GAZİ ÜNİVERSİTESİ

1926

DUAL UZAYDA BİR EĞRİ VE ONUN TABİİ LİFT EĞRİSİNİN DARBOUX VEKTÖRLERİ TARAFINDAN OLUŞTURULAN REGLE YÜZEY ÇİFTLERİ

TUĞBA BAYSAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AĞUSTOS 2019

Tuğba BAYSAL tarafından hazırlanan "DUAL UZAYDA BİR EĞRİ VE ONUN TABİİ LİFT EĞRİSİNİN DARBOUX VEKTÖRLERİ TARAFINDAN OLUŞTURULAN REGLE YÜZEY ÇİFTLERİ" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi MATEMATİK Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN ……………….……..

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Başkan: Prof. Dr. F. Nejat EKMEKÇİ ...…………………

Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Doç. Dr. Cüneyt ÇEVİK ...…………………

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Tez Savunma Tarihi: 21/08/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu çalışmanın Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum

…………………….…….

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

………………..

Tuğba BAYSAL

21/08/2019

DUAL UZAYDA BİR EĞRİ VE ONUN TABİİ LİFT EĞRİSİNİN DARBOUX VEKTÖRLERİ TARAFINDAN OLUŞTURULAN REGLE YÜZEY ÇİFTLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Tuğba BAYSAL

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ağustos 2019

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde, giriş kısmı verilmiştir. İkinci bölümde regle yüzeyler ve dual uzayla ilgili temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde IR^3 de birim hızlı bir eğrinin Frenet çatısındaki vektörlerin ve Darboux vektörlerinin birim küre üzerinde oluşturdukları gösterge eğrilerine karşılık gelen regle yüzeylerin striksiyon eğrileri ve dağılma parametreleri hesaplanmıştır. Dördüncü bölüm tezin orijinal kısmıdır. Bu bölümde birim dual küre üzerindeki birim hızlı bir eğrinin Frenet çatısındaki vektörlerin ve Darboux vektörlerinin birim küre üzerinde oluşturdukları gösterge eğrilerine karşılık gelen regle yüzeylerin sitriksiyon eğrileri ve dağılma parametreleri hesaplanmıştır. Beşinci bölümde ise tezde elde edilen bulgularla ilgili sonuçlar verilmiştir.

Bilim Kodu	:	20402
Anahtar Kelimeler	:	Dual Uzay, Regle Yüzey, Tabii Lift Eğrisi
Sayfa Adedi	:	44
Danışman	:	Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN

RULED SURFACE PAIR GENERATED BY DARBOUX VECTORS OF A CURVE AND ITS NATURAL LIFT IN DUAL SPACE

(M. Sc. Thesis)

Tuğba BAYSAL

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

August 2019

ABSTRACT

This thesis consists of five sections. The first sections is devoted to the introduction. In the second section, some main concepts about ruled surface and dual space have been given. In the third part, the friction curves and dispersion parameters of the ruled surfaces corresponding to the indicator curves formed by the unit vectors of the Frenet vectors and Darboux vector of a unit fast curve in Euclidean space are given. Fourth section is the original part of the thesis. In this section, distribution parameters and striction curves of ruled surfaces in E^3 which are formed by representation curves of dual unit Frenet vectors and Darboux vector of a unit speed curve on dual unit sphere are calculated. In the fifth section, obtained conclusions are discussed.

Science Code	:	20402
Key Words	:	Dual Space, Ruled Surface, Natural Lift Curve
Page Number	:	44
Supervisor	:	Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımda danışmanlığımı yapan ve benden değerli yardımlarını esirgemeyen kıymetli Öğretmenim Sayın Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN’ a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca değerli öğretmenlerim Emel KARACA ve Anıl ALTINKAYA öğretmenime sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Tüm öğrenim hayatım boyunca her türlü fedakârlığı gösteren, desteklerini eksik etmeyen, başta annem ve babam olmak üzere değerli aileme ve dostlarıma teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT..v

TEŞEKKÜR..vi

İÇİNDEKİLER vii

ŞEKİLLERİN LİSTESİ viii

SİMGELER VE KISALTMALAR..ix

1. GİRİŞ..1

2. TEMEL KAVRAMLAR...3

2.1. Regle Yüzey İle İlgili Temel Kavramlar...3

2.2 Dual Uzay İle İlgili Temel Kavramlar 17

2.3 Dual Uzayda Regle Yüzeyler...26

3. IR^3 de BİR EĞRİ ve ONUN TABİİ LİFT EĞRİSİNİN KÜRESEL GÖSTERGELERİ ve DARBOUX VEKTÖRLERİ TARAFINDAN OLUŞTURULAN REGLE YÜZEY ÇİFTLERİ 29

4. DUAL UZAYDA BİR EĞRİ VE ONU TABİİ LİFT EĞRİSİNİN KÜRESEL GÖSTERGELERİ TARAFINDAN OLUŞTURULAN REGLE YÜZEY ÇİFTLERİ...33

5. SONUÇ VE ÖNERİLER 41

KAYNAKLAR 43

ÖZGEÇMİŞ 39

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

Şekil 2.1. IR de bir eğri 3

Şekil 2.2. Striksiyon Noktaları 11

Şekil 2.3. Dağılma parametresi 14

Şekil 2.3.Geometrik Olarak Dual Açı 25

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Kısaltmalar	**Açıklamalar**
$\mathbf{E^n}$	n-boyutlu Öklid uzayı
$\boldsymbol{\chi}$	Öklid Uzayındaki Regle Yüzey
$\mathbf{P_a}$	χ' in drali
$\boldsymbol{\beta}$	χ' in striksiyon çizgisi
$\boldsymbol{\phi}$	Genelleştirilmiş regle yüzey
ID	Dual sayılar cümlesi
$\mathbf{ID^3}$	Dual sayılar halkası üzerinde ID-Modül
$\mathbf{K/K'}$	1-parametreli dual küresel hareket
$(\overrightarrow{\boldsymbol{U_1}})$	Dual regle yüzey
$<,>$	İç çarpım
Λ	Dış çarpım
$\lVert \quad \rVert$	Norm
$\boldsymbol{\kappa}$	Eğrilik
$\boldsymbol{\tau}$	Torsiyon
W	Darboux vektörü

1. GİRİŞ

Eğriler ve yüzeyler, diferansiyel geometride önemli yer tutmaktadır. Diferansiyel geometride, fizikte, bilgisayar modelleme gibi pek çok kullanım alanlarında kullanılan regle yüzeyler; bir doğrunun bir eğri boyunca hareketiyle meydana gelir. Literatürde regle yüzeylerle ilgili pek çok çalışma bulunmaktadır.

IR^3 te regle yüzeylerle ilgili temel kavram ve teoremler [1], [2] numaralı kaynaklarda bulunmaktadır. Bu kitaplardan, dağılma parametreleri, striksiyon eğrileri, regle yüzeyin integral invaryantları açıklanmıştır.

Tabii lift eğrisi tanımı ilk olarak J.A. Thorpe'nin kitabında verilmiştir [3]. Genel haliyle tabii lift eğrisi, bir eğrinin her noktasındaki teğetlerinin uç noktalarının birleştirilmesiyle elde edilen eğri olarak tanımlanır.

[4] numaralı çalışmada, IR^3 te esas eğrinin ve onun tabii lift eğrisinin ürettiği regle yüzeylerle ilgili bazı karakterizasyonlar verilmiştir. Esas eğrinin ve tabii lift eğrisinin ürettiği regle yüzey çiftinin dağılma parametresi, striksiyon eğrisi hesaplanmıştır.

Dual sayılar, 1873 yılında W.K. Clifford tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra E. Study tarafından çizgiler uzayı ile dual uzay arasında bir geçiş özelliği gösteren E. Study dönüşümü verilmiştir [5]. E. Study dönüşümüne göre birim dual küre üzerindeki noktalara IR^3 te yönlü doğrular karşılık gelir. Dual uzayla ilgili, [6] numaralı kaynakta temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Dual uzayda kapalı regle yüzeylerin integral invaryantları [7] numaralı çalışmada ele alınmıştır.

Bu tez çalışmasında, dual uzayda bir eğri ve onun tabii lift eğrisinin ürettiği regle yüzeylerle ilgili bazı karakterizasyonlar verilmiştir. Bir eğrinin küresel göstergelerinin ürettiği regle yüzeylerin dağılma parametreleri, striksiyon eğrileri hesaplanmıştır. Elde edilen bulgular birbirleriyle karşılaştırılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Regle Yüzey İle İlgili Temel Kavramlar

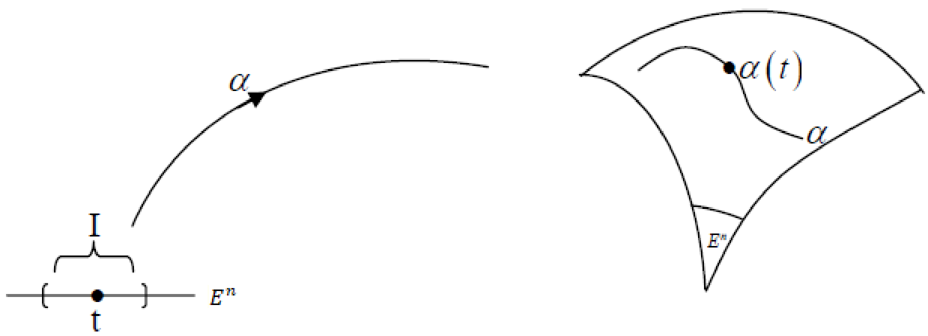
Tanım

I, IR nin bir açık alt aralığı olmak üzere,

$$\begin{aligned} \alpha: I &\longrightarrow E^n \\ t &\longmapsto \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t)) \end{aligned}$$

biçiminde düzgün (C^∞ sınıfından) bir α dönüşümüne, IR uzayında bir eğri denir [5].

$I \subseteq IR$ bir açık aralık olmak üzere, (I,α) koordinat komşuluğu ile tanımlanan $\alpha(I) \subseteq IR$ eğrisini bundan sonra α ile göstereceğiz.



Şekil 2.1. IR de bir eğri

Tanım

E^n de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha: I \longrightarrow E^n$ fonksiyonunun Öklidyen koordinat fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ olmak üzere,

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n), \alpha(t) \in M$$

ve

$$\alpha'(t) = \alpha_* \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_t, \qquad \alpha_* = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial \alpha_n}{\partial t} \end{bmatrix},$$

$$\alpha'(t) = \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial t}\bigg|_t, \dots, \frac{\partial \alpha_n}{\partial t}\bigg|_t\right)$$

dir. $\big(\alpha(t), \alpha'(t)\big) \in T_{E^n}\big(\alpha(t)\big)$ tanjant vektörüne, M eğrisinin $t \in I$ parametresine karşılık gelen $\alpha(t)$ noktasında hız vektörü denir [5].

<u>Tanım</u>

M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Eğer $\forall\ s \in I$ için,

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

ise M eğrisine (I, α) koordinat komşuluğuna göre birim hızlı eğri denir. Bu durumda, s∈I parametresine eğrinin yay-parametresi adı verilir [5].

<u>Tanım</u>

M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile gösterilsin. a, b∈I için a dan b ye α eğrisinin yay uzunluğu diye, eğrinin α(a) ve α(b) noktaları arasındaki uzunluğunu veren

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt, t \in I$$

reel sayısına denir [5].

<u>Tanım</u>

$\alpha: I \longrightarrow E^n$ eğrisi verildiğinde $\forall\ t \in I$ için

$$\alpha(t + p) = \alpha(t)$$

olacak şekilde en az bir p pozitif tam sayısı varsa α eğrisine kapalıdır denir.

Tanım

E^n üzerindeki bir eğrinin hız vektörü sıfırdan farklı ise bu eğriye regüler eğri denir [5].

Tanım

$M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile gösterilsin. Bu durumda,

$$\psi = \left\{\alpha', \alpha'', \alpha''', \dots, \alpha^{(r)}\right\}$$

sistemi lineer bağımsız ve $\forall\ \alpha^{(k)}, k > r$, için;

$$\alpha^{(k)} \in Sp\{\psi\}$$

olmak üzere, ψ den elde edilen $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin Serret-Frenet r-ayaklı alanı ve herhangi bir m∈M için $\{V_1(m), V_2(m), \dots, V_r(m)\}$ ye ise m∈M noktasındaki Serret-Frenet r-ayaklısı denir. Her bir $1 \leq i \leq r$ için V_i ye i-yinci Serret-Frenet vektörü adı verilir [5].

Özel Hal

n = 3 özel halinde, E^3 , 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet 2-ayaklısı ve Frenet 3-ayaklısı elde edilir. Bu özel halde; M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilmiş ise s∈I yay-parametresi olmak üzere,

$$T = \alpha', \quad N = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|}, \quad B = T \times N$$

dir. Böylece {T (s), N (s), B (s)} sistemi, α (s) noktasında, M eğrisinin Frenet 3-ayaklısıdır [5].

Teorem

(I, α) koordinat komşuluğu ile $M \subset E^n$ eğrisi verilsin. $t \in I$ için α (t) noktasındaki Frenet 3-ayaklısı, {T (s), N (s), B (s)} ise

$$T(t) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|}\alpha'(t)\ ,\ \ N(t) = B(t) \times T(t) \quad B = \frac{1}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}(\alpha'(t) \times \alpha''(t))$$

dir [5].

Tanım

$M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile ifade edilsin. $s \in I$ parametresine karşılık gelen α (s) noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1(m), V_2(m), \dots, V_r(m)\}$

$$k_i : I \longrightarrow IR\ \ , 1 \leq i \leq r$$
$$s \longmapsto k_i(s) = V_i'(s), V_{i+1}(s)$$

şeklinde verilen k_i fonksiyonuna M eğrisinin i-yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da α (s) noktasındaki M eğrisinin i-yinci eğriliği denir [5].

Teorem

$M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay-parametresi olmak üzere, $\alpha(s)$ noktasındaki i-yinci eğriliği $k_i(s)$ ve Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ ise

I. $V_1'(s) = k_1(s)V_2(s)$,
II. $V_i'(s) = -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s)$, $1 \leq i \leq r$,
III. $V_r'(s) = -k_{r-1}(s)V_{r-1}(s)$

dir. $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ Frenet r-ayaklısının vektörlerinin eğri boyunca kovaryant türevleri ile ilgili eşitlikleri, matris formunda

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \\ \vdots \\ V_{r-2}' \\ V_{r-1}' \\ V_r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & k_{r-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -k_{r-2} & 0 & k_{r-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -k_{r-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{r-2} \\ V_{r-1} \\ V_r \end{bmatrix} \qquad (2.1)$$

biçiminde yazılabilir. (2.1) eşitliklerine Frenet formülleri denir [5].

Özel Hal n = 3 özel halinde (2.1) eşitliği

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \text{ veya } \begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu halde 1-inci eğrilik olan $k_1(s)$ değeri sadece eğrilik adıyla ve 2-inci eğrilik olan $k_2(s)$ değeri de burulma (torsiyon) adıyla bilinir [5].

Teorem

$M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay-parametresi olmak üzere, $\alpha(s)$ noktasındaki i-yinci eğriliği $k_i(s)$ ve Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ ve

$$E_i(s) = \alpha^{(i)}(s) - \sum_{j<i} \langle \alpha^{(i)}(s), V_j(s) \rangle V_j(s), \qquad 1 \le i \le r$$

olmak üzere

$$k_i(s) = \frac{\|E_{i+1}(s)\|}{\|E_i(s)\|}, \qquad 1 \le i \le r$$

dir [5].

Teorem

$M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $t \in I$ yay parametresi olmak üzere, $\alpha(t)$ noktasındaki i-yinci eğriliği $k_i(t)$ ve Frenet r-ayaklısı $\{V_1(t), V_2(t), \dots, V_r(t)\}$ ve

$$F_i(t) = \alpha^{(i)}(t) - \sum_{j<i} \langle \alpha^{(i)}(t), V_j(t) \rangle V_j(t), \qquad 1 \leq i \leq r$$

olmak üzere

$$k_i(t) = \frac{\|F_{i+1}(t)\|}{\|F_1(t)\| \|F_i(t)\|}, \qquad 1 \leq i \leq r$$

dir [5].

Tanım

E^3'teki bir α eğrisi üzerinde $\alpha(s)$ noktası eğriyi çizerken bu noktadaki {T,N,B} Frenet 3-ayaklısının her s-anında, (bir eksen etrafında) ani bir helis hareketi yaptığı kabul edilir ve bu eksene eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki Darboux (ani dönme) ekseni denir. Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektör,

$$W(s) = \tau T(s) + \kappa B(s)$$

şeklinde olur ve bu vektöre Darboux vektörü denir [4].

Tanım

Bir $M \subset E^3$ yüzeyi verilsin. $\forall\ P \in M$ noktasında E^3 ün tamamen M de kalan bir doğrusu varsa M ye bir regle yüzey ve $P \in M$ noktasından geçen, M'nin içinde kalan bu doğruya da regle yüzeyin doğrultmanı denir [4].

Tanım

Regle yüzeylerin parametrik denklemini elde etmek için yüzey üzerinde bulunan ve doğrultmanları kesen diferensiyellenebilir bir

$$\begin{aligned} \alpha : I &\longrightarrow E^3 \\ t &\longmapsto \alpha(t) \end{aligned}$$

eğrisi alalım. Bu eğriye regle yüzeyin dayanak eğrisi denir. M regle yüzeyinin α dayanak eğrisinin α(t) noktasındaki doğrultmanı üzerindeki değişken bir nokta β ve $a(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$ birim doğrultmanı olmak üzere,

$$\begin{aligned} \beta: IR &\rightarrow M \\ v &\longmapsto \beta(v) = \alpha(t) + va(t) \end{aligned}$$

şeklindedir. Böylece regle yüzeyin parametrik denklemi

$$\begin{aligned} \chi: I\times IR &\rightarrow E^3 \\ (t, v) &\longmapsto \chi(t, v) = \alpha(t) + v\alpha(t) \end{aligned}$$

dönüşümü ile verilir [4].

Tanım

Bir

$$\begin{aligned} \chi : I\times IR &\rightarrow E^3 \\ (t, v) &\longmapsto \chi(t, v) = \alpha(t) + v\alpha(t) \end{aligned}$$

regle yüzeyi, $\forall\ t\in I$ için

$$\chi(t + 2\pi, v) = \chi(t, v)$$

olacak şekilde periyodik ise χ ye kapalı regle yüzey denir. Kapalı regle yüzeylerin dayanak eğrileri de kapalı eğrilerdir, yani bir peryot sonra her ana doğru kendisi üzerine gelir [4].

Tanım

Bir $\chi(t, v)$ regle yüzeyinin anadoğrularının her birini dik olarak kesen eğriye regle yüzeyin ortogonal yörüngesi denir ve

$$\langle \alpha, d\chi \rangle = 0$$

şeklinde bulunur [4].

Tanım

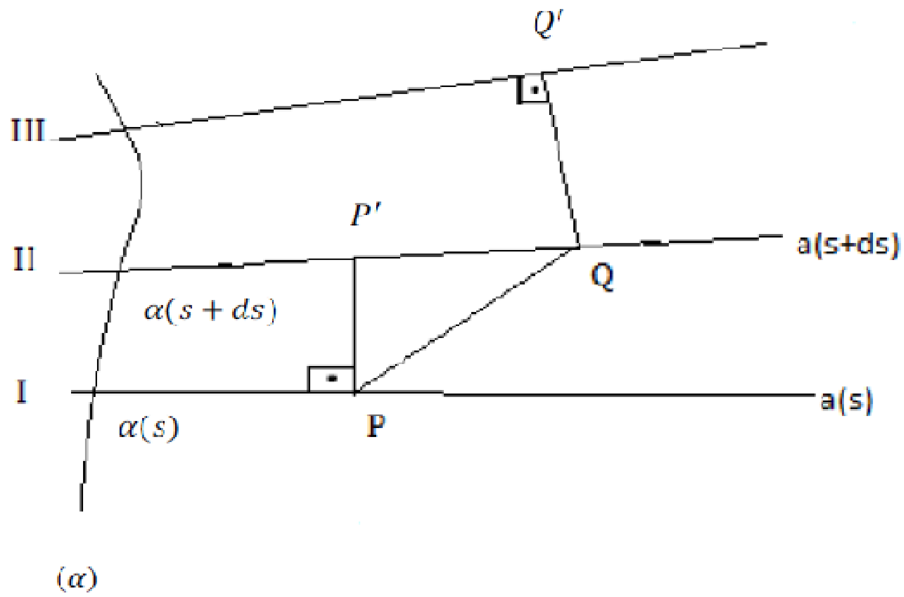
Bir $\chi(t, v)$ regle yüzeyinin iki komşu doğrultmanının ortak dikmesinin esas doğrultman üzerindeki ayağına boğaz (striksiyon, merkez) noktası denir [4].

Tanım

Bir $\chi(t, v)$ regle yüzeyinin anadoğrusu dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin boğaz (striksiyon) çizgisi (eğrisi) denir [4].
$\chi(s, v)$ regle yüzeyinin merkez noktasının η yer vektörü; dayanak eğrisinin $\alpha(s)$ yer vektörü, a(s) doğrultman vektörü ve yer vektörünün dayanak eğrisine olan v uzaklığı cinsinden

$$\beta(s, v) = \alpha(s) + va(s) \tag{2.1.1}$$

şeklinde gösterilebilir. v parametresi regle yüzeyin dayanak eğrisinin yer vektörü ve doğrultman türünden bulunur. Regle yüzeyin ilk ikisi, a(s) ve a(s)+da(s) olan komşu üç doğru verilsin.



Şekil 2.2. Striksiyon Noktaları

P, P' ve Q, Q' komşu anadoğruların ortak dikmelerinin anadoğrular üzerindeki ayakları olsunlar. İlk iki komşu anadoğrunun ortak dikmesi,

$$a(s) \wedge [a(s) + a'(s)ds] = a(s) \wedge a'(s)ds$$

bağıntısından dolayı $a \wedge a'$ vektörüne paraleldir. Limit halinde PQ vektörü PP' ile çakışak ve boğaz çizgisinin teğeti olacaktır. Dolayısıyla

$$\langle a, PQ\rangle = 0, \langle a + a'ds, PQ\rangle = 0 \tag{2.1.2}$$

olacağından

$$\langle a', PQ\rangle = 0$$

elde edilir. Ayrıca Eş. (2.1.1) den α eğrisinin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\eta}{ds} = T + \frac{dv}{ds}a + v\frac{da}{ds}$$

olur. Eş. (2.1.2) de yerine yazılırsa

$$\langle \frac{da}{ds}, \frac{d\eta}{ds} \rangle$$

olacağından

$$\langle \frac{da}{ds}, T + \frac{dv}{ds} a + v \frac{da}{ds} \rangle = 0$$

$$\Longrightarrow \langle a', T \rangle + v \|a'\|^2 = 0 \Longrightarrow v = \frac{\langle a', T \rangle}{\|a'\|^2}$$

bulunur. Böylece striksiyon eğrisinin yer vektörü için Eş. 2.1.1 de

$$\beta(s) = a(s) - \frac{\langle a', T \rangle}{\|a'\|^2} a(s) \qquad (2.1.3)$$

elde edilir. Eğer $\|a'\| = 0$ ise striksiyon eğrisine sahip değildir regle yüzey. Bu hal regle yüzeyin silindir olmasını ifade eder. Bu durumda regle yüzey için striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olarak alınabilir. Bunun için Eş. 2.1.3 de

$$v = 0, \qquad \langle a', T \rangle = 0$$

alınması yeterlidir.

Tanım

Bir $\chi(s, v)$ regle yüzeyinin bir ana doğrusunu kapsayan ve yüzey normaline dik olan düzleme teğet düzlem denir.

$$\chi(s, v) = a(s) + v\alpha(s)$$

regle yüzeyinin s ve v ye göre kısmi türevleri alınırsa.

$$\chi_s = T + va', \qquad \chi_v = a(s)$$

elde edilir. Buradan

$$\chi_s \wedge \chi_v = T + va'(s) \wedge a(s),$$
$$\Longrightarrow \chi_s \wedge \chi_v = T \wedge a(s) + va'(s) \wedge a(s)$$

olur. Ayrıca yüzey normali

$$N = \frac{\chi_s \wedge \chi_v}{\|\chi_s \wedge \chi_v\|} = \frac{1}{\|\chi_s \wedge \chi_v\|}\big(T \wedge a(s) + va'(s) \wedge a(s)\big) \tag{2.1.4}$$

olduğundan ve μ sabit olmak üzere teğet düzlemin bir noktasındaki vektörel denklemi

$$\langle \mu a, N \rangle = 0$$

veya Eş. 2.1.4 ten

$$\det(\mu a, T + va', a) = 0$$

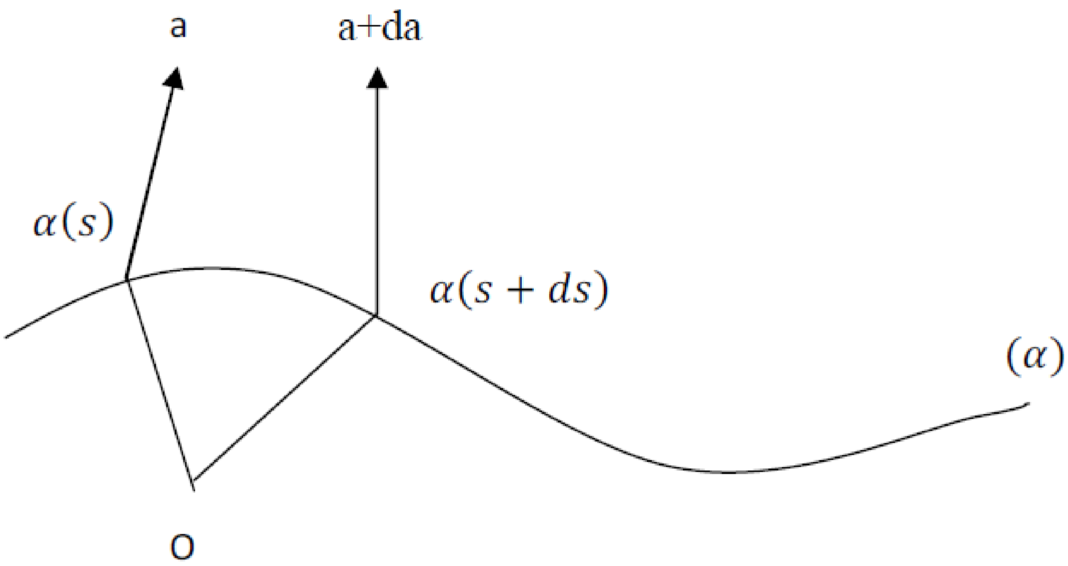
olarak bulunur [4].

Tanım

Bir $\chi(s, v)$ regle yüzeyinin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı kalıyorsa regle yüzeye açılabilirdir denir [4].

Tanım

Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu komşu iki anadoğrular arasındaki açıya oranına regle yüzeyin dağılma parametresi(drali) denir [4].



Şekil 2.3. Dağılma parametresi

Anadoğruların birim doğrultman vektörü α olan bir regle yüzeyin dağılma parametresi P_α olmak üzere

$$P_e = \frac{\det(\alpha', e, e')}{\|e'\|^2}$$

şeklinde hesaplanır. Dral regle yüzeyler için koordinat değişimlerine göre en basit diferensiyel invaryanttır.

<u>Teorem</u>

Bir $\chi(s,v)$ regle yüzeyi açılabilirdir gerek ve yeter şart dağılma parametresi sıfırdır [4].

<u>İspat:</u>

Regle yüzeyin açılabilir olması için ana doğrular boyunca teğet düzlemin, dolayısıyla yüzey normallerinin, aynı kalması gerekir. Regle yüzeyin

$$\chi(s,v) = \alpha(s) + ve(s)$$

denkleminden s ve v parametrelerine göre kısmi türev alınırsa

$\chi_s = t + vD_t e$
$\chi_v = e(s)$

elde edilir. Buradan

$\chi_s \Lambda \chi_v = (t + vD_t e) \Lambda e$
$\chi_s \Lambda \chi_v = t \Lambda e + vD_t e \Lambda e$

ve ayrıca yüzey normali

$$N = \frac{\chi_s \Lambda \chi_v}{\|\chi_s \Lambda \chi_v\|}$$

olduğundan N nin anadoğru boyunca değişmemesi için v parametresinden bağımsız olması gerekiyor. Bu nedenle T Λ e ve $vD_T e$ Λ e vektörleri lineer bağımlı olmalıdır. Böylece
$(T \Lambda e) \Lambda (vD_T e \Lambda e) = 0$
$e\big(\det(T, D_T e, e)\big) - T(\det[T, D_T e, e]) = 0$
$e\big(\det(T, D_T e, e)\big) = 0$
$\det(T, D_T e, e) = 0, \det\left[\frac{d\alpha}{ds}, e, D_T e\right] = 0$

veya

$P_e = 0$

elde edilir. Bir regle yüzey bir doğru ailesi tarafından bir yüzey oluşturur ve parametrik bir gösterime sahiptir.

$\chi(s, v) = \alpha(s) + ve(s).$

Burada $\alpha(s)$ dayanak eğrisi olarak adlandırılan bir uzay eğrisini temsil eder ve e düz bir çizginin yönünü temsil eden bir birim vektördür.

Tanım

$M \subset E^3$ de bir yüzey α:I→M birim hızlı bir eğri ve M üzerinde diferansiyellenebilir bir vektör alanı χ olsun.

$$\frac{d}{ds}\big(\alpha(s)\big) = \chi\big(\alpha(s)\big), \qquad \forall\, t \in I$$

eşitliğiyle tanımlanan α eğrisine χ in bir integral eğrisi denir. χ, M üzerinde tanjant vektör alanıdır. M yüzeyinin P noktasındaki tanjant uzayı

$$TM = \bigcup_{P \in M} T_P M = \chi(M)$$

dir. $T_P M$ vektör uzayı alanı $\chi(M)$ dir [1].

Tanım

α:I→M birim hızlı bir eğri, $\overline{\alpha}$ bir eğri

$$\overline{\alpha}(s) = \alpha'(s)|_{\alpha(s)} = \big(\alpha(s), \alpha'(s)\big)$$

eşitliğiyle tanımlı eğriye α eğrisinin TM üzerindeki tabii lift eğrisi denir.

$$\frac{d\overline{\alpha}}{ds} = \frac{d}{ds}\Big(\alpha'^{(s)}\big|_{\alpha(s)}\Big) = D_{\alpha'(s)}\alpha'^{(s)}$$

D, R^3 de Levi-Civita konneksiyonudur [1].

2.2 Dual Uzay İle İlgili Temel Kavramlar

Tanım

ID cümlesi üzerinde A= (a, a^*) ve B= (b, b^*) olarak verilsin toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri, sırasıyla,

$\oplus$: ID x ID → ID

$(A, B) \rightarrow A \oplus B = (a, a^*) \oplus (b, b^*) = (a + b, a^* + b^*)$,

$\odot$: ID x ID → ID

$(A, B) \rightarrow A \odot B = (a, a^*) \odot (b, b^*) = (ab, a^*b + ab^*)$

ve

$A = B \Leftrightarrow a = b, a^* = b^*$

şeklinde ifade edilir [7].

Tanım

ID= IR× IR kümesi üzerinde toplamayı, çarpmayı ve eşitlik işlemlerini yukarıdaki gibi tanımlayan kümeye dual sayılar kümesi ve $\forall\ (a, a^*) \in$ ID elemanına da bir dual sayı denir [7].

Teorem

(ID, $\oplus$, $\odot$) birimli, değişmeli bir halkadır ancak cisim değildir [7].

Tanım

$A \oplus X=B$ denkleminin tek bir çözümü vardır. Tanım 2.2 den

$(a+x, a^*+x^*)=(b, b^*)$

ve yine Tanım 2.2.2 den X=B-A=(b-a, b^*- a^*)∈ ID elde edilir [7].

Tanım

A ⊕ X=B denkleminin çözümü olan dual sayıya ID nin sıfırı denir. 0 = (0, 0) ile gösterilir [7].

Teorem

ID dual sayılar halkası, IR reel sayılar kümesine izomorf bir alt kümeyi alt cisim olarak kapsar [7].

Tanım

Teorem 2.2.3'ün sonucu olarak (a, 0) sayısı, izomorfu olduğu "a" reel sayısı ile gösterilir. Yani (a,0)=a dır [7].

Tanım

Bir A = (a, a ∗) ∈ ID dual sayısının reel ve dual kısmı

Re(A) = a, Du(A) = a^*

şeklinde gösterilir [7].

Tanım

(1, 0) = 1 dual sayısına ID deki çarpma işleminin reel birimi veya birim elemanı denir [7].

Tanım

(0, 1) dual sayısı kısaca ε ile gösterilir. Yani (0, 1)=ε alınır ve ID deki dual birim olarak isimlendirilir [7].

<u>Sonuç</u>

Tanım 2.2 gereği

$\varepsilon \odot \varepsilon = \varepsilon^2 = (0, 1) \odot (0,1) = (0, 0)$

olduğu görülür [7].

<u>Tanım</u>

$(0,0) \in ID$ dual sayısına ID nin $\oplus$ işlemine göre birim elemanı (abel grubunun birim elemanı) denir ve

$f: ID \rightarrow IR$

İzomorfizminde karşılık geldiği ”0” reel sayısı ile gösterilir [7].

<u>Teorem</u>

$A=(a,a^*) \in ID$ dual sayısı

$A = a + \varepsilon a^*$

şeklinde ifade edilebilr. Yani

$(a, a^*) = a + \varepsilon a^*$

dır [7].

<u>Teorem</u>

$A=(a,a^*)$ bir dual sayısı ve $\lambda \in IR$ ise λ ile A nın çarpımı $\lambda A = (\lambda a, \lambda a^*)$ dır [7].

Tanım

λ reel sayısı ile A dual sayısının çarpımı

$IR \times ID \rightarrow ID$

şeklinde tanımlı dış işlem, bir dual sayının bir reel skalerle çarpımı adını alır [7].

Tanım

$ID^3 = ID \times ID \times ID = \{A = (A_1, A_2, A_3): A_i \in ID, 1 \leq i \leq 3\}$ cümlesi üzerinde toplama ve skaler ile çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanır [7]:

$$+ : ID^3 \times ID^3 \rightarrow ID^3$$
$$(A, B) \rightarrow A + B = (A_i) + (B_i) = (A_i + B_i)$$
$$. : ID \times ID^3 \rightarrow ID^3$$
$$(\lambda, A) \rightarrow \lambda.A = (\lambda A_i).$$

Teorem

$(ID^3, +)$ bir değişmeli gruptur [7].

Teorem

$(ID^3, +, \cdot)$ ID dual sayılar halkası üzerinde bir Modül' dür (8). Bu modül kısaca ID-Modül şeklinde gösterilir.

Tanım

ID-Modülün elemanları olan dual sıralı üçlülere dual vektörler denir [7].

<u>Tanım</u>

$\vec{a}, \overrightarrow{a^*} \epsilon IR^3$ olmak üzere ID-Modülde her bir $\vec{A}$ dual vektörü,

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \overrightarrow{a^*}$, $\varepsilon = (0, 1) \in ID$

şeklinde yazılabilir [7].

<u>Teorem</u>

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \overrightarrow{a^*} = \left(\vec{a}, \overrightarrow{a^*}\right)$ dual vektörünün $\lambda \epsilon$ ID skaleri ile çarpımı

$\lambda A = \left(\lambda \vec{a}, \lambda \overrightarrow{a^*}\right)$

dır [7].

<u>Teorem</u>

$\vec{A} = \left(\vec{a}, \overrightarrow{a^*}\right)$ ve $\vec{B} = \left(\vec{b}, \overrightarrow{b^*}\right) \in ID^3$ için

$\vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b}$ ve $\overrightarrow{a^*} = \overrightarrow{b^*}$

dır [7].

<u>Tanım</u>

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \overrightarrow{a*}$, $\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon \overrightarrow{b*} \in$ ID-Modül vektörlerinin iç çarpımı

$< , > : ID^3 \times ID^3 \rightarrow ID^3$

$$(\vec{A}, \vec{B}) \rightarrow <\vec{A}, \vec{B}> = <\vec{a} + \varepsilon \overrightarrow{a*}, \vec{b} + \varepsilon \overrightarrow{b*}>$$

$$= <\vec{a}, \vec{b}> + \varepsilon(<\vec{a}, \overrightarrow{b*}> + <\overrightarrow{a*}, \vec{b}>)$$

şeklinde tanımlanır. Bir reel vektör uzayı üzerinde olduğu gibi iç çarpım aksiyomları ID-Modül üzerinde de geçerlidir, ancak burada pozitif tanımlılık aksiyomu sağlanmaz [7].

$\forall\ \vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in$ ID-Modül, $\alpha \in$ ID için

i. $<\vec{A}, \vec{B}>=<\vec{B}, \vec{A}>$

ii. $<\alpha\vec{A}, \vec{B}>=<\vec{A}, \alpha\vec{B}>=\alpha<\vec{A}, \vec{B}>$

iii. $<\vec{A}+\vec{B}, \vec{C}>=<\vec{A}, \vec{C}>+<\vec{B}, \vec{C}>$,

$<\vec{A}, \vec{B}+\vec{C}>=<\vec{A}, \vec{B}>+<\vec{A}, \vec{C}>$,

iv. $\vec{A}=0 \Longrightarrow <\vec{A}, \vec{A}>=0$.

Tanım

Bir $\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*}$ dual vektörünün normu diye

$$\|\vec{A}\|=\sqrt{<\vec{A},\vec{A}>}=\left(\|\vec{a}\|,\frac{\langle\vec{a},\overrightarrow{a^*}\rangle}{\|\vec{a}\|}\right),\ \vec{a}\neq 0$$

dual sayısına denir. Bundan sonra bu dual sayı

$$a=\|\vec{a}\|,\ a^*=\frac{\langle\vec{a},\overrightarrow{a^*}\rangle}{\|\vec{a}\|}$$

olmak üzere

$$\|\vec{A}\|=\vec{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*}$$

şeklinde gösterilecektir [7].

Tanım

Normu (1,0) dual sayısına karşılık gelen dual vektörlere birim dual vektör denir [7].

Tanım

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a^*}$ birim dual vektör ise

$\|\vec{a}\| = 1, \langle\vec{a}, \vec{a^*}\rangle = 0$

dır [7].

Teorem

$\vec{A} = (\vec{a}, \vec{a^*}) \in ID^3$ olmak üzere

$$\vec{U} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$$

bir birim dual vektördür [7].

Tanım

$\{\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a^*} : \|\vec{A}\| = (1,0), \vec{a}, \vec{a^*} \in IR^3\}$ kümesine ID-Modül'de birim dual küre denir [7].

Teorem (E.STUDY DÖNÜŞÜMÜ)

$(0, \vec{a^*}) \neq \vec{A} \in$ID- Modül olmak üzere ID-Modül'de denklemi $\|\vec{A}\|$= (1, 0) olan birim dual kürenin dual noktaları, IR^3 deki yönlü doğrulara birebir karşılık gelirler [3].
Bu teoreme göre $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a^*}$ birim dual vektörü IR^3 deki bir tek yönlü doğruya karşılık gelmektedir. $\vec{a}$ birim vektörü bu doğrunun yönünü, $\vec{a^*}$ ise O başlangıç noktasına göre $\vec{a}$ birim vektörünün vektörel momentini ifade etmektedir.

Tanım

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a^*} \in ID^3$ olmak üzere,

$$\vec{U} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \vec{u} + \varepsilon\overrightarrow{u^*} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} + \varepsilon\frac{\overrightarrow{a^*} - k\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

birim dual vektörüne $\vec{A}$ vektörünün ekseni denir [7].

<u>Tanım</u>

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\overrightarrow{a^*} \in ID^3$ olmak üzere,

$$k = \frac{\langle \vec{a}, \overrightarrow{a^*} \rangle}{\|\vec{a}\|^2}$$

reel sayısına, $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\overrightarrow{a^*}$ dual vektörünün yükselişi veya adımı denir [7].

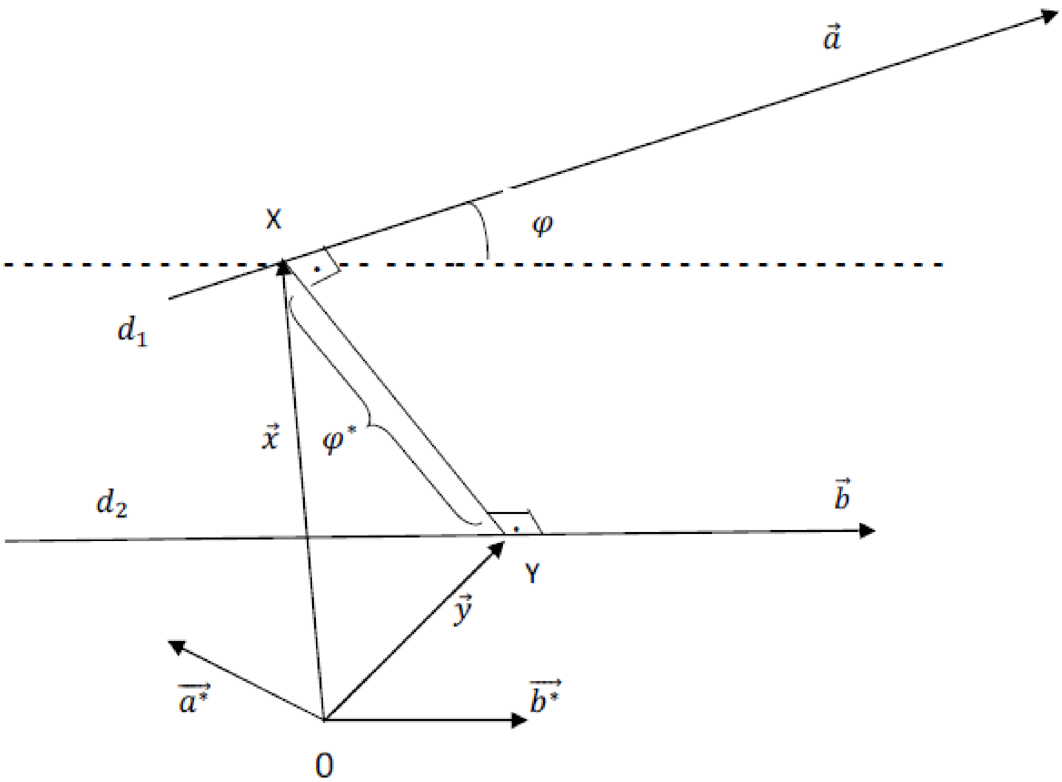
<u>Tanım</u>

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim dual vektör Φ, $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ nin eksenleri arasındaki açı olmak üzere

$$< \vec{A}, \vec{B} >= \cos\Phi = \cos(\varphi + \varepsilon\varphi^*)$$

olarak tanımlanan $\Phi = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ dual sayısına , $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim vektörleri arasındaki dual açı denir [7].

Burada φ ve $\varphi*$, sırasıyla $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim vektörlerine karşılık gelen yönlü doğrular d_1 ve d_2 olmak üzere bu doğrular arasındaki açıyı ve aralarındaki en kısa uzaklığı ifade etmektedir. Şekil 3.1. de dual açının geometrik yorumu verilmiştir:



Şekil 2.3.Geometrik Olarak Dual Açı

Teorem

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim dual vektörleri arasındaki dual açı $\Phi = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ olmak üzere

$$< \vec{A}, \vec{B} >= \cos(\varphi + \varepsilon\varphi^*) = \cos\Phi$$

dır [7].

Tanım

$\vec{A}$, $\vec{B} \in ID^3$ dual vektörlerinin dış çarpımı

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{a} \wedge \vec{b} + \varepsilon\left(\vec{a} \wedge \overrightarrow{b^*} + \overrightarrow{a^*} \wedge \vec{b}\right)$$

olarak tanımlanan

Λ:ID^3 x $ID^3 \rightarrow ID^3$

şeklinde bir işlemdir [7].

2.3 Dual Uzayda Regle Yüzeyler

Tanım

Bir parametreli K/K' dual küresel hareketinde, K da tespit edilmiş bir X dual noktası, K' sabit dual küresi üzerinde $t \in$ IR parametresine bağlı olarak bir

$$\vec{X} = \vec{X}(t), \qquad \|\vec{X}(t)\| = 1$$

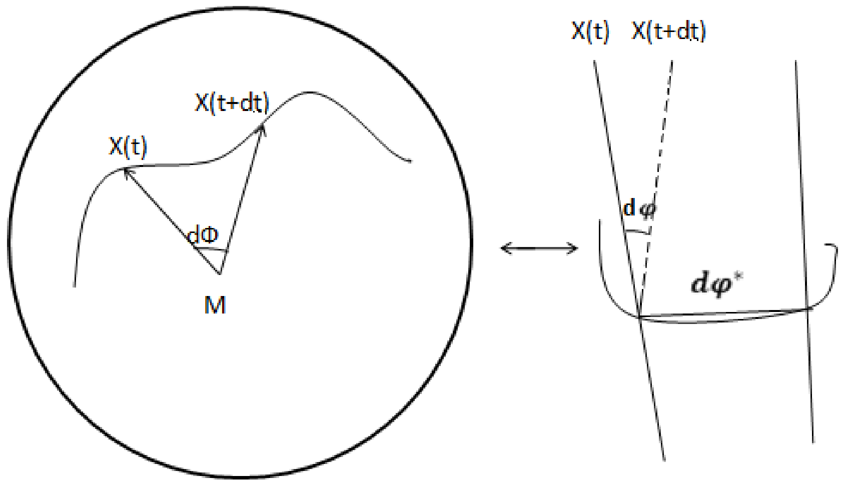
eğrisi çizer. t-parametresine göre diferensiyellenebilen bu dual küresel eğriye bir regle yüzey olarak bakabiliriz. Çünkü E. Study dönüşümüne göre, bu eğriye çizgiler uzayında bir 1-parametreli bir doğru ailesi (regle yüzey) karşılık gelir. Eğer dual küresel eğri kapalı ise, karşılık gelen regle yüzey de kapalıdır.

$\vec{X} = \vec{X}(t)$, t∈R, dual küresel eğrisine, çizgiler uzayında (X)- regle yüzeyinin dual küresel resmi de denir.

$\vec{X} = \vec{X}(t)$ dual küresel eğrisinin $d\phi = d\varphi + \varepsilon d\varphi^*$ yay elementi için

$$d\varphi^2 = \langle d\vec{x}, d\vec{x} \rangle,$$
$$d\varphi . d\varphi^* = \langle d\vec{x}, d\vec{x} \rangle$$

elde edilir. Burada $d\varphi$ ve $d\varphi^*$ reel büyüklükleri ise sırasıyla çizgiler uzayındaki regle yüzeyin $\vec{X}(t)$ ve $\vec{X}(t + dt)$ anadoğruları arasındaki, açı ve en kısa uzaklığa karşılık gelir.



Şekil 2.4. Dual Regle Yüzey

Tanım

$\vec{X} = \vec{X}(t)$, $\left(\|\vec{X}(t)\| = 1\right)$ regle yüzeyinde $\vec{X}(t)$ ve $\vec{X}(t+dt)$ komşu ana doğruların ortak dikmesinin, $\vec{X}(t)$ anadoğrusu üzerindeki ayağına boğaz noktası, bu noktaların geometrik yerine ise boğaz çizgisi (striksiyon çizgisi) denir.

Tanım

$\vec{X} = \vec{X}(t)$, $\left(\|\vec{X}(t)\| = 1\right)$ regle yüzeyinin bütün anadoğrularını dik kesen eğriye regle yüzeyin ortogonal yörünge eğrisi denir.

Tanım

K/K' kapalı dual küresel hareketinde, hareketli sistemin birinci ekseninin çizdiği kapalı regle yüzey $(\overrightarrow{U_1}) = \left(\overrightarrow{U_1}(t)\right)$, $t \in I$ olsun. Ayrıca $(\overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_3})$- dual düzleminde $\overrightarrow{U_2}$ ile $\phi(t) = \varphi(t) + \varphi^*(t)$ dual açısını yapan $\overrightarrow{N_1} = \cos\phi\overrightarrow{U_2} + \sin\phi\overrightarrow{U_3}$ birim dual vektörünü alalım. K/K' hareketinde hareketli kürenin $\overrightarrow{U_1}$ birim dual vektörü $(\overrightarrow{U_1}) = \left(\overrightarrow{U_1}(t)\right)$ kapalı regle yüzeyini çizerken $\overrightarrow{N_1}$ birim dual vektörüne karşılık gelen doğru da bu kapalı yüzeyin ortogonal yörüngesi boyunca bir açılabilir regle yüzey çizsin. Bu taktirde bir peryotluk kapalı küresel harekette $\phi(t) = \varphi(t) + \varphi^*(t)$ dual açısının toplam değişme miktarına $(\overrightarrow{U_1}) = \left(\overrightarrow{U_1}(t)\right)$ kapalı regle yüzeyinin dual açılım açısı denir ve

$$\Lambda_{U_1} = \oint d\phi$$

şeklinde ifade edilir [6].

Tanım

K/K' kapalı dual küresel hareketinde, hareketli sistemin birinci ekseninin çizdiği kapalı regle yüzey $(\overrightarrow{U_1}) = \left(\overrightarrow{U_1}(t)\right)$, $t \in I$ olsun. Ayrıca $(\overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_3})$- dual düzleminde $\overrightarrow{U_2}$ ile $\phi(t) = \varphi(t) + \varphi^*(t)$ dual açısını yapan $\overrightarrow{N_1} = \cos\phi \overrightarrow{U_2} + \sin\phi \overrightarrow{U_3}$ birim dual vektörünü alalım. K/K' hareketinde hareketli kürenin $\overrightarrow{U_1}$ birim dual vektörü $(\overrightarrow{U_1}) = \left(\overrightarrow{U_1}(t)\right)$ kapalı regle yüzeyini çizerken $\overrightarrow{N_1}$ birim dual vektörüne karşılık gelen doğru, yüzey boyunca bir dual eğri çizsin. Bu eğriye yüzeyin ortogonal yörüngesi denir.

Tanım

$\overrightarrow{U_1}(t)$ dual eğrisine çizgiler uzayında karşılık gelen regle yüzey $(\overrightarrow{U_1})$ olmak üzere $\overrightarrow{U_1}(t)$ ile sabit $\Theta = \theta + \varepsilon\theta^*$ dual açısını yapan

$$\overrightarrow{V_1} = \cos\Theta \overrightarrow{U_1} + \sin\Theta \overrightarrow{U_3}$$

şeklinde tanımlı $\overrightarrow{V_1}$ dual vektörüne karşılık gelen $(\overrightarrow{V_1})$ yüzeyine $(\overrightarrow{U_1})$ yüzeyinin paralel regle yüzeyi denir [2].

3. IR^3 de BİR EĞRİ ve ONUN TABİİ LİFT EĞRİSİNİN KÜRESEL GÖSTERGELERİ ve DARBOUX VEKTÖRLERİ TARAFINDAN OLUŞTURULAN REGLE YÜZEY ÇİFTLERİ

$\alpha:I\to M$ birim hızlı bir eğri olmak üzere $\overline{\alpha}:I\to TM$

$$\overline{\alpha}(s)=(\alpha(s),\alpha'(s))=\alpha'(s)|_{\alpha(s)}$$

şeklinde tanımlı eğriye α eğrisinin tabii lifti denir.

α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet Formüllerini $\{\overline{T}(s),\overline{N}(s),\overline{B}(s)\}$ şeklinde verilmiştir.

$$\overline{T}(s)=\frac{\overline{\alpha}'}{\|\overline{\alpha}'\|}=\frac{\alpha''}{\|\alpha''\|}=N(s),$$

$$\overline{B}(s)=\frac{\overline{\alpha}'\times\overline{\alpha}''}{\|\overline{\alpha}'\times\overline{\alpha}''\|}=\frac{\alpha''\times\alpha'''}{\|\alpha''\times\alpha'''\|}=\frac{\tau}{\|W\|}T(s)+\frac{\kappa}{\|W\|}B(s),$$

$$\overline{N}(s)=-\frac{\kappa}{\|W\|}T(s)+\frac{\tau}{\|W\|}B(s)$$

[9].

<u>Sonuç</u>

$\overline{\alpha}$ IR^3 te bir eğri olsun. O halde

$$\overline{T}(s)=N(s),$$

$$\overline{B}(s)=\frac{\tau}{\|W\|}T(s)+\frac{\kappa}{\|W\|}B(s),$$

$$\overline{N}(s)=-\frac{\kappa}{\|W\|}T(s)+\frac{\tau}{\|W\|}B(s).$$

(i) X ve $\overline{X}$ iki regle yüzey olsun.

$$X(s,v)=\alpha(s)+vT(s),\ \overline{X}(s,v)=\overline{\alpha}(s)+v\overline{T}(s)$$

X ve $\overline{X}$ nin striksiyon noktaları sırasıyla $\beta(s)=\alpha(s)+\lambda T(s)$ ve $\overline{\beta}(s)=\overline{\alpha}(s)+\mu\overline{T}(s)$ dır.

Şimdi λ ve μ hesaplayalım.

$\lambda=0$, $\mu=0$

X ve $\overline{X}$ regle yüzeylerinin dağılma parametreleri

$$P_T = \frac{\det(\alpha', T, T')}{\|T'\|^2} = 0, \qquad \overline{P}_{\overline{T}} = \frac{\det(\overline{\alpha}', \overline{T}, \overline{T}')}{\|\overline{T}'\|^2} = 0$$

dır [9].

<u>Sonuç</u>

X ve $\overline{X}$ nin striksiyon noktaları sırasıyla $\beta(s) = \alpha(s) + \lambda T(s)$ ve $\overline{\beta}(s) = \overline{\alpha}(s) + \mu\overline{T}(s)$ olduğundan artık $\beta(s) = \alpha(s)$ ve $\overline{\beta}(s) = \overline{\alpha}(s)$ eşitlikleri vadır.

(ii) X ve $\overline{X}$ iki regle yüzey olsun.

X(s,v)= $\alpha(s) + vN(s)$, $\overline{X}(s, v) = \overline{\alpha}(s) + v\overline{N}(s)$

X ve $\overline{X}$ nin striksiyon noktaları sırasıyla $\beta(s) = \alpha(s) + \lambda N(s)$ ve $\overline{\beta}(s) = \overline{\alpha}(s) + \mu\overline{N}(s)$ dır. Şimdi λ ve μ hesaplayalım.

$$\lambda = -\frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2}, \qquad \mu = -\frac{\kappa\|W\|^3}{\kappa^2 + \tau^2 + \|W\|^4},$$

X ve $\overline{X}$ regle yüzeylerinin dağılma parametreleri

$$P_N = \frac{\det(\alpha', N, N')}{\|N'\|^2} = \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2}, \qquad \overline{P}_{\overline{N}} = \frac{\det(\overline{\alpha}', \overline{N}, \overline{N}')}{\|\overline{N}'\|^2} = \frac{\kappa^2\tau' + \kappa\tau\kappa'}{\kappa'^2 + \tau'^2 + (\kappa^2 + \tau^2)^2}$$

dır [9].

<u>Sonuç</u>

X ve $\overline{X}$ nin striksiyon noktaları sırasıyla $\beta(s) = \alpha(s) + \lambda N(s)$ ve $\overline{\beta}(s) = \overline{\alpha}(s) + \mu\overline{N}(s)$ olduğundan artık $\beta(s) = \alpha(s) + -\frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2} N(s)$ ve $\overline{\beta}(s) = \overline{\alpha}(s) + -\frac{\kappa\|W\|^3}{\kappa^2+\tau^2+\|W\|^4} \overline{N}(s)$ eşitlikleri vardır.

(iii) X ve $\overline{X}$ iki regle yüzey olsun.

X(s,v)= $\alpha(s) + vB(s)$, $\overline{X}(s,v) = \overline{\alpha}(s) + v\overline{B}(s)$.

X ve $\overline{X}$ nin striksiyon noktaları sırasıyla $\beta(s) = \alpha(s) + \lambda B(s)$ ve $\overline{\beta}(s) = \overline{\alpha}(s) + \mu\overline{B}(s)$ dır. Şimdi λ ve μ hesaplayalım.

$\lambda = 0, \qquad \mu = 0$

X ve $\overline{X}$ regle yüzeylerinin dağılma parametreleri

$$P_B = \frac{\det(\alpha', B, B')}{\|B'\|^2} = \frac{1}{\tau}, \qquad \overline{P}_{\overline{B}} = \frac{\det(\overline{\alpha}', \overline{B}, \overline{B}')}{\|\overline{B}'\|^2} = \frac{\kappa^2\tau' + \kappa\tau\kappa'}{\kappa'^2 + \tau'^2}$$

dır [9].

<u>Sonuç</u>

X ve $\overline{X}$ nin striksiyon noktaları sırasıyla $\beta(s) = \alpha(s) + \lambda B(s)$ ve $\overline{\beta}(s) = \overline{\alpha}(s) + \mu\overline{B}(s)$ olduğundan artık $\beta(s) = \alpha(s)$ ve $\overline{\beta}(s) = \overline{\alpha}(s)$ eşitlikleri vardır [9].

<u>Sonuç</u>

α birim hızlı bir eğri ve $\overline{\alpha}$ tabii lift eğrisinin $\overline{\kappa}$ eğriliği, $\overline{\tau}$ burulması ve $\overline{W}$ darboux vektörü olmak üzere

$$\overline{\kappa} = \frac{\|W\|}{\kappa}, \qquad \overline{\tau} = \frac{\kappa\tau' - \kappa'\tau}{\kappa\|W\|^2},$$

$$\bar{W} = \frac{\tau}{\kappa} T + \left(\frac{\kappa\tau' - \kappa'\tau}{\kappa \|W\|^2} \right) N + B$$

[9].

4. DUAL UZAYDA BİR EĞRİ VE ONU TABİİ LİFT EĞRİSİNİN KÜRESEL GÖSTERGELERİ TARAFINDAN OLUŞTURULAN REGLE YÜZEY ÇİFTLERİ

Bu bölümde, dual uzayda verilen bir eğrinin ve onun tabii lift eğrisinin küresel göstergelerinin ve darboux vektörünün oluşturduğu regle yüzey çiftleri ile ilgili bazı karakterizasyonlar verilip dağılma parametreleri ve striksiyon eğrileri hesaplanmıştır.

$\alpha(s)$eğrisi dual uzayda verilen bir eğri olsun. Eğrinin $T = t + \varepsilon t^*$, $N = n + \varepsilon n^*$, $B = b + \varepsilon b^*$ dual Frenet vektörleri, $W = \widetilde{W} + \varepsilon \widetilde{W}^*$ dual Darboux vektörü, $\kappa = k_1 + \varepsilon k_1^*$ ve $\tau = k_2 + \varepsilon k_2^*$ da dual eğrilik ve dual torsiyon olmak üzere; $\alpha(s)$ eğrisinin $\overline{\alpha}(s)$ tabii lift eğrisinin teğet, asli normal, binormal ve Darboux vektörleri aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\overline{T} = \overline{t} + \varepsilon \overline{t^*} = n + \varepsilon n^*,$$
$$\overline{B} = \overline{b} + \varepsilon \overline{b^*} = (\sin\theta + \varepsilon\theta^* \cos\theta)(t + \varepsilon t^*) + (\cos\theta + \varepsilon\theta^* \sin\theta)(b + \varepsilon b^*),$$
$$\overline{N} = \overline{n} + \varepsilon \overline{n^*} = -\big(\cos\theta + \varepsilon\theta^*(-\sin\theta)\big)(t + \varepsilon t^*) + (\sin\theta + \varepsilon\theta^* \cos\theta)(b + \varepsilon b^*),$$

Gerekli hesaplamalar yapıldıktan sonra lift eğrisinin Frenet vektörlerinin reel ve dual kısımları aşağıdaki gibi verilir:

$$\overline{t} = n,$$
$$\overline{n} = -t\cos\theta + b\sin\theta,$$
$$\overline{b} = \sin\theta\, t + \cos\theta\, b,$$
$$\overline{t^*} = n^*,$$
$$\overline{n^*} = -t^*\cos\theta + \theta^* t^* \sin\theta + b^* \sin\theta - \theta^* b^* \cos\theta,$$
$$\overline{b^*} = \sin\theta t^* + \theta^* \cos\theta t^* + b^* \cos\theta - \theta^* \sin\theta b^*,$$

Esas eğrinin Frenet vektörleri aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$T' = \kappa N,$$
$$N' = -\kappa T + \tau B,$$
$$B' = -\tau N.$$

Frenet vektörlerinin reel ve dual kısımları açılınca;

$$t' + \varepsilon t'^{*} = (k_1 + \varepsilon k_1^{*})(n + \varepsilon n^{*}),$$
$$n' + \varepsilon n'^{*} = -(k_1 + \varepsilon k_1^{*})(t + \varepsilon t^{*}) + (k_2 + \varepsilon k_2^{*})(b + \varepsilon b^{*}),$$
$$b' + \varepsilon b'^{*} = -(k_2 + \varepsilon k_2^{*})(n + \varepsilon n^{*})$$

elde edilir. Reel ve dual kısımlar gerekli hesaplamalardan sonra aşağıdaki gibi bulunur:

$$t' = k_1 n,$$
$$n' = -k_1 t + k_2 b,$$
$$b' = -k_2 n,$$
$$t'^{*} = k_1 n^{*} + k_1^{*} n,$$
$$n'^{*} = -k_1 t^{*} - k_1^{*} t + k_2 b^{*} + k_2^{*} b,$$
$$b'^{*} = -k_2 n^{*} - k_2^{*} n.$$

Sonuç

$\alpha(s)$ dual uzayda bir eğri olsun. $\overline{\alpha}(s)$, $\alpha(s)$ nin tabii lift eğrisi olmak üzere $\alpha(s)$ ve $\overline{\alpha}(s)$ eğrisinin teğetler göstergelerinin oluşturduğu regle yüzey çiftleri sırasıyla aşağıdaki gibidir;

$$\chi_T(s,v) = t(s)\Lambda t(s)^{*} + v t(s),$$
$$\overline{\chi}_{\overline{T}}(s,v) = \overline{t}(s)\Lambda \overline{t}(s)^{*} + v\overline{t}(s).$$

$\alpha(s)$ ve $\overline{\alpha}(s)$ eğrilerinin teğetler göstergelerinin striksiyon eğrileri aşağıdaki gibidir:

$$\beta(s) = t(s)\Lambda t(s)^{*} - \lambda t(s),$$
$$\overline{\beta}(s) = \overline{t}(s)\Lambda \overline{t}(s)^{*} - \mu \overline{t}(s).$$

λ ve μ sabitleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\lambda = \frac{\langle t'(s)\Lambda t'(s)^{*}, t'(s)\rangle}{\langle t'(s), t'(s)\rangle},$$
$$= \frac{\langle k_1(s)n(s)\Lambda\big(k_1(s)n^{*}(s) + {k_1}^{*}(s)n(s)\big), k_1(s)n(s)\rangle}{\langle k_1(s)n(s), k_1(s)n(s)\rangle},$$

$$= \frac{\langle \overbrace{k_1(s)n(s)\Lambda k_1(s)n^*(s)}^{0} + \overbrace{k_1(s)n(s)\Lambda {k_1}^*(s)n(s)}^{0}, k_1(s)n(s)\rangle}{k_1^2(s)\underbrace{\langle n(s), n(s)\rangle}_{1}}$$

$$= \frac{\langle 0, k_1(s)n(s)\rangle}{k_1^2(s)}$$

$$= 0.$$

$$\mu = \frac{\langle \overline{t'}(s)\Lambda\overline{t}(s)^*, \overline{t'}(s)\rangle}{\langle \overline{t}'(s), \overline{t'}(s)\rangle} = \frac{\langle n'(s)\Lambda n'^*(s), n'(s)\rangle}{\langle n'(s), n'(s)\rangle},$$

$$= \frac{\big\langle\big(-k_1(s)t(s) + k_2(s)b(s)\big)\Lambda\big(-k_1(s)t^*(s) - k_1^*(s)t(s) + k_2(s)b^*(s) + k_2^*(s)b(s)\big)}{\langle(-k_1t + k_2b), (-k_1t + k_2b)\rangle}$$

$$, \frac{(-k_1(s)t(s) + k_2(s)b(s))}{\langle(-k_1t + k_2b), (-k_1t + k_2b)\rangle},$$

$$= 0$$

O halde $\alpha(s)$ ve $\overline{\alpha}(s)$ eğrilerinin teğetler göstergelerinin striksiyon eğrileri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\beta(s) = t(s)\Lambda t(s)^*,$$
$$\overline{\beta}(s) = \overline{t}(s)\Lambda\overline{t}(s)^*.$$

$\alpha(s)$ ve $\overline{\alpha}(s)$ eğrilerinin teğetler göstergelerinin dağılma parametreleri aşağıdaki gibidir:

$$P_T = \frac{\det\Big(\big(t(s)\Lambda t^*(s)\big)', t(s), t'(s)\Big)}{\|t'(s)\|^2},$$

$$= \frac{\det\big(t'(s)\Lambda t^*(s) + t(s)\Lambda t^{*\prime}(s), t(s), t'(s)\big)}{\|t'(s)\|^2},$$

$$= \frac{\det\big(t'(s)\Lambda t^*(s), t(s), t'(s)\big) + \det\big(t(s)\Lambda t^{*\prime}(s), t(s), t'(s)\big)}{\|t'(s)\|^2},$$

$$= \frac{\det\big(t(s), t'(s), t'(s)\Lambda t^*(s)\big) + \det\big(t(s), t'(s), t(s)\Lambda t^{*\prime}(s)\big)}{\|t'(s)\|^2},$$

$$= \frac{\langle t(s)\Lambda t'(s), t'(s)\Lambda t^*(s)\rangle + \langle t(s)\Lambda t'(s), t(s)\Lambda t^{*\prime}(s)\rangle}{\|t'(s)\|^2},$$

$$= \frac{\overbrace{\langle t(s), t'(s)\rangle}^{0}\langle t'(s), t^*(s)\rangle - \overbrace{\langle t(s), t^{*\prime}(s)\rangle}^{0}\langle t'(s), t'(s)\rangle + \overbrace{\langle t(s), t(s)\rangle}^{1}\langle t'(s), t^{*\prime}(s)\rangle}{\|t'(s)\|^2}$$

$$- \frac{\langle t(s), t^{*\prime}(s)\rangle \overbrace{\langle t'(s), t(s)\rangle}^{0}}{\|t'(s)\|^2},$$

$$= \frac{\langle t'(s), t^{*\prime}(s)\rangle}{\|t'(s)\|^2},$$

$$= \frac{\langle k_1(s)n(s), k_1(s)n^*(s) + k_1^*(s)n(s)\rangle}{\|k_1(s)n(s)\|^2},$$

$$= \frac{{k_1}^2(s)\overbrace{\langle n(s), n^*(s)\rangle}^{0}}{{k_1}^2(s)},$$

$$=0.$$

$$\overline{P}_{\overline{T}} = \frac{\det\left((\bar{t}(s)\wedge\bar{t}(s)^*)', \bar{t}(s), \bar{t}'(s)\right)}{\|\,\bar{t}'(s)\|^2},$$

$$= \frac{k_1^*(s)k_1(s) + k_2^*(s)k_2(s)}{k_1^2(s) + k_2^2(s)}.$$

<u>Sonuç</u>

$\alpha(s)$ dual uzayda bir eğri olsun. $\overline{\alpha}(s)$, $\alpha(s)$ nin tabii lift eğrisi olmak üzere $\alpha(s)$ ve $\overline{\alpha}(s)$ eğrisinin asli normaller göstergelerinin oluşturduğu regle yüzey çiftleri sırasıyla aşağıdaki gibidir;

$$\chi_N(s, v) = n(s)\wedge n(s)^* + vn(s),$$
$$\overline{\chi}_{\overline{N}}(s, v) = \bar{n}(s)\wedge\bar{n}(s)^* + v\bar{n}(s).$$

α ve $\overline{\alpha}$ eğrisinin asli normaller göstergelerinin striksiyon eğrileri aşağıdaki gibidir.

$$\beta(s) = n(s)\wedge n(s)^* - \lambda n(s),$$
$$\overline{\beta}(s) = \bar{n}(s)\wedge\bar{n}(s)^* - \mu\bar{n}(s).$$

λ ve μ sabitleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\lambda=\frac{\langle n'(s)\Lambda n'(s)^*,n'(s)\rangle}{\langle n'(s),n'(s)\rangle}=\frac{\langle n'(s)\Lambda n^{*'}(s),n'(s)\rangle}{\langle n'(s),n'(s)\rangle},$$

$$=\frac{\big\langle\big(k_1(s)t(s)+k_2(s)b(s)\big)\Lambda(k_1(s)t^*(s)+k_1^*(s)t(s)+k_2(s)b^*(s)+k_2^*(s)b(s))}{\langle(k_1(s)t(s)+k_2(s)b(s)),(k_1(s)t(s)+k_2(s)b(s))\rangle}$$

$$,\frac{(k_1(s)t(s)+k_2(s)b(s))}{\langle(k_1(s)t(s)+k_2(s)b(s)),(k_1(s)t(s)+k_2(s)b(s))\rangle},$$

$$=0.$$

$$\mu=\frac{\langle\bar{n}'(s)\Lambda\bar{n}(s)^*,\bar{n}'(s)\rangle}{\langle\,\bar{n}'(s),\bar{n}'(s)\rangle},$$

$$=0$$

O halde α(s) ve $\overline{\alpha}(s)$ eğrilerinin asli normaller göstergelerinin striksiyon eğrileri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\beta(s)=n(s)\Lambda n(s)^*,$$
$$\bar{\beta}(s)=\bar{n}(s)\Lambda\bar{n}(s)^*.$$

α(s) ve $\overline{\alpha}(s)$ eğrilerinin asli normaller göstergelerinin dağılma parametreleri aşağıdaki gibidir:

$$P_N=\frac{\det(n'(s)\Lambda n'(s)^*,n(s),n'(s)\,)}{\|n'(s)\|^2},$$

$$=\frac{\det\Big(\big(n(s)\Lambda n^*(s)\big)',n(s),n'(s)\Big)}{\|n'(s)\|^2},$$

$$=\frac{\det(n'(s)\Lambda n^*(s)+n(s)\Lambda n^{*\prime}(s),n(s),n'(s))}{\|n'(s)\|^2},$$

$$=\frac{\det\big(n'(s)\Lambda n^*(s),n(s),n'(s)\big)+\det\big(n(s)\Lambda n^{*\prime}(s),n(s),n'(s)\big)}{\|n'(s)\|^2},$$

$$=\frac{\det\big(n(s),n'(s),n'(s)\Lambda n^*(s)\big)+\det\big(n(s),n'(s),n(s)\Lambda n^{*\prime}(s)\big)}{\|n'(s)\|^2},$$

$$=\frac{\langle n(s)\Lambda n'(s),n'(s)\Lambda n^*(s)\rangle+\langle n(s)\Lambda n'(s),n(s)\Lambda n^{*\prime}(s)\rangle}{\|n'(s)\|^2},$$

$$= \frac{\overbrace{\langle n(s), n'(s)\rangle}^{0}\langle n'(s), n^*(s)\rangle - \overbrace{\langle n(s), n^*(s)\rangle}^{0}\langle n'(s), n'(s)\rangle + \overbrace{\langle n(s), n(s)\rangle}^{1}\langle n'(s), n^{*\prime}(s)\rangle}{\|n'(s)\|^2}$$

$$- \frac{\langle n(s), {n^*}'(s)\rangle \overbrace{\langle n'(s), n(s)\rangle}^{0}}{\|n'(s)\|^2},$$

$$= \frac{\langle n'(s), {n^*}'(s)\rangle}{\|n'(s)\|^2},$$

$$= \frac{\langle -k_1(s)t(s) + k_2(s)b(s), -k_1(s)t^*(s) - k_1^*(s)t(s) + k_2(s)b^*(s) + k_2^*(s)b(s)\rangle}{\|-k_1(s)t(s) + k_2(s)b(s)\|^2},$$

$$= \frac{-k_1(s)\overbrace{\langle t(s), b(s)\rangle}^{0} + -k_1^2(s)\overbrace{\langle t(s), t^*(s)\rangle}^{0} - k_1(s)k_2(s)\overbrace{\langle t(s), b^*(s)\rangle}^{-\langle t^*(s), b(s)\rangle} + k_2(s)\langle b(s), b(s)\rangle}{k_1^2(s) + k_2^2(s)}$$

$$+ \frac{-k_1(s)k_2(s)\langle b(s), t^*(s)\rangle + k_2^2(s)\overbrace{\langle b(s), b^*(s)\rangle}^{0}}{k_1^2(s) + k_2^2(s)},$$

$$= \frac{k_2(s)}{k_1^2(s) + k_2^2(s)}.$$

$$\overline{P}_{\overline{N}} = \frac{\det\big((\bar{n}(s)\wedge\bar{n}(s)^*)', \bar{n}(s), \bar{n}'(s)\big)}{\|\bar{n}'(s)\|^2},$$

$$= \frac{k_1(s)k_1^*(s)\cos^2\theta + \big(k_1(s)k_2^*(s) + k_2(s)k_1^*(s)\big)\sin\theta\cos\theta + k_2(s)k_2^*(s)\sin^2\theta}{1 + (k_1(s)\cos\theta + k_2(s)\sin\theta)^2}.$$

<u>Sonuç</u>

$\alpha(s)$ dual uzayda bir eğri olsun. $\overline{\alpha}(s)$, $\alpha(s)$ nin tabii lift eğrisi olmak üzere $\alpha(s)$ ve $\overline{\alpha}(s)$ eğrisinin binormaller göstergelerinin oluşturduğu regle yüzey çiftleri sırasıyla aşağıdaki gibidir;

$$\chi_B(s, v) = b(s)\wedge b(s)^* + vb(s),$$
$$\overline{\chi}_{\overline{B}}(s, v) = \bar{b}(s)\wedge\bar{b}(s)^* + v\bar{b}(s).$$

$\alpha(s)$ ve $\overline{\alpha}(s)$ eğrilerinin binormaller göstergelerinin dağılma parametreleri aşağıdaki gibidir:

$$\beta(s) = b(s)\wedge b(s)^* - \lambda b(s),$$

$\bar{\beta}(s) = \bar{b}(s) \wedge \bar{b}(s)^* - \mu \bar{b}(s).$

λ ve μ sabitleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\lambda = \frac{\langle b'(s) \wedge b'(s)^*, b'(s) \rangle}{\langle b'(s), b'(s) \rangle} = \frac{\langle b' \wedge b'^*, b' \rangle}{\langle b', b' \rangle},$$
$$= \frac{\langle (-k_2(s)n(s)) \wedge (-k_2(s)n^*(s) - k_2^*(s)n(s)), (-k_2(s)n(s)) \rangle}{\langle (-k_2(s)n(s)), (-k_2(s)n(s)) \rangle},$$
$$= \frac{\langle (-k_2(s)n(s)) \wedge (-k_2(s)n^*(s)) - (-k_2(s)n(s)) \wedge (-k_2^*(s)n(s)), (-k_2(s)n(s)) \rangle}{k_2^2(s) \underbrace{\langle n(s), n(s) \rangle}_{1}},$$
$$= \frac{\langle 0, (-k_2(s)n(s)) \rangle}{k_2^2(s)},$$
$$= 0.$$

$$\mu = \frac{\langle \bar{b}'(s) \wedge \bar{b}'(s)^*, \bar{b}'(s) \rangle}{\langle \bar{b}'(s), \bar{b}'(s) \rangle},$$
$$= \frac{(k_1(s)\sin\theta - k_2(s)\cos\theta)(k_1^*(s)\sin\theta - k_2^*(s)\cos\theta)}{1 + (k_1(s)\sin\theta - k_2(s)\cos\theta)^2}.$$

O halde α(s) ve $\bar{\alpha}(s)$ eğrilerinin binormaler göstergelerinin striksiyon eğrileri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\beta(s) = b(s) \wedge b^*(s),$$
$$\bar{\beta}(s) = \bar{b}(s) \wedge \bar{b}(s)^* - \frac{(k_1(s)\sin\theta - k_2(s)\cos\theta)(k_1^*(s)\sin\theta - k_2^*(s)\cos\theta)}{1 + (k_1(s)\sin\theta - k_2(s)\cos\theta)^2} \bar{b}(s).$$

α(s) ve $\bar{\alpha}(s)$ eğrilerinin binormaller göstergelerinin dağılma parametreleri aşağıdaki gibidir:

$$P_B = \frac{\det\left(\left(b(s) \wedge b^*(s)\right)', b(s), b'(s)\right)}{\|b'(s)\|^2},$$
$$= \frac{\det\left(b'(s) \wedge b^*(s) + b(s) \wedge b^{*\prime}(s), b(s), b'(s)\right)}{\|b'(s)\|^2},$$
$$= \frac{\det\left(b'(s) \wedge b^*(s), b(s), b'(s)\right) + \det\left(b(s) \wedge b^{*\prime}(s), b(s), b'(s)\right)}{\|b'(s)\|^2},$$

$$= \frac{\det\big(b(s), b'(s), b'(s)\wedge b^*(s)\big) + \det\big(b(s), b'(s), b(s)\wedge b^{*\prime}(s)\big)}{\|b'(s)\|^2},$$

$$= \frac{\langle b(s)\wedge b'(s), b'(s)\wedge b^*(s)\rangle + \langle b(s)\wedge b'(s), b(s)\wedge b^{*\prime}(s)\rangle}{\|b'(s)\|^2},$$

$$= \frac{\overbrace{\langle b(s), b'(s)\rangle}^{0}\langle b'(s), b^*(s)\rangle - \overbrace{\langle b(s), b^{*\prime}(s)\rangle}^{0}\langle b'(s), b'(s)\rangle + \overbrace{\langle b(s), b(s)\rangle}^{1}\langle b'(s), b^{*\prime}(s)\rangle}{\|b'(s)\|^2}$$

$$- \frac{\langle b(s), b^{*\prime}(s)\rangle \overbrace{\langle b'(s), b(s)\rangle}^{0}}{\|b'(s)\|^2},$$

$$= \frac{\langle b'(s), b^{*\prime}(s)\rangle}{\|b'(s)\|^2},$$

$$= \frac{\langle -k_2(s)n(s), -k_2(s)n^*(s) - k_2^*(s)n(s)\rangle}{\|-k_2(s)n(s)\|^2},$$

$$= \frac{k_2(s)\overbrace{\langle n(s), n(s)\rangle}^{1} + k_2(s)k_2^*(s)\overbrace{\langle n(s), n^*(s)\rangle}^{0}}{k_2^2(s)},$$

$$= \frac{1}{k_2(s)}.$$

$$\overline{P}_{\overline{B}} = \frac{\det\Big(\big(\overline{b}(s)\wedge\overline{b}(s)^*\big)', \overline{b}(s), \overline{b}'(s)\Big)}{\left\|\,\overline{b}'(s)\right\|^2},$$

$$= \frac{\cos\theta\langle\theta, t(s)\rangle\big(\sin^2\theta + (k_1(s)\sin\theta - k_2(s)\cos\theta)\big) + \langle\theta, n(s)\rangle(k_1(s)\sin\theta - k_2(s)\cos\theta)}{1 + (k_1(s)\sin\theta - k_2(s)\cos\theta)^2},$$

$$- \frac{\langle\theta, b(s)\rangle \sin\theta\,((k_1(s)\sin\theta - k_2(s)\cos\theta)^2 + \cos^2\theta) - (k_1^*(s)\sin\theta - k_2^*(s)\cos\theta)(\cos\theta\sin\theta)}{1 + (k_1(s)\sin\theta - k_2(s)\cos\theta)^2}.$$

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde dual uzayda bir eğri ve onun tabii lift eğrisinin ürettiği regle yüzeylerle ilgili bazı karakterizasyonlar verilmiştir. Bu eğrilerin küresel göstergelerinin ve darboux vektörünün ürettiği regle yüzeylerin sitriksiyon eğrileri ve dağılma parametreleri hesaplanmıştır. Dual uzayda küresel hareketler geometrik olarak daha da yakından mercek altına alınır ise dual uzayda regle yüzeyler için başka karakterizasyonlar da elde edilebilir.

KAYNAKLAR

1. Erim, K. (1949). *Diferensiyel Geometri Dersleri*. İstanbul: İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 399.

2. Hacısalihoğlu, H. H. (1983). *Diferensiyel Geometri*. Malatya: İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, 30-41, 161-186.

3. Thorpe, J.A. (1976), *Elementary Topics in Differential Geometry*. Springer Verlag, New York, Heidelberg-Berlin, 61.

4. Ergün, E., Çalışkan, M. (2012). Ruled Surface Pair Generated by a Curve and its Natural Lift In IR^3. *Pure Mathematical Sciences*, 1(2), 75-80.

5. Müller, H. R. (1963). *Kinematik Dersleri*. Ankara: Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 278-279.

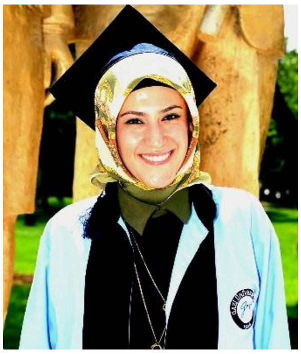
6. Hacısalihoğlu, H. H. (1983). *Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Ankara:* Gazi Üniversitesi, Fen- Edebiyat Fakültesi Yayınları, 1-38, 282-283, 188-191.

7. Gürsoy, O. (1990). The Dual Angle Pitch of a Closed Ruled Surface, *Mechanism and Machine Theory*, 25(2), 131-140.

8. Ergün, E., Çalışkan, M. (2015). Ruled Surface Pair Generated by Darboux Vectors of a Curve and Its Natural Lift in IR^3. *Bulletin of Mathematics and Statistics Research*, 26-29.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler



Soyadı, adı	: BAYSAL, Tuğba
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 15.03.1992, Kayseri
Medeni hali	: Bekar
Telefon	: 0 (554) 752 53 19
e-mail	: tugbaysal92@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik	Devam ediyor
Lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik	2015
Lise	Mimar Sinan Lisesi /	2010

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2015-2016	Özel Nene Hatun Fen Lisesi	Matematik Öğretmeni
2018-2019	Açı Eğitim Kurumları	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Baysal, T., Çalışkan, M. (2018). *Ruled Surface Pair Generated by Darboux Vectors of a Curve and its Natural Lift in Dual Space*. 16. Uluslararası Geometri Sempozyumu- Manisa Celal Bayar Üniversitesi (Poster sunumu)

Hobiler

Film izleme, Seyahat etmek.

GAZİ GELECEKTİR...