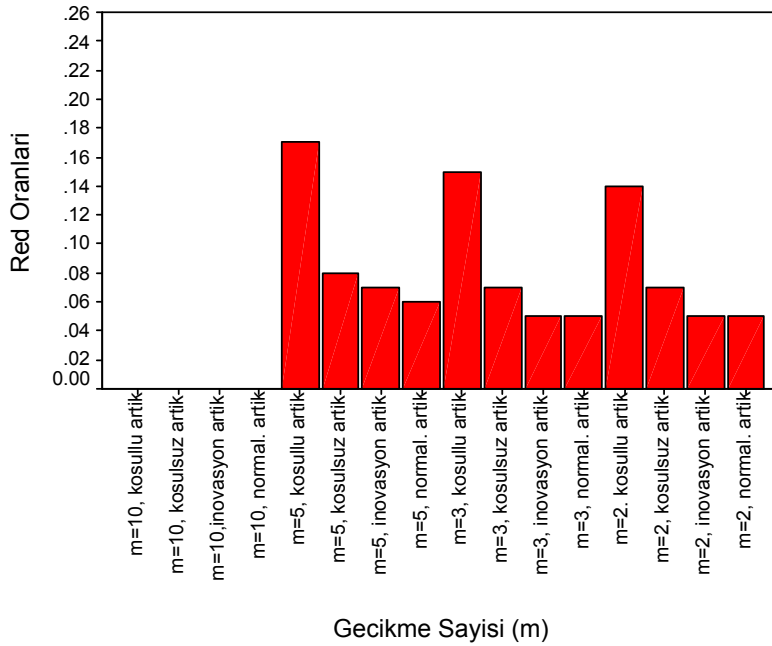
Bu kısımda, $\phi = 0.1$ ve $\theta = 0.9$ için ARMA(1,1) modelinden Monte Carlo benzetim yöntemi kullanılarak 100 denemede veri üretimi yapılmakta, bu veriler üzerinden artık türlerinin değerleri hesaplanmakta ve modelin uygunluğunun incelenmesi durumu farklı artık türleri üzerinden hesaplanan test istatistiği ile “ H_0 : Model uygundur” hipotezi test edilmekte ve H_0 hipotezinin red edilme yüzdelikleri karşılaştırılmaktadır. Burada veri üretiminde kullanılan model şu şekildedir:

$$\text{Model: } w_t = 0.1w_{t-1} + a_t - 0.9a_{t-1}$$

Bu model kullanılarak her bir artık türü için elde edilen sonuçlar gözlem sayısı $n=10$ için Çizelge 4.16'da, $n=25$ için Çizelge 4.17'de, $n=50$ için Çizelge 4.18'de, $n=100$ için Çizelge 4.19'da, $n=250$ için Çizelge 4.20'de ve $n=500$ için Çizelge 4.21'de verilmektedir.

Çizelge 4.16. $n=10$ için 100 denemede $\phi=0.1$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı

Artık Türü Gecikme Sayısı	Koşullu Artıklar	Koşulsuz Artıklar	İnovasyon Artıklar	Normalleştiril- miş Artıklar
m=5	0.17	0.08	0.07	0.06
m=3	0.15	0.07	0.05	0.05
m=2	0.14	0.07	0.05	0.05



Şekil 4.14. $n=10$ için 100 denemede $\phi=0.1$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması

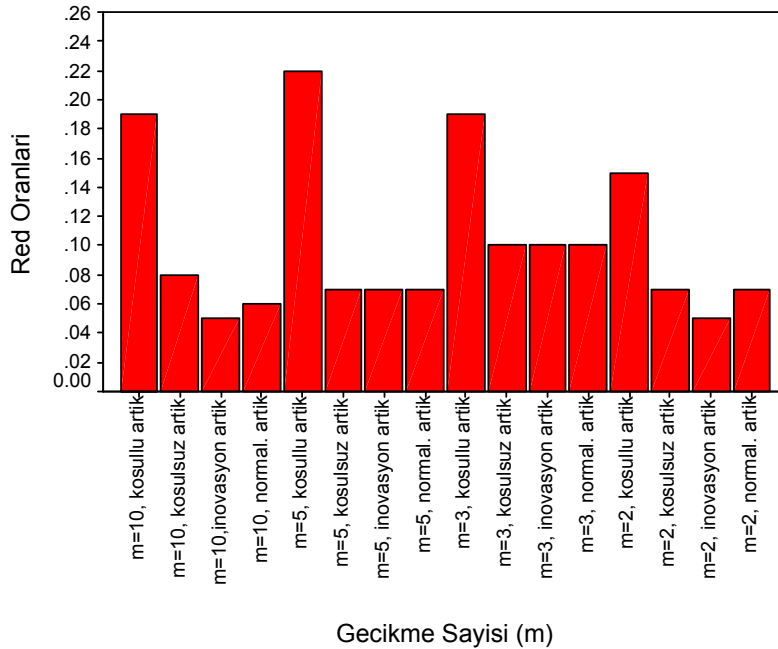
Çizelge 4.16’da ve Şekil 4.14’te gözlem sayısı $n=10$ için, otoregressif parametre değeri $\phi=0.1$, hareketli ortalama parametre değeri $\theta=0.9$ ve değişen gecikme sayısı alınarak ARMA(1,1) modelinin uygunluğunun testinde “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin red edilme oranları verilmektedir. Buna göre; bu parametre değerlerine sahip tersi alınabilir ve durağan ARMA(1,1) modelinde model parametreleri tersinir olmayan (tersi alınamaz - non invertible) duruma yakinken model uygunluğunun sınanmasında H_0 hipotezinin reddedilme yüzdesi bakımından her gecikme değerinde koşullu artıkların diğer artık türlerinden daha yüksek değerler verdiği görülmektedir. Bunun nedeni bir çok denemede koşullu artıklardan hesaplanan ki kare değerlerinin diğer artık türleri üzerinden hesaplanan ki kare değerlerine göre model uygunluğu testinde farklı karara sebep olacak ölçüde, daha yüksek değerlerde olmasıdır.

Sonuç olarak $n=10$ iken ve $\phi=0.1$ ve $\theta=0.9$ olduğunda model tersinir olmayan duruma yaklaştıkça artıklar arasında farklı reddedilme oranları olduğu görülmektedir. Koşulsuz artıkların normalleştirilmiş ve inovasyon artıklara göre, koşullu artıklarına

diğer 3 artık türüne göre daha yüksek red oranlarına sahip olduğu görülmektedir. Ayrıca denemelerin çoğunda koşulsuz artıklar üzerinden hesaplanan test istatistikleri normalleştirilmiş artıklar üzerinden hesaplanana göre daha yüksek değerler vermektedir.

Çizelge 4.17. $n=25$ için 100 denemede $\phi=0.1$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı

Artık Türü Gecikme Sayısı	Koşullu Artıklar	Koşulsuz Artıklar	İnovasyon Artıklar	Normalleştiril- miş Artıklar
m=10	0.19	0.08	0.05	0.06
m=5	0.22	0.07	0.07	0.07
m=3	0.19	0.10	0.10	0.10
m=2	0.15	0.07	0.05	0.07

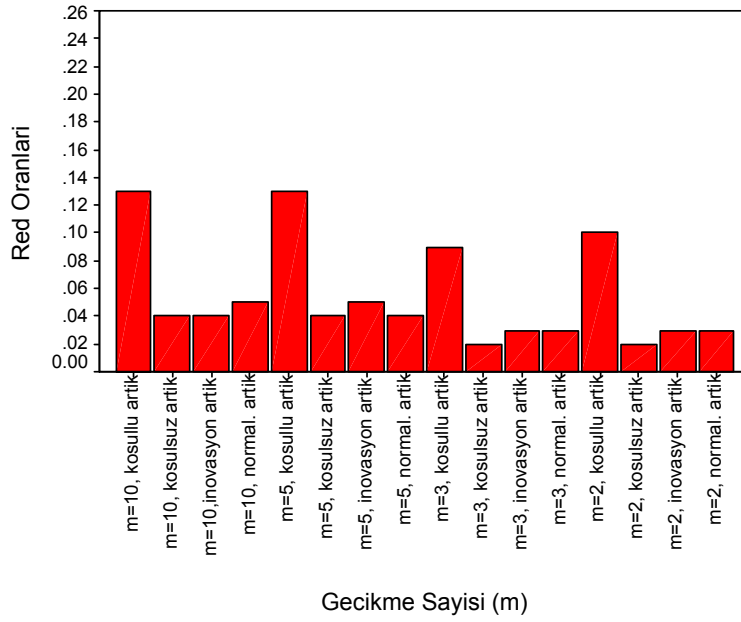


Şekil 4.15. $n=25$ için 100 denemede $\phi=0.1$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması

Çizelge 4.17’de ve Şekil 4.15’te gözlem sayısı $n=25$ için, otoregressif parametre değeri $\phi=0.1$, hareketli ortalama parametre değeri $\theta=0.9$ ve değişen gecikme sayısı alınarak ARMA(1,1) modelinin uygunluğunun testinde “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin red edilme oranları verilmektedir. Buna göre; bu parametre değerlerine sahip tersi alınabilir ve durağan ARMA(1,1) modelinde model parametreleri tersinir olmayan (tersi alınamaz - non invertible) duruma yakınken model uygunluğunun sınanmasında bu farklı artık türleri arasında özellikle koşullu artıklar red oranının diğer 3 artık türü red oranına göre her gecikme sayısında daha fazla olduğu görülmektedir. Bu durum yine bir çok denemede koşullu artıklar üzerinden hesaplanan ki kare değerinin diğer artık türleriyle hesaplanan ki kare değerlerine göre daha büyük değerler vermesinden kaynaklanmaktadır.

Çizelge 4.18. $n=50$ için 100 denemede $\phi=0.1$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı

Artık Türü Gecikme Sayısı	Koşullu Artıklar	Koşulsuz Artıklar	İnovasyon Artıklar	Normalleştiril- miş Artıklar
m=10	0.13	0.04	0.04	0.05
m=5	0.13	0.04	0.05	0.04
m=3	0.09	0.02	0.03	0.03
m=2	0.10	0.02	0.03	0.03

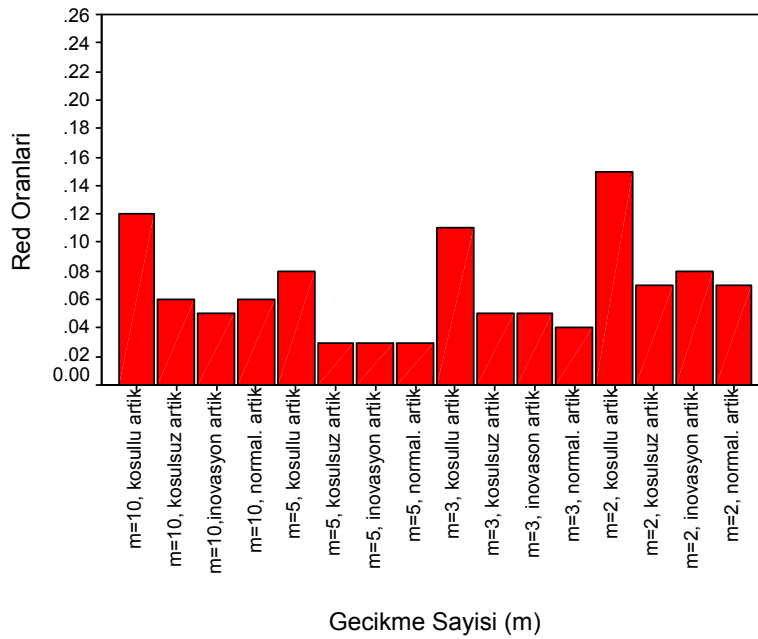


Şekil 4.16. $n=50$ için 100 denemede $\phi=0.1$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması

Çizelge 4.18’de ve Şekil 4.16’da deneme sayısı $n=50$ için, otoregressif parametre değeri $\phi=0.1$, hareketli ortalama parametre değeri $\theta=0.9$ ve değişen gecikme sayısı alınarak ARMA(1,1) modelinin uygunluğunun testinde “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin red edilme oranları verilmiştir. Buna göre bu parametre değerlerine sahip tersi alınabilir ve durağan ARMA(1,1) modelinde $n=50$ değeri için model parametre değerleri tersi alınamaz duruma yakınken tüm gözlem sayılarında yapılan hesaplamalarda aynı gecikme sayıları için koşullu artıklar üzerinden hesaplanan red oranlarının daha yüksek çıktığı görülmektedir.

Çizelge 4.19. $n=100$ için 100 denemede $\phi=0.1$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı

Artık Türü Gecikme Sayısı	Koşullu Artıklar	Koşulsuz Artıklar	İnovasyon Artıklar	Normalleştiril- miş Artıklar
m=10	0.12	0.06	0.05	0.06
m=5	0.08	0.03	0.03	0.03
m=3	0.11	0.05	0.05	0.04
m=2	0.15	0.07	0.08	0.07



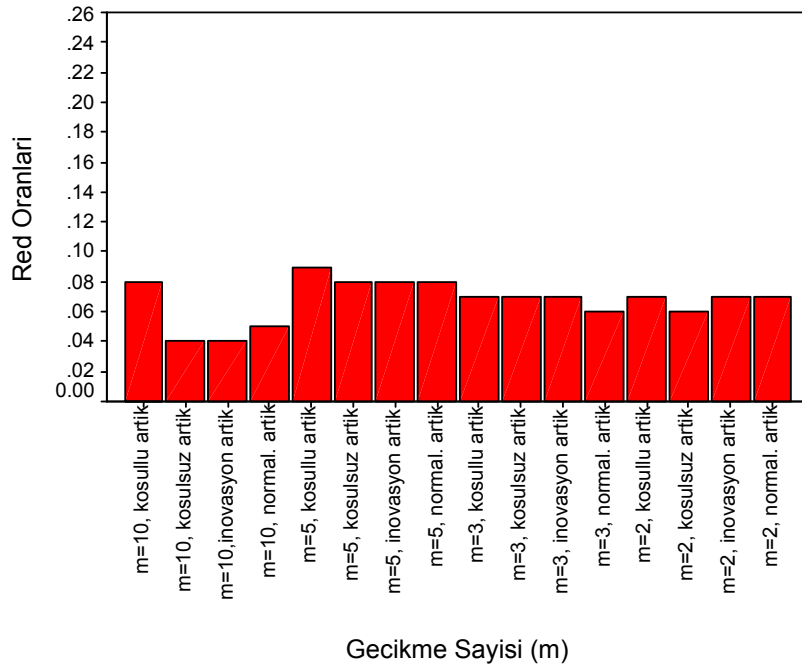
Şekil 4.17. $n=100$ için 100 denemede $\phi=0.1$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması

Çizelge 4.19’da ve Şekil 4.17’de deneme sayısı $n=100$ için, otoregressif parametre değeri $\phi=0.1$, hareketli ortalama parametre değeri $\theta=0.9$ ve değişen gecikme sayısı alınarak ARMA(1,1) modelinin uygunluğunun testinde “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin red edilme oranları verilmiştir. Buna göre bu parametre değerlerine sahip

tersi alınabilir ve durağan ARMA(1,1) modelinde $n=100$ değeri için model parametre değerleri tersi alınamaz duruma yaklaştıkça tüm gözlem sayılarında yapılan hesaplamalarda aynı gecikme sayıları için koşullu artıklar üzerinden hesaplanan red oranlarının daha yüksek çıktığı görülmektedir.

Çizelge 4.20. $n=250$ için 100 denemede $\phi=0.1$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygunur” hipotezinin reddedilme oranı

Artık Türü Gecikme Sayısı	Koşullu Artıklar	Koşulsuz Artıklar	İnovasyon Artıklar	Normalleştiril- miş Artıklar
m=10	0.08	0.04	0.04	0.05
m=5	0.09	0.08	0.08	0.08
m=3	0.07	0.07	0.07	0.06
m=2	0.07	0.06	0.07	0.07

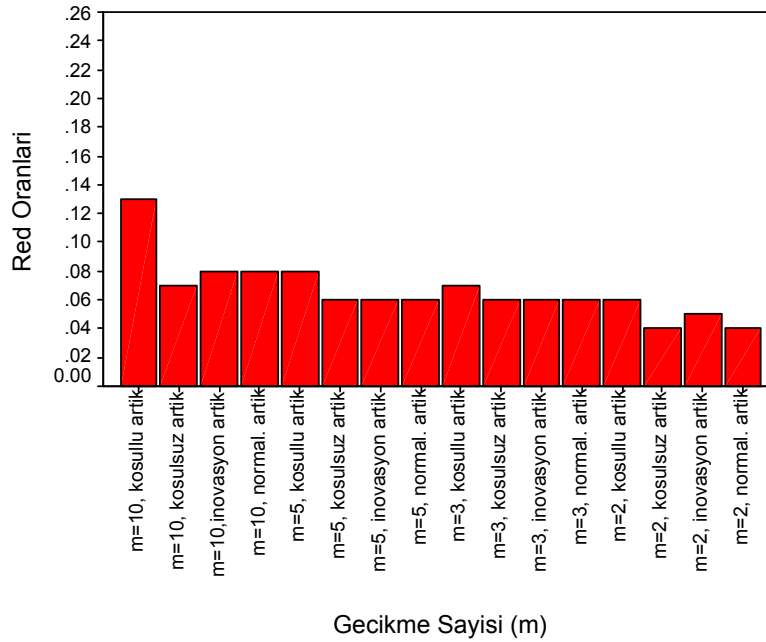


Şekil 4.18. $n=250$ için 100 denemede $\phi=0.1$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygunur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması

Çizelge 4.20’de ve Şekil 4.18’de deneme sayısı $n=250$ için, otoregressif parametre değeri $\phi=0.1$, hareketli ortalama parametre değeri $\theta=0.9$ ve değişen gecikme sayısı alınarak ARMA(1,1) modelinin uygunluğunun testinde “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin red edilme oranları verilmiştir. Buna göre bu parametre değerlerine sahip tersi alınabilir ve durağan ARMA(1,1) modelinde gözlem sayısı $n=250$ olduğunda farklı artık türleri üzerinden hesaplanan test istatistikleri $n=10$, $n=25$, $n=50$, $n=100$ durumlarından daha yakın test istatistiği değerleri vermiştir, bunun sonucu olarak farklı artık türleri red oranları bakımından yukarıdaki tabloda görüldüğü gibi birbirlerine çok yakındır. Sadece $m=10$ için koşullu artık türü üzerinden hesaplanan test istatistikleri bazı denemelerde anlamlı derecede diğer artık türlerinden daha yüksek değerler vermiştir.

Çizelge 4.21. $n=500$ için 100 denemede $\phi=0.1$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı

Artık Türü Gecikme Sayısı	Koşullu Artıklar	Koşulsuz Artıklar	İnovasyon Artıklar	Normalleştiril- miş Artıklar
$m=10$	0.13	0.07	0.08	0.08
$m=5$	0.08	0.06	0.06	0.06
$m=3$	0.07	0.06	0.06	0.06
$m=2$	0.06	0.04	0.05	0.04



Şekil 4.19. $n=500$ için 100 denemede $\phi=0.1$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması

Çizelge 4.21’de ve Şekil 4.19’da deneme sayısı $n=500$ için, otoregressif parametre değeri $\phi=0.1$, hareketli ortalama parametre değeri $\theta=0.9$ ve değişen gecikme sayısı alınarak ARMA(1,1) modelinin uygunluğunun testinde “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin red edilme oranları verilmiştir. Buna göre bu parametre değerlerine sahip tersi alınabilir ve durağan ARMA(1,1) modelinde gözlem sayısı $n=500$ olduğunda farklı artık türleri üzerinden hesaplanan test istatistikleri $n=10$, $n=25$, $n=50$, $n=100$ durumlarından daha yakın test istatistiği değerleri vermiştir, bunun sonucu olarak farklı artık türleri red oranları bakımından yukarıdaki tabloda görüldüğü gibi birbirlerine çok yakındır. $n=250$ ’de olduğu gibi $n=500$ iken de sadece $m=10$ için koşullu artık türü üzerinden hesaplanan test istatistikleri bazı denemelerde anlamlı derecede diğer artık türlerinden daha yüksek değerler vermiştir. Diğer gecikme sayılarında farklı artık türleri üzerinden hesaplanan test istatistikleri ve buna bağlı olarak red oranları birbirine çok yakındır.

Özellik olarak F köşegen matrisinin köşegen değerleri her gözlem sayısı için F 'nin bir özelliği olarak son köşegen değerlerine gittikçe 1'e üstten yakınsamaktadır. Ayrıca P^{-1} alt üçgen matrisinin köşegen elemanlarının yine her gözlem sayısı için son köşegen değerlerine gittikçe 1'e aşağıdan yakınsadığı görülmektedir. Gözlem sayısı n büyüdükçe 1'e olan yakınsamalar daha fazla olmaktadır. ARMA(1,1) modelinde tersinir olmayan duruma yakın $\phi=0.1$ ve $\theta=0.9$ parametre değerleri için koşullu artıkların diğer artık türlerine göre daha fazla red edilme oranına sahip olduğu görülmektedir, ancak gözlem sayısı n arttıkça farklı artık türleri arasındaki bu red oranlarında fark azalma eğilimindedir.

$\phi=0.2$ ve $\theta=0.9$ için ARMA(1,1) modeli sonuçları

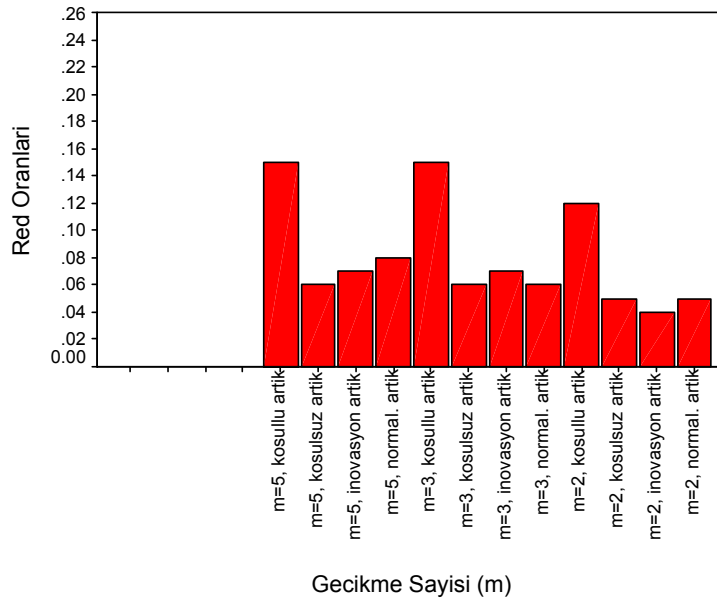
Bu kısımda, $\phi = 0.2$ ve $\theta = 0.9$ için ARMA(1,1) modelinden Monte Carlo benzetim yöntemi kullanılarak 100 denemede veri üretimi yapılmakta, bu veriler üzerinden artık türlerinin değerleri hesaplanmakta ve modelin uygunluğunun incelenmesi durumu farklı artık türleri üzerinden hesaplanan test istatistiği ile “ H_0 : Model uygundur” hipotezi test edilmekte ve H_0 hipotezinin red edilme yüzdeleri karşılaştırılmaktadır. Burada veri üretiminde kullanılan model şu şekildedir:

$$\text{Model: } w_t = 0.2w_{t-1} + a_t - 0.9a_{t-1}$$

Bu model kullanılarak her bir artık türü için elde edilen sonuçlar gözlem sayısı $n=10$ için Çizelge 5.22'de, $n=25$ için Çizelge 5.23'te, $n=50$ için Çizelge 5.24'te, $n=100$ için Çizelge 5.25'te, $n=250$ için Çizelge 5.26'da ve $n=500$ için Çizelge 5.27'de verilmektedir.

Çizelge 4.22. $n=10$ için 100 denemede $\phi=0.2$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranı

Artık Türü Gecikme Sayısı	Koşullu Artıklar	Koşulsuz Artıklar	İnovasyon Artıklar	Normalleştiril- miş Artıklar
m=5	0.15	0.06	0.07	0.08
m=3	0.15	0.06	0.07	0.06
m=2	0.12	0.05	0.04	0.05



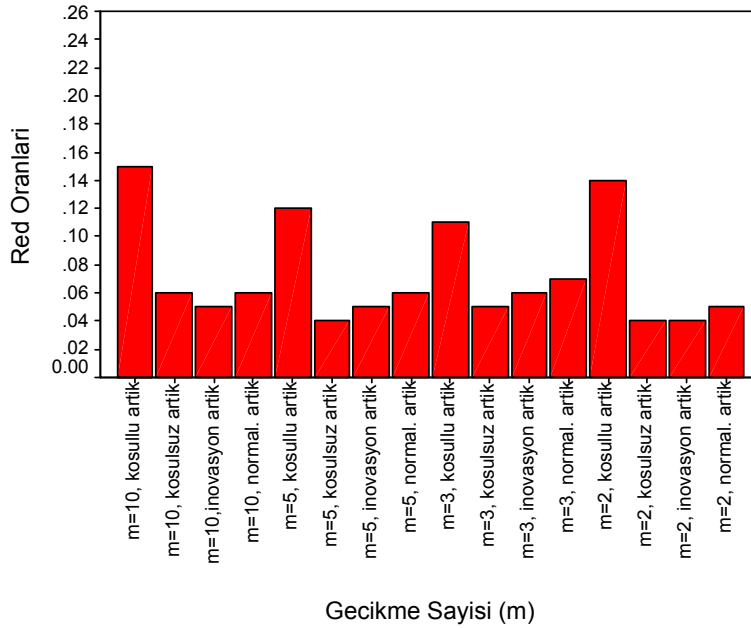
Şekil 4.20. $n=10$ için 100 denemede $\phi=0.2$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması

Çizelge 4.22’de ve Şekil 4.20’de gözlem sayısı $n=10$ için, otoregressif parametre değeri $\phi=0.2$, hareketli ortalama parametre değeri $\theta=0.9$ ve değişen gecikme sayısı alınarak ARMA(1,1) modelinin uygunluğunun testinde “ H_0 : Model Uygundur” hipotezinin red edilme oranları verilmektedir. Buna göre; bu parametre değerlerine sahip tersi alınabilir ve durağan ARMA(1,1) modelinde model parametreleri tersinir

olmayan duruma yakinken model uygunluğunun sınanmasında H_0 hipotezinin red edilme yüzdesi bakımından koşullu artıkların diğer artık türlerine göre red oranlarının daha yüksek olduğu görülmektedir. Bunun sebebi bir çok denemede elde edilen hesaplanan ki kare değerlerinin diğer artık türlerine göre koşullu artıklardan elde edilen hesaplanan ki kare değerlerine göre çok daha büyük olmasıdır. Yukarıdaki çizelgeye bakıldığında aynı gecikme sayısı üzerinden H_0 hipotezinin reddedilmesi oranında koşullu artıkların değerleriyle diğer artık türleri değerleri arasında farklılıklar olduğu, koşullu artıklardaki red edilme oranının daha yüksek olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.23. $n=25$ için 100 denemede $\phi=0.2$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model uygundur” hipotezinin reddedilme oranı

Artık Türü Gecikme Sayısı	Koşullu Artıklar	Koşulsuz Artıklar	İnovasyon Artıklar	Normalleştiril- miş Artıklar
m=10	0.15	0.06	0.05	0.06
m=5	0.12	0.04	0.05	0.06
m=3	0.11	0.05	0.06	0.07
m=2	0.14	0.04	0.04	0.05

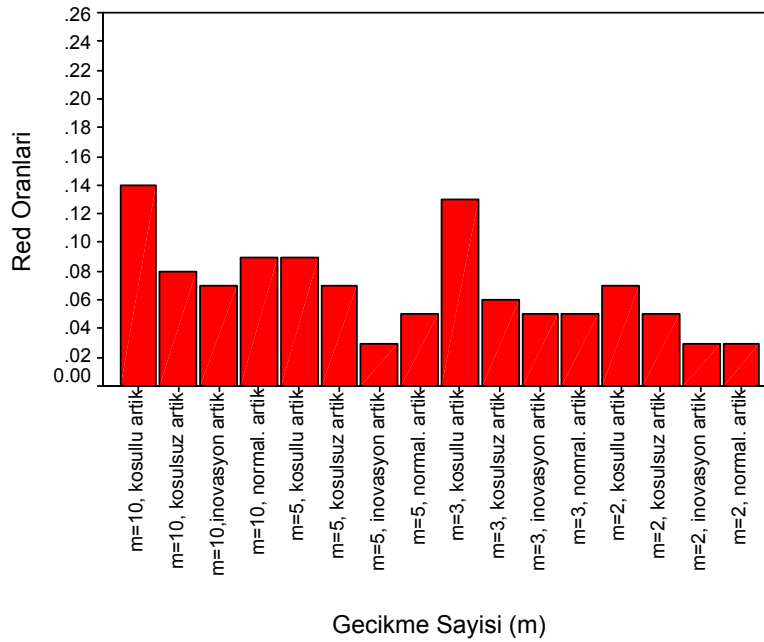


Şekil 4.21. $n=25$ için 100 denemede $\phi=0.2$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması

Çizelge 4.23’te ve Şekil 4.21’de gözlem sayısı $n=25$ için, otoregressif parametre değeri $\phi=0.2$, hareketli ortalama parametre değeri $\theta=0.9$ ve değişen gecikme sayısı alınarak ARMA(1,1) modelinin uygunluğunun testinde “ H_0 : Model uygundur” hipotezinin red edilme oranları verilmektedir. Buna göre; bu parametre değerlerine göre tersi alınabilir ve durağan bir ARMA(1,1) modelinde model parametreleri tersinir olmayan duruma yakınken model uygunluğunun sınanmasında bu farklı artık türleri arasında özellikle koşullu artıklar oranının diğer 3 artık türüne göre her gecikme sayısında daha fazla olduğu görülmektedir. Bu durum bir çok denemede koşullu artıklar üzerinden hesaplanan ki kare değerinin diğer artık türleriyle hesaplanan ki kare değerlerine göre daha büyük değerler vermesinden kaynaklanmaktadır. Yüzdeliklerde meydana gelen farkların sebebi budur. Sonuç olarak aynı gecikme değerleri üzerinden bulunan yüzdeliklerde koşullu artıklar üzerinden karar verdiğimizde red oranı daha yüksek çıkmaktadır.

Çizelge 4.24. $n=50$ için 100 denemede $\phi=0.2$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model uygundur” hipotezinin reddedilme oranı

Artık Türü Gecikme Sayısı	Koşullu Artıklar	Koşulsuz Artıklar	İnovasyon Artıklar	Normalleştiril- miş Artıklar
m=10	0.14	0.08	0.07	0.09
m=5	0.09	0.07	0.03	0.05
m=3	0.13	0.06	0.05	0.05
m=2	0.07	0.05	0.03	0.03



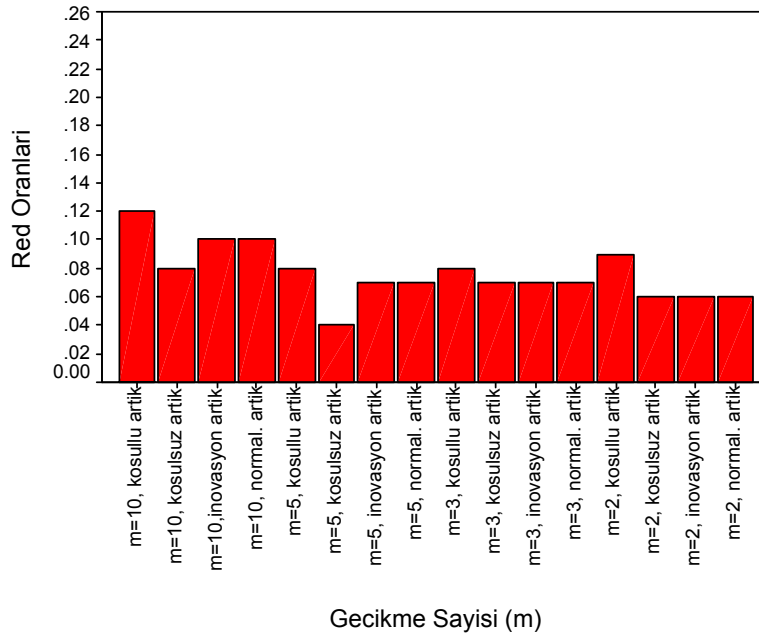
Şekil 4.22. $n=50$ için 100 denemede $\phi=0.2$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımından karşılaştırılması

Çizelge 4.24’te ve Şekil 4.22’de gözlem sayısı $n=50$ için, otoregressif parametre değeri $\phi=0.2$, hareketli ortalama parametre değeri $\theta=0.9$ ve değişen gecikme sayısı alınarak ARMA(1,1) modelinin uygunluğunun testinde “ H_0 : Model uygundur” hipotezinin red edilme oranları verilmektedir. Buna göre; bu parametre değerlerine

göre tersi alınabilir ve durağan bir ARMA(1,1) modelinde model parametreleri tersinir olmayan duruma yakinken model uygunluğunun sınanmasında bu farklı artık türleri arasında aynı gecikme değerinde koşullu artıklar üzerinden karar verdiğimizde red oranları daha yüksek çıkmaktadır.

Çizelge 4.25. $n=100$ için 100 denemede $\phi=0.2$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model uygundur” hipotezinin reddedilme oranı

Artık Türü Gecikme Sayısı	Koşullu Artıklar	Koşulsuz Artıklar	İnovasyon Artıklar	Normalleştiril- miş Artıklar
m=10	0.12	0.08	0.10	0.10
m=5	0.08	0.04	0.07	0.07
m=3	0.08	0.07	0.07	0.07
m=2	0.09	0.06	0.06	0.06

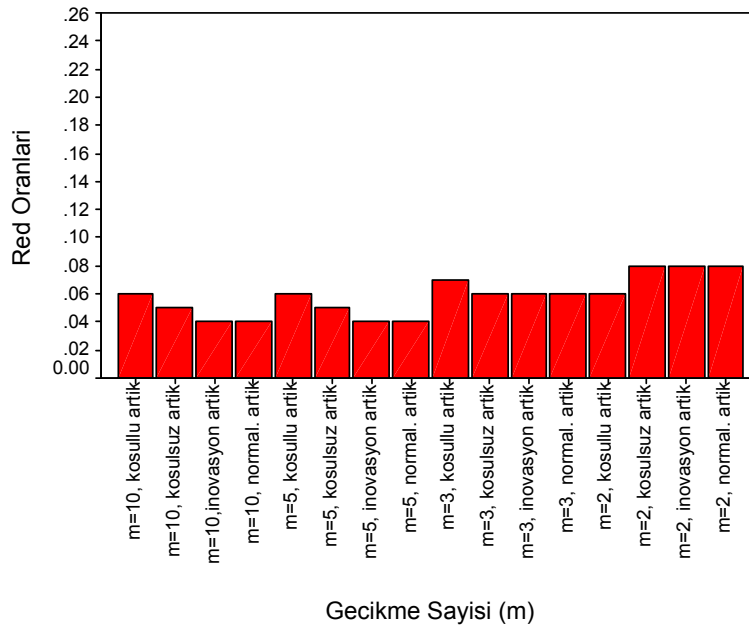


Şekil 4.23. $n=100$ için 100 denemede $\phi=0.2$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımında karşılaştırılması

Çizelge 4.25’te ve Şekil 4.23’te gözlem sayısı $n=100$ için, otoregressif parametre değeri $\phi=0.2$, hareketli ortalama parametre değeri $\theta=0.9$ ve değişen gecikme sayısı alınarak ARMA(1,1) modelinin uygunluğunun testinde “ H_0 : Model uygundur” hipotezinin red edilme oranları verilmektedir. Buna göre; bu parametre değerlerine göre tersi alınabilir ve durağan bir ARMA(1,1) modelinde model parametreleri tersinir olmayan duruma yakinken model uygunluğunun sınanmasında bu farklı artık türleri arasında aynı gecikme değerinde koşullu artıklar üzerinden karar verdiğimizde red oranları daha yüksek çıkmaktadır.

Çizelge 4.26. $n=250$ için 100 denemede $\phi=0.2$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model uygundur” hipotezinin reddedilme oranı

Artık Türü Gecikme Sayısı	Koşullu Artıklar	Koşulsuz Artıklar	İnovasyon Artıklar	Normalleştiril- miş Artıklar
m=10	0.06	0.05	0.04	0.04
m=5	0.06	0.05	0.04	0.04
m=3	0.07	0.06	0.06	0.06
m=2	0.06	0.08	0.08	0.08



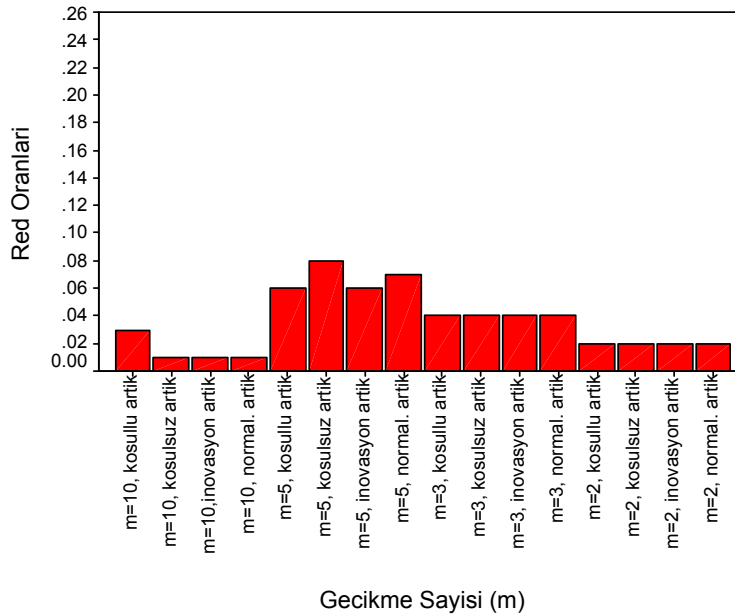
Şekil 4.24. $n=250$ için 100 denemede $\phi=0.2$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımında karşılaştırılması

Çizelge 4.26’da ve Şekil 4.24’te gözlem sayısı $n=250$ için, otoregressif parametre değeri $\phi=0.2$, hareketli ortalama parametre değeri $\theta=0.9$ ve değişen gecikme sayısı alınarak ARMA(1,1) modelinin uygunluğunun testinde “ H_0 : Model uygundur” hipotezinin red edilme oranları verilmektedir. Buna göre; bu parametre değerlerine göre tersi alınabilir ve durağan bir ARMA(1,1) modelinde model parametreleri

tersinir olmayan duruma yakinken model uygunluğunun sınanmasında bu farklı artık türleri arasında aynı gecikme değerinde $n=250$ için hem hesaplanan test istatistikleri hem de red oranları birbirine yakın değerler vermiştir.

Çizelge 4.27. $n=500$ için 100 denemede $\phi=0.2$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model uygundur” hipotezinin reddedilme oranı

Artık Türü Gecikme Sayısı	Koşullu Artıklar	Koşulsuz Artıklar	İnovasyon Artıklar	Normalleştiril- miş Artıklar
m=10	0.03	0.01	0.01	0.01
m=5	0.06	0.08	0.06	0.07
m=3	0.04	0.04	0.04	0.04
m=2	0.02	0.02	0.02	0.02



Şekil 4.25. $n=500$ için 100 denemede $\phi=0.2$ ve $\theta=0.9$ iken ARMA(1,1) modeli için Ljung-Box Test istatistiğine göre “ H_0 : Model uygundur” hipotezinin reddedilme oranlarının artık türleri ve gecikme sayıları bakımında karşılaştırılması

Çizelge 4.27’de ve Şekil 4.25’te gözlem sayısı $n=250$ için, otoregressif parametre değeri $\phi=0.2$, hareketli ortalama parametre değeri $\theta=0.9$ ve değişen gecikme sayısı alınarak ARMA(1,1) modelinin uygunluğunun testinde “ H_0 : Model uygundur” hipotezinin red edilme oranları verilmektedir. Buna göre; bu parametre değerlerine göre tersi alınabilir ve durağan bir ARMA(1,1) modelinde model parametreleri tersinir olmayan duruma yakınken model uygunluğunun sınanmasında bu farklı artık türleri arasında aynı gecikme değerinde $n=500$ için hem hesaplanan test istatistikleri hem de red oranları birbirine yakın değerler vermiştir.

F köşegen matrisinin özelliği olarak köşegen değerleri her gözlem sayısı için son köşegen değerlerine gittikçe 1’e yukarıdan yakınsamaktadır. Ayrıca P^{-1} alt üçgen matrisinin köşegen elemanlarının yine her gözlem sayısı için son köşegen değerlerine gittikçe 1’e aşağıdan yakınsadığı görülmektedir. Gözlem sayısı n büyüdükçe 1’e olan yakınsamalar daha fazla olmaktadır. Model tersinir olmayan duruma yakın iken genel olarak koşullu artıkların diğer artık türlerine göre daha fazla red edilme oranına sahip olduğu görülmektedir, ancak gözlem sayısı n arttıkça farklı artık türleri arasındaki bu red oranlarında fark azalma eğilimindedir.

Farklı parametre değerleri üzerinden artık türlerinin hesaplanması için oluşturulan Bölüm 3’teki $\Sigma_w = LFL'$ ayrıştırmasından elde edilen F köşegen matrisi için tüm parametre değerlerinde F matrisinin özelliği olarak köşegen elemanları gittikçe üstten 1’e yakınsamaktadır. Ayrıca, normalleştirilmiş artıkların hesaplanmasında bahsedildiği gibi $\Sigma_0 = I + Z\Omega Z' = PP'$ olacak şekilde tanımladığımız P alt üçgen matrisinde $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere (i, i) . elemanı i ’nin artışıyla 1’e üstten, P^{-1} ’in (i, i) . elemanı i ’nin artışıyla 1’e aşağıdan yakınsamaktadır [Mauricio, 2008].

Bu çalışmada incelenen farklı parametre değerlerindeki tüm ARMA(1,1) modelleri için n gözlem sayısı arttıkça F ve P matrislerindeki son köşegen elemanlarının 1’e daha çok yakınsadığını görmekteyiz. Gözlem sayısı $n=25$ olarak alındığında $n=10$ ’a göre, $n=50$ olarak alındığında $n=25$ ve $n=10$ ’a göre, $n=100$ alındığında daha küçük

gözlem değerleri olan $n=10$, $n=25$ ve $n=50$ 'ye göre, $n=250$ alındığında $n=10$, $n=25$, $n=50$ ve $n=100$ 'e göre, $n=500$ alındığında da 500'den küçük diğer gözlem sayılarına göre F matrisinin ve P^{-1} matrisinin son köşegen değerlerinde yakınsamalar daha iyi gözlemlenmiştir. Sonuç olarak F ve P^{-1} matrislerinin son köşegen elemanları gözlem sayısı n arttıkça 1'e daha fazla yakınsamaktadır.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında zaman serileri analizinde farklı artık türlerinin (koşullu artıklar, koşulsuz artıklar, inovasyon artıklar ve normalleştirilmiş artıklar) hesaplanması ve bazı özellikleri hakkında bilgi verilmekte ve bu artık türlerinin model uygunluğunun incelenmesindeki durumları farklı gözlem sayıları ($n=10$, $n=25$, $n=50$, $n=100$, $n=250$ ve $n=500$) ve farklı parametre çiftleri üzerinden ($\phi=0.5$ ve $\theta=0.6$, $\phi=0.9$ ve $\theta=0.5$, $\phi=0.1$ ve $\theta=0.9$, $\phi=0.2$ ve $\theta=0.9$) ARMA(1,1) modeli için incelenmektedir. İncelemede her farklı parametre ve gözlem sayısı için farklı gecikme sayılarında test istatistikleri hesaplanmıştır. Artık türlerinin model uygunluğunun incelenmesindeki durumlarının karşılaştırılması için 100 deneme üzerinden Monte Carlo benzetim yöntemi kullanılarak “ H_0 : Model uygundur” hipotezi red edilme oranları elde edilmiş ve bu şekilde karşılaştırma yapılması amaçlanmıştır.

Artık türlerinin red oranlarının elde edilmesi için; öncelikli olarak benzetim çalışmasıyla farklı gözlem sayılarında, belli parametre değerleri üzerinden üretilmiş olan ARMA(1,1) zaman serileri üzerinden dört farklı artık türü hesaplanmış ve bunlardan Ljung-Box test istatistiği değerleri hesaplanarak farklı gecikme değerlerinde H_0 hipotezinin reddedilme oranları verilerek, bu yolla artık türlerinin karşılaştırılması amaçlanmıştır. Bu artık türleri için elde edilen red oranlarını değerlendirmek bakımından artık türleri, farklı gözlem sayılarında, model açısından ilgili parametre değerleri ve gecikme sayıları irdelenmiştir. Buna göre artıkların parametrelerdeki ve gözlem sayısındaki farklılıklar bakımından birbirlerine göre nasıl değişim göstermekte oldukları ortaya konulmuştur. Bu değerlendirmede ilgili ki kare tablo değerleri için birinci (I.) tip hata (α), 0.05 olarak alınmıştır.

ARMA(1,1) modeli için $\phi=0.5$ ve $\theta=0.6$ iken dört farklı artık türü üzerinden hesaplanan ki kare test istatistiği farklı ancak birbirine çok yakın değerler vermelerinden dolayı aynı gecikme sayıları üzerinden tüm gözlem sayılarında red oranları bakımından belirgin bir fark görülmemektedir.

ARMA(1,1) modeli için $\phi=0.9$ ve $\theta=0.6$ parametre değerleri için model durağan olmama durumuna yakın iken dört farklı artık türü üzerinden hesaplanan ki kare test istatistiği farklı ancak birbirine çok yakın değerler vermelerinden dolayı aynı gecikme sayıları üzerinden tüm gözlem sayılarında red oranları bakımından belirgin bir fark görülmemektedir.

ARMA(1,1) modeli için $\phi=0.1$ ve $\theta=0.9$ parametre değerleri için model tersinir olmayan duruma yakinken dört farklı artık türü üzerinden hesaplanan ki kare test istatistiği bir çok denemede model uygunluğunun incelenmesi aşamasında farklı kararlar vermeye neden olabilmektedir. Bu durum tüm gözlem sayılarında artık türlerinin red oranlarındaki farklılıklardan görülmektedir. Özellikle koşullu artıklar üzerinden hesaplanan test istatistiğinin birçok denemede daha yüksek değerler vermesi sonucu olarak red oranları koşullu artık türünde her örnek çapında diğer artık türlerine göre daha yüksektir. Parametre değerleri tersinir olmayan duruma yakın iken küçük gözlem sayılarında koşullu artıkların diğer artık türlerine göre daha fazla red edilme oranına sahip olduğu görülmektedir, ancak gözlem sayısı n arttıkça farklı artık türleri arasındaki bu red oranlarında fark azalma eğilimindedir.

Aynı şekilde ARMA(1,1) modeli için $\phi=0.2$ ve $\theta=0.9$ parametre değerleri için model yine tersinir olmayan duruma yakinken dört farklı artık türü üzerinden hesaplanan ki kare test istatistiği yine bir çok denemede model uygunluğunun incelenmesi aşamasında farklı kararlar vermeye neden olabilmektedir. Bu durum tüm gözlem sayılarında artık türlerinin red oranlarındaki farklılıklardan dolayı görülmektedir. Özellikle koşullu artıklar üzerinden hesaplanan test istatistiğinin birçok denemede daha yüksek değerler vermesi sonucu olarak red oranları koşullu artık türünde genel olarak diğer artık türlerine göre daha yüksektir. Yine parametre değerleri tersinir olmayan duruma yakın iken küçük gözlem sayılarında daha büyük gözlem sayılarına göre koşullu artıkların diğer artık türlerine göre daha fazla red edilme oranına sahip olduğu görülmektedir, gözlem sayısı n arttıkça farklı artık türleri arasındaki bu red oranları farkı azalmaktadır.

Yapılan benzetim çalışmasıyla farklı artık türleri üzerinden hesaplanan ki kare istatistiklerinin farklı değerler verdiği ve bu farklı değerlerin model uygunluğunun testi aşamasında farklı kararlar vermeye neden olabileceği görülmektedir. Genel olarak çalışmada elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Özellikle örnek çapı küçükken ve ARMA(1,1) model parametreleri tersi alınamaz duruma yaklaştıkça artık türleri arasında hesaplanan ki kare test istatistiği değerleri arasında farklar belirginleşmekte ve red oranları bakımından fark oluşmaktadır. Koşullu artıklarla hesaplanan test istatistiği değerlerinin anlamlı derecede daha yüksek değerler vermelerinden dolayı tüm gözlem sayılarında model tersinir olmayan duruma yaklaştıkça hem koşullu artıkların red oranları artmakta hem de koşullu artıklarla diğer artıkların red oranları arasındaki yüzdeler farkları da artış göstermektedir. Buna göre tersinir olmayan duruma yakın parametre değerlerine sahip olan ARMA(1,1) modeli için model uygunluğunun incelenmesinde koşullu artıkların kullanılması diğer artık türlerinin kullanımına göre daha fazla red kararı vermeye sebep olmaktadır. ARMA(1,1) modelinde parametre değerleri tersinir olmayan duruma yakın iken küçük gözlem sayılarında koşullu artıkların diğer artık türlerine göre daha fazla red edilme oranına sahip olduğu görülmektedir, ancak gözlem sayısı n arttıkça farklı artık türleri arasındaki bu red oranlarında fark azalma eğilimindedir.

Diğer parametre değerleri için yapılan denemelerde model tersi alınamaz duruma yakın değilken veya durağan olmama durumuna yakinken dört farklı artık türü üzerinden hesaplanan ki kare istatistikleri birbirine çok yakın değerler vermekte ve tüm gözlem sayıları üzerinden yapılan benzetim çalışmalarında birbirlerine yakın red edilme oranları vermektedirler. Buna göre model tersi alınamaz duruma yakın değilken veya durağan olmama durumuna yakinken model uygunluğunun incelenmesinde dört farklı artık türünün kullanımları, farklılığa sahip değildir.

Bu çalışmaya paralel olarak ARMA dışında diğer Box-Jenkins modelleri için benzetim çalışmaları yapılarak farklı artık türlerinin model uygunluğunun incelenmesi noktasındaki durumları başka çalışmalarda tartışılabilir. Ayrıca bu dört

farklı artık türünün hangi model veya parametre değerleri için model uygunluğunun incelenmesinde daha etkin sonuçlar verdiği Box-Jenkins modelleri üzerinden araştırılabilir.

KAYNAKLAR

- Akdi, Y., "Zaman Serileri Analizi (Birim Kökler ve Kointegrasyon)", *Bıçaklar Kitabevi*, Ankara, 1-18 (2003).
- Ansley, C.F., "An algorithm for the exact likelihood of a mixed autoregressive moving average process". *Biometrika*, 66: 59–65 (1979).
- Ansley, C.F., Newbold, P., "On the finite sample distribution of residual autocorrelations in autoregressive moving average models", *Biometrika*, 66: 547–553 (1979).
- Arranz, M.A., "Portmanteau Test Statistics in Time Series", *Time-Oriented Language*, 25-32 (2005).
- Battaglia, F., "Approximate power of portmanteau tests for time series", *Statistics and Probability Letters*, 9: 337-341 (1990).
- Box, G.E.P. and Jenkins, G.M., "Time Series Analysis: Forecasting and Control", *Holden Day*, London, 1-80 (1976).
- Box, G.E.P., Jenkins, G.M and Reinsel, G.C., "Time Series analysis: Forecasting and a Control", *Prentice Hall*, New Jersey, 7-88, 224-307 (1994).
- Box, G.E.P. and Pierce, D.A., "Distribution of the residual autocorrelations in autoregressive integrated moving average time series", *Journal of the American Statistical Association*, 65: 1509-1526 (1970).
- Brockwell, P.J., Davis, R.A., "Introduction to Time Series and Forecasting", 2nd Edition, *Springer*, New York, 1-110 (2002).
- Davies, N., Triggs, C. M. And :Newbold, P., "Significance levels of the Box-Pierce "Portmanteau statistic in finite samples", *Biometrika*, 64: 517-522 (1977).
- Grasa, A.A., "Econometric Model Sellation: A New Approach". *Kluwer*, (1989).
- Kadılar, C., "SPSS Uygulamalı Zaman Serileri Analizine Giriş", *Hacettepe Üniversitesi Basımevi*, Ankara, 1-5 (2005).
- Kasap, R., "İstanbul Menkul Kıymetler Borsasının İncelenmesi: İstatistiksel Bir Yaklaşım", *İMKB Dergisi*, 6: 27-33 (1998).
- Kasap, R. ve Saraçoğlu, B., " Dışticaret verileri için alternatif yöntemlere dayanarak kestirimlerin elde edilmesi", *Ekonomik Yaklaşım Dergisi*, 9(29): 79-89 (1998).
- Kutlar, A., "Ekonometrik Zaman Serileri", *Gazi Kitabevi*, Ankara, 1-52 (2000).

Ljung, G.M., Box, G.E.P., “The likelihood function of stationary autoregressive moving average models”, *Biometrika*, 66: 265–270 (1979).

Ljung, G.M. and Box, G.E.P., “On a measure of lack of fit in time series models”, *Biometrika*, 65: 297-303 (1978).

Lutkepohl, H., Introduction to Multiple Time Series Analysis”, *Springer-Verlag*, Berlin, 69-132 (1991).

Mauricio, J.A., “Exact maximum likelihood estimation of stationary vector ARMA models”, *Journal of the American Statistical Association*, 90: 282–291 (1995).

Mauricio, J.A., “Computing and using residuals in time series models”, *Computational Statistics & Data Analysis*, 52: 1746 – 1763 (2008).

Özmen, A., “Zaman serisi analizinde Box-Jenkins yöntemi ve banka mevduat tahmininde uygulama denemesi”, *Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları*, Eskişehir, 9: 110 (1986).

Prothero, D.L. and Wallis, K.F., “Modelling macroeconomic time series”, *Journal of the Royal Statistical Society A*, 139: 468-500 (1976).

Sancak, S., “Tek değişkenli zaman serilerinde modelleme sürecindeki testlerin karşılaştırmalı incelenmesi”, Doktora Tezi, *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, 20-30 (2008).

Wei, W.W.S., “Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods”, *Addison-Wesley Publishing Company, Inc.* , UK, 32-64, 135-156 (1990).

EKLER

EK-1 Koşullu ve koşulsuz artıkların hesaplanmasında kullanılan program

General Declaration

```
Dim dizi(14) As Single
Dim fi As Single, teta As Single, deger As Single, oran As Single, digeroran As Single
Dim asıfır As Single, Ut As Single
Dim satır As Single, sütun As Single, satır1 As Single, sütun1 As Single
```

Private Sub Command1_Click() (Parametre Değerlerini Matrise Yerleştir)

```
On Error GoTo ttl
fi = Text1(0).Text
teta = Text1(1).Text
Text2.Text = fi
Text4.Text = fi
Text5.Text = teta
Text7.Text = teta
Text10.Text = teta
oran = (fi - teta) ^ 2 / (1 - fi ^ 2)
MSFlexGrid3.TextMatrix(0, 0) = 1
MSFlexGrid3.TextMatrix(0, 1) = -1
MSFlexGrid3.TextMatrix(1, 0) = -1
MSFlexGrid3.TextMatrix(1, 1) = oran + 1
MSFlexGrid4.TextMatrix(0, 0) = fi ^ 2
MSFlexGrid4.TextMatrix(0, 1) = -1 * fi * teta
MSFlexGrid4.TextMatrix(1, 0) = -1 * fi * teta
MSFlexGrid4.TextMatrix(1, 1) = teta ^ 2
Exit Sub
ttl:
cev = MsgBox(Err.Number & " Numaralı " & Err.Description & " Hatası")
Err.Clear
End Sub
```

Private Sub Command2_Click() (KOŞULLUYU HESAPLA)

```
hesapla
tershesap
End Sub
```

Private Sub Command3_Click() (HESAPLA)

```
On Error GoTo tt2
Dim A1 As Single, A2 As Single, A3 As Single
Dim B1 As Single, B2 As Single, B3 As Single
MSFlexGrid5.TextMatrix(0, 0) = (1 / oran) * CSng(MSFlexGrid3.TextMatrix(0, 0))
MSFlexGrid5.TextMatrix(0, 1) = (1 / oran) * CSng(MSFlexGrid3.TextMatrix(0, 1))
MSFlexGrid5.TextMatrix(1, 0) = (1 / oran) * CSng(MSFlexGrid3.TextMatrix(1, 0))
MSFlexGrid5.TextMatrix(1, 1) = (1 / oran) * CSng(MSFlexGrid3.TextMatrix(1, 1))
digeroran = (1 - teta ^ (CSng(Text9.Text) * CSng(Text8.Text))) / (1 - teta ^ (CSng(Text11.Text)))
MSFlexGrid6.TextMatrix(0, 0) = digeroran * CSng(MSFlexGrid4.TextMatrix(0, 0))
MSFlexGrid6.TextMatrix(0, 1) = digeroran * CSng(MSFlexGrid4.TextMatrix(0, 1))
MSFlexGrid6.TextMatrix(1, 0) = digeroran * CSng(MSFlexGrid4.TextMatrix(1, 0))
MSFlexGrid6.TextMatrix(1, 1) = digeroran * CSng(MSFlexGrid4.TextMatrix(1, 1))

MSFlexGrid7.TextMatrix(0, 0) = CSng(MSFlexGrid5.TextMatrix(0, 0)) + CSng(MSFlexGrid6.TextMatrix(0, 0))
MSFlexGrid7.TextMatrix(0, 1) = CSng(MSFlexGrid5.TextMatrix(0, 1)) + CSng(MSFlexGrid6.TextMatrix(0, 1))
MSFlexGrid7.TextMatrix(1, 0) = CSng(MSFlexGrid5.TextMatrix(1, 0)) + CSng(MSFlexGrid6.TextMatrix(1, 0))
MSFlexGrid7.TextMatrix(1, 1) = CSng(MSFlexGrid5.TextMatrix(1, 1)) + CSng(MSFlexGrid6.TextMatrix(1, 1))

If CSng(MSFlexGrid7.TextMatrix(0, 1)) < 0 Then
Label15.Caption = MSFlexGrid7.TextMatrix(0, 0) & " x " & "W0 " & MSFlexGrid7.TextMatrix(0, 1) & " x " &
"a0" & " = " & fi * CSng(MSFlexGrid2.TextMatrix(2, 1))
Else
```

EK-1(Devam) Koşullu ve koşulsuz artıkların hesaplanmasında kullanılan program

```
Label15.Caption = MSFlexGrid7.TextMatrix(0, 0) & " x " & "W0 " & " + " & MSFlexGrid7.TextMatrix(0, 1) &
" x " & "a0" & " = " & fi * CSng(MSFlexGrid2.TextMatrix(2, 1))
End If
If CSng(MSFlexGrid7.TextMatrix(1, 1)) < 0 Then
Label16.Caption = MSFlexGrid7.TextMatrix(1, 0) & " x " & "W0 " & MSFlexGrid7.TextMatrix(1, 1) & " x " &
"a0" & " = " & -1 * teta * CSng(MSFlexGrid2.TextMatrix(2, 1))
Else
Label16.Caption = MSFlexGrid7.TextMatrix(1, 0) & " x " & "W0 " & " + " & MSFlexGrid7.TextMatrix(1, 1) &
" x " & "a0" & " = " & -1 * teta * CSng(MSFlexGrid2.TextMatrix(2, 1))
End If
```

```
If CSng(MSFlexGrid7.TextMatrix(0, 0)) > 0 And CSng(MSFlexGrid7.TextMatrix(1, 0)) < 0 Then
A1 = CSng(MSFlexGrid7.TextMatrix(0, 0))
A2 = CSng(MSFlexGrid7.TextMatrix(0, 1))
A3 = fi * CSng(MSFlexGrid2.TextMatrix(2, 1))
B1 = CSng(MSFlexGrid7.TextMatrix(1, 0))
B2 = CSng(MSFlexGrid7.TextMatrix(1, 1))
B3 = -1 * teta * CSng(MSFlexGrid2.TextMatrix(2, 1))
Text12.Text = (-1 * B1 * A3 + A1 * B3) / (A1 * B2 + (-1) * B1 * A2)
Text13.Text = (A3 - A2 * CSng(Text12.Text)) / A1
End If
If CSng(MSFlexGrid7.TextMatrix(0, 0)) < 0 And CSng(MSFlexGrid7.TextMatrix(1, 0)) < 0 Then
End If
Exit Sub
tt2:
cev = MsgBox(Err.Number & " Numaralı " & Err.Description & " Hatası")
Err.Clear
End Sub
```

Private Sub Command5_Click() (DEĞERLERİ AKTAR)

```
MSFlexGrid1.TextMatrix(1, 1) = Text13.Text
MSFlexGrid2.TextMatrix(1, 2) = Text12.Text
End Sub
```

Private Sub Command6_Click() (KOŞULSUZU HESAPLA)

```
sonhesap
End Sub
```

Private Sub Command7_Click() (VERİ AL)

```
With Adodc1
.ConnectionString = "Provider = Microsoft.Jet.OLEDB.4.0; Data Source = " & App.Path & "\degerler.mdb" &
";Persist Security Info = False"
.CommandType = adCmdText
.RecordSource = "SELECT * FROM tablo"
.Refresh
End With
Set DataGrid1.DataSource = Adodc1
For k = 0 To Adodc1.Recordset.Fields.Count - 1
List1.AddItem Adodc1.Recordset.Fields(k).Name
Next k
End Sub
```

Private Sub Command8_Click() (ÇIKIŞ)

```
End
End Sub
```

EK-1(Devam) Koşullu ve koşulsuz artıkların hesaplanmasında kullanılan program

Private Sub Form_Load() (Formun Yüklenmesi Sırasında Yapılan İşlemler)

```
MSFlexGrid1.TextMatrix(0, 1) = "Wt"
MSFlexGrid1.TextMatrix(0, 2) = "a0t"
MSFlexGrid2.TextMatrix(0, 1) = "Ut"
dizi(0) = 0
dizi(1) = 1.1
dizi(2) = 4.3
dizi(3) = 3
dizi(4) = -0.7
dizi(5) = 1.6
dizi(6) = 3.2
dizi(7) = 0.3
dizi(8) = -1.9
dizi(9) = -0.3
dizi(10) = -0.3
dizi(11) = 0.8
dizi(12) = 2:dizi(13) = 0
```

End Sub

Private Sub List1_DblClick()

```
srg = "SELECT " & List1.Text & " FROM tablo"
With Adodc1
.ConnectionString = "Provider = Microsoft.Jet.OLEDB.4.0; Data Source = " & App.Path & _
"\degerler.mdb" &
";Persist Security Info = False"
.CommandType = adCmdText
.RecordSource = srg
.Refresh
End With
Set DataGrid1.DataSource = Adodc1
Adodc1.Recordset.MoveLast
Adodc1.Recordset.MoveFirst
satırsay = Adodc1.Recordset.RecordCount
MSFlexGrid1.Rows = satırsay + 1
MSFlexGrid2.Rows = satırsay + 1
For k = 1 To MSFlexGrid1.Rows - 1
MSFlexGrid1.TextMatrix(k, 0) = k - 1
MSFlexGrid2.TextMatrix(k, 0) = k - 1
Next k
MSFlexGrid1.TextMatrix(1, 1) = 0
MSFlexGrid1.TextMatrix(1, 2) = 0
pp = 1
Do While Not Adodc1.Recordset.EOF
MSFlexGrid1.TextMatrix(pp, 1) = Adodc1.Recordset.Fields(0)
pp = pp + 1
Adodc1.Recordset.MoveNext
Loop
End Sub
```

Private Sub MSFlexGrid1_EnterCell() (MsFlexgrid1 Nesnesinde Bir Hücreye Tıklandığında Hücrenin Satır ve Sütun Numaralarını Al)

```
satır = MSFlexGrid1.Row
sutun = MSFlexGrid1.Col
End Sub
```

EK-1(Devam) Koşullu ve koşulsuz artıkların hesaplanmasında kullanılan program

Private Sub MSFlexGrid1_KeyPress(KeyAscii As Integer) *(MSFlexgrid1 Nesnesi Aktif Durumdayken Bir Tuşa Basıldığında)*

If KeyAscii = 13 And satır < MSFlexGrid1.Rows - 1 Then *(Basılan Tuş ENTER ve Satır değeri MSFlexGrid1 nesnesinin satır sayısından küçükse)*

MSFlexGrid1.Row = MSFlexGrid1.Row + 1

End If

If KeyAscii = 13 And satır = MSFlexGrid1.Rows - 1 Then *(Basılan Tuş ENTER ve Satır değeri MSFlexGrid1 nesnesinin son satırına eşitse)*

MSFlexGrid1.Row = 1

End If

If KeyAscii > 22 Then *(Basılan Tuş özel işaret tuşu değilse)*

MSFlexGrid1.Text = MSFlexGrid1.Text & Chr(KeyAscii)

End If

End Sub

Private Sub MSFlexGrid1_KeyUp(KeyCode As Integer, Shift As Integer)

If KeyCode = 46 Then *(Silme Tuşuna Basılmışsa)*

MSFlexGrid1.Text = ""

End If

End Sub

Public Sub hesapla()

For k = 2 To MSFlexGrid1.Rows - 1

If k < MSFlexGrid1.Rows - 1 Then

asıfır = CSng(MSFlexGrid1.TextMatrix(k, 1)) - fi * CSng(MSFlexGrid1.TextMatrix(k - 1, 1)) + teta *

CSng(MSFlexGrid1.TextMatrix(k - 1, 2))

MSFlexGrid1.TextMatrix(k, 2) = Format(asıfır, "#.###")

Else

MSFlexGrid1.TextMatrix(k, 2) = 0

MSFlexGrid2.TextMatrix(k, 1) = 0

End If

Next k

End Sub

Private Sub MSFlexGrid2_EnterCell()

satır1 = MSFlexGrid2.Row

sutun1 = MSFlexGrid2.Col

End Sub

Private Sub MSFlexGrid2_KeyPress(KeyAscii As Integer)

If KeyAscii = 13 And satır < MSFlexGrid2.Rows - 1 Then

MSFlexGrid2.Row = MSFlexGrid2.Row + 1

End If

If KeyAscii = 13 And satır = MSFlexGrid2.Rows - 1 Then

MSFlexGrid2.Row = 1

End If

If KeyAscii > 22 Then

MSFlexGrid2.Text = MSFlexGrid2.Text & Chr(KeyAscii)

End If

End Sub

Private Sub MSFlexGrid2_KeyUp(KeyCode As Integer, Shift As Integer)

If KeyCode = 46 Then

MSFlexGrid2.Text = ""

End If

End Sub

EK-1(Devam) Koşullu ve koşulsuz artıkların hesaplanmasında kullanılan program

Public Sub tershesap()

```

For k = MSFlexGrid2.Rows - 2 To 1 Step -1
    Ut = CSng(MSFlexGrid1.TextMatrix(k, 2)) + teta * CSng(MSFlexGrid2.TextMatrix(k + 1, 1))
    MSFlexGrid2.TextMatrix(k, 1) = Format(Ut, "#.###")
'Else
'MSFlexGrid1.TextMatrix(k, 2) = 0
'MSFlexGrid2.TextMatrix(k, 1) = 0
'End If
Next k
End Sub

```

Public Sub sonhesap()

```

For k = 2 To MSFlexGrid1.Rows - 1
    If k < MSFlexGrid1.Rows - 1 Then
        asıfır = CSng(MSFlexGrid1.TextMatrix(k, 1)) - fi * CSng(MSFlexGrid1.TextMatrix(k - 1, 1)) + teta *
        CSng(MSFlexGrid2.TextMatrix(k - 1, 2))
        MSFlexGrid2.TextMatrix(k, 2) = Format(asıfır, "#.###")
    Else
        MSFlexGrid1.TextMatrix(k, 2) = 0
        MSFlexGrid2.TextMatrix(k, 1) = 0
    End If
Next k
End Sub

```

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : Ünsal, Mehmet Güray
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 15.09.1985 Ankara
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0 (312) 2321665
e-mail : mgunsal@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Gazi Üniversitesi/ İstatistik Bölümü	2007
Lise	Dr. Binnaz Rıdvan Ege Anadolu Lisesi	2003

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Yüzmek, gitar çalmak, kitap ve dergi okumak, deneme yazmak