



FUZZY ANTİNORMLU UZAYLAR

Elif SANLI

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

EYLÜL 2019

Elif SANLI tarafından hazırlanan “FUZZY ANTİNORMLU UZAYLAR” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Hakan EFE

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.



Başkan: Prof. Dr. Cemil YILDIZ

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.



Üye: Prof. Dr. Erdal GÜNER

Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.



Tez Savunma Tarihi: 16/09/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....
Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.



Elif SANLI

16/09/2019

FUZZY ANTİNORMLU UZAYLAR
(Yüksek Lisans Tezi)

Elif SANLI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Eylül 2019

ÖZET

Bu tez çalışmasında; fuzzy antinormla elde edilen fuzzy antinormlu uzaylar ve özellikleri ele alınmıştır. Tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde girişe yer verilmiştir. İkinci bölümde t-conorm tanımı ile, Bag ve Samanta' nın verdiği fuzzy antinorm tanımı verilmiştir. Üçüncü bölümde daha önce verilen fuzzy antinorm tanımı genelleştirilmiştir. Antinormlu lineer uzay örnekleri incelenmiştir. T-conorm ile fuzzy antinormlu lineer uzay üzerinde $\|x\|_\alpha$ norm tanımlanmıştır. Dördüncü bölümde antinorm tanımına göre fuzzy α anti yakınsaklık, fuzzy α anti Cauchy dizisi, fuzzy α anti tamlık tanımları ve ilgili teoremler verilmiştir. Beşinci bölümde fuzzy anti süreklilik çeşitleri ve aralarındaki ilişkiler verildi. Ayrıca fuzzy anti sınırlılık çeşitleri verilmiştir.

Bilim Kodu : 20405
Anahtar Kelimeler : Fuzzy antinorm, fuzzy α -anti yakınsaklık, fuzzy α -anti-Cauchy dizisi, fuzzy α -anti- tamlık, fuzzy anti süreklilik, fuzzy anti sınırlılık
Sayfa Adedi : 51
Danışman : Prof. Dr. Hakan EFE

FUZZY ANTIORMED SPACES

(M. Sc. Thesis)

Elif SANLI

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

September 2019

ABSTRACT

In this thesis; Fuzzy antinormed spaces and their properties obtained by fuzzy antinormed are discussed. The thesis consists of five chapters. In the first chapter, introduction is given. In the second part, the definition of t-conorm is given by the definition of fuzzy antinormed by Bag and Samanta. In the third chapter, the fuzzy antinormed definition given earlier is generalized. Antinormed linear space samples were investigated. $\|x\|_\alpha$ norm is defined on the fuzzy antinormous linear space with T-conorm. In the fourth chapter, fuzzy α anti convergence, fuzzy α anti Cauchy sequence, fuzzy α anti completeness definitions and related theorems are given according to antinorm definition. In the fifth chapter, fuzzy anti continuity types and relationships between them were given. Also, fuzzy anti limitation varieties were given.

Science Code : 20405

Key Words : Fuzzy antinorm, Fuzzy α -anti-convergence, α -anti-Cauchy sequence
fuzzy α -anti-complete, fuzzy anti continuity, Fuzzy anti boundedness

Page Number : 51

Supervisor : Prof. Dr. Hakan EFE

TEŞEKKÜR

Beni fuzzy normlu ve fuzzy antinormlu uzaylara yönlendirerek bilgilerimin derinleşmesi ve anamlanmasında büyük katkı sağlayan, çalışmalarım boyunca yardımlarını ve değerli zamanını hiçbir zaman esirgemeyen çok kıymetli danışmanım Sayın Prof. Dr. Hakan EFE'ye; beni bu süreçte her zaman destekleyen, Şemdinli'deki zorluklarda yanımda olan eşim Burak SANLI'ya; beni her zaman destekleyen, matematikçi ve öğretmen olmama vesile olarak bugünlere gelmemde çok emeği olan sevgili annem Meva ALKAYA ve babam Halil ALKAYA'ya teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
3. FUZZY ANTİNORMLU LİNEER UZAYLAR.....	9
4. FUZZY α ANTİ YAKINSAKLIK	31
5. FUZZY ANTİ SÜREKLİLİK VE FUZZY ANTİ SINIRLILIK.....	37
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	47
KAYNAKLAR	49
ÖZGEÇMİŞ	51

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. $T_1(x,y)=\min\{x,y\}$ t-normu	4
Şekil 2.2. $T_2(x,y)=xy$ t-normu.....	4
Şekil 2.3. $T_3(x,y)=\max\{0,x+y-1\}$ t normu.....	5
Şekil 2.4. $S_1(x,y)=\max\{x,y\}$ t-conormu	5
Şekil 2.5. $S_2(x,y)=x+y-xy$ t-conormu.....	6
Şekil 2.6. $S_3(x,y)=\min\{1,x+y\}$ t-conormu	6

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

(X, N^*)

Fuzzy antinormlu lineer uzay

$\|\cdot\|_\alpha^*$

α -norm

$\mathbf{R}$

Reel Sayılar Kümesi

$\mathbf{C}$

Karmaşık Sayılar Kümesi

Kısaltmalar

Açıklamalar

B-S

Bag ve Samanta

1. GİRİŞ

Yıllardır matematiğin kesinliği diğer bilimlere göre matematikle uğraşanların fikirlerinin çelişmemesine neden olmuştur. Ama yine de bu kesinlik matematik ilerledikçe sınırlandırıcı olmaya başlamış ve farklı bir matematik alanı olarak çalışılan kümenin değiştirilmesi düşünülmüştür. İlk kez 1965'te California Berkeley Üniversitesinden Azeri matematikçi Lotfi A. Zadeh bu düşünceyle fuzzy mantık ve fuzzy küme kavramlarını tanımlanmıştır. Zadeh bu çalışmasında insan düşüncesinin büyük çoğunluğunun bulanık olduğunu, kesin olmadığını belirtmiştir. Bu yüzden 0 ve 1 ile temsil edilen Boolean mantık bu düşünce işlemi yeterli bir şekilde ifade edememektedir. İnsan mantığı, açık, kapalı, sıcak, soğuk, 0 ve 1 gibi değişkenlerden oluşan kesin ifadelerin yanı sıra, az açık, az kapalı, serin, ılık gibi ara değerleri de göz önüne almaktadır. Fuzzy (bulanık) mantık klasik mantığın aksine iki seviyeli değil, çok seviyeli işlemleri kullanmaktadır. Ayrıca Zadeh insanların denetim alanında, mevcut makinelerden daha iyi olduğunu ve kesin olmayan dilsel bilgilere bağlı olarak etkili kararlar alabildiklerini savunmuştur.

Fuzzy sayılar, fuzzy kümeler ve fuzzy mantıktan sonra 1984 yılında Katsaras [1] tarafından tanımlanmıştır. 1992'de Felbin [2] lineer uzayda fuzzy norm tanımını vermiştir. Cheng Moderson [3] lineer uzaylarda başka bir fuzzy norm tanımını vermiştir. 2003'de Bag ve Samanta [4] tarafından Cheng Moderson[3]'ün fuzzy norm tanımını değiştirilmiş ve fuzzy normda lineer operatörlerin sınırlılığı kurulmuştur [5]. Jebril ve Samanta tarafından Bag ve Samanta 'nın verdiği fuzzy anti norm tanımına bağlı kalınarak lineer uzayda fuzzy antinorm tanımı verilmiştir [3,4].

Bu tezde lineer uzayda fuzzy antinorm tanımı, genelleştirilmiş Riesz lemması ve sonlu boyutlu fuzzy antinormlu lineer uzayda bazı önemli özellikler ispatlanmıştır. Son kısımda fuzzy α -anti-yakınsaklık, fuzzy α -anti Cauchy dizisi, fuzzy α -anti tamlık tanımlanmış ve bunlar arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde t-conorm tanımı verildi. Bag ve Samanta'nın verdiği Fuzzy antinorm tanımı verilmiştir. Verilen antinorm tanımına göre bir dizinin yakınsaklık tanımı, Cauchy dizisi tanımı, kapalılık tanımı, kompaktlık tanımı verilmiştir [1-4].

Tezin üçüncü bölümünde Bag ve Samanta'nın verdiği Fuzzy antinorm tanımının genel

tanımı verilmiştir. Ayrıca t-conorm ile Fuzzy antinormlu lineer uzay tanımlanmıştır. Bazı Fuzzy antinormlu lineer uzay örnekleri incelenmiştir. T-conorm ile Fuzzy antinormlu lineer uzay üzerinde $\|x\|_\alpha$ norm tanımlanmıştır. Fuzzy antinorma göre bir dizinin tanımlanan α normlarına göre yakınsaklığı, kapalılığı, sonlu boyutluluğu incelenmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde Fuzzy α anti-yakınsaklık, Fuzzy α anti-Cauchylik, Fuzzy α antinormlu kompaktlık ile artan normlar ailesinin uygunluğu incelenmiştir. Ayrıca t-conorm ile Fuzzy antinormlu lineer uzayda yakınsak bir dizinin Fuzzy α anti limitinin tekliği incelenmiştir.

Tezin beşinci bölümünde Fuzzy antinormlu lineer uzayda Fuzzy anti süreklilik, düzgün Fuzzy anti süreklilik, güçlü Fuzzy anti süreklilik, zayıf Fuzzy anti süreklilik tanımlanmıştır. Fuzzy antinormlu uzaylar üzerinde Fuzzy anti sınırlılık tanımlanmıştır. Ayrıca zayıf Fuzzy anti sınırlılık, güçlü Fuzzy anti sınırlılık tanımlanarak birbirleriyle ilişkileri incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1

$*$: $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ ikili işlemi eğer,

- (i) $*$ birleşmeli ve değişmeli,
- (ii) $*$ sürekli,
- (iii) $\forall a \in [0,1]$ için $a * 1 = a$,
- (iv) $\forall a, b, c$ ve $d \in [0,1]$ için $a \leq b$ ve $c \leq d$ iken $a * c \leq b * d$

şartlarını sağlıyorsa $*$ işlemine üçgen norm (t-norm) denir [6].

Tanım 2.2

$\diamond$: $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ bir ikili işlem olsun. Eğer her $a, b, c, d \in [0,1]$ için

- i) $\diamond$ değişmeli ve birleşimli
- ii) $\diamond$ sürekli
- iii) $a \diamond 0 = a$
- iv) $a \leq c$ ve $b \leq d$ ise $a \diamond b \leq c \diamond d$ dir [1,2].

şartları sağlanıyorsa $\diamond$ işlemine sürekli t-conormdur denir [7,8].

Birkaç sürekli t-conorm örneği;

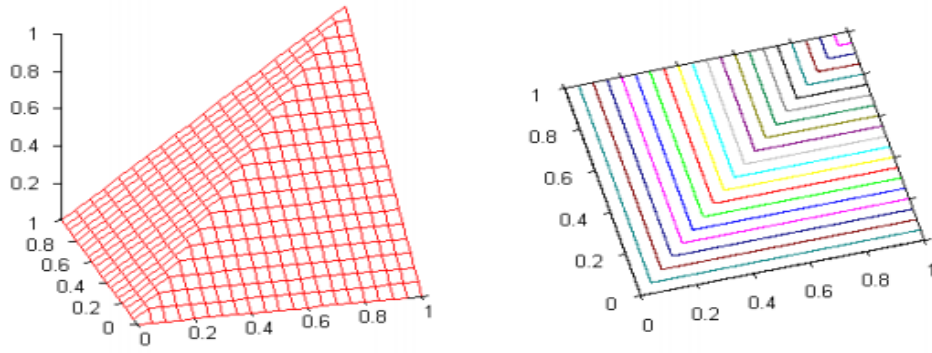
$$a \diamond b = a + b - ab$$

$$a \diamond b = \max\{a, b\}$$

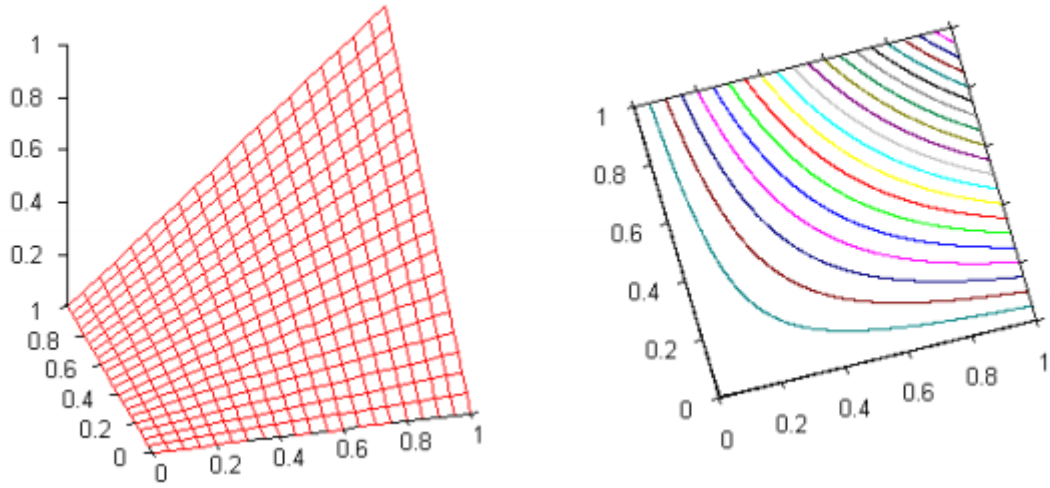
$$a \diamond b = \min\{a + b, 1\} \text{ dir.}$$

Her $\diamond$ conorm için $\max\{a, b\} \leq a \diamond b$ gerçekleşir.

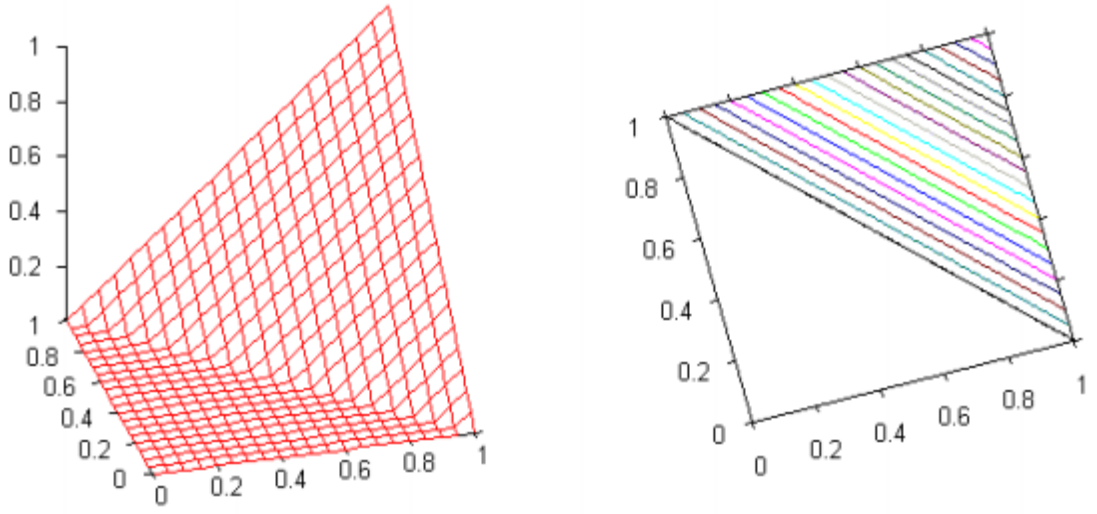
Aşağıdaki şekillerde bu t-norm ve t-conormların üç ve iki boyuttaki grafikleri verilmiştir.



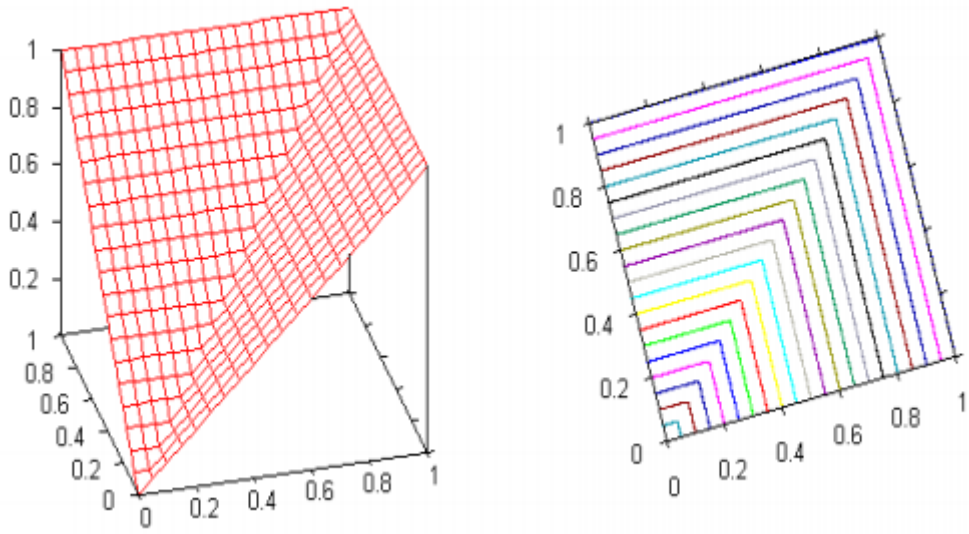
Şekil 2.1. $T_1(x,y)=\min\{x,y\}$ t-normu



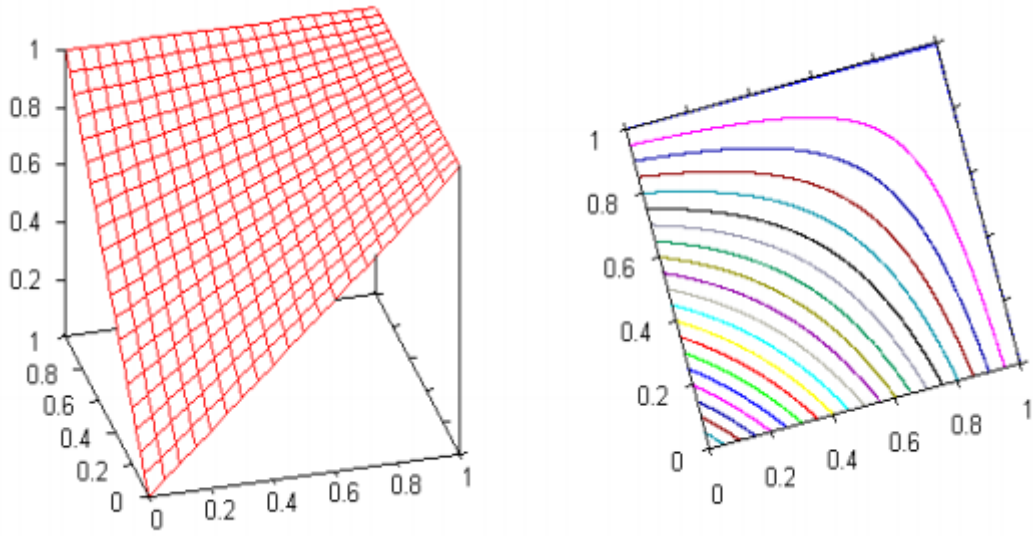
Şekil 2.2. $T_2(x,y)=xy$ t-normu



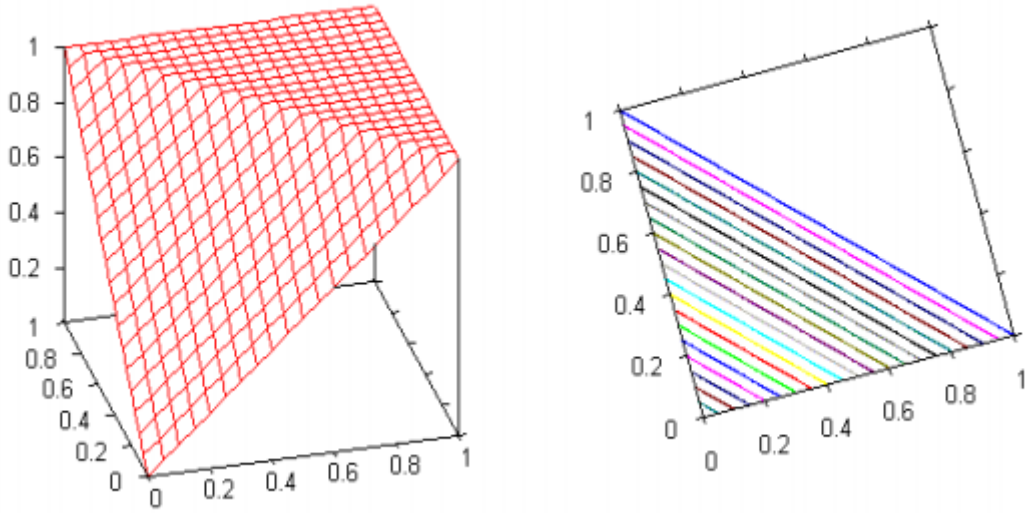
Şekil 2.3. $T_3(x,y)=\max\{0,x+y-1\}$ t-normu



Şekil 2.4. $S_1(x,y)=\max\{x,y\}$ t-conormu



Şekil 2.5. $S_2(x,y)=x+y-xy$ t-conormu



Şekil 2.6. $S_3(x,y)=\min\{1,x+y\}$ t-conormu

Tanım 2.3

X , F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun (F ; reel veya kompleks sayılar cismi). N^* , $X \times R$ nin bir fuzzy alt kümesi olsun. Eğer N^* , her $x, y \in X, \forall c \in F$ için,

$$(N^*1) \forall t \in R \text{ ve } t \leq 0 \text{ için } N^*(x, t) = 1$$

$$(N^*2) \forall t \in R \text{ ve } t > 0 \text{ için } N^*(x, t) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$(N^*3) \forall t \in R \text{ ve } t > 0 \text{ için } N^*(cx, t) = \begin{cases} N^*\left(x, \frac{t}{|c|}\right) & ; \quad c \neq 0 \\ 1 & ; \quad c = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

(N*4) $\forall t, s \in R$ için $N^*(x + y, t + s) \leq maks\{N^*(x, t), N^*(y, s)\}$ dir.

(N*5) $N^*(x, .)$, R de artmayan fonksiyondur öyle ki $\lim_{t \rightarrow \infty} N^*(x, t) = 0$ şartlarını sağlıyorsa N^* ye X da bir B-S fuzzy antinorm denir [9].

Ayrıca,

(N*6) $\forall t \in R$ ve $t > 0$ için $N^*(x, t) < 1$ ise $x = \theta$ olduğunu varsayacağız.

Örnek 1

$(X, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzay olsun. Her $x \in X$, $t \in R$ ve $k, m, n \in R^+$ için

$$N^*: X \times R \rightarrow [0, 1]$$

$$N^*(x, t) = \begin{cases} \frac{m\|x\|}{kt^n + m\|x\|} & ; \quad t > 0 \\ 1 & ; \quad t \leq 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

olarak tanımlanan N^* fonksiyonu X üzerinde bir fuzzy antinormdur.

Eğer $k=m=n=1$ alınırsa

$$N^*(x, t) = \begin{cases} \frac{\|x\|}{t + \|x\|} & ; \quad t > 0 \\ 1 & ; \quad t \leq 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

olup buna $\|\cdot\|$ tarafından indirgenen standart fuzzy antinorm denir.

Tanım 2.4

(X, N^*) B-S fuzzy antinormlu lineer uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Eğer $\forall t > 0$, $r \in (0, 1)$ için en az bir $n_0 \in N$ var $\ni \forall n \geq n_0$ için $N^*(x_n - x, t) < r$ kalıyorsa $\{x_n\}$, x e yakınsıyor denir [10].

Tanım 2.5

(X, N^*) B-S fuzzy antinormlu lineer uzay olsun. X de bir $\{x_n\}$ dizisi eğer $\forall t > 0$

$r \in (0,1)$ ve $p = 1,2,3,\dots$ için $\exists n_0 \in N$ var öyle ki; $t > 0, \forall n \geq n_0$ için

$N^*(x_{n+p} - x_n, t) < r$ oluyorsa bu diziye Cauchy dizisi denir [10].

Tanım 2.6

(X, N^*) B-S fuzzy antinormlu lineer uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $t > 0$

$0 < r < 1$ var öyle ki $\forall x \in A$ için $N^*(x, t) < r$ oluyorsa A ya sınırlıdır denir [10].

Tanım 2.7

(X, N^*) B-S fuzzy antinormlu lineer uzayın bir alt kümesi A olsun. Eğer A da herhangi bir $\{x_n\}$ dizisinin her alt dizisi A nın bir elemanına yakınsıyor ise A ya kompakttır denir [10].

Tanım 2.8

(X, N^*) B-S fuzzy antinormlu lineer uzay olsun. $B \subset X$ olmak üzere B deki her dizinin limiti yine B de kalıyorsa B ye kapalıdır denir.

Yani $\{x_n\} \subset B$ ve $\forall t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} N^*(x_n - x, t) = 0 \Rightarrow x \in B$ [10].

3. FUZZY ANTİNORMLU LİNEER UZAY

Tanım 3.1

$X, F (=R \text{ veya } C)$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $X \times R$ nin bir v alt kümesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa, v ye X de $\diamond$ t-conorm ile bağlı fuzzy antinorm denir [11].

$\forall x, y \in X$ için,

- i) $\forall t \in R$ ve $t \leq 0$ için $v(x, t) = 1$
- ii) $\forall t \in R$ ve $t > 0$ için $v(x, t) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
- iii) $\forall t \in R$ ve $t > 0$ için $v(cx, t) = v(x, t/|c|); c \neq 0, c \in F$
- iv) $\forall s, t \in R$ için $v(x + y, s + t) \leq v(x, s) \diamond v(y, t)$
- v) $\lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) = 0$

Tanım 3.1. Tanım 2.2. nin daha genel halidir. (N^*4) de bulunan maksimum fonksiyonu yerine daha genel olan conorm fonksiyonunu alınacak ve (N^*5) de bulunan $N^*(x, .)$ $t(\in R)$ de artmayandır şartının conorm fonksiyonu tarafından sağladığı Lemma 3.2. de gösterilecektir. Dolayısıyla B-S fuzzy antinormlu lineer uzaylar için verilen tanımlar t-conorma bağlı fuzzy antinormlu lineer uzaylar için de verilebilir.

Lemma 3.2

$(v, \max); X$ de fuzzy antinorm olsun. Bu durumda $(v, \diamond)$ conorm olmak üzere X de fuzzy antinorm olur.

İspat

$N^*(x + y, s + t) \leq N^*(x, s) \diamond N^*(y, t)$ olduğu gösterilmelidir.

$(N^*, \max);$ fuzzy antinorm olduğundan;

$N^*(x + y, s + t) \leq \max\{N^*(x, s), N^*(y, t)\} \leq N^*(x, s) \diamond N^*(y, t)$ dır.

Lemma 3.3

ν , X de $\diamond$ t-conorma bağılı fuzzy antinorm olsun. $\nu(x, t)$; $\forall x \in V$ için t ye göre artmayandır [11].

İspat

$t < s$ ve $k = s - t > 0$ olsun.

$$\nu(x, t) = \nu(x, t) \diamond 0 = \nu(x, t) \diamond \nu(0, k) \geq \nu(x, s) \text{ olur.}$$

Böylece $\nu(x, t) \geq \nu(x, s)$ dir.

Tanım 3.4

$A^* = \{(x, t), \nu(x, t)\} : (x, t) \in X \times R\}$ X lineer uzayında, F cismi üzerinde $\diamond$ t-conorm ile bir fuzzy antinorm olsun. (X, A^*) ; F cismi üzerinde $\diamond$ t-conorm ile fuzzy antinormlu lineer uzay olarak adlandırılır [11].

Ayrıca (X, A^*) fuzzy antinormlu lineer uzayının aşağıdaki şartları sağladığını kabul edelim:

$$\text{vi)} \quad \nu(x, t) < 1, \forall t > 0 \Rightarrow x = \theta \quad (3.1)$$

$$\text{vii)} \quad \nu(x, \cdot) R \text{ nin sürekli bir fonksiyonudur ve } R \text{ nin } \{t: 0 < \nu(x, t) < 1\} \text{ alt kümesinde azalandır.} \quad (3.2)$$

$$\text{viii)} \quad \forall a \in [0, 1] \text{ için } a \diamond a = a \text{ dır.} \quad (3.3)$$

Eş. 3.1. Eş. 3.2 ve Eş. 3.3. şartlarını aynı anda sağlamayan fuzzy antinormlu lineer uzaylar da vardır.

Örnek 1

$(X, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzay olmak üzere, ν fonksiyonunu;

$$\nu: X \times R \rightarrow [0, 1]; \quad a \diamond b = a + b - a.b$$

$$v(x, t) = \begin{cases} 0 & ; \quad t > \|x\| \\ 1 & ; \quad t \leq \|x\| \end{cases} \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlansın.

Bu durumda v , X de bir fuzzy antinormdur ve (X, v) fuzzy antinormlu uzaydır.

Gerçekten;

- i) $\forall t \in R$ ve $t \leq 0$ için $t \leq 0 \leq \|x\|$ olduğundan $v(x, t) = 1$ dır.
- ii) $\forall t \in R$ ve $t > 0$ için $v(x, t) = 0$ olsun. Tanımdan $t > \|x\|$ olmalıdır.

Bu durumda $t > 0$ olduğundan $\|x\| = 0 \Rightarrow x = \theta$ dır.

$x = \theta$ olsun. Bu durumda $\forall t \in R$ ve $t > 0$ için $t > \|x\|$ olduğundan $v(x, t) = 0$ dir.

- iii) $\forall t \in R$ ve $t > 0$ ve $c \neq 0$ için

$$v(cx, t) = \begin{cases} 0 & ; \quad t > \|cx\| \\ 1 & ; \quad t \leq \|cx\| \end{cases} = \begin{cases} 0 & ; \quad t/|c| > \|x\| \\ 1 & ; \quad t/|c| \leq \|x\| \end{cases} = v(x, t/|c|) \text{ dir.}$$

- iv) $v(x, s) \diamond v(y, t) = v(x, s) + v(y, t) - v(x, s) \cdot v(y, t)$ dır.

$s > \|x\|$ ve $t > \|y\|$ olsun $\Rightarrow v(x + y, s + t) = 0$ dir.

$$s + t > \|x\| + \|y\| \text{ ve } v(x, s) \diamond v(y, t) = 0 + 0 - 0$$

$$v(x + y, s + t) = v(x, s) \diamond v(y, t) \text{ olur.}$$

$$s > \|x\| \text{ ve } t \leq \|y\| \text{ olsun } \Rightarrow v(x, s) \diamond v(y, t) = 0 + 1 - 0 = 1$$

$$s \leq \|x\| \text{ ve } t > \|y\| \text{ olsun } \Rightarrow v(x, s) \diamond v(y, t) = 1 + 0 - 0 = 1$$

$$s \leq \|x\| \text{ ve } t \leq \|y\| \text{ olsun } \Rightarrow v(x, s) \diamond v(y, t) = 1 + 1 - 1 = 1$$

$$v(x, s) \diamond v(y, t) = 1 \geq v(x + y, s + t) \text{ olduğu gösterilmiş olur.}$$

$v(x, s) \diamond v(y, t) \geq v(x + y, s + t)$ sağlanır.

v) Tanımdan açıktır ki $\lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) = 0$

Böylece v , X de bir fuzzy antinorm ve (X, v) fuzzy antinormlu lineer uzaydır.

Örnek 1, Eş. 3.1. i sağlar, fakat Eş. 3.2. şartını sağlamaz.

Örnek 2

$(X, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzay ve v fonksiyonu

$$v(x, t) = \begin{cases} 0 & ; \quad t > \|x\|, t > 0 \\ \frac{\|x\|}{t + \|x\|} & ; \quad t \leq \|x\|, t > 0 \\ 1 & ; \quad t \leq 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

olmak üzere $v: X \times R \rightarrow [0, 1]$; $a \diamond b = \min\{a + b, 1\}$ şeklinde tanımlansın.

Bu durumda $v, \diamond$ t-conorm ile X de bir fuzzy antinormdur. (X, v) fuzzy antinormlu uzaydır.

Gerçekten;

i) $t \leq 0$ ise tanımdan $v(x, t) = 1$ dir.

ii) $t > 0$ ve $t > \|x\|$ olsun.

$v(x, t) = 0 \Leftrightarrow t > \|x\| \forall t(> 0) \in R \Leftrightarrow \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ sağlanır.

$t \leq 0$ ve $t \leq \|x\|$ olsun.

$v(x, t) = 0 \Leftrightarrow \frac{\|x\|}{t + \|x\|} = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ sağlanır.

iii) $v(cx, t) = 0 \Leftrightarrow t > \|cx\| \Leftrightarrow t > |c|\|x\| \Leftrightarrow \frac{t}{|c|} > \|x\| \Leftrightarrow v\left(x, \frac{t}{|c|}\right) = 0$

$$v(cx, t) = \frac{\|cx\|}{t + \|cx\|} \Leftrightarrow t \leq \|cx\| \Leftrightarrow \frac{t}{|c|} \leq \|x\| \Leftrightarrow v\left(x, \frac{t}{|c|}\right) = \frac{\|x\|}{\frac{t}{|c|} + \|x\|} = \frac{\|cx\|}{t + \|cx\|}$$

iv) $v(x, s) \diamond v(y, t) = \min\{v(x, s) + v(y, t), 1\}$ şeklinde tanımlanmıştı.

a) $\|x\| \geq s$ ve $\|y\| \geq t$ olsun.

$$\begin{aligned} v(x, s) + v(y, t) &= \frac{\|x\|}{s + \|x\|} + \frac{\|y\|}{t + \|y\|} \\ &= \frac{(t\|x\| + \|x\|\|y\| + s\|y\|) + \|x\|\|y\|}{(t\|x\| + \|x\|\|y\| + s\|y\|) + st} \geq 1 ; \|x\|\|y\| \geq st \end{aligned}$$

Bu durumda $v(x, s) \diamond v(y, t) = 1 \geq v(x + y, s + t)$ dir.

b) $\|x\| \geq s$ ve $\|y\| < t$ olsun.

$\|x + y\| \geq s + t$ veya $\|x + y\| < s + t$ dir.

$$\Rightarrow v(x, s) + v(y, t) = \frac{\|x\|}{s + \|x\|} + 0 < 1 \text{ olur.}$$

$$v(x, s) \diamond v(y, t) = \frac{\|x\|}{s + \|x\|} \text{ elde edilir.}$$

$\|x + y\| \geq s + t$ olsun.

$$\|y\| \leq t \text{ ve } s \leq \|x\| \Rightarrow st < t\|x\| \text{ olur.}$$

Bu durumda;

$$v(x + y, s + t) - v(x, s) \diamond v(y, t) = \frac{\|x + y\|}{s + t + \|x + y\|} - \frac{\|x\|}{s + \|x\|}$$

$$\leq \frac{\|x\| + \|y\|}{s + t + \|x\| + \|y\|} - \frac{\|x\|}{s + \|x\|}$$

$$= \frac{s\|y\| - t\|x\|}{(s + t + \|x\| + \|y\|)(s + \|x\|)}$$

$$< \frac{st - t\|x\|}{(s + t + \|x\| + \|y\|)(s + \|x\|)}$$

≤ 0 olduğu görülür.

Bu durumda $v(x + y, s + t) < v(x, s) \diamond v(y, t)$ elde edilir.

$\|x + y\| < s + t$ olsun.

$$\Rightarrow v(x + y, s + t) = 0 \leq \frac{\|x\|}{s + \|x\|} = v(x, s) \diamond v(y, t) \text{ olur.}$$

Benzer şekilde $\|x\| \geq s$ ve $\|y\| < t$, $\|x\| < s$ ve $\|y\| \geq t$ olduğunda da

$v(x + y, s + t) \leq v(x, s) \diamond v(y, t)$ olduğu gösterilebilir.

c) $\|x\| < s$ ve $\|y\| < t$ olsun.

$$v(x, s) + v(y, t) = 0 + 0 < 1 \text{ olur}$$

$$\Rightarrow v(x, s) \diamond v(y, t) = 0 \text{ dir.}$$

Ayrıca $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| < s + t$ dir.

$$v(x + y, s + t) = 0 \text{ olur.}$$

$$\Rightarrow v(x + y, s + t) = v(x, s) \diamond v(y, t) \text{ dir}$$

Bu durumda $v(x + y, s + t) \leq v(x, s) \diamond v(y, t)$ olduğu görülür.

v) $t > \|x\|$ olduğunda $\lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) = 0$ olduğu açıktır.

$x \neq \theta$ ve $t \leq \|x\|$ olsun.

Bu durumda $\lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) = \frac{\|x\|}{t + \|x\|} = 0$ elde edilir.

$x = \theta$ ve $t \leq \|x\|$ olsun.

$\lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} v(\theta, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} = 0$ elde edilir.

Böylece $\forall x \in V \lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) = 0$ olduğu görülür.

Bu durumda $v, \diamond$ t-conorm ile V de bir fuzzy antinormdur ve (X, v) fuzzy antinormlu uzaydır.

Örnek 2, Eş. 3.1. i sağlar, fakat Eş. 3.2. şartını sağlamaz.

Örnek 3

$(X, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzay olmak üzere, v fonksiyonu;

$v: X \times R \rightarrow [0,1]; a \diamond b = maks\{a, b\}$

$$v(x, t) = \begin{cases} \frac{\|x\|}{t + \|x\|} & ; \quad t > 0 \\ 1 & ; \quad t \leq 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlansın.

$v, \diamond$ t-conorm ile X de bir fuzzy antinormdur ve $\diamond$ t-conorm ile (X, v) fuzzy antinormlu uzaydır.

Gerçekten;

- i) $t \leq 0$ olduğunda tanımdan $v(x, t) = 1$ dir.
- ii) $t > 0$ olsun.

$v(x, t) = 0 \Leftrightarrow \frac{\|x\|}{t + \|x\|} = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ olduğu elde edilir.

iii) $t > 0$ olmak üzere,

$$v(cx, t) = \frac{\|cx\|}{t + \|cx\|} = \frac{\|x\|}{\frac{t}{|c|} + \|x\|} = v\left(x, \frac{t}{|c|}\right) \text{ olduğu görülür.}$$

iv) $v(x, t) \diamond v(y, s) = \max\{v(x, t), v(y, s)\}$ ve $\forall t, s \in R$ ve $\forall x, y \in X$ olmak üzere,

$v(x + y, t + s) \leq \max\{v(x, t), v(y, s)\}$ olduğu gösterilmelidir.

a) $s + t < 0 \Rightarrow s < 0$ veya $t < 0$ dir.

Bu durumda $v(x, t) = 1$ veya $v(y, s) = 1$ olmak zorundadır.

$v(x + y, s + t) = 1 = \max\{v(x, t), v(y, s)\}$ bulunur.

b) $s + t = 0 \Rightarrow s = t = 0$ veya $s = -t$ olabilir.

$s = t = 0 \Rightarrow \square(x + y, s + t) = 1 = \max\{v(x, t) = 1, v(y, s) = 1\}$

$s = -t \Rightarrow v(y, s) = 1$ veya $v(x, t) = 1$ olduğundan;

$v(x + y, t + s) = 1 = \max\{v(x, t) = 1, v(y, s) = 1\}$ bulunur.

c) $s + t > 0$ olduğunda;

$s < 0 < t, t < 0 < s, 0 < t < s, 0 < s < t$ durumları olacaktır.

$s < 0 < t, t < 0 < s$ durumları için;

$v(y, s) = 1$ veya $v(x, t) = 1$ olacağından iki durum içinde $\max\{v(x, t), v(y, s)\} = 1$ olmak zorundadır.

Yani $v(x + y, t + s) \leq \max\{v(x, t), v(y, s)\}$ olacaktır.

$0 < t < s, 0 < s < t$ durumları için;

$v(x, t) > v(y, s)$ veya $v(y, s) > v(x, t)$ durumlarından biri gerçekleşecektir.

$v(x, t) > v(y, s)$ durumu ele alınırsa;

$v(x, t) > v(y, s)$ ise Eş. 3.4 tanımından $\frac{\|x\|}{t+\|x\|} > \frac{\|y\|}{s+\|y\|}$ olmalıdır. Bu durumda;

$$\frac{\|x\|}{t+\|x\|} - \frac{\|y\|}{s+\|y\|} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{s\|x\| - t\|y\|}{(t+\|x\|)(s+\|y\|)} > 0$$

$$\Rightarrow s\|x\| - t\|y\| > 0 \text{ elde edilir.} \quad (3.7)$$

$v(x, t) > v(y, s)$ olduğundan $\max\{v(x, t), v(y, s)\} = v(x, t)$ olacaktır.

Gösterilsin ki; $v(x+y, t+s) \leq \max\{v(x, t), v(y, s)\} = v(x, t)$ dir.

$$\frac{\|x+y\|}{t+s+\|x\|+\|y\|} \leq \frac{\|x\|+\|y\|}{t+s+\|x\|+\|y\|} \text{ sağlanır.}$$

$$\frac{\|x\|}{t+\|x\|} - \frac{\|x\|+\|y\|}{t+s+\|x\|+\|y\|} = \frac{s\|x\| - t\|y\|}{(t+s+\|x\|+\|y\|)(t+\|x\|)}$$

Eş. 3.5. den dolayı;

$$\frac{s\|x\| - t\|y\|}{(t+s+\|x\|+\|y\|)(t+\|x\|)} > 0 \text{ dir.}$$

$$\text{Yani } \frac{\|x\|+\|y\|}{t+s+\|x\|+\|y\|} < \frac{\|x\|}{t+\|x\|} \text{ dir.}$$

$$\text{Buradan } \frac{\|x+y\|}{t+s+\|x+y\|} < \frac{\|x\|}{t+\|x\|} \text{ sağlanmış olur.}$$

Benzer şekilde $v(y, s) > v(x, t)$ durumu da gösterilebilir.

$v(x + y, t + s) \leq maks\{v(x, t), v(y, s)\}$ olduğu görülür.

v) $x = \theta$ ise $\lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|\theta\|}{t + \|\theta\|} = 0$ dir.

$x \neq \theta$ ise $\lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|x\|}{t + \|x\|} = 0$ bulunur.

Her iki durum içinde $\lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) = 0$ dir.

Bu durumda $v, \diamond$ t-conorm ile X de bir fuzzy antinormdur ve $\diamond$ t-conorm ile (X, v) fuzzy antinormlu uzaydır.

Örnek 3, Eş. 3.1 şartını sağlamaz, fakat Eş. 3.2 şartını sağlar.

Örnek 4

$(X, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzay olmak üzere, v fonksiyonu;

$v: X \times R \rightarrow [0,1]; a \diamond b = \min\{a + b, 1\}$

$$v(x, t) = \begin{cases} \frac{\|x\|}{2t - \|x\|} & ; \quad t > \|x\| \\ 1 & , \quad t \leq \|x\| \end{cases} \quad (3.8)$$

şeklinde tanımlansın.

$v, \diamond$ t-conorm ile X de bir fuzzy antinormdur ve $\diamond$ t-conorm ile (X, v) fuzzy antinormlu uzaydır.

Gerçekten;

i) $\forall t \in R$ ve $t \leq 0$ için $t \leq 0 \leq \|x\|$ olduğundan $v(x, t) = 1$ dir.

ii) $\forall t \in R$ ve $t > 0$ ve $t > \|x\|$ olsun. Eş. 3.6 dan $v(x, t) = \frac{\|x\|}{2t - \|x\|}$ olmalıdır.

$$v(x, t) = 0 \Leftrightarrow t > \|x\|; \forall t(> 0) \in R \Leftrightarrow v(x, t) = \frac{\|x\|}{2t - \|x\|} = 0$$

$$\Leftrightarrow \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta \text{ elde edilir.}$$

$$\text{iii) } v(cx, t) = 1 \Leftrightarrow t \leq \|cx\| \Leftrightarrow t \leq |c|\|x\| \Leftrightarrow \frac{t}{|c|} \leq \|x\| \Leftrightarrow v\left(x, \frac{t}{|c|}\right) = 1$$

$$\begin{aligned} v(cx, t) &= \frac{\|cx\|}{2t - \|cx\|} \Leftrightarrow t > \|cx\| \Leftrightarrow t > |c|\|x\| \Leftrightarrow \frac{t}{|c|} > \|x\| \Leftrightarrow v\left(x, \frac{t}{|c|}\right) \\ &= \frac{\|x\|}{2\frac{t}{|c|} - \|x\|} \end{aligned}$$

$$\text{iv) } v(x, s) \diamond v(y, t) = \min\{v(x, s) + v(y, t), 1\} \text{ ve } \forall t, s \in R; \forall x, y \in V$$

olmak üzere,

$$v(x + y, s + t) \leq \min\{v(x, s) + v(y, t), 1\} \text{ olup olmadığı gösterilmelidir.}$$

$$\text{a) } \|x\| \geq s \text{ ve } \|y\| \geq t \text{ olsun.}$$

Bu durumda

$$v(x, s) + v(y, t) = 1 + 1 = 2 > 1 \Rightarrow v(x, s) \diamond v(y, t) = 1 \text{ elde edilir.}$$

$$v(x + y, t + s) \leq 1 \text{ olduğundan;}$$

$$v(x + y, s + t) \leq \min\{v(x, s) + v(y, t), 1\} = 1 \text{ olduğu gösterilmiş olur.}$$

$$\text{b) } \|x\| \geq s \text{ ve } \|y\| < t \text{ olsun. } \|x + y\| \geq s + t \text{ veya } \|x + y\| < s + t \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow v(x, s) + v(y, t) = 1 + \frac{\|y\|}{2t - \|y\|} > 1 \text{ olur.}$$

$$\text{Bu durumda } v(x, s) \diamond v(y, t) = 1 \text{ elde edilir.}$$

$\|x + y\| \geq s + t$ olsun.

Bu durumda $v(x + y, s + t) = 1$ dir.

Böylece $v(x + y, s + t) = v(x, s) \diamond v(y, t)$ elde edilir.

$\|x + y\| < s + t$ olsun.

$v(x + y, s + t) \leq 1$ ve $v(x, s) \diamond v(y, t) = 1$ olduğundan

$v(x + y, s + t) \leq v(x, s) \diamond v(y, t)$ olduğu gösterilmiş olur.

Benzer şekilde $\|x\| \geq s$ ve $\|y\| < t$ olduğunda gösterildiği gibi

$\|x\| < s$ ve $\|y\| \geq t$ olduğunda da $v(x + y, s + t) \leq v(x, s) \diamond v(y, t)$ olduğu gösterilebilir.

c) $\|x\| < s$ ve $\|y\| < t$ olsun.

Bu durumda;

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| < s + t \text{ dir.} \quad (3.9)$$

Kabul edelim ki; $v(x, s) + v(y, t) < 1$ olsun.

Bu durumda;

$$v(x, s) \diamond v(y, t) = v(x, s) + v(y, t) \text{ sağlanır.}$$

Gösterelim ki; $v(x + y, s + t) \leq v(x, s) \diamond v(y, t)$ dir.

$v(x + y, s + t) - v(x, s) \diamond v(y, t)$ incelenirse;

$$v(x + y, s + t) - v(x, s) \diamond v(y, t) = \frac{\|x + y\|}{2(s + t) - \|x + y\|} - \frac{\|x\|}{2s - \|x\|} - \frac{\|y\|}{2t - \|y\|}$$

Eş. 3.7 eşitliğinden;

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\|x+y\|}{2(s+t)-\|x\|-\|y\|} - \frac{\|x\|}{2s-\|x\|} - \frac{\|y\|}{2t-\|y\|} \\
&\leq \frac{\|x\|+\|y\|}{2(s+t)-\|x\|-\|y\|} - \frac{\|x\|}{2s-\|x\|} - \frac{\|y\|}{2t-\|y\|} \\
&= \frac{\|x\|}{2s+2t-\|x\|-\|y\|} + \frac{\|y\|}{2s+2t-\|x\|-\|y\|} - \frac{\|x\|}{2s-\|x\|} - \frac{\|y\|}{2t-\|y\|} \\
&\leq \frac{\|x\|}{2s-\|x\|} + \frac{\|y\|}{2t-\|y\|} - \frac{\|x\|}{2s-\|x\|} - \frac{\|y\|}{2t-\|y\|} ; 2s-\|x\| > 0, 2t-\|y\| > 0 \\
&\leq 0 \text{ elde edilir.}
\end{aligned}$$

Bu durumda $v(x+y, s+t) \leq v(x, s) \diamond v(y, t)$ dir.

Kabul edelim ki $v(x, s) + v(y, t) \geq 1$ olsun.

Bu durumda $v(x, s) \diamond v(y, t) = 1$ olur. $v(x+y, s+t) \leq 1$ olduğundan her iki kabul için de $v(x+y, s+t) \leq v(x, s) \diamond v(y, t)$ sağlanır.

$v) x = \theta$ ise $\lim_{t \rightarrow \infty} v(\theta, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|\theta\|}{2t-\|\theta\|} = 0$ dir.

$x \neq \theta$ ise $\lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|x\|}{2t-\|x\|} = 0$ bulunur.

Her iki durum içinde $\lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) = 0$ dir.

Bu durumda $v, \diamond$ t-conorm ile X de bir fuzzy antinormdur ve $\diamond$ t-conorm ile (X, v) fuzzy antinormlu uzaydır.

Örnek 4, Eş. 3.1 ve Eş. 3.2 şartlarını sağlar.

Teorem 3.5

(X, N^*) ; $\diamond$ t-conorm ile fuzzy antinormlu liner uzay olsun. Ayrıca Tanım 3.4 de verilen Eş.

3.1 ve Eş. 3.2 şartları sağlansın. $\forall \alpha \in (0,1)$ için;

$$\|x\|_{\alpha}^* = \bigwedge \{t > 0 : v(x, t) \leq 1 - \alpha\} \quad (3.10)$$

şeklinde tanımlanan $\|x\|_{\alpha}^* : X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu X üzerinde bir normdur [11].

İspat

i) $\forall x \in X \quad \alpha \in (0,1)$ için antinorm tanımından;

$$t \leq 0 \text{ için } v(x, t) = 1 \Rightarrow \bigwedge \{t > 0 : v(x, t) \leq 1 - \alpha\} \geq 0$$

$$\Rightarrow \|x\|_{\alpha}^* \geq 0 \text{ dir.}$$

ii) v ; antinorm olduğundan, $\forall t \in R, t > 0$ için

$$\|x\|_{\alpha}^* = 0 \Rightarrow v(x, t) \leq 1 - \alpha < 1 \text{ sağlanır. Eş. 3.1 den } x = \theta \text{ olur.}$$

Tersine;

$$x = \theta \Rightarrow v(x, t) = 0; \forall t \in R, t > 0 \Rightarrow \bigwedge \{t > 0 : v(x, t) \leq 1 - \alpha\} = 0; \forall \alpha \in (0,1)$$

$$\Rightarrow \|x\|_{\alpha}^* = 0$$

iii) Kabul edelim ki; $c \neq 0$ olsun

$$\|cx\|_{\alpha}^* = \bigwedge \{s > 0 : v(cx, s) \leq 1 - \alpha\}$$

$$= \bigwedge \left\{ s > 0 : v\left(x, \frac{s}{|c|}\right) \leq 1 - \alpha \right\}$$

$$= \bigwedge \{|c|t > 0 : v(x, t) \leq 1 - \alpha\}$$

$$= |c| \bigwedge \{t > 0 : v(x, t) \leq 1 - \alpha\}$$

$$= |c| \|x\|_{\alpha}^* \text{ sağlanır.}$$

Kabul edelim ki; $c = 0$ olsun.

$$\|cx\|_{\alpha}^* = \|\theta\|_{\alpha}^* = 0 = 0. \|x\|_{\alpha}^* = |c|\|x\|_{\alpha}^* \text{ elde edilir.}$$

$$\text{iv) } \|x\|_{\alpha}^* + \|y\|_{\alpha}^* = \|x + y\|_{\alpha}^* \text{ sağlandığı gösterilmelir.}$$

$$\|x\|_{\alpha}^* + \|y\|_{\alpha}^* = \bigwedge \{t > 0: v(x, t) \leq 1 - \alpha\} + \bigwedge \{s > 0: v(y, s) \leq 1 - \alpha\}; \forall \alpha \in (0,1)$$

$$\geq \bigwedge \{t + s > 0: v(x, t) \leq 1 - \alpha, v(y, s) \leq 1 - \alpha\}$$

Eş. 3.3 den;

$$\geq \bigwedge \{t + s > 0: v(x + y, t + s) \leq 1 - \alpha\}$$

$$= \|x + y\|_{\alpha}^* \text{ elde edilir.}$$

Böylece $\{\|\cdot\|_{\alpha}^*\}$ X de bir normdur.

Lemma 3.6

(X, N^*) ; $\diamond$ t-conorm ile fuzzy antinormlu lineer uzay olsun.

$$\|x\|_{\alpha}^* = \bigwedge \{t > 0: v(x, t) \leq 1 - \alpha\} \quad (3.10)$$

şeklinde tanımlanan $\|x\|_{\alpha}^*: X \rightarrow [0, \infty)$ norm [3] de bulunan Teorem 3.2 nin genel halidir. [3] de Teorem 3.2 de $v(x, t) < \alpha$ yerine $v(x, t) < 1 - \alpha$ yazarak Teorem 3.9 elde edilir [11].

Teorem 3.7

(X, N^*) ; $\diamond$ t-conorm ile fuzzy antinormlu lineer uzay olsun. $\alpha_1 \leq \alpha_2 \Rightarrow \|x\|_{\alpha_1}^* \leq \|x\|_{\alpha_2}^*$ dir.

Yani $\{\|\cdot\|_{\alpha}^*: \alpha \in (0,1)\}$ ailesi X de artan norm ailesidir [11].

İspat

$\alpha_1 \leq \alpha_2$ olsun. Gösterlim ki; $\|x\|_{\alpha_1}^* \leq \|x\|_{\alpha_2}^*$ dir.

$\alpha_1 \leq \alpha_2$ kabul edildiğinden;

$\{t > 0: v(x, t) \leq 1 - \alpha_2\} \subset \{t > 0: v(x, t) \leq 1 - \alpha_1\}$ olur.

$\Rightarrow \Lambda\{t > 0: v(x, t) \leq 1 - \alpha_2\} \geq \Lambda\{t > 0: v(x, t) \leq 1 - \alpha_1\}$

$\Rightarrow \|x\|_{\alpha_2}^* \geq \|x\|_{\alpha_1}^*$

Fuzzy de Riesz teoremini tanımlarken kullanılmak üzere v için başka bir tanım verilecektir.

Teorem 3.8

(X, N^*) ; Eş. 3.1, Eş. 3.2 ve Eş.3.3 şartlarını sağlayan $\diamond$ t-conorm ile fuzzy antinormlu linner uzay olsun.

$v': X \times R \rightarrow [0,1];$

$$v'(x, t) = \begin{cases} \Lambda\{1 - \alpha: \|x\|_{\alpha}^* \leq t\} & ; (x, t) \neq (\theta, 0) \\ 1 & ; (x, t) = (\theta, 0) \end{cases} \quad (3.11)$$

şeklinde tanımlansın.

Eğer $\|\cdot\|_{\alpha}^*$; Eş. 3.10 de verilen normların artan bir ailesi ise $v' = v$ dir [11].

Bu teoremi ispatlarken kullanılan bir Lemma verilecektir.

Lemma 3.9

(X, N^*) ; Eş. 3.1, Eş. 3.2, ve Eş. 3.3 şartlarını sağlayan $\diamond$ t-conorm ile fuzzy antinormlu linner uzay olsun. $\{\|\cdot\|_{\alpha}^*: \alpha \in (0,1)\}$ Eş. 3.10 de tanımlanan X nin normlarının artan bir

ailesi olmak üzere; $\|x_0\|_{\alpha}^* = s \Leftrightarrow v(x_0, s) = 1 - \alpha$ dir [11].

İspat

($\Rightarrow$): Kabul edelim ki; $\|x_0\|_\alpha^* = s$ ve $s > 0$ olsun. Gösterelim ki; $v(x_0, s) = 1 - \alpha$ dir.

$v(x_0, s_n) \leq 1 - \alpha, \forall n \in N$ için $n \rightarrow \infty$ iken $s_n \rightarrow s$ olacak şekilde $\{s_n\}_{n \in N}; s_n > 0$ dizisi verilsin.

Eş. 3.2 den;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(x_0, s_n) \leq 1 - \alpha \Rightarrow v\left(x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} s_n\right) \leq 1 - \alpha \text{ dir.}$$

Eş. 3.2 ve azalan olduğundan;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \leq \|x\|_\alpha^* \Rightarrow 1 - \alpha \geq v\left(x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} s_n\right) \geq v(x_0, \|x\|_\alpha^*) \text{ olmalıdır.}$$

$$\Rightarrow v(x_0, \|x\|_\alpha^*) \leq 1 - \alpha; \forall \alpha \in (0,1) \text{ elde edilir.}$$

$\alpha \in (0,1), x_0 (\neq \theta) \in X$ için Lemma 3.14 den $s = \|x\|_\alpha^* = \bigwedge \{t: v(x, t) \leq 1 - \alpha\}$ olarak tanımlanmıştı. Eş. 3.2 den $v(x, \cdot)$ sürekli dir.

Kabulümüzden;

$$v(x_0, s) \leq 1 - \alpha \tag{3.12}$$

ve Eş.3.2 den v azalan olduğundan;

$$s' > s \text{ iken } v(x_0, s') < v(x_0, s) < 1 - \alpha \text{ sağlanır.}$$

Ancak bu $s = \bigwedge \{t: v(x, t) \leq 1 - \alpha\}$ olduğunda imkansızdır.

Böylece;

$$v(x_0, s) \geq 1 - \alpha \tag{3.13}$$

olmak zorundadır.

Bu durumda Eş. 3.12 ve Eş. 3.13 den $v(x_0, s) = 1 - \alpha$ olmak zorundadır.

Böylece;

$$s = \|x\|_\alpha^* \Rightarrow v(x_0, s) = 1 - \alpha \text{ sağlanır.} \quad (3.14)$$

($\Leftarrow$):

Kabul edelim ki; $v(x_0, s) = 1 - \alpha$ olsun. Gösterelim ki; $\|x_0\|_\alpha^* = s$ dir.

Şimdi $v(x_0, s) = 1 - \alpha$, $\alpha \in (0,1)$ olsun.

Eş. 3.2 den;

$$\|x\|_\alpha^* = \Lambda\{t: v(x, t) \leq 1 - \alpha\} = s \text{ sağlanır.} \quad (3.15)$$

Böylece Eş.3.14 ve Eş. 3.15 den $\alpha \in (0,1)$, $x_0(\neq \theta) \in V$ için

$s > 0$, $\|x_0\|_\alpha^* = s \Leftrightarrow v(x_0, s) = 1 - \alpha$ elde edilir.

Teorem 3.8 in ispatına geçilirse;

$(x_0, t_0) \in X \times R$ olsun. Bu teoremin ispatlamak için aşağıdaki 5 durumun incelenmesi gerekir.

Durum 1;

$x_0 \in V, t \leq 0$ için antinorm tanımından $v(x_0, t_0) = v'(x_0, t_0) = 1$ dir.

Durum 2;

$x_0 = \theta, t_0 > 0$ için $v(x_0, t_0) = v'(x_0, t_0) = 0$ dir.

Durum 3;

$x_0 \neq \theta, t_0(> 0) \in R \ni v(x_0, t_0) = 1$ olsun. $\forall \alpha \in (0,1)$ için Lemma 3.9 dan

$v(x_0, \|x\|_\alpha^*) = 1 - \alpha$ olduğu bilinmekedir.

$v(x_0, t_0) = 1 > 1 - \alpha \Rightarrow v(x_0, \|x\|_\alpha^*) \leq 1 - \alpha < v(x_0, t_0)$ olur.

$v(x_0, \cdot)$ kesinlikle artmayan olduğundan ve $t_0 < \|x\|_\alpha^*, \forall \alpha \in (0,1)$ dir.

Bu yüzden $v'(x_0, t_0) = \bigwedge \{1 - \alpha: \|x\|_\alpha^* \leq t_0\} = 1$ dir.

Böylece $v(x_0, t_0) = v'(x_0, t_0) = 1$ olduğu görülür.

Durum 4;

$x_0 \neq \theta, t_0(> 0) \in R \ni v(x_0, t_0) = 0$ olsun. Eş. 3.10 den; $\forall \alpha \in (0,1)$ için $\|x\|_\alpha^* < t_0$ dir.

Böylece $\|x\|_\alpha^* < t_0 \Rightarrow v'(x_0, t_0) = 0$ Eş. 3.11 dan gerçekleşir.

Durum 5;

$x_0 \neq \theta, t_0(> 0) \in R \ni 0 < v(x_0, t_0) < 1$ olsun.

Kabul edelim ki; $v(x_0, t_0) = 1 - \beta$ olsun.

Eş. 3.10 den $\|x\|_\beta^* \leq t_0$ sağlanır. (3.16)

Eş. 3.11 da Eş. 3.16 kullanılırsa $v(x_0, t_0) \leq 1 - \beta$ elde edilir.

Bu durumda $v(x_0, t_0) \geq v'(x_0, t_0)$ olur. (3.17)

Lemma 3.9 dan $v(x_0, t_0) = 1 - \beta \Leftrightarrow \|x\|_\beta^* = t_0$ dir.

Kabul edelim ki; $\beta < \alpha < 1$ için $\|x\|_\alpha^* = t'$ olsun. Lemma 3.9 dan $v(x_0, t') = 1 - \alpha$ dir.

Buradan $v(x_0, t') = 1 - \alpha < 1 - \beta = v(x_0, t_0)$ elde edilir. $v(x_0, \cdot)$ kesinlikle monoton azalan ve $v(x_0, t') < v(x_0, t_0)$ olduğundan $t' > t_0$ dir.

$\beta < \alpha < 1$ için $\|x\|_\alpha^* = t' > t_0$ olduğundan

$v'(x_0, t_0) \geq 1 - \beta = v(x_0, t_0)$ olur. Eş. 3.16 ve Eş. 3.17 $v(x_0, t_0) = v'(x_0, t_0)$ olduğu görülür.

Beş duruma bakıldığında $(x_0, t_0) \in V \times R$ için $v(x_0, t_0) = v'(x_0, t_0)$ olduğu görülür.

Bu durumda $(x, t) \in V \times R$ için $v(x, t) = v'(x, t)$ olduğu görülür. Yani $v = v'$ dir.

Lemma 3.10

(X, N^*) ; Eş. 3.1, Eş. 3.2 ve Eş. 3.3 şartlarını sağlayan $\diamond$ t-conorm ile fuzzy antinormlu lineer uzay olsun. Bir $\{x_n\} \subset X$ dizi yakınsaktır $\Leftrightarrow$ Bu durumda $\{x_n\} \subset X$ dizisi;

$\alpha \in (0,1)$ olmak üzere uygun α -normlara göre yakınsaktır [11].

İspat

$(\Rightarrow)$:

(X, N^*) ile fuzzy antinormlu linner uzay ve Eş. 3.1 ve Eş. 3.2 sağlansın.

$\{x_n\}_{n \in N}$ X de bir dizi ve $x_n \rightarrow x$ olsun. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} v(x_n - x, t) = 0, \forall t > 0$ dir.

Kabul edelim ki; $0 < \alpha < 1$ olsun.

$\lim_{n \rightarrow \infty} v(x_n - x, t) = 0 < 1 - \alpha \Rightarrow n_0(t)$ var $\ni \forall n \geq n_0(t, \alpha)$ için

$v(x_n - x, t) < 1 - \alpha$ dir. (3.18)

$\|x_n - x\|_\alpha^* = \Lambda\{t > 0: v(x_n - x, t) \leq 1 - \alpha\} \Rightarrow \|x_n - x\|_\alpha^* \leq t, \forall n \geq n_0(\alpha, \varepsilon)$ dir.

$t > 0$ keyfi sabit olduğundan $\forall \alpha \in (0,1)$ için $n \rightarrow \infty$ iken $\|x_n - x\|_\alpha^* \rightarrow 0$ dir.

$(\Leftarrow)$:

$\forall \alpha \in (0,1)$ için $n \rightarrow \infty$ iken $\|x_n - x\|_\alpha^* \rightarrow 0$ olduğunu kabul edelim.

$\alpha \in (0,1)$, $\varepsilon > 0$ için $n_0(\alpha, \varepsilon)$ var $\ni \forall n \geq n_0(\alpha, \varepsilon)$ $\alpha \in (0,1)$ için

$$\|x_n - x\|_{\alpha}^* < \varepsilon \text{ olur.} \quad (3.19)$$

$v(x_n - x, t) = \wedge \{1 - \alpha : \|x_n - x\|_{\alpha}^* \leq \varepsilon\}$ alalım.

$$\Rightarrow v(x_n - x, \varepsilon) \leq 1 - \alpha; \forall n \geq n_0(\alpha, \varepsilon), \alpha \in (0,1)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} v(x_n - x, \varepsilon) = 0 \text{ elde edilir.}$$

Böylece $x_n \rightarrow x$ olduğu gösterilmiş olur.

Lemma 3.11

(X, N^*) ; Eş. 3.1, Eş. 3.2, Eş.3.3 şartlarını sağlayan $\diamond$ t-conorm ile fuzzy antinormlu linner uzay olsun. $W \subseteq X$, (X, N^*) da kapalıdır $\Leftrightarrow \alpha \in (0,1)$ olmak üzere $W \subseteq X$ α -normlara göre kapalıdır [11].

Lemma 3.12 fuzzy de sonlu boyutlu bir uzay kompakt küme ile fuzzy anlamda karakterize edecektir. Bu bizi fuzzy antinormlara göre sonlu boyutlu ve sonsuz boyutlu uzaylar arasındaki temel farklara yönlendirecektir.

Lemma (Riesz) 3.12

W ; (X, v) $\diamond$ t-conorm ile Eş. 3.1, Eş. 3.2, Eş.3.3 şartlarını sağlayan fuzzy antinormlu lineer uzayının kapalı öz alt kümesi olsun.

$\forall \varepsilon > 0, \forall \alpha \in (0,1)$ ve $w \in W$ için;

$$\exists y \in X - W \text{ var } \ni v(y, 1) \leq 1 - \alpha \text{ ve } v(y - w, 1 - \varepsilon) \leq 1 - \alpha \text{ [11].}$$

İspat

$\|x\|_{\alpha}^* = \wedge \{t : v(x, t) \leq 1 - \alpha\}$, $\alpha \in (0,1)$ ve $\{\|\cdot\|_{\alpha}^* : \alpha \in (0,1)\}$, X lineer uzayında α normlarının artan bir ailesi olarak tanımlansın.

Normlu uzaylar için riesz teoremine göre;

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists y \in X - W \ni \|y\|_{\alpha}^* = 1 \quad (3.20)$$

$$\|y - w\|_{\alpha}^* > 1 - \varepsilon, \forall w \in W \text{ dir.} \quad (3.21)$$

Teorem 3.8 den $\forall \alpha \in (0,1)$ için;

$$\nu(y, t) = \Lambda\{1 - \alpha: \|y\|_{\alpha}^* \leq t\}$$

$$\Rightarrow \square(y, 1) = \Lambda\{1 - \alpha: \|y\|_{\alpha}^* \leq 1\}$$

$$\Rightarrow \square(y, 1) \leq 1 - \alpha \text{ olduğu biliniyor.}$$

Tekrar $\nu(y - w, t)$ bakılırsa;

$$\nu(y - w, t) = \Lambda\{1 - \alpha: \|y - w\|_{\alpha}^* \leq t\}$$

$$\Rightarrow \square(y - w, \varepsilon) = \Lambda\{1 - \alpha: \|y - w\|_{\alpha}^* \leq \varepsilon\}$$

$$\Rightarrow \square(y - w, \varepsilon) \leq 1 - \alpha \text{ elde edilir.}$$

Teorem 3.13

(X, N^*) ; Eş. 3.1, Eş. 3.2, Eş.3.3 şartlarını sağlayan $\diamond$ t-conorm ile fuzzy antinormlu lineer uzay olsun.

Eğer $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere $\{x: \nu(x, t) \leq 1 - \alpha\}$ kümesi kompakt ise X sonlu boyutlu uzaydır [11].

İspat

$\{x: \nu(x, t) \leq 1 - \alpha\} = \{x: \|x\|_{\alpha}^* \leq 1\}$, $\alpha \in (0,1)$ olduğu gösterilebilir. Lemma 3.12 den yararlanılarak $\alpha \in (0,1)$ için $\{x: \|x\|_{\alpha}^* \leq 1\}$ kümesi kompakt ise X nin sonlu boyutlu

olduğu gösterilebilir. Lemma 3.10 dan $\alpha \in (0,1)$ için $\{x: v(x, t) \leq 1 - \alpha\}$ kompakttır. Bu ise X nin sonlu boyutlu olduğunu söyler.

4. FUZZY α - ANTİ YAKINSAKLIK

Bu bölümde fuzzy α -anti-yakınsaklık, fuzzy α -anti-Cauchylik, fuzzy α -anti kompaktlık ile artan normlar ailesinin uygunluğu incelenmiştir.

Teorem 4.1

(X, N^*) ; Eş. 3.1, Eş. 3.2, Eş.3.3 şartlarını sağlayan $\diamond$ t-conorm ile fuzzy antinormlu linner uzay olsun. Ayrıca Eş. 3.10 de tanımlanan $\{\|\cdot\|_\alpha^*: \alpha \in (0,1)\}$ X nin normlarının artan bir ailesi olsun. $(0,1)$ de keyfi artan (veya azalan) $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisini alalım. Eğer $(0,1)$ de $\alpha_n \rightarrow \alpha$ ise $\forall x \in V$ için $\|x\|_{\alpha_n}^* \rightarrow \|x\|_\alpha^*$ dir [11].

İspat

$x = \theta$ olsun. $\alpha_n \rightarrow \alpha \Rightarrow \|x\|_{\alpha_n}^* \rightarrow \|x\|_\alpha^*$ olduğu açıktır.

$x \neq \theta$ olsun. Lemma 3.13 dan $x \neq \theta, \alpha \in (0,1)$ ve $t' > 0$ olmak üzere;

$\|x\|_\alpha^* = t' \Leftrightarrow \square(x, t') = 1 - \alpha$ gerçekleşir..

$(0,1)$ de $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisini alalım öyle ki $\alpha_n \rightarrow \alpha$ olsun.

Ayrıca $\|x\|_{\alpha_n}^* = s_n$ ve $\|x\|_\alpha^* = s$ olsun. Bu durumda Lemma 3.13 den

$$v(x, s_n) = 1 - \alpha_n \text{ ve } v(x, s) = 1 - \alpha \quad (4.1)$$

olur. $\{\|\cdot\|_\alpha^*: \alpha \in (0,1)\}$ normların artan ailesi ve $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ reel sayıların artan bir dizisidir. Ayrıca $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$; reel sayıların artan bir dizisi ve üstten s ile sınırlı olduğundan yakınsaktır.

Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(x, s_n) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \Rightarrow \square(x, \lim_{n \rightarrow \infty} s_n) = 1 - \alpha$$

(4.2)

elde edilir.

Eş. 4.1 ve Eş 4.2 birleştirilirse $v(x, \lim_{n \rightarrow \infty} s_n) = v(x, s)$ elde edilir. Bu $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ olmasını gerektirir. Eş 3.2 şartından dolayı $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x\|_{\alpha_n}^* = \|x\|_{\alpha}^*$ dir.

Benzer şekilde $(0,1)$ de keyfi azalan $\{\alpha_n\}_{n \in N}$ dizisi alınarak $(0,1)$ de $\alpha_n \rightarrow \alpha$ ise

$\forall x \in X$ için $\|x\|_{\alpha_n}^* \rightarrow \|x\|_{\alpha}^*$ olduğu da gösterilebilir.

Tanım 4.2

(X, N^*) ; $\diamond$ t-conorm ile fuzzy antinormlu lineer uzay, $\alpha \in (0,1)$ ve $\{x_n\}_{n \in N}$ X de bir dizi olsun. Eğer $\forall t > 0$ için $x \in X$ var $\ni \lim_{n \rightarrow \infty} v(x_n - x, t) < 1 - \alpha$ ise $\{x_n\}_{n \in N}$ dizisi (X, N^*) da fuzzy α -anti yakınsaktır denir [11].

x noktası, $\{x_n\}_{n \in N}$ dizisinin fuzzy α -antilimiti olarak adlandırılır.

Teorem 4.3

(X, N^*) ; Eş. 3.1, Eş. 3.3 şartlarını sağlayan $\diamond$ t-conorm ile fuzzy antinormlu lineer uzay olsun. Fuzzy α -anti yakınsak dizinin fuzzy α -antilimiti tektir [11].

İspat

$\{x_n\}_{n \in N}$ bir fuzzy α -anti yakınsak olsun. Kabul edelim ki; $\{x_n\}_{n \in N}$ dizisi, X de x ve y noktalarına yakınsasın. Bu durumda $\forall t > 0$ ve $\forall n \in N$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(x_n - x, t) < 1 - \alpha \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} v(x_n - y, t) < 1 - \alpha \text{ sağlanır.}$$

$$v(x - y, t) = v(x - x_n + x_n - y, t)$$

$$= v(x_n - x, t) \diamond v(x_n - y, t)$$

Limit alınırsa;

$$\nu(x - y, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(x_n - x, t) \diamond \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(x_n - y, t)$$

Eş. 3.3 şartını sağladığından dolayı;

$$< (1 - \alpha) \diamond (1 - \alpha) = (1 - \alpha) \text{ gerçeklenir.}$$

Bu durumda $\forall t > 0$ için $\nu(x - y, t) < 1$ olur.

Eş. 3.1 şartından dolayı $x - y = \theta$ olmak zorundadır. Buradan $x = y$ olup $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin fuzzy α -antilimiti tektir.

Teorem 4.4

(X, N^*) ; Eş. 3.1, Eş. 3.3 şartlarını sağlayan $\diamond$ t-conorm ile fuzzy antinormlu lineer uzay olsun. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ X de, $x \in X$ e yakınsayan fuzzy α -anti yakınsak bir dizi olsun. Bu durumda $n \rightarrow \infty$ iken $\|x_n - x\|_\alpha^* \rightarrow 0$ dır [11].

İspat

$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ bir fuzzy α -anti yakınsak olmak üzere kabul edelim ki $x_n \rightarrow x$ olsun. Bu durumda $\forall t > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(x_n - x, t) < 1 - \alpha \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow \exists n_0(t) > 0 \ni \nu(x_n - x, t) < 1 - \alpha, \forall n \geq n_0(t)$$

$$\Rightarrow \exists n_0(t) > 0 \ni \|x_n - x\|_\alpha^* \leq t, \forall n \geq n_0(t).$$

$t > 0$ keyfi olduğundan $n \rightarrow \infty$ iken $\|x_n - x\|_\alpha^* \rightarrow 0$ elde edilir.

Tanım 4.5

(X, N^*) , $\diamond$ t-conorm ile fuzzy antinormlu liner uzay, $\alpha \in (0, 1)$ olsun. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ X de bir

dizi olsun. Eğer $\forall t > 0, p = 1, 2, 3, \dots$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} v(x_n - x_{n+p}, t) \leq 1 - \alpha$ oluyorsa $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine fuzzy α -anti Cauchy dizisidir denir [11].

Teorem 4.6

(X, N^*) ; Eş. 3.3 sağlayan $\diamond$ t-conorm ile fuzzy antinormlu lineer uzay olsun. Bu durumda $\alpha \in (0, 1)$ için (X, N^*) da her fuzzy α -anti yakınsak dizi, (X, N^*) da bir fuzzy α -anti cauchy dizisidir [11].

İspat

$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ bir fuzzy α -anti yakınsak dizi öyle ki $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ x e yakınsasın. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(x_n - x, t) < 1 - \alpha \text{ dir.}$$

$\forall p = 1, 2, 3, \dots$ için;

$$v(x_n - x_{n+p}, t) = v(x_n - x + x - x_{n+p}, t)$$

$$= v\left(x_n - x, \frac{t}{2}\right) \diamond v\left(x_{n+p} - x, \frac{t}{2}\right) \text{ elde edilir.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(x_n - x_{n+p}, t) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v\left(x_n - x, \frac{t}{2}\right) \diamond \lim_{n \rightarrow \infty} v\left(x_{n+p} - x, \frac{t}{2}\right)$$

Eş. 3.3 sağlandığı için;

$$< (1 - \alpha) \diamond (1 - \alpha) = (1 - \alpha) \text{ gerçeklenir.}$$

(X, N^*) da fuzzy α -anti cauchy dizisidir.

Lemma 4.7

Bir (X, N^*) $\diamond$ t-conorm ile fuzzy antinormlu lineer uzayında $\alpha \in (0, 1)$ olmak üzere her sabit dizi (X, N^*) da α -anti Cauchy dizisidir [11].

Teorem 4.8

(X, N^*) ; Eş 3.1 ve Eş. 3.3 şartlarını sağlayan $\diamond$ t-conorm ile fuzzy antinormlu lineer uzay

olsun. Bu durumda $\|\cdot\|_{\alpha}^*$ $\alpha \in (0,1)$ için Eş. 3.10 de tanımlanan X üzerindeki normların artan ailesi olmak üzere $(X, \|\cdot\|_{\alpha}^*)$ da her cauchy dizisi (X, N^*) da bir fuzzy α -anti Cauchy dizisidir [11].

İspat

$\alpha_0 \in (0,1)$ keyfi fakat sabit seçelim.

$\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$; X de $\|\cdot\|_{\alpha_0}^*$ ile bir cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - y_{n+p}\| = 0$ dır.

$\forall \varepsilon (> 0)$ için bir pozitif $n_0(\varepsilon)$ tamsayısı vardır $\ni p = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\|y_n - y_{n+p}\|_{\alpha_0}^* < \varepsilon, \forall n \geq n_0(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \wedge \{t > 0: v(y_n - y_{n+p}, t) \leq 1 - \alpha_0\} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow t(n, p, \varepsilon) < \varepsilon \text{ var } \ni$$

$$v(y_n - y_{n+p}, t(n, p, \varepsilon)) \leq 1 - \alpha_0, \forall n \geq n_0(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \square(y_n - y_{n+p}, \varepsilon) \leq 1 - \alpha_0$$

$\varepsilon (> 0)$ keyfi olduğundan;

$$\forall t > 0 \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} v(y_n - y_{n+p}, t) \leq 1 - \alpha_0 \text{ olup}$$

$\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (X, N^*) da fuzzy α_0 -anti-Cauchy dizisidir.

$\alpha_0 \in (0,1)$ keyfi olduğundan $(X, \|\cdot\|_{\alpha}^*)$ da her Cauchy dizisi $\forall \alpha \in (0,1)$ olmak üzere (X, N^*) da bir fuzzy α -anti Cauchy dizisidir.

Tanım 4.9

(X, N^*) , $\diamond$ t-conorm ile fuzzy antinormlu lineer uzay olsun. Eğer $\alpha \in (0,1)$ için X de her α -anti-Cauchy dizisi, α -anti-yakınsak ise X e fuzzy α -anti-tamdır denir [11].

Teorem 4.10

(X, N^*) ; Eş. 3.1 ve Eş. 3.3 şartlarını sağlayan $\diamond$ t-conorm ile fuzzy antinormlu lineer uzay olsun. (X, N^*) ; $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere fuzzy α -anti tam ise $X, \|\cdot\|_\alpha^*$ ile tamdır [11].

İspat

$\alpha_0 \in (0,1)$ keyfi sabit ve $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$; X de $\|\cdot\|_{\alpha_0}^*$ ile bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda Teorem 4.8 den $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$; (X, N^*) da bir fuzzy α -anti Cauchy dizisidir.

(X, N^*) fuzzy α_0 -anti-tam olsun. Bu durumda

$y \in X$ var $\exists \forall t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} v(y_n - y, t) < 1 - \alpha_0$ gerçekleşir.

Teorem 4.8 gereğince $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - y\|_{\alpha_0}^* = 0$ dır.

Bu durumda $\|\cdot\|_{\alpha_0}^*$ ile $y_n \rightarrow y$ gerçekleşir.

$(X, \|\cdot\|_{\alpha_0}^*)$ tamdır. α_0 keyfi olduğundan $(X, \|\cdot\|_\alpha^*)$ tamdır.

5. FUZZY ANTİ SÜREKLİLİK VE FUZZY ANTİ SINIRLILIK

Bu bölümde fuzzy anti süreklilik, düzgün fuzzy anti süreklilik, güçlü fuzzy anti süreklilik tanımlanarak bunlarla ilişkili bazı teoremler verilmiştir. Bu bölümde (U, A^*) ve (V, B^*) aynı F cismi üzerinde iki fuzzy anti-normlu lineer uzay olarak alınacaktır.

Tanım 5.1

$T: (U, A^*) \rightarrow (V, B^*)$ tanımlı bir dönüşüm olsun. Eğer $x_0 \in U$ olmak üzere $\exists \varepsilon > 0, \alpha \in (0,1)$ için $\delta = \delta(\alpha, \varepsilon), \beta = \beta(\alpha, \varepsilon) \in (0,1)$ vardır öyle ki; her $x \in U$ için $v_U(x-x_0, \delta) < \beta \Rightarrow v_V(T(x) - T(x_0), \varepsilon) < \alpha$ şartı sağlanıyorsa T ye fuzzy anti süreklidir denir [12].

Tanım 5.2

$T: (U, A^*) \rightarrow (V, B^*)$ tanımlı bir dönüşüm olsun. Eğer $x_0 \in U$ olmak üzere her $\{x_n\} \subset U$ için $x_n \rightarrow x_0$ iken $T(x_n) \rightarrow T(x_0)$ oluyorsa yani;

$\forall t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} v_U(x_n - x_0, t) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} v_V(T(x_n) - T(x_0), t) = 0$ gerçekleşiyorsa T ye dizisel fuzzy anti-süreklidir denir [12].

Tanım 5.3

$(U, A^*) \rightarrow (V, B^*)$ tanımlı bir dönüşüm olsun. Eğer $x_0 \in U$ olmak üzere $\exists \varepsilon > 0$ için $\delta = \delta(\alpha, \varepsilon) > 0$ vardır öyle ki; $v_V(T(x) - T(x_0), \varepsilon) \leq v_U(x-x_0, \delta)$ gerçekleşiyorsa T ye güçlü fuzzy anti- süreklidir denir [12].

Tanım 5.4

$T: (U, A^*) \rightarrow (V, B^*)$ tanımlı bir dönüşüm olsun. Eğer $x_0 \in U$ olmak üzere $\exists \varepsilon > 0, \alpha \in (0,1)$ için $\delta = \delta(\alpha, \varepsilon) > 0$ vardır öyle ki; her $x \in U$ için

$v_U(x-x_0, \delta) < 1-\alpha \Rightarrow v_V(T(x) - T(x_0), \varepsilon) < 1 - \alpha$ oluyorsa; T ye zayıf fuzzy anti- süreklidir denir [12].

Teorem 5.5

$T: (U, A^*) \rightarrow (V, B^*)$ tanımlı bir dönüşüm olsun. Eğer T güçlü fuzzy anti-sürekli ise zayıf fuzzy anti-sürekli. Fakat tersi doğru olmak zorunda değildir [12].

Teorem 5.6

$T: (U, A^*) \rightarrow (V, B^*)$ tanımlı bir dönüşüm olsun. Bu durumda T fuzzy anti-sürekli ancak ve ancak T düzgün anti-sürekli [12].

Teorem 5.7

$T: (U, A^*) \rightarrow (V, B^*)$ tanımlı bir dönüşüm olsun. Bu durumda T güçlü fuzzy anti-sürekli ancak ve ancak T düzgün anti-sürekli [12].

Teorem 5.8

$T: (U, A^*) \rightarrow (V, B^*)$ tanımlı bir lineer dönüşüm olsun. Eğer T bir $x_0 \in U$ noktasında dizisel fuzzy anti-sürekli ise T, U da dizisel fuzzy anti-sürekli [12].

İspat

$x \in U$ keyfi bir nokta ve $\{x_n\}_n$; U da bir dizi olsun.

$x_n \rightarrow x$ olmak üzere, $\forall t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} v_U(x_n - x, t) = 0$ sağlanır.

Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} v_U((x_n - x + x_0) - x_0, t) = 0$ dır.

T, x_0 da düzgün fuzzy anti-sürekli olduğundan $\forall t > 0$ için

$\lim_{n \rightarrow \infty} v_V((x_n - x + x_0) - x_0, t) = 0$ sağlanır.

Bu durumda;

$\lim_{n \rightarrow \infty} v_V(T(x_n) - T(x) + T(x_0) - T(x_0), t) = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} v_V(T(x_n) - T(x), t) = 0$ olur.

Böylece; $\lim_{n \rightarrow \infty} v_U(x_n - x, t) = 0, \forall t > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} v_V(T(x_n) - T(x), t) = 0, \forall t > 0$

olduğu görülür.

Tanım 5.9

$T: (U, A^*) \rightarrow (V, B^*)$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall t > 0, \forall x \in U$ için $v_V(T(x), t) \leq v_U(x, \frac{t}{M})$ olacak şekilde bir M bir pozitif reel sayısı var ise T ye güçlü fuzzy anti- sınırlıdır denir [12].

Örnek 1

Sıfır dönüşümü ve birim dönüşüm güçlü fuzzy anti-sınırlıdır [12].

Örnek 2

$(X, \|\cdot\|)$ bir F ($=\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) cismi üzerinde normlu lineer uzay olsun. $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ ve

$\alpha_1 > \alpha_2 > 0$ olsun.

$v_1, v_2: X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow [0,1]$ olmak üzere

$$v_1(x, t) = \frac{\alpha_1 \|x\|}{t + \alpha_1 \|x\|} \quad (5.1)$$

ve

$$v_2(x, t) = \frac{\alpha_2 \|x\|}{t + \alpha_2 \|x\|} \quad (5.2)$$

olarak tanımlansın.

Ayrıca $a \diamond b = \max\{a, b\}$ her $a, b \in [0,1]$ olarak verilsin.

İlk önce v_1, v_2 nin fuzzy anti normlu lineer uzay olduğunu gösterelim.

i) İlk şart tanımdan açıktır.

$$\text{ii) } v_1(x, t) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha_1 \|x\|}{t + \alpha_1 \|x\|} = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

iii) $c \in F$ ve $c \neq 0$

$$v_1(cx, t) = \frac{\alpha_1 \|cx\|}{t + \alpha_1 \|cx\|} = \frac{\alpha_1 \|x\|}{\frac{t}{|c|} + \alpha_1 \|x\|} = v_1\left(x, \frac{t}{|c|}\right)$$

$$\text{iv) } v_1(x + y, s + t) = \frac{\alpha_1 \|x + y\|}{s + t + \alpha_1 \|x + y\|} = \frac{1}{\frac{s + t}{\alpha_1 \|x + y\|} + 1}$$

$$\leq \frac{1}{\frac{s + t}{\alpha_1 \|x\| + \alpha_1 \|y\|} + 1} = \frac{\alpha_1 \|x\| + \alpha_1 \|y\|}{s + t + \alpha_1 \|x\| + \alpha_1 \|y\|}$$

$$\text{Eğer } v_1(x, s) \geq v_1(y, t) \Rightarrow \frac{\alpha_1 \|x\|}{s + \alpha_1 \|x\|} \geq \frac{\alpha_1 \|y\|}{t + \alpha_1 \|y\|} \Rightarrow t\|x\| - s\|y\|$$

Böylece;

$$\frac{\alpha_1 \|x\| + \alpha_1 \|y\|}{s + t + \alpha_1 \|x\| + \alpha_1 \|y\|} - \frac{\alpha_1 \|x\|}{s + \alpha_1 \|x\|} \leq 0 \text{ elde edilir.}$$

$$v_1(x + y, s + t) = \frac{\alpha_1 \|x\| + \alpha_1 \|y\|}{s + t + \alpha_1 \|x\| + \alpha_1 \|y\|} \leq \frac{\alpha_1 \|x\|}{s + \alpha_1 \|x\|} = v_1(x, s) \diamond v_1(y, t)$$

dir.

Benze şekilde eğer $v_1(y, t) \geq v_1(x, s)$ ise

$$v_1(x + y, s + t) = \frac{\alpha_1 \alpha_1 \|y\|}{t + \alpha_1 \|y\|} = v_1(x, s) \diamond v_1(y, t) \text{ olur.}$$

Böylece $v_1(x + y, s + t) \leq v_1(x, s) \diamond v_1(y, t)$ olduğu görülür.

$$v) \lim_{t \rightarrow \infty} v_1(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\alpha_1 \|x\|}{t + \alpha_1 \|x\|} = 0$$

Böylece (X, v_1) bir fuzzy anti normlu lineer uzaydır. Benzer şekilde (X, v_2) bir fuzzy antinormlu lineer uzaydır.

Şimdi $T: (X, v_1) \rightarrow (X, v_2)$ ve $T(x) = rx$; $r \in R \setminus \{0\}$ olacak şekilde T dönüşümü tanımlayalım. Bu durumda T lineer bir dönüşümdür. Ayrıca $M \geq |r|$ ve $x \in X$ olacak şekilde $M > 0$ sabiti seçilirse;

$$M \geq |r| \Rightarrow \alpha_1 \|x\| \geq \alpha_2 |r| \|x\|$$

$$\Rightarrow t + \alpha_1 \|x\| \geq t + \alpha_2 |r| \|x\|; \forall t > 0$$

$$\Rightarrow \frac{t}{t + \alpha_2 |r| \|x\|} \geq \frac{t}{t + \alpha_1 M \|x\|}; \forall t > 0$$

$$\Rightarrow \frac{t}{t + \alpha_2 \|rx\|} \geq \frac{\frac{t}{M}}{\frac{t}{M} + \alpha_1 \|x\|}; \forall t > 0$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{t}{t + \alpha_2 \|rx\|} \leq 1 - \frac{\frac{t}{M}}{\frac{t}{M} + \alpha_1 \|x\|}; \forall t > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_2 \|rx\|}{t + \alpha_2 \|rx\|} \leq \frac{\alpha_1 \|x\|}{\frac{t}{M} + \alpha_1 \|x\|}; \forall t > 0$$

$$v_2(T(x), t) \leq v_1\left(x, \frac{t}{M}\right); \forall t > 0 \text{ ve } \forall x \in X \text{ olur.}$$

Bu durumda T ; X de güçlü fuzzy anti-sınırlıdır.

Tanım 5.10

$T: (U, A^*) \rightarrow (V, B^*)$ olmak üzere eğer $\forall x \in U$ ve her $\alpha \in (0, 1)$ için $M_\alpha (> 0)$ vardır öyle

ki; $t \in R^+$ için $v_U\left(x, \frac{t}{M_\alpha}\right) \leq 1 - \alpha$ iken $v_V(T(x), t) \leq 1 - \alpha$ ise T zayıf fuzzy anti-sınırlıdır denir [10].

Teorem 5.11

$T: (U, A^*) \rightarrow (V, B^*)$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer T güçlü fuzzy anti sınırlı ise zayıf fuzzy anti-sınırlıdır. Fakat tersi doğru olmak zorunda değildir [12].

İspat

Kabul edelim ki T güçlü fuzzy anti-sınırlı olsun.

$\forall x \in U$ için $M > 0$ vardır öyle ki; $\forall t \in R$ için $v_V(T(x), t) \leq v_U\left(x, \frac{t}{M}\right)$ dir.

Bu durumda her $\alpha \in (0,1)$ için $M_\alpha (> 0)$ vardır.

$v_U\left(x, \frac{t}{M}\right) \leq 1 - \alpha \Rightarrow v_V(T(x), t) \leq 1 - \alpha$ olduğu elde edilir.

T; zayıf fuzzy anti sınırlıdır.

Örnek 3; Teorem 5.11 in tersinin doğru olmadığına dairdir.

Örnek 3

$(X, \|\cdot\|)$ bir F (=R, C) cismi üzerinde lineer uzay olsun.

Ayrıca $v_1, v_2 : X \times R \rightarrow [0,1]$ ve $a \diamond b = \max\{a, b\}$ olmak üzere,

$$v_1(x, t) = \begin{cases} \frac{2\|x\|^2}{t^2 + \|x\|^2} & ; \quad t > \|x\| \\ 1 & ; \quad 0 < t \leq \|x\| \end{cases} \quad (5.3)$$

ve

$$v_2(x, t) = \frac{\|x\|}{t + \|x\|} \quad (5.4)$$

şeklinde tanımlansın.

(X, v_1) ve (X, v_2) nin fuzzy anti-normlu lineer uzay olduğu gösterilebilir.

Bir $T: (U, v_1) \rightarrow (V, v_2)$ $T(x)=x \quad \forall x \in X$ olacak şekilde lineer operatör tanımlayalım.

$\alpha \in (0,1)$, $x \in V$ ve $t > 0$ ve $M_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}$ seçelim.

$v_1\left(x, \frac{t}{M_\alpha}\right) \leq 1 - \alpha \Rightarrow v_2(T(x), t) \leq 1 - \alpha$ olduğu gösterilmelidir.

$v_1\left(x, \frac{t}{M_\alpha}\right) \leq 1 - \alpha$ olarak kabul edelim.

$$\Rightarrow \frac{2\|x\|^2}{t^2(1-\alpha)^2 + \|x\|^2} \leq 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{2\|x\|^2}{t^2(1-\alpha)^2 + \|x\|^2} \geq 1 - (1 - \alpha) = \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{t^2(1-\alpha)^2 - \|x\|^2}{t^2(1-\alpha)^2 + \|x\|^2} \geq \alpha$$

$$\Rightarrow t^2(1-\alpha)^3 \geq (1+\alpha)\|x\|^2$$

$$\Rightarrow \|x\| \leq \frac{t(1-\alpha)\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1+\alpha}} \Rightarrow t + \|x\| \leq t \frac{\sqrt{1+\alpha} + (1-\alpha)\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1+\alpha}}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{t + \|x\|} \geq \frac{\sqrt{1+\alpha}}{\sqrt{1+\alpha} + (1-\alpha)\sqrt{1-\alpha}}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{t}{t + \|x\|} \leq 1 - \frac{\sqrt{1+\alpha}}{\sqrt{1+\alpha} + (1-\alpha)\sqrt{1-\alpha}}$$

$$\Rightarrow \frac{\|x\|}{t + \|x\|} \leq \frac{(1 - \alpha)\sqrt{1 - \alpha}}{\sqrt{1 + \alpha} + (1 - \alpha)\sqrt{1 - \alpha}}$$

olur. Ayrıca

$$\frac{(1 - \alpha)\sqrt{1 - \alpha}}{\sqrt{1 + \alpha} + (1 - \alpha)\sqrt{1 - \alpha}} \leq 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 - \alpha} \leq \sqrt{1 + \alpha} + (1 - \alpha)\sqrt{1 - \alpha}$$

$$\Leftrightarrow \alpha\sqrt{1 - \alpha}$$

$$\leq \sqrt{1 + \alpha}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \alpha + \alpha^3 \geq \alpha^2 \text{ ifadesi tüm } \alpha \in (0,1) \text{ için doğrudur.}$$

Bu durumda;

$$v_1\left(x, \frac{t}{M_\alpha}\right) \leq 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow v_2(T(x), t) \leq 1 - \alpha \text{ elde edilir. } T; \text{ zayıf fuzzy anti-sınırlıdır.}$$

Tanım 5.12

$T: (U, A^*) \rightarrow (V, B^*)$ ve $(\|\cdot\|_\alpha^*)$ fuzzy α -anti norm ailesinden olmak üzere

$\|T(x)\|_\alpha^* \geq M\|x\|_\alpha^*$, $\alpha \in (0,1)$ olacak şekilde $M > 0$ varsa T ye düzenli fuzzy anti-sınırlıdır denir [12].

Teorem 5.13

$T: (U, A^*) \rightarrow (V, B^*)$ bir dönüşüm olsun. T güçlü fuzzy anti-sınırlıdır ancak ve ancak α -anti norm ailesinde düzenli fuzzy anti-sınırlıdır [12].

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Fuzzy normlu uzaylar konusu yeni bir çalışma alanına sahiptir. Klasik normlu uzaylardaki kavram buraya aktarılmaktadır. Ayrıca fuzzy kavramının getirmiş olduğu geniş yelpaze bize bir çok farklı örnekler sunmaktadır.

Bu çalışmada fuzzy anti normlu uzaylar incelenmiştir. Klasik normlu uzaylar ile fuzzy antinormlu uzaylar arasında geçiş verilmiştir.

Bu çalışmanın devamında fuzzy antinormlu uzayların karakterizasyonu ve uygulamaları yapılabilir.

KAYNAKLAR

1. Katsaras, A.K. (1989), Fuzzy topological vektör space, *Fuzzy Sets and Systems*, 12, 143-159.
2. Felbin, C. (1993). The completion of fuzzy normed linear space, *Journal of Mathematical Analysis and Application*, 174, 428-440.
3. Chengand, S.C., Mordeson, J.N. (1994). Fuzzy Linear Operators and Fuzzy Normed Linear Spaces, *Bulletin Calculatta Mathematical Society*, 86, 429-436.
4. Bag, T., Samanta, T.K. (2005). Fuzzy bounded linear operators, *Fuzzy Sets and Systems*, 151, 513-547.
5. Bag, T., Samanta, T.K. (2003). Finited imensional fuzzy normed linear space, *The Journal of Fuzzy Mathematics*, 11(3), 687-705.
6. Schweizer, B. And Sklar, A. (1960) Statistical metric spaces, *Pacific Journal of Mathematics*, 10, 314-344
7. Klement, E.P., Mesiar, R., Pap, E., (2000). Triangular norms, *Pacific Journal of Mathematics*, 20, 33-37
8. Schweizer, B., Sklar, A. (1960) Statical metric spaces, *Pacific Journal of Mathematics*, 20, 314-334.
9. Bag, T., Samanta, T.K.(2008). A comparativestudy of fuzzynorms on a linearspace, *Fuzzy Sets and Systems*, 159, 670-684.
10. Iqbal, Jebril, H. and Samanta, T.K. (February,2010). Fuzzy anti-normed lineer space, *Journal of Mathematics and Technology*, 66-77.
11. Dinda, B., Samanta, T.K. and Iqbal Jebril, H. (20 Feb 2012). Fuzzy Anti-norm and Fuzzy α -anti-convergence, *Demonstratio Mathematica Vol. XLV No:4*.
12. Dinda, B., Samanta, T.K. and Iqbal, Jebril H. (19 Feb 2010). Fuzzy Anti-bounded Linear Operator, *General Mathematics*, 12, 10-14.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : SANLI , Elif
 Uyruğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 15.08.1989, Sarıkamış
 Medeni hali : Evli
 Telefon : 0 (539) 872 86 10
 e-mail : elifalkayaa@gmail.com



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik Bölümü	Devam Ediyor
İlisans	Ankara Üniversitesi / Matematik Bölümü	2012
Lise	Şehit Binbaşı Bedir Karabıyık A. L.	2007

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2019-Halen	Hendek M.T.A.L	Matematik Öğretmeni
2017- 2018	Şemdinli Sabri Özel A.L.	Müdür Yardımcısı
2015-2017	Şemdinli Sabri Özel A.L.	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Yüzme, Kitap Okuma



GAZİ GELECEKTİR..