



**KOMPAKT DİSKLERDE DURRMEYER TİP OPERATÖRLER İLE
YAKLAŞIM**

Mutlu BULUT

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİMDALİ**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MAYIS 2014

Mutlu BULUT tarafından hazırlanan “Kompakt Disklerde Durrmeyer Tip Operatörler İle Yaklaşım” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. İsmet YÜKSEL

Matematik Anabilim Dalı, GAZİ Ü.

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan : Unvanı Adı SOYADI

Anabilim Dalı, Üniversite Adı

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye : Unvanı Adı SOYADI

Anabilim Dalı, Üniversite Adı

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi:/...../.....

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....
Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Mutlu BULUT

15/05/2014

KOMPAKT DİSKLERDE DURRMEYER TİP OPERATÖRLER İLE YAKLAŞIM
(Yüksek Lisans Tezi)

Mutlu BULUT

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Mayıs 2014

ÖZET

Bu tezde Sorin G. GAL ve Vijay GUPTA tarafından çalışılan kompakt disklerde kompleks Durrmeyer tip operatörler ile ilgili bazı yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Ayrıca kompakt disklerde, kompleks Durrmeyer operatörler ile analitik fonksiyonlara eşanlı yaklaşımın kesin derecesi elde edilmiştir. Daha sonra kompleks Durrmeyer operatörlerin düzgün yakınsaklığı kanıtlandı. Böylece kompleks Durrmeyer operatörlerin yaklaşım özellikleri $[0,1]$ aralığından kompleks düzlemin kompakt disklerine genişletilmiştir.

Bilim Kodu : 204.1.095
Anahtar Kelimeler : Kompleks Durrmeyer tip operatörler, Kompleks eşanlı yaklaşım, Voronovskaja tip sonuç
Sayfa Adedi : 55
Danışman : Doç. Dr. İsmet YÜKSEL

APPROXIMATION BY DURRMEYER-TYPE OPERATORS IN COMPACT DISKS
(M. Sc. Thesis)

Mutlu BULUT

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
May 2014

ABSTRACT

In this thesis, we investigated some approximation properties of complex Durrmeyer-type operators in compact disks studied by Sorin G.GAL and Vijay GUPTA. Moreover, the exact order of simultaneous approximation, attached to analytic functions in compact disks, is obtained. Afterwards, we put in evidence the overconvergence for complex Durrmeyer operators. Thus, approximation properties are extended from the real $[0,1]$ interval to compact disks in the complex plane.

Science Code : 204.1.095

Key Words : Complex simultaneous approximation, Voronovskaja type result,
Complex Durrmeyer-type operators

Page Number : 55

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. İsmet YÜKSEL

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sırasında bilgi, ilgi ve yardımlarını esirgemeyen saygı değer danışmanım Doç. Dr. İsmet YÜKSEL'e, TÜBİTAK'a ve çalışmalarım süresince bana sürekli destek veren aileme ve arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Lineer Pozitif Operatörler	3
2.2. Beta Fonksiyonu, Gamma Fonksiyonu	4
2.3. Yaklaşım Teorisinin Önemli Teoremleri	4
2.4. Analitik Fonksiyon.....	5
2.5. Kompleks Analizde Yardımcı Teoremler	6
3. KOMPLEKS DURRMEYER TİP OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ	9
3.1. Momentler, Yardımcı Lemmalar ve $M_n(f, z)$ nin Varlığı.....	9
3.2. Voronovskaja Tip Yaklaşım Özellikleri	35
3.3. Eşanlı Tip Yaklaşım Özellikleri.....	48
4. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	51
KAYNAKLAR	53
ÖZGEÇMİŞ	55

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$M_n(f; z)$	Kompleks Durrmeyer operatörü
$P_{n,k}(z)$	Bernstein taban elemanı
$\rightarrow$	Noktasal yakınsama
$\beta(x, y)$	Beta fonksiyonu
$\Gamma(x)$	Gamma fonksiyonu
$\ f\ _r$	f fonksiyonunun r -normu

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisinin önemli problemlerinden biri keyfi bir fonksiyona daha basit, daha kullanışlı olan polinomlar ile bir yaklaşım elde etmektir.

Bilindiği gibi $[0,1]$ aralığındaki sürekli her f fonksiyonu için $f(x)$ e $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsayan bir $\{P_n(x)\}$ polinom dizisinin varlığını Weierstrass ispatlamıştır [1,2]. Bu teoremi sağlayan polinom dizilerinin özelliklerinin araştırılmasıyla lineer pozitif operatörlerle yaklaşım problemi ortaya çıkmıştır. [3] de S. N. Bernstein $[0,1]$ aralığında sürekli fonksiyonlara yaklaşım için

$$P_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

olmak üzere

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right) ; \quad 0 \leq x \leq 1$$

toplamsal operatörünü tanımlayarak bu operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında f fonksiyonuna düzgün yakınsadığını ispatlamıştır. Daha sonra Korovkin [1,3] de daha genel durumda lineer pozitif operatörler dizisinin yaklaşım problemini inceleyerek “Korovkin Teoremi” olarak bilinen teoremi ispatlamıştır.

$[0,1]$ aralığında Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlara yaklaşmak için reel değişkenli standart Bernstein-Durrmeyer operatörleri

$$D_n(f; x) = (n+1) \sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) \int_0^1 P_{n,k}(t) f(t) dt \quad (1.1)$$

olarak tanımlandı ve bu operatörlerin yaklaşım özellikleri incelendi [1]. Daha sonra Eş. 1.1 operatörlerinin bir modifikasyonu olan Bernstein-Durrmeyer tip operatörler

$$M_n(f; x) = n \sum_{k=1}^n P_{n,k}(x) \int_0^1 f(t) P_{n-1,k-1}(t) dt + f(0) P_{n,0}(x) \quad (1.2)$$

tanımlandı ve yaklaşım özellikleri incelendi [4]. Daha sonra da incelemeler reel sayılar uzayından kompleks sayılar uzayına genişletildi.

$D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ve $\overline{D_1} \subset G$ olacak biçimde $G \subset \mathbb{C}$ açık kümesi üzerinde tanımlı $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ analitik fonksiyonu varsa bu durumda S. N. Bernstein, kompleks Bernstein operatörlerinin $\overline{D_1}$ da f fonksiyonuna düzgün yakınsadığını ispatladı [5]. Bu tezde Eş. 1.2 operatörlerinin bir genişlemesi olan ve [6] de verilen kompleks Bernstein-Durrmeyer

$$M_n(f; z) = n \sum_{k=1}^n P_{n,k}(z) \int_0^1 f(t) P_{n-1,k-1}(t) dt + f(0) P_{n,0}(z)$$

operatörlerin yaklaşım özelliklerini inceleyeceğiz. Biz bu operatörleri kısaca kompleks Durrmeyer tip operatörler olarak isimlendireceğiz. Standart kompleks Durrmeyer operatörler ve kompleks Durrmeyer operatörlerin yaklaşım özellikleri S. G. Gal tarafından [7] ve [8] da verilmiştir.

Bu tez ilk bölümü giriş bölümü olmak üzere toplam dört bölümden oluşmuştur. İkinci bölümde temel kavramlar, bunlara ilişkin bazı örnekler ve bazı teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde kompleks Durrmeyer tip operatörlerin yaklaşım özellikleri ile ilgili lemmalar, bu operatörlerin Voronovskaja ve Eşanlı tip yaklaşım özellikleri ile ilgili teoremler incelenmiştir. Dördüncü bölümde ise sonuç ve öneriler verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde analitik fonksiyon, lineer pozitif operatör, beta fonksiyonu, gamma fonksiyonu tanımları, yaklaşım teorisinin önemli teoremleri ve kompleks analizin bazı teoremleri verilecektir.

2.1. Lineer Pozitif Operatör

2.1.1. Tanım [1,9]

X ve Y normlu iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer X den alınmış herhangi bir f fonksiyonuna Y de bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa bu L kuralına X den Y ye bir operatör denir.

$f \in X, g \in Y$ ve x, g nin tanım kümesine ait olmak üzere $L : X \rightarrow Y$ operatörü

$$L(f; x) = L(f)(x) = g(x)$$

ya da daha açık biçimde; t, f nin ve x de g nin tanım kümesine ait olmak üzere

$$L(f(t); x) = g(x)$$

şeklinde gösterilir.

2.1.2. Tanım [1,9]

$L: X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. Eğer L operatörü her $f_1, f_2 \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için;

$L(\alpha f_1 + \beta f_2; x) = \alpha L(f_1; x) + \beta L(f_2; x)$ koşulunu sağlıyor ise, L operatörüne lineer operatör denir.

2.1.3. Tanım [9,10]

$L: X \rightarrow Y$ bir operatör ve $f \in X$ olsun. Eğer $f \geq 0$ iken $L(f) \geq 0$ gerçekleşiyorsa L operatörüne pozitif operatör denir. Lineerlik ve pozitiflik koşullarını sağlayan L operatörüne, lineer pozitif operatör denir.

2.2. Beta Fonksiyonu, Gamma Fonksiyonu

2.2.1. Tanım [11]

$n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ve $t \in [0,1]$ aralığı olmak üzere beta fonksiyonu

$$\beta(n, m) = \int_0^1 t^{n-1} (1-t)^{m-1} dt, \quad (2.1)$$

Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt \quad (2.2)$$

biçiminde tanımlanır. Ayrıca,

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (2.3)$$

ve

$$\beta(n, m) = \frac{\Gamma(n) \Gamma(m)}{\Gamma(n+m)} \quad (2.4)$$

dir.

2.3. Yaklaşım Teorisinin Önemli Teoremleri

2.3.1. Teorem(Weierstrass) [1,11,12]

$f, [a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve $\varepsilon > 0$ yeterince küçük bir sayı olmak üzere öyle bir $P(x)$ cebirsel polinomu bulunabilir ki her $x \in [a, b]$ için $|P(x) - f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır.

2.3.2. Teorem (Korovkin) [1,9,10]

Her $n \in \mathbb{N}$ için ve $[a, b] \subseteq [c, d]$ olmak üzere $L_n: C[a, b] \rightarrow C[c, d]$ şeklinde tanımlı (L_n) lineer pozitif operatörler dizisi olsun. Her bir $i = 0,1,2$ için $f_i(t) = t^i$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f_i) - f_i\|_{C[a,b]} = 0 ; i = 0,1,2$$

koşulları gerçekleşiyorsa, bu durumda her $f \in C[a, b]$ fonksiyonu için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - f\|_{C[a,b]} = 0 \text{ dir.}$$

2.4. Analitik Fonksiyon

2.4.1. Tanım [11,13]

Bir $f(z)$ fonksiyonunun hem z_0 da hemde z_0 ın bir komşuluğunda bulunan her z noktasında türevi varsa bu durumda f ye z_0 da analitik fonksiyondur denir.

Örnek 2.4.1

$f(z) = z^2$ fonksiyonu kompleks düzlemin tamamında analitiktir. Gerçekten; keyfi bir z_0 için,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)(z + z_0)}{z - z_0} = 2z_0$$

olup z_0 keyfi olduğundan $\forall z \in \mathbb{C}$ için $f'(z)$ mevcuttur.

Örnek 2.4.2

$f(z) = \frac{1}{z}$ fonksiyonu $z = 0$ noktasında analitik değildir. Çünkü; fonksiyon $z = 0$ noktasında tanımlı olmadığından bu noktada süreksizdir. Dolayısıyla bu noktada türevlenemez. Yani; $f'(0)$ mevcut değildir.

2.4.2. Teorem (Taylor) [11,12]

f , D bölgesinde analitik bir fonksiyon, $z_0 \in D$ ve $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ kümesi D bölgesinde kapsanan bir bölge olsun. O halde, her $z \in D_R$ noktası için

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

serisi D_R kümesinde f fonksiyonuna yakınsar. Bu serinin yakınsaklık yarıçapı R ye eşit veya R den küçüktür. Buna göre,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, |z - z_0| < R$$

yazılır.

Bu teoremden aşağıdaki sonucu çıkarabiliriz.

2.4.3. Sonuç [11,12]

$D, \mathbb{C}$ düzleminde bir bölge ve f fonksiyonu D bölgesinde $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda f fonksiyonunun D bölgesinde analitik olması için gerek ve yeter koşul her bir $z_0 \in D$ noktası için sabit bir R sayısı alındığında $D(z_0, R)$ dairelerinde f fonksiyonunun yakınsak bir kuvvet serisi ile temsil edilebildiği, D bölgesi tarafından kapsanan bir $D(z_0, R) = \{z : |z - z_0| < R\}$ açık dairesinin bulunmasıdır.

2.5. Kompleks Analizde Yardımcı Teoremler

2.5.1. Teorem(Vitali) [11,12,14]

$\Omega, \mathbb{C}$ de bir bölge ve $F \subset \Omega$, Ω da en az bir yığılma noktasına sahip bir küme olsun. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, Ω da analitik olan fonksiyonların dizisini göstere sin. (f_n) fonksiyonlar dizisi Ω da sınırlı ve her $z \in F$ için $(f_n(z))$ yakınsak ise bu durumda (f_n) , Ω nın her kompakt alt kümesinde düzgün yakınsaktır.

Bu çalışmada $\Omega = D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R, R > 1\}$ ve bunun kompakt alt kümeleri de $\overline{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r, 1 \leq r < R\}$ olarak kullanılacaktır. F ise D_R de bir doğru parçası olarak alınacaktır.

2.5.2. Teorem (Bernstein Eşitsizliği) [5]

$P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ n. dereceden kompleks katsayılı polinomlar olmak üzere $|z| < r$ diskinde $\|P_n\|_r = \max\{|P_n(z)| : |z| \leq r\}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

- i) Her $|z| \leq 1$ için $|P_n'(z)| \leq n\|P_n\|_1$
- ii) $r > 0$ ise her $|z| \leq r$ için $|P_n'(z)| \leq \frac{n}{r} \|P_n\|_r$.

2.5.3. Teorem (Maksimum Modül) [11,12]

B sınırlı bir bölge olsun. f , B de analitik ve $\bar{B}$ da sürekli ise $|f|$, ∂B deki bir noktada maksimum değerini alır.

2.5.4. Teorem (Cauchy Türev Formülü) [11,12,14]

$r > 0$ olmak üzere $f : \bar{D}_r \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu D_r de analitik ve $\bar{D}_r$ da sürekli olsun. Γ , $|z| < r$ nin sınırı olmak üzere her $p \in \{0,1,2, \dots\}$ için

$$f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(u)}{(u-z)^{p+1}} du$$

dir.

2.5.5. Teorem [14]

$R > 1$ için $D_R \subset \mathbb{C}$ açık kümesini alalım. Eğer D_R üzerinde analitik fonksiyonların (f_n) dizisi f fonksiyonuna yakınsak ve D_R nin her kompakt alt kümesinde düzgün yakınsak ise her p doğal sayısı için $(f_n^{(p)})$, p . türev dizisi, D_R nin kompakt alt kümelerinde $f^{(p)}$ ye düzgün yakınsaktır.

2.5.6. Teorem (Özdeşlik-Bir teklik) [14]

D , $\mathbb{C}$ de bir bölge olmak üzere f, g, D de birer analitik fonksiyon ve D nin içinde kalan bir komşulukta veya bir yay üzerindeki her noktada $f = g$ ise D nin tamamında $f = g$ dir.

2.5.7. Teorem [11,12]

i) D , $\mathbb{C}$ düzleminde bir bölge ve (f_n) , D bölgesinde tanımlı analitik fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer (f_n) , D bölgesinde kapsanan kapalı her dairede f fonksiyonuna düzgün olarak yakınsıyorsa f analitik bir fonksiyondur. Bundan başka, f_n' fonksiyonları f' fonksiyonuna D kümesinde noktasal yakınsak ve D kümesindeki her kapalı dairede düzgün yakınsaktır.

ii) Eğer $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere g_n ler D kümesinde analitik fonksiyon ve

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$$

fonksiyonu D bölgesindeki her kapalı dairede düzgün yakınsıyorsa, g fonksiyonu D bölgesinin tümünde analitiktir ve

$$g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n'(z)$$

fonksiyonu D kümesinde noktasal yakınsaktır. Aynı zamanda $g'(z)$ fonksiyonu D kümesinde kapsanan kapalı her dairede düzgün yakınsak olur.

3. KOMPLEKS DURRMEYER TİP OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

3.1. Momentler, Yardımcı Lemmalar ve $M_n(f, z)$ nin Varlığı

3.1.1. Tanım

$f : G \rightarrow \mathbb{C}$ analitik fonksiyon, $G \subset \mathbb{C}$ açık küme, $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ve $P_{n,k}(z) := \binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k}$

olmak üzere kompleks Durrmeyer operatörü

$$M_n(f; z) = n \sum_{k=1}^n P_{n,k}(z) \int_0^1 f(t) P_{n-1,k-1}(t) dt + f(0) P_{n,0}(z) \quad (3.1)$$

olarak tanımlanır [6].

Momentler ve yakınsaklık oranı için aşağıdaki lemmalara ihtiyaç vardır.

3.1.1. Lemma

$P_{n,k}(z) = \binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k}$ olmak üzere $z(1-z)P'_{n,k}(z) = (k-nz)P_{n,k}(z)$ dir.

İspat

$$\begin{aligned} z(1-z)P'_{n,k}(z) &= z(1-z) \frac{d}{dz} \left[\binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k} \right] \\ &= z(1-z) \binom{n}{k} [kz^{k-1}(1-z)^{n-k} + (n-k)(1-z)^{n-k-1}(-1)z^k] \\ &= z(1-z) \binom{n}{k} [kz^{k-1}(1-z)^{n-k} + (k-n)(1-z)^{n-k-1}z^k] \\ &= \binom{n}{k} [kz^k(1-z)^{n-k+1} + (k-n)(1-z)^{n-k}z^{k+1}] \\ &= \binom{n}{k} [z^k(1-z)^{n-k}\{k(1-z) + (k-n)z\}] \\ &= \binom{n}{k} [z^k(1-z)^{n-k}(k-nz)] \end{aligned}$$

$$= (k - nz) \binom{n}{k} z^k (1 - z)^{n-k}$$

$$= (k - nz) P_{n,k}(z)$$

olup ispat tamamlanır.

3.1.2. Lemma

$p \in \mathbb{N}$ ve $e_p(t) = t^p$ olmak üzere

$$\int_0^1 t^p P_{n-1,k-1}(t) dt = \frac{(n-1)! (k+p-1)!}{(k-1)! (n+p)!}$$

dir

İspat

Eş. 2.1, Eş. 2.3 ve Eş. 2.4 den

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^p P_{n-1,k-1}(t) dt &= \binom{n-1}{k-1} \int_0^1 t^{k+p-1} (1-t)^{n-k} dt \\ &= \binom{n-1}{k-1} \beta(k+p, n-k+1) \\ &= \frac{(n-1)! (k+p-1)!}{(k-1)! (n+p)!} \end{aligned}$$

elde edilir.

Aşağıdaki lemma indirgeme formülüne ilişkindir.

3.1.3. Lemma

$z \in \mathbb{C}, p \in \mathbb{N}$ ve $e_p(t) = t^p$ olmak üzere

$$i) M_n(e_0, z) = 1$$

$$ii) p > 1 \text{ için } M_n(e_{p+1}, z) = \frac{z(1-z)}{n+p+1} M'_n(e_p, z) + \frac{nz+p}{n+p+1} M_n(e_p, z) \quad (3.2)$$

sağlanır.

İspat

i) $e_0(t) = 1$ olduğundan

$$M_n(e_0, z) = n \sum_{k=1}^n P_{n,k}(z) \int_0^1 P_{n-1,k-1}(t) dt + P_{n,0}(z) \quad (3.3)$$

olmak üzere Lemma 3.1.2 den $p = 0$ için

$$\int_0^1 P_{n-1,k-1}(t) dt = \frac{1}{n}$$

eşitliği Eş. 3.3 de yazılırsa;

$$M_n(e_0, z) = n \sum_{k=1}^n P_{n,k}(z) \frac{1}{n} + P_{n,0}(z) = \sum_{k=0}^n P_{n,k}(z) = 1$$

olup (i) sağlanır.

ii) $M_n(e_0, z) = 1$ ve $M'_n(e_0, z) = 0$ olup Eş. 3.2 eşitliği $p = 0$ için sağlanır.
 $p > 1$ olsun.

Eş. 3.1 denkleminde $f(t) = e_p(t)$ yazılırsa;

$$\begin{aligned} z(1-z)M'_n(e_p, z) &= z(1-z) \frac{d}{dz} \left(n \sum_{k=1}^n P_{n,k}(z) \int_0^1 t^p P_{n-1,k-1}(t) dt \right) \\ &= z(1-z) n \sum_{k=1}^n \frac{d}{dz} \left(P_{n,k}(z) \underbrace{\int_0^1 t^p P_{n-1,k-1}(t) dt}_{z \text{ ye göre sabit}} \right) \\ &= z(1-z) n \sum_{k=1}^n P'_{n,k}(z) \int_0^1 t^p P_{n-1,k-1}(t) dt \\ &= n \sum_{k=1}^n z(1-z) P'_{n,k}(z) \int_0^1 t^p P_{n-1,k-1}(t) dt \end{aligned} \quad (3.4)$$

olur. Lemma 3.1.1 deki $z(1-z)P'_{n,k}(z) = (k-nz)P_{n,k}(z)$ eşitliği Eş. 3.4 de kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
& z(1-z)M'_n(e_p, z) \\
&= n \sum_{k=1}^n (k-nz)P_{n,k}(z) \int_0^1 t^p P_{n-1,k-1}(t) dt \\
&= n \sum_{k=1}^n P_{n,k}(z) \int_0^1 (k-nz)t^p P_{n-1,k-1}(t) dt \\
&= n \sum_{k=1}^n P_{n,k}(z) \int_0^1 (k-1+1-nz)t^p P_{n-1,k-1}(t) dt \\
&= n \sum_{k=1}^n P_{n,k}(z) \int_0^1 [\{(k-1)-(n-1)t\} + (n-1)t + 1-nz]t^p P_{n-1,k-1}(t) dt \\
&= n \sum_{k=1}^n P_{n,k}(z) \int_0^1 \{(k-1)-(n-1)t\} t^p P_{n-1,k-1}(t) dt \\
&\quad + n \sum_{k=1}^n P_{n,k}(z) \int_0^1 (1-nz) t^p P_{n-1,k-1}(t) dt \\
&\quad + n \sum_{k=1}^n P_{n,k}(z) \int_0^1 (n-1) t^{p+1} P_{n-1,k-1}(t) dt \tag{3.5}
\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 3.1.1 e göre Eş. 3.5 eşitliği aşağıdaki gibi yeniden düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
z(1-z)M'_n(e_p, z) &= n \sum_{k=1}^n P_{n,k}(z) \int_0^1 t(1-t)P'_{n-1,k-1} t^p dt \\
&\quad + (1-nz)n \sum_{k=1}^n P_{n,k}(z) \int_0^1 t^p P_{n-1,k-1}(t) dt \\
&\quad + (n-1)n \sum_{k=1}^n P_{n,k}(z) \int_0^1 t^{p+1} P_{n-1,k-1}(t) dt \\
&= n \sum_{k=1}^n P_{n,k}(z) \int_0^1 t(1-t)t^p P'_{n-1,k-1}(t) dt \\
&\quad + (1-nz)M_n(e_p, z) + (n-1)M_n(e_{p+1}, z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n \sum_{k=1}^n P_{n,k}(z) \int_0^1 t^{p+1} P'_{n-1,k-1}(t) dt \\
&\quad - n \sum_{k=1}^n P_{n,k}(z) \int_0^1 t^{p+2} P'_{n-1,k-1}(t) dt \\
&\quad + (1 - nz)M_n(e_p, z) + (n - 1)M_n(e_{p+1}, z)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

elde edilir. Eş. 3.6 da birinci ve ikinci toplam içindeki integralde kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$\left(\begin{array}{l} t^{p+1} = u \\ (p+1)t^p dt = du \end{array} \middle| \begin{array}{l} P'_{n-1,k-1}(t) dt = dv \\ P_{n-1,k-1}(t) = v \end{array} \right) \text{ ve } \left(\begin{array}{l} t^{p+2} = u \\ (p+2)t^{p+1} dt = du \end{array} \middle| \begin{array}{l} P'_{n-1,k-1}(t) dt = dv \\ P_{n-1,k-1}(t) = v \end{array} \right)$$

olup

$$\begin{aligned}
&z(1 - z)M'_n(e_p, z) \\
&= n \sum_{k=1}^n P_{n,k}(z) \left\{ t^{p+1} P_{n-1,k-1}(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 (p+1)t^p P_{n-1,k-1}(t) dt \right\} \\
&\quad - n \sum_{k=1}^n P_{n,k}(z) \left\{ t^{p+2} P_{n-1,k-1}(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 (p+2)t^{p+1} P_{n-1,k-1}(t) dt \right\} \\
&\quad + (1 - nz)M_n(e_p, z) + (n - 1)M_n(e_{p+1}, z) \\
&= -n(p+1) \sum_{k=1}^n P_{n,k}(z) \int_0^1 t^p P_{n-1,k-1}(t) dt \\
&\quad + n(p+2) \sum_{k=1}^n P_{n,k}(z) \int_0^1 t^{p+1} P_{n-1,k-1}(t) dt \\
&\quad + (1 - nz)M_n(e_p, z) + (n - 1)M_n(e_{p+1}, z) \\
&= -(p+1)M_n(e_p, z) + (p+2)M_n(e_{p+1}, z) \\
&\quad + (1 - nz)M_n(e_p, z) + (n - 1)M_n(e_{p+1}, z)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. O halde;

$$\begin{aligned}
z(1-z)M'_n(e_p, z) &= -(p+1)M_n(e_p, z) + (p+2)M_n(e_{p+1}, z) \\
&\quad + (1-nz)M_n(e_p, z) + (n-1)M_n(e_{p+1}, z) \\
&= -(p+nz)M_n(e_p, z) + (n+p+1)M_n(e_{p+1}, z)
\end{aligned}$$

olup $M_n(e_{p+1}, z)$ yalnız bırakılırsa;

$$M_n(e_{p+1}, z) = \frac{z(1-z)}{n+p+1} M'_n(e_p, z) + \frac{p+nz}{n+p+1} M_n(e_p, z) \quad (3.7)$$

elde edilir.

3.1.4. Lemma

i) $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $M_n(e_p, 1) \leq 1$ dir.

ii) $\forall n, p \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}$ ve $\forall v \geq 0$ için

$$F_p(v) = \prod_{j=0}^{p-1} (v+j) \quad (3.8)$$

ve

$$\Delta_1^k F_p(0) = \sum_{j=0}^k (-1)^k \binom{k}{j} F_p(k-j) \quad (3.9)$$

olmak üzere

$$M_n(e_p, z) = \frac{n!}{(n+p)!} \sum_{k=0}^{\min\{n,p\}} \binom{n}{k} \Delta_1^k F_p(0) z^k \quad (3.10)$$

eşitliği sağlanır ve $\forall p, k$ için $\Delta_1^k F_p(0) \geq 0$ dir.

İspat

i) Eş. 2.1, Eş. 2.3 ve Eş. 2.4 den

$$M_n(e_p, z) = n \sum_{k=1}^n P_{n,k}(z) \int_0^1 \binom{n-1}{k-1} t^{k-1} (1-t)^{n-k} t^p dt$$

$$\begin{aligned}
&= n \sum_{k=1}^n P_{n,k}(z) \binom{n-1}{k-1} \int_0^1 t^{p+k-1} (1-t)^{n-k+1-1} dt \\
&= n \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k} \binom{n-1}{k-1} \beta(p+k, n-k+1) \\
&= n \sum_{k=1}^n \frac{n! (n-1)!}{(n-k)! k! (n-k)! (k-1)!} z^k (1-z)^{n-k} \frac{\Gamma(p+k) \Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+p+1)} \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\frac{n!}{(n-k)! k!} \right)^2 k z^k (1-z)^{n-k} \frac{(p+k-1)! (n-k)!}{(n+p)!} \\
&= \left(\frac{n!}{(n-1)! 1!} \right)^2 z (1-z)^{n-1} \frac{p! (n-1)!}{(p+n)!} \\
&\quad + \left(\frac{n!}{(n-2)! 2!} \right)^2 2 z^2 (1-z)^{n-2} \frac{(p+1)! (n-2)!}{(p+n)!} \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \left(\frac{n!}{0! n!} \right)^2 n z^n (1-z)^0 \frac{(p+n-1)! 0!}{(p+n)!}
\end{aligned}$$

olup

$p = 0$ ve $z = 1$ için

$$M_n(e_0, 1) = \left(\frac{n!}{0! n!} \right)^2 n 1^n \frac{(0+n-1)! 0!}{(0+n)!} = n \frac{1}{n} = 1$$

dir.

$p \geq 1$ ve $z = 1$ için

$$M_n(e_p, 1) = \left(\frac{n!}{0! n!} \right)^2 n 1^n \frac{(p+n-1)! 0!}{(p+n)!} = \frac{n}{p+n} \leq 1$$

dir.

ii) Lemma 3.1.2 de $\{ k(k+1)(k+2) \dots (k+p-1) \}$ yerine $F_p(k)$ gösterimi yazılırsa

$$\int_0^1 t^p P_{n-1,k-1}(t) dt = \frac{(n-1)!}{(n+p)!} F_p(k) \quad (3.11)$$

olur. Burada $F_p(k) = \prod_{j=0}^{p-1} (k+j)$ dir. Ayrıca $\forall k \geq 0$ için $F_p(k)$ ve onun herhangi mertebeden farkı pozitifdir ve dolayısıyla $\forall p, k$ için $\Delta_1^k F_p(0) \geq 0$ dir. Eş. 3.11 den

$$\begin{aligned}
M_n(e_p; z) &= n \sum_{k=1}^n P_{n,k}(z) \int_0^1 t^p P_{n-1,k-1}(t) dt \\
&= n \sum_{k=1}^n P_{n,k}(z) \frac{(n-1)!}{(n+p)!} F_p(k) \\
&= \frac{n!}{(n+p)!} \sum_{k=1}^n P_{n,k}(z) F_p(k) \\
&= \frac{n!}{(n+p)!} \left\{ \sum_{k=1}^n P_{n,k}(z) F_p(k) + P_{n,0}(z) F_p(0) - P_{n,0}(z) F_p(0) \right\} \\
&= \frac{n!}{(n+p)!} \left\{ \sum_{k=0}^n P_{n,k}(z) F_p(k) - P_{n,0}(z) \overbrace{F_p(0)}^0 \right\} \\
&= \frac{n!}{(n+p)!} \sum_{k=0}^n P_{n,k}(z) F_p(k) \\
&= \frac{n!}{(n+p)!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k} F_p(k)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

yazılabilir. $(1-z)^{n-k}$ nın binom açılımı Eş. 3.12 de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
M_n(e_p; z) &= \frac{n!}{(n+p)!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k \left\{ \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^j z^j \right\} F_p(k) \\
&= \frac{n!}{(n+p)!} \left\{ \binom{n}{0} z^0 \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j z^j F_p(0) \right. \\
&\quad + \binom{n}{1} z^1 \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j z^j F_p(1) \\
&\quad + \binom{n}{2} z^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} (-1)^j z^j F_p(2) \\
&\quad + \binom{n}{3} z^3 \sum_{j=0}^{n-3} \binom{n-3}{j} (-1)^j z^j F_p(3) \\
&\quad + \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \binom{n}{n-1} z^{n-1} \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} (-1)^j z^j F_p(n-1) \\
& + \binom{n}{n} z^n \sum_{j=0}^0 \binom{0}{j} (-1)^j z^j F_p(n) \quad \left. \vphantom{\sum_{j=0}^1} \right\} \quad (3.13)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 3.13 deki toplam şeklindeki ifadeler terim terim açılırsa;

$$\begin{aligned}
& M_n(e_p; z) \\
& = \frac{n!}{(n+p)!} \left[0 \right. \\
& \quad + \binom{n}{1} z \left\{ F_p(1) - \binom{n-1}{1} z F_p(1) + \binom{n-1}{2} z^2 F_p(1) - \binom{n-1}{3} z^3 F_p(1) \right. \\
& \quad \quad \left. + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n-1}{n-1} z^{n-1} F_p(1) \right\} \\
& \quad + \binom{n}{2} z^2 \left\{ F_p(2) - \binom{n-2}{1} z F_p(2) + \binom{n-2}{2} z^2 F_p(2) - \binom{n-2}{3} z^3 F_p(2) \right. \\
& \quad \quad \left. + \dots + (-1)^{n-2} \binom{n-2}{n-2} z^{n-2} F_p(2) \right\} \\
& \quad + \binom{n}{3} z^3 \left\{ F_p(3) - \binom{n-3}{1} z F_p(3) + \binom{n-3}{2} z^2 F_p(3) - \binom{n-3}{3} z^3 F_p(3) \right. \\
& \quad \quad \left. + \dots + (-1)^{n-3} \binom{n-3}{n-3} z^{n-3} F_p(3) \right\} \\
& \quad \vdots \\
& \quad + \binom{n}{n-1} z^{n-1} \left\{ F_p(n-1) - z F_p(n-1) \right\} \\
& \quad \left. + \binom{n}{n} z^n \left\{ F_p(n) \right\} \right] \quad (3.14)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 3.14 de z nin kuvvetlerinin ortak parantezine alınırsa;

$$\begin{aligned}
& M_n(e_p; z) \\
& = \frac{n!}{(n+p)!} \left[z \left\{ \binom{n}{1} F_p(1) \right\} \right. \\
& \quad + z^2 \left\{ -\binom{n}{1} \binom{n-1}{1} F_p(1) + \binom{n}{2} F_p(2) \right\} \\
& \quad \left. + z^3 \left\{ \binom{n}{1} \binom{n-1}{2} F_p(1) - \binom{n}{2} \binom{n-2}{1} F_p(2) + \binom{n}{3} F_p(3) \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +z^4 \left\{ -\binom{n}{1} \binom{n-1}{3} F_p(1) + \binom{n}{2} \binom{n-2}{2} F_p(2) - \binom{n}{3} \binom{n-3}{1} F_p(3) \right. \\
& \quad \left. + \binom{n}{4} F_p(4) \right\} \\
& + \\
& \vdots \\
& +z^{n-1} \left\{ (-1)^{n-2} \binom{n}{1} \binom{n-1}{n-2} F_p(1) + (-1)^{n-3} \binom{n}{2} \binom{n-2}{n-3} F_p(2) \right. \\
& \quad \left. + (-1)^{n-4} \binom{n}{3} \binom{n-3}{n-4} F_p(3) + \cdots + \binom{n}{n-1} F_p(n-1) \right\} \\
& +z^n \left\{ (-1)^{n-1} \binom{n}{1} \binom{n-1}{n-1} F_p(1) + (-1)^{n-2} \binom{n}{2} \binom{n-2}{n-2} F_p(2) \right. \\
& \quad \left. + (-1)^{n-3} \binom{n}{3} \binom{n-3}{n-3} F_p(3) + \cdots - \binom{n}{n-1} F_p(n-1) \right. \\
& \quad \left. + \binom{n}{n} F_p(n) \right\} \Big] \tag{3.15}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 3.15 deki çarpım durumundaki kombinasyonlu ifadelerin açık hali yazılırsa;

$$\begin{aligned}
& M_n(e_p; z) \\
& = \frac{n!}{(n+p)!} \left[z \left\{ \binom{n}{1} F_p(1) \right\} \right. \\
& + z^2 \left\{ -\frac{n!}{(n-1)! 1!} \frac{(n-1)!}{(n-2)! 1!} F_p(1) + \binom{n}{2} F_p(2) \right\} \\
& + z^3 \left\{ \frac{n!}{(n-1)! 1!} \frac{(n-1)!}{(n-3)! 2!} F_p(1) - \frac{n!}{(n-2)! 2!} \frac{(n-2)!}{(n-3)! 1!} F_p(2) \right. \\
& \quad \left. + \binom{n}{3} F_p(3) \right\} \\
& + z^4 \left\{ -\frac{n!}{(n-1)! 1!} \frac{(n-1)!}{(n-4)! 3!} F_p(1) + \frac{n!}{(n-2)! 2!} \frac{(n-2)!}{(n-4)! 2!} F_p(2) \right. \\
& \quad \left. - \frac{n!}{(n-3)! 3!} \frac{(n-3)!}{(n-4)! 1!} F_p(3) + \binom{n}{4} F_p(4) \right\} \\
& + \\
& \vdots \\
& + z^{n-1} \left\{ (-1)^{n-2} \frac{n!}{(n-1)! 1!} \frac{(n-1)!}{1! (n-2)!} F_p(1) + (-1)^{n-3} \frac{n!}{(n-2)! 2!} \frac{(n-2)!}{1! (n-3)!} F_p(2) \right. \\
& \quad \left. + (-1)^{n-4} \frac{n!}{(n-3)! 3! 1!} \frac{(n-3)!}{(n-4)!} F_p(3) + \cdots + \binom{n}{n-1} F_p(n-1) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + z^n \left\{ (-1)^{n-1} \binom{n}{1} F_p(1) + (-1)^{n-2} \binom{n}{2} F_p(2) + (-1)^{n-3} \binom{n}{3} F_p(3) \right. \\
& \quad \left. + \cdots + \binom{n}{n-1} F_p(n-1) + \binom{n}{n} F_p(n) \right\}] \quad (3.16)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 3.16 da gerekli sadeleştirmeler yapılrırsa;

$$\begin{aligned}
M_n(e_p; z) &= \frac{n!}{(n+p)!} \left[z \left\{ \binom{n}{1} F_p(1) \right\} \right. \\
&\quad + z^2 \left\{ -\frac{n!}{(n-2)!} F_p(1) + \binom{n}{2} F_p(2) \right\} \\
&\quad + z^3 \left\{ \frac{n!}{(n-3)! 2!} F_p(1) - \frac{n!}{(n-3)! 2!} F_p(2) + \binom{n}{3} F_p(3) \right\} \\
&\quad + z^4 \left\{ -\frac{n!}{(n-4)! 3!} F_p(1) + \frac{n!}{(n-4)! 2! 2!} F_p(2) \right. \\
&\quad \quad \left. - \frac{n!}{(n-4)! 3!} F_p(3) + \binom{n}{4} F_p(4) \right\} \\
&\quad + \\
&\quad \vdots \\
&\quad + z^{n-1} \left\{ (-1)^{n-2} \frac{n!}{(n-2)!} F_p(1) + (-1)^{n-3} \frac{n!}{(n-3)! 2!} F_p(2) \right. \\
&\quad \quad \left. + (-1)^{n-4} \frac{n!}{(n-4)! 3!} F_p(3) + \cdots + \binom{n}{n-1} F_p(n-1) \right\} \\
&\quad + z^n \left\{ (-1)^{n-1} \binom{n}{1} F_p(1) + (-1)^{n-2} \binom{n}{2} F_p(2) + (-1)^{n-3} \binom{n}{3} F_p(3) \right. \\
&\quad \quad \left. + \cdots - \binom{n}{n-1} F_p(n-1) + \binom{n}{n} F_p(n) \right\}] \quad (3.17)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş 3.17 deki terimleri kombinasyon şeklinde yazabilmek için terimler gerekli ifadelerle çarpılıp bölünürse;

$$\begin{aligned}
M_n(e_p; z) &= \frac{n!}{(n+p)!} \left[z \left\{ \binom{n}{1} F_p(1) \right\} \right. \\
&\quad \left. + z^2 \left\{ -\frac{n! 2!}{(n-2)! 2!} F_p(1) + \binom{n}{2} F_p(2) \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + z^3 \left\{ \frac{n! \ 3!}{(n-3)! \ 3! \ 2!} F_p(1) - \frac{n! \ 3!}{(n-3)! \ 3! \ 2!} F_p(2) + \binom{n}{3} F_p(3) \right\} \\
& + z^4 \left\{ -\frac{n! \ 4!}{(n-4)! \ 4! \ 3!} F_p(1) + \frac{n! \ 4!}{(n-4)! \ 4! \ 2! \ 2!} F_p(2) \right. \\
& \quad \left. - \frac{n! \ 4!}{(n-4)! \ 4! \ 3!} F_p(3) + \binom{n}{4} F_p(4) \right\} \\
& + \\
& \vdots \\
& + z^{n-1} \left\{ (-1)^{n-2} \frac{n! \ 2!}{(n-2)! \ 2!} F_p(1) + (-1)^{n-3} \frac{n! \ 3!}{(n-3)! \ 3! \ 2!} F_p(2) \right. \\
& \quad \left. + (-1)^{n-4} \frac{n! \ 4!}{(n-4)! \ 4! \ 3!} F_p(3) + \cdots + \binom{n}{n-1} F_p(n-1) \right\} \\
& + z^n \left\{ (-1)^{n-1} \binom{n}{1} F_p(1) + (-1)^{n-2} \binom{n}{2} F_p(2) + (-1)^{n-3} \binom{n}{3} F_p(3) \right. \\
& \quad \left. + \cdots - \binom{n}{n-1} F_p(n-1) + \binom{n}{n} F_p(n) \right\} \quad] \quad (3.18)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 3.18 deki terimler düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
& M_n(e_p; z) \\
& = \frac{n!}{(n+p)!} \left[z \left\{ \binom{n}{1} F_p(1) \right\} \right. \\
& + z^2 \left\{ -\binom{n}{2} 2 F_p(1) + \binom{n}{2} F_p(2) \right\} \\
& + z^3 \left\{ \binom{n}{3} 3 F_p(1) - \binom{n}{3} 3 F_p(2) + \binom{n}{3} F_p(3) \right\} \\
& + z^4 \left\{ -\binom{n}{4} 4 F_p(1) + \binom{n}{4} 6 F_p(2) - \binom{n}{4} 4 F_p(3) + \binom{n}{4} F_p(4) \right\} \\
& + \\
& \vdots \\
& + z^{n-1} \left\{ (-1)^{n-2} \binom{n}{2} 2 F_p(1) + (-1)^{n-3} \binom{n}{3} 3 F_p(2) \right. \\
& \quad \left. + (-1)^{n-4} \binom{n}{4} 4 F_p(3) + \cdots + \binom{n}{n-1} F_p(n-1) \right\} \\
& + z^n \left\{ (-1)^{n-1} \binom{n}{1} F_p(1) + (-1)^{n-2} \binom{n}{2} F_p(2) + (-1)^{n-3} \binom{n}{3} F_p(3) \right. \\
& \quad \left. + \cdots - \binom{n}{n-1} F_p(n-1) + \binom{n}{n} F_p(n) \right\} \quad] \quad (3.19)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 3.19 da terimler ortak paranteze alınarak yazılırsa;

$$\begin{aligned}
& M_n(e_p; z) \\
&= \frac{n!}{(n+p)!} \left[z \binom{n}{1} \{F_p(1) - F_p(0)\} \right. \\
&\quad + z^2 \binom{n}{2} \{F_p(2) - 2F_p(1) + F_p(0)\} \\
&\quad + z^3 \binom{n}{3} \{F_p(3) - 3F_p(2) + 3F_p(1) - F_p(0)\} \\
&\quad + z^4 \binom{n}{4} \{F_p(4) - 4F_p(3) + 6F_p(2) - 4F_p(1) + F_p(0)\} \\
&\quad + \\
&\quad \vdots \\
&\quad + z^{n-1} \binom{n}{n-1} \{(-1)^{n-2}(n-1)F_p(1) \\
&\quad \quad + (-1)^{n-3} \frac{(n-2)(n-1)}{2} F_p(2) \\
&\quad \quad + (-1)^{n-4} \frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{3!} F_p(3) \\
&\quad \quad + \dots - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} F_p(n-4) \\
&\quad \quad + \frac{(n-1)(n-2)}{2} F_p(n-3) - (n-1)F_p(n-2) \\
&\quad \quad + F_p(n-1) + (-1)^{n-1} F_p(0)\} \\
&\quad + z^n \binom{n}{n} \left\{ F_p(n) - nF_p(n-1) + \frac{n(n-1)}{2} F_p(n-2) \right. \\
&\quad \quad - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} F_p(n-3) + \dots + (-1)^{n-1} nF_p(1) \\
&\quad \quad \left. + (-1)^n F_p(0) \right\} \Big] \tag{3.20}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 3.9 un açık hali

$$\begin{aligned}
\Delta_1^k F_p(0) &= F_p(k) - kF_p(k-1) + \frac{k(k-1)}{2} F_p(k-2) - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} F_p(k-3) \\
&\quad + \dots + (-1)^{k-1} kF_p(1) + (-1)^k F_p(0) \tag{3.21}
\end{aligned}$$

ve $F_p(0) = 0$ olduğundan Eş. 3.20 eşitliği

$$\begin{aligned}
M_n(e_p; z) &= \frac{n!}{(n+p)!} \left[\overbrace{\binom{n}{0} \Delta_1^0 F_p(0) z^0}^{=0} \right. \\
&\quad + \binom{n}{1} \Delta_1^1 F_p(0) z^1 \\
&\quad + \binom{n}{2} \Delta_1^2 F_p(0) z^2 \\
&\quad + \binom{n}{3} \Delta_1^3 F_p(0) z^3 \\
&\quad + \binom{n}{4} \Delta_1^4 F_p(0) z^4 \\
&\quad + \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \binom{n}{n-1} \Delta_1^{n-1} F_p(0) z^{n-1} \\
&\quad \left. + \binom{n}{n} \Delta_1^n F_p(0) z^n \right] \\
&= \frac{n!}{(n+p)!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta_1^k F_p(0) z^k
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca Eş. 3.8 den

$$F_p(\nu) = p! \binom{\nu + p - 1}{p} \quad (3.22)$$

ve $k < n$ için $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} \frac{n}{n-k}$ olduğu düşünülürse Eş. 3.21 den

$$k = 1 \text{ için } \Delta_1^1 F_p(0) = F_p(1) - F_p(0) = p! \binom{p}{p},$$

$$\begin{aligned}
k = 2 \text{ için } \Delta_1^2 F_p(0) &= F_p(2) - 2F_p(1) + F_p(0) \\
&= p! \binom{p+1}{p} - 2p! \binom{p}{p} \\
&= p! \frac{p+1}{1} \binom{p}{p} - 2p! \binom{p}{p} \\
&= p! \binom{p}{p} \{p-1\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k = 3 \text{ için } \Delta_1^3 F_p(0) &= F_p(3) - 3F_p(2) + 3F_p(1) - F_p(0) \\
&= p! \binom{p+2}{p} - 3p! \binom{p+1}{p} + 3p! \binom{p}{p} \\
&= p! \frac{p+2}{2} \binom{p+1}{p} - 3p! \frac{p+1}{1} \binom{p}{p} + 3p! \binom{p}{p} \\
&= p! \frac{(p+2)(p+1)}{2} \binom{p}{p} - 3p! \frac{p+1}{1} \binom{p}{p} + 3p! \binom{p}{p} \\
&= p! \binom{p}{p} \left\{ \frac{(p+2)(p+1)}{2} - 3(p+1) + 3 \right\} \\
&= p! \binom{p}{p} \left\{ \frac{(p-2)(p-1)}{2!} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k = 4 \text{ için } \Delta_1^4 F_p(0) &= F_p(4) - 4F_p(3) + 6F_p(2) - 4F_p(1) + F_p(0) \\
&= p! \binom{p+3}{p} - 4p! \binom{p+2}{p} + 6p! \binom{p+1}{p} - 4p! \binom{p}{p} \\
&= p! \binom{p}{p} \left\{ \frac{(p+3)(p+2)(p+1)}{3.2.1} - 4 \frac{(p+2)(p+1)}{2.1} + 6(p+1) - 4 \right\} \\
&= p! \binom{p}{p} \frac{p^3 - 6p^2 + 11p - 6}{3!} \\
&= p! \binom{p}{p} \frac{(p-3)(p-2)(p-1)}{3!},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k = 5 \text{ için } \Delta_1^5 F_p(0) &= F_p(5) - 5F_p(4) + 10F_p(3) - 10F_p(2) + 5F_p(1) - F_p(0) \\
&= p! \binom{p}{p} \frac{(p-4)(p-3)(p-2)(p-1)}{4!}
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde devam edilirse;

$$\begin{aligned}
k = p \text{ için } \Delta_1^p F_p(0) &= p! \binom{p}{p} \frac{(p-(p-1))(p-(p-2)) \dots (p-1)}{(p-1)!} \\
&= p! \binom{p}{p} \frac{1.2 \dots (p-1)}{(p-1)!}
\end{aligned}$$

$$k = p+1 \text{ için } \Delta_1^{p+1} F_p(0) = p! \binom{p}{p} \frac{(p-p)(p-(p-1))(p-(p-2)) \dots (p-1)}{p!} = 0$$

$$k = p+2 \text{ için } \Delta_1^{p+2} F_p(0) = p! \binom{p}{p} \frac{(p-(p+1))(p-p)(p-(p-1)) \dots (p-1)}{(p+1)!} = 0$$

olup $p < k \leq n$; $p, k, n \in \mathbb{N}$ için $\Delta_1^k F_p(0) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
M_n(e_p; z) &= \frac{n!}{(n+p)!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta_1^k F_p(0) z^k \\
&= \frac{n!}{(n+p)!} \sum_{k=0}^{\min\{n,p\}} \binom{n}{k} \Delta_1^k F_p(0) z^k
\end{aligned}$$

olur ki buda lemmanın ispatını tamamlar.

3.1.5. Lemma

$0 \leq x_j \leq 1, j = 1, 2, 3, \dots, k$ olmak üzere

$$1 - \prod_{j=1}^k x_j \leq \sum_{j=1}^k (1 - x_j)$$

dir.

İspat

Tümevarım metoduna göre

$k = 1$ için $1 - x_1 \leq 1 - x_1$ doğrudur.

$k = n$ için $1 - x_1 x_2 \dots x_n \leq 1 - x_1 + 1 - x_2 + \dots + 1 - x_n$ doğru olsun.

$k = n + 1$ için $1 - x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1} \leq 1 - x_1 + 1 - x_2 + \dots + 1 - x_n + 1 - x_{n+1}$ eşitsizliğinin doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
1 - x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1} &= 1 - x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1} + x_{n+1} - x_{n+1} \\
&= 1 - x_{n+1} + x_{n+1}(1 - x_1 x_2 \dots x_n), \text{ tümevarım hipotezinden,} \\
&\leq 1 - x_{n+1} + x_{n+1}(1 - x_1 + 1 - x_2 + \dots + 1 - x_n) \quad , \quad 0 \leq x_{n+1} \leq 1 \\
&\leq 1 - x_1 + 1 - x_2 + \dots + 1 - x_n + 1 - x_{n+1}
\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

3.1.6. Lemma

$r \geq 1$ olsun. $\forall p, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $|z| \leq r$ için $|M_n(e_p, z)| \leq r^p$ dir.

İspat

Lemma 3.1.4 ün (i) şikkından

$$M_n(e_p, 1) = \frac{n!}{(n+p)!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta_{1F_p}^k(0) = \frac{n!}{(n+p)!} \sum_{k=0}^{\min\{n,p\}} \binom{n}{k} \Delta_{1F_p}^k(0) \leq 1 \quad (3.23)$$

olur. $|z| \leq r, k < p$ ve $r > 1$ olup $r^k < r^p$ olduğundan

$$\begin{aligned} |M_n(e_p, z)| &= \left| \frac{n!}{(n+p)!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta_{1F_p}^k(0) z^k \right| \\ &= \left| \frac{n!}{(n+p)!} \sum_{k=0}^{\min\{n,p\}} \binom{n}{k} \Delta_{1F_p}^k(0) z^k \right| \\ &\leq \frac{n!}{(n+p)!} \sum_{k=0}^{\min\{n,p\}} \binom{n}{k} \Delta_{1F_p}^k(0) |z|^k \\ &\leq \frac{n!}{(n+p)!} \sum_{k=0}^{\min\{n,p\}} \binom{n}{k} \Delta_{1F_p}^k(0) r^k \\ &\leq \frac{n!}{(n+p)!} \sum_{k=0}^{\min\{n,p\}} \binom{n}{k} \Delta_{1F_p}^k(0) r^p \\ &= r^p \frac{n!}{(n+p)!} \sum_{k=0}^{\min\{n,p\}} \binom{n}{k} \Delta_{1F_p}^k(0) \\ &\leq r^p \end{aligned}$$

olur.

3.1.7. Lemma

$f(z) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p z^p$ Taylor katsayılı bir seri olsun. $r \geq 1, |z| \leq r$ ve $p \in \mathbb{N}$ için $e_p(z) = z^p$ olmak üzere $M_n(f, z) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p M_n(e_p, z)$ dir.

İspat

$f_m(z) = \sum_{j=0}^m c_j z^j$ olmak üzere M_n operatörünün lineerlik özelliğinden

$$M_n(f_m, z) = \sum_{j=0}^m c_j M_n(e_j, z) \text{ dir.}$$

Ayrıca $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$ olmak üzere $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f\|_r = 0$ dir. Burada ;

$\|f\|_r = \max\{|f(z)| : |z| \leq r\}$ olarak tanımlıdır. M_n nin lineerlik özelliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
& |M_n(f_m, z) - M_n(f, z)| \\
&= |M_n(f_m - f, z)| \\
&= \left| n \sum_{k=1}^n P_{n,k}(z) \int_0^1 (f_m - f)(t) P_{n-1,k-1}(t) dt + (f_m - f)(0) P_{n,0}(z) \right| \\
&\leq |f_m(0) - f(0)| |P_{n,0}(z)| + n \sum_{k=1}^n |P_{n,k}(z)| \int_0^1 |f_m(t) - f(t)| |P_{n-1,k-1}(t)| dt \\
&= |f_m(0) - f(0)| \left| \binom{n}{0} z^0 (1-z)^n \right| + n \sum_{k=1}^n |P_{n,k}(z)| \int_0^1 |f_m(t) - f(t)| |P_{n-1,k-1}(t)| dt \\
&= |f_m(0) - f(0)| |1-z|^n + n \sum_{k=1}^n |P_{n,k}(z)| \int_0^1 |f_m(t) - f(t)| |P_{n-1,k-1}(t)| dt \\
&\leq |f_m(0) - f(0)| |1+|z||^n \\
&+ n \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} |z|^k |1-z|^{n-k} \int_0^1 \max_{|z| \leq r} \{|f_m(t) - f(t)|\} |P_{n-1,k-1}(t)| dt \\
&\leq \max_{|z| \leq r} \{|f_m(t) - f(t)|\} \left\{ |1+|z||^n + n \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} |z|^k |1+|z||^{n-k} \int_0^1 |P_{n-1,k-1}(t)| dt \right\} \\
&\leq \|f_m - f\|_r \left\{ (1+r)^n + n \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} r^k (1+r)^{n-k} \int_0^1 P_{n-1,k-1}(t) dt \right\} \\
&= C_{r,n} \|f_m - f\|_r
\end{aligned}$$

$$\text{olup } |M_n(f_m, z) - M_n(f, z)| \leq C_{r,n} \|f_m - f\|_r \quad (3.24)$$

olur. Burada $\forall |z| \leq r$ için

$$C_{r,n} = (1+r)^n + n \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} r^k (1+r)^{n-k} \int_0^1 P_{n-1,k-1}(t) dt$$

dir.

$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f\|_r = 0$ olduğundan $\lim_{m \rightarrow \infty} M_n(f_m, z) = M_n(f, z)$ olur. O halde

$$M_n(f, z) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p M_n(e_p, z) \quad (3.25)$$

elde edilir.

Aşağıdaki sonuçta $M_n(f, z)$ operatörlerinin anlamlı olduğu gösterilmiştir.

3.1.1. Sonuç

$D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R, R \geq 1\}$ diskinde Taylor serisine açılan her bir f fonksiyonu için $M_n(f, z) \in \mathbb{C}$ dir.

İspat

s ve z , $1 \leq r < r_1 < R$ için $|s| < r_1$, $|z| < r$ olacak şekilde farklı iki kompleks sayı olsun. Bu durumda bu iki kompleks sayı için

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{s} + \frac{z}{s^2} + \frac{z^2}{s^3} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{s^n} + \frac{z^n}{(s-z)s^n}$$

eşitliği yazılır. Bu eşitliğin her iki tarafı $\frac{f(s)}{2\pi i}$ ile çarpılır ve her terimin $|s| = r_1$ üzerinden integrali alınırsa

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=r_1} \frac{f(s)ds}{s-z} = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{z^p}{2\pi i} \int_{|s|=r_1} \frac{f(s)ds}{s^{p+1}} + \frac{z^n}{2\pi i} \int_{|s|=r_1} \frac{f(s)ds}{(s-z)s^n}$$

eşitliği yazılır. Teorem 2.5.4 (Cauchy türev formülü) den

$$f(z) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} z^p + \frac{z^n}{2\pi i} \int_{|s|=r_1} \frac{f(s)ds}{(s-z)s^n}$$

elde edilir. Eşitliğin sağındaki ikinci terime

$$\frac{z^n}{2\pi i} \int_{|s|=r_1} \frac{f(s)ds}{(s-z)s^n} = \Phi_n(z)$$

denilir ve her iki tarafın modülü alınırsa

$$|f(z)| \leq \sum_{p=0}^{n-1} \left| \frac{f^{(p)}(0)}{p!} \right| r^p + |\Phi_n(z)|$$

eşitsizliği yazılır.

$$\frac{|f(s)|}{|s-z||s|^n} \leq \frac{|f(s)|}{(|s|-|z|)|s|^n} \leq \frac{\|f\|_{r_1}}{(r_1-r)r_1^n}$$

olduğundan

$$|\Phi_n(z)| \leq \frac{r_1 \|f\|_{r_1}}{(r_1 - r)} \left(\frac{r}{r_1}\right)^n$$

olup $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Phi_n(z)| = 0$ dir.

O halde $\sum_{p=0}^{\infty} \left| \frac{f^{(p)}(0)}{p!} \right| r^p$ serisi yakınsaktır.

Eş. 3.25 eşitliği ve Lemma 3.1.6 birlikte düşünülürse

$$|M_n(f, z)| \leq \sum_{p=0}^{\infty} \left| \frac{f^{(p)}(0)}{p!} \right| r^p$$

eşitsizliği yazılır. Dolayısıyla da $|z| < r$ de $M_n(f, z) \in \mathbb{C}$ dir.

Şimdi $(M_n(f))$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna yakınsama oranı verilecektir.

3.1.1. Teorem

f , $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R, R > 1\}$ de analitik fonksiyon ve Taylor açılımı

$f(z) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p z^p$ olsun. Bu durumda $1 \leq r \leq R$ için $\forall |z| \leq r$ ve

$$C_r(f) = 2 \sum_{p=1}^{\infty} |c_p| p^2 r^p < \infty \text{ olmak üzere}$$

$$|M_n(f, z) - f(z)| \leq \frac{C_r(f)}{n}$$

dir.

İspat

Eş. 3.25 den

$$\begin{aligned} |M_n(f, z) - f(z)| &= \left| \sum_{p=0}^{\infty} c_p M_n(e_p, z) - \sum_{p=0}^{\infty} c_p e_p(z) \right| \\ &= \left| \sum_{p=0}^{\infty} c_p (M_n(e_p, z) - e_p(z)) \right| \\ &\leq \sum_{p=0}^{\infty} |c_p| |M_n(e_p, z) - e_p(z)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |c_0| |M_n(e_0, z) - e_0(z)| + \sum_{p=1}^{\infty} |c_p| |M_n(e_p, z) - e_p(z)| \\
&= |c_0| |1 - 1| + \sum_{p=1}^{\infty} |c_p| |M_n(e_p, z) - e_p(z)| \\
&= \sum_{p=1}^{\infty} |c_p| |M_n(e_p, z) - e_p(z)| \tag{3.26}
\end{aligned}$$

olur. Eş. 3.26 dan (i) $1 \leq p \leq n$ ve (ii) $p > n$ olmak üzere iki durum elde ederiz.

(i) $1 \leq p \leq n$ olduğu için $\min\{n, p\} = p$ olup Lemma 3.1.4 den

$$\begin{aligned}
&M_n(e_p, z) - e_p(z) \\
&= \left(\frac{n!}{(n+p)!} \sum_{k=0}^{\min\{n,p\}} \binom{n}{k} \Delta_1^k F_p(0) z^k \right) - z^p \\
&= \left(\frac{n!}{(n+p)!} \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \Delta_1^k F_p(0) z^k \right) - z^p \\
&= \frac{n!}{(n+p)!} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} \Delta_1^k F_p(0) z^k + \frac{n!}{(n+p)!} \binom{n}{p} \Delta_1^p F_p(0) z^p - z^p \\
&= z^p \left\{ \frac{n!}{(n+p)!} \binom{n}{p} \Delta_1^p F_p(0) - 1 \right\} + \frac{n!}{(n+p)!} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} \Delta_1^k F_p(0) z^k \tag{3.27}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 3.27 deki ikinci terim düzenlenirse ;

$$\begin{aligned}
&\frac{n!}{(n+p)!} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} \Delta_1^k F_p(0) \\
&= \frac{n!}{(n+p)!} \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \Delta_1^k F_p(0) - \frac{n!}{(n+p)!} \binom{n}{p} \Delta_1^p F_p(0) \quad (p \leq n) \\
&= \frac{n!}{(n+p)!} \sum_{k=0}^{\min\{n,p\}} \binom{n}{k} \Delta_1^k F_p(0) - \frac{n!}{(n+p)!} \binom{n}{p} \Delta_1^p F_p(0) \tag{3.28}
\end{aligned}$$

olup Eş. 3.23 den Eş. 3.28 eşitliği

$$\frac{n!}{(n+p)!} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} \Delta_1^k F_p(0) \leq 1 - \frac{n!}{(n+p)!} \binom{n}{p} \Delta_1^p F_p(0)$$

olarak elde edilir. Bu durumda $|z| \leq r$, $k \leq p$ ve $r > 1$ olmak üzere Eş. 3.27 eşitliği

$$\begin{aligned} & |M_n(e_p, z) - e_p(z)| \\ & \leq |z|^p \left| \frac{n!}{(n+p)!} \binom{n}{p} \Delta_1^p F_p(0) - 1 \right| + \frac{n!}{(n+p)!} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} \Delta_1^k F_p(0) |z|^k \\ & \leq r^p \left| \frac{n!}{(n+p)!} \binom{n}{p} \Delta_1^p F_p(0) - 1 \right| + \frac{n!}{(n+p)!} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} \Delta_1^k F_p(0) r^k \\ & \leq r^p \left| \frac{n!}{(n+p)!} \binom{n}{p} \Delta_1^p F_p(0) - 1 \right| + r^p \frac{n!}{(n+p)!} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} \Delta_1^k F_p(0) \\ & = r^p \left[\left| \frac{n!}{(n+p)!} \binom{n}{p} \Delta_1^p F_p(0) - 1 \right| + \frac{n!}{(n+p)!} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} \Delta_1^k F_p(0) \right] \\ & \leq r^p \left[\left(1 - \frac{n!}{(n+p)!} \binom{n}{p} \Delta_1^p F_p(0) \right) + \left(1 - \frac{n!}{(n+p)!} \binom{n}{p} \Delta_1^p F_p(0) \right) \right] \\ & = 2r^p \left(1 - \frac{n!}{(n+p)!} \binom{n}{p} \Delta_1^p F_p(0) \right) \end{aligned}$$

olur.

Gerçekten;

$$|M_n(e_p, z) - e_p(z)| \leq 2r^p \left(1 - \frac{n!}{(n+p)!} \binom{n}{p} \Delta_1^p F_p(0) \right) \quad (3.29)$$

sağlanır.

$p = 0$ olsun. $|M_n(e_0, z) - 1| = |1 - 1| = 0$ dir.

$p = 1$ olsun.

$$\begin{aligned}
|M_n(e_1, z) - z| &= \left| \frac{nz}{n+1} - z \right| \\
&= \left| z \left(\frac{n}{n+1} - 1 \right) \right| \\
&= |z| \left(1 - \frac{n}{n+1} \right) \\
&\leq r \left(1 - \frac{n}{n+1} \right) \\
&\leq 2r \left(1 - \frac{n}{n+1} \right)
\end{aligned}$$

dir. Eş. 3.29 daki eşitsizlikte $p = 1$ alınırsa

$$|M_n(e_1, z) - z| \leq 2r \left(1 - \frac{n!}{(n+1)!} \binom{n}{1} \Delta_1^1 F_1(0) \right) = 2r \left(1 - \frac{n}{n+1} \right)$$

olup sağlanır.

$p = 2$ olsun.

$$\begin{aligned}
|M_n(e_2, z) - z^2| &= \left| \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} z^2 + \frac{2n}{(n+1)(n+2)} z - z^2 \right| \\
&\leq |z|^2 \left| \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} - 1 \right| + \frac{2n}{(n+1)(n+2)} |z| \\
&\leq |z|^2 \left\{ \left(1 - \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} \right) + \frac{2n}{(n+1)(n+2)} \right\}
\end{aligned}$$

olup

$$1 - \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{3n+3}{(n+1)(n+2)} \geq \frac{2n}{(n+1)(n+2)}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
|M_n(e_2, z) - z^2| &\leq |z|^2 \left\{ \left(1 - \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} \right) + \left(1 - \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} \right) \right\} \\
&\leq 2r^2 \left(1 - \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} \right)
\end{aligned}$$

dir. Eş. 3.29 daki eşitsizlikte $p = 2$ alınırsa

$$\begin{aligned}
|M_n(e_2, z) - z^2| &\leq 2r^2 \left(1 - \frac{n!}{(n+2)!} \binom{n}{2} \Delta_1^2 F_2(0) \right) \\
&= 2r^2 \left(1 - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \frac{n(n-1)}{2!} 2! \right) \\
&= 2r^2 \left(1 - \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} \right)
\end{aligned}$$

olup sağlanır.

$p = 3$ olsun.

$$\begin{aligned}
|M_n(e_3, z) - z^3| &= \left| \frac{n(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} z^3 + \frac{6n(n-1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} z^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{6n}{(n+1)(n+2)(n+3)} z - z^3 \right| \\
&\leq |z|^3 \left| \frac{n(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} - 1 \right| \\
&\quad + |z|^2 \left| \frac{6n(n-1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right| \\
&\quad + |z| \left| \frac{6n}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right| \\
&\leq r^3 \left\{ \left(1 - \frac{n(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right) + \frac{6n(n-1) + 6n}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right\} \\
&= r^3 \left\{ \left(1 - \frac{n(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right) + \frac{6n^2}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right\}
\end{aligned}$$

olup

$$1 - \frac{n(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{9n(n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \geq \frac{6n^2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
|M_n(e_3, z) - z^3| &\leq r^3 \left\{ \left(1 - \frac{n(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right) + \left(1 - \frac{n(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right) \right\} \\
&= 2r^3 \left(1 - \frac{n(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right)
\end{aligned}$$

dir. Eş. 3.29 daki eşitsizlikte $p = 3$ alınır

$$\begin{aligned}
|M_n(e_3, z) - z^3| &\leq 2r^3 \left(1 - \frac{n!}{(n+3)!} \binom{n}{3} \Delta_1^3 F_3(0) \right) \\
&= 2r^3 \left(1 - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} 3! \right) \\
&= 2r^3 \left(1 - \frac{n(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right)
\end{aligned}$$

olup sağlanır.

$$\text{NOT 3.1.1 : } \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{m-i-1}{n-1} = \binom{m-n-1}{n-1} \text{ dir [15].}$$

Ayrıca ;

$$\text{Eş. 3.22 den ve } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \text{ olduğundan}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_1^p F_p(0) &= \sum_{j=0}^p (-1)^j \binom{p}{j} F_p(p-j) \\
&= \sum_{j=0}^p (-1)^j \binom{p}{j} p! \binom{2p-j-1}{p} \\
&= p! \sum_{j=0}^p (-1)^j \binom{p}{j} \binom{2p-j-1}{p} \\
&= p! \left\{ \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j \binom{p}{j} \binom{2p-j-1}{p} + (-1)^p \binom{p}{p} \binom{p-1}{p} \right\} \\
&= p! \left\{ \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j \binom{p}{j} \binom{2p-j-1}{p} + (-1)^p \binom{p}{p} 0 \right\} \\
&= p! \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j \binom{p}{j} \binom{2p-j-1}{p} \\
&= p! \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j \binom{p}{j} \binom{2p-j-1}{p-j-1}
\end{aligned}$$

olur. Not 3.1.1 den

$$\begin{aligned}
\Delta_1^p F_p(0) &= p! \binom{2p-p-1}{p-1} \\
&= p!
\end{aligned}$$

olup $\Delta_1^p F_p(0) = p!$ dir. O halde ;

$$\begin{aligned}
\frac{n!}{(n+p)!} \binom{n}{p} \Delta_1^p F_p(0) &= \frac{n!}{(n+p)!} \binom{n}{p} p! \\
&= \frac{n!}{(n+p)!} \frac{n!}{(n-p)!} \\
&= \frac{(n-p+1)(n-p+2) \dots n}{(n+1)(n+2) \dots (n+p)} \\
&= \prod_{j=1}^p \left(\frac{n+j-p}{n+j} \right)
\end{aligned}$$

yazılabilir.

Lemma 3.1.5 de $x_j = \frac{n+j-p}{n+j}$ ve $k = p$ alınır ;

$$\begin{aligned}
1 - \prod_{j=1}^p \left(\frac{n+j-p}{n+j} \right) &\leq \sum_{j=1}^p \left(1 - \frac{n+j-p}{n+j} \right) \\
&= p \sum_{j=1}^p \frac{1}{n+j} \\
&\leq p \sum_{j=1}^p \frac{1}{n} \\
&= \frac{p^2}{n}
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde; Eş. 3.29 daki eşitsizlik

$$\begin{aligned}
|M_n(e_p, z) - e_p(z)| &\leq 2r^p \left(1 - \frac{n!}{(n+p)!} \binom{n}{p} \Delta_1^p F_p(0) \right) \\
&= 2r^p \left(1 - \prod_{j=1}^p \left(\frac{n+j-p}{n+j} \right) \right) \\
&\leq 2r^p \frac{p^2}{n}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

ii) $p > n \geq 1$ olsun. Bu durumda (i) den

$$\begin{aligned}
|M_n(e_p, z) - e_p(z)| &= |M_n(e_p, z)| + |e_p(z)| \\
&\leq r^p + r^p \\
&= 2r^p \quad , \quad \frac{p}{n} > 1 \\
&\leq 2r^p \frac{p}{n} \\
&\leq 2r^p \frac{p^2}{n}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece (i) ve (ii) den şu sonuca varabiliriz :

$\forall p, n \in \mathbb{N}$ için

$$|M_n(e_p, z) - e_p(z)| \leq 2r^p \frac{p^2}{n}$$

dir. Ayrıca ;

$$|M_n(f, z) - f(z)| = \sum_{p=0}^{\infty} |c_p| |M_n(e_p, z) - e_p(z)| = \sum_{p=1}^{\infty} |c_p| |M_n(e_p, z) - e_p(z)|$$

olduğunu daha önceden biliyoruz. O halde ;

$$|M_n(f, z) - f(z)| \leq \frac{2}{n} \sum_{p=1}^{\infty} |c_p| p^2 r^p$$

dir. Buradan

$$C_r(f) = 2 \sum_{p=1}^{\infty} |c_p| p^2 r^p < \infty$$

olmak üzere

$$|M_n(f, z) - f(z)| \leq \frac{C_r(f)}{n}$$

olarak yazılabilir.

Böylece $(M_n(f))$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna sayısal bir yakınsama oranına ilişkin bir üst sınır bulmuş olduk.

3.2. Voronovskaja Tip Yaklaşım Özellikleri

Bu bölümde Voronovskaja tip yakınsama oranı elde edilecektir.

3.2.1. Teorem

$f, D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R, R > 1\}$ de analitik fonksiyon ve Taylor açılımı

$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ olsun. Bu durumda $\forall r \in [1, R]$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z| \leq r$ için

$$B_{k,r} = r^2 (2k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + r (4k^3 + 12k^2 + 14k + 6) \\ + (2k^3 + 9k^2 + 13k + 6) + 4(k-1)^3(1+r) \quad (3.30)$$

ve

$$M_r(f) = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| k B_{k,r} r^k < \infty \quad (3.31)$$

olmak üzere

$$\left| M_n(f, z) - f(z) - \frac{z(1-z)f''(z) - zf'(z)}{n} \right| \leq \frac{M_r(f)}{n^2} \quad (3.32)$$

dir.

İspat

$$e_k(z) = z^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \text{ ve } M_n(e_k, z) = \pi_{k,n}(z) \quad (3.33)$$

olmak üzere Eş. 3.25 den

$$M_n(f, z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k M_n(e_k, z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \pi_{k,n}(z)$$

yazılabilir. Ayrıca;

$$\begin{aligned} \frac{z(1-z)f''(z) - zf'(z)}{n} &= \frac{z(1-z)}{n} \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1)z^{k-2} - \frac{z}{n} \sum_{k=1}^{\infty} c_k k z^{k-1} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1)z^{k-1} - \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1)z^k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} c_k k z^k \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} c_k k(k-1)z^{k-1} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} c_k k^2 z^{k-1} z \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} c_k [k(k-1) - k^2 z] z^{k-1} \end{aligned} \quad (3.34)$$

dir.

$\forall z \in \mathbb{C}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için Eş. 3.34 den

$$\begin{aligned} &\left| M_n(f, z) - f(z) - \frac{z(1-z)f''(z) - zf'(z)}{n} \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} c_k \pi_{k,n}(z) - \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} c_k [k(k-1) - k^2 z] z^{k-1} \right| \\ &= \left| c_0 \pi_{0,n}(z) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \pi_{k,n}(z) - c_0 - \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} c_k [k(k-1) - k^2 z] z^{k-1} \right| \\ &= \left| c_0 M_n(e_0, z) - c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \pi_{k,n}(z) - \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} c_k [k(k-1) - k^2 z] z^{k-1} \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} c_k \pi_{k,n}(z) - \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} c_k [k(k-1) - k^2 z] z^{k-1} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left\{ \pi_{k,n}(z) - z^k - \frac{[k(k-1) - k^2 z]z^{k-1}}{n} \right\} \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \left| \pi_{k,n}(z) - e_k(z) - \frac{[k(k-1) - k^2 z]z^{k-1}}{n} \right|
\end{aligned}$$

dir. Lemma 3.1.1 den $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}$ için $k = 0, 1, 2, \dots$ iken

$$\pi_{k+1,n}(z) = \frac{z(1-z)}{n+k+1} \pi'_{k,n}(z) + \frac{nz+k}{n+k+1} \pi_{k,n}(z) \quad (3.35)$$

olur. Eğer

$$\pi_{k,n}(z) - e_k(z) - \frac{[k(k-1) - k^2 z]z^{k-1}}{n} = E_{k,n}(z) \quad (3.36)$$

denirse $\text{der}[E_{k,n}(z)] \leq k$ olur. O halde Eş. 3.35 ve Eş. 3.36 dan

$$\left| M_n(f, z) - f(z) - \frac{z(1-z)f''(z) - zf'(z)}{n} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| |E_{k,n}(z)| \quad (3.37)$$

eşitsizliği yazılır. Ayrıca Eş. 3.35 de k yerine $(k-1)$ yazılırsa;

$$\pi_{k,n}(z) = \frac{z(1-z)}{n+k} \pi'_{k-1,n}(z) + \frac{nz+k-1}{n+k} \pi_{k-1,n}(z) \quad (3.38)$$

eşitsizliği, Eş. 3.36 da da k yerine $(k-1)$ yazılıp z ye göre türev alınırsa;

$$E_{k-1,n}(z) = \pi_{k-1,n}(z) - z^{k-1} - \frac{[(k-1)(k-2) - (k-1)^2 z]z^{k-2}}{n} \quad (3.39)$$

ve

$$E'_{k-1,n}(z) = \pi'_{k-1,n}(z) - (k-1)z^{k-2} - \frac{(k-1)(k-2)^2}{n} z^{k-3} + \frac{(k-1)^3}{n} z^{k-2} \quad (3.40)$$

eşitlikleri elde edilir. Eş. 3.36 da Eş. 3.38 eşitliği yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
& E_{k,n}(z) \\
&= \pi_{k,n}(z) - e_k(z) - \frac{[k(k-1) - k^2 z]z^{k-1}}{n} \\
&= \frac{z(1-z)}{n+k} \pi'_{k-1,n}(z) + \frac{nz+k-1}{n+k} \pi_{k-1,n}(z) - z^k - \frac{k(k-1)}{n} z^{k-1} + \frac{k^2}{n} z^k \quad (3.41)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 3.39 da $\pi_{k-1,n}(z)$ ifadesi, Eş. 3.40 da da $\pi'_{k-1,n}(z)$ ifadesi yalnız bırakılarak bulunan eşitlikler Eş. 3.41 de yerlerine yazılırsa ;

$$\begin{aligned}
& E_{k,n}(z) \\
&= \frac{z(1-z)}{n+k} \left\{ E'_{k-1,n}(z) + (k-1)z^{k-2} + \frac{(k-1)(k-2)^2}{n} z^{k-3} - \frac{(k-1)^3}{n} z^{k-2} \right\} \\
&+ \frac{nz+k-1}{n+k} \left\{ E_{k-1,n}(z) + z^{k-1} + \frac{(k-1)(k-2)}{n} z^{k-2} - \frac{(k-1)^2}{n} z^{k-1} \right\} \\
&- z^k - \frac{k(k-1)}{n} z^{k-1} + \frac{k^2}{n} z^k \\
&= \frac{z(1-z)}{n+k} E'_{k-1,n}(z) + \frac{nz+k-1}{n+k} E_{k-1,n}(z) \\
&+ \frac{z(1-z)}{n+k} \left\{ (k-1)z^{k-2} + \frac{(k-1)(k-2)^2}{n} z^{k-3} - \frac{(k-1)^3}{n} z^{k-2} \right\} \\
&+ \frac{nz+k-1}{n+k} \left\{ z^{k-1} + \frac{(k-1)(k-2)}{n} z^{k-2} - \frac{(k-1)^2}{n} z^{k-1} \right\} \\
&- z^k - \frac{k(k-1)}{n} z^{k-1} + \frac{k^2}{n} z^k \quad (3.42)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 3.42 de $E_{k-1,n}(z)$ ve $E'_{k-1,n}(z)$ li terimlerin dışında kalan terimler parantez içlerine dağıtılırsa;

$$\begin{aligned}
& E_{k,n}(z) \\
&= \frac{z(1-z)}{n+k} E'_{k-1,n}(z) + \frac{nz+k-1}{n+k} E_{k-1,n}(z) \\
&+ \left\{ \frac{z(1-z)}{n+k} (k-1)z^{k-2} + \frac{z(1-z)}{n+k} \frac{(k-1)(k-2)^2}{n} z^{k-3} \right. \\
&\quad \left. - \frac{z(1-z)}{n+k} \frac{(k-1)^3}{n} z^{k-2} + \frac{nz+k-1}{n+k} z^{k-1} + \frac{nz+k-1}{n+k} \frac{(k-1)(k-2)}{n} z^{k-2} \right.
\end{aligned}$$

$$\left. -\frac{nz+k-1}{n+k} \frac{(k-1)^2}{n} z^{k-1} - z^k - \frac{k(k-1)}{n} z^{k-1} + \frac{k^2}{n} z^k \right\} \quad (3.43)$$

elde edilir. Eş. 3.43 deki 3. terimde payda eşitlenip gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned} E_{k,n}(z) &= \frac{z(1-z)}{n+k} E'_{k-1,n}(z) + \frac{nz+k-1}{n+k} E_{k-1,n}(z) \\ &+ \left\{ \frac{n(k-1)}{n(n+k)} [z^{k-1} - z^k] + \frac{(k-1)(k-2)^2}{n(n+k)} [z^{k-2} - z^{k-1}] - \frac{(k-1)^3}{n(n+k)} [z^{k-1} - z^k] \right. \\ &+ \frac{n^2}{n(n+k)} z^k + \frac{n(k-1)}{n(n+k)} z^{k-1} + \frac{n(k-1)(k-2)}{n(n+k)} z^{k-1} + \frac{(k-1)^2(k-2)}{n(n+k)} z^{k-2} \\ &- \frac{n(k-1)^2}{n(n+k)} z^k - \frac{(k-1)^3}{n(n+k)} z^{k-1} - \frac{n(n+k)}{n(n+k)} z^k - \frac{(n+k)k(k-1)}{n(n+k)} z^{k-1} \\ &\left. + \frac{(n+k)k^2}{n(n+k)} z^k \right\} \quad (3.44) \end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 3.44 deki 3. terimde $\frac{z^{k-2}}{n(n+k)}$ ortak parantezine alınır;

$$\begin{aligned} E_{k,n}(z) &= \frac{z(1-z)}{n+k} E'_{k-1,n}(z) + \frac{nz+k-1}{n+k} E_{k-1,n}(z) \\ &+ \frac{z^{k-2}}{n(n+k)} \{ n(k-1)[z-z^2] + (k-1)(k-2)^2 - (k-1)(k-2)^2 z \\ &\quad - (k-1)^3 [z-z^2] + n^2 z^2 + n(k-1)z + n(k-1)(k-2)z \\ &\quad + (k-1)^2(k-2) - n(k-1)^2 z^2 - (k-1)^3 z - n(n+k)z^2 \\ &\quad - (n+k)k(k-1)z + (n+k)k^2 z^2 \} \\ &= \frac{z(1-z)}{n+k} E'_{k-1,n}(z) + \frac{nz+k-1}{n+k} E_{k-1,n}(z) \\ &+ \frac{z^{k-2}}{n(n+k)} \{ z^2 \langle (k-1)^3 - n(k-1) + n^2 - n(k-1)^2 - n(n+k) + (n+k)k^2 \rangle \\ &\quad + z \langle n(k-1) - (k-1)(k-2)^2 - (k-1)^3 + n(k-1) \\ &\quad + n(k-1)(k-2) - (k-1)^3 - (n+k)k(k-1) \rangle \\ &\quad + \langle (k-1)(k-2)^2 + (k-1)^2(k-2) \rangle \} \quad (3.45) \end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 3.45 deki 3. Terimde ifadeler düzenlenip gerekli kısaltmalar yapılırsa;

$$\begin{aligned}
& E_{k,n}(z) \\
&= \frac{z(1-z)}{n+k} E'_{k-1,n}(z) + \frac{nz+k-1}{n+k} E_{k-1,n}(z) \\
&+ \frac{z^{k-2}}{n(n+k)} \{z^2 \langle k^3 - 3k^2 + 3k - 1 - nk + n + n^2 - nk^2 + 2nk - n - n^2 \\
&\quad -nk + nk^2 + k^3 \rangle \\
&+ z \langle nk - n - k^3 + 5k^2 - 8k + 4 - k^3 + 3k^2 - 3k + 1 + nk - n \\
&\quad + nk^2 - 3nk + 2n - k^3 + 3k^2 - 3k + 1 - k^3 - nk^2 + nk - k^3 + k^2 \rangle \\
&+ \langle k^3 - 5k^2 + 8k - 4 + k^3 - 4k^2 + 5k - 2 \rangle \} \\
&= \frac{z(1-z)}{n+k} E'_{k-1,n}(z) + \frac{nz+k-1}{n+k} E_{k-1,n}(z) \\
&+ \frac{z^{k-2}}{n(n+k)} \{z^2 (2k^3 - 3k^2 + 3k - 1) + z(-4k^3 + 12k^2 - 14k + 6) \\
&\quad + (2k^3 - 9k^2 + 13k - 6)\} \tag{3.46}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
X_{k,n}(z) &= \frac{z^{k-2}}{n(n+k)} \{z^2 (2k^3 - 3k^2 + 3k - 1) + z(-4k^3 + 12k^2 - 14k + 6) \\
&\quad + (2k^3 - 9k^2 + 13k - 6)\} \tag{3.47}
\end{aligned}$$

denirse $\forall k \geq 1$ ve $|z| \leq r$ için

$$E_{k,n}(z) = \frac{z(1-z)}{n+k} E'_{k-1,n}(z) + \frac{nz+k-1}{n+k} E_{k-1,n}(z) + X_{k,n}(z)$$

yazılır.

$\forall k, n \in \mathbb{N}, |z| \leq r, r \geq 1$ için $\pi_{k,n}(z) = M_n(e_k, z)$ olduğundan Teorem 3.1.1 in ispatındaki

$$|M_n(e_p, z) - e_p(z)| \leq 2 \frac{r^p p^2}{n}$$

eşitsizliğinden

$$|\pi_{k,n}(z) - e_k(z)| \leq \frac{2k^2 r^k}{n} \tag{3.48}$$

dir. Ayrıca ; $\forall k, n \in \mathbb{N}, k \geq 1, |z| \leq r$ için

$$\begin{aligned}
 |E_{k,n}(z)| &= \left| \frac{z(1-z)}{n+k} E'_{k-1,n}(z) + \frac{nz+k-1}{n+k} E_{k-1,n}(z) + X_{k,n}(z) \right| \\
 &\leq \frac{|z|(1+|z|)}{n+k} |E'_{k-1,n}(z)| + \frac{n|z|+k-1}{n+k} |E_{k-1,n}(z)| + |X_{k,n}(z)| \\
 &\leq \frac{r(1+r)}{n+k} |E'_{k-1,n}(z)| + \frac{nr+k-1}{n+k} |E_{k-1,n}(z)| + |X_{k,n}(z)| \quad (3.49)
 \end{aligned}$$

dir. $k \geq 1$ olduğundan $\frac{r(1+r)}{n+k} \leq \frac{r(1+r)}{n}$ yazılabilir ve $k \geq 1, r \geq 1$ olduğundan

dolayısı ile $\frac{nr+k-1}{n+k} \leq \frac{nr+kr}{n+k} = r$ yazılabilir. Buna göre Eş. 3.49 eşitsizliği

$$|E_{k,n}(z)| \leq \frac{r(1+r)}{n} |E'_{k-1,n}(z)| + r |E_{k-1,n}(z)| + |X_{k,n}(z)|$$

olur. Burada $der[E_{k-1,n}(z)] \leq k-1$ dir.

Şimdi $k \geq 1$ için $|E'_{k-1,n}(z)|$ nin tahmini bulunacaktır. Teorem 2.5.2 ve Eş. 3.49 u kullanırsak;

$$\begin{aligned}
 |E'_{k-1,n}(z)| &\leq \frac{k-1}{r} \|E_{k-1,n}\|_r \\
 &\leq \frac{k-1}{r} \left\| \pi_{k-1,n} - e_{k-1} - \frac{[(k-1)(k-2) - (k-1)^2 e_1] e_{k-2}}{n} \right\|_r \\
 &\leq \frac{k-1}{r} \left\{ \|\pi_{k-1,n} - e_{k-1}\|_r + \left\| \frac{(k-1)e_{k-2}[(k-2) - (k-1)e_1]}{n} \right\|_r \right\} \\
 &\leq \frac{k-1}{r} \left\{ \frac{2(k-1)^2 r^{k-1}}{n} + \left\| \frac{e_{k-2}(k-1)[(k-1) + (k-1)e_1]}{n} \right\|_r \right\} \\
 &\leq \frac{k-1}{r} \left\{ \frac{2(k-1)^2 r^{k-1}}{n} + \frac{r^{k-2}(k-1)^2 + r^{k-2}(k-1)^2 r}{n} \right\} \\
 &= \frac{k-1}{r} \left\{ \frac{2(k-1)^2 r^{k-1}}{n} + \frac{r^{k-2}(k-1)^2(1+r)}{n} \right\} \\
 &\leq \frac{(k-1)^3}{rn} \{2r^{k-1} + r^{k-2} + r^{k-1}\} \\
 &= \frac{(k-1)^3}{rn} \{3r^{k-1} + r^{k-2}\} \\
 &\leq \frac{4(k-1)^3}{rn} r^{k-1}, \quad r \geq 1 \\
 &\leq \frac{4(k-1)^3}{n} r^{k-1}
 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde ;

$$\frac{r(1+r)}{n} |E'_{k-1,n}(z)| \leq \frac{4(k-1)^3 r^k (1+r)}{n^2}$$

olup dolayısıyla da

$$\begin{aligned} |E_{k,n}(z)| &\leq \frac{r(1+r)}{n} |E'_{k-1,n}(z)| + r |E_{k-1,n}(z)| + |X_{k,n}(z)| \\ &\leq \frac{4(k-1)^3 r^k (1+r)}{n^2} + r |E_{k-1,n}(z)| + |X_{k,n}(z)| \end{aligned} \quad (3.50)$$

olur. $\forall k \geq 1, |z| \leq r, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} A_{k,r} &= r^2 (2k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + r (4k^3 + 12k^2 + 14k + 6) \\ &\quad + (2k^3 + 9k^2 + 13k + 6) \end{aligned} \quad (3.51)$$

olmak üzere Eş. 3.47 den

$$\begin{aligned} |X_{k,n}(z)| &\leq \frac{r^{k-2}}{n(n+k)} \{ r^2 (2k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + r (4k^3 + 12k^2 + 14k + 6) \\ &\quad + (2k^3 + 9k^2 + 13k + 6) \} \\ &\leq \frac{r^{k-2}}{n^2} \{ r^2 (2k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + r (4k^3 + 12k^2 + 14k + 6) \\ &\quad + (2k^3 + 9k^2 + 13k + 6) \} \\ &\leq \frac{r^k}{n^2} A_{k,r} \end{aligned} \quad (3.52)$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla $B_{k,r}$ 3. dereceden bir polinom ve

$$B_{k,r} = 4(k-1)^3 (1+r) + A_{k,r} \quad (3.53)$$

olmak üzere Eş. 3.50 eşitsizliği

$$\begin{aligned} |E_{k,n}(z)| &\leq \frac{4(k-1)^3 r^k (1+r)}{n^2} + r |E_{k-1,n}(z)| + |X_{k,n}(z)| \\ &\leq r |E_{k-1,n}(z)| + \frac{r^k 4(k-1)^3 (1+r)}{n^2} + \frac{r^k}{n^2} A_{k,r} \\ &= r |E_{k-1,n}(z)| + \frac{r^k}{n^2} [4(k-1)^3 (1+r) + A_{k,r}] \\ &= r |E_{k-1,n}(z)| + \frac{r^k}{n^2} B_{k,r} \end{aligned} \quad (3.54)$$

olur. Fakat;

$$E_{0,n}(z) = \pi_{0,n}(z) - e_0(z) - \frac{[0(0-1) - 0^2 z] z^{-1}}{n} = M_n(e_0, z) - e_0(z) = 1 - 1 = 0$$

olduğundan Eş. 3.54 eşitsizliği $\forall z \in \mathbb{C}$ ve $k = 1, 2, \dots$ için geçerlidir. Ayrıca;

$$\begin{aligned}
|E_{k,n}(z)| &\leq r|E_{k-1,n}(z)| + \frac{r^k}{n^2} B_{k,r} \\
|E_{k-1,n}(z)| &\leq r|E_{k-2,n}(z)| + \frac{r^{k-1}}{n^2} B_{k-1,r} \\
|E_{k-2,n}(z)| &\leq r|E_{k-3,n}(z)| + \frac{r^{k-2}}{n^2} B_{k-2,r} \\
&\vdots \\
|E_{2,n}(z)| &\leq r|E_{1,n}(z)| + \frac{r^2}{n^2} B_{2,r} \\
|E_{1,n}(z)| &\leq r|E_{0,n}(z)| + \frac{r}{n^2} B_{1,r}
\end{aligned}$$

olup $B_{i,r}$; $i = 1, 2, \dots, k$ ların katsayıları $\frac{r^k}{n^2}$ olacak şekilde uygun katsayılarla çarpılıp taraf tarafa toplanırsa Eş. 3.54 eşitsizliği

$$\begin{aligned}
|E_{k,n}(z)| &\leq \frac{r^k}{n^2} \{B_{k,r} + B_{k-1,r} + B_{k-2,r} + \dots + B_{2,r} + B_{1,r}\} + r^k |E_{0,n}(z)| \\
&= \frac{r^k}{n^2} \{B_{k,r} + B_{k-1,r} + B_{k-2,r} + \dots + B_{2,r} + B_{1,r}\} \\
&= \frac{r^k}{n^2} \sum_{j=1}^k B_{j,r} \\
&\leq \frac{r^k}{n^2} B_{k,r} \sum_{j=1}^k 1 \\
&= \frac{kr^k}{n^2} B_{k,r}
\end{aligned}$$

olup $\forall z \in \mathbb{C}, k \geq 1$ için

$$|E_{k,n}(z)| \leq \frac{kr^k}{n^2} B_{k,r} \quad (3.55)$$

eşitsizliği elde edilir. Eş. 3.37 eşitsizliğinde Eş. 3.55 eşitsizliği yazılırsa;

$$\left| M_n(f, z) - f(z) - \frac{z(1-z)f''(z) - zf'(z)}{n} \right| \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| kr^k B_{k,r} \quad (3.56)$$

eşitsizliği elde edilir.

$f(z), |z| \leq r$ de analitik olduğundan $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ biçiminde bir kuvvet serisiyle ifade edilebilir. Yine $f(z), |z| \leq r$ de analitik olduğu için her mertebeden türevi vardır ve bu seriler mutlak yakınsak olup her bir serinin mutlak değeri sonludur.

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| k r^{k-1} < \infty$$

$$f''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} |c_k| k(k-1) r^{k-2} < \infty$$

$$f'''(z) = \sum_{k=3}^{\infty} |c_k| k(k-1)(k-2) r^{k-3} < \infty$$

$$f^{(4)}(z) = \sum_{k=4}^{\infty} |c_k| k(k-1)(k-2)(k-3) r^{k-4} < \infty$$

olduğundan Eş. 3.51 ve Eş. 3.53 den

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| k B_{k,r} r^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| k \{ r^{k+2} (2k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + r^{k+1} (4k^3 + 12k^2 + 14k + 6) \\ & \quad + r^k (2k^3 + 9k^2 + 13k + 6) \} \\ & \quad + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| k 4 (k^3 - 3k^2 + 3k - 1) r^k + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| k 4 (k^3 - 3k^2 + 3k - 1) r^{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \{ r^{k+2} (2k^4 + 3k^3 + 3k^2 + k) + r^{k+1} (4k^4 + 12k^3 + 14k^2 + 6k) \\ & \quad + r^k (2k^4 + 9k^3 + 13k^2 + 6k) \} \\ & \quad + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| 4 (k^4 - 3k^3 + 3k^2 - k) r^k + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| 4 (k^4 - 3k^3 + 3k^2 - k) r^{k+1} \end{aligned} \quad (3.57)$$

elde edilir. Eş. 3.57 deki 4. dereceden polinomlar

$$a_1 k(k-1)(k-2)(k-3) + a_2 k(k-1)(k-2) + a_3 k(k-1) + a_4 k$$

biçiminde yazılacak şekilde düzenlenirse;

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| k B_{k,r} r^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| r^{k+2} [2k(k-1)(k-2)(k-3) + 15k(k-1)(k-2) + 26k(k-1) + 9k] \\ & \quad + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| r^{k+1} [4k(k-1)(k-2)(k-3) + 36k(k-1)(k-2) + 78k(k-1) + 36k] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| r^k [2k(k-1)(k-2)(k-3) + 21k(k-1)(k-2) + 54k(k-1) + 30k] \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| r^k [4k(k-1)(k-2)(k-3) + 12k(k-1)(k-2) + 4k(k-1)] \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| r^{k+1} [4k(k-1)(k-2)(k-3) + 12k(k-1)(k-2) + 4k(k-1)] \\
& = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| r^{k+2} [2k(k-1)(k-2)(k-3) + 15k(k-1)(k-2) + 26k(k-1) + 9k] \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| r^{k+1} [8k(k-1)(k-2)(k-3) + 48k(k-1)(k-2) + 82k(k-1) + 36k] \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| r^k [6k(k-1)(k-2)(k-3) + 33k(k-1)(k-2) + 58k(k-1) + 30k] \\
& = (2r^6 + 8r^5 + 6r^4) \sum_{k=4}^{\infty} |c_k| r^{k-4} k(k-1)(k-2)(k-3) \\
& + (15r^5 + 48r^4 + 33r^3) \sum_{k=3}^{\infty} |c_k| r^{k-3} k(k-1)(k-2) \\
& + (26r^4 + 82r^3 + 58r^2) \sum_{k=2}^{\infty} |c_k| r^{k-2} k(k-1) \\
& + (9r^3 + 36r^2 + 30r) \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| r^{k-1} k < \infty
\end{aligned}$$

olup teoremden istenen elde edilir.

Şimdi tam yakınsama oranını elde etmek için bir de alt sınır belirlenecektir.

3.2.2. Teorem

$R > 1, f : D_r \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu D_R de analitik ve Taylor açılımı $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ olsun. $C_r(f)$ sadece f ve r ye bağlı olmak üzere eğer $der(f(z)) \leq 0$ değilse o zaman $\forall r \in [1, R)$ için

$$\|M_n(f, \cdot) - f\|_r \geq \frac{C_r(f)}{n}$$

dir.

İspat

$\forall f \in D_r$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} & M_n(f, z) - f(z) \\ &= [z(1-z)f''(z) - zf'(z) + M_n(f, z) - f(z) - (z(1-z)f''(z) - zf'(z))] \\ &= \frac{1}{n} \left[z(1-z)f''(z) - zf'(z) + \frac{1}{n} \left\{ n^2 \left(M_n(f, z) - f(z) - \frac{z(1-z)f''(z) - zf'(z)}{n} \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.58)$$

dir. Ayrıca

$$\|F + G\|_r \geq |||F||_r - \|G\|_r| \geq \|F\|_r - \|G\|_r \quad (3.59)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} & \|M_n(f, \cdot) - f\|_r \\ & \geq \frac{1}{n} \left[\|e_1(1-e_1)f'' - e_1f'\|_r - \frac{1}{n} \left\{ n^2 \left\| M_n(f, \cdot) - f - \frac{e_1(1-e_1)f'' - e_1f'}{n} \right\|_r \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.60)$$

biçiminde yazılabilir.

Hipotezi düşünürsek f nin polinom derecesi D_R de sıfır olamaz yani f D_R de sabit polinom olamaz. Bundan dolayı da $\|e_1(1-e_1)f'' - e_1f'\|_r > 0$ yazılabilir. Çünkü;

$$\|e_1(1-e_1)f'' - e_1f'\|_r = 0 \text{ olabilseydi } \forall |z| \leq r \text{ için } z(1-z)f''(z) - zf'(z) = 0$$

olurdu. Yani; $z[(1-z)f''(z) - f'(z)] = 0$ dan $\forall |z| \leq r$ ve $z \neq 0$ için

$$(1-z)f''(z) - f'(z) = 0 \text{ buradan da } \forall |z| \leq r \text{ ve } z \neq 0 \text{ için}$$

$$(1-z)f''(z) - f'(z) = [(1-z)f'(z)]' = 0 \text{ olurdu. O halde}$$

$$(1-z)f'(z) = C \text{ (sabit) dir.}$$

$$\forall |z| \leq r \text{ ve } z \neq 0 \text{ için } f'(z) = \frac{C}{1-z} \text{ dir.}$$

Fakat f , $\overline{D_r}$ de ve $r \geq 1$ de analitik olduğu için $C = 0$ olmalıdır. Aksi halde $f'(z)$, $z = 1$ de diferensiyellenemez ki buda $f'(z)$ nin analitik olması ile çelişir. O halde $f'(z) = 0$ olup $\forall z \in \overline{D_r}$ için

$$f(z) = c(\text{sabit}) \text{ olur ki bu da hipotezle çelişir. O halde } \|e_1(1-e_1)f'' - e_1f'\|_r > 0 \text{ dir.}$$

Şimdi; Eş. 3.32 eşitsizliğinden dolayı

$$n^2 \left\| M_n(f, \cdot) - f - \frac{e_1(1-e_1)f'' - e_1f'}{n} \right\|_r \leq M_r(f)$$

yazılabilir.

$$M_r(f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k B_{k,r} r^k < \infty \text{ olduğundan}$$

$$\frac{1}{n} \left\{ n^2 \left\| M_n(f, \cdot) - f - \frac{e_1(1-e_1)f'' - e_1f'}{n} \right\|_r \right\} \leq \frac{M_r(f)}{n} \rightarrow 0$$

dır. O halde

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0(f, r) \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall n \geq n_0$ için

$$\frac{1}{n} \left\{ n^2 \left\| M_n(f, \cdot) - f - \frac{e_1(1-e_1)f'' - e_1f'}{n} \right\|_r \right\} < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. $\varepsilon = \|e_1(1-e_1)f'' - e_1f'\|_r > 0$ seçilirse

$$\begin{aligned} & \left\| e_1(1-e_1)f'' - e_1f' \right\|_r - \frac{1}{n} \left\{ n^2 \left\| M_n(f, \cdot) - f - \frac{e_1(1-e_1)f'' - e_1f'}{n} \right\|_r \right\} \\ & \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} \\ & = \frac{\varepsilon}{2} \\ & = \frac{1}{2} \|e_1(1-e_1)f'' - e_1f'\|_r \end{aligned}$$

olup $\forall n \geq n_0$ için $\|M_n(f, \cdot) - f\|_r \geq \frac{1}{2n} \|e_1(1-e_1)f'' - e_1f'\|_r$ dir.

$n \in \{1, 2, \dots, n_0 - 1\}$ için $\|M_n(f, \cdot) - f\|_r \geq \frac{M_{r,n}(f)}{n}$; $M_{r,n}(f) = n\|M_n(f, \cdot) - f\|_r > 0$

dır. Aslında eğer $\|M_n(f, \cdot) - f\|_r = 0$ olsaydı o zaman $\forall |z| \leq r$ için $M_n(f, z) = f(z)$

olurdu ki buda sadece sabit f fonksiyonu için geçerlidir. Bu ise hipotezle çelişir. Bundan dolayı

$$C_r(f) = \min \left\{ M_{r,1}(f), M_{r,2}(f), \dots, M_{r,n_0-1}(f), \frac{1}{2} \|e_1(1-e_1)f'' - e_1f'\|_r \right\}$$

olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|M_n(f, \cdot) - f\|_r \geq \frac{C_r(f)}{n}$ eşitsizliği sağlanır.

O halde Teorem 3.1.1 ve Teorem 3.2.2 ün sonucu olarak şunu ifade edebiliriz :

Teorem 3.1.1 de yakınsama için bir üst sınır, Teorem 3.2.2 de ise yakınsama için bir alt sınır bulduk. Bu ise tam yakınsama oranının $\frac{1}{n}$ olduğunu gösterir. Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz.

3.2.1. Sonuç

$R > 1$ ve $f : D_R \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu D_R de analitik olsun. Eğer $der(f(z)) = 0$ değilse o zaman $\forall r \in [1, R)$ için

$$\|M_n(f, \cdot) - f\|_r \sim \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$$

dir. Burada sabitler f ve r ye bağlıdır.

3.3. Eşanlı Tip Yaklaşım Özellikleri

Bu kısımda eşanlı yaklaşımın tam yakınsama oranı verilecektir.

3.3.1. Teroem

$R > 1$ ve $f : D_R \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu D_R de analitik ve Taylor açılımı $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ olsun. $1 \leq r < r_1 < R$ ve $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sabitleri için sabitler f, r, r_1, p ye bağlı olmak üzere eğer $der(f(z)) \leq p - 1$ değilse o zaman

$$\|M_n^{(p)}(f, \cdot) - f^{(p)}\|_r \sim \frac{1}{n}$$

dir.

İspat

r_1 yarıçaplı sıfır merkezli bir Γ eğrisi alalım. Burada $r_1 > r \geq 1$ dir. Türevler için Cauchy İntegral formülünden $|z| \leq r$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$M_n^{(p)}(f, z) - f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{M_n(f, u) - f(u)}{(u - z)^{p+1}} du$$

elde edilir. Lemma 3.1.6 (ii) deki

$$|M_n(f, z) - f(z)| \leq \frac{C_r(f)}{n} \quad \text{ve } \forall |z| \leq r \text{ ve } u \in \Gamma \text{ için geçerli olan } |u - z| \geq r_1 - r$$

eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned} \|M_n^{(p)}(f, \cdot) - f^{(p)}\|_r &\leq \frac{p!}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\|M_n(f, \cdot) - f\|_r}{|u - z|^{p+1}} du \\ &\leq \frac{p!}{2\pi (r_1 - r)^{p+1}} \|M_n(f, \cdot) - f\|_r \int_{\Gamma} du \\ &= \frac{p!}{2\pi (r_1 - r)^{p+1}} \|M_n(f, \cdot) - f\|_r 2\pi r_1 \\ &= \frac{p! r_1}{(r_1 - r)^{p+1}} \|M_n(f, \cdot) - f\|_r \\ &\leq \frac{M_{r_1}(f)}{n} \frac{p! r_1}{(r_1 - r)^{p+1}} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle $(M_n^{(p)})$ fonksiyon dizisinin $f^{(p)}$ fonksiyonuna yakınsaması için bir üst sınır elde edildi. Eş. 3.58 eşitsizliğinden $\forall u \in \Gamma$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
& M_n^{(p)}(f, z) - f^{(p)}(z) \\
&= \frac{1}{n} [z(1-z)f''(z) - zf'(z)]^{(p)} \\
&+ \frac{1}{n} \frac{p!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{n^2 \left(M_n(f, u) - f(u) - \frac{u(1-u)f''(u) - uf'(u)}{n} \right)}{(u-z)^{p+1}} du \Bigg]
\end{aligned}$$

olur. Yakınsama için bir de alt sınır elde etmek için her iki tarafın $\|\cdot\|_r$ normu alınır Eş. 3.59 ve Eş. 3.60 dan;

$$\begin{aligned}
& \|M_n^{(p)}(f, \cdot) - f^{(p)}\|_r \\
&\geq \frac{1}{n} \left[\| [e_1(1-e_1)f'' - e_1f']^{(p)} \|_r \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{n} \left\| \frac{p!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{n^2 \left(M_n(f, u) - f(u) - \frac{u(1-u)f''(u) - uf'(u)}{n} \right)}{(u-\cdot)^{p+1}} du \right\|_r \right] \quad (3.61)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 3.61 eşitsizliğinin sağında bulunan ikinci terime Teorem 3.2.1 uygulanırsa da

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{p!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{n^2 \left(M_n(f, u) - f(u) - \frac{u(1-u)f''(u) - uf'(u)}{n} \right)}{(u-\cdot)^{p+1}} du \right\|_r \\
&\leq \frac{p!}{2\pi} \frac{2\pi r_1 n^2}{(r_1 - r)^{p+1}} \left\| M_n(f, \cdot) - f - \frac{e_1(1-e_1)f'' - e_1f'}{n} \right\|_r \\
&\leq \frac{M_{r_1}(f)p!}{(r_1 - r)^{p+1}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Fakat f üzerindeki hipotezden $\| [e_1(1-e_1)f'' - e_1f']^{(p)} \|_r > 0$ dır. Aslında

aksini kabul edersek yani ; $\| [e_1(1-e_1)f'' - e_1f']^{(p)} \|_r = 0$ olsaydı

$[z(1-z)f''(z) - zf'(z)]^{(p)} = 0$ olurdu. $z(1-z)f''(z) - zf'(z) = z[(1-z)f'(z)]'$ olmak üzere $F(z) = (1-z)f'(z)$ denirse $\forall |z| \leq r$ için $[zF'(z)]^{(p)} = 0$ olurdu.

$$[zF'(z)]' = F'(z) + zF''(z)$$

$$\left[zF'(z) \right]'' = 2F''(z) + zF'''(z)$$

$$\left[zF'(z) \right]''' = 3F'''(z) + zF^{(4)}(z)$$

⋮

$$\left[zF'(z) \right]^{(p)} = pF^{(p)}(z) + zF^{(p+1)}(z)$$

olmak üzere $\forall |z| \leq r$ için $zF^{(p+1)}(z) + pF^{(p)}(z) = 0$ olurdu. $G(z) = F^{(p)}(z)$ denirse $\forall |z| \leq r$ için $zG'(z) + pG(z) = 0$ dır. Burada $f, |z| \leq r$ de analitik olduğu için her mertebeden türevli olup bu türevlerde bu bölgede analitiktir. O halde $F^{(p)}(z)$ de $|z| \leq r$ de analitik olup $G(z)$ fonksiyonunda bu bölgede analitiktir. Dolayısıyla $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ biçimde ifade edilebilir. Bu durumda $\forall |z| \leq r$ için

$$zG'(z) + pG(z) = z \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} + p \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

$$= p a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} p a_k z^k$$

$$= 0$$

olur. Polinomların eşitliğinden $a_0 = 0$ ve $a_k(p+k) = 0$ dan $\forall k \in \mathbb{N}$ için $a_k = 0$ dır. O halde $\forall |z| \leq r$ için $G(z) = 0$ olup $\text{der}[F(z)] \leq p-1$ dir. Bu ise hipotezle çelişir. Bu durumda $\left\| \left[e_1(1-e_1)f'' - e_1f' \right]^{(p)} \right\|_r > 0$ olup Teorem 3.2.2 nin ispatından

istenilen sonuç elde edilir.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Eş. 3.1 de tanımlanan kompleks Durrmeyer Operatörlerinin yaklaşım özellikleri incelendi. Sonuç olarak, operatörlerin fonksiyona yakınsama oranı ve Voronovskaja tip asimptotik yaklaşım oranı sayısal bir tahminle elde edildi. Tam yakınsama oranı eşanlı yaklaşımda sayısal tahminlerle verildi. Eş. 3.1 de verilen operatörlerin farklı modifikasyonları tanımlanıp benzer sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

1. Altomare , F. And Campiti , M. (1994). Korovkin Type Approximation Theory and Its Applicationa. **Walter de Gruyter** , Berlin-New York , 195-352.
2. Korovkin, P. P. (1960). Linear Operators and Approximation Theory. **Hindustan Publishing Corp.(İndia)** , Delhi , 1-66.
3. Bernstein , S. (1912-1913). Démonstration du théorème de Weierstrass, fondée sur le calculs probabilités. **Commun. Soc. Math. Kharkow(2)**, 13: 1-2.
4. Gupta, V. and Maheshwari, P. (2003). Beizer Variant of a new Durrmeyer type operators. **Rev. Mat. Univ. Parma**, 7(2): 9-21.
5. Lorentz, G. G. (1986). Bernstein polynomials(2nd Edition). **Chelsea Publ. Comp.** , New York, 12-27.
6. Sorin G. G. and Gupta V. (2000). Approximation by a Durrmeyer-type operator in compact disks. **Mathematics Subjects Classification**.
7. Anastassiou, G. A. and Gal, S. G. (2010). Approximation by complex Bernstein-Durrmeyer polynomials in compact disks. **Mediterranean J. Math.** ,7(4): 471-482.
8. Gal, S. G. (2010). Approximation by complex genuine Durrmeyer type polynomials in compact disks. **App. Math. Comput.** , 217, 1913-1920.
9. Hacısalihoğlu, H. , Hacıyev, A. (1995). Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı. **A. Ü. Fen Fakültesi Yayınları**, Ankara, 1-100.
10. Korovkin, P. P. (1953). On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. **Dokl. Akad. Nauk. SSSR(N.S.)**, 90: 961-964.
11. Dönmez, A. (1999). Karmaşık Fonksiyonlar Kuramı. **Beta Yayıncılık**, İstanbul.
12. Başkan, T. (2010). Kompleks Fonksiyonlar Teorisi. **Nobel Yayıncılık**, Bursa, 65-218.
13. Özkın, İ. K. (1989). Kompleks Fonksiyonlar Teorisi Ders Notları. **A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları** , Ankara,105-110, 255-259.
14. Gal, S. G. (2009). Approximation by complex Bernstein and convolution type operators. **Series on Concrete and Applicable Mathematics-Vol.8**, University of Oradea, Romania.
15. Tomescu , I. and Melter, A.R. (1985). Problems in Combinatorics and Graph Theory. **A Wiley-Interscience Publication**, New York, 12-14.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : BULUT, Mutlu
 Uyruğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 07.09.1987, Ankara
 Medeni hali : Bekâr
 Telefon : 0 (312) 330 21 08
 Cep : 0 (536) 465 69 54
 e-mail : mutlu_bulut87@hotmail.com



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi /Fen bilimleri Ens.	Devam Ediyor
Lisans	Ankara Üniversitesi/Matematik	2011
Lise	Yahya Kemal Beyatlı Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi	2005

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2007-2012	Barış Şahin Dershanesi	Matematik Öğretmeni
2013-	Serdar Dershanesi	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Kitap okumak, Bilgisayar Teknolojileri, Gezi



GAZİ GELECEKTİR...