



**RIESZ UZAYLARI ARASINDA TANIMLI İDEAL VE BAND
OPERATÖRLERİN ÖZELLİKLERİ**

Kazım ÖZCAN

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HAZİRAN 2021

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Kazım ÖZCAN

18/06/2021

RIESZ UZAYLARI ARASINDA TANIMLI İDEAL VE BAND OPERATÖRLERİN ÖZELLİKLERİ

(Doktora Tezi)

Kazım ÖZCAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2021

ÖZET

G ve H Riesz uzayları, $T: G \rightarrow H$ bir operatör olsun. Her $I \subseteq G$ ideali için $T(I)$, H içinde ideal oluyorsa T ideal operatör olarak adlandırılır; benzer mantıkla her $B \subseteq G$ bandı için $T(B)$, H içinde band oluyorsa T band operatör olarak adlandırılır. Bu tezde, Riesz uzayları arasında tanımlı ideal ve band operatörlerin özellikleri, hem birbirleri hem de diklik koruyan operatörler ile karşılaştırmaları, sıra sınırlı olma koşulları ve sıra sınırlı yapıda iken sağladıkları özellikler çalışılmıştır. Operatör tersinir iken ideal ve band operatörlerin terslerinin hangi koşullarda yine aynı özelliği sağladıkları araştırılmıştır. Ayrıca diklik koruyan operatörler teorisine ait iki problemin çözümü verilmiş ve band operatör tanımı pre-Riesz uzaylarına genişletilerek özellikleri incelenmiştir.

Bilim Kodu : 20404

Anahtar Kelimeler : Riesz uzayı, pre-Riesz uzayı, ideal operatör, band operatör, sıra sınırlılık

Sayfa Adedi : 89

Danışman : Prof. Dr. Bahri TURAN

PROPERTIES OF IDEAL AND BAND OPERATORS DEFINED BETWEEN RIESZ
SPACES

(Ph. D. Thesis)

Kazım ÖZCAN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2021

ABSTRACT

Let G and H be Riesz spaces, $T: G \rightarrow H$ be an operator. T is called ideal operator if $T(I)$ is an ideal in H for each ideal I in G ; similarly, it is called band operator if $T(B)$ is a band in H for each band B in G . In this thesis, the properties of ideal and band operators defined between Riesz spaces, comparisons between each other as well as with disjointness preserving operators, conditions of being order bounded and their properties when they are order bounded are studied. The conditions in which the invertible ideal and band operators' inverse provide the same properties are researched. Furthermore, solutions of the two problems concerning the theory of disjointness preserving operators are offered and the properties of the band operators are investigated by extending the definition of band operator to pre-Riesz spaces.

Science Code : 20404

Key Words : Riesz space, pre-Riesz space, ideal operator, band operator, order boundedness

Page Number : 89

Supervisor : Prof. Dr. Bahri TURAN

TEŞEKKÜR

Bir matematik öğretmeni olarak gerek yüksek lisans gerekse doktora eğitimim boyunca yaptığım araştırmalar, çalışmalar ve incelemeler, matematik üzerine bakış açımın genişlemesinde ve bilgi dağarcığımın artmasında bana çok önemli katkılar sağlamıştır. Tüm bu süreçlerde bilgi, birikim ve deneyimiyle benden desteklerini hiç esirgemeyen; teorik matematiğin yanında matematik felsefesi alanında da farkındalığının artmasını sağlayan; matematiğin çoğu zaman gözden kaçırdığımız inceliklerini görme noktasında önemli katkılarda bulunan danışmanım Prof. Dr. Bahri TURAN'a ve matematiğin yanında başka konularda da bilgi ve birikimlerinden fazlasıyla yararlandığım Prof. Dr. Cüneyt ÇEVİK'e gönülden teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca lisansüstü eğitimim boyunca benden desteklerini hiç esirgemeyen, moral ve motivasyon kaynaklarım sevgili eşim Serap ve çocuklarım Nehir ile Deniz Nadir'e ve beni yetiştiren anne ve babama sonsuz teşekkürler ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	5
3. BAND OPERATÖRLER.....	11
3.1. Band ve Ters Band Operatörlerin Özellikleri ve Diklik Koruyan Operatörlerle İlişkisi	11
3.2. Sıra Sınırlı Band ve Ters Band Operatörlerin Özellikleri.....	22
3.3. Band Operatörün Sıra Sınırlılığı.....	29
4. İDEAL OPERATÖRLER.....	37
4.1. İdeal ve Ters İdeal Operatörlerin Özellikleri.....	37
4.2. İdeal Operatörün Sıra Sınırlılığı	47
5. İDEAL VE BAND OPERATÖRLERİN KARŞILAŞTIRMASI	55
5.1. İdeal ve Band Operatörler Arasındaki İlişki	55
5.2. Diklik Koruyan Operatörler Teorisine Ait İki Problemin Çözümü	58
6. PRE-RIESZ UZAYLARDA BAND OPERATÖRLER	67
6.1. Pre-Riesz Uzayların Genel Özellikleri.....	67
6.2. Pre-Riesz Uzaylar Arasında Tanımlı Band Operatörlerin Özellikleri	71
7. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	83
KAYNAKLAR	85

ÖZGEÇMİŞ	89
----------------	----

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

$(E, \leq)$	E sıralı vektör uzayı
E^+	E Riesz uzayının pozitif kısmı
I_x	x elemanı tarafından üretilen ideal
I_A	A kümesi tarafından üretilen ideal
B_x	x elemanı tarafından üretilen band
B_A	A kümesi tarafından üretilen band
P_x	Görüntü uzayı B_x olan band projeksiyon
P_A	Görüntü uzayı B_A olan band projeksiyon
(x_α)	Net
$x_\alpha \uparrow$	Yukarı yönlendirilmiş net
$x_\alpha \downarrow$	Aşağı yönlendirilmiş net
$Orth(G)$	G Riesz uzayının orthomorfizmlerinin uzayı
$S(G)$	G Riesz uzayının stabilizeri
$Z(G)$	G Riesz uzayının merkezi
$Z(G)_c$	$Z(G)$ uzayının değişkenleri
$S(G)_c$	$S(G)$ uzayının değişkenleri
$Z(G)_{BC}$	$Z(G)$ uzayının sıra sınırlı değişkenleri
$\{x\}^d$	x elemanının diki
A^d	A kümesinin diki
$\{x\}^{dd}$	x elemanının iki diki
A^{dd}	A kümesinin iki diki
$x \perp y$	x ile y elemanlarının birbirine dikliği
$x \wedge y$	x ile y elemanlarının infimumu
$x \vee y$	x ile y elemanlarının supremumu
$ x $	x elemanının modülü
x^+	x elemanının pozitif kısmı

Simgeler**Açıklamalar** x^- x elemanın negatif kısmı $A \oplus B$ A kümesi ile B kümesinin direkt toplamı $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ (x_α) netinin x elemanına sıra yakınsaması $\{x\}^u$ x elemanın üst sınırları kümesi $\{x\}^l$ x elemanın alt sınırları kümesi A^u A kümesinin üst sınırları kümesi A^l A kümesinin alt sınırları kümesi $posA$ A kümesinin pozitif lineer zarfı X^ρ X sıralı vektör uzayının Riesz tamlaması

1. GİRİŞ

1930’larda birbirlerinden bağımsız olarak F. Riesz, L. V. Kantorovich ve H. Freudenthal tarafından ileri sürülen Riesz uzayları teorisi, yıllar içerisinde farklı yaklaşım, yöntem ve tekniklerle genişlemiş; fonksiyon cebirleri, diferansiyel denklemler, fuzzy uzaylar gibi matematiğin çok farklı alanlarının yanı sıra matematiksel ekonomide de kendisine uygulama alanları bulmuştur. Riesz uzayları teorisi günbegün genişlemekle beraber, 1993’te M. van Haandel [1]’de Riesz uzaylarının daha genel bir hali olan pre-Riesz uzay kavramını ortaya attı. Özellikle son yıllarda yapılan çalışmalarla pre-Riesz uzayları teorisinin genişlediğini görmekteyiz [2-11].

Bir vektör uzayı üzerinde, vektör uzayı işlemleri ile uyumlu bir sıralama bağıntısı tanımlanmasıyla elde edilen sıralı vektör uzayı yapısı, Riesz uzayları teorisinin temelini oluşturur. Sıralı vektör uzaylarının özel bir hali olan Riesz uzaylarında diklik kavramı, ideal ve band yapıları önemli yer tutar. Özellikle Riesz uzaylarında tanımlı operatörler teorisinde; bir operatörün diklik koruyan olması, tersinin hangi koşullarda bu özelliği koruduğu ve diğer bilinen bazı operatör sınıfları ile diklik koruyan operatörlerin karşılaştırılması birçok çalışmada incelenmiştir [12-18].

1992’de Y. A. Abramovich, [19]’un problemler bölümünde “ E ve F Riesz uzayları olmak üzere $T: E \rightarrow F$ bire-bir ve örten diklik koruyan bir operatör iken $T^{-1}: F \rightarrow E$ operatörü diklik koruyan mıdır?” sorusunu ortaya attı. Y. A. Abramovich ve A. K. Kitover [12]’de normlu Riesz uzayları arasında tanımlı bire-bir ve örten diklik koruyan bir operatörün tersinin diklik koruyan olmadığını gösterdiler. C. B. Huijsmans ve B. de Pagter [18]’de göreceli düzgün tam Riesz uzayından normlu Riesz uzayına tanımlı her bire-bir ve örten diklik koruyan operatörün tersinin de diklik koruyan olduğunu gösterdiler. C. B. Huijsmans ve A. W. Wickstead [17]’de Arşimedyan Riesz uzayları arasında tanımlı her tersinir diklik koruyan operatörün sıra sınırlı olması durumunda tersinin de sıra sınırlı ve diklik koruyan olduğunu gösterdiler. Ayrıca Y. A. Abramovich ve A. K. Kitover [13]’te bu sorunun cevabını geniş bir şekilde ele aldılar, gerek Riesz uzaylarının gerekse operatörlerin bazı koşulları sağlaması durumunda sorunun olumlu cevabının olduğunu gösterdiler. Benzer bir şekilde C. B. Huijsmans ve A. W. Wickstead [17]’de “ E bir Arşimedyan Riesz uzayı olmak üzere, E üzerinde tanımlı bire-bir ve örten band koruyan bir operatörün tersi

de band koruyan olur mu?” sorusunu sordular ve E Riesz uzayının esas projeksiyon özelliğine sahip olması veya göreceli düzgün tam olması durumunda sorunun olumlu cevabının olduğunu gösterdiler.

Biz de bu tezde, benzer soruyu Riesz uzayları arasında tanımlı ideal operatörler ve band operatörler için sorduk. Tersinir ideal ve band operatörlerin terslerinin hangi koşullarda yine aynı özelliğe sahip olduklarını araştırdık. Ayrıca ideal ve band operatörlerin diğer bazı özelliklerini, diklik koruyan operatörler ile ilişkilerini ve hangi koşullarda sıra sürekli olduklarını inceledik. Diklik koruyan operatörler teorisine ait iki problemin çözümünü verdik ve son olarak band operatör tanımını pre-Riesz uzaylarına genişleterek özelliklerini araştırdık.

E bir Riesz uzayı ve A , E uzayının bir altvektör uzayı olmak üzere her $y \in A$ ve $x \in E$ için $|x| \leq |y|$ iken $x \in A$ oluyorsa A , E içinde bir ideal olarak adlandırılır. Riesz uzayları arasında tanımlı bir operatör, tanım uzayındaki her bir idealin operatör altındaki görüntüsü değer uzayında da ideal oluyorsa ideal operatör olarak adlandırılır. İdeal operatör tanımını 2003’te B. Turan [20]’de verdi. İdeal operatör ve ters ideal operatör tanımlarının göz önüne alındığı bu çalışmada, tanımladığı operatörlerin bazı özelliklerini ortaya koydu ve diklik koruyan operatörler ile ilişkilerini inceledi.

Riesz uzaylarında bir idealin sıra kapanışı band olarak isimlendirilir. İdeal operatör tanımına benzer olarak Riesz uzayları arasında tanımlı bir operatör, tanım uzayındaki her bir bandın operatör altındaki görüntüsü değer uzayında da band oluyorsa band operatör olarak adlandırılır. Band operatör tanımını 2007’de A. Uyar [21]’de verdi ve bu tanım yardımıyla Y. A. Abramovich ve A. K. Kitover tarafından [13]’te açık bırakılan diklik koruyan operatörler teorisine ait iki problemin çözümünü elde etti. 2012’de Z. L. Chen ve T. S. He [22]’de band operatör tanımına ek olarak ters band operatör tanımını verip bu operatörlerin bazı özelliklerini elde ettiler ve diklik koruyan operatörler ile ilişkilerini incelediler.

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünden sonra gelen ikinci bölümde, bu çalışmada gerekli Riesz uzayları teorisine ait temel tanım ve kavramlar ifade edilmiştir.

Üçüncü bölümde, band operatör ve ters band operatör kümelerinin vektör uzayı yapısına sahip olmadıkları gösterilmiştir. Band operatör ve ters band operatör tanımlarına ek olarak esas band operatör ve ters esas band operatör tanımları verilmiş, birbirleri ile ilişkileri incelenmiş ve bu doğrultuda esas band operatör, band operatör ve diklik koruyan operatör kavramlarının üçünün birbirine denk olma koşulları ortaya konulmuştur. Ayrıca Y. A. Abramovich'in sorduğu soru çerçevesinde, tersinir bir band operatörün tersinin ne zaman yine band operatör olduğu gösterilmiştir. Diğer taraftan sıra sınırlı yapıya sahip band operatör ve ters band operatörlerin özellikleri incelenmiştir. Buradan hareketle band operatörün ve ters band operatörün sıra sürekli olma koşulları araştırılmış, tersinir band operatörün tersinin de band operatör olduğu gösterilmiş ve orthomorfizm, band operatör ve ters band operatörler karşılaştırılmıştır. Bu bölümde son olarak band operatörün sıra sınırlılığı araştırılmış; öncelikle sıra sınırlı olmayan band operatör örneği oluşturulmuş, ardından da band operatörün sıra sınırlı olma koşulları elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, öncelikle ideal operatörler ile ilgili [20]'de yer alan bazı tanım ve teoremler ifade edilmiş daha sonra da tersinir bir ideal operatörün tersinin hangi koşullarda yine ideal operatör olduğu belirtilmiştir. Ayrıca ideal operatörün sıra sınırlılığı araştırılmış, bu doğrultuda öncelikle sıra sınırlı olmayan bir ideal operatör örneği oluşturulmuş, ardından da ideal operatörün sıra sınırlı olma koşulları elde edilmiştir. Sonuç olarak, sıra sınırlılık yardımıyla tersinir bir ideal operatörün tersinin hangi koşullarda ideal operatör olduğu belirlenmiştir.

Beşinci bölümde, ideal ve band operatörlerin karşılaştırılması yapılmıştır. Bunun için öncelikle ideal operatörler ile band operatörlerin farklı iki kavram olduklarına dair örnekler oluşturulmuş, ardından hangi koşullarda birbirlerini gerektirdikleri ortaya konulmuştur. Bu bölümde ayrıca diklik koruyan operatörler teorisine ait açık iki problemin çözümü verilmiştir. İlk problem D. R. Hart tarafından [16]'da verilen Teorem 2.1'in karşıtının ne zaman doğru olduğu, ikinci problem ise Y. A. Abramovich ve A. K. Kitover tarafından [13]'te sorulan Problem 8.2'dir.

Altıncı bölümde, band operatör tanımı pre-Riesz uzaylarına genişletilmiş ve Riesz uzaylarında elde edilen sonuçlar, pre-Riesz uzaylarında elde edilmeye çalışılmıştır.

Son bölümde ise sonuç ve öneriler yer almaktadır.

Bu tezin üçüncü bölümünde elde ettiğimiz sonuçların yer aldığı ve beşinci bölümünde verdiğimiz açık problemlerin çözümlerinin bulunduğu çalışmalarımız yayımlanmıştır [23, 24].

2. TEMEL KAVRAMLAR

E bir reel vektör uzayı ve “ $\leq$ ”, E üzerinde tanımlı bir sıralama bağıntısı olmak üzere

(i) $x, y, z \in E$ ve $x \leq y$ iken $x + z \leq y + z$

(ii) $x, y \in E$ ve $x \leq y$ iken $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda x \leq \lambda y$

koşulları sağlanıyorsa $(E, \leq)$ ikilisi bir sıralı vektör uzayı olarak adlandırılır. $(E, \leq)$ sıralı vektör uzayı sadece E ile de gösterilebilir. $(E, \leq)$ bir sıralı vektör uzayı ve $A \subseteq E$ olmak üzere,

- Her $a \in A$ için $a \leq x$ olacak şekilde en az bir $x \in E$ varsa A kümesine üstten sınırlı küme, x elemanına da A kümesinin bir üst sınırı denir.
- Her $a \in A$ için $x \leq a$ olacak şekilde en az bir $x \in E$ varsa A kümesine alttan sınırlı küme, x elemanına da A kümesinin bir alt sınırı denir.
- Alttan ve üstten sınırlı kümeye sınırlı küme denir.
- A kümesinin üst sınırları kümesinin bir en küçük elemanı varsa buna A kümesinin en küçük üst sınırı denir ve $\sup A$ ile gösterilir.
- A kümesinin alt sınırları kümesinin bir en büyük elemanı varsa buna A kümesinin en büyük alt sınırı denir ve $\inf A$ ile gösterilir.

A kümesini $A = \{x, y\}$ seçersek, $\sup\{x, y\} = x \vee y$ ve $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ şeklinde gösterilir. E bir sıralı vektör uzayı ve θ , E uzayının sıfır vektörü olmak üzere E uzayının pozitif elemanlarının kümesi (pozitif kısmı) $E^+ = \{x \in E: \theta \leq x\}$ şeklinde tanımlanır. Bir E sıralı vektör uzayında her $x, y \in E$ için $x \vee y \in E$ veya $x \wedge y \in E$ ise E uzayına Riesz uzayı (vektör örgüsü) denir. Örneğin,

- $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n): x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}^+\}$ reel vektör uzayı “ $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \leq y$ ancak ve ancak $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere her i için $x_i \leq y_i$ ” sıralaması ile bir Riesz uzayıdır.
- $\mathbb{R}^2 = \{x = (x_1, x_2): x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ reel vektör uzayı “ $x, y \in \mathbb{R}^2$ için $x \leq y$ ancak ve ancak $x_1 < y_1$ ya da $(x_1 = y_1 \text{ ve } x_2 \leq y_2)$ ” sıralaması ile bir Riesz uzayıdır.
- $E = \{f \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineer}\} = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{R} : f(x) = mx\}$ reel vektör uzayı “ $f, g \in E$ için $f \leq g$ ancak ve ancak her $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq g(x)$ ” sıralaması ile bir Riesz uzayı değildir.
- $X \neq \emptyset$ bir topolojik uzay olmak üzere $C(X) = \{f \mid f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ sürekli fonksiyon}\}$ reel vektör uzayı “ $f, g \in C(X)$ için $f \leq g$ ancak ve ancak her $x \in X$, $f(x) \leq g(x)$ ” sıralaması ile bir Riesz uzayıdır.

- $X \neq \emptyset$ bir küme, $1 \leq p \leq \infty$ ve (X, Σ, μ) bir ölçü uzayı olmak üzere $L_p = L_p(X, \mu)$ vektör uzayı “ $f, g \in L_p$ için $f \leq g$ ancak ve ancak hemen hemen her $x \in X$ için $f(x) \leq g(x)$ ” sıralaması ile bir Riesz uzayıdır.
- $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $l_p = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots) \mid x_i \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$ dizi uzayları “ $x, y \in l_p$ için $x \leq y$ ancak ve ancak her $i \in \mathbb{N}^+$ için $x_i \leq y_i$ ” sıralaması ile bir Riesz uzayıdır.

Şimdi Riesz uzayları ile ilgili bazı temel kavramları verelim. E bir Riesz uzayı ve $x \in E$ olmak üzere; $x \vee \theta$ elemanına x elemanının pozitif kısmı, $(-x) \vee \theta$ elemanına x elemanının negatif kısmı, $(-x) \vee x$ elemanına x elemanının modülü denir. $x^+ = x \vee \theta$, $x^- = (-x) \vee \theta$ ve $|x| = (-x) \vee x$ şeklinde gösterilir. Burada $x^+, x^-, |x| \in E^+$ ve ayrıca $x^+ \wedge x^- = \theta$ olup $x = x^+ - x^-$ ve $|x| = x^+ + x^-$ yazılışları mevcuttur. $x, y \in E$ için $|x| \wedge |y| = \theta$ oluyorsa x ile y birbirine diktir denir ve $x \perp y$ şeklinde gösterilir. $\emptyset \neq A \subseteq E$ için $A^d = \{y \in E: \forall x \in A, x \perp y\}$ kümesine A kümesinin diki denir. $\emptyset \neq A \subseteq E$ bir altuzay olmak üzere $x \in A$ ve her $y \in E$ için $|y| \leq |x|$ iken $y \in A$ oluyorsa A , E içinde ideal olarak adlandırılır ve her ideal aynı zamanda bir Riesz altuzayıdır. $\emptyset \neq A \subseteq E$ bir ideal olmak üzere her $\emptyset \neq B \subseteq A$ için $\sup B \in E$ iken $\sup B \in A$ oluyorsa A , E içinde band olarak adlandırılır. Eğer $\emptyset \neq A \subseteq E$ band iken $E = A \oplus A^d$ şeklinde yazılabiliyorsa A bandına projeksiyon band ve E Riesz uzayındaki her band, projeksiyon band oluyorsa E uzayına projeksiyon özelliğine sahiptir denir. (x_α) , Riesz uzayında bir net olmak üzere her x_β, x_γ için $x_\beta \leq x_\delta$ ($x_\delta \leq x_\beta$) ve $x_\gamma \leq x_\delta$ ($x_\delta \leq x_\gamma$) olacak şekilde en az bir $x_\delta \in (x_\alpha)$ varsa (x_α) netine yukarı yönlendirilmiş (aşağı yönlendirilmiş) denir ve $x_\alpha \uparrow$ ($x_\alpha \downarrow$) şeklinde gösterilir. $x_\alpha \uparrow$ ve $\sup x_\alpha = x$ ise $x_\alpha \uparrow x$ şeklinde, $x_\alpha \downarrow$ ve $\inf x_\alpha = x$ ise $x_\alpha \downarrow x$ şeklinde gösterilir. E Riesz uzayında her $x \in E^+$ ve her $n \in \mathbb{N}^+$ için $n^{-1}x \downarrow 0$ ise E uzayına Arşimedyen Riesz uzayı denir. $\emptyset \neq A \subseteq E$ bir küme için A kümesi tarafından üretilen ideal I_A ile A kümesi tarafından üretilen band ise B_A ile gösterilir. Bunlar sırasıyla A kümesini kapsayan en küçük ideal ve A kümesini kapsayan en küçük banddır. $x \in E$ için $A = \{x\}$ alırsak, $I_x = \{y \in E: \exists \lambda \geq 0, |y| \leq \lambda|x|\}$ ve $B_x = \{y \in E: |y| \wedge n|x| \uparrow |y|\}$ dir. E Riesz uzayında $\emptyset \neq A \subseteq E$ ideal iken A idealinin band olması için gerek ve yeter koşul her $(x_\alpha) \subseteq A$ için $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ iken $x \in A$ olmasıdır. Ayrıca A band ise $A = (A^d)^d = A^{dd}$ dir. $(x_\alpha) \subseteq E$ ve $x \in E$ için $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha$ ve $y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde bir $(y_\alpha) \subseteq E$ neti varsa (x_α) neti x elemanına sıra (order) yakınsar denir ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ biçiminde gösterilir. Bir

idealin band olması için gerekli ve yeterli koşul sıra kapalı olmasıdır. E bir Arşimedyan Riesz uzayı, $u \in E^+$, $x \in E$ ve $\{x_n\}$, E içinde bir dizi olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $n_0 \leq n$ iken $|x_n - x| \leq \varepsilon u$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisi x elemanına u -düzgün yakınsar denir. Eğer $\{x_n\}$ dizisi, en az bir $u \in E^+$ için x elemanına u -düzgün yakınsıyor ise $\{x_n\}$ dizisi x elemanına göreceli düzgün yakınsar denir ve $x_n \rightarrow x (ru)$ şeklinde gösterilir. E Riesz uzayı Arşimedyan olduğunda göreceli düzgün limitler tektir. Ayrıca her $\varepsilon > 0$ için $n_0 \leq n, m$ iken $|x_n - x_m| \leq \varepsilon u$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ ve $u \in E^+$ varsa $\{x_n\}$ dizisine u -düzgün Cauchy dizisi denir. $\{x_n\}$ dizisi, en az bir $u \in E^+$ için u -düzgün Cauchy dizisi oluyorsa $\{x_n\}$ dizisi göreceli düzgün Cauchy dizisidir. Her göreceli düzgün Cauchy dizisi yakınsak ise o Riesz uzayına da göreceli düzgün tam uzay denir. E bir Riesz uzayı ve $\|\cdot\|$, E üzerinde bir norm olmak üzere her $x, y \in E$ için $|x| \leq |y|$ iken $\|x\| \leq \|y\|$ oluyorsa bu norma örgü normu, vektör uzayına örgü normlu uzay ve ayrıca uzay bu norma göre tam ise uzaya Banach örgüsü denir. Bir Riesz uzayının boştan farklı ve üstten sınırlı her altkümesinin bir supremumu varsa (veya buna denk olarak boştan farklı ve alttan sınırlı her altkümesinin bir infimumu varsa) bu uzay Dedekind tam olarak adlandırılır. Benzer şekilde bir Riesz uzayının boştan farklı ve üstten sınırlı her sayılabilir altkümesinin bir supremumu varsa (veya buna denk olarak boştan farklı ve alttan sınırlı her sayılabilir altkümesinin bir infimumu varsa) bu uzay σ -Dedekind tam olarak adlandırılır.

Şimdi de Riesz uzayları arasında tanımlı operatörlerin özellikleri hakkında bilgi verelim: E ve F Riesz uzayları olmak üzere E uzayından F uzayına tanımlı bütün (lineer) operatörlerin kümesi $L(E, F)$, her $S, T \in L(E, F)$ için “ $S \leq T$ ancak ve ancak her $x \in E^+$ için $S(x) \leq T(x)$ ” bağıntısı ile bir sıralı vektör uzayı olup $T \in L(E, F)$ için $T \vee (-T)$ varsa buna T operatörünün modülü denir ve $|T|$ ile gösterilir. Ayrıca her $x \in E^+$ için $\sup\{|Ty|: |y| \leq x\}$ varsa $|T|$ vardır ve $|T|(x) = \sup\{|Ty|: |y| \leq x\}$ dir. $T: E \rightarrow F$ operatörü, her $x \geq 0$ için $Tx \geq 0$ oluyorsa pozitif operatör; iki pozitif operatörün farkı şeklinde yazılabiliyorsa regüler; her $x, y \in E$ için $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$ oluyorsa Riesz homomorfizmi; $x \perp y$ iken $Tx \perp Ty$ oluyorsa diklik koruyan operatör; $(x_\alpha) \subseteq E$ için E uzayında $x_\alpha \downarrow 0$ iken F uzayında $\inf |Tx_\alpha| = 0$ oluyorsa sıra sürekli operatör ve $x \in E^+$ olmak üzere $|z| \leq x$ olan her $z \in E$ için $|Tz| \leq y$ olacak şekilde en az bir $y \in F^+$ varsa sıra sınırlı operatör olarak adlandırılır. E uzayından F uzayına tanımlı bütün sıra sınırlı operatörlerin kümesi $L_b(E, F)$ ile gösterilir. $E = F$ ise bu gösterim $L_b(E)$ biçimindedir. Ayrıca $T: E \rightarrow E$ operatörü her $B \subseteq E$ bandı için $T(B) \subseteq B$ (veya $x \perp y$ iken $Tx \perp y$)

koşulunu sağlıyorsa band koruyan operatör olarak isimlendirilir. $T: E \rightarrow E$ sıra sınırlı ve band koruyan operatörüne orthomorfizm denir ve tüm orthomorfizmlerin kümesi $Orth(E)$ ile gösterilir. $Orth(E)$, $L_b(E)$ içinde altvektör uzayı olup $L_b(E)$ uzayından indirgenen “ $\pi_1, \pi_2 \in Orth(E)$, $\pi_1 \leq \pi_2$ ancak ve ancak her $x \in E^+$ için $\pi_1(x) \leq \pi_2(x)$ ” sıralaması ile bir sıralı vektör uzayıdır. Diğer taraftan her $x \in E^+$ için $(\pi_1 \vee \pi_2)(x) = \pi_1(x) \vee \pi_2(x)$ ve $(\pi_1 \wedge \pi_2)(x) = \pi_1(x) \wedge \pi_2(x)$ işlemleri ile $Orth(E)$ Riesz uzayı olup eğer E Riesz uzayı Dedekind tam ise $Orth(E)$, $L_b(E)$ içinde birim operatör tarafından üretilen banddır. $T: E \rightarrow E$ bir operatör ve $I: E \rightarrow E$ birim operatör olmak üzere $-\lambda I \leq T \leq \lambda I$ olacak şekilde en az bir $\lambda \in \mathbb{R}^+$ varsa T merkez operatörü olarak adlandırılır. Merkez operatörlerinin kümesi $Z(E)$ ile gösterilir ve E uzayının merkezi olarak isimlendirilir. $Z(E)$, $Orth(E)$ içinde birim operatör tarafından üretilen idealdir ve dolayısıyla Riesz altuzayıdır. $T: E \rightarrow E$ operatörü her $x \in E^+$ için $Tx \in I_x$ koşulunu sağlıyorsa ideal koruyan operatör (contractor) olarak adlandırılır. Dolayısıyla T operatörünün ideal koruyan olması için gerek ve yeter şart her $I \subseteq E$ ideali için $T(I) \subseteq I$ olmasıdır. Her ideal koruyan operatör sıra sınırlı olup E üzerinde tanımlı tüm ideal koruyan operatörlerin kümesi $S(E)$ ile gösterilir ve $S(E)$ kümesine, E uzayının stabilizeri denir. $S(E)$, $Orth(E)$ içinde idealdir ve dolayısıyla Riesz altuzayıdır. Bu üç küme için $Z(E) \subseteq S(E) \subseteq Orth(E)$ olup eğer E Banach örgüsü ise $Z(E) = S(E) = Orth(E)$ dir. E üzerinde tanımlı ve $S(E)$ uzayında bulunan operatörlerle değişmeli olan operatörlerin kümesine $S(E)$ uzayının değişenleri denir, $S(E)_c$ şeklinde gösterilir ve $S(E)_c = \{T \in L(E) : \forall \pi \in S(E), T\pi = \pi T\}$ dir. Benzer şekilde E üzerinde tanımlı ve $Z(E)$ uzayında bulunan operatörlerle değişmeli olan operatörlerin kümesine $Z(E)$ uzayının değişenleri denir, $Z(E)_c$ şeklinde gösterilir ve $Z(E)_c = \{T \in L(E) : \forall \pi \in Z(E), T\pi = \pi T\}$ dir. Diğer taraftan bir E Riesz uzayı üzerinde bilinen cebir özelliklerine sahip birleşmeli bir “ $\cdot$ ” çarpma işlemi tanımlı olsun. Bu çarpma işlemine göre her $x, y \in E^+$ için $x \cdot y \geq 0$ oluyorsa E uzayına Riesz cebiri denir. Bir E Riesz cebiri, her $x, y \in E$ için $x \cdot y = y \cdot x$ koşulunu sağlıyorsa değişmeli cebir ve $x \wedge y = 0$ olmak üzere her $z \in E^+$ için $(x \cdot z) \wedge y = (z \cdot x) \wedge y = 0$ koşulunu sağlıyorsa f-cebiri olarak adlandırılır. Her Arşimedian f-cebiri değişmelidir. $Orth(E)$ ve $Z(E)$ operatörlerdeki bileşke işlemine göre birimli Arşimedian f-cebiri ve E üzerinde tanımlı birim operatör de birim elemandır. Ayrıca E bir f-cebiri olmak üzere her $x \in E$ için $x^2 = 0$ iken $x = 0$ oluyorsa E yarıasal f-cebiri olarak adlandırılır ve birimli her f-cebiri yarıasaldır. Dolayısıyla $Orth(E)$, $S(E)$ ve $Z(E)$ birimli f-cebiri olduklarından yarıasaldır.

E ve F Riesz cebirleri iken $T: E \rightarrow F$ operatörü her $x, y \in E$ için $T(x \cdot y) = Tx \cdot Ty$ koşulunu sağlıyorsa cebir homomorfizmi olarak isimlendirilir.

Bu çalışmadaki bütün Riesz uzaylarının Arşimedyan özelliğine sahip oldukları varsayılacaktır.

Bu bölümde Riesz uzayları teorisi ile ilgili ifade ettiğimiz tanımlar, kavramlar, yapılar ve bunlarla ilgili özellikler [25-28]'den alınmıştır. Bu kaynaklardan Riesz uzayları teorisi ile ilgili daha geniş bilgiye ulaşılabilir.

3. BAND OPERATÖRLER

Band operatör tanımını 2007 yılında Uyar, [21]'de verdi ve bu tanım yardımıyla Abramovich ve Kitover tarafından [13]'te sorulan diklik koruyan operatörler teorisine ait açık iki problemin çözümünü elde etti. 2012 yılında He ve Chen, [22]'de band operatör tanımına ek olarak ters band operatör tanımını vererek bu operatörlerin bazı temel özelliklerini elde ettiler ve diklik koruyan operatörler ile ilişkisini incelediler.

3.1. Band ve Ters Band Operatörlerin Özellikleri ve Diklik Koruyan Operatörlerle İlişkisi

Çalışmanın bu bölümünde band ve ters band operatörlerin farklı birtakım özellikleri verildi. Bu doğrultuda diklik koruyan operatörlerle ilişkileri incelendi. Son olarak bir band operatörün tersinin hangi koşullarda band operatör olduğu belirlendi.

3.1.1. Tanım [22, Tanım 2.1]

G ve H Riesz uzayları ve $S: G \rightarrow H$ bir operatör olsun.

i-) Her $B \subseteq G$ bandı için $S(B)$, H uzayında band ise S band operatör olarak adlandırılır.

ii-) Her $B \subseteq H$ bandı için $S^{-1}(B)$, G uzayında band ise S ters band operatör olarak adlandırılır.

Band operatörlerin kümesi vektör uzayı yapısına sahip değildir. Bu durum aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek

$\mathbb{R}^2$ uzayını, “ $\forall (x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \leq (u, v) \Leftrightarrow x \leq u \wedge y \leq v$ ” sıralaması ile göz önüne alırsak, $(\mathbb{R}^2, \leq)$ Riesz uzayıdır ve $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \rightarrow S(x, y) = (y, 0)$ şeklinde tanımlanan dönüşüm operatördür. Burada $\mathbb{R}^2$ Riesz uzayının bütün bandları $B_1 = \{(0, x): x \in \mathbb{R}\}$, $B_2 = \{(x, 0): x \in \mathbb{R}\}$, $B_3 = \{(0, 0)\}$ ve $B_4 = \mathbb{R}^2$ şeklinde olup

$$\text{i-)} S(B_1) = \{S(0, x) : x \in \mathbb{R}\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} = B_2$$

$$\text{ii-)} S(B_2) = \{S(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} = \{(0, 0)\} = B_3$$

$$\text{iii-)} S(B_3) = B_3$$

$$\text{iv-)} S(B_4) = \{S(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \{(y, 0) : y \in \mathbb{R}\} = B_2$$

olduğundan S band operatördür. Diğer taraftan $I: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ özdeşlik operatörünün tanımı gereği $I(B_1) = B_1$, $I(B_2) = B_2$, $I(B_3) = B_3$ ve $I(B_4) = B_4$ olduğundan I band operatördür. Fakat $I + S$ operatörü

$$(I + S)(x, y) = I(x, y) + S(x, y) = (x, y) + (y, 0) = (x + y, y)$$

şeklinde olup $B_1 = \{(0, x) : x \in \mathbb{R}\}$ bandı için

$$(I + S)(B_1) = \{(I + S)(0, x) : x \in \mathbb{R}\} = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$$

elde edilir ki burada $\{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}^2$ uzayında band olmadığından $I + S$ band operatör değildir.

Benzer şekilde ters band operatörlerin kümesi de vektör uzayı yapısına sahip değildir. Bu durum aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek

$\mathbb{R}^2$ uzayında alışılmış sıralama olmak üzere $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \rightarrow S(x, y) = (-y, 0)$ operatörünü göz önüne alalım.

i-) $S^{-1}(B_1) = B_2$ dir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} (x, y) \in S^{-1}(B_1) &\Rightarrow S(x, y) \in B_1 \\ &\Rightarrow (-y, 0) \in B_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y = 0$$

$$\Rightarrow (x, y) = (x, 0) \in B_2$$

olduğundan $S^{-1}(B_1) \subseteq B_2 \dots (*)$ elde edilir. Diğer taraftan

$$(x, y) \in B_2 \Rightarrow y = 0$$

$$\Rightarrow (x, y) = (x, 0)$$

$$\Rightarrow S(x, y) = S(x, 0) = (0, 0) \in B_1$$

$$\Rightarrow (x, y) \in S^{-1}(B_1)$$

olduğundan $B_2 \subseteq S^{-1}(B_1) \dots (**)$ olur. Dolayısıyla $B_2 = S^{-1}(B_1)$ elde edilir.

ii-) $S^{-1}(B_2) = \mathbb{R}^2$ dir. Gerçekten,

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow S(x, y) = (-y, 0) \in B_2$$

$$\Rightarrow (x, y) \in S^{-1}(B_2)$$

olduğundan $\mathbb{R}^2 \subseteq S^{-1}(B_2) \dots (*)$ elde edilir. Diğer taraftan S operatörünün tanımı gereği $S^{-1}(B_2) \subseteq \mathbb{R}^2 \dots (**)$ gerçekleşir. O halde $S^{-1}(B_2) = \mathbb{R}^2$ olur.

iii-) $S^{-1}(B_3) = B_2$ dir. Gerçekten,

$$(x, y) \in B_2 \Rightarrow y = 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow (x, y) = (x, 0)$$

$$\Rightarrow S(x, 0) = (0, 0) \in B_3$$

$$\Rightarrow (x, y) = (x, 0) \in S^{-1}(B_3)$$

olduğundan $B_2 \subseteq S^{-1}(B_3) \dots (*)$ elde edilir. Diğer taraftan,

$$(x, y) \in S^{-1}(B_3) \Rightarrow S(x, y) = (-y, 0) \in B_3$$

$$\Rightarrow y = 0$$

$$\Rightarrow (x, y) = (x, 0) \in B_2$$

olduğundan $S^{-1}(B_3) \subseteq B_2 \dots (**)$ bulunur. Dolayısıyla $S^{-1}(B_3) = B_2$ dir.

$$\text{iv-)} S^{-1}(B_4) = S^{-1}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 = B_4$$

gerçeklenir. Dolayısıyla S ters band operatördür. Diğer taraftan $I: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ özdeşlik operatörü tanımı gereği ters band operatördür. Buna karşın

$$(I + S)(x, y) = I(x, y) + S(x, y) = (x, y) + (-y, 0) = (x - y, y)$$

şeklinde olup $B_1 = \{(0, x): x \in \mathbb{R}\}$ bandı için

$$\begin{aligned} (I + S)^{-1}(B_1) &= \{(x, y): (I + S)(x, y) = (x - y, y) \in B_1\} \\ &= \{(x, y): x - y = 0\} \\ &= \{(x, x): x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

olur. Fakat $\{(x, x): x \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}^2$ uzayında band olmadığından $I + S$ ters band operatör değildir.

Şimdi band ve ters band operatörleri karakterize eden lemmayı verelim.

3.1.2. Lemma

G ve H Riesz uzayları ve $S: G \rightarrow H$ bir operatör olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

i-) S band operatördür ancak ve ancak her $\emptyset \neq A \subseteq G$ kümesi için $B_{S(A)} \subseteq S(B_A)$ dir.

ii-) S ters band operatördür ancak ve ancak her $\emptyset \neq A \subseteq G$ kümesi için $S(B_A) \subseteq B_{S(A)}$ dir.

Ek olarak S bire-bir ve örten ise,

iii-) S band operatördür ancak ve ancak S^{-1} ters band operatördür.

iv-) S ters band operatördür ancak ve ancak S^{-1} band operatördür.

İspat

i-) $\Rightarrow$: S band operatör ve $\emptyset \neq A \subseteq G$ olsun. B_A , G içinde band ve S band operatör olduğundan $S(B_A)$, H içinde band olur. Ayrıca $A \subseteq B_A$ olduğundan $S(A) \subseteq S(B_A)$ dir. $S(A)$ tarafından üretilen en küçük band $B_{S(A)}$ olduğundan $B_{S(A)} \subseteq S(B_A)$ elde edilir.

: $\Leftarrow A \subseteq G$ herhangi bir band olsun. A band olduğundan $B_A = A$ dir. O halde hipotez gereği $B_{S(A)} \subseteq S(B_A) = S(A)$ yani $B_{S(A)} \subseteq S(A)$ dir. Ayrıca her zaman $S(A) \subseteq B_{S(A)}$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $B_{S(A)} = S(A)$ elde edilir ki buradan $S(A)$ band olup S band operatördür.

ii-) $\Rightarrow$: S ters band operatör ve $\emptyset \neq A \subseteq G$ herhangi bir küme olsun. $A \subseteq S^{-1}(S(A))$ ve $S(A) \subseteq B_{S(A)}$ olduğunu biliyoruz. Buradan hareketle

$$\begin{aligned} S(A) \subseteq B_{S(A)} &\Rightarrow A \subseteq S^{-1}(S(A)) \subseteq S^{-1}(B_{S(A)}) \\ &\Rightarrow A \subseteq S^{-1}(B_{S(A)}) \end{aligned}$$

elde edilir. $B_{S(A)} \subseteq H$ band ve S ters band operatör olduğundan $S^{-1}(B_{S(A)})$, G içinde band olur. Ayrıca A tarafından üretilen en küçük band B_A olup $A \subseteq S^{-1}(B_{S(A)})$ olduğundan $B_A \subseteq S^{-1}(B_{S(A)})$ dir. O halde

$$\begin{aligned} B_A \subseteq S^{-1}(B_{S(A)}) &\Rightarrow S(B_A) \subseteq S\left(S^{-1}(B_{S(A)})\right) \subseteq B_{S(A)} \\ &\Rightarrow S(B_A) \subseteq B_{S(A)} \end{aligned}$$

elde edilir.

: $\Leftarrow B \subseteq H$ herhangi bir band olsun. O halde $S^{-1}(B) \subseteq G$ olur. Dolayısıyla hipotezden $S(B_{S^{-1}(B)}) \subseteq B_{S(S^{-1}(B))}$ elde edilir. Diğer taraftan $S(S^{-1}(B)) \subseteq B$ ifadesi her zaman doğrudur. Ayrıca B band olduğundan $B_B = B$ dir. O halde,

$$\begin{aligned} S(S^{-1}(B)) \subseteq B &\Rightarrow B_{S(S^{-1}(B))} \subseteq B_B = B \\ &\Rightarrow S(B_{S^{-1}(B)}) \subseteq B \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
S(B_{S^{-1}(B)}) &\subseteq B \Rightarrow S^{-1}(S(B_{S^{-1}(B)})) \subseteq S^{-1}(B) \\
&\Rightarrow B_{S^{-1}(B)} \subseteq S^{-1}(S(B_{S^{-1}(B)})) \subseteq S^{-1}(B) \\
&\Rightarrow B_{S^{-1}(B)} \subseteq S^{-1}(B)
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan her zaman $S^{-1}(B) \subseteq B_{S^{-1}(B)}$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $B_{S^{-1}(B)} = S^{-1}(B)$ elde ederiz ki buradan $S^{-1}(B)$ band olup S ters band operatördür.

iii-) $\Rightarrow: S: G \rightarrow H$ band operatör ve $A \subseteq G$ herhangi bir band olsun. S band operatör olduğundan $S(A) \subseteq H$ banddır. S bire-bir ve örten olduğundan $(S^{-1})^{-1}(A) = S(A)$ olup $S(A)$, H içinde band ve dolayısıyla S^{-1} ters band operatördür.

$: \Leftarrow S^{-1}: H \rightarrow G$ ters band operatör ve $A \subseteq G$ herhangi bir band olsun. S^{-1} ters band operatör olduğundan $(S^{-1})^{-1}(A)$, H içinde banddır. S bire-bir ve örten olduğundan $(S^{-1})^{-1}(A) = S(A)$ olur. O halde $S(A)$, H içinde band olduğundan S band operatördür.

iv-) (iii)'ye benzer şekilde elde edilir.

3.1.3. Tanım

G ve H Riesz uzayları ve $S: G \rightarrow H$ bir operatör olsun.

i-) Her $x \in G$ için $B_{Sx} \subseteq S(B_x)$ koşulu sağlanıyorsa S esas band operatör olarak adlandırılır.

ii-) Her $x \in G$ için $S(B_x) \subseteq B_{Sx}$ koşulu sağlanıyorsa S ters esas band operatör olarak adlandırılır.

Lemma 3.1.2 ve Tanım 3.1.3 göz önüne alınarak A kümesini, $A = \{x\}$ olacak şekilde seçersek aşağıdaki sonucu elde ederiz.

3.1.4. Sonuç

G ve H Riesz uzayları ve $S: G \rightarrow H$ bir operatör olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

i-) S band operatör ise esas band operatördür.

ii-) S ters band operatör ise ters esas band operatördür.

3.1.5. Lemma [22, Lemma 3.1]

G bir Riesz uzayı ve $x, y \in G$ olsun.

$$x \perp y \Leftrightarrow B_x \cap B_y = \{0\}$$

dir.

İspat

$\Rightarrow$: $x \perp y$ olsun. Bu durumda $|x| \wedge |y| = 0$ dır. $z \in B_x \cap B_y$ alalım. Dolayısıyla $z \in B_x$ ve $z \in B_y$ olur.

$$(z \in B_x \Rightarrow |z| \wedge n|x| \uparrow |z|) \text{ ve } (z \in B_y \Rightarrow |z| \wedge n|y| \uparrow |z|)$$

dir. $|x| \wedge |y| = 0$ olduğu ve infimum işleminin özellikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} [|z| \wedge n|x| \uparrow |z|] \text{ ve } [|z| \wedge n|y| \uparrow |z|] &\Rightarrow \{[|z| \wedge n|x|] \wedge [|z| \wedge n|y|]\} \uparrow \{|z| \wedge |z|\} \\ &\Rightarrow \{|z| \wedge n(|x| \wedge |y|)\} \uparrow |z| \\ &\Rightarrow |z| = 0 \\ &\Rightarrow z = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $B_x \cap B_y = \{0\}$ olur.

$: \Leftarrow B_x \cap B_y = \{0\}$ olsun. $|x| \wedge |y| \leq |x|$ ve $|x| \wedge |y| \leq |y|$ olup B_x ile B_y birer band ve dolayısıyla ideal olduklarından $|x| \wedge |y| \in B_x$ ve $|x| \wedge |y| \in B_y$ elde edilir. Buradan hareketle $|x| \wedge |y| \in B_x \cap B_y = \{0\}$ olur. Dolayısıyla $|x| \wedge |y| = 0$ olup $x \perp y$ dir.

3.1.6. Önerme [22, Teorem 3.2]

G ve H Riesz uzayları, $S: G \rightarrow H$ bir operatör olsun.

i-) S bire-bir esas band operatör ise S diklik koruyan operatördür.

ii-) S bire-bir ve örten ters esas band operatör ise S^{-1} diklik koruyan operatördür.

İspat

i-) $x, y \in G$ ve $x \perp y$ olsun. Dolayısıyla Lemma 3.1.5 gereği $B_x \cap B_y = \{0\}$ olur. Ayrıca S esas band operatör olduğundan $B_{Sx} \subseteq S(B_x)$ ve $B_{Sy} \subseteq S(B_y)$ dir. Buradan hareketle $B_{Sx} \cap B_{Sy} \subseteq S(B_x) \cap S(B_y)$ elde edilir. Diğer taraftan S bire-bir olduğundan

$$B_{Sx} \cap B_{Sy} \subseteq S(B_x) \cap S(B_y) = S(B_x \cap B_y) = S(\{0\}) = \{0\}$$

olur. Dolayısıyla $B_{Sx} \cap B_{Sy} = \{0\}$ olup Lemma 3.1.5 gereği $Sx \perp Sy$ yani S diklik koruyan operatördür.

ii-) $S: G \rightarrow H$ bire-bir ve örten ters esas band operatör olsun. O halde S^{-1} esas band operatördür. S^{-1} bire-bir esas band operatör olduğundan önermenin (i) maddesi gereği S^{-1} diklik koruyan operatördür.

Önerme 3.1.6-(i) maddesinde operatörün bire-bir olma koşulu kaldırılamaz.

Örnek

$\mathbb{R}^2$ uzayını alışılmış sıralama ile ele alalım ve $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \rightarrow S(x, y) = (0, x + y)$ operatörünü göz önüne alalım. Burada

$$\text{i-)} S(B_1) = \{(0, x) : x \in \mathbb{R}\} = B_1$$

$$\text{ii-)} S(B_2) = \{(0, x) : x \in \mathbb{R}\} = B_1$$

$$\text{iii-)} S(B_3) = \{(0, 0)\} = B_3$$

$$\text{iv-)} S(B_4) = B_1$$

olduğundan S band operatördür fakat bire-bir değildir. Diğer taraftan $(1, 0), (0, 1) \in \mathbb{R}^2$ için $(1, 0) \perp (0, 1)$ dir. Ancak $S(1, 0) = (0, 1)$ ve $S(0, 1) = (0, 1)$ olup $S(1, 0)$ ve $S(0, 1)$ birbirine dik olmadığından S diklik koruyan operatör değildir.

Şimdi ileride kullanacağımız aşağıdaki teoremi ifade edelim.

3.1.7. Teorem [26, Teorem 24.2]

G bir Riesz uzayı ve A , G içinde bir altvektör uzayı olsun. $G = A \oplus A^d$ ise $A = A^{dd}$ dir.

3.1.8. Teorem

G projeksiyon özelliğine sahip bir Riesz uzayı, H bir Riesz uzayı ve $S: G \rightarrow H$ örten bir operatör olsun. Eğer S diklik koruyan operatör ise S band operatördür.

İspat

$B \subseteq G$ herhangi bir band olsun. G projeksiyon özelliğine sahip olduğundan $G = B \oplus B^d$ şeklinde yazılabilir. Ayrıca S diklik koruyan operatör olduğundan $S(B^d) \subseteq [S(B)]^d$ dir. Gerçekten, $y \in S(B^d)$ olsun. O halde $Sx = y$ olacak şekilde en az bir $x \in B^d$ vardır. Burada $x \in B^d$ olduğundan her $z \in B$ için $x \perp z$ olup S diklik koruyan operatör olduğundan $Sx \perp Sz$ elde edilir. Dolayısıyla $y \perp Sz$ yani $y \in [S(B)]^d$ dir. Şimdi S operatörünün lineer olduğunu kullanırsak

$$S(G) = S(B + B^d) = S(B) + S(B^d) \subseteq S(B) + [S(B)]^d$$

elde edilir. Burada S örten olduğundan $S(G) = H$ olup $H \subseteq S(B) + [S(B)]^d$ olur. Diğer taraftan S operatörünün tanımı gereği $S(B) \subseteq H$ olup buradan $S(B) + [S(B)]^d \subseteq H$ elde edilir. Ayrıca $S(B) \cap [S(B)]^d = \{0\}$ olduğundan $H = S(B) \oplus [S(B)]^d$ şeklindedir. Dolayısıyla $H = S(B) \oplus [S(B)]^d$ ve $S(B)$ altvektör uzayı olduğundan Teorem 3.1.7 gereği $S(B)$ band ve dolayısıyla S band operatördür.

Teorem 3.1.8’de operatörün örten olma koşulu kaldırılamaz.

Örnek

Sıfıra yakınsak tüm reel dizilerin uzayı c_0 ve sınırlı tüm reel dizilerin uzayı l_∞ bileşen bileşen sıralama ile birer Riesz uzayıdır. $J: c_0 \rightarrow l_\infty, x \rightarrow J(x) = x$ dönüşümünü ele alalım. J diklik koruyan operatördür fakat örten değildir. $J(c_0) = c_0 \subseteq l_\infty$ olup c_0 uzayı l_∞ uzayı içinde band olmadığından J band operatör değildir.

3.1.9. Sonuç

G ve H Riesz uzayları, $S: G \rightarrow H$ bire-bir ve örten bir operatör olsun. S ve S^{-1} diklik koruyan operatörlerdir ancak ve ancak S ve S^{-1} band operatörlerdir.

İspat

S ve S^{-1} diklik koruyan operatörler olsun. Dolayısıyla herhangi bir $\emptyset \neq D \subseteq G$ kümesi için $S(D^d) \subseteq S(D)^d$ ve $S^{-1}[S(D)^d] \subseteq [S^{-1}S(D)]^d = D^d$ dir. Buradan

$$S^{-1}[S(D)^d] \subseteq D^d \Rightarrow S(D)^d \subseteq S(D^d)$$

elde edilir. $S(D^d) \subseteq S(D)^d$ ve $S(D)^d \subseteq S(D^d)$ olduğundan $S(D)^d = S(D^d)$ dir. Şimdi herhangi bir $B \subseteq G$ band alalım. $B = B^{dd}$ olduğunu kullanırsak

$$S(B)^{dd} = S(B^d)^d = S(B^{dd}) = S(B)$$

bulunur. $S(B)^{dd} = S(B)$ olduğundan $S(B)$ bir band ve dolayısıyla S band operatördür. Benzer şekilde S^{-1} operatörü de band operatördür.

Şimdi de S ve S^{-1} band operatörler olsun. O halde Sonuç 3.1.4-(i) gereği S ve S^{-1} esas band operatörlerdir. S ve S^{-1} bire-bir esas band operatörler olduğundan Önerme 3.1.6-(i) gereği diklik koruyan operatörlerdir.

3.1.10. Sonuç

G projeksiyon özelliğine sahip bir Riesz uzayı, H bir Riesz uzayı ve $S: G \rightarrow H$ bire-bir ve örten bir operatör olsun. Aşağıdakiler denktir:

i-) S diklik koruyan operatördür.

ii-) S band operatördür.

iii-) S esas band operatördür.

İspat

(i) $\Rightarrow$ (ii) G projeksiyon özelliğine sahip Riesz uzayı ve $S: G \rightarrow H$ örten diklik koruyan operatör olduğundan Teorem 3.1.8 gereği S band operatördür.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) S band operatör olduğundan Sonuç 3.1.4-(i) gereği S esas band operatördür.

(iii) $\Rightarrow$ (i) S bire-bir esas band operatör olduğundan Önerme 3.1.6-(i) gereği S diklik koruyan operatördür.

Abramovich'in [19]'da sorduğu sorunun bir cevabı [18]'de Huijsmans ve de Pagter tarafından verildi. Şimdi bu cevabı ifade edelim.

3.1.11. Teorem [18, Sonuç 2.2]

G göreceli düzgün tam olan bir Riesz uzayı, H normlu bir Riesz uzayı ve $S: G \rightarrow H$ bire-bir ve örten diklik koruyan bir operatör ise $S^{-1}: H \rightarrow G$ operatörü de diklik koruyandır.

Biz de Abramovich'in sorduğu sorudan hareketle band operatörler için sorunun cevabını elde ettik. Şimdi tersinir bir band operatörün tersinin ne zaman band operatör olduğunu verelim.

3.1.12. Sonuç

G göreceli düzgün tam olan bir Riesz uzayı, H normlu bir Riesz uzayı ve $S: G \rightarrow H$ bire-bir ve örten bir band operatör ise $S^{-1}: H \rightarrow G$ de band operatördür.

İspat

S band operatör olduğundan Sonuç 3.1.4-(i) gereği esas band operatördür. Dolayısıyla S bire-bir esas band operatör olduğundan Önerme 3.1.6-(i) gereği diklik koruyandır. G göreceli düzgün tam Riesz uzayı, H normlu Riesz uzayı ve $S: G \rightarrow H$ bire-bir ve örten diklik koruyan operatör olduğundan Teorem 3.1.11 gereği S^{-1} operatörü de diklik koruyandır. S ve S^{-1} diklik koruyan olduğundan Sonuç 3.1.9 gereği S^{-1} band operatördür.

3.2. Sıra Sınırlı Band ve Ters Band Operatörlerin Özellikleri

Çalışmanın bu bölümünde sıra sınırlı olan band ve ters band operatörlerin hangi koşullarda sıra sürekli oldukları araştırıldı. Ayrıca sıra sınırlı olan tersinir bir band operatörün tersinin ne zaman band operatör olduğu verildi. Son olarak band operatör, ters band operatör ve orthomorfizmler arasındaki ilişkiler incelendi.

3.2.1. Lemma [28, Lemma 139.3]

G bir Riesz uzayı olmak üzere, G uzayında $u_0 \geq u_\alpha \downarrow 0$ ve $0 < \varepsilon < 1$ olsun. Bu durumda

$$\bigcap_{\alpha} \{(u_{\alpha} - \varepsilon u_0)^+\}^{dd} = \{0\}$$

olur.

İspat

$0 \leq v \in \bigcap_{\alpha} \{(u_{\alpha} - \varepsilon u_0)^+\}^{dd}$ olsun. O halde her α için $0 \leq v \in \{(u_{\alpha} - \varepsilon u_0)^+\}^{dd} \dots (*)$ olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} u_{\alpha} \downarrow 0 &\Rightarrow -u_{\alpha} \uparrow 0 \\ &\Rightarrow (\varepsilon u_0 - u_{\alpha}) \uparrow \varepsilon u_0 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$0 \leq v \wedge (\varepsilon u_0 - u_{\alpha})^+ \leq v \wedge (\varepsilon u_0)^+ = v \wedge \varepsilon u_0 \leq \varepsilon u_0$$

olduğundan ve G uzayının Arşimedyen özelliğinden $v \wedge \varepsilon u_0 = 0$ bulunur. Ayrıca

$$0 \leq \varepsilon(v \wedge u_0) = \varepsilon v \wedge \varepsilon u_0 \leq v \wedge \varepsilon u_0 = 0$$

dır. Buradan $\varepsilon(v \wedge u_0) = 0$ olup $v \wedge u_0 = 0$ elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} 0 \leq (u_{\alpha} - \varepsilon u_0)^+ \leq u_{\alpha}^+ = u_{\alpha} \leq u_0 &\Rightarrow 0 \leq v \wedge (u_{\alpha} - \varepsilon u_0)^+ \leq v \wedge u_0 = 0 \\ &\Rightarrow v \wedge (u_{\alpha} - \varepsilon u_0)^+ = 0 \end{aligned}$$

olduğundan $v \in \{(u_{\alpha} - \varepsilon u_0)^+\}^d \dots (**)$ olur. Dolayısıyla (*) ve (**) gereği $v = 0$ elde edilir.

3.2.2. Teorem

G ve H Riesz uzayları, $S: G \rightarrow H$ bire-bir sıra sınırlı esas band operatör olsun. Bu durumda S sıra süreklidir.

İspat

G uzayında $u_0 \geq u_\alpha \downarrow 0$ ve $0 < \varepsilon < 1$ olsun. S sıra sınırlı olduğundan her $0 \leq x \leq u_0$ için $|Sx| \leq y$ olacak şekilde bir $y \in H^+$ vardır. O halde $0 \leq x \leq \varepsilon u_0$ için $|Sx| \leq \varepsilon y$ dir. Şimdi her α için $0 \leq z \leq |S(u_\alpha)|$ alalım. Burada her α için $u_\alpha = (u_\alpha - \varepsilon u_0)^+ + (u_\alpha \wedge \varepsilon u_0)$ ve $u_\alpha \wedge \varepsilon u_0 \leq \varepsilon u_0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} 0 \leq z \leq |S(u_\alpha)| &= |S[(u_\alpha - \varepsilon u_0)^+] + S[u_\alpha \wedge \varepsilon u_0]| \\ &\leq |S[(u_\alpha - \varepsilon u_0)^+]| + |S[u_\alpha \wedge \varepsilon u_0]| \\ &\leq |S[(u_\alpha - \varepsilon u_0)^+]| + \varepsilon y \end{aligned}$$

olur. Ayrıca S esas band operatör olduğundan $B_{Sx} \subseteq S(B_x)$ dir. Buradan hareketle her α için $0 \leq z \leq |S[(u_\alpha - \varepsilon u_0)^+]| + \varepsilon y$ olduğu dikkate alınırsa

$$(z - \varepsilon y)^+ \leq |S[(u_\alpha - \varepsilon u_0)^+]| \Rightarrow (z - \varepsilon y)^+ \in \bigcap_{\alpha} B_{S[(u_\alpha - \varepsilon u_0)^+]} \subseteq \bigcap_{\alpha} S(B_{[(u_\alpha - \varepsilon u_0)^+]})$$

elde edilir. S bire-bir olduğundan

$$\bigcap_{\alpha} S(B_{[(u_\alpha - \varepsilon u_0)^+]}) = S\left(\bigcap_{\alpha} B_{(u_\alpha - \varepsilon u_0)^+}\right)$$

gerçeklenir. O halde Lemma 3.2.1 gereği

$$\bigcap_{\alpha} B_{(u_\alpha - \varepsilon u_0)^+} = \bigcap_{\alpha} \{(u_\alpha - \varepsilon u_0)^+\}^{dd} = \{0\}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} (z - \varepsilon y)^+ \in \bigcap_{\alpha} B_{S[(u_\alpha - \varepsilon u_0)^+]} &\subseteq \bigcap_{\alpha} S(B_{[(u_\alpha - \varepsilon u_0)^+]}) = S\left(\bigcap_{\alpha} B_{(u_\alpha - \varepsilon u_0)^+}\right) = S(\{0\}) \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$(z - \varepsilon y)^+ = 0 \Rightarrow z - \varepsilon y \leq 0 \Rightarrow z \leq \varepsilon y \Rightarrow z = 0 \Rightarrow \inf |S(u_\alpha)| = 0$$

olup S sıra süreklidir.

3.2.3. Sonuç

G ve H Riesz uzayları, $S: G \rightarrow H$ bire-bir sıra sınırlı band operatör olsun. Bu durumda S sıra süreklidir.

İspat

S band operatör olduğundan Sonuç 3.1.4-(i) gereği S esas band operatördür. Dolayısıyla Teorem 3.2.2'den S sıra süreklidir.

Şimdi ileride kullanacağımız diklik koruyan operatörlerin bilinen bazı özelliklerini verelim.

3.2.4. Teorem [18, Teorem 1.1]

G ve H Riesz uzayları, $T: G \rightarrow H$ sıra sınırlı diklik koruyan operatör olsun.

i-) $T = T^+ - T^-$ olacak şekilde $T^+, T^-: G \rightarrow H$ Riesz homomorfizmleri vardır. Ayrıca her $x \in G^+$ için $T^+x = (Tx)^+$, $T^-x = (Tx)^-$ olup her $x, y \in G^+$ için $(Tx)^+ \wedge (Ty)^- = 0$ dır.

ii-) $|T|$ vardır. Ayrıca $|T|$ Riesz homomorfizmi olup $|T| = T^+ + T^-$ şeklide yazılabilir ve her $x \in G$ için $|Tx| = ||Tx|| = |T||x|$ dir.

3.2.5. Teorem [18, Önerme 1.2]

G ve H Riesz uzayları, $T: G \rightarrow H$ bir operatör olsun. Aşağıdakiler denktir:

i-) T sıra sınırlı diklik koruyandır.

ii-) G uzayında $|x| \leq |y|$ iken H uzayında $|Tx| \leq |Ty|$ dir.

3.2.6. Teorem [25, Teorem 7.9]

G ve H Riesz uzayları, $T: G \rightarrow H$ örten bir Riesz homomorfizmi olsun. Bu durumda T sıra sürekli ancak ve ancak $\text{Ker}(T)$, G uzayında banttır.

3.2.7. Teorem

G ve H Riesz uzayları, $S: G \rightarrow H$ sıra sınırlı diklik koruyan bir operatör olsun. Eğer S sıra sürekli ise ters band operatördür. Ayrıca S örten ise bu ifadenin karşıtı da doğrudur.

İspat

S sıra sürekli ve $B \subseteq H$ herhangi bir band olsun. B band olduğundan aynı zamanda bir idealdir. Dolayısıyla S operatörü lineer olduğundan $S^{-1}(B)$, G içinde altuzay olur. Şimdi $x \in G$, $y \in S^{-1}(B)$ ve $|x| \leq |y|$ olsun. O halde Teorem 3.2.5 gereği $|Sx| \leq |Sy|$ dir. Ayrıca $y \in S^{-1}(B)$ için $Sy \in B$ ve B ideal olduğundan $|Sx| \leq |Sy|$ iken $Sx \in B$ dir. Buradan $x \in S^{-1}(B)$ olup $S^{-1}(B)$ idealdir. Şimdi de $0 \leq (x_\alpha) \subseteq S^{-1}(B)$ ve $x_\alpha \uparrow x$ olsun. Dolayısıyla her α için $S(x_\alpha) \in B$ dir. $x_\alpha \uparrow x$ olduğundan $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ ve S sıra sürekli olduğundan $S(x_\alpha) \xrightarrow{o} Sx$ elde edilir. $(S(x_\alpha)) \subseteq B$ ve B band yani sıra kapalı olduğundan $S(x_\alpha) \xrightarrow{o} Sx$ için $Sx \in B$ ve dolayısıyla $x \in S^{-1}(B)$ dir. Buradan $S^{-1}(B)$ band olup S ters band operatördür. Diğer taraftan S örten ters band operatör olsun. Teorem 3.2.4-(ii) göz önüne alınırsa

$$x \in \text{Ker}S \Leftrightarrow Sx = 0$$

$$\Leftrightarrow |Sx| = 0$$

$$\Leftrightarrow ||Sx| = 0$$

$$\Leftrightarrow |S|x = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \text{Ker}|S|$$

olduğundan $\text{Ker}S = \text{Ker}|S|$ dir. $B \subseteq H$ herhangi bir band olsun. B kümesinin band olduğu ve Teorem 3.2.4-(ii) kullanılırsa

$$\begin{aligned} x \in S^{-1}(B) &\Leftrightarrow Sx \in B \\ &\Leftrightarrow |Sx| \in B \\ &\Leftrightarrow |S|x \in B \\ &\Leftrightarrow x \in |S|^{-1}(B) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $|S|$ ters band operatördür. $\{0\} \subseteq H$ band ve $|S|$ ters band operatör olduğundan $|S|^{-1}(\{0\}) = \text{Ker}|S| \subseteq G$ band olur. Şimdi $y \in H^+$ olsun. S örten olduğundan $Sx = y$ olacak şekilde en az bir $x \in G$ vardır. $y \geq 0$ olduğundan $Sx \geq 0$ dir. O halde Teorem 3.2.4-(ii) gereği $Sx = |Sx| = ||S|x| = |S||x| = y$ olur. Dolayısıyla her $y \in H^+$ için $|S||x| = y$ olacak şekilde en az bir $|x| \in G$ vardır. Burada keyfi bir $y \in H$ seçtiğimizde $y = y^+ - y^-$ şeklinde yazılabilir ve $y^+, y^- \in H^+$ olduğundan ilk durum y^+ ve y^- içinde sağlanacağından $|S|$ örtendir. Diğer taraftan S sıra sınırlı diklik koruyan olduğundan Teorem 3.2.4-(ii) gereği $|S|$ Riesz homomorfizmidir. O halde $|S|$ örten Riesz homomorfizmi ve $\text{Ker}|S| \subseteq G$ band olduğundan Teorem 3.2.6 gereği $|S|$ sıra süreklidir ve dolayısıyla S sıra süreklidir.

Şimdi sıra sınırlılık özelliğine sahip tersinir bir band operatörün, tersinin de band operatör olma koşulunu verelim.

3.2.8. Sonuç

G ve H Riesz uzayları, $S: G \rightarrow H$ bire-bir ve örten sıra sınırlı bir operatör olsun. Bu durumda eğer S band operatör ise S^{-1} band operatör olur.

İspat

S band operatör olsun. Sonuç 3.2.3 ve Teorem 3.2.7 gereği S ters band operatör olur ve dolayısıyla S^{-1} band operatördür.

3.2.9. Sonuç

Her orthomorfizm bir ters band operatördür.

İspat

Her orthomorfizm, sıra sınırlı diklik koruyan sıra sürekli operatör olduğundan Teorem 3.2.7 gereği ters band operatördür.

Sonuç 3.2.9'daki ifadenin karşınının her zaman doğru olmadığına dair bir örnek verelim.

Örnek

$\mathbb{R}^2$ uzayını alışılmış sıralama ile göz önüne alalım. Bölüm 3.1'den $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \rightarrow S(x, y) = (-y, 0)$ operatörünün ters band operatör olduğunu biliyoruz. Fakat $(0, 1) \perp (1, 0)$ iken $S(0, 1) = (-1, 0)$ olup $S(0, 1)$ ile $(1, 0)$ birbirine dik olmadığından S orthomorfizm değildir.

Diğer taraftan her orthomorfizm, band operatör olmak zorunda değildir. Şimdi bu durumu açıklayan bir örnek verelim.

Örnek

$[0, 1]$ aralığında tanımlı reel değerli ve sürekli fonksiyonların uzayı $C[0, 1]$, noktasal sıralama ile bir Riesz uzayıdır. $G = C[0, 1]$ olsun. $q: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $q(x) = x$ fonksiyonunu göz önüne alırsak $q \in G$ dir. Buradan hareketle $\pi_q: G \rightarrow G$, $\pi_q(f) = q \cdot f$ şeklinde tanımlanan operatör bir orthomorfizmdir [28, Teorem 141.1]. Şimdi $w: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$w(x) = \begin{cases} \left| x \cdot \sin \frac{1}{x} \right|, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunu ele alalım. Burada $w \in G$, $q \in \pi_q(G)$ ve $0 \leq w \leq q$ dır. Fakat $w \notin \pi_q(G)$ olduğundan $\pi_q(G)$, G içinde ideal değildir. Dolayısıyla $\pi_q(G)$, G içinde band değildir. O halde π_q band operatör değildir.

Şimdi de bir orthomorfizmin hangi koşullarda band operatör olduğunu verelim.

3.2.10. Sonuç

G projeksiyon özelliğine sahip bir Riesz uzayı olsun. Bu durumda $\pi: G \rightarrow G$ tanımlı her örten orthomorfizm bir band operatördür.

İspat

Her orthomorfizm aynı zamanda bir diklik koruyan operatör olduğundan $\pi: G \rightarrow G$ orthomorfizmi de diklik koruyan operatördür. Dolayısıyla $\pi: G \rightarrow G$ örten diklik koruyan operatör olduğundan Teorem 3.1.8 gereği π band operatördür.

Diğer taraftan her band operatör de orthomorfizm olmak zorunda değildir. Bu durumu açıklayan örneğimizi verelim.

Örnek

$\mathbb{R}^2$ uzayını alışılmış sıralama ile ele alalım. $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \rightarrow S(x, y) = (0, x + y)$ operatörünün Bölüm 3.1'den band operatör olduğunu biliyoruz. Fakat $(1, 0) \perp (0, 1)$ iken $S(1, 0) = (0, 1)$ olup $S(1, 0)$ ile $(0, 1)$ birbirine dik olmadığından S operatörü orthomorfizm değildir.

3.3. Band Operatörün Sıra Sınırlılığı

Çalışmanın bu bölümünde band operatörün hangi koşullarda sıra sınırlı olduğu incelendi. Bu doğrultuda öncelikle sıra sınırlı olmayan bir band operatör örneği oluşturuldu ardından band operatörün sıra sınırlı olma koşulları belirlendi.

3.3.1. Lemma [13, Sonuç 13.9]

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere $[a, b]$ aralığında tanımlı ölçülebilir fonksiyonların uzayı $L_0[a, b]$ göz önüne alınırsa T^{-1} diklik koruyan operatör olmamak üzere bire-bir ve örten diklik koruyan bir $T: L_0[a, b] \rightarrow L_0[a, b]$ operatörü vardır.

Şimdi Lemma 3.3.1 yardımıyla oluşturduğumuz sıra sınırlı olmayan band operatör örneğini verelim.

Örnek

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere $[a, b]$ aralığında tanımlı ölçülebilir fonksiyonların $L_0[a, b]$ uzayını göz önüne alalım ve $G = L_0[a, b]$ olsun. “ $f, g \in G$ için $f \leq g$ ancak ve ancak hemen hemen her $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$ ” sıralaması ile G Dedekind tam Riesz uzaydır. Ayrıca Lemma 3.3.1 gereği T^{-1} diklik koruyan operatör olmamak üzere bire-bir ve örten diklik koruyan bir $T: L_0[a, b] \rightarrow L_0[a, b]$ operatörü vardır. Diğer taraftan G , Dedekind tam Riesz uzayı olduğundan projeksiyon özelliğine sahiptir ve T operatörü örten olduğundan Teorem 3.1.8 gereği T band operatördür. Şimdi T operatörünün sıra sınırlı olduğunu varsayalım. Bu durumda Sonuç 3.2.8 gereği T^{-1} band operatör ve dolayısıyla esas band operatör olur. Sonuç olarak T^{-1} bire-bir esas band operatör olduğundan Önerme 3.1.6-(i) gereği T^{-1} diklik koruyan operatör olur ki bu bir çelişkidir. O halde T sıra sınırlı değildir.

Yukarıdaki örnekten de görüleceği üzere her band operatör sıra sınırlı yapıya sahip değildir. Şimdi de band operatörün sıra sınırlı olma koşullarını elde edeceğiz. Bunun için öncelikle aşağıdaki tanımımızı ifade edelim.

3.3.2. Tanım

G bir Riesz uzayı olsun. G üzerinde tanımlı her band koruyan operatör sıra sınırlı ise G uzayına sınırlı band koruyan özelliğine sahiptir denir.

Birçok uzay sınırlı band koruyan özelliğine sahiptir. Bilinen bazı teoremler yardımıyla bu özelliğe sahip uzaylara örnekler verelim.

3.3.3. Teorem [13, Teorem 2.6]

Banach örgüleri üzerinde tanımlı bütün band koruyan operatörler regular ve sıra süreklidir.

3.3.4. Teorem [29, Sonuç 9.10]

Dedekind σ -tam normlu Riesz uzaylarında tanımlı bütün band koruyan operatörler sıra sınırlıdır.

3.3.5. Teorem [30, Sonuç 2.3]

Üzerinde lokal konveks lokal solid Hausdorff topoloji tanımlı göreceli düzgün tam Riesz uzaylarında tanımlı bütün band koruyan operatörler sıra sınırlıdır.

Ayrıca [25, Örnek 8.4]'te sınırlı band koruyan özelliğine sahip olmayan Riesz uzayı örneği verilmiştir. Şimdi bu örneği ifade edelim.

Örnek

$[0,1)$ aralığında tanımlı ve reel değerli bir f fonksiyonunu ele alalım. $[0,1)$ aralığının herhangi bir parçalanışı (f fonksiyonuna bağlı olarak) $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ olmak üzere f fonksiyonu $1 \leq i \leq n$ için her $[x_{i-1}, x_i)$ aralığında afın (yani, $f(x) = ax + b$) olsun. Bu şekilde tanımlı bütün fonksiyonların uzayına G dersek noktasal sıralama ve bilinen örgü işlemleri ile G Riesz uzayıdır. Şimdi $f \in G$ alalım ve $[0,1)$ aralığının bir parçalanışı (f fonksiyonuna bağlı olarak) $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ olsun. f fonksiyonu her $[x_{i-1}, x_i)$ aralığında afın yani, her $x \in [x_{i-1}, x_i)$, $1 \leq i \leq n$ için $f(x) = a_i x + b_i$ şeklindedir. $f \in G$, $T: G \rightarrow G$, $f \rightarrow Tf$ dönüşümü $1 \leq i \leq n$ olmak üzere

$$\forall x \in [x_{i-1}, x_i), Tf(x) = a_i$$

şeklinde tanımlanırsa, T operatördür fakat sıra sınırlı değildir. Diğer taraftan her $f, g \in G$ için $f \perp g$ iken $Tf \perp g$ olduğundan T band koruyan operatördür. Dolayısıyla G uzayı sınırlı band koruyan özelliğine sahip değildir.

3.3.6. Lemma [21, Önerme 2]

G ve H Riesz uzayları ve $T: G \rightarrow H$ bire-bir ve örten bir operatör olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

i-) T band operatör ise her $S \in Orth(H)$ için $T^{-1}ST$ band koruyan operatördür.

ii-) T^{-1} band operatör ise her $S \in Orth(G)$ için TST^{-1} band koruyan operatördür.

İspat

i-) $B \subseteq G$ bir band olsun. T band operatör olduğundan $T(B)$, H uzayında band olur. O halde $S \in Orth(H)$ için $S(T(B)) \subseteq T(B)$ elde edilir. Buradan $T^{-1}ST(B) \subseteq T^{-1}T(B) = B$ olup $T^{-1}ST$ band koruyan operatördür.

ii-) $B \subseteq H$ bir band olsun. T^{-1} band operatör olduğundan $T^{-1}(B)$, G uzayında band olur. O halde $S \in Orth(G)$ için $S(T^{-1}(B)) \subseteq T^{-1}(B)$ elde edilir. Buradan hareketle $TST^{-1}(B) \subseteq TT^{-1}(B) = B$ olup TST^{-1} band koruyan operatördür.

3.3.7. Teorem [31, Teorem 5.1]

G göreceli düzgün tam yarıasal f-cebiri ve H yarıasal f-cebiri olsun. Eğer $T: G \rightarrow H$ bir cebir homomorfizmi ise T Riesz homomorfizmidir.

Burada Lemma 3.3.6'dan hareketle aşağıdaki lemmayı ifade ve ispat edebiliriz.

3.3.8. Lemma

G ve H Riesz uzayları ayrıca G sınırlı band koruyan özelliğine sahip olsun. Bu durumda $T: G \rightarrow H$ bire-bir ve örten bir band operatör ise

$$\Phi : Orth(H) \rightarrow Orth(G), \quad S \rightarrow \Phi(S) = T^{-1}ST$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bire-bir cebir homomorfizmidir. Eğer H göreceli düzgün tam Riesz uzayı ise Φ Riesz homomorfizmidir.

İspat

$S, R \in Orth(H)$ keyfi iki eleman olsun.

$$\Phi(S)\Phi(R) = (T^{-1}ST)(T^{-1}RT) = T^{-1}SRT = \Phi(SR)$$

olduğundan Φ cebir homomorfizmidir. Şimdi $S \in Orth(H)$ ve $\Phi(S) = 0$ olsun. $y \in H$ keyfi bir eleman seçelim. O halde $Tx = y$ olacak şekilde bir $x \in G$ vardır. Dolayısıyla

$$T^{-1}S(y) = T^{-1}ST(x) = \Phi(S)(x) = 0$$

elde edilir ki T^{-1} bire-bir olduğundan $S = 0$ olur. Dolayısıyla Φ bire-birdir. Şimdi H göreceli düzgün tam Riesz uzayı olsun. Bu durumda [28, Sonuç 142.9] gereği $Orth(H)$ uzayı da göreceli düzgün tam Riesz uzayı olur. $Orth(H)$ göreceli düzgün tam yarıasal f-cebiri, $Orth(G)$ yarıasal f-cebiri ve $\Phi: Orth(H) \rightarrow Orth(G)$ tanımlı cebir homomorfizmi olduğundan Teorem 3.3.7 gereği Φ Riesz homomorfizmidir.

3.3.9. Tanım [13, Tanım 8.7]

G bir Riesz uzayı olsun. $I: G \rightarrow G$ özdeşlik dönüşümü olmak üzere, $|y| \leq |x|$ olan her $x, y \in G$ için $Sx = y$ ve $|S| \leq I$ olacak şekilde bir $S \in Z(G)$ merkez operatörü varsa G uzayına zengin merkeze sahiptir denir.

Dedekind σ -tam Riesz uzayları zengin merkeze sahiptir.

3.3.10. Teorem

H zengin merkeze sahip göreceli düzgün tam Riesz uzayı, G sınırlı band koruyan özelliğine sahip Riesz uzayı ve $T: G \rightarrow H$ bire-bir ve örten bir band operatör olsun. Bu durumda T^{-1} sıra sınırlı diklik koruyan operatördür.

İspat

Teorem 3.2.5'ten hareketle T^{-1} operatörünün sıra sınırlı diklik koruyan olduğunu göstermek için H uzayında $|z| \leq |w|$ iken G uzayında $|T^{-1}(z)| \leq |T^{-1}(w)|$ olduğunu göstermek yeterlidir. Dolayısıyla H uzayında $|z| \leq |w|$ olsun. $T^{-1}: H \rightarrow G$ olduğundan $x = T^{-1}(z)$ ve $y = T^{-1}(w)$ olacak şekilde $x, y \in G$ vardır. Ayrıca H zengin merkeze sahip olduğundan $|z| \leq |w|$ iken $I: H \rightarrow H$ birim (özdeşlik) operatör olmak üzere $|S| \leq I$ ve $S(w) = z$ olacak şekilde bir $S \in Z(H)$ operatörü vardır. Buradan

$$S(Ty) = S(w) = z = Tx \Rightarrow T^{-1}ST(y) = x$$

elde edilir. Diğer taraftan Lemma 3.3.8'de tanımladığımız Φ dönüşümü Riesz homomorfizmi olduğundan

$$|T^{-1}ST| = |\Phi(S)| = |\Phi||S| = \Phi|S| \leq \Phi(I) = I$$

olur ki buradan,

$$|T^{-1}(z)| = |x| = |T^{-1}ST(y)| \leq |T^{-1}ST||y| \leq I|y| = |y| = |T^{-1}(w)|$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak $|T^{-1}(z)| \leq |T^{-1}(w)|$ olduğundan T^{-1} sıra sınırlı diklik koruyandır.

Tersinir bir diklik koruyan operatörün sıra sınırlı olduğunda tersinin de sıra sınırlı diklik koruyan olduğu aşağıdaki teoremle ortaya konulmuştur.

3.3.11. Teorem [17, Teorem 1]

G ve H Riesz uzayları ve $T: G \rightarrow H$ bire-bir ve örten diklik koruyan bir operatör olsun. Eğer T sıra sınırlı ise T^{-1} sıra sınırlı diklik koruyandır.

Buradan hareketle bir band operatörün sıra sınırlı olma koşullarını ifade edelim.

3.3.12. Sonuç

H zengin merkeze sahip göreceli düzgün tam Riesz uzayı, G sınırlı band koruyan özelliğine sahip Riesz uzayı ve $T: G \rightarrow H$ bire-bir ve örten bir band operatör olsun. Bu durumda T sıra sınırlı operatördür.

İspat

Bu hipotezler altında Teorem 3.3.10 gereği T^{-1} sıra sınırlı diklik koruyan operatördür. Dolayısıyla Teorem 3.3.11'den $(T^{-1})^{-1} = T$ sıra sınırlıdır.

Bu bölümde son olarak her Dedekind tam Riesz uzayının sınırlı band koruyan özelliğine sahip olmadığına dair bir örnek verelim.

Örnek

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere $[a, b]$ aralığında tanımlı ölçülebilir fonksiyonların $L_0[a, b]$ uzayını göz önüne alalım ve $G = L_0[a, b]$ olsun. “ $f, g \in G$ için $f \leq g$ ancak ve ancak hemen hemen her $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$ ” sıralaması ile G Dedekind tam Riesz uzayıdır. Ayrıca Lemma 3.3.1 gereği T^{-1} diklik koruyan operatör olmamak üzere bire-bir ve örten diklik koruyan bir $T: L_0[a, b] \rightarrow L_0[a, b]$ operatörü vardır. Şimdi G uzayının sınırlı band koruyan özelliğine sahip olduğunu varsayalım. G Dedekind tam Riesz uzayı olduğundan projeksiyon özelliğine sahiptir ve T örten diklik koruyan operatör olduğundan Teorem 3.1.8 gereği T band operatördür. Diğer taraftan Teorem 3.3.10'da $G = H$ alırsak T^{-1} sıra sınırlı diklik koruyan operatör olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla G sınırlı band koruyan özelliğine sahip değildir.

4. İDEAL OPERATÖRLER

İdeal operatör ve ters ideal operatör tanımlarını 2003 yılında Turan, [20]'de vermiştir ve bu operatörlere ait önemli özellikleri elde etmiştir. Ayrıca bu operatörler ile diklik koruyan operatörler arasındaki ilişkiyi incelemiştir.

4.1. İdeal ve Ters İdeal Operatörlerin Özellikleri

Çalışmanın bu bölümünde ideal ve ters ideal operatörlerin bilinen özelliklerinin yanında farklı birtakım özellikleri verildi. Ayrıca tersinir bir ideal operatörün tersinin hangi koşullarda yine ideal operatör olduğu belirlendi.

4.1.1. Tanım [20, Tanım 2.1 ve Tanım 2.2]

G ve H Riesz uzayları, $T: G \rightarrow H$ bir operatör olsun.

i-) Her $I \subseteq G$ ideal için $T(I)$, H içinde ideal oluyorsa T ideal operatör olarak adlandırılır.

ii-) Her $J \subseteq H$ ideal için $T^{-1}(J)$, G içinde ideal oluyorsa T ters ideal operatör olarak adlandırılır.

4.1.2. Teorem [20, Önerme 2.3]

G ve H Riesz uzayları, $T: G \rightarrow H$ bir operatör ve I_x , $x \in G$ tarafından üretilen ideal olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

i-) T ideal operatördür ancak ve ancak her $x \in G$ için $I_{Tx} \subseteq T(I_x)$ dir.

ii-) T ters ideal operatördür ancak ve ancak her $x \in G$ için $T(I_x) \subseteq I_{Tx}$ dir.

Teoremden açıkça görülebileceği üzere $T: G \rightarrow H$ bire-bir ve örten bir operatör olduğunda T operatörünün ideal operatör olması için gerek ve yeter şart T^{-1} operatörünün ters ideal operatör olmasıdır.

4.1.3. Teorem [20, Önerme 3.2]

G ve H Riesz uzayları, $T: G \rightarrow H$ bir operatör olsun.

i-) T bire-bir ideal operatör ise T diklik koruyan operatördür.

ii-) T bire-bir ve örten ters ideal operatör ise T^{-1} diklik koruyan operatördür.

4.1.4. Teorem [20, Önerme 2.3]

G ve H Riesz uzayları ve $T: G \rightarrow H$ bir operatör olmak üzere, T ters ideal operatördür ancak ve ancak $|y| \leq |x|$ olan her $x, y \in G$ için $|Ty| \leq \lambda_y |Tx|$ olacak şekilde en az bir $\lambda_y \in \mathbb{R}^+$ vardır.

Dolayısıyla Teorem 3.2.5 gereği her sıra sınırlı diklik koruyan operatör bir ters ideal operatördür.

4.1.5. Tanım [28, Sayfa 676]

G bir Riesz uzayı, $T: G \rightarrow G$ bir operatör ve I_x , $x \in G$ tarafından üretilen ideal olmak üzere her $x \in G^+$ için $T(x) \in I_x$ oluyorsa T ideal koruyan operatör (contractor) olarak adlandırılır.

Tanımdan hareketle, her $x \in G^+$ için $|T(x)| \leq \lambda_x x$ olacak şekilde en az bir $\lambda_x \in \mathbb{R}^+$ varsa T operatörünün ideal koruyan olacağını veya T operatörünün ideal koruyan olması için gerek ve yeter şartın her $I \subseteq G$ ideal için $T(I) \subseteq I$ olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca G üzerinde tanımlı bütün ideal koruyan operatörlerin kümesi $S(G)$ ile gösterilir ve $S(G)$ kümesine G uzayının stabilizeri denir.

4.1.6. Teorem [28, Teorem 143.1]

G bir Riesz uzayı olmak üzere G üzerinde tanımlı her ideal koruyan operatör sıra sınırlıdır.

4.1.7. Teorem [28, Sonuç 143.2]

G bir Riesz uzayı olmak üzere G üzerinde tanımlı her ideal koruyan operatör orthomorfizmdir.

Orthomorfizmler diklik koruyan operatör olduklarından Teorem 4.1.7 gereği her ideal koruyan operatör aynı zamanda diklik koruyandır. Buradan hareketle her ideal koruyan operatör sıra sınırlı diklik koruyan olduğundan aynı zamanda bir ters ideal operatördür. Fakat bu ifadenin karşıtı doğru değildir.

Örnek [20, Örnek 3.9]

ℓ_2 uzayı vektörlerin bileşen bileşen sıralamasına göre bir Riesz uzayıdır. $T: \ell_2 \rightarrow \ell_2$ dönüşümünü $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell_2$ için $T(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$ şeklinde tanımlarsak, T operatördür. Diğer taraftan her $x \in \ell_2$ için $T(|x|) = |T(x)|$ olduğundan T Riesz homomorfizmi olup her Riesz homomorfizmi sıra sınırlı diklik koruyan olduğundan yukarıda belirttiğimiz üzere T ters ideal operatördür. Fakat T operatörü ideal koruyan değildir. Çünkü $x = (1, 0, 0, \dots) \in \ell_2^+$ seçersek $T(x) = (0, 1, 0, \dots)$ olur, fakat burada $|T(x)| \leq \lambda_x x$ olacak şekilde bir $\lambda_x \in \mathbb{R}^+$ bulunamaz.

Bir diğer karşılaştırma olarak ideal operatör ve ideal koruyan operatör kavramlarına bakacak olursak bu iki operatör sınıfının birbirinden farklı olduklarını görürüz. Şimdi bu durumla ilgili örnekleri ifade edelim.

Her ideal operatör, ideal koruyan olmak zorunda değildir.

Örnek [20, Örnek 3.9]

$\mathbb{R}^2$ üzerinde bilinen sıralama olmak üzere $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (y, x)$ operatörünü ele alalım. $\mathbb{R}^2$ uzayının bütün idealleri $I_1 = \{(0, x): x \in \mathbb{R}\}$, $I_2 = \{(x, 0): x \in \mathbb{R}\}$, $I_3 = \{(0, 0)\}$ ve $I_4 = \mathbb{R}^2$ şeklinde olup bu ideallerin T altındaki görüntülerini incelediğimizde

$$i-) T(I_1) = \{T(0, x): x \in \mathbb{R}\} = \{(x, 0): x \in \mathbb{R}\} = I_2$$

$$\text{ii-)} T(I_2) = \{T(x, 0): x \in \mathbb{R}\} = \{(0, x)\} = I_1$$

$$\text{iii-)} T(I_3) = I_3$$

$$\text{iv-)} T(I_4) = \{T(x, y): x, y \in \mathbb{R}\} = \{(y, x): x, y \in \mathbb{R}\} = I_4$$

dir. Dolayısıyla T ideal operatördür. Fakat $T(I_1) = I_2 \not\subseteq I_1$ olduğundan T ideal koruyan değildir.

Diğer taraftan her ideal koruyan operatör bir ideal operatör olmak zorunda değildir.

Örnek [20, Örnek 3.9]

$[0,1]$ aralığında tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların uzayı olan $C[0,1]$, noktasal sıralama ile Riesz uzayıdır. $G = C[0,1]$ olsun. Burada

$$\forall f, g \in G, f \cdot g \Leftrightarrow \forall x \in [0,1], (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

çarpmasını ve $p: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) = x$ olmak üzere $\pi_p: G \rightarrow G$, her $f \in G$ için $\pi_p(f) = p \cdot f$ operatörünü ele alalım. Keyfi bir $f \in G^+$ seçersek, her $x \in [0,1]$ için $\pi_p(f)(x) = (p \cdot f)(x) = p(x) \cdot f(x)$ şeklinde olup $0 \leq x \leq 1$ ve $p(x) = x$ olduğundan $\pi_p(f)(x) \leq f(x)$ dir. Dolayısıyla $\pi_p(f) \leq f$ yani $\pi_p(f) \in I_f$ dir. O halde π_p ideal koruyandır. Fakat π_p ideal operatör değildir. Bunu görmek için $u: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$u(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & , x \in (0,1] \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. $u \in G$ dir ve her $x \in [0,1]$ için $u(x) \leq p(x)$ olduğundan $u \in I_p$ olur. Ayrıca $\mathbb{1}: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{1}(x) = 1$ fonksiyonunu ele alırsak $\mathbb{1} \in G$ ve $\pi_p(\mathbb{1}) = p \cdot \mathbb{1} = p$ olduğundan $p \in \pi_p(G)$ dir. Fakat burada $u \notin \pi_p(G)$ dir. Varsayalım ki bir $f \in G$ için $\pi_p(f) = u$ olsun. Bu durumda $p \cdot f = u$ ve dolayısıyla her $x \in [0,1]$ için $p(x) \cdot f(x) = u(x)$ olur. O halde $x \in (0,1]$ için

$$p(x).f(x) = u(x) \Rightarrow x.f(x) = \left| x \cdot \sin \frac{1}{x} \right| = x \cdot \left| \sin \frac{1}{x} \right|$$

$$\Rightarrow f(x) = \left| \sin \frac{1}{x} \right|$$

elde ederiz. Dolayısıyla $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere f fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \left| \sin \frac{1}{x} \right|, & x \in (0,1] \\ \lambda, & x = 0 \end{cases}$$

şeklinde dir. Fakat burada $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ limit değeri mevcut olmadığından f fonksiyonu $x = 0$ noktasında sürekli değildir. Bu ise $f \in G$ kabulü ile çelişir. O halde $u \in I_p$ iken $u \notin \pi_p(G)$ olduğundan π_p ideal operatör değildir.

4.1.8. Tanım [32]

G bir Riesz uzayı olmak üzere $G^\sim$ (G nin sıra duali), G uzayının noktalarını ayırsın. $I: G \rightarrow G$ birim dönüşüm iken $0 \leq y \leq x$ olan her $x, y \in G$ ve her α için $0 \leq \pi_\alpha \leq I$ ve $\pi_\alpha(x) \xrightarrow{\sigma(G, G^\sim)} y$ olacak şekilde bir $(\pi_\alpha) \subseteq Z(G)$ neti varsa G uzayına topolojik olarak dolu merkeze sahiptir denir.

Her zengin merkeze sahip Riesz uzayı, topolojik olarak dolu merkeze sahiptir.

G ve H Riesz uzayları, $T: G \rightarrow H$ bire-bir ve örten bir operatör olsun. Bu durumda $T^{-1}: H \rightarrow G$ operatördür. O halde $L(G) = \{\pi \mid \pi: G \rightarrow G \text{ lineer dönüşüm}\}$ olmak üzere her $\pi \in L(G)$ için $T\pi T^{-1}: H \rightarrow H$ operatör, yani $T\pi T^{-1} \in L(H)$ dir. Dolayısıyla h ve u operatörleri

$$h: L(G) \rightarrow L(H), \pi \rightarrow h(\pi) = T\pi T^{-1} \text{ ve } u: L(H) \rightarrow L(G), \pi \rightarrow u(\pi) = T^{-1}\pi T$$

şeklinde tanımlanabilir. Buradan hareketle h operatörünü $Z(G)$ uzayına ve u operatörünü de $Z(H)$ uzayına kısıtlarsak sırasıyla $h: Z(G) \rightarrow L(H)$ ve $u: Z(H) \rightarrow L(G)$ operatörlerini elde ederiz.

Ayrıca G uzayı üzerinde tanımlı ve $S(G)$ uzayında bulunan operatörler ile değişmeli olan operatörlerin kümesine $S(G)$ uzayının değişenleri denir ve bu özellikteki operatörlerin kümesi $S(G)_C = \{T \in L(G) : \forall R \in S(G), TR = RT\}$ biçiminde ifade edilir. Benzer şekilde G uzayı üzerinde tanımlı ve $Z(G)$ uzayında bulunan operatörler ile değişmeli olan operatörlerin kümesine de $Z(G)$ uzayının değişenleri denir ve bu özellikteki operatörlerin kümesi $Z(G)_C = \{T \in L(G) : \forall S \in Z(G), TS = ST\}$ biçiminde ifade edilir.

4.1.9. Lemma

G ve H Riesz uzayları, $T: G \rightarrow H$ bire-bir ve örten bir operatör olsun. Bu durumda

$$\forall Q \in S(H), T^{-1}QT \in S(G)_C \iff \forall R \in S(G), TRT^{-1} \in S(H)_C$$

dir.

İspat

$\Rightarrow$: $R \in S(G)$ ve $Q \in S(H)$ keyfi iki operatör olsun.

$$\begin{aligned} (TRT^{-1})Q &= (TRT^{-1})QTT^{-1} \\ &= TR(T^{-1}QT)T^{-1} \\ &= T(T^{-1}QT)RT^{-1} \\ &= Q(TRT^{-1}) \end{aligned}$$

olduğundan $TRT^{-1} \in S(H)_C$ dir.

$\Leftarrow$: $Q \in S(H)$ ve $R \in S(G)$ keyfi iki operatör olsun.

$$\begin{aligned} (T^{-1}QT)R &= (T^{-1}QT)RT^{-1}T \\ &= T^{-1}Q(TRT^{-1})T \\ &= T^{-1}(TRT^{-1})QT \\ &= R(T^{-1}QT) \end{aligned}$$

olduğundan $T^{-1}QT \in S(G)_C$ dir.

4.1.10. Lemma

G ve H Riesz uzayları, $T: G \rightarrow H$ bire-bir ve örten bir operatör olsun. Eğer T ideal operatör ise her $Q \in S(H)$ için $T^{-1}QT \in S(G)$ dir.

İspat

T ideal operatör, $Q \in S(H)$ ve $I \subseteq G$ ideal olsun. T ideal operatör olduğundan $T(I) \subseteq H$ idealdir. Ayrıca $Q \in S(H)$ olduğundan Q ideal koruyan olup $Q(T(I)) \subseteq T(I)$ olur.

$$Q(T(I)) \subseteq T(I) \Rightarrow T^{-1}QT(I) \subseteq T^{-1}[T(I)] = I$$

dır. Buradan $T^{-1}QT(I) \subseteq I$ elde edilir. Dolayısıyla $T^{-1}QT$ ideal koruyan olur. Her ideal koruyan sıra sınırlı olduğundan $T^{-1}QT \in S(G)$ dir.

4.1.11. Lemma

G zengin merkeze sahip bir Riesz uzayı ve $T: G \rightarrow G$ bir operatör olsun. $T \in Z(G)_C$ ise T sıra sınırlı diklik koruyan operatördür.

İspat

$x, y \in G$ için $|y| \leq |x|$ olsun. G zengin merkeze sahip olduğundan $I: G \rightarrow G$ birim operatör olmak üzere $|R| \leq I$ ve $Rx = y$ olacak şekilde en az bir $R \in Z(G)$ vardır.

$$Rx = y \Rightarrow T(Rx) = Ty$$

dir. $T \in Z(G)_C$ ve $R \in Z(G)$ olduğundan $T(Rx) = R(Tx)$ olur. Dolayısıyla

$$R(Tx) = Ty \Rightarrow |R(Tx)| = |Ty|$$

elde edilir. Burada $|R| \leq I$ olduğu kullanılırsa $|Ty| = |R(Tx)| \leq |R||Tx| \leq |Tx|$ olur. $|y| \leq |x|$ iken $|Ty| \leq |Tx|$ olduğundan T operatörü sıra sınırlı diklik koruyandır.

4.1.12. Sonuç

G zengin merkeze sahip bir Riesz uzayı ve $T: G \rightarrow G$ bir operatör olsun. Bu durumda $T \in S(G)_C$ ise T operatörü sıra sınırlı diklik koruyandır.

İspat

$Z(G) \subseteq S(G)$ olduğundan $S(G)_C \subseteq Z(G)_C$ dir. Dolayısıyla $T \in S(G)_C$ iken $T \in Z(G)_C$ olup Lemma 4.1.11 gereği T operatörü sıra sınırlı diklik koruyandır.

G Riesz uzayı göreceli düzgün tam ise G üzerinde tanımlı bütün orthomorfizmlerin kümesi olan $Orth(G)$ uzayı da göreceli düzgün tamdır. Ayrıca $S(G)$ ve $Z(G)$, $Orth(G)$ içinde ideal olduklarından göreceli düzgün tam uzaylardır [28, Bölüm 20].

Diğer taraftan $Z(G)$ uzayının değişenlerinin kümesini sıra sınırlı operatörler için oluşturursak bu küme $Z(G)_{BC} = \{T \in L_b(G) : \forall S \in Z(G), TS = ST\}$ biçiminde gösterilir.

4.1.13. Lemma [32]

G bir Riesz uzayı olsun ve $G^\sim, G$ uzayının noktalarını ayırsın. Eğer G uzayı topolojik olarak dolu merkeze sahip ise $Z(G)_{BC} = Orth(G)$ dir.

4.1.14. Lemma

G ve H Riesz uzayları olmak üzere $T: G \rightarrow H$ bire-bir ve örten bir operatör olsun. $h: S(G) \rightarrow Orth(H)$, her $R \in S(G)$ için $h(R) = TRT^{-1}$ şeklinde tanımlanan bağıntı anlamlı ise h operatörü bire-bir cebir homomorfizmidir.

İspat

$h: S(G) \rightarrow Orth(H)$, $R \rightarrow h(R) = TRT^{-1}$ bağıntısı anlamlı ve $Q, R \in S(G)$ olsun.

$$h(Q)h(R) = (TQT^{-1})(TRT^{-1}) = TQRT^{-1} = h(QR)$$

olduğundan h cebir homomorfizmidir. Şimdi $R \in S(G)$ ve $h(R) = 0$ olsun. $x \in G$ keyfi bir eleman seçelim. $T: G \rightarrow H$ bire-bir ve örten olduğundan $Tx = y$ olacak şekilde bir $y \in H$ vardır. Buradan $T^{-1}(y) = x$ olduğunu kullanırsak,

$$T(Rx) = TRT^{-1}(y) = h(R)(y) = 0$$

elde edilir ki T bire-bir olduğundan $R = 0$ ve dolayısıyla h bire-birdir.

Şimdi de buraya kadar elde ettiklerimizden hareketle bu kısımda son olarak bir ideal operatörün tersinin hangi koşullarda yine bir ideal operatör olduğunu verelim.

4.1.15. Teorem

G ve H zengin merkeze sahip Riesz uzayları ve ek olarak G göreceli düzgün tam olsun. Bu durumda $T: G \rightarrow H$ bire-bir ve örten ideal operatör ise T^{-1} ideal operatördür.

İspat

T^{-1} operatörünün ideal operatör olduğunu göstermek için T operatörünün ters ideal operatör olduğunu göstermemiz yeterlidir. Dolayısıyla her $x \in G$ için $T(I_x) \subseteq I_{Tx}$ olduğunu elde etmeliyiz. O halde $y \in I_x$ olsun. Genelliği bozmaksızın $|y| \leq |x|$ biçiminde seçebiliriz. G zengin merkeze sahip olduğundan $I: G \rightarrow G$ birim operatör olmak üzere $|R| \leq I$ ve $Rx = y$ olacak biçimde en az bir $R \in Z(G)$ vardır. Buradan

$$Rx = y \Rightarrow T(Rx) = Ty \Rightarrow TRT^{-1}(Tx) = Ty$$

olur. Diğer taraftan $Q \in Z(H)$ için $Z(H) \subseteq S(H)$ olduğunu kullanırsak $Q \in S(H)$ elde ederiz. Burada T ideal operatör olduğundan Lemma 4.1.10 gereği $T^{-1}QT \in S(G)$ ve $S(G)$ uzayı değişmeli olduğundan $T^{-1}QT \in S(G)_C$ olur. Buradan hareketle Lemma 4.1.9 gereği her $R \in S(G)$ için

$$TRT^{-1} \in S(H)_C \dots (*)$$

elde edilir. Dolayısıyla Sonuç 4.1.12 gereği TRT^{-1} sıra sınırlı olup $TRT^{-1} \in S(H)_{BC}$ dir. Ayrıca H zengin merkeze sahip Riesz uzayı olduğundan topolojik olarak dolu merkeze sahiptir ve dolayısıyla Lemma 4.1.13 gereği $Z(H)_{BC} = Orth(H)$ dir. Diğer taraftan $Z(H) \subseteq S(H)$ olduğundan $S(H)_{BC} \subseteq Z(H)_{BC} = Orth(H)$ olur. O halde $(*)$ gereği

$$h: S(G) \rightarrow Orth(H)$$

$$R \rightarrow h(R) = TRT^{-1}$$

şeklinde tanımlı bağıntı anlamlıdır. Dolayısıyla Lemma 4.1.14 gereği h cebir homomorfizmidir. $S(G)$ ve $Orth(H)$ yarıasal f-cebirleri ayrıca $S(G)$ göreceli düzgün tam ve $h: S(G) \rightarrow Orth(H)$ cebir homomorfizmi olduğundan Teorem 3.3.7 gereği h Riesz homomorfizmidir. Her Riesz homomorfizmi pozitif olduğundan sıra koruyan operatördür. Ayrıca $I_G: G \rightarrow G$ ve $I_H: H \rightarrow H$ birim dönüşümler olmak üzere $h(I_G) = TIT^{-1} = I_H$ dir. Şimdi $R \in Z(G)$ için $0 \leq |R| \leq I$ ve h sıra koruyan olduğundan $0 \leq h|R| \leq h(I) = I$ yani, $0 \leq T|R|T^{-1} \leq I$ elde edilir. Diğer taraftan h Riesz homomorfizmi olduğundan

$$|TRT^{-1}| = |h(R)| = h|R| = T|R|T^{-1}$$

dir. Buradan hareketle $Rx = y$ olduğunu kullanırsak,

$$\begin{aligned} Ty = TRT^{-1}(Tx) &\Rightarrow |Ty| = |TRT^{-1}(Tx)| \leq |TRT^{-1}||Tx| = T|R|T^{-1}|Tx| \leq |Tx| \\ &\Rightarrow |Ty| \leq |Tx| \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $Ty \in I_{Tx}$ olup $T(I_x) \subseteq I_{Tx}$ olur. O halde T ters ideal operatör ve dolayısıyla T^{-1} ideal operatördür.

4.1.16. Sonuç

i-) G ve H zengin merkeze sahip Riesz uzayları, ek olarak H göreceli düzgün tam ve $T: G \rightarrow H$ bire-bir ve örten bir operatör olsun. Bu durumda T^{-1} ideal operatör ise T ideal operatördür.

ii-) G ve H zengin merkeze sahip Riesz uzayları, ek olarak her ikisi de göreceli düzgün tam ve $T: G \rightarrow H$ bire-bir ve örten bir operatör olsun. Bu durumda T ideal operatördür ancak T^{-1} ideal operatördür.

İspat

i-) Bu hipotezler altında Teorem 4.1.15'te T operatörü yerine T^{-1} alırsak $(T^{-1})^{-1} = T$ ideal operatör olur.

ii-) Teorem 4.1.15'ten açıkça görülür.

4.2. İdeal Operatörün Sıra Sınırlılığı

Çalışmanın bu bölümünde bir ideal operatörün hangi koşullar altında sıra sınırlı olduğu belirlendi. Bu doğrultuda öncelikle sıra sınırlı olmayan bir ideal operatör örneği oluşturuldu ve ardından ideal operatörün sıra sınırlı olma koşulları verildi.

Öncelikle oluşturacağımız örnek için gerekli bazı kavram ve özellikleri ifade edelim.

4.2.1. Tanım [26, Tanım 26.1]

i-) G bir Riesz uzayı ve $0 \neq x \in G$ olsun. Eğer $0 \leq y \leq |x|$, $0 \leq z \leq |x|$ ve $y \perp z$ iken $y = 0$ veya $z = 0$ oluyorsa x elemanına atom denir.

ii-) G bir Riesz uzayı ve $0 \neq x \in G$ olmak üzere x elemanı tarafından üretilen ideal $I_x = \{y \mid y = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}\}$ şeklinde ise x elemanına ayık eleman denir.

4.2.2. Lemma [26, Lemma 26.2]

G bir Riesz uzayı ve $0 \neq x \in G$ olsun.

i-) x bir atom veya ayırık eleman ise ya $x > 0$ ya da $x < 0$ dır.

ii-) Eğer G Riesz uzayı Arşimedyen değilse bir atom, ayırık eleman olmayabilir. Uzay Arşimedyen özelliğine sahip iken ayırık eleman ve atom kavramları birbirine denktir.

Ayrıca x bir atom (veya bir ayırık eleman) ise her $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ için λx de bir atomdur (veya bir ayırık elemandır). x bir atom (veya bir ayırık eleman) ve $0 \leq |y| \leq |x|$ ise ya $y = 0$ ya da y bir atomdur (veya bir ayırık elemandır).

Bütün reel dizilerin uzayını bileşen bileşen sıralama ile göz önüne alırsak Riesz uzayıdır ve $(1,0,0, \dots), (0,1,0, \dots), \dots$ elemanları ayırık eleman olduklarından atomdur.

$[0,1]$ aralığında tanımlı reel değerli ve sürekli fonksiyonların uzayı olan $C[0,1]$, noktasal sıralama ile Riesz uzayıdır ve bu uzayın hiçbir atomu yoktur.

Şimdi de oluşturduğumuz sıra sınırlı olmayan ideal operatör örneğini verelim.

Örnek

$f, [0, \infty)$ aralığında tanımlı reel değerli bir fonksiyon olmak üzere her $x \in [\lambda_f, \infty)$ için $f(x) = P_f(x)$ olacak şekilde bir reel P_f polinomu ve bir λ_f reel sayısı mevcut ise f fonksiyonuna özde polinom fonksiyon denir. $[0, \infty)$ aralığında tanımlı bütün özde polinom fonksiyonların kümesi G olsun. G , fonksiyonların noktasal sıralamasına göre Arşimedyen Riesz uzayıdır [15, Örnek 2.1]. Şimdi H , en az bir atomu olan Arşimedyen Riesz uzayı ve a elemanı H uzayının bir atomu olmak üzere

$$S : G \rightarrow H$$

$$f \rightarrow S(f) = P_f(0).a$$

şeklinde tanımlanan dönüşümü ele alırsak S anlamlı ve lineer olduğundan operatördür. Burada $a \in H$ bir atom olduğundan a elemanı tarafından üretilen ideal $I_a = \{\lambda \cdot a : \lambda \in \mathbb{R}\}$ şeklindedir. Şimdi $I \subseteq G$ keyfi bir ideal olsun. $S(I) = I_a$ olduğunu gösterelim. Gerçekten, her $f \in I$ için $S(f) = P_f(0) \cdot a$ olduğundan $S(I) \subseteq I_a$ dır. Diğer taraftan $z \in I_a$ keyfi bir eleman olsun. O halde en az bir $\lambda \in \mathbb{R}$ için $z = \lambda \cdot a$ şeklindedir. Her $f \in I$ için

i-) $P_f(0) = 0$ ise $S(I) = \{0\}$ dır.

ii-) En az bir $f_0 \in I$ için $P_{f_0}(0) \neq 0$ ise $\frac{\lambda}{P_{f_0}(0)} \cdot f_0 = g \in I$ olup

$$S(g) = S\left(\frac{\lambda}{P_{f_0}(0)} \cdot f_0\right) = \frac{\lambda}{P_{f_0}(0)} \cdot P_{f_0}(0) \cdot a = \lambda \cdot a = z$$

olduğundan $I_a \subseteq S(I)$ elde edilir. Dolayısıyla S ideal operatördür. Şimdi de S operatörünün sıra sınırlı olmadığını gösterelim. Bunun için $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} x - n, & x \geq n \\ 0 & , 0 \leq x < n \end{cases}$$

fonksiyon dizisini ve $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x$ fonksiyonunu ele alalım. Burada her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n \in G$ ve $g \in G$ olduğu açıktır. Diğer taraftan keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için,

$$x \geq n \Rightarrow 0 \leq f_n(x) = x - n \leq x = g(x)$$

ve

$$0 \leq x < n \Rightarrow f_n(x) = 0 \leq x = g(x)$$

olduğundan $0 \leq |f_n| \leq |g|$ olur. Bu durum keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için sağlandığından her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq |f_n| \leq |g|$ elde edilir. Fakat

$$|S(f_n)| = |P_{f_n}(0) \cdot a| = |-n \cdot a| = n \cdot |a|$$

olup $|S(f_n)| = n \cdot |a| \leq b$ olacak şekilde herhangi bir $b \in H$ yoktur. Aksi taktirde bu koşula uyan bir $b \in H$ varsa $n \cdot |a| \leq b$ iken $|a| \leq \frac{1}{n} \cdot b$ olur ki burada H Arşimedyen olduğundan

$$\begin{aligned} 0 \leq |a| \leq \frac{1}{n} \cdot b \downarrow 0 &\Rightarrow |a| = 0 \\ &\Rightarrow a = 0 \end{aligned}$$

elde edilir ki bu a elemanın atom olmasıyla çelişir. Dolayısıyla S sıra sınırlı değildir.

Yukarıdaki örnekten anlaşılacağı üzere her ideal operatör sıra sınırlı olmak zorunda değildir. Şimdi de bir ideal operatörün hangi koşullar altında sıra sınırlı olduğunu belirlemeye çalışacağız.

4.2.3. Lemma

G ve H Riesz uzayları $T: G \rightarrow H$ bire-bir ve örten bir operatör olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

i-) T ideal operatör ise her $R \in S(H)$ için $T^{-1}RT$ ideal koruyan operatördür.

ii-) T^{-1} ideal operatör ise her $R \in S(G)$ için TRT^{-1} ideal koruyan operatördür.

İspat

i-) $J \subseteq G$ bir ideal olsun. T ideal operatör olduğundan $T(J)$, H içinde ideal olur. $R \in S(H)$ için R ideal koruyan olduğundan $R(T(J)) \subseteq T(J)$ dir. O halde $T^{-1}RT(J) \subseteq T^{-1}T(J) = J$ yani $T^{-1}RT$ ideal koruyan operatördür.

ii-) $J \subseteq H$ bir ideal olsun. T^{-1} ideal operatör olduğundan $T^{-1}(J)$, G içinde ideal olur. O halde $R \in S(G)$ için R ideal koruyan olduğundan $R(T^{-1}(J)) \subseteq T^{-1}(J)$ dir. Dolayısıyla $TRT^{-1}(J) \subseteq TT^{-1}(J) = J$ yani TRT^{-1} ideal koruyan operatördür.

4.2.4. Lemma

G ve H Riesz uzayları ve $T: G \rightarrow H$ bire-bir ve örten bir ideal operatör olsun. Bu durumda

$$\Phi: S(H) \rightarrow S(G), R \rightarrow \Phi(R) = T^{-1}RT$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bire-bir cebir homomorfizmidir. Eğer ek olarak H göreceli düzgün tam ise Φ Riesz homomorfizmidir.

İspat

$R, Q \in S(H)$ keyfi iki operatör olsun.

$$\Phi(R)\Phi(Q) = (T^{-1}RT)(T^{-1}QT) = T^{-1}(RQ)T = \Phi(RQ)$$

olduğundan Φ cebir homomorfizmidir. Şimdi $R \in S(H)$ ve $\Phi(R) = 0$ olsun. $y \in H$ keyfi bir eleman seçelim. $T: G \rightarrow H$ bire-bir ve örten olduğundan $Tx = y$ olacak şekilde $x \in G$ vardır. Dolayısıyla,

$$T^{-1}(Ry) = T^{-1}RT(x) = \Phi(R)(x) = 0$$

elde edilir ki burada T^{-1} bire-bir olduğundan $R = 0$ olur. Yani Φ bire-birdir. Şimdi H göreceli düzgün tam olsun. O halde $Orth(H)$ uzayı da göreceli düzgün tam olur. $S(H)$, $Orth(H)$ içinde ideal olduğundan $S(H)$ uzayı da göreceli düzgün tamdır. Sonuç olarak, $S(H)$ göreceli düzgün tam yarıasal f-cebiri, $S(G)$ yarıasal f-cebiri ve $\Phi: S(H) \rightarrow S(G)$ tanımlı cebir homomorfizmi olduğundan Teorem 3.3.7 gereği Φ Riesz homomorfizmidir.

4.2.5. Teorem

H zengin merkeze sahip göreceli düzgün tam bir Riesz uzayı, G bir Riesz uzayı ve $T: G \rightarrow H$ bire-bir ve örten bir ideal operatör olsun. Bu durumda T^{-1} sıra sınırlı diklik koruyan operatördür.

İspat

T^{-1} operatörünün sıra sınırlı diklik koruyan olduğunu göstermek için H uzayında $|z| \leq |w|$ iken G uzayında $|T^{-1}(z)| \leq |T^{-1}(w)|$ olduğunu göstermek yeterlidir. Dolayısıyla H uzayında $|z| \leq |w|$ olsun. Burada $T^{-1}: H \rightarrow G$ olduğundan $x = T^{-1}(z)$ ve $y = T^{-1}(w)$ olacak şekilde $x, y \in G$ vardır. Ayrıca H uzayında $|z| \leq |w|$ iken H zengin merkeze sahip olduğundan $I: H \rightarrow H$ birim operatör olmak üzere $|R| \leq I$ ve $Rw = z$ olacak şekilde bir $R \in Z(H)$ operatörü vardır. Buradan

$$Rw = R(Ty) = Tx \Rightarrow T^{-1}R(Ty) = T^{-1}T(x) = x$$

elde edilir. Diğer taraftan Lemma 4.2.4'teki Φ dönüşümü Riesz homomorfizmi olduğundan sıra koruyan olup $|R| \leq I$ iken $|\Phi(R)| = \Phi(|R|) \leq \Phi(I) = I$ dir. Dolayısıyla

$$|T^{-1}RT| = |\Phi(R)| = \Phi(|R|) = T^{-1}|R|T \leq \Phi(I) = I$$

olur ki buradan,

$$|T^{-1}(z)| = |x| = |T^{-1}RT(y)| \leq |T^{-1}RT||y| = T^{-1}|R|T|y| \leq |y| = |T^{-1}(w)|$$

eşitsizliği elde edilir. O halde T^{-1} sıra sınırlı diklik koruyandır.

Dolayısıyla artık bir ideal operatörün sıra sınırlı olma koşullarını verebiliriz.

4.2.6. Sonuç

H zengin merkeze sahip göreceli düzgün tam bir Riesz uzayı, G bir Riesz uzayı ve $T: G \rightarrow H$ bire-bir ve örten bir ideal operatör olsun. Bu durumda T sıra sınırlı operatördür.

İspat

Bu hipotezler altında Teorem 4.2.5'ten T^{-1} operatörünün sıra sınırlı diklik koruyan olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla Teorem 3.3.11 gereği $(T^{-1})^{-1} = T$ sıra sınırlı olur.

Ayrıca sıra sınırlılık yardımıyla tersinir bir ideal operatörün tersinin de ideal operatör olma koşullarını elde etmiş olduk.

4.2.7. Sonuç

G bir Riesz uzayı, H σ -Dedekind tam (veya göreceli düzgün tam ve zengin merkeze sahip) bir Riesz uzayı ve $T: G \rightarrow H$ bire-bir ve örten bir ideal operatör ise T^{-1} ideal operatördür.

İspat

Bu hipotezler altında Sonuç 4.2.6 gereği T operatörünün sıra sınırlı diklik koruyan olduğunu biliyoruz. T sıra sınırlı diklik koruyan olduğundan ters ideal operatör olur. O halde T^{-1} ideal operatördür.

5. İDEAL VE BAND OPERATÖRLERİN KARŞILAŞTIRMASI

Bu bölümde ideal ve band operatörler arasındaki ilişki incelendi, ayrıca diklik koruyan operatörler teorisine ait iki problemin çözümü verildi.

5.1. İdeal ve Band Operatörler Arasındaki İlişki

Öncelikle ideal operatör olup band operatör olmayan ve tersine band operatör olup ideal operatör olmayan örnekler oluşturuldu. Ardından hangi koşullarda birbirlerini gerektirdikleri verildi.

İlk olarak band operatör olup ideal operatör olmayan örneğimizi verelim.

Örnek

$n \in \mathbb{N}^+$ için $[0,1)$ aralığının ölçülebilir altkümelerinin sonlu $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ koleksiyonu,

- a) Kümeler ikişer ikişer ayrık
- b) Her bir kümenin Lebesgue ölçüsü sıfırdan büyük
- c) $\bigcup_{i=1}^n A_i = [0,1)$

koşullarını sağlıyorsa, $[0,1)$ aralığının bir parçalanışı olarak adlandırılır.

f fonksiyonu $[0,1)$ aralığında tanımlı olsun. $n \in \mathbb{N}^+$ için $[0,1)$ aralığının bir $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ parçalanışı var ve $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere her $t \in A_i$, $f(t) = a_i t + b_i$ olacak şekilde a_i, b_i reel sayıları varsa f fonksiyonuna parçalı afin denir. G , $[0,1)$ aralığında tanımlı parçalı afin fonksiyonların hemen hemen her yerde eşitliği ile tanımlanan denklik bağıntısına göre elde edilen denklik sınıflarının uzayı olsun. G bilinen lineer operasyonlarla ve hemen hemen her yerde noktasal sıralama ile Riesz uzayıdır ve projeksiyon özelliğine sahiptir. Diğer taraftan H , $[0,2)$ aralığında tanımlı basit fonksiyonların hemen hemen her yerde eşitliği ile tanımlanan denklik bağıntısına göre elde edilen denklik sınıflarının uzayı olsun. Aynı şekilde H bilinen lineer operasyonlarla ve hemen hemen her yerde noktasal sıralama ile Riesz uzayıdır. $i = n + 1, n + 2, \dots, 2n$ için A_i kümesi $A_i = A_{i-n} + 1$ şeklinde tanımlanırsa bu düzenleme ile $[0,2)$ aralığının $\{A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}, \dots, A_{2n}\}$ parçalanışı elde edilir. Buradan hareketle her $f \in G$ için bir $n \in \mathbb{N}^+$ ve $[0,1)$ aralığının bir $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ parçalanışı vardır ve $T: G \rightarrow H$

$$Tf = \sum_{i=1}^n b_i \chi_{A_i} + \sum_{i=n+1}^{2n} a_{i-n} \chi_{A_i}$$

şeklinde tanımlanan operatör bire-bir ve örten diklik koruyandır [13, Teorem 13.1]. Burada G projeksiyon özelliğine sahip ve T örten diklik koruyan operatör olduğundan Teorem 3.1.8 gereği T band operatördür. Fakat T ideal operatör değildir. Bunu görmek için $n = 1$ ve $A_1 = [0,1)$ olmak üzere $\{A_1\}$ parçalanışıyla $f(t) = t - \frac{1}{2}$ fonksiyonunu seçersek $f \in G$ ve $A_2 = [1,2)$ olup

$$Tf(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} ; t \in [0,1) \\ 1 ; t \in [1,2) \end{cases}$$

şeklindedir. Ayrıca aynı parçalanışla her $t \in [0,2)$, $g(t) = \frac{1}{4}$ fonksiyonunu göz önüne alırsak $g \in H$ ve $|g| \leq |Tf|$ (yani $g \in I_{Tf}$) fakat $g \notin T(I_f)$ dir. Gerçekten, öncelikle T bire-bir ve örten olduğundan $Th = g$ olacak şekilde bir $h \in G$ vardır ve burada $T^{-1}g(t) = h(t) = \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}$ dir. Şimdi $h \in I_f$ olduğunu varsayalım. O halde hemen hemen her yerde $|h| \leq \lambda|f|$ olacak şekilde en az bir $\lambda \in \mathbb{R}^+$ vardır. Dolayısıyla hemen hemen her $t \in [0,1)$ için

$$\begin{aligned} |h|(t) = |h(t)| &\leq \lambda|f|(t) = |\lambda f(t)| \Rightarrow \left| \frac{1}{4}t + \frac{1}{4} \right| \leq \left| \lambda t - \frac{\lambda}{2} \right| \\ &\Rightarrow \frac{1}{4}t + \frac{1}{4} \leq \begin{cases} \frac{\lambda}{2} - \lambda t, t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \lambda t - \frac{\lambda}{2}, t \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases} \end{aligned}$$

dir. Fakat burada

i-) $\lambda > \frac{1}{2}$ ise $0 < \frac{2\lambda-1}{4\lambda+1} < \frac{1}{2}$ dir ve her $t \in (\frac{2\lambda-1}{4\lambda+1}, \frac{1}{2}]$ için $|h|(t) > \lambda|f|(t)$ olur ki bu durum hemen hemen her yerde $|h| \leq \lambda|f|$ olması ile çelişir.

ii-) $\lambda \leq \frac{1}{2}$ ise her $t \in [0, \frac{1}{2})$ için $|h|(t) > \lambda|f|(t)$ olur ki bu durum hemen hemen her yerde $|h| \leq \lambda|f|$ olması ile çelişir.

Dolayısıyla hemen hemen her yerde $|h| \leq \lambda|f|$ olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{R}^+$ bulunamaz. O halde $h \notin I_f$ ve buradan da $g \notin T(I_f)$ dir. Sonuç olarak T ideal operatör değildir.

Şimdi de tersine ideal operatör olup band operatör olmayan örneğimizi ifade edelim.

Örnek

Sıfıra yakınsak tüm reel dizilerin uzayı c_0 ve sınırlı tüm reel dizilerin uzayı l_∞ bileşen bileşen sıralama ile Riesz uzaylarıdır. $J: c_0 \rightarrow l_\infty, x \rightarrow J(x) = x$ operatörünü ele alalım. c_0 uzayı, l_∞ uzayı içinde ideal olduğundan c_0 uzayındaki her ideal de aynı zamanda l_∞ uzayında idealdir. Buradan hareketle J ideal operatördür fakat c_0 uzayı, l_∞ içinde band olmadığından J band operatör değildir.

Bu örneklerden de görüleceği üzere ideal operatör ile band operatör farklı kavramlardır. Bu noktada ideal ve band operatörler için birbirlerini hangi koşullar altında gerektirdiklerine dair elde ettiğimiz sonuçları ifade edelim.

5.1.1. Sonuç

G projeksiyon özelliğine sahip bir Riesz uzayı ve H bir Riesz uzayı olmak üzere $T: G \rightarrow H$ bire-bir ve örten bir ideal operatör ise T band operatördür.

İspat

T bire-bir ideal operatör olduğundan Teorem 4.1.3-(i) gereği T diklik koruyan olur. Dolayısıyla Sonuç 3.1.10'dan T band operatördür.

5.1.2. Sonuç

G ve H Riesz uzayı, $T: G \rightarrow H$ bire-bir ve örten sıra sınırlı bir operatör olsun. Bu durumda T band operatör ise ideal operatördür.

İspat

T band operatör olduğundan Sonuç 3.1.4-(i)'den esas band operatördür. Dolayısıyla T bire-bir esas band operatör olup Önerme 3.1.6-(i) gereği diklik koruyan operatör olur. O halde

T bire-bir ve örten sıra sınırlı diklik koruyan operatör olduğundan Teorem 3.3.11 gereği T^{-1} de bire-bir ve örten sıra sınırlı diklik koruyandır. T^{-1} sıra sınırlı diklik koruyan olduğundan ters ideal operatördür ve dolayısıyla T ideal operatör olur.

5.2. Diklik Koruyan Operatörler Teorisine Ait İki Problemin Çözümü

Çalışmanın bu kısmında ayrıca diklik koruyan operatörler teorisindeki iki problemin çözümü verildi. Öncelikle [16]'da Hart tarafından ifade edilen Teorem 2.1'in karşıtının ne zaman doğru olduğu belirlendi. Ardından [13]'te Abramovich ve Kitover tarafından açık bırakılan Problem 8.2'nin çözümü elde edildi.

5.2.1. Teorem [16, Teorem 2.1]

G ve H Riesz uzayları ve $T: G \rightarrow H$ örten sıra sınırlı diklik koruyan bir operatör olsun. Bu durumda her $\pi \in Z(G)$ için $\Psi(\pi)T = T\pi$ özelliğini sağlayan ve tek türlü tanımlı bir $\Psi: Z(G) \rightarrow Z(H)$ diklik koruyan operatörü vardır.

İncelediğimiz ilk problem, Teorem 5.2.1'in karşıtının hangi koşullarda doğru olduğudur.

5.2.2. Problem

G ve H Riesz uzayları ve $T: G \rightarrow H$ bir operatör olsun. Her $\pi \in Z(G)$ için $\Psi(\pi)T = T\pi$ özelliğini sağlayan bir $\Psi: Z(G) \rightarrow Z(H)$ diklik koruyan operatörü varsa T operatörü diklik koruyan olur mu?

Öncelikle Problem 5.2.2'nin çözümünün her koşulda doğru olmadığına dair bir örnek verelim.

Örnek

$[0,1]$ aralığında tanımlı parçalı afın sürekli fonksiyonların uzayı G olsun. G , noktasal sıralamaya göre Riesz uzayıdır ve $I: G \rightarrow G$ birim operatör olmak üzere G uzayının merkezi $Z(G) = \{\lambda I : \lambda \in \mathbb{R}\}$ şeklindedir [33]. Şimdi $G = H$ alalım ve $T: G \rightarrow G$

herhangi bir diklik koruyan olmayan operatör olsun. Bu durumda $\Psi : Z(G) \rightarrow Z(G)$ birim operatörünü ele alırsak her $\pi \in Z(G)$ için $\Psi(\pi)T = T\pi$ koşulunu sağlayan diklik koruyan operatördür fakat $T : G \rightarrow G$ operatörü diklik koruyan değildir.

5.2.3. Tanım [25, Sayfa 35]

G bir Riesz uzayı olsun. G uzayındaki her esas band, projeksiyon band oluyorsa G uzayına esas projeksiyon özelliğine sahiptir denir.

G uzayı esas projeksiyon özelliğine sahip iken Problem 5.2.2'nin olumlu çözümü Turan tarafından [20]'de verildi.

5.2.4. Önerme [20, Önerme 3.7]

G ve H Riesz uzayları, G esas projeksiyon özelliğine sahip ve $T : G \rightarrow H$ bir operatör olsun. Eğer her $\pi \in Z(G)$ için $\Psi(\pi)T = T\pi$ koşulunu sağlayan bir $\Psi : Z(G) \rightarrow Z(H)$ diklik koruyan operatörü varsa T operatörü diklik koruyandır.

Başka koşullar altında Problem 5.2.2'nin olumlu çözümünü araştırdık. Şimdi de bu doğrultuda elde ettiğimiz çözümü verelim.

5.2.5. Teorem

G ve H Riesz uzayları, G zengin merkez özelliğine sahip ve $T : G \rightarrow H$ bir operatör olsun. Eğer her $\pi \in Z(G)$ için $\Psi(\pi)T = T\pi$ koşulunu sağlayan bir $\Psi : Z(G) \rightarrow Z(H)$ diklik koruyan operatörü varsa T diklik koruyandır. Ek olarak T bire-bir ve örten ise T^{-1} de diklik koruyandır.

İspat

$u, v \in G$ ve $u \perp v$ olsun. Genelliği bozmaksızın $u \geq 0$ ve $v \geq 0$ alabiliriz. Buradan hareketle $u \leq u + v$ ve $v \leq u + v$ elde edilir. G zengin merkeze sahip olduğundan

$\pi_1(u + v) = u$ ve $\pi_2(u + v) = v$ olacak şekilde $\pi_1, \pi_2 \in Z(G)^+$ operatörleri vardır. Eğer $\gamma_1 = \pi_1 - (\pi_1 \wedge \pi_2)$ ve $\gamma_2 = \pi_2 - (\pi_1 \wedge \pi_2)$ şeklinde seçersek $\gamma_1 \wedge \gamma_2 = 0$ dir. Ayrıca

$$(\pi_1 \wedge \pi_2)(u + v) \leq \pi_1(u + v) = u \text{ ve } (\pi_1 \wedge \pi_2)(u + v) \leq \pi_2(u + v) = v$$

dir. Burada $u \perp v$ olduğundan $(\pi_1 \wedge \pi_2)(u + v) = 0$ elde edilir. O halde $\gamma_1(u + v) = u$ ve $\gamma_2(u + v) = v$ dir. Buradan hipotez ve $\Psi(\gamma_1), \Psi(\gamma_2) \in Z(H)$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} 0 \leq |T(u)| \wedge |T(v)| &= |T\gamma_1(u + v)| \wedge |T\gamma_2(u + v)| \\ &= |\Psi(\gamma_1)T(u + v)| \wedge |\Psi(\gamma_2)T(u + v)| \\ &= |\Psi(\gamma_1)||T(u + v)| \wedge |\Psi(\gamma_2)||T(u + v)| \\ &= (|\Psi(\gamma_1)| \wedge |\Psi(\gamma_2)|)|T(u + v)| \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $u \perp v$ iken $T(u) \perp T(v)$ olduğundan T diklik koruyan operatördür. Ek olarak T bire-bir ve örten olsun. T^{-1} operatörünün diklik koruyan olduğunu göstermek için T operatörünün ters ideal operatör yani, her $x \in G$ için $T(I_x) \subseteq I_{Tx}$ olduğunu göstermek yeterlidir. Şimdi $y \in I_x$ seçelim. Genelliği bozmaksızın $|y| \leq |x|$ alabiliriz. Buradan hareketle G zengin merkeze sahip olduğundan $I: G \rightarrow G$ birim dönüşüm olmak üzere, $\pi(x) = y$ ve $|\pi| \leq I$ olacak şekilde bir $\pi \in Z(G)$ vardır.

$$y = \pi(x) \Rightarrow T(y) = T\pi(x) = \Psi(\pi)T(x)$$

elde edilir ki burada $\Psi(\pi) \in Z(H)$ olduğundan $|\Psi(\pi)| \leq \lambda I$ olacak şekilde bir $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$ vardır. Dolayısıyla

$$|T(y)| = |\Psi(\pi)T(x)| = |\Psi(\pi)||T(x)| \leq \lambda|T(x)|$$

olur. $|T(y)| \leq \lambda|T(x)|$ olduğundan $T(y) \in I_{Tx}$ yani, $T(I_x) \subseteq I_{Tx}$ dir. O halde T ters ideal operatördür. T bire-bir örten ters ideal operatör olduğundan T^{-1} ideal operatördür. Buradan hareketle T^{-1} bire-bir ideal operatör olup Teorem 4.1.3-(i) gereği T^{-1} diklik koruyandır.

İncelediğimiz ikinci problem Abramovich ve Kitover tarafından [13]'te açık bırakılan Problem 8.2'dir.

5.2.6. Tanım [13, Tanım 4.2]

G Riesz uzayının sıfırdan farklı her B bandı için $D \subseteq B$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir D projeksiyon bandı varsa G uzayına “a cofinal family of projection bands” özelliğine sahiptir denir.

5.2.7. Problem [13, Problem 8.2]

G ve H Riesz uzayları “a cofinal family of projection bands” özelliğine sahip ve $T: G \rightarrow H$ bire-bir ve örten bir operatör olsun. Eğer her $\pi \in Z(G)$ için $\Psi(\pi) = T\pi T^{-1}$ şeklinde tanımlı bir $\Psi: Z(G) \rightarrow Z(H)$ izomorfizmi varsa T diklik koruyan olur mu?

Şimdi problemin çözümüne yönelik elde ettiğimiz teoremimizi verelim.

5.2.8. Teorem

G ve H Riesz uzayları ve $T: G \rightarrow H$ bire-bir ve örten bir operatör olsun.

- (1) Eğer G “a cofinal family of projection bands” özelliğine sahip ve her $\pi \in Z(G)$ için $\Psi(\pi)T = T\pi$ özelliğini sağlayan bir $\Psi: Z(G) \rightarrow Z(H)$ diklik koruyan operatörü varsa T diklik koruyan operatördür.
- (2) Eğer H “a cofinal family of projection bands” özelliğine sahip ve her $\pi \in Z(H)$ için $T\Psi(\pi) = \pi T$ özelliğini sağlayan bir $\Psi: Z(H) \rightarrow Z(G)$ diklik koruyan operatörü varsa T^{-1} diklik koruyan operatördür.
- (3) Eğer G ve H uzaylarının her ikisi de “a cofinal family of projection bands” özelliğine sahip ve her $\pi \in Z(G)$ için $\Psi(\pi)T = T\pi$ özelliğini sağlayan bir $\Psi: Z(G) \rightarrow Z(H)$ örten diklik koruyan operatörü varsa T ve T^{-1} operatörlerinin her ikisi de diklik koruyandır.

İspat

(1) Öncelikle her $h \in H$ için $T^{-1}(B_h) \subseteq B_{T^{-1}(h)}$ olduğunu gösterelim. Olmadığını varsayalım yani, en az bir $t \in B_h$ için $T^{-1}(t) \notin B_{T^{-1}(h)}$ olsun. O halde $|T^{-1}(t)| \wedge |u| \neq 0$ olacak şekilde en az bir $u \in B_{T^{-1}(h)}^d$ vardır. Şimdi $z = |T^{-1}(t)| \wedge |u|$ seçelim. $z \in G$ olup, z elemanının ürettiği esas band B_z olmak üzere, hipotez gereği $B \subseteq B_z$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir B projeksiyon bandı ve buradan hareketle bu B projeksiyon banda karşılık bir $P: G \rightarrow B$ band projeksiyonu vardır. Ayrıca bu $P: G \rightarrow B$ band projeksiyonu için $PT^{-1}(t) \neq 0$ ve $PT^{-1}(h) = 0$ dır. Gerçekten,

$$B \subseteq B_z = B_{|T^{-1}(t)| \wedge |u|} = B_{|T^{-1}(t)|} \cap B_{|u|} = B_{T^{-1}(t)} \cap B_u \subseteq B_u$$

olduğundan $B \subseteq B_u$ elde edilir. Ayrıca $u \in B_{T^{-1}(h)}^d$ için $B_u \subseteq B_{T^{-1}(h)}^d$ olur. Dolayısıyla $B \subseteq B_{T^{-1}(h)}^d$ dir.

$$B \subseteq B_{T^{-1}(h)}^d \implies B_{T^{-1}(h)} \subseteq B^d$$

elde edilir. O halde $T^{-1}(h) \in B_{T^{-1}(h)}$ olduğunu kullanırsak $T^{-1}(h) \in B^d$ olup $PT^{-1}(h) = 0$ olur. Diğer taraftan $PT^{-1}(t) \neq 0$ olduğunu göstermek için $T^{-1}(t) \notin B^d$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Varsayalım ki $T^{-1}(t) \in B^d$ olsun. Bu durumda $B_{T^{-1}(t)} \subseteq B^d$ olur.

$$B_z = B_{|T^{-1}(t)| \wedge |u|} = B_{|T^{-1}(t)|} \cap B_{|u|} = B_{T^{-1}(t)} \cap B_u \subseteq B_{T^{-1}(t)}$$

olduğundan $B_z \subseteq B_{T^{-1}(t)}$ dir. Dolayısıyla $B_z \subseteq B_{T^{-1}(t)}$ ve $B_{T^{-1}(t)} \subseteq B^d$ iken $B_z \subseteq B^d$ elde edilir.

$$B_z \subseteq B^d \implies B \subseteq B_z^d$$

dir. Ayrıca hipotezden $\{0\} \neq B \subseteq B_z$ olduğunu biliyoruz. Hem $B \subseteq B_z$ hem de $B \subseteq B_z^d$ oluşundan $B \subseteq \{0\}$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde $T^{-1}(t) \notin B^d$ ve dolayısıyla $PT^{-1}(t) \neq 0$ dır. Şimdi hipotezi kullanırsak, $\Psi: Z(G) \rightarrow Z(H)$ operatörü her $\pi \in Z(G)$

için $\Psi(\pi) = T\pi T^{-1}$ şeklinde tanımlanırsa, $P: G \rightarrow B$ bir band projeksiyon olduğundan $P \in Z(G)$ olup $T^{-1}\Psi(P)(h) = PT^{-1}(h) = 0$ elde edilir. Burada T^{-1} bire-bir olduğundan $\Psi(P)(h) = 0$ dır. Dolayısıyla $\Psi(P) \in Z(H)$ olup B_h bandı üzerinde $\Psi(P) = 0$ olur. O halde $t \in B_h$ için de $\Psi(P)(t) = 0$ dır. Buradan $T^{-1}\Psi(P)(t) = PT^{-1}(t) = 0$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde her $h \in H$ için $T^{-1}(B_h) \subseteq B_{T^{-1}(h)}$ dir. Şimdi T operatörünün diklik koruyan olduğunu gösterelim. Bunun için $u \perp v$ olacak şekilde $u, v \in G$ alalım. O halde $T^{-1}(h) = u$ ve $T^{-1}(t) = v$ olacak şekilde $h, t \in H$ vardır ve Lemma 3.1.5 gereği $u \perp v$ olduğundan $B_u \cap B_v = \{0\}$ dır. İspatın ilk kısmından,

$$T^{-1}(B_{Tu}) = T^{-1}(B_h) \subseteq B_{T^{-1}(h)} = B_u \text{ ve } T^{-1}(B_{Tv}) = T^{-1}(B_t) \subseteq B_{T^{-1}(t)} = B_v$$

olur ki buradan $B_{Tu} \subseteq T(B_u)$ ve $B_{Tv} \subseteq T(B_v)$ elde edilir. T bire-bir olduğundan

$$B_{Tu} \cap B_{Tv} \subseteq T(B_u) \cap T(B_v) = T(B_u \cap B_v) = T(\{0\}) = \{0\}$$

dır. $B_{Tu} \cap B_{Tv} = \{0\}$ olduğundan Lemma 3.1.5 gereği $Tu \perp Tv$ yani T diklik koruyandır.

(2) Bir önceki ispata benzer şekilde öncelikle her $x \in G$ için $T(B_x) \subseteq B_{Tx}$ olduğunu gösterelim. Olmadığını varsayalım yani, en az bir $y \in B_x$ için $T(y) \notin B_{Tx}$ olsun. O halde $|Ty| \wedge |u| \neq 0$ olacak şekilde en az bir $u \in B_{Tx}^d$ vardır. Şimdi $z = |Ty| \wedge |u|$ seçelim. Burada $z \in H$ olup hipotez gereği $B \subseteq B_z$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir B projeksiyon bandı ve buradan hareketle bu B projeksiyon banda karşılık bir $P: H \rightarrow B$ band projeksiyonu vardır. Ayrıca bu $P: H \rightarrow B$ band projeksiyonu için $PTy \neq 0$ ve $PTx = 0$ dır. Gerçekten,

$$B \subseteq B_z = B_{|Ty| \wedge |u|} = B_{|Ty|} \cap B_{|u|} = B_{Ty} \cap B_u \subseteq B_u$$

olduğundan $B \subseteq B_u$ elde edilir. Ayrıca $u \in B_{Tx}^d$ için $B_u \subseteq B_{Tx}^d$ dir. Dolayısıyla buradan $B \subseteq B_{Tx}^d$ olur.

$$B \subseteq B_{Tx}^d \Rightarrow B_{Tx} \subseteq B^d$$

dir. O halde $Tx \in B_{Tx}$ olduğunu kullanırsak $Tx \in B^d$ olup $PTx = 0$ olur. Diğer taraftan $PTy \neq 0$ olduğunu göstermek için $Ty \notin B^d$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Varsayalım ki $Ty \in B^d$ olsun. Bu durumda $B_{Ty} \subseteq B^d$ olur.

$$B_z = B_{|Ty| \wedge |u|} = B_{|Ty|} \cap B_{|u|} = B_{Ty} \cap B_u \subseteq B_{Ty}$$

olduğundan $B_z \subseteq B_{Ty}$ dir. Dolayısıyla $B_z \subseteq B_{Ty}$ ve $B_{Ty} \subseteq B^d$ olmasından $B_z \subseteq B^d$ elde edilir.

$$B_z \subseteq B^d \implies B \subseteq B_z^d$$

dir. Ayrıca hipotezden $\{0\} \neq B \subseteq B_z$ olduğunu biliyoruz. Hem $B \subseteq B_z$ hem de $B \subseteq B_z^d$ olduğundan $B \subseteq \{0\}$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde $Ty \notin B^d$ ve buradan da $PTy \neq 0$ dır. Şimdi hipotezi kullanırsak, $\Psi: Z(H) \rightarrow Z(G)$ operatörü her $\pi \in Z(H)$ için $\Psi(\pi) = T^{-1}\pi T$ şeklinde tanımlanırsa, $P: H \rightarrow B$ band projeksiyon olduğundan $P \in Z(H)$ olup $T\Psi(P)(x) = PTx = 0$ elde edilir. Burada T bire-bir olduğundan $\Psi(P)(x) = 0$ dır. Dolayısıyla $\Psi(P) \in Z(G)$ olup B_x bandı üzerinde $\Psi(P) = 0$ dır. O halde $y \in B_x$ için de $\Psi(P)(y) = 0$ olur. Buradan $T\Psi(P)(y) = PTy = 0$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde her $x \in G$ için $T(B_x) \subseteq B_{Tx}$ dir. Şimdi T^{-1} operatörünün diklik koruyan olduğunu gösterelim. Bunun için $u \perp v$ olacak şekilde $u, v \in H$ seçelim. Dolayısıyla $Tx = u$ ve $Ty = v$ olacak şekilde $x, y \in G$ vardır ve Lemma 3.1.5 gereği $u \perp v$ iken $B_u \cap B_v = \{0\}$ dır. İspatın ilk kısmından,

$$T(B_{T^{-1}(u)}) = T(B_x) \subseteq B_{Tx} = B_u$$

ve

$$T(B_{T^{-1}(v)}) = T(B_y) \subseteq B_{Ty} = B_v$$

olur ki buradan $B_{T^{-1}(u)} \subseteq T^{-1}(B_u)$ ve $B_{T^{-1}(v)} \subseteq T^{-1}(B_v)$ elde edilir. T^{-1} bire-bir olduğundan

$$B_{T^{-1}(u)} \cap B_{T^{-1}(v)} \subseteq T^{-1}(B_u) \cap T^{-1}(B_v) = T^{-1}(B_u \cap B_v) = T^{-1}(\{0\}) = \{0\}$$

dır. $B_{T^{-1}(u)} \cap B_{T^{-1}(v)} = \{0\}$ olduğundan Lemma 3.1.5 gereği $T^{-1}(u) \perp T^{-1}(v)$ yani T^{-1} diklik koruyandır.

(3) $\Psi: Z(G) \rightarrow Z(H)$, her $\pi \in Z(G)$ için $\Psi(\pi) = T\pi T^{-1}$ operatörünün bire-bir olduğu açıktır. Ayrıca hipotezden Ψ örtendir. Dolayısıyla $\Psi^{-1}: Z(H) \rightarrow Z(G)$ operatördür. O halde (1) ve (2) den T ve T^{-1} operatörleri diklik koruyandır.

Dolayısıyla [13]'te sorulan açık problemin çözümünü, sadece G uzayı “a cofinal family of projection bands” özelliğine sahip iken yani, daha zayıf koşullar altında elde etmiş olduk. Aşağıdaki sonuçta bu çözümü ifade ederek bu bölümü tamamlayalım.

5.2.9. Sonuç

G ve H Riesz uzayları ve $T: G \rightarrow H$ bire-bir ve örten bir operatör olsun. Eğer G “a cofinal family of projection bands” özelliğine sahip ve her $\pi \in Z(G)$ için $T\pi T^{-1} \in Z(H)$ ise T diklik koruyan operatördür.

6. PRE-RIESZ UZAYLARDA BAND OPERATÖRLER

Bu bölümde öncelikle pre-Riesz uzaylar hakkında bazı bilgiler verildi, ardından Riesz uzaylarda yapılan band operatör tanımı pre-Riesz uzaylarına genişletilerek bu operatörün özellikleri incelenmeye çalışıldı.

6.1. Pre-Riesz Uzayların Genel Özellikleri

Bir vektör uzayı üzerinde, vektör uzayı işlemleri ile uyumlu bir sıralama bağıntısı kullanılarak infimum ve supremum işlemleri tanımlandığında, vektör uzayının herhangi iki elemanının infimumu veya supremumu yine uzayın elemanı oluyorsa o uzayın Riesz uzayı yapısına sahip olduğunu biliyoruz. Birçok uzay Riesz uzayı olmakla beraber; lineer fonksiyonların uzayı, türevlenebilir fonksiyonların uzayı, polinomlar uzayı gibi bazı önemli uzaylar da Riesz uzayı yapısına sahip değildir. Bu noktada vektör uzayı üzerindeki herhangi iki elemanın infimumunun veya supremumunun uzaya ait olma şartı kaldırılıp sadece sıralama yapısı kullanıldığında, Riesz uzayı olmayan bazı uzaylar üzerinde de çalışma imkanı doğacaktır. Buradan hareketle Riesz uzaylarının daha genel bir hali olan pre-Riesz uzay kavramı ortaya çıkmıştır.

Pre-Riesz uzaylar, Riesz uzayları içine sıra yoğun olacak şekilde gömülebilen sıralı vektör uzaylarıdır ve 1993'te van Haandel tarafından [1]'de tanımlanmıştır. Öncelikle sıralı vektör uzayları ile ilgili bazı kavramları hatırlatalım.

$(X, \leq)$ bir sıralı vektör uzayı olsun. $a, b \in X$ ve $a \leq b$ için $[a, b] = \{x \in X : a \leq x \leq b\}$ kümesi sıra aralık; $M \subseteq X$ olmak üzere $M^u = \{x \in X : \forall m \in M, x \geq m\}$, M kümesinin üst sınırları kümesi ve $M^l = \{x \in X : \forall m \in M, x \leq m\}$, M kümesinin alt sınırları kümesi olarak adlandırılır. Eğer $M \subseteq [a, b]$ olacak şekilde $a, b \in X$ varsa M kümesine sıra sınırlı küme denir. $M \subseteq X$ herhangi bir küme olmak üzere her $x, y \in M$ için $x \leq z$ ve $y \leq z$ olacak şekilde bir $z \in M$ varsa M (yukarı) yönlendirilmiş küme olarak isimlendirilir. D , X uzayının bir altvektör uzayı iken her $x \in X$ için $x = \inf\{y \in D : y \geq x\}$ ise D altuzayına X içinde sıra yoğundur denir. $\emptyset \neq K \subseteq X$ olmak üzere her $x, y \in K$ ve $\lambda, \mu \in [0, \infty)$ için $\lambda x + \mu y \in K$ oluyorsa K kümesine, X içinde bir wedge denir. K , X içinde bir wedge ve $K \cap (-K) = \{0\}$ ise K kümesine, X içinde bir cone denir. X bir vektör uzayı ve K , X içinde

bir cone olmak üzere her $x, y \in X$ için $x \leq y \Leftrightarrow y - x \in K$ bağıntısı, X üzerinde bir sıralama bağıntısıdır ve bu sıralama ile (X, K) bir sıralı vektör uzayıdır. (X, K) bir sıralı vektör uzayı olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $nx \leq y$ iken $x \leq 0$ ise (X, K) uzayına Arşimedyen denir.

6.1.1. Tanım [10, Tanım 2.2.1]

(X, K) bir sıralı vektör uzayı olsun. $\{x + z, y + z\}^u \subseteq \{x, y\}^u$ koşulunu sağlayan her $x, y, z \in X$ için $z \in K$ oluyorsa (X, K) pre-Riesz uzay olarak adlandırılır.

Tanımdan hareketle bu koşulu Riesz uzaylarında ele alırsak $(x + z) \vee (y + z) \geq x \vee y$ iken $(x \vee y) + z \geq x \vee y$ olup buradan $z \geq 0$ olacağından her Riesz uzayı bir pre-Riesz uzayıdır.

Şimdi pre-Riesz uzay yapısına sahip olan ve olmayan bazı örnekleri ifade edelim.

Örnek [10, Örnek 1.1.19]

$[0,1]$ aralığında tanımlı reel değerli sürekli türevlenebilir fonksiyonların uzayı olan $C^1[0,1]$, $K = \{f \in C^1[0,1]: \forall x \in [0,1], f(x) \geq 0\}$ alışılmış cone ile pre-Riesz uzayıdır fakat Riesz uzayı değildir.

Örnek [2, Örnek 3.5]

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $[0,1]$ aralığında tanımlı n . dereceden polinomların uzayı olan $P^n[0,1]$, $K = \{p \in P^n[0,1]: \forall x \in [0,1], p(x) \geq 0\}$ alışılmış cone ile pre-Riesz uzayıdır fakat Riesz uzayı değildir.

Örnek [2, Örnek 4.3]

$X = \mathbb{R}^2$ uzayını ele alırsak $K = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2: b > 0\} \cup \{(0,0)\}$, X içinde cone olur fakat bu cone ile (X, K) pre-Riesz uzay değildir.

6.1.2. Önerme [10, Önerme 2.2.3]

Her pre-Riesz uzayı yönlendirilmiştir ve her yönlendirilmiş Arşimedyen sıralı vektör uzayı bir pre-Riesz uzayıdır.

6.1.3. Tanım [10, Tanım 1.2.1]

X ve Y sıralı vektör uzayları ve $i: X \rightarrow Y$ lineer dönüşüm olsun. “Her $x \in X$ için $i(x) \geq 0$ ancak ve ancak $x \geq 0$ ” önermesi doğru ise i operatörüne bi-pozitif denir.

6.1.4. Tanım [10, Teorem 2.1.15]

Y bir Riesz uzayı ve X, Y uzayının bir altvektör uzayı olmak üzere eğer her $y \in Y$ için $y = \bigvee_{i=1}^m a_i - \bigvee_{j=1}^n b_j$ olacak şekilde $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in X$ varsa X altuzayına, Y uzayını Riesz uzay olarak üretir denir.

6.1.5. Teorem [6, Teorem 4.3]

(X, K) bir sıralı vektör uzayı olsun. Aşağıdakiler denktir:

i-) X bir pre-Riesz uzayıdır.

ii-) $i(X)$, Y içinde sıra yoğun olacak şekilde bir Y Riesz uzayı ve bir $i: X \rightarrow Y$ bi-pozitif lineer dönüşüm vardır.

iii-) $i(X)$, Y içinde sıra yoğun olacak ve $i(X)$, Y uzayını Riesz uzay olarak üretecek şekilde bir Y Riesz uzayı ve bir $i: X \rightarrow Y$ bi-pozitif lineer dönüşüm vardır.

Burada (ii)’deki (Y, i) çiftine X sıralı vektör uzayının Riesz uzayı kaplaması, (iii)’deki (Y, i) çiftine ise X uzayının Riesz tamlaması denir ve izomorfizme göre tek olan bu tamlama (X^p, i) şeklinde gösterilir.

Yukarıdaki teorem pre-Riesz uzaylarının önemli bir karakterizasyonunu vermektedir. Teoremden de görüleceği üzere pre-Riesz uzaylar, Riesz uzaylarının içine sıra yoğun gömülebilen sıralı vektör uzaylarıdır.

6.1.6. Tanım [10, Sayfa 2]

X bir vektör uzayı ve $\emptyset \neq A \subseteq X$ için $\{\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i : n \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i \in [0, \infty), a_i \in A\}$ kümesine A kümesinin pozitif lineer zarfı denir ve $pos(A)$ ile gösterilir.

Örnek [6, Örnek 4.8]

$X = \mathbb{R}^3$ olmak üzere, $A = \{(1,0,1), (0,1,1), (-1,0,1), (0,-1,1)\}$ kümesini ele alırsak $K = pos\{A\}$, X içinde cone olur. Bu cone ile (X, K) pre-Riesz uzaydır.

6.1.7. Tanım [6, Tanım 3.1]

X bir sıralı vektör uzayı ve $\emptyset \neq M \subseteq X$ herhangi bir küme olsun. Her $x \in X$ ve $y \in M$ için $\{x, -x\}^u \supseteq \{y, -y\}^u$ iken $x \in M$ ise M kümesine solid küme, solid altuzaya da ideal denir.

6.1.8. Tanım [6, Tanım 3.6]

X bir sıralı vektör uzayı ve $x, y \in X$ olsun. $\{x + y, -x - y\}^u = \{x - y, y - x\}^u$ oluyorsa x ile y diktir denir ve $x \perp y$ şeklinde gösterilir. $M \subseteq X$ herhangi bir küme olmak üzere M kümesinin diki $M^d = \{y \in X : \forall x \in M, x \perp y\}$ şeklindedir.

6.1.9. Tanım [6, Tanım 3.7]

X bir sıralı vektör uzayı ve $M \subseteq X$ bir altuzay olsun. $(M^d)^d = M$ oluyorsa M band olarak adlandırılır.

X bir pre-Riesz uzay ise $M \subseteq X$ için M^d banddır. Ayrıca M kümesi tarafından üretilen ve M kümesini kapsayan en küçük band $(M^d)^d$ olup B_M şeklinde gösterilir. Dolayısıyla buradan $B_M = (M^d)^d$ ve $M \subseteq (M^d)^d$ dir.

6.1.10. Tanım [2, Tanım 5.7]

X, Y pre-Riesz uzaylar ve $T: X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. $x \perp y$ olan her $x, y \in X$ için Y uzayında $Tx \perp Ty$ oluyorsa T diklik koruyan operatör olarak adlandırılır.

6.2. Pre-Riesz Uzaylar Arasında Tanımlı Band Operatörlerin Özellikleri

Bu bölümde, band operatör tanımı pre-Riesz uzaylarına genişletilerek bu operatörün özellikleri araştırılmıştır. Riesz uzaylarda band operatör için elde edilen sonuçların hangi koşullarda pre-Riesz uzaylar için de geçerli olduğu incelenmiştir.

6.2.1. Tanım

X, Y pre-Riesz uzaylar ve $T: X \rightarrow Y$ bir operatör olsun.

i-) Her $B \subseteq X$ bandı için $T(B)$, Y içinde band oluyorsa T band operatör olarak adlandırılır.

ii-) Her $B \subseteq Y$ bandı için $T^{-1}(B)$, X içinde band oluyorsa T ters band operatör olarak adlandırılır.

Pre-Riesz uzaylarda tanımlı band operatörlerin kümesi vektör uzayı değildir.

Örnek

$\mathbb{R}^3$ uzayını göz önüne alırsak, yukarıda daha önce örnekte gösterdiğimiz üzere

$K = \text{pos} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathbb{R}^3$ içinde bir cone olup $X = (\mathbb{R}^3, K)$ pre-Riesz

uzaydır. X uzayındaki bütün bandlar:

$$B_1 = \{0\}, B_2 = \{X\}, B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}, B_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}, B_5 = \left\{ \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\},$$

$$B_6 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -x \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}, B_7 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}, B_8 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

dir [10, Örnek 4.4.18]. Şimdi

$$T: X \rightarrow X, (x_1, x_2, x_3) \rightarrow T(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_2, x_1)$$

şeklinde tanımladığımız dönüşümü ele alırsak, T operatördür. Burada $T(B_1) = B_1$, $T(B_2) = B_2$, $T(B_3) = B_3$, $T(B_4) = B_7$, $T(B_5) = B_5$, $T(B_6) = B_8$, $T(B_7) = B_4$, $T(B_8) = B_6$ olduğundan T band operatördür. Diğer taraftan $I: X \rightarrow X$ birim operatörü tanımını gereği band operatördür. Fakat

$$(I + T): X \rightarrow X, (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (I + T)(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, 2x_2, x_1 + x_3)$$

şeklinde olup

$$(I + T)(B_4) = \{(0, x, x) + (x, x, 0): x \in \mathbb{R}\} = \{(x, 2x, x): x \in \mathbb{R}\}$$

X içinde band olmadığından $I + T$ operatörü band operatör değildir.

Benzer şekilde pre-Riesz uzaylarda tanımlı ters band operatörlerin kümesi de vektör uzayı değildir.

Örnek

Yukarıdaki örnekte olduğu gibi $X = (\mathbb{R}^3, K)$ pre-Riesz uzayını göz önüne alırsak, bu uzayın bütün bandlarının

$$B_1 = \{0\} , B_2 = \{X\} , B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} , B_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} , B_5 = \left\{ \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} ,$$

$$B_6 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -x \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} , B_7 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} , B_8 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

olduğunu biliyoruz [10, Örnek 4.4.18]. Burada

$$T: X \rightarrow X, (x_1, x_2, x_3) \rightarrow T(x_1, x_2, x_3) = (-x_3, x_2, x_1)$$

dönüşümünü tanımlarsak, T operatördür. Ayrıca $T^{-1}(B_1) = B_1$, $T^{-1}(B_2) = B_2$, $T^{-1}(B_3) = B_5$, $T^{-1}(B_4) = B_7$, $T^{-1}(B_5) = B_3$, $T^{-1}(B_6) = B_8$, $T^{-1}(B_7) = B_6$, $T^{-1}(B_8) = B_4$ olduğundan T ters band operatördür. Diğer taraftan $I: X \rightarrow X$ birim operatörü tanımı gereği ters band operatördür. Fakat

$$(I + T): X \rightarrow X, (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (I + T)(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, 2x_2, x_1 + x_3)$$

şeklinde olup

$$(I + T)^{-1}(B_6) = \{(x, -x, x): x \in \mathbb{R}\}$$

X içinde band olmadığından $I + T$ operatörü ters band operatör değildir.

6.2.2. Lemma

X, Y pre-Riesz uzaylar ve $T: X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

i-) T band operatördür ancak ve ancak her $\emptyset \neq A \subseteq X$ kümesi için $B_{T(A)} \subseteq T(B_A)$ dir.

ii-) T ters band operatördür ancak ve ancak her $\emptyset \neq A \subseteq X$ kümesi için $T(B_A) \subseteq B_{T(A)}$ dir.

Ek olarak T bire-bir ve örten ise,

iii-) T band operatördür ancak ve ancak T^{-1} ters band operatördür.

iv-) T ters band operatördür ancak ve ancak T^{-1} band operatördür.

İspat

i-) $\Rightarrow$: T band operatör ve $\emptyset \neq A \subseteq X$ olsun. $B_A \subseteq X$ band olduğundan hipotez gereği $T(B_A)$, Y içinde band olur. Ayrıca $A \subseteq B_A$ olduğundan $T(A) \subseteq T(B_A)$ dir. $T(A)$ tarafından üretilen en küçük band $B_{T(A)}$ olduğundan $B_{T(A)} \subseteq T(B_A)$ elde edilir.

: $\Leftarrow A \subseteq X$ herhangi bir band olsun. A band olduğundan $B_A = A$ dir. O halde hipotez gereği $B_{T(A)} \subseteq T(B_A) = T(A)$ yani $B_{T(A)} \subseteq T(A)$ dir. Ayrıca her zaman $T(A) \subseteq B_{T(A)}$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $B_{T(A)} = T(A)$ yani $T(A)$, Y içinde band olup T band operatördür.

ii-) $\Rightarrow$: T ters band operatör ve $\emptyset \neq A \subseteq X$ herhangi bir küme olsun. $A \subseteq T^{-1}(T(A))$ ve $T(A) \subseteq B_{T(A)}$ olduğunu biliyoruz. Buradan hareketle

$$T(A) \subseteq B_{T(A)} \Rightarrow A \subseteq T^{-1}(T(A)) \subseteq T^{-1}(B_{T(A)}) \Rightarrow A \subseteq T^{-1}(B_{T(A)})$$

elde edilir. $B_{T(A)} \subseteq Y$ band ve T ters band operatör olduğundan $T^{-1}(B_{T(A)})$, X içinde band olur. A tarafından üretilen en küçük band B_A ve $A \subseteq T^{-1}(B_{T(A)})$ olduğundan $B_A \subseteq T^{-1}(B_{T(A)})$ dir. O halde

$$B_A \subseteq T^{-1}(B_{T(A)}) \Rightarrow T(B_A) \subseteq T\left(T^{-1}(B_{T(A)})\right) \subseteq B_{T(A)} \Rightarrow T(B_A) \subseteq B_{T(A)}$$

elde edilir. $T(B_A) \subseteq B_{T(A)}$ olduğundan T ters band operatördür.

: $\Leftarrow B \subseteq Y$ herhangi bir band olsun. Dolayısıyla $T^{-1}(B) \subseteq X$ dir. O halde hipotezden $T(B_{T^{-1}(B)}) \subseteq B_{T(T^{-1}(B))}$ elde edilir. Diğer taraftan $T(T^{-1}(B)) \subseteq B$ ifadesi her zaman doğrudur. Ayrıca B band olduğundan $B_B = B$ dir. Buradan hareketle,

$$T(T^{-1}(B)) \subseteq B \Rightarrow B_{T(T^{-1}(B))} \subseteq B_B = B \Rightarrow T(B_{T^{-1}(B)}) \subseteq B$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} T(B_{T^{-1}(B)}) \subseteq B &\Rightarrow T^{-1}\left(T(B_{T^{-1}(B)})\right) \subseteq T^{-1}(B) \\ &\Rightarrow B_{T^{-1}(B)} \subseteq T^{-1}\left(T(B_{T^{-1}(B)})\right) \subseteq T^{-1}(B) \\ &\Rightarrow B_{T^{-1}(B)} \subseteq T^{-1}(B) \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan her zaman $T^{-1}(B) \subseteq B_{T^{-1}(B)}$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $B_{T^{-1}(B)} = T^{-1}(B)$ elde ederiz ki buradan $T^{-1}(B)$ band olup T ters band operatördür.

iii-) Tanımdan açıkça görülür.

iv-) Tanımdan açıkça görülür.

6.2.3. Tanım

X, Y pre-Riesz uzaylar ve $T: X \rightarrow Y$ bir operatör olsun.

i-) Her $x \in X$ için $B_{Tx} \subseteq T(B_x)$ ise T esas band operatör olarak adlandırılır.

ii-) Her $x \in X$ için $T(B_x) \subseteq B_{Tx}$ ise T ters esas band operatör olarak adlandırılır.

Dolayısıyla Lemma 6.2.2’de $A = \{x\}$ alırsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

6.2.4. Sonuç

X, Y pre-Riesz uzaylar ve $T: X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

i-) T band operatör ise esas band operatördür.

ii-) T ters band operatör ise ters esas band operatördür.

Şimdi pre-Riesz uzaylarla ilgili bazı kavramları ifade edelim.

6.2.5. Tanım [10, Tanım 4.1.13]

X bir pre-Riesz uzayı ve (X^ρ, i) , X uzayının Riesz tamlaması olsun. Her $0 \leq y \in X^\rho$ için $i(M)^d = \{y\}^d$ olacak şekilde $M \subseteq X$ varsa X uzayına fordable denir.

6.2.6. Tanım [11, Tanım 2.6]

X bir pre-Riesz uzayı ve (X^ρ, i) , X uzayının Riesz tamlaması olsun. Her $0 < y \in X^\rho$ için $0 < i(x) \leq y$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa X uzayına pervasive denir.

6.2.7. Önerme [10, Önerme 4.1.15]

Her pervasive pre-Riesz uzayı fordable uzaydır.

Bu ifadenin karşısı her zaman doğru değildir.

Örnek [10, Örnek 4.1.19]

$[0,1]$ aralığında tanımlı sürekli fonksiyonların uzayı olan $C[0,1]$, noktasal sıralamaya göre Riesz uzayıdır. $Y = C[0,1]$ olsun. Burada $\mathbb{I} : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{I}(x) = 1$ olmak üzere Y uzayının $X = \left\{ \alpha \mathbb{I} + f : \alpha \in \mathbb{R}, f \in C[0,1], f(0) = 0, \int_0^1 f(t)dt = 0 \right\}$ altuzayını ele alırsak, X pre-Riesz uzayıdır. X uzayı fordable olup pervasive değildir.

Riesz uzaylarında, herhangi iki elemanın birbirine dik olmasının ürettikleri bandların arakesitinin sadece sıfır vektöründen oluşması ile karakterize edildiğini biliyoruz. Herhangi bir $x \in X$ için $\{x\}^{dd} = B_x$ ile gösterecek olursak pre-Riesz uzaylarında bu karakterize aşağıdaki şekilde yapılmıştır.

6.2.8. Lemma [11, Lemma 7.2]

X bir pre-Riesz uzayı ve $x, y \in X$ olsun.

(i) Eğer $x \perp y$ ise $B_x \cap B_y = \{0\}$ dır.

(ii) Ek olarak X fordable iken $B_x \cap B_y = \{0\}$ ise $x \perp y$ dir.

Burada X uzayı fordable değilken (ii) ifadesi her zaman doğru değildir.

Örnek [11, Örnek 4.1]

$X = \mathbb{R}^3$ uzayını ele alalım ve $e^{(i)}$ standart taban vektörler olsun. $i \in \{1,2\}$ olmak üzere $x^{(i)} = e^{(i)} + e^{(3)}$ ve $y^{(i)} = -e^{(i)} + e^{(3)}$ vektörleri tanımlanırsa bu vektörler yardımıyla oluşturulan $K = \text{pos}\{x^{(1)}, x^{(2)}, y^{(1)}, y^{(2)}\}$, X içinde cone olur. Burada (X, K) pre-Riesz

uzay olup fordable değildir. $x = x^{(1)}$ ve $y = x^{(2)}$ seçersek $B_x \cap B_y = \{0\}$ olur fakat x ile y birbirine dik değildir.

6.2.9. Teorem

X, Y fordable pre-Riesz uzaylar ve $T: X \rightarrow Y$ bir operatör olsun.

(i) T bire-bir esas band operatör ise T diklik koruyan operatördür.

(ii) T bire-bir ve örten ters esas band operatör ise T^{-1} diklik koruyan operatördür.

İspat

(i) $x, y \in X$ ve $x \perp y$ olsun. Dolayısıyla Lemma 6.2.8 gereği $B_x \cap B_y = \{0\}$ olur. Ayrıca T esas band operatör olduğundan $B_{Tx} \subseteq T(B_x)$ ve $B_{Ty} \subseteq T(B_y)$ dir. Buradan hareketle $B_{Tx} \cap B_{Ty} \subseteq T(B_x) \cap T(B_y)$ elde edilir. Şimdi T operatörünün bire-bir olduğunu kullanırsak $B_{Tx} \cap B_{Ty} \subseteq T(B_x) \cap T(B_y) = T(B_x \cap B_y) = T(\{0\}) = \{0\}$ olur. Dolayısıyla $B_{Tx} \cap B_{Ty} = \{0\}$ olup Lemma 6.2.8 gereği $Tx \perp Ty$ dir.

(ii) $T: X \rightarrow Y$ bire-bir ve örten ters esas band operatör olsun. O halde T^{-1} esas band operatördür. T^{-1} bire-bir esas band operatör olduğundan önermenin (i) maddesi gereği T^{-1} diklik koruyandır.

6.2.10. Tanım [3]

X bir pre-Riesz uzayı ve $B \subseteq X$ bir band olsun. $X = B \oplus B^d$ şeklinde yazılabiliyorsa B projeksiyon band olarak adlandırılır.

6.2.11. Önerme [3, Sonuç 3.4]

X bir pre-Riesz uzayı ve V , X uzayının bir altvektör uzayı olsun. $X = V + V^d$ şeklinde yazılabiliyorsa V projeksiyon banddır.

6.2.12. Tanım

X bir pre-Riesz uzayı olsun. X içindeki her band, projeksiyon band oluyorsa X uzayına projeksiyon özelliğine sahiptir denir.

Örnek [10, Örnek 4.3.20]

$\mathbb{R}^3$ uzayını ele alırsak $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2, z \geq 0\}$, $\mathbb{R}^3$ içinde cone (ice-cream cone) olup $X = (\mathbb{R}^3, K)$ pre-Riesz uzaydır. X uzayında, $\emptyset$ ve X (aşıkâr bandlar) haricinde başka band yoktur. Dolayısıyla X uzayı projeksiyon özelliğine sahiptir.

Diğer taraftan, K_1 cone ile X bir pre-Riesz uzay ve K_2 cone ile Y bir pre-Riesz uzay olmak üzere eğer $Z = X \times Y$ uzayını “ $(a, b), (c, d) \in X \times Y, (a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow a \leq c \wedge b \leq d$ ” sıralaması ile ele alırsak $K = K_1 \times K_2$, Z içinde cone olup Z bu cone ile pre-Riesz uzaydır. Burada $A = X \times \{0\}$ ve $B = \{0\} \times Y$ altuzayları Z içinde projeksiyon band olup $A^d = B$ ve $B^d = A$ dır. Dolayısıyla aşıkâr bandlardan başka bandları da olan projeksiyon özelliğine sahip pre-Riesz uzay elde etmiş oluruz [4, Örnek 3.2].

6.2.13. Teorem

X projeksiyon özelliğine sahip bir pre-Riesz uzay ve Y bir pre-Riesz uzay olmak üzere $T: X \rightarrow Y$ örten bir operatör olsun. Eğer T diklik koruyan ise band operatördür.

İspat

$B \subseteq X$ herhangi bir band olsun. X projeksiyon özelliğine sahip olduğundan $X = B \oplus B^d$ şeklinde yazılabilir. Ayrıca T diklik koruyan operatör olduğundan $T(B^d) \subseteq [T(B)]^d$ dir. Gerçekten, $y \in T(B^d)$ olsun. Dolayısıyla en az bir $x \in B^d$ vardır ki $T(x) = y$ dir. $x \in B^d$ olduğundan her $b \in B$ için $x \perp b$ dir. T diklik koruyan operatör olduğundan $T(x) \perp T(b)$ dir. O halde $y \perp T(b)$ yani $y \in [T(B)]^d$ dir. Şimdi T operatörünün lineer olduğunu kullanırsak,

$$T(X) = T(B + B^d) = T(B) + T(B^d) \subseteq T(B) + [T(B)]^d$$

bulunur. Ayrıca T örten olduğundan $T(X) = Y$ olup $Y \subseteq T(B) + [T(B)]^d$ elde edilir. Dolayısıyla $Y = T(B) + [T(B)]^d$ dir. $T(B)$, Y uzayının altvektör uzayı olduğundan Önerme 6.2.11 gereği $T(B)$ band ve dolayısıyla T band operatör olur.

6.2.14. Sonuç

X, Y pre-Riesz uzaylar ve $T: X \rightarrow Y$ bire-bir ve örten bir operatör olsun.

i-) T ve T^{-1} diklik koruyan operatörler ise T ve T^{-1} band operatörlerdir.

ii-) X, Y uzayları fordable iken T ve T^{-1} band operatörler ise T ve T^{-1} diklik koruyan operatörlerdir.

İspat

i-) T ve T^{-1} diklik koruyan operatörler olsun. O halde herhangi bir $\emptyset \neq D \subseteq X$ için $T(D^d) \subseteq T(D)^d$ ve $T^{-1}[T(D)^d] \subseteq [T^{-1}T(D)]^d = D^d$ dir. Buradan

$$T^{-1}[T(D)^d] \subseteq D^d \Rightarrow T(D)^d \subseteq T(D^d)$$

elde edilir. $T(D^d) \subseteq T(D)^d$ ve $T(D)^d \subseteq T(D^d)$ olduğundan $T(D)^d = T(D^d)$ dir. Şimdi herhangi bir $B \subseteq X$ band olsun. $B = B^{dd}$ olduğunu kullanırsak,

$$T(B)^{dd} = T(B^d)^d = T(B^{dd}) = T(B)$$

bulunur. $T(B)^{dd} = T(B)$ olduğundan $T(B)$ band ve dolayısıyla T band operatördür. Benzer şekilde T^{-1} de band operatördür.

ii-) X, Y uzayları fordable olmak üzere T ve T^{-1} band operatörler olsun. T ve T^{-1} band operatörler olduğundan Sonuç 6.2.4-(i) gereği T ve T^{-1} bire-bir esas band operatörlerdir. Dolayısıyla X, Y uzayları fordable olduğundan Teorem 6.2.9-(i) gereği T ve T^{-1} diklik koruyan operatörlerdir.

6.2.15. Sonuç

X projeksiyon özelliğine sahip fordable pre-Riesz uzayı ve Y fordable pre-Riesz uzayı olmak üzere $T: X \rightarrow Y$ bire-bir ve örten bir operatör olsun. Aşağıdakiler denktir:

(i) T diklik koruyan operatördür.

(ii) T band operatördür.

(iii) T esas band operatördür.

İspat

(i) $\Rightarrow$ (ii) X projeksiyon özelliğine sahip pre-Riesz uzayı ve $T: X \rightarrow Y$ örten diklik koruyan operatör olduğundan Teorem 6.2.13 gereği T band operatördür.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) T band operatör olduğundan Sonuç 6.2.4-(i) gereği T esas band operatördür.

(iii) $\Rightarrow$ (i) T bire-bir esas band operatör olduğundan Teorem 6.2.9-(i) gereği T diklik koruyan operatördür.

6.2.16. Tanım [11, Tanım 7.1]

X, Y pre-Riesz uzaylar ve $T: X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. $\{x\}^{dd} \subseteq \{y\}^{dd}$ olan her $x, y \in X$ için $\{Tx\}^{dd} \subseteq \{Ty\}^{dd}$ oluyorsa T , (β) -koşulunu sağlar denir.

6.2.17. Teorem [11, Teorem 7.3]

X, Y pre-Riesz uzaylar ve $T: X \rightarrow Y$ bire-bir operatör olsun.

(i) Eğer X fordable ve T , (β) -koşulunu sağlıyor ise $T^{-1}: T(X) \rightarrow X$ diklik koruyandır.

(ii) T örten ve diklik koruyan olsun. Eğer T^{-1} diklik koruyan ise T , (β) -koşulunu sağlar.

6.2.18. Önerme

X, Y pre-Riesz uzaylar ve $T: X \rightarrow Y$ ters esas band operatör olsun. Bu durumda T , (β) -koşulunu sağlar.

İspat

$T: X \rightarrow Y$ ters esas band operatör olduğundan her $x \in X$ için $T(B_x) \subseteq B_{Tx}$ yani, $T(\{x\}^{dd}) \subseteq \{Tx\}^{dd}$ dir. Şimdi $x, y \in X$ ve $\{x\}^{dd} \subseteq \{y\}^{dd}$ olsun. Dolayısıyla $B_x \subseteq B_y$ dir.

$$B_x \subseteq B_y \Rightarrow T(B_x) \subseteq T(B_y)$$

elde edilir. Diğer taraftan $x \in \{x\}^{dd} = B_x$ olduğundan $Tx \in T(B_x)$ dir.

$$Tx \in T(B_x) \subseteq T(B_y) \subseteq B_{Ty} \Rightarrow Tx \in B_{Ty} = \{Ty\}^{dd}$$

olur. $Tx \in \{Ty\}^{dd}$ ise $B_{Tx} = \{Tx\}^{dd} \subseteq \{Ty\}^{dd}$ dir. Dolayısıyla T , (β) -koşulunu sağlar.

6.2.19. Sonuç

X, Y pre-Riesz uzaylar ve $T: X \rightarrow Y$ bire-bir ve örten bir operatör olsun. Eğer X fordable ve T ters esas band operatör ise T^{-1} diklik koruyandır.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Riesz uzaylarında tanımlı ideal ve band operatörlerin özelliklerini incelediğimiz bu tezde Abramovich'in sorduğu sorudan hareketle cevaplar elde ettik, ayrıca diklik koruyan operatörler teorisine ait iki problemin çözümüne ulaştık. Gördük ki band operatör ve ideal operatör tanımları pre-Riesz uzaylarına genişletilebilir ve özellikleri araştırılabilir. Bu bağlamda band operatör tanımını pre-Riesz uzaylarında verip bazı özelliklerini elde ettik. Diğer taraftan van Haandel [1]'de X, Y pre-Riesz uzaylar olmak üzere her $\emptyset \neq A \subseteq X$ sonlu küme için $T[A^{ul}] \subseteq T[A]^{ul}$ koşulunu sağlayan $T: X \rightarrow Y$ operatörünü Riesz* homomorfizm olarak adlandırdı ve Riesz* homomorfizmler için Riesz uzaylarına genişleme koşullarını:

“ X_1, X_2 pre-Riesz uzaylar, $T: X_1 \rightarrow X_2$ bir operatör, (Y_1, i_1) ve (Y_2, i_2) sırasıyla X_1 ve X_2 uzaylarının Riesz tamlamaları olmak üzere; T operatörünün Riesz* homomorfizmi olması için gerek ve yeter koşul $\hat{T} \circ i_1 = i_2 \circ T$ olacak şekilde bir $\hat{T}: Y_1 \rightarrow Y_2$ Riesz homomorfizmi var olmasıdır”

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 & \xrightarrow{T} & X_2 \\
 i_1 \downarrow & & \downarrow i_2 \\
 Y_1 & \xrightarrow{\hat{T}} & Y_2
 \end{array}$$

şeklinde elde etti. Buradan hareketle Kalauch ve Malinowski Önerme 3.12'de sıra sürekli operatörler için genişleme koşullarını elde ettiler [9]. Ayrıca Kalauch, van Gaans ve Zhang Teorem 6.4'te normlu pre-Riesz uzaylarda sürekli operatörler ve Teorem 6.6'da normlu pre-Riesz uzaylarda diklik koruyan operatörler için genişleme koşullarını elde ettiler [11]. Dolayısıyla benzer bir şekilde band operatörler için genişleme koşulları araştırılabilir. Ayrıca pre-Riesz uzaylarda ideal operatör tanımı yapılarak benzer sorular ideal operatör için sorulabilir ve band operatör ile ideal operatör karşılaştırması yapılabilir.

KAYNAKLAR

1. van Haandel, M. (1993). *Completions in Riesz space theory*, PhD thesis, University of Nijmegen, Nijmegen.
2. van Gaans, O. and Kalauch, A. (2006). Disjointness in partially ordered vector spaces. *Positivity*, 10(3), 573–589.
3. Glück, J. (2019). A short note on band projections in partially ordered vector spaces. *Indagationes Mathematicae, New Series*, 30(1), 1-6.
4. Glück, J. (2020). On disjointness, bands and projections in partially ordered vector spaces. *arXiv:2001.10941*.
5. Kalauch, A. and van Gaans, O. (2008). Bands in pervasive pre-Riesz spaces. *Operator Matrices*, 2(2), 177–191.
6. Kalauch, A. and van Gaans, O. (2008). Ideals and bands in pre-Riesz spaces. *Positivity*, 12(4), 591–611.
7. Kalauch, A. and van Gaans, O. (2014). Directed ideals in partially ordered vector spaces. *Indagationes Mathematicae, New Series*, 25(2), 296–304.
8. Kalauch, A., Lemmens, B. and van Gaans, O. (2015). Bands in partially ordered vector spaces with order unit. *Positivity*, 19(3), 489–511.
9. Kalauch, A. and Malinowski, H. (2019). Order continuous operators on pre-Riesz spaces and embeddings. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, 38(4), 375–395.
10. Kalauch, A. and van Gaans, O. (2019). *Pre-Riesz spaces*. Berlin: De Gruyter.
11. Kalauch, A., van Gaans, O. and Zhang, F. (2020). Disjointness preserving operators on normed pre-Riesz spaces: extensions and inverses. *Positivity*, 24(2), 481-504.
12. Abramovich, Y. A. and Kitover, A. K. (1998). A solution to a problem on invertible disjointness preserving operators. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 126, 1501-1505.
13. Abramovich, Y. A. and Kitover, A. K. (2000). Inverses of disjointness preserving operators. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 143(679), 1-162.
14. Abramovich, Y. A. and Kitover, A. K. (2000). A characterization of operators preserving disjointness in terms of their inverse. *Positivity*, 4, 205-212.

15. Boulabiar, K. (2008). Recent trends on order bounded disjointness preserving operators. *Irish Mathematical Society Bulletin*, 62, 43–69.
16. Hart, D. R. (1985). Some properties of disjointness preserving operators. *Mathematics Proceedings A*, 88(2), 183-197.
17. Huijsmans, C. B. and Wickstead, A. W. (1992). The inverse of band preserving and disjointness preserving operators. *Indagationes Mathematicae*, 3, 179-183.
18. Huijsmans, C. B. and de Pagter, B. (1993). Invertible disjointness preserving operators. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 37, 125-132.
19. Huijsmans, C. B. and Luxemburg, W. A. J. (1992). Positive operators and semigroups on Banach lattice. *Acta Applicandae Mathematicae*, 27(1-2), 143-152.
20. Turan, B. (2003). On ideal operators. *Positivity*, 7, 141-148.
21. Uyar, A. (2007). Solutions of two problems in the theory of disjointness preserving operators. *Positivity*, 11, 119-121.
22. He, T. S. and Chen, Z. L. (2012). The band operators of Archimedean-Riesz spaces. *Journal of Sichuan Normal University*, 35, 510-514.
23. Turan, B. and Özcan, K. (2019). On band operators. *Turkish Journal of Mathematics*, 43(2), 977–984.
24. Turan, B. and Özcan, K. (2021). Two problems in the theory of disjointness preserving operators. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 50(2), 361–364.
25. Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. (1985). *Positive Operators*. London: Academic Press.
26. Luxemburg, W. A. J. and Zaanen, A. C. (1971). *Riesz Spaces I*. Amsterdam: North Holland.
27. Schaefer, H. H. (1991). *Banach lattices and positive operators*. Berlin: Springer.
28. Zaanen, A. C. (1983). *Riesz Spaces II*. Amsterdam: North Holland.
29. Luxemburg, W. A. J. (1979). Some aspects of the theory of Riesz spaces. *University of Arkansas Lecture Notes in Mathematics*, 4.
30. McPolin, P. T. N. and Wickstead, A. W. (1985). The order boundedness of band preserving operators on uniformly complete vector lattices. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 97, 481-487.

31. Huijsmans, C. B. and de Pagter, B. (1984). Subalgebras and Riesz subspaces of an f-algebra. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 48, 161-174.
32. Alpay, S. and Turan, B. (1998). On the commutant of the ideal centre. *Note Di Mathematica*, 18(1), 63-69.
33. Ruy, A. G. (1972). La structure ideale des M-espaces. *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees*, 51, 331-373.



GAZİ GELECEKTİR..