GAZİ ÜNİVERSİTESİ

Gazi

1926

SIRALI CEBİRLERDE SIRA SÜREKLİ ELEMANLAR VE ORTOMORFİZM ELEMANLAR

Hüma GÜRKÖK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARALIK 2019

Hüma GÜRKÖK tarafından hazırlanan "SIRALI CEBİRLERDE SIRA SÜREKLİ ELEMANLAR VE ORTOMORFİZM ELEMANLAR" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Bahri TURAN

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ……………………

Başkan: Prof. Dr. Birol ALTIN

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. …………………..

Üye: Doç. Dr. Nazife ERKURŞUN ÖZCAN

Matematik Ana Bilim Dalı, Hacettepe Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ……………………

Tez Savunma Tarihi: 23/12/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

…………………….…….

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Hüma GÜRKÖK

23/12/2019

SIRALI CEBİRLERDE SIRA SÜREKLİ ELEMANLAR VE ORTOMORFİZM ELEMANLAR

(Yüksek Lisans Tezi)

Hüma GÜRKÖK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Aralık 2019

ÖZET

A birimi *e* olan sıralı cebir olsun. Egor A. Alekhno, "The order continuity in ordered algebras" isimli makalesinde *A* nın sıra sürekli elemanlarının ve ortomorfizm elemanlarının sınıflarını vermiş ve çalışmıştır. Bu tezde, önce bu makale göz önüne alınarak, sıra sürekli elemanların özellikleri incelenmiştir. Sonra, ortomorfizm elemanların ortomorfizm operatörlerin özelliklerine benzer özellikleri elde edilmiştir. *A* sıralı cebir, A_r principal projeksiyon özelliğine sahip Riesz uzay ve $Orthe(A)$, A_e ye göre topolojik dolu ise, B_e, *e* nin A_r içinde ürettiği band olmak üzere, $B_e = Orthe(A)$ olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, aynı hipotezler altında, $Orthe(A)$ nın birimi *e* olan bir f-cebiri olduğu elde edilmiştir.

Bilim Kodu	:	20404
Anahtar Kelimeler	:	Sıralı cebir, regüler eleman, sıra sürekli eleman, ortomorfizm eleman.
Sayfa Adedi	:	67
Danışman	:	Prof. Dr. Bahri TURAN

ORDER CONTINUOUS ELEMENTS AND ORTHOMORPHISM ELEMENTS IN ORDERED ALGEBRAS

(M. Sc. Thesis)

Hüma GÜRKÖK

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

December 2019

ABSTRACT

Let A be an ordered algebra with a unit e. The classes of order continuous elements A_n and orthomorphism elements $Orthe(A)$ of A was introduced and studied by Egor A. Alekhno in "The order continuity in ordered algebras". In this thesis, firstly the properties of order continuous elements are examined by considering this article. Then, the properties of orthomorphism elements similar to the properties orthomorhism operators are obtained. It is shown that if A is an ordered algebra such that A_r is a Riesz space with principal projection property and $Orthe(A)$ is topologically full with respect to A_e then $B_e = Orthe(A)$ holds, where B_e is the band generated by e in A_r. Furthermore, under the same hypothess, it is obtained that $Orthe(A)$ is an f-algebra with an unit e.

Science Code	:	20404
Key Words	:	Ordered algebra, regular element, order continuous element, orthomorphism element.
Page Number	:	67
Supervisor	:	Prof. Dr. Bahri TURAN

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim süresince, değerli zamanını ve bilgi birikimini benimle paylaşan, daima sabırla bana yol gösteren ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Bahri TURAN'a, tüm çalışmalarım boyunca manevi desteklerini her zaman yanımda hissettiğim aileme ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{Orth}(\boldsymbol{E})$	*E* üzerinde tanımlı ortomorfizmlerin kümesi
$\boldsymbol{Orthe}(\boldsymbol{A})$	*A*'nın bütün ortomorfizm elemanlarının kümesi
$\boldsymbol{OI}(\boldsymbol{A})$	Sıra idempotentlerin kümesi
$\boldsymbol{E}_{\mathbf{x}}$	*E* içinde *x* tarafından üretilen ideal
$\boldsymbol{B}_{\mathrm{x}}$	*x* tarafından üretilen band
$\boldsymbol{x}^{+}$	*x*'in pozitif kısmı
$\boldsymbol{x}^{-}$	*x*'in negatif kısmı
$\lvert\boldsymbol{x}\rvert$	*x*'in modülü
$\lVert\boldsymbol{x}\rVert$	*x*'in normu
$\boldsymbol{x}^{\mathbf{d}}$	*x*'in diki
$\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}$	*A* ile *B*'nin direkt toplamı
$\boldsymbol{A}^{+}$	*A* kümesinin pozitif kısmı
$\boldsymbol{A}^{\sim}$	*A*'nın sıra duali
$\boldsymbol{A}_{\mathbf{r}}$	*A*'nın regüler elemanlarının kümesi
$\boldsymbol{A}_{\mathbf{n}_{\mathbf{l}}}$	*A*'nın sol sıra sürekli elemanlarının kümesi
$\boldsymbol{A}_{\mathbf{n}_{\mathbf{r}}}$	*A*'nın sağ sıra sürekli elemanlarının kümesi
$\boldsymbol{A}_{\mathbf{n}}$	*A*'nın sıra sürekli elemanlarının kümesi
$\boldsymbol{A}_{\mathbf{s}_{\mathbf{l}}}$	*A*'nın sol singüler elemanlarının kümes
$\boldsymbol{A}_{\mathbf{s}_{\mathbf{r}}}$	*A*'nın sağ singüler elemanlarının kümesi
$\boldsymbol{A}_{\mathbf{s}}$	*A*'nın singüler elemanlarının kümesi
$\boldsymbol{x}_{\alpha} \uparrow \boldsymbol{x}$	Yukarı yönlendirilmiş ve supremumu *x* olan net
$\boldsymbol{x}_{\alpha} \downarrow \boldsymbol{x}$	Aşağı yönlendirilmiş ve infimumu *x* olan net
$\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$	Birbirine dik elemanlar
$\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}$	*x* ile *y*'nin infimumu
$\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}$	*x* ile *y*'nin supremumu
$\mathbf{inf}\,\boldsymbol{A}$	*A* kümesinin infimumu

Simgeler	**Açıklamalar**
$\mathbf{sup}\,\boldsymbol{A}$	*A* kümesinin supremumu
$\boldsymbol{l}_{\infty}$	Sınırlı diziler uzayı
$°(\boldsymbol{E}^{\sim}) = \{\mathbf{0}\}$	*E*$^{\sim}$, *E* yi noktalarına ayırır
$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{E})$	*E* den *E* ye tanımlı operatörlerin vektör uzayı
$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E})$	*E* den *E* ye tanımlı sınırlı operatörler uzayı
$\boldsymbol{L}_{\mathbf{b}}(\boldsymbol{E})$	*E* den *E* ye tanımlı sıra sınırlı operatörlerin uzayı
$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{K})$	*K* üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların kümesi

1. GİRİŞ

E Archimedian Riesz uzay ve $T: E \to E$ bir operatör olmak üzere eğer T iki pozitif operatörün farkı olarak yazılabiliyor ise T ye regüler operatör denir ve bunların kümesi $L_{\mathrm{r}}(E)$ ile gösterilir. $(x_\alpha) \subseteq E$ bir net ve $x \in E$ olmak üzere $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(y_\alpha) \subseteq E$ neti varsa (x_α) neti x elemanına sıra yakınsaktır denir. $T: E \to E$ operatörü E içindeki sıra yakınsak netleri sıra yakınsak netlere götürüyor ise T ye sıra sürekli operatör denir ve bunların kümesi $L_{\mathrm{n}}(E)$ biçiminde gösterilir. Eğer her $B \subseteq E$ bandı için $T(B) \subseteq B$ ise T ye band koruyan operatör, T band koruyan ve sıra sınırlı ise T ye ortomorfizm denir ve bunların kümesi de $Orth(E)$ ile gösterilir.

Egor A. Alekhno herhangi bir sıralı cebirde, yukarıdaki tanımlara paralel olarak, regüler elemanlar, sıra sürekli elemanlar ve ortomorfizm elemanların tanımlarını vermiştir. Bunlar sırasıyla A_{r}, A_{n}, $Orthe(A)$ ile gösterilmiştir [1].

Doğal olarak akla şu soru gelmektedir: E Riesz uzayı olmak üzere $A = L(E)$ sıralı cebiri alındığında verilen tanımlar denk olur mu? Herhangi bir sıralı cebirde tanımların denk olmadığı görülmüştür.

Bu çalışmada ilk olarak sıralı cebir, Riesz cebiri, Banach cebiri, idempotent eleman gibi gerekli olan bazı temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Sonra [1] ve [2] göz önüne alınarak regüler elemanların ve sıra sürekli elemanların özellikleri ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Son bölümde ortomorfizm elemanlar uzayının, ortomorfizm operatörler uzayının benzer özelliklerine ne zaman sahip olduğu verilmiştir. A birimli sıralı cebir, A_{r} principal projeksiyon özelliğine sahip Riesz uzayı ve $Orthe(A)$, A_{e} ye göre topolojik dolu iken $Orthe(A)$ nın A_{r} içinde birimin ürettiği band ve $Orthe(A)$ nın f-cebiri olduğu gösterilmiştir. Buradan $Orth(E)$ nin bilinen özellikleri sonuç olarak elde edilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar ve bazı teoremler [1], [2], [3], [4] ve [5] kullanarak verilmiştir.

2.1. Sıralı Cebir, Riesz Cebiri ve Banach Cebiri

2.1.1. Tanım

A, $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzay olsun. $\bullet : A \times A \to A$ işlemi ile her $x, y, z \in A$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için;

(i) $\alpha(x \bullet y) = (\alpha x) \bullet y = x \bullet (\alpha y)$

(ii) $x \bullet (y + z) = x \bullet y + x \bullet z \; ve \; (x + y) \bullet z = x \bullet z + y \bullet z$

(iii) $x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$

şartları sağlanıyorsa A ya $\mathbb{R}$ üzerinde *cebir* denir.

2.1.2. Tanım

E vektör uzayı $K \neq \emptyset$ ve $K \subseteq E$ olsun. Eğer;

(i) Her $x, y \in K$ için $x + y \in K$

(ii) Her $x \in K$ ve $\alpha \geq 0$ için $\alpha x \in K$

(iii) $K \cap (-K) = \{0\}$

özellikleri sağlanıyorsa K ya A üzerinde bir *kon* denir.

2.1.3. Tanım

E reel vektör uzay ve üzerindeki sıralama bağıntısı '$\leq$' olmak üzere, her $x, y \in E$ ve $x \leq y$ için;

(i) Her $z \in E$ için $x + z \leq y + z$

(ii) Her $0 \leq \alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha x \leq \alpha y$

koşulunu sağlayan E uzayına *sıralı vektör uzayı* denir.

2.1.4. Tanım

E sıralı vektör uzayı olsun. E deki herhangi iki elemanın supremumu veya infimumu var ve E ye ait ise, E ye *Riesz uzay* denir.

2.1.1. Sonuç

E sıralı vektör uzayı ise $E^+ = \{x \in E: x \geq 0\}$ kümesi kondur.

İspat

(i) Her $x, y \in E^+$ olsun. $x \in E^+$ise $x \geq 0$ ve $y \in E^+$ ise $y \geq 0$ dir. Dolayısıyla $x + y \geq 0$ olur. O halde $x + y \in E^+$ dır.

(ii) Her $x \in E^+$ ve $\alpha \geq 0$ olsun.

$x \in E^+ \Rightarrow x \geq 0$

$\Rightarrow \alpha x \geq 0$

$\Rightarrow \alpha x \in E^+$

dır.

(iii) $E^+ = \{x \in E: x \geq 0\}$ ve $-E^+ = \{x \in E: x \leq 0\}$ olduğundan $E^+ \cap -E^+ = \{0\}$ olur. O halde E^+ kümesi bir kondur.

2.1.1. Teorem

E vektör uzayı $K \subseteq E$ bir kon olsun. Her $x, y \in E$ için,

$x \leq y \Leftrightarrow (y - x) \in K$

ile tanımlanan bağıntı bir sıralama bağıntısıdır. Bu sıralama ile E sıralı vektör uzaydır.

İspat

- Her $x \in E$ için Tanım 2.1.2 (ii) den $0 \in K$ dır. Ayrıca $x - x = 0$ olduğundan $(x - x) \in K$ olur. O halde $x \leq x$ dir.
- Her $x, y \in E$ için,

  $x \leq y$ ve $y \leq x \Rightarrow y - x \in K \; ve \; x - y \in K$

  $\Rightarrow x - y \in -K \; ve \; x - y \in K$

  $\Rightarrow x - y \in K \cap (-K)$

  Tanım 2.1.2 (iii) den $K \cap (-K) = \{0\}$ olduğundan $x - y = 0$ olur. O halde $x = y$ dir.
- Her $x, y, z \in E$ için,

  $x \leq y$ ve $y \leq z \Rightarrow y - x \in K$ ve $z - y \in K$

  $\Rightarrow y - x + z - y = z - x$

  Tanım 2.1.2 (i) den $z - x \in K$ dır. O halde $x \leq z$ olur.

Dolayısıyla tanımlanan bağıntı bir sıralama bağıntısıdır.

- Her $x, y, z \in E$ için,

  $x \leq y \Rightarrow y - x \in K$

  $\Rightarrow y - x + z - z \in K$

  $\Rightarrow (y + z) - (x + z) \in K$

  $\Rightarrow x + z \leq y + z$

  dir.
- Her $x, y \in E$ ve her $\alpha \geq 0$ için,

  $x \leq y \Rightarrow y - x \in K$

  $\Rightarrow \alpha(y - x) \in K$

  $\Rightarrow \alpha y - \alpha x \in K$

  $\Rightarrow \alpha x \leq \alpha y$

  dir.

O halde E sıralı vektör uzaydır.

2.1.5. Tanım

A sıralı vektör uzayı ve bir cebir olmak üzere, her $a, b \geq 0$ için $ab \geq 0$ ise A ya *sıralı cebir* denir. Eğer A cebir ve Riesz uzay ise A ya *Riesz cebiri* denir. Ayrıca $e \geq 0$ birim elemanı varsa A ya *birimli sıralı cebir* denir.

2.1.6. Tanım

A sıralı cebir olmak üzere, her $a, b \in A$ ve her $c \in A^+$ için $a \wedge b = 0$ iken $ca \wedge b = ac \wedge b = 0$ koşulu sağlanıyorsa A ya *f-cebiri* denir.

2.1.7. Tanım

A bir sıralı cebir, $\|.\|$ A üzerinde bir norm ve A bu norma göre tam olsun. Her $a, b \in A$ için $\|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|$ şartı sağlanıyorsa A ya *Banach cebiri* denir. Ek olarak, A^+ konu kapalı ise A ya *sıralı Banach cebiri* denir.

2.1.8. Tanım

E sıralı vektör uzay, her $x \in E$ ve $x_1, x_2 \in E^+$ için $x = x_1 - x_2$ yani $E = E^+ - E^+$ ise E, E^+ *tarafından doğuruluyor* denir.

2.1.1. *Örnek*

E Riesz uzay ise her $x \in E$ için $x = x^+ - x^-$ olacak şekilde $x^+, x^- \in E^+$ vardır dolayısıyla E, E^+ tarafından doğurulur.

2.1.2. *Örnek*

E bir sıralı vektör uzay, E, E^+ tarafından doğurulsun, $L(E) = \{T \mid T: E \to E$ lineer operatör$\}$ olsun.

$T \leq S \Leftrightarrow$ Her $x \in E^+$ için $T(x) \leq S(x)$

biçiminde tanımlanan $'' \leq ''$ bağıntısını alalım.

- Her $T \in L(E)$ ve her $x \in E^+$ için $T(x) \leq T(x)$ olduğundan yansıma özelliğini sağlar.
- Her $T, S \in L(E)$ için,

  $T \leq S$ ve $S \leq T \Rightarrow$ Her $x \in E^+$ için $T(x) \leq S(x)$ ve $S(x) \leq T(x)$

  $\Rightarrow$ Her $x \in E^+$ için $T(x) = S(x)$

  $\Rightarrow$ Her $x \in E$, $x_1, x_2 \in E^+$ ve $x = x_1 - x_2$ için

  $T(x_1) = S(x_1)$ ve $T(x_2) = S(x_2)$

  $\Rightarrow T(x_1) - T(x_2) = S(x_1) - S(x_2)$

  $\Rightarrow T(x_1 - x_2) = S(x_1 - x_2)$

  $\Rightarrow T(x) = S(x)$

  olduğundan ters simetrik olma özelliğini sağlar.
- Her $T, S, H \in L(E)$ için,

  $T \leq S$ ve $S \leq H \Rightarrow$ Her $x \in E^+$ için $T(x) \leq S(x)$ ve $S(x) \leq H(x)$

  $\Rightarrow$ Her $x \in E^+$ için $T(x) \leq H(x)$

  olduğundan geçişme özelliğini sağlar.
- Her $T, S, H \in L(E)$ için,

  $T \leq S \Rightarrow$ Her $x \in E^+$ için $T(x) \leq S(x)$

  $\Rightarrow$ Her $x \in E^+$ için $T(x) + H(x) \leq S(x) + H(x)$

  $\Rightarrow T + H \leq S + H$

  dır.
- Her $T, S \in L(E)$ ve her $\lambda \geq 0$ için,

  $T \leq S \Rightarrow$ Her $x \in E^+$ için $T(x) \leq S(x)$

  $\Rightarrow$ Her $x \in E^+$ için $\lambda T(x) \leq \lambda S(x)$

  $\Rightarrow \lambda T \leq \lambda S$

dir.

$L(E)$ sıralı vektör uzaydır.

Ayrıca,

$o: L\ (E) \times L(E) \to L(E)$

$(S,T) \to S\ o\ T$

bileşke işlemini düşünelim. Her $S, T, H \in L(E)$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için,

(i) Her $x \in E$ için,

$$\begin{aligned}\lambda(S\ o\ T)(x) &= \lambda[(S\ o\ T)(x)]\\ &= \lambda[S(T(x))]\\ &= (\lambda S)[T(x)]\\ &= [(\lambda S)\ o\ T](x)\end{aligned}$$

dir. Diğer yandan her $x \in E$ için,

$$\begin{aligned}\lambda(S\ o\ T)(x) &= \lambda[(S\ o\ T)\ x)]\\ &= \lambda[S(T(x))]\\ &= S[\lambda T(x)]\\ &= [S\ o\ (\lambda T)](x)\end{aligned}$$

dir.

(ii) Her $x \in E$ için,

$$\begin{aligned}[S\ o\ (T+H)](x) &= S[(T+H)(x)]\\ &= S[T(x)+H(x)]\\ &= S[T(x)]+S[H(x)]\\ &= (S\ o\ T)(x)+(S\ o\ H)(x)\\ &= [(S\ o\ T)+(S\ o\ H)](x)\end{aligned}$$

dir. Diğer yandan her $x \in E$ için,

$$\begin{aligned}[S\ o\ (T+H)](x) &= (S+T)[H(x)]\\ &= S(H(x))+T(H(x))\\ &= (S\ o\ H)(x)+(T\ o\ H)(x)\\ &= [(S\ o\ H)+(T\ o\ H)](x)\end{aligned}$$

(iii) Her $x \in E$ için,

$$\begin{aligned}[S\ o\ (T\ o\ H)](x) &= S[(T\ o\ H)(x)]\\ &= S[T(H(x))]\\ &= (S\ o\ T)(H(x))\\ &= [(S\ o\ T)\ o\ H](x)\end{aligned}$$

$L(E)$ bir cebirdir. Her $T, S \geq 0$ ve her $x \in E^+$ için $(S\ o\ T)(x) = S(T(x))$ dir. $x \in E^+$ ise $T(x) \in E^+$ olur. S pozitif ve $T(x) \in E^+$ olduğundan $(S\ o\ T)(x) = S(T(x)) \in E^+$ dır. Dolayısıyla $S\ o\ T \geq 0$ olup $L(E)$ sıralı cebirdir. Ayrıca, her $x \in E^+$ için $(T\ o\ I)(x) = T(I(x)) = T(x)$ ve $(I\ o\ T)(x) = I(T(x)) = T(x)$ olur. O halde $L(E)$ birimli sıralı cebirdir.

2.1.9. Tanım

E bir Riesz uzay ve $\|.\|$ normuna göre tam olsun. Her $x, y \in E$ için,
$|x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$
sağlanıyorsa E ye *Banach örgüsü* denir.

2.1.3. *Örnek*

E sıralı Banach uzay, $\overline{E^+ - E^+} = E$ ve $B(E) = \{T \mid T: E \to E$ sınırlı operatör$\}$ olsun.
$T \leq S \Leftrightarrow$ Her $x \in E^+$ için $T(x) \leq S(x)$
sıralaması ile,
Her $T, S \in B(E)$ ise,

- Her $x \in E$ için,
  $$\begin{aligned}\|(S+T)(x)\| &= \|S(x) + T(x)\| \\ &\leq \|S(x)\| + \|T(x)\| \\ &\leq M_1\|x\| + M_2\|x\| \\ &= (M_1 + M_2)\|x\| \\ &= M\|x\|\end{aligned}$$
  dir.
- Her $\lambda \in \mathbb{R}$ için,
  $$\begin{aligned}\|(\lambda T)(x)\| &= \|\lambda[T(x)]\| \\ &= |\lambda|\|T(x)\| \\ &\leq |\lambda|M\|x\| \\ &= M_1\|x\|\end{aligned}$$
  olduğundan $B(E)$, $L(E)$ nin alt vektör uzayıdır. Dolayısıyla $L(E)$ den indirgenen sıralama yansıyan ve geçişlidir.
- Her $T, S \in B(E)$ için,
  $T \leq S$ ve $S \leq T \Rightarrow$ Her $x \in E^+$ için $T(x) \leq S(x)$ ve $S(x) \leq T(x)$

$\Rightarrow$ Her $x \in E^+$ için $T(x) = S(x)$

$\Rightarrow T = S$

Ayrıca, $x \in E^+ - E^+$ ve $x = x_1 - x_2$ ise,

$T(x_1) = S(x_1)$ ve $T(x_2) = S(x_2) \Rightarrow T(x_1) - T(x_2) = S(x_1) - S(x_2)$

$\Rightarrow T(x_1 - x_2) = S(x_1 - x_2)$

$\Rightarrow T(x) = S(x)$

olur. Diğer yandan, $x \in E$ ise $x \in \overline{E^+ - E^+}$ dır. O halde en az bir $(x_n) \in E^+ - E^+$ için $x_n \to x$ olur. Dolayısıyla en az bir $(x_n) \in E^+ - E^+$ için $T(x_n) \to T(x)$ ve $S(x_n) \to S(x)$ dir. Her n için $T(x_n) = S(x_n)$ olduğundan $T(x) = S(x)$ olur. O halde ters simetrik olma özelliğini sağlar. Böylece $B(E)$ nin birimli sıralı cebir olduğu $L(E)$ ye benzer şekilde gösterilebilir.

2.1.2. Sonuç

E Riesz uzay ise $L(E)$ ve $B(E)$ birimli sıralı cebirlerdir. E Dedekind tam Riesz uzayı ise $L_r(E)$ Dedekind tam birimli Riesz cebiridir.

2.1.10. Tanım

(y_α) bir net olsun. Her $y_\beta, y_\gamma \in (y_\alpha)$ için, $y_\beta \leq y_\delta$ ve $y_\gamma \leq y_\delta$ olacak şekilde $y_\delta \in (y_\alpha)$ varsa (y_α) ya *yukarı yönlendirilmiş net* denir. $y_\alpha \uparrow$ ile gösterilir. Benzer şekilde, her $y_\beta, y_\gamma \in (y_\alpha)$ için $y_\delta \leq y_\beta$ ve $y_\delta \leq y_\gamma$ olacak şekilde $y_\delta \in (y_\alpha)$ varsa (y_α) ya *aşağı yönlendirilmiş net* denir. $y_\alpha \downarrow$ ile gösterilir.

Ayrıca, $y_\alpha \uparrow$ ve $\sup y_\alpha = y$ ise $y_\alpha \uparrow y$ şeklinde gösterilir. Benzer şekilde $y_\alpha \downarrow$ ve $\inf y_\alpha = y$ ise $y_\alpha \downarrow y$ şeklinde gösterilir.

2.1.11. Tanım

E sıralı vektör uzayı ve $(x_\alpha) \subseteq E$ bir net olsun. $x \in E$ olmak üzere $y_\alpha \leq x - x_\alpha \leq z_\alpha$ ve $(y_\alpha) \uparrow 0$, $(z_\alpha) \downarrow 0$ olacak şekilde (y_α), $(z_\alpha) \subseteq E$ netleri varsa x_α, x e *sıra yakınsaktır* denir ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ ile gösterilir. Eğer E Riesz uzay, $(x_\alpha) \subseteq E$ ve $x \in E$ ise $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(y_\alpha) \subseteq E$ neti varsa x_α, x e *sıra yakınsaktır* denir.

2.2. İdempotent Elemanlar ve Özellikleri

2.2.1. Tanım

A sıralı birimli cebir ve $b \in A$ olsun. Eğer $0 \leq b \leq e$ ve $b^2 = b$ ise b ye *sıra idempotent* denir. Bütün sıra idempotentlerin kümesi $OI(A)$ ile gösterilir.
$OI(A) = \{b \in A;\ 0 \leq b \leq e$ ve $b^2 \leq b\}$ şeklinde ifade edilir.

2.2.2. Tanım

A birimli sıralı cebir ve $b \in OI(A)$ olsun. $OI(A)$ içindeki $(e - b)$ elemanına *b nin diki* denir ve b^{d} ile gösterilir.
Ayrıca $bb^{\mathrm{d}} = b(e - b) = b - b^2 = 0$ olur. Benzer şekilde $b^{\mathrm{d}}b = 0$ dır. O halde $bb^{\mathrm{d}} = b^{\mathrm{d}}b = 0$ elde edilir.

2.2.3. Tanım

A birimli sıralı cebir ve $b_1, b_2 \in OI(A)$ olsun. Eğer $b_1 \wedge b_2 = 0$ ise b_1 ve b_2 *birbirine diktir* denir ve $b_1 \perp b_2$ ile gösterilir.

2.2.4. Tanım

$(X, \leq)$ sıralı küme olsun.
(i) X bir örgüdür.
(ii) X dağılımlıdır.
(iii) X in null ve birim elemanı vardır.
(iv) X deki her elemanın tamlayanı vardır.
şartları sağlanıyorsa X e *Boolean cebiri* denir.

2.2.1. Lemma

A birimli sıralı cebir ve $b_1, b_2 \in OI(A)$ olsun. Aşağıdakiler doğrudur.
(i) Her $b_1, b_2 \in OI(A)$ için $b_1 b_2 = b_2 b_1$ dir.
(ii) $b_1, b_2 \in OI(A)$ ve $b_1 \leq b_2$ ise $b_2 - b_1 \in OI(A)$ dir.
(iii) Eğer $b_1, b_2 \in OI(A)$ ve $b_1 b_2 = 0$ ise $b_1 + b_2 \in OI(A)$ dir.
(iv) $b_1 b_2 = 0$, $x \in A$ için $x \leq b_1$ ve $x \leq b_2$ ise $x \leq 0$ dır.

(v) $b_1b_2 \in OI(A)$ ve $b_1b_2 = b_1 \wedge b_2$ dir. Ayrıca $b_1 \perp b_2 \Leftrightarrow b_1b_2 = 0$ dır.

(vi) $b_1, b_2 \in OI(A)$ için $b_1 \vee b_2 = b_1 + b_2 - b_1b_2$ dir.

(vii) Eğer A Dedekind tam ve $\emptyset \neq M \subseteq OI\ (A)$ ise A içinde $\inf M$ ve $\sup M$ vardır. Ayrıca $\inf M, \sup M \in OI(A)$ dır.

(viii) Eğer $z \in A$ nın modülü varsa her $b \in OI(A)$ için $b|z| = |bz|$ ve $|z|b = |zb|$ dir.

İspat

(i) Keyfi $b_1, b_2 \in OI(A)$ için,

$$
\begin{aligned}
b_1 \leq e &\Rightarrow b_1b_2b_1 \leq b_2b_1 \\
&\Rightarrow b_1b_2 + b_1b_2b_1 \leq b_1b_2 + b_2b_1 \\
&\Rightarrow b_1b_2 - b_2b_1 \leq b_1b_2 - b_1b_2b_1 \\
&\qquad = b_1b_2(e - b_1) \\
&\qquad \leq b_1(e - b_1) \\
&\qquad = b_1 - {b_1}^2 \\
&\qquad = b_1 - b_1 = 0
\end{aligned}
$$

Yani $b_1b_2 - b_2b_1 \leq 0$ olur. Benzer şekilde,

$$
\begin{aligned}
b_2 \leq e &\Rightarrow b_2b_1b_2 \leq b_1b_2 \\
&\Rightarrow b_2b_1 + b_2b_1b_2 \leq b_2b_1 + b_1b_2 \\
&\Rightarrow b_2b_1 - b_1b_2 \leq b_2b_1 - b_2b_1b_2 \\
&\qquad = b_2b_1(e - b_2) \\
&\qquad \leq b_2(e - b_2) \\
&\qquad = b_2 - {b_2}^2 \\
&\qquad = b_2 - b_2 = 0
\end{aligned}
$$

Yani $b_2b_1 - b_1b_2 \leq 0$ olur. Böylece,

$$
\begin{aligned}
b_1b_2 - b_2b_1 \leq 0 &\Rightarrow 0 \leq b_2b_1 - b_1b_2 \\
&\Rightarrow 0 \leq b_2b_1 - b_1b_2 \leq 0 \\
&\Rightarrow b_2b_1 - b_1b_2 = 0 \\
&\Rightarrow b_2b_1 = b_1b_2
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(ii) $b_1 \leq b_2$ olduğundan $0 \leq b_2 - b_1 \leq b_2 \leq e$ olur. $b_1 = {b_1}^2 = b_1b_1 \leq b_1b_2 \leq b_1$ ise $b_1b_2 = b_1$ ve $b_2b_1 = b_1b_2 = b_1$ dir. Bu nedenle $(b_2 - b_1)^2 = b_2 - b_1$ olur. Böylece $b_2 - b_1 \in OI(A)$ dır.

(iii) b_1, $b_2 \in OI(A)$ ve $b_1b_2 = 0$ olsun. $b_1 = b_1(e - b_2) \leq e - b_2$ ise $0 \leq b_1 + b_2 \leq e$ olur. Ayrıca $(b_1 + b_2)^2 = {b_1}^2 + b_1b_2 + b_2b_1 + {b_2}^2 = b_1 + b_2$ dır. O halde $b_1 + b_2 \in OI(A)$ olur.

(iv) $x \leq b_1$ ise $xb_2 \leq b_1b_2 = 0$ dır. Dolayısıyla $xb_2 \leq 0$ olur.

$${b_2}^{\mathrm{d}} = e - b_2 \text{ ve } x \leq b_2 \Rightarrow x{b_2}^{\mathrm{d}} \leq b_2{b_2}^{\mathrm{d}} = 0$$
$$\Rightarrow x{b_2}^{\mathrm{d}} \leq 0$$

dır. O halde $xb_2 + x{b_2}^{\mathrm{d}} \leq 0$ ise $xb_2 + x(e - b_2) = x$ olur. Sonuç olarak $x \leq 0$ dır.

(v) $b_1b_2 \leq b_1$ ve $b_1b_2 \leq b_2$ dir. Farz edelim ki $y \in A$ için $y \leq b_1$ ve $y \leq b_2$ olsun. $y - b_1b_2 \leq b_1 - b_1b_2$ ve $y - b_1b_2 \leq b_2 - b_1b_2$ dir. (ii) şıkkından $b_1 - b_1b_2$, $b_2 - b_1b_2 \in OI(A)$ ve $(b_1 - b_1b_2)(b_2 - b_1b_2) = 0$ dır. Bu nedenle (iv) şıkkının ispatından $y - b_1b_2 \leq 0$ ise $y \leq b_1b_2$ dir. O halde $b_1b_2 = b_1 \wedge b_2$ olur. Ayrıca $b_1 \perp b_2 \Leftrightarrow b_1 \wedge b_2 = 0$ dır ve bir önceki eşitlikten $b_1b_2 = 0$ olduğu açıktır.

(vi) Önce $b_1b_2 \leq b_1 + b_2$ olduğunu gösterelim. $b_1 \leq e$, $b_2 \leq e$ olduğundan $b_1b_2 \leq e$ ve $b_1b_2 \leq b_1$, $b_1b_2 \leq b_2$ olur. Taraf tarafa toplarsak, $b_1b_2 \leq 2b_1b_2 \leq b_1 + b_2$ olur. Yani $b_1b_2 \leq b_1 + b_2$ dir. Diğer yandan, $b_1 + b_2 = (b_1 \wedge b_2) + (b_1 \vee b_2)$ ve (v) şıkkından da $b_1b_2 = b_1 \wedge b_2$ olduğunu biliyoruz. O halde $(b_1 \vee b_2) = (b_1 + b_2) - (b_1b_2)$ dir.

(vii) $M \subset [0, e]$ ve A Dedekind tam olduğundan A içinde $\inf M$ ve $\sup M$ vardır. $\sup M = b_0$ olsun. Keyfi b_1, $b_2 \in M$ için $b_1 + b_2 = (b_1 \wedge b_2) + (b_1 \vee b_2)$ ve (v) şıkkından,

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 &= (b_1b_2) + (b_1 \vee b_2) \\ &\leq (b_1b_2) + b_0 \\ &\leq {b_0}^2 + b_0 \end{aligned}$$

dir.

$$\sup\,(b_1 + b_2) \leq {b_0}^2 + b_0 \Rightarrow 2b_0 \leq {b_0}^2 + b_0$$
$$\Rightarrow b_0 \leq {b_0}^2 \leq b_0$$
$$\Rightarrow {b_0}^2 = b_0$$

dir. Ayrıca $0 \leq b_0 \leq e$ olduğundan $b_0 \in OI(A)$ elde edilir. Dolayısıyla $\sup M \in OI(A)$ olur. Şimdi, $e - M \subseteq OI(A)$ ise $e - \inf M = \sup\,(e - M)$ dir. $-\inf M = \sup\,(-M)$ olduğundan $e - \inf M = e + \sup M = \sup\,(e - M) \in OI(A)$ olur. $\inf M \in OI(A)$ dır.

(viii) $z \leq |z|$ ve $-z \leq |z|$ ise $bz \leq b|z|$ ve $-bz \leq b|z|$ dir. Ayrıca $z \leq |z|$ olduğundan $b^{\mathrm{d}}z \leq b^{\mathrm{d}}|z|$ dir. Eğer $bz \leq x$ ve $-bz \leq x$ ise $z = bz + b^{\mathrm{d}}z \leq x + b^{\mathrm{d}}|z|$ ve $-z = bz - b^{\mathrm{d}}z \leq x + b^{\mathrm{d}}|z|$ olur. Bundan dolayı, $|z| \leq x + b^{\mathrm{d}}|z|$ dir. Yani $b|z| \leq x$ olur.

O halde $-bz \vee bz = b|z|$ dir. Böylece $|bz|$ var ve $b|z| = |bz|$ dir. Benzer olarak $|zb|$ var ve $|z|b = |zb|$ dir.

2.2.1. Teorem

A birimli sıralı cebir olmak üzere $OI(A)$ Boolean cebiridir. Ayrıca A Dedekind tam ise $OI(A)$ Dedekind tamdır.

İspat

(i) $b_1, b_2 \in OI(A)$ olmak üzere $(b_1b_2)^2 = (b_1b_2)(b_1b_2)$ ve Lemma 2.2.1 (i) den,

$$\begin{aligned}(b_1b_2)(b_1b_2) &= (b_1b_2)(b_2b_1)\\ &= b_1{b_2}^2\, b_1\\ &= b_1b_2b_1\\ &= b_1b_1b_2\\ &= {b_1}^2b_2\\ &= b_1b_2\end{aligned}$$

dir. Yani $(b_1b_2)^2 = b_1b_2$ olur. Ayrıca $b_1,\ b_2 \in OI(A)$ olduğundan $0 \leq b_1 \leq e$ ve $0 \leq b_2 \leq e$ dir. Bu iki eşitsizliği taraf tarafa çarparsak $0 \leq b_1b_2 \leq e$ olur. Böylece $b_1b_2 \in OI(A)$ dır. O halde $b_1 \wedge b_2 \in OI(A)$ dır. Ayrıca,

$$\begin{aligned}(b_1 + b_2 - b_1b_2)^2 &= {b_1}^2 + 2b_1b_2 - 4b_1b_2 + b_1b_2 + {b_2}^2\\ &= b_1 + b_2 - b_1b_2\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $(b_1 + b_2 - b_1b_2)^2 = (b_1 + b_2 - b_1b_2)$ olur. Ayrıca $b_1b_2 \in OI(A)$ ve $b_1 \in OI(A)$ olduğundan $b_1 \leq e$ dir. Dolayısıyla $b_1 \leq e$ ise $b_1b_2 \leq b_2$ olur. O halde Lemma 2.2.1 (ii) den $b_2 - b_1b_2 \in OI(A)$ olur. Ayrıca $b_1 \leq e$ ve $b_2 \leq e$ ise $b_1b_2 \leq b_2$ve $b_2b_1 \leq b_1$ dir. Eşitsizlikleri taraf tarafa toplarsak,

$$\begin{aligned}2b_1b_2 \leq b_1 + b_2 &\Rightarrow b_1b_2 \leq 2b_1b_2 \leq b_1 + b_2\\ &\Rightarrow b_1b_2 \leq b_1 + b_2\\ &\Rightarrow 0 \leq b_1 + b_2 - b_1b_2\end{aligned}$$

elde edilir. $b_1 \in OI(A)$ ve $b_2 \in OI(A)$ olduğundan $b_1(b_2 - b_1b_2) = b_1b_2 - b_1b_2 = 0$ dir.

Dolayısıyla Lemma 2.2.1 (iii) den $b_1 + b_2 - b_1b_2 \in OI(A)$ olur. Yani $b_1 \vee b_2 \in OI(A)$ olur. O halde $OI(A)$ örgüdür.

(ii) $b_1, b_2, b_3 \in OI(A)$ için,

$$b_1 \wedge (b_2 \vee b_3) = b_1(b_2 \vee b_3)$$
$$= b_1(b_2 + b_3 - b_2 b_3)$$
$$= b_1 b_2 + b_1 b_3 - b_1 b_2 b_3$$

dir. Diğer yandan,

$$(b_1 \wedge b_2) \vee (b_1 \wedge b_3) = (b_1 b_2) \vee (b_1 b_3)$$
$$= b_1 b_2 + b_1 b_3 - b_1 b_2 b_1 b_3$$
$$= b_1 b_2 + b_1 b_3 - b_1 b_2 b_3$$

olur. Dolayısıyla, $b_1 \wedge (b_2 \vee b_3) = (b_1 \wedge b_2) \vee (b_1 \wedge b_3)$ elde edilir. O halde $OI(A)$ dağılımlıdır.

(iii) $OI(A)$ kümesinin minimal elemanı, min $OI(A) = 0$ olduğu aşikardır. Dolayısıyla null elemanı $\theta = 0$ dır. $OI(A)$ kümesinin maximal elemanı, max $OI(A) = e$ olduğu aşikardır. Dolayısıyla birim elemanı $I = e$ dir. O halde $OI\ (A)$ kümesinin birim ve null elemanı vardır.

(iv) $b^{\mathrm{d}} = e - b$ olsun. Lemma 2.2.1 (ii) den $e, b \in OI(A)$ ve $b \leq e$ olduğundan $e - b \in OI(A)$ dır. Yani $b^{\mathrm{d}} \in OI(A)$ dır.

Ayrıca $b \wedge (e - b) = b(e - b) = b - b^2 = b - b = 0$ olur. Dolayısıyla $b \wedge b^{\mathrm{d}} = \theta$ dır.

Benzer şekilde $b \vee (e - b) = b + e - b - b(e - b) = e - b - b^2 = e$ dır. Yani $b \vee b^{\mathrm{d}} = I$ olur. O halde $OI(A)$ kümesinin her elemanının tamlayanı vardır.

Dolayısıyla $OI(A)$ Boolean cebirdir. Lemma 2.2.1 (vii) den A Dedekind tam olduğu için $OI(A)$ kümesinin de Dedekind tam olduğu aşikardır.

2.2.2. Lemma

A Dedekind tam birimli sıralı cebir, $(p_\alpha) \subseteq OI(A)$ ve $p \in A$ olsun. A içinde $p_\alpha \downarrow p$ olması için gerek ve yeter şart $OI(A)$ içinde $p_\alpha \downarrow p$ olmasıdır.

İspat

($\Rightarrow$) A içinde $p_\alpha \downarrow p$ olsun. Her α için $0 \leq p_\alpha \leq e$ ise $0 \leq \inf_\alpha p_\alpha \leq e$ dir. O halde $0 \leq p \leq e$ olur. Ayrıca sabit herhangi bir α ve $\alpha \leq \beta$ için,

$$0 \leq p - p_\alpha p \leq p - p_\beta p$$
$$\leq p_\beta - p_\beta p$$

$\leq p_\beta(p_\beta - p)$

$\leq p_\beta - p \downarrow 0$

olmasından $p - p_\alpha p = 0$ buradan da $p = p_\alpha p$ elde edilir.

$0 \leq p - p^2 = (p_\alpha - p)p \leq p_\alpha - p \Rightarrow 0 \leq p - p^2 \leq \inf_\alpha (p_\alpha - p) = 0$

$\Rightarrow p - p^2 = 0$

$\Rightarrow p = p^2$

dir. O halde $p \in OI(A)$ olur.

($\Leftarrow$) $OI(A)$ içinde $p_\alpha \downarrow p$ olsun. $(p_\alpha) \subseteq A$, her α için $0 \leq p_\alpha$ ve A Dedekind tam olduğundan $\inf_\alpha p_\alpha = a$ olacak şekilde $a \in A$ vardır. İspatın ilk kısmındaki gibi $a \in OI(A)$ olduğu görülür. Buradan $a = p$ dir.

3. SIRA SÜREKLİ ELEMANLAR

Bu bölümde [1] de verilen "The ordered continuity in ordered algebras" isimli makalenin sıra sürekli elemanlar kısmı detaylı olarak incelenmiştir.

3.1. Regüler Elemanlar

3.1.1. Tanım

A birimli sıralı cebir ve $a \in A$ olsun. Eğer $a = a_1 - a_2$ olacak şekilde a_1, $a_2 \in A^+$ var ise a elemanına *regüler eleman* denir. A nın regüler elemanlarının kümesi A_r ile gösterilir.

3.1.1. Sonuç

A birimli sıralı cebir olmak üzere a nın regüler eleman olması için gerek ve yeter şart $a \leq b$ olacak şekilde $b \in A^+$ var olmasıdır.

3.1.1. Önerme

A birimli sıralı cebir olmak üzere A_r, A nın sıralı alt cebirdir.

İspat

$a, b \in A_\mathrm{r}$ ve a_1, a_2, b_1, $b_2 \in A^+$ için $a = a_1 - a_2$, $b = b_1 - b_2$ olsun.

$$\begin{aligned} a + b &= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \\ &= (a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) \end{aligned}$$

biçiminde yazılabildiğinden $(a_1 + b_1) \in A^+$ ve $(a_2 + b_2) \in A^+$ olduğundan A_r nin tanımından $(a + b) \in A_\mathrm{r}$ olur. $\lambda a \in A_\mathrm{r}$ olduğuda kolayca görülür.

$$\begin{aligned} ab &= (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \\ &= a_1 b_1 - a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_2 b_2 \\ &= (a_1 b_1 + a_2 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{aligned}$$

biçiminde yazılabildiğinden $(a_1 b_1 + a_2 b_2) \in A^+$ ve $(a_1 b_2 + a_2 b_1) \in A^+$ olduğundan A_r nin tanımından $ab \in A_\mathrm{r}$ olur. O halde A_r alt cebirdir. Alt cebir ise cebirdir. Sıralı reel cebirin her alt cebiri de sıralı alt cebir olduğundan A_r reel sıralı alt cebirdir.

3.2. Sol Sıra Sürekli, Sağ Sıra Sürekli ve Sıra Sürekli Elemanlar

3.2.1. Tanım

A birimli sıralı cebir ve $a \in A$ olsun. Her $(p_\alpha) \subseteq OI(A)$ ve $p_\alpha \downarrow 0$ için A içinde $p_\alpha a \overset{o}{\to} 0$ ise a ya *sol sıra sürekli (l-sıra sürekli) eleman* denir. Benzer şekilde her $(p_\alpha) \subseteq OI(A)$ ve $p_\alpha \downarrow 0$ için A içinde $ap_\alpha \overset{o}{\to} 0$ ise a ya *sağ sıra sürekli (r-sıra sürekli) eleman* denir. A nın sol sıra sürekli elemanlarının kümesi A_{n_l} ile sağ sıra sürekli elemanlarının kümesi ise A_{n_r} ile gösterilir.

3.2.1. Önerme

A birimli sıralı cebir ise A_{n_l} ve A_{n_r}, A nın alt vektör uzaylarıdır.

İspat

$a \in A_{n_l}$ ise her $(p_\alpha) \subseteq OI(A)$ ve $p_\alpha \downarrow 0$ için $p_\alpha a \overset{o}{\to} 0$ dır.

$p_\alpha a \overset{o}{\to} 0 \Rightarrow \exists (b_\alpha), (c_\alpha) \subseteq A$ için $(b_\alpha) \uparrow 0$, $(c_\alpha) \downarrow 0$ ve $b_\alpha \leq p_\alpha a \leq c_\alpha$

önermesi doğrudur. Her $\gamma \in \mathbb{R}$ ve $a \in A_{n_l}$ için,

$\gamma = 0$ iken $p_\alpha(\gamma a) \overset{o}{\to} 0$ olduğu aşikardır.

$\gamma > 0$ iken,

$\gamma b_\alpha \leq \gamma p_\alpha a = p_\alpha \gamma a \leq \gamma c_\alpha$ dır. Ayrıca $(b_\alpha) \uparrow$ olduğundan b_β, $b_\sigma \in (b_\alpha)$ için $b_\beta \leq b_\delta$ ve $b_\sigma \leq b_\delta$ olacak şekilde $b_\delta \in (b_\alpha)$ vardır. Dolayısıyla γb_β, $\gamma b_\sigma \in (\gamma b_\alpha)$ için $\gamma b_\beta \leq \gamma b_\delta$ ve $\gamma b_\sigma \leq \gamma b_\delta$ olacak şekilde $\gamma b_\delta \in (\gamma b_\alpha)$ vardır. O halde $(\gamma b_\alpha) \uparrow$ dır. Ayrıca $(b_\alpha) \uparrow 0$ olduğundan $(b_\alpha) \uparrow$ ve $\sup b_\alpha = 0$ dır. Supremum tanımından $\sup \gamma b_\alpha = 0$ elde edilir. O halde $(\gamma b_\alpha) \uparrow$ ve $\sup \gamma b_\alpha = 0$ olduğundan $(\gamma b_\alpha) \uparrow 0$ dır. Benzer şekilde, $(c_\alpha) \downarrow$ olduğundan c_β, $c_\sigma \in (c_\alpha)$ için $c_\delta \leq c_\beta$ ve $c_\delta \leq c_\sigma$ olacak şekilde $c_\delta \in (c_\alpha)$ vardır. Dolayısıyla γc_β, $\gamma c_\sigma \in (\gamma c_\alpha)$ için $\gamma c_\delta \leq \gamma c_\beta$ ve $\gamma c_\delta \leq \gamma c_\sigma$ olacak şekilde $\gamma c_\delta \in (\gamma c_\alpha)$ vardır. O halde $(\gamma c_\alpha) \downarrow$ dır. Ayrıca $(c_\alpha) \downarrow 0$ olduğundan $(c_\alpha) \downarrow$ ve $\inf c_\alpha = 0$ dır. İnfimum tanımından $\inf \gamma c_\alpha = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $(\gamma c_\alpha) \downarrow$ ve $\inf \gamma c_\alpha = 0$ olduğundan $(\gamma c_\alpha) \downarrow 0$ dır. O halde $p_\alpha(\gamma a) \overset{o}{\to} 0$ olur.

$\gamma < 0$ iken,

$\gamma c_\alpha \leq \gamma p_\alpha a = p_\alpha \gamma a \leq \gamma b_\alpha$ dır. Ayrıca $(b_\alpha)\uparrow$ olduğundan $b_\beta,\ b_\sigma \in (b_\alpha)$ için $b_\beta \leq b_\delta$ ve $b_\sigma \leq b_\delta$ olacak şekilde $b_\delta \in (b_\alpha)$ vardır. Dolayısıyla $\gamma < 0$ ve $\gamma b_\beta,\ \gamma b_\sigma \in (\gamma b_\alpha)$ için $\gamma b_\delta \leq \gamma b_\beta$ ve $\gamma b_\delta \leq \gamma b_\sigma$ olacak şekilde $\gamma b_\delta \in (\gamma b_\alpha)$ vardır. O halde $(\gamma b_\alpha)\downarrow$ dır. Ayrıca $(b_\alpha)\uparrow 0$ olduğundan $(b_\alpha)\uparrow$ ve $\sup b_\alpha = 0$ dır. Supremum tanımı ve $\gamma < 0$ olduğundan $\inf \gamma b_\alpha = 0$ elde edilir. O halde $(\gamma b_\alpha)\downarrow$ ve $\inf \gamma b_\alpha = 0$ olduğundan $(\gamma b_\alpha)\downarrow 0$ dır. Benzer şekilde, $(c_\alpha)\downarrow$ olduğundan $c_\beta,\ c_\sigma \in (c_\alpha)$ için $c_\delta \leq c_\beta$ ve $c_\delta \leq c_\sigma$ olacak şekilde $c_\delta \in (c_\alpha)$ vardır. Dolayısıyla $\gamma c_\beta,\ \gamma c_\sigma \in (\gamma c_\alpha)$ için $\gamma c_\beta \leq \gamma c_\delta$ ve $\gamma c_\sigma \leq \gamma c_\delta$ olacak şekilde $\gamma c_\delta \in (\gamma c_\alpha)$ vardır. O halde $(\gamma c_\alpha)\uparrow$ dır. Ayrıca $(c_\alpha)\downarrow 0$ olduğundan $(c_\alpha)\downarrow$ ve $\inf c_\alpha = 0$ dır. İnfimum tanımı ve $\gamma < 0$ olduğundan $\sup \gamma c_\alpha = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $(\gamma c_\alpha)\uparrow$ ve $\sup \gamma c_\alpha = 0$ olduğundan $(\gamma c_\alpha)\uparrow 0$ dır. O halde $p_\alpha(\gamma a) \xrightarrow{o} 0$ olur.

Şimdi her $a, b \in A_{n_l}$ ise her $(p_\alpha) \subseteq OI(A)$ ve $p_\alpha \downarrow 0$ için,

$p_\alpha a \xrightarrow{o} 0 \Rightarrow \exists\ (c_\alpha), (d_\alpha) \subseteq A$ için $(c_\alpha)\uparrow 0, (d_\alpha)\downarrow 0$ ve $c_\alpha \leq p_\alpha a \leq d_\alpha$

$p_\alpha b \xrightarrow{o} 0 \Rightarrow \exists\ (h_\alpha), (k_\alpha) \subseteq A$ için $(h_\alpha)\uparrow 0, (k_\alpha)\downarrow 0$ ve $h_\alpha \leq p_\alpha b \leq k_\alpha$

önermeleri doğrudur. O halde $c_\alpha + h_\alpha \leq p_\alpha a + p_\alpha b \leq d_\alpha + k_\alpha$ dır. Ayrıca $(c_\alpha)\uparrow$ olduğundan $c_\beta,\ c_\sigma \in (c_\alpha)$ için $c_\beta \leq c_\delta$ ve $c_\sigma \leq c_\delta$ olacak şekilde $c_\delta \in (c_\alpha)$ vardır ve $(h_\alpha)\uparrow$ olduğundan $h_\beta,\ h_\sigma \in (h_\alpha)$ için $h_\beta \leq h_\delta$ ve $h_\sigma \leq h_\delta$ olacak şekilde $h_\delta \in (h_\alpha)$ vardır. O halde $c_\beta + h_\beta \leq c_\delta + h_\delta$ ve $c_\sigma + h_\sigma \leq c_\delta + h_\delta$ olacak şekilde $c_\delta + h_\delta \in (c_\alpha + h_\alpha)$ vardır. Yani $(c_\alpha + h_\alpha)\uparrow$ olur. Ayrıca $\sup c_\alpha = 0,\ \sup h_\alpha = 0$ olduğundan ve supremum tanımından $\sup\,(c_\alpha + h_\alpha) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $(c_\alpha + h_\alpha)\uparrow 0$ olur. Benzer şekilde, $(d_\alpha)\downarrow$ olduğundan $d_\beta, d_\sigma \in (d_\alpha)$ için $d_\delta \leq d_\beta$ ve $d_\delta \leq d_\sigma$ olacak şekilde $d_\delta \in (d_\alpha)$ vardır ve $(k_\alpha)\downarrow$ olduğundan $k_\beta,\ k_\sigma \in (k_\alpha)$ için $k_\delta \leq k_\beta$ ve $k_\delta \leq k_\sigma$ olacak şekilde $k_\delta \in (k_\alpha)$ vardır. O halde $d_\delta + k_\delta \leq d_\beta + k_\beta$ ve $d_\delta + k_\delta \leq d_\sigma + k_\sigma$ olacak şekilde $d_\delta + k_\delta \in (d_\alpha + k_\alpha)$ vardır. Yani $(d_\alpha + k_\alpha)\uparrow$ olur. Ayrıca $\inf d_\alpha = 0,\ \inf k_\alpha = 0$ olduğundan ve infimum tanımından $\inf\ (d_\alpha + k_\alpha) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $(d_\alpha + k_\alpha)\downarrow 0$ olur. O halde $p_\alpha(a+b) \xrightarrow{o} 0$ olur. Sonuç olarak A_{n_l} alt vektör uzaydır. Aynı şekilde A_{n_r} nin de alt vektör uzay olduğu gösterilebilir.

3.2.2. Önerme

A birimli sıralı cebir ise $A_{n_l} \cup A_{n_r} \subseteq A_r$ dir.

İspat

Her $a \in A_{\mathrm{n_l}} \cup A_{\mathrm{n_r}}$ ise $a \in A_{\mathrm{n_l}}$ veya $a \in A_{\mathrm{n_r}}$ dir.

$$p_n = \begin{cases} e, & n = 1 \\ 0, & n \geq 2 \end{cases}$$

dizisini düşünelim.

$p_{\mathrm{n}} \downarrow 0$ olduğu aşikardır. $(p_{\mathrm{n}}) \subseteq OI(A)$ ve $a \in A_{\mathrm{n_l}}$ olduğundan $p_{\mathrm{n}}a \xrightarrow{\mathrm{o}} 0$ dır.

$p_{\mathrm{n}}a \xrightarrow{\mathrm{o}} 0 \Rightarrow \exists(b_{\mathrm{n}}), (c_{\mathrm{n}}) \subseteq A$ için $(b_{\mathrm{n}}) \uparrow 0$, $(c_{\mathrm{n}}) \downarrow 0$ ve $b_{\mathrm{n}} \leq p_{\mathrm{n}}a \leq c_{\mathrm{n}}$

önermesi doğrudur. $n = 1$ için,

$b_1 \leq ea \leq c_1$ ve $c_{\mathrm{n}} \downarrow 0$ olduğundan $a \leq c_1$ ve $c_1 \in A^+$ dir. Sonuç 3.1.1 den a regüler elemandır. Benzer şekilde $a \in A_{\mathrm{n_r}}$ ise a nın regüler eleman olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla $A_{\mathrm{n_l}} \cup A_{\mathrm{n_r}} \subseteq A_{\mathrm{r}}$ dir.

3.2.1. Sonuç

A birimli sıralı cebir olmak üzere $A_{\mathrm{n_l}} \subseteq A_{\mathrm{r}}$ ve $A_{\mathrm{n_r}} \subseteq A_{\mathrm{r}}$ dır.

3.2.2. Tanım

A birimli sıralı cebir ve $a \in A$ olsun. a hem sağ hem de sol sıra sürekli ise sıra sürekli olarak adlandırılır. A nın bütün sıra sürekli elemanlarının kümesi A_{n} ile gösterilir. Yani $A_{\mathrm{n_l}} \cap A_{\mathrm{n_r}} = A_{\mathrm{n}}$ dir.

E Riesz uzayı olmak üzere $A = L(E)$ birimli sıralı cebirini aldığımızda sıra sürekli elemanlar ile sıra sürekli operatörler arasındaki ilişkiyi sorgulamak akla gelir. Aşağıdaki iki örnekte bunların farklı sınıflar olduğu gösterilecektir.

3.2.1. *Örnek*

E, $[0, 1]$ aralığından $\mathbb{R}$ ye tanımlı sürekli fonksiyonların Riesz uzayı yani $E = C[0,1]$ ve $A = L_{\mathrm{r}}(E)$ olsun. [5, s. 140] (v) den $OI(A) = \{0, \mathrm{I}\}$ dır. $T \in A$ sıra sürekli olmayan pozitif bir operatör olsun. T sıra sürekli elemandır. Her $(P_\alpha) \subseteq \{0, \mathrm{I}\}$ ve $P_\alpha \downarrow 0$ için,

$$\begin{aligned} P_\alpha \downarrow 0 &\Rightarrow \forall x \in E^+, P_\alpha(Tx) \downarrow 0 \\ &\Rightarrow \forall x \in E^+, (P_\alpha T)(x) \downarrow 0 \\ &\Rightarrow P_\alpha T \downarrow 0 \end{aligned}$$

olur. Buradan T sol sıra sürekli elemandır. Diğer yandan $(P_\alpha) \subseteq \{0, \mathrm{I}\}$ ve $P_\alpha \downarrow 0$ olduğundan $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $P_\alpha = 0$ olacak şekilde α_0 vardır. T pozitif ve $P_\alpha \downarrow$ olduğundan $TP_\alpha \downarrow$ dır. Şimdi her α için $U \leq TP_\alpha$ olsun. $\alpha_0 \leq \alpha$ için $U \leq TP_\alpha = T0 = 0$ olacağından $TP_\alpha \downarrow 0$ olur. Böylece sıra sürekli eleman olan fakat sürekli operatör olmayan bir T nin varlığı gösterilmiş olur.

3.2.2. *Örnek*

Sıra sürekli operatör olan ama sıra sürekli eleman olmayan bir eleman vardır.

$K = \{-\frac{1}{k};\ k \in \mathbb{N}^+\} \cup [0,1]$, $E = C(K)$ ve $A = L(E)$ olsun. $K_n = \left\{-\frac{1}{k};\ k \geq n\right\} \cup [0,1]$ ve χ_{K_n}, K_n nin karakteristik fonksiyonu olmak üzere,

$P_n : E \to E$

$\quad f \to P_n f = \chi_{K_n} f$

şeklinde tanımlansın.

Her $n \in \mathbb{N}^+$ için,

$$\begin{aligned} {P_n}^2 f &= P_n(P_n(f)) \\ &= P_n(\chi_{K_n} f) \\ &= \chi_{K_n}\chi_{K_n} f \\ &= (\chi_{K_n})^2(f) \\ &= \chi_{K_n} f \\ &= P_n f \end{aligned}$$

dir. O halde ${P_n}^2 = P_n$ olur. Ayrıca, $0 \leq \chi_{K_n}$ ve $0 \leq f$ olduğundan $0 \leq P_n f$ dir. Diğer yandan, $\chi_{K_n} \leq \mathbf{1}$ olduğundan $\chi_{K_n} f \leq f$ olur. Yani $P_n f \leq f$ dir. Dolayısıyla $0 \leq P_n \leq \mathrm{I}$ olur. O halde $P_n \in OI(A)$ dır. Her $n \in \mathbb{N}^+$ için $K_{n+1} \subseteq K_n$ olduğu aşikardır. Dolayısıyla $\chi_{K_{n+1}} \leq \chi_{K_n}$ olur. Ayrıca, $t \in [0,1]$ için, $\chi_{K_{n+1}}(t) = 1$ ve $\chi_{K_n}(t) = 1$ dir. O halde $\chi_{K_{n+1}}(t) = \chi_{K_n}(t)$ olur. $t = -\frac{1}{n}$ için, $\chi_{K_{n+1}}(t) = 0$ ve $\chi_{K_n}(t) = 1$ dir. O halde $\chi_{K_{n+1}}(t) < \chi_{K_n}(t)$ olur. Dolayısıyla her $t \in K$ için $\chi_{K_{n+1}}(t) \leq \chi_{K_n}(t)$ dir. O halde $\chi_{K_{n+1}}(t)f(t) \leq \chi_{K_n}(t)f(t)$ sağlanır. Yani $P_{n+1} \leq P_n$ dir. Bundan dolayı, $OI(A)$ içinde $P_n \downarrow$ dır. Şimdi, her $n \in \mathbb{N}^+$ için $0 \leq P \leq P_n$ olsun. $0 \leq P(\mathbf{1})(-\frac{1}{n}) \leq P_{n+1}\,(\mathbf{1})(-\frac{1}{n}) = \chi_{K_{n+1}}(-\frac{1}{n})1 = 0$ dır. O halde $P(\mathbf{1})(-\frac{1}{n}) = 0$ dır. $P(\mathbf{1}) \in C(K)$ olduğundan süreklidir. Dolayısıyla,

$$\lim_{n\to\infty} P(\mathbf{1})(-\tfrac{1}{n}) = P(\mathbf{1})(\lim_{n\to\infty} -\tfrac{1}{n})$$

$$= P(\mathbf{1})(0)$$
$$= 0$$

dır. $C(K)$ f-cebiri ve $P(\mathbf{1}) \perp (I-P)(\mathbf{1})$ olduğundan $P(\mathbf{1})(I-P)(\mathbf{1}) = 0$ dır.

$$P(\mathbf{1})(I-P)(\mathbf{1}) = 0 \Rightarrow P(\mathbf{1})(I(\mathbf{1}) - P(\mathbf{1})) = 0$$
$$\Rightarrow P(\mathbf{1})\mathbf{1} - P(\mathbf{1})P(\mathbf{1}) = 0$$
$$\Rightarrow P(\mathbf{1}) = [P(\mathbf{1})]^2$$

dir. Her $t \in K$ için $P(\mathbf{1})(t) = [P(\mathbf{1})(t)]^2$ olmasından dolayı her $t \in K$ için $P(\mathbf{1})(t) = 0$ veya $P(\mathbf{1})(t) = 1$ elde edilir. $P(\mathbf{1})$ sürekli ve $[0,1]$ bağlantılıdır. $P(\mathbf{1})([0,1]) = \{0,1\}$ ve $P(\mathbf{1})([0,1])$ bağlantı olacağından $[0,1]$ üzerinde $P(\mathbf{1})$ ya sabit fonksiyon 0 ya da 1 dir. $P(\mathbf{1})(0) = 0$ olduğundan 1 olamaz. O halde $P(\mathbf{1})(t) = 0$ dır. Herhangi bir $0 \leq f \in C(K)$ için, K kapalı ve $K \subseteq [-1,1]$ olduğundan K sınırlıdır. $[-1,1]$ kompakt ve K kapalı, sınırlı olduğundan K kompakttır. $|f(t)| \leq M = M\mathbf{1}$ olacak şekilde $0 < M$ vardır. Dolayısıyla $|f| \leq M\mathbf{1}$ dir. Buradan $0 \leq f \leq M\mathbf{1}$ olacak şekilde $0 < M$ vardır. Ayrıca P pozitif olduğundan sıra koruyandır. O halde, $0 \leq P(f) \leq P(M\mathbf{1}) = MP(\mathbf{1}) = 0$ dır. Dolayısıyla $P(f) = 0$ olur. Şimdi, $f = f^+ - f^-$ için,

$$P(f) = P(f^+ - f^-)$$
$$= P(f^+) - P(f^-)$$
$$= 0 - 0$$
$$= 0$$

olur. O halde $P = 0$ dır. Dolayısıyla $OI(A)$ içinde $P_n \downarrow 0$ olur.

$$T: C(K) \to C(K)$$
$$f \to T(f) = \chi_{[0,1]} f$$

şeklinde tanımlayalım.

$0 \leq \chi_{[0,1]}$ ve $0 \leq f$ olduğundan $0 \leq T(f)$ dır. Yani T pozitiftir. Ayrıca her $f, g \in C(K)$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$T(f+g) = \chi_{[0,1]}(f+g)$$
$$= \chi_{[0,1]} f + \chi_{[0,1]} g$$
$$= T(f) + T(g)$$

ve

$$T(\lambda f) = \chi_{[0,1]}(\lambda f)$$
$$= \lambda \chi_{[0,1]}(f)$$
$$= \lambda T(f)$$

olduğundan T lineerdir. Yani $T \in L_r(E)$ dir. Her n için $[0,1] \subseteq K_n$ dir. Dolayısıyla $\chi_{[0,1]} \leq \chi_{K_n}$dir. $0 \leq \chi_{[0,1]} f \leq \chi_{K_n} f$ ise $0 \leq T \leq P_n$ ve $T \neq 0$ dır. O halde $L(E)$ içinde $P_n \downarrow 0$ değildir. …($*$)

$I: E \rightarrow E$ sıra sürekli operatördür, fakat I sıra sürekli eleman değildir. Olmayana ergi yöntemiyle, I sıra sürekli eleman olsun. Yani, I hem r hem l sıra sürekli olsun. Dolayısıyla her $(P_\alpha) \subseteq OI(A)$ ve $(P_\alpha) \downarrow 0$ iken $IP_\alpha \xrightarrow{o} 0$ dır. (P_n) yukarıda tanımlanan şekilde olmak üzere, $(P_n) \subseteq OI(A)$ ve $(P_n) \downarrow 0$ dır.$L_r(E)$ içinde $IP_n = P_n \xrightarrow{o} 0$ olmalıdır. $L(E)$ içinde $(P_n) \downarrow$ ve $P_n \xrightarrow{o} 0$ ise $\inf P_n = 0$ olur. Bu ise ($*$) ile çelişkidir. O halde I, r ve l sıra sürekli eleman değildir. Yani sıra sürekli eleman değildir.

3.2.3. Önerme

A birimli sıralı cebir olmak üzere A Dedekind tam ise A_r Riesz uzaydır.

İspat

A Dedekind tam, $x, y \in A^+$ ve $D = \{x, y\}$ olsun. $x \leq x + y$ ve $y \leq x + y$ olduğundan D kümesi $x + y$ ile üstten sınırlı ve $\sup D = \sup\{x, y\} = x \vee y \in A^+$ olur. Benzer şekilde D, 0 ile alttan sınırlı olduğundan $x \wedge y \in A^+$ dir. Yani A^+ bir örgüdür. $x, y, z, u \in A^+$ olsun. $(x - y) \vee (z - u) = [(x + u) \vee (z + y)] - (y + u)$ eşitliğinde $(x + u) \in A^+$, $(z + y) \in A^+$ olduğundan $(x + u) \vee (z + y) \in A^+$ olur ve ayrıca $(y + u) \in A^+$ dır. Dolayısıyla $A_r = A^+ - A^+$ olduğundan $(x - y) \vee (z - u) \in A_r$ elde edilir. O halde A_r Riesz uzaydır.

3.2.4. Önerme

A birimli sıralı cebir olsun. A nın Dedekind tam olması için gerek ve yeter şart A_r nin Dedekind tam olmasıdır.

İspat

($\Rightarrow$) A Dedekind tam sıralı cebir olsun. $B \subseteq A_r$ ve B üstten sınırlı olsun. Her $b \in B$ için $b \leq a$ ve $a \in A_r$ alalım. $A_r \subseteq A$ ve A Dedekind tam olduğundan $\sup B = u$, A içinde vardır ve $u \leq a$ dır. Ayrıca A_r Riesz uzay olduğundan $a^+ \in A_r$ ve $u \leq a \leq a^+$ dır. Dolayısıyla $u = a^+ - (a^+ - u)$ şekilde yazılabilir. Yani $u \in A_r$ olur. O halde A_r Dedekind tamdır.

($\Leftarrow$) A_r Dedekind tam, $B \subseteq A$ ve $a \in A$ üst sınır olsun. $D = \{b - a;\ b \in B\}$ tanımlansın. $D \subseteq -A^+ \subseteq A_r$ ve D nin A_r içinde üst sınırı 0 dır. O halde A_r içinden $\sup D$ vardır. $\sup D = d$ olsun. Supremum tanımından,

Her $x \in D$ için $x \leq d \Rightarrow$ Her $b \in B$ için $b - a \leq d$

$\Rightarrow$ Her $b \in B$ için $b \leq d + a$

dır. $d + a$, b için bir üst sınırdır. b nin başka bir üst sınırı t olsun.

$b \leq t \Rightarrow b - a \leq t - a$

$\Rightarrow d \leq t - a$

$\Rightarrow d + a \leq t$

olur. Dolayısıyla $\sup_{b \in B} b = d + a$ olur. Yani $\sup B \in A$ dır. O halde A Dedekind tamdır.

3.2.3. Tanım

E bir sıralı vektör uzay ve $x \in E^+$ olsun. $E_x = \{y \in E;\ \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ için } -\lambda x \leq y \leq \lambda x\}$ kümesine x in ürettiği ideal denir.

3.2.5. Önerme

E bir sıralı vektör uzay, $x \in E^+$ ve x tarafından üretilen ideal E_x olsun. E_x, E nin alt uzayıdır.

İspat

$a, b \in E_x$ olsun.

$a \in E_x \Rightarrow a \in E$ ve en az bir $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $-\lambda x \leq a \leq \lambda x$,

$b \in E_x \Rightarrow b \in E$ ve en az bir $\gamma \in \mathbb{R}^+$ için $-\gamma x \leq b \leq \gamma x$.

Taraf tarafa toplanırsa, $a + b \in E$ ve $\lambda + \gamma \in \mathbb{R}^+$ için $-(\lambda + \gamma)x \leq a + b \leq (\lambda + \gamma)x$ elde edilir. O halde $a + b \in E_x$ olur.

$a \in E_x$ ve $\alpha \in \mathbb{R}^+$ olsun.

$\alpha a \in E$ ve en az bir $\alpha\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $-\alpha\lambda x \leq \alpha a \leq \alpha\lambda x$ dir.

$a \in E_x$ ve $\alpha < 0$ olsun.

$-\alpha a \in E$ ve en az bir $\alpha\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $-\alpha\lambda x \leq -\alpha a \leq \alpha\lambda x$ dir.

O halde elde edilen bu iki eşitsizlikten $\alpha a \in E_x$ olur. Dolayısıyla E_x, E nin alt uzayıdır.

3.2.6. Önerme

E bir sıralı vektör uzay, E_{r} regüler elemanların kümesi, $x \in E^{+}$ ve x tarafından üretilen ideal E_{x} olsun. $E_{\mathrm{x}} \subseteq E_{\mathrm{r}}$ dir.

İspat

$y \in E_{\mathrm{x}}$ olsun. En az bir $\lambda \in \mathbb{R}^{+}$ için $-\lambda x \leq y \leq \lambda x$ dir. $\lambda x \geq 0$ ve $y \leq \lambda x$ olduğundan $y = \lambda x - (\lambda x - y)$ şeklinde yazılabilir. O halde y iki pozitifin farkı şeklinde yazılabildiğinden $y \in E_{\mathrm{r}}$ dir. Dolayısıyla $E_{\mathrm{x}} \subseteq E_{\mathrm{r}}$ dir.

3.2.7. Önerme

A birimli sıralı cebir ve $b \in {A_{\mathrm{n_l}}}^{+}$ ise b nin ürettiği ideal A_{b} için $A_{\mathrm{b}} \subseteq A_{\mathrm{n_l}}$ dir.

İspat

$y \in A_{\mathrm{b}}$ olsun. Yani, en az bir $\lambda \in \mathbb{R}^{+}$ için $-\lambda b \leq y \leq \lambda b$ dir. $(p_{\alpha}) \in OI(A)$ ve $p_{\alpha} \downarrow 0$ için, $-\lambda b \leq y \leq \lambda b$ ise $-\lambda p_{\alpha} b \leq p_{\alpha} y \leq p_{\alpha}(\lambda b) = \lambda p_{\alpha} b$ dir. Ayrıca $p_{\alpha} \downarrow 0$ olduğundan $\lambda p_{\alpha} b \downarrow 0$ ve $-\lambda p_{\alpha} b \uparrow 0$ dır. Dolayısıyla $p_{\alpha} y \xrightarrow{o} 0$ olur. O halde $y \in A_{\mathrm{n_l}}$ dir. Yani $A_{\mathrm{b}} \subseteq A_{\mathrm{n_l}}$ olur.

A birimli sıralı cebir ve $a \in A$ için ${N_a}^{1} = \{p \in OI(A);\ pa = 0\}$ biçiminde tanımlayalım.

3.2.8. Önerme

A birimli sıralı cebir olmak üzere ${N_a}^{1}$, $OI(A)$ nın solid alt kümesidir, yani $p \leq q$, $p \in OI(A)$ ve $q \in {N_a}^{1}$ ise $p \in {N_a}^{1}$ dir.

İspat

$0 \leq p \leq q \Rightarrow -q \leq p \leq q$ dir.

$-pa = (q - p)a \leq qa = 0 \Rightarrow -pa \leq 0$

$\Rightarrow 0 \leq pa$

olur. Diğer yandan,

$pa = (p + q)a \leq 2qa = 0 \Rightarrow pa \leq 0$

dır. Elde edilen bu iki eşitsizlikten $pa = 0$ olur. O halde $p \in {N_a}^{1}$ dir.

3.2.1. Teorem

A birimli sıralı cebir, A_{r} Riesz uzay ve $b \in A^{+}$ olsun. Aşağıdakiler denktir.

(i) $b \in A_{\mathrm{n_l}}$ dir.

(ii) Her $a \in A_{\mathrm{b}}$, $N_a{}^{\mathrm{l}}$, $OI(A)$ içinde sıra kapalıdır yani $OI(A)$ içinde $p_{\alpha} \uparrow p$ ve her α için $p_{\alpha} \in N_a{}^{\mathrm{l}}$ ise $p \in N_a{}^{\mathrm{l}}$ dir.

(iii) Her $a \in A_{\mathrm{b}}$ ve her (p_{α}) neti için $OI(A)$ içinde $p_{\alpha} \uparrow e$ ve her α için $p_{\alpha}a = 0$ ise $a = 0$ dır.

(iv) $a \in A^{+}$ ve $OI(A)$ içinde $p_{\alpha} \uparrow e$ ve her α için $p_{\alpha}a = 0$ olacak şekilde (p_{α}) neti varsa $a \wedge b = 0$ dır.

İspat

(i $\Rightarrow$ ii) $b \in A_{\mathrm{n_l}}$ ise her $(p_{\alpha}) \subseteq OI(A)$ ve $p_{\alpha} \downarrow 0$ için $p_{\alpha}b \xrightarrow{\mathrm{o}} 0$ dır ve $a \in A_{\mathrm{b}}$ ise en az bir $\lambda \in \mathbb{R}^{+}$, $a \in A$ için $-\lambda b \leq a \leq \lambda b$ olur. Ayrıca $p_{\alpha} \in N_a{}^{\mathrm{l}}$ ise her α için $p_{\alpha}a = 0$ dır. $p_{\alpha} \uparrow p$ olduğundan $p_{\alpha} - p \downarrow 0$ dır. O halde $pa = (p - p_{\alpha})a \leq \lambda(p - p_{\alpha})b \downarrow 0$ olur. Buradan $pa \leq 0$ dır. Benzer şekilde, $pa = (p - p_{\alpha})a \geq -\lambda(p - p_{\alpha})b \uparrow 0$ olur. Buradan $0 \leq pa$ dır. O halde $pa = 0$ olur. Yani $p \in N_a{}^{\mathrm{l}}$ dır.

(ii $\Rightarrow$ iii) $a \in A_{\mathrm{b}}$ ve $OI\ (A)$ içinde $p_{\alpha} \uparrow e$ ve her α için $p_{\alpha}a = 0$ dır.

$a = ea = (e - p_{\alpha})a \leq \lambda(\ e - p_{\alpha})b \downarrow 0 \Rightarrow ea = a \leq 0$ dır.

$a = ea = (e - p_{\alpha})a \geq -\lambda(\ e - p_{\alpha})b \uparrow 0 \Rightarrow ea = a \geq 0$ dır.

O halde $a = 0$ olur.

(iii $\Rightarrow$ i) $a \in A_{\mathrm{b}}$ ve $(p_{\alpha}) \subseteq OI(A)$, $p_{\alpha} \uparrow e$ ve her α için $p_{\alpha}a = 0$ iken $a = 0$ olsun. $OI(A)$ içinde $p_{\alpha} \downarrow 0$ ve $p_{\alpha}b \downarrow \geq c$ olsun. A_{r} Riesz uzay olduğu için $p_{\alpha}b \downarrow \geq c^{+}$ dır. $p_{\alpha} \geq 0$, $b \geq 0$ ise $p_{\alpha}b \geq 0$ olur. O halde $c = p_{\alpha}b - (p_{\alpha}b - c)$ şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla $c \in A_{\mathrm{r}}$ olur ve A_{r} Riesz uzay olduğundan $c^{+} \in A_{\mathrm{r}}$ dir. $c^{+} \leq p_{\alpha}b \leq eb = b$ olduğundan $-b \leq c^{+} \leq b$ dır. O halde $\lambda = 1$ seçilirse $c^{+} \in A_{\mathrm{b}}$ dir. Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
c^{+} \leq p_{\alpha}b &\Rightarrow p_{\alpha}{}^{\mathrm{d}}\, c^{+} \leq p_{\alpha}{}^{\mathrm{d}} p_{\alpha}b \\
&\Rightarrow p_{\alpha}{}^{\mathrm{d}} c^{+} \leq 0
\end{aligned}
$$

dır. $0 \leq p_{\alpha}{}^{\mathrm{d}}$ ve $0 \leq c^{+}$ olduğundan $0 \leq p_{\alpha}{}^{\mathrm{d}} c^{+}$ olur. Bu iki eşitsizlikten $p_{\alpha}{}^{\mathrm{d}} c^{+} = 0$ dır. $p_{\alpha} \downarrow 0$ olduğundan $p_{\alpha}{}^{\mathrm{d}} \uparrow e$ dir. Dolayısıyla $c^{+} \in A_{\mathrm{b}}$, $p_{\alpha}{}^{\mathrm{d}} \uparrow e$ ve $p_{\alpha}{}^{\mathrm{d}} c^{+} = 0$ ise $c^{+} = 0$ olduğundan $c \leq 0$ dır. O halde $\inf(p_{\alpha}b) = 0$ dır. Böylece $p_{\alpha}b \downarrow 0$ olur. Ayrıca $-p_{\alpha}b \uparrow 0$ dır. Dolayısıyla $-p_{\alpha}b \leq p_{\alpha}b \leq p_{\alpha}b$ dir. O halde $p_{\alpha}b \xrightarrow{\mathrm{o}} 0$ olur.

(i $\Rightarrow$ iv) $a \in A^+$, $p_\alpha \uparrow e$, $p_\alpha a = 0$ ve $c \leq a, b$ olsun. $p_\alpha c \leq p_\alpha a = 0$ ise $c \leq {p_\alpha}^{\mathrm{d}} c \leq {p_\alpha}^{\mathrm{d}} b \downarrow 0$ dır. $p_\alpha \uparrow e$ ise ${p_\alpha}^{\mathrm{d}} \downarrow 0$ dır. $b \in A^+$ olduğundan ${p_\alpha}^{\mathrm{d}} b \downarrow 0$, $b \in A_{\mathrm{n_l}}$ olduğundan $c \leq 0$ dır. Yani $a \wedge b = 0$ dır.

(iv $\Rightarrow$ iii) $a \in A^+$, $p_\alpha \uparrow e$, $p_\alpha a = 0$ iken $a \wedge b = 0$ olsun. $p_\alpha |a| = |p_\alpha a| = 0$ dır. Ayrıca hipotezden $|a| \wedge |b| = 0$ dir. $a \in A_{\mathrm{b}}$ ve en az bir $\beta \in \mathbb{R}^+$ için $|a| \leq \beta b$ dir.

$$
\begin{aligned}
|a| \leq \beta b &\Rightarrow |a| \wedge |a| \leq \beta b \wedge |a| \\
&\Rightarrow |a| \leq (\beta + 1)(|b| \wedge |a|) = 0 \\
&\Rightarrow |a| \leq 0 \\
&\Rightarrow |a| = 0 \\
&\Rightarrow a = 0
\end{aligned}
$$

elde edilir.

3.2.2. Teorem

A birimli sıralı cebir olsun. $A_{\mathrm{n_l}}$ alt uzayı A_{r} içinde sıra kapalıdır. Özellikle A_{r} Riesz uzayı ise $A_{\mathrm{n_l}}$, A_{r} içinde bir bandtır.

İspat

A_{r} içinde $0 \leq c_\beta \uparrow c$ yi sağlayan $(c_\beta) \subseteq A_{\mathrm{n_l}}$ netini alalım. $(p_\alpha) \subseteq OI(A)$, $p_\alpha \downarrow 0$ ve her α için $d \leq p_\alpha c$ olsun.

$$
\begin{aligned}
d \leq p_\alpha c &= p_\alpha (c - c_\beta) + p_\alpha c_\beta \\
&\leq c - c_\beta + p_\alpha c_\beta
\end{aligned}
$$

dır. $c_\beta \in A_{\mathrm{n_l}}$ olduğundan $p_\alpha c_\beta \downarrow 0$ olur.

$$
\begin{aligned}
d \leq \inf_\alpha \, (c - c_\beta + p_\alpha c_\beta) &\Rightarrow d \leq c - c_\beta = c + (-c_\beta) \\
&\Rightarrow d \leq \inf_\beta \, (c + (-c_\beta)) \\
&\Rightarrow d \leq c + \inf_\beta \, (-c_\beta) \\
&\Rightarrow d \leq c + (-c) \\
&\Rightarrow d \leq 0
\end{aligned}
$$

dır. O halde $p_\alpha c \downarrow 0$ dır. A_{r} Riesz uzay ve $(p_\alpha) \subseteq OI(A)$, $p_\alpha \downarrow 0$ olsun. Eğer $|a| \leq |b|$ ve $b \in A_{\mathrm{n_l}}$ ise $|p_\alpha a| = p_\alpha |a| \leq p_\alpha |b| \xrightarrow{o} 0$ dır ve $p_\alpha a \xrightarrow{o} 0$ olur. O halde $a \in A_{\mathrm{n_l}}$ dir. Dolayısıyla $A_{\mathrm{n_l}}$ bir ideal olur ve $A_{\mathrm{n_l}}$ sıra kapalı olduğundan bir bandtır.

3.2.3. Teorem

A birimli sıralı cebir ve A_{r} Riesz uzay olsun. Aşağıdakiler denktir.

(i) $A_{\mathrm{r}} = A_{\mathrm{n_l}}$

(ii) Her $a \in A_{\mathrm{r}}$, $(p_\alpha) \subseteq OI(A)$, $p_\alpha \uparrow p$ ve her α için $p_\alpha a = 0$ iken $pa = 0$ dır.

(iii) Sıfırdan farklı her $a \in A_{\mathrm{r}}$ ve $0 < q \leq p$ eşitsizliğini sağlayan her $q \in OI(A)$ için $qa \neq 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı $p \in OI(A)$ vardır.

İspat

(i $\Rightarrow$ ii) $A_{\mathrm{r}} = A_{\mathrm{n_l}}$ olsun. $a \in A_{\mathrm{r}}$, $(p_\alpha) \subseteq OI(A)$, $p_\alpha \uparrow p$ ve her α için $p_\alpha a = 0$ kabul edelim. $p_\alpha \uparrow p$ olduğundan $p - p_\alpha \downarrow 0$ dır.

$a \in A_{\mathrm{n_l}} \Rightarrow (p - p_\alpha)a \xrightarrow{o} 0$

$\Rightarrow$ En az bir (b_β), $(c_\beta) \subseteq A$ için $b_\beta \leq (p - p_\alpha)a \leq c_\beta$ ve $(b_\beta) \uparrow 0$, $(c_\beta) \downarrow 0$

$\Rightarrow b_\beta \leq pa - p_\alpha a \leq c_\beta$

$\Rightarrow b_\beta \leq pa \leq c_\beta$

$\Rightarrow \sup\limits_\beta b_\beta \leq pa$ ve $pa \leq \inf\limits_\beta c_\beta$

$\Rightarrow 0 \leq pa$ ve $pa \leq 0$

$\Rightarrow pa = 0$

olur.

(ii $\Rightarrow$ iii) (iii) doğru olmasın. Yani, her sıfırdan farklı $p \in OI(A)$ için en az bir $q' \in OI(A)$, $0 < q' \leq p$ için $q'a = 0$ dır. $D = \{q \in OI(A);\ qa = 0\}$ kümesini düşünelim. Her $q \in D$ için $q \leq q_0 \in OI(A)$ ve $q_0 < e$ olsun. Hipotezden en az bir $q_0{}' \in OI(A)$, $0 < q_0' \leq e - q_0$ için $q_0{}'a = 0$ dır. Buradan $q_0{}' \in D$ olur. Dolayısıyla $q_0{}' \leq q_0$ dır. Böylece,

$0 < q_0{}' \leq e - q_0 \leq e - q_0{}' \Rightarrow 0 \leq (q_0{}')^2 = q_0{}' \leq q_0{}' - (q_0{}')^2 = q_0{}' - q_0{}' = 0$

$\Rightarrow 0 \leq q_0{}' \leq 0$

$\Rightarrow q_0{}' = 0$

dır. O halde bu bir çelişkidir. Yani $q \leq q_0 < e$ olacak şekilde q_0 yoktur. … $(*)$

Şimdi, r başka bir üst sınır olsun. Her $q \in D$ için $q \leq r$ iken $s = r \wedge e$ olsun. $0 \leq q \leq s \leq e$ ise $(*)$ ifadesinden $s = e$ dir. Yani $s = r \wedge e = e$ ise $e \leq r$ dir. O halde $\sup D = e$ olur. Bundan dolayı, $D \uparrow e$ dir. Hipotezden $ea = a = 0$ olur.

(iii $\Rightarrow$ i) $a \in A^+$, $(p_\alpha) \subseteq OI(A)$, $p_\alpha \downarrow 0$ ve her α için $c \leq p_\alpha a$ olsun. $c = p_\alpha a - (p_\alpha a - c)$ şeklinde yazılabilir. O halde $c \in A_{\mathrm{r}}$ dir. A_{r} Riesz uzayı olduğundan $c^+ \leq p_\alpha a$ olur. Buradan

${p_\alpha}^{\mathrm{d}} c^+ \leq {p_\alpha}^{\mathrm{d}} p_\alpha a$ ise ${p_\alpha}^{\mathrm{d}} c^+ \leq 0$ dir. Ayrıca $0 \leq {p_\alpha}^{\mathrm{d}}$ ve $0 \leq c^+$ olduğundan $0 \leq {p_\alpha}^{\mathrm{d}} c^+$ dır. Dolayısıyla ${p_\alpha}^{\mathrm{d}} c^+ = 0$ olur. $0 < c^+$ olsun. $c \in A_{\mathrm{r}}$ olduğundan hipotezden $0 < q \leq p$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $p \in OI(A)$ için $0 < qc^+$ dır. Keyfi α_0 için $0 < {p_{\alpha_0}}^{\mathrm{d}} p \leq p$ dir. Hipotezden $0 < p_{\alpha_0} p c^+$ dir. $0 = p_{\alpha_0} c^+ p$ olur. O halde çelişki elde edilir.

3.2.9. Önerme

A Dedekind tam birimli sıralı cebir olsun. Eğer $a \in A^+$, tersi A da olan bir b elemanı tarafından domine ediliyorsa a sıra süreklidir.

İspat

$OI(A)$ içinde $p_\alpha \downarrow 0$ ve $c \in A$ için $c \leq p_\alpha a$ olsun. b, a yı domine ettiği için $a \leq b$ dir. Açıkça $c \leq p_\alpha b$ olur. Dolayısıyla $cb^{-1} \leq p_\alpha$ dır. Lemma 2.2.2 den $OI(A)$ içinde $p_\alpha \downarrow 0$ olduğundan A içinde de $p_\alpha \downarrow 0$ olur ve $cb^{-1} \leq 0$ dır. O halde $c \leq 0$ dir. Dolayısıyla $p_\alpha a \downarrow 0$ olur. Yani $a \in A_{\mathrm{n_l}}$ dir. Benzer şekilde $a \in A_{\mathrm{n_r}}$ olduğu da gösterilir. O halde a sıra süreklidir.

A Dedekind tam birimli sıralı cebir olsun. Önerme 3.2.4 den dolayı A_{r} Dedekind tam Riesz uzayı, Teorem 3.2.2 den $A_{\mathrm{n_l}}$ band ve Dedekind tam uzaylarda her band, projeksiyon band olduğundan $A_{\mathrm{r}} = A_{\mathrm{n_l}} \oplus {A_{\mathrm{n_l}}}^{\mathrm{d}}$ biçiminde yazılabilir ve ${A_{\mathrm{n_l}}}^{\mathrm{d}} = A_{\mathrm{s_l}}$ ile gösterilir.

3.2.4. Tanım

A Dedekind tam birimli sıralı cebir olsun. $A_{\mathrm{r}} = A_{\mathrm{n_l}} \oplus A_{\mathrm{s_l}}$ biçimde yazıldığında $A_{\mathrm{s_l}}$ nin her bir elemanına *l-singüler eleman* denir. Benzer olarak $A_{\mathrm{s_r}}$ ve A_{s} tanımlanabilir.
$A_{\mathrm{n_l}}$ ve $A_{\mathrm{n_r}}$, A_{r} içinde band olduğundan $A_{\mathrm{n_l}} \cap A_{\mathrm{n_r}} = A_{\mathrm{n}}$ de A_{r} içinde bandtır. Dolayısıyla $A_{\mathrm{r}} = A_{\mathrm{n}} \oplus {A_{\mathrm{n}}}^{\mathrm{d}} = A_{\mathrm{n}} \oplus A_{\mathrm{s}}$ olur.

3.2.1. Lemma

A Dedekind tam birimli sıralı cebir olsun.
${A_{\mathrm{s_l}}}^{\mathrm{o}} = \{a \in A_{\mathrm{r}};\ \exists (p_\alpha) \subseteq OI(A)$ ve $p_\alpha \uparrow e$ için $p_\alpha a = 0\}$
kümesi A_{r} içinde ideal, $A_{\mathrm{s_l}}$ içinde sıra yoğundur. Ayrıca ${A_{\mathrm{s_l}}}^{\mathrm{o}} = \{0\}$ ise $A_{\mathrm{r}} = A_{\mathrm{n_l}}$ dir.

İspat

$a, b \in A_{s_l}{}^{o}$ ve $(p_\alpha), (q_\beta) \subseteq OI(A)$ için $p_\alpha \uparrow e$, $q_\beta \uparrow e$ ve $p_\alpha a = q_\beta b = 0$ olsun. Her $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için $p_\alpha q_\beta \uparrow e$ ve $p_\alpha q_\beta(\lambda a + \mu b) = 0$ dır. $A_{s_l}{}^{o}$, A_r nin alt vektör uzayıdır.

Her $b \in A_r$ için $|b| \leq |a|$ iken $a \in A_{s_l}{}^{o}$ ise $(p_\alpha) \subseteq OI(A)$ ve $p_\alpha \uparrow e$ için $p_\alpha a = 0$

$|b| \leq |a| \Rightarrow p_\alpha |b| \leq p_\alpha |a| \ = \ |p_\alpha a|$

$\Rightarrow |p_\alpha b| \leq 0$

$\Rightarrow 0 \leq |p_\alpha b| \leq 0$

$\Rightarrow p_\alpha b = 0$

dır. O halde $b \in A_{s_l}{}^{o}$ olur. Dolayısıyla $A_{s_l}{}^{o}$ idealdir.

$a \in A_{s_l}{}^{o} \Rightarrow |a| \in A_{s_l}{}^{o}$

$\Rightarrow 0 = p_\alpha |a|$

$\Rightarrow 0 = p_\alpha |a_{n_l}| + p_\alpha |a_{s_l}|$

$\Rightarrow p_\alpha |a_{n_l}| = 0$ ve $p_\alpha |a_{s_l}| = 0$

dır.

$p_\alpha \uparrow e$ ve $a \in A_{s_l}{}^{+}$ ise,

$a \in A_{n_l} \Rightarrow (p_\alpha) \subseteq OI(A)$, $p \downarrow 0$ için $p_\alpha a \overset{o}{\rightarrow} 0$ dır.

$p_\alpha \uparrow e \Rightarrow e - p_\alpha \downarrow 0$

$\Rightarrow a - p_\alpha a \overset{o}{\rightarrow} 0$

dır. Ayrıca $a - p_\alpha a \downarrow$ olduğundan $\inf(a - p_\alpha a) = 0$ olur. Dolayısıyla $a - p_\alpha a \downarrow 0$ dır. O halde $p_\alpha a \uparrow a$ olur. $\ldots(*)$

$p_\alpha |a_{n_l}| = 0$ ise $p_\alpha \uparrow e$ ve $(*)$ dan dolayı $|a_{n_l}| = 0$ dir. O halde $a_{n_l} = 0$ dır.

Ayrıca $a = a_{n_l} + a_{s_l}$ ve $a_{n_l} = 0$ olduğundan $a = a_{s_l}$olur. Bu durumda $a \in A_{s_l}$ dir.

O halde $A_{s_l}{}^{o} \subseteq A_{s_l}$ dir.

Şimdi, $0 < c \in A_{s_l}$ olduğunu kabul edelim. Teorem 3.2.1 (iii) den $(P_\alpha) \subseteq OI(A)$, $OI(A)$ içinde $P_\alpha \uparrow e$, $P_\alpha d = 0$ ve bir $0 < \xi$ için $0 < d \leq \xi c$ olacak şekilde bir $d \in A_r$ bulunabilir.

$0 < d \leq \xi c \Rightarrow 0 < \frac{d}{\xi} \leq c$

$\Rightarrow \frac{d}{\xi} = c - (c - \frac{d}{\xi})$

olduğundan $\frac{d}{\xi} \in A_r$ dir.

$\frac{d}{\xi} \in A_{\mathrm{r}}$, en az bir $(p_\alpha) \subseteq OI(A)$ ve $p_\alpha \uparrow e$ için $p_\alpha \frac{d}{\xi} = 0$ dır. $0 < \frac{d}{\xi}$ olduğundan $\frac{d}{\xi} \in A_{s_1}{}^{o}_{+}$ ve $\frac{d}{\xi} \leq c$ olur. Dolayısıyla $A_{s_1}{}^{o}$ ideali, A_{s_1} içinde sıra yoğundur.

3.2.5. Tanım

E Dedekind tam Riesz uzay ve (x_α) sıra sınırlı bir net olmak üzere,

$\bigvee_{\alpha} \bigwedge_{\alpha \leq \beta} x_\beta$ elemanına x_α *nın alt limiti* denir ve $\lim_\alpha \inf x_\alpha$ biçiminde gösterilir.

$\bigwedge_{\alpha} \bigvee_{\alpha \leq \beta} x_\beta$ elemanına x_α *nın üst limiti* denir ve $\lim_\alpha \sup x_\alpha$ biçiminde gösterilir.

3.2.10. Önerme

E Dedekind tam Riesz uzay ve (x_α) sıra sınırlı bir net olsun. $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ için gerek ve yeter şart $x = \lim_\alpha \sup x_\alpha = \lim_\alpha \inf x_\alpha$ dır.

İspat

$(\Rightarrow)$ $x_\alpha \xrightarrow{o} x \Rightarrow$ En az bir $(k_\alpha) \subseteq E$ olmak üzere $|x_\alpha - x| \leq k_\alpha \downarrow 0$

$|x_\alpha - x| \leq k_\alpha$ ise $-k_\alpha \leq x_\alpha - x \leq k_\alpha$dir.

$$x_\alpha - x \leq k_\alpha \Rightarrow x_\alpha \leq k_\alpha + x$$

$$\Rightarrow \bigvee_{\alpha \leq \beta} x_\beta \leq \bigvee_{\alpha \leq \beta} (k_\beta + x) = x + \bigvee_{\alpha \leq \beta} k_\beta$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{\alpha} \bigvee_{\alpha \leq \beta} x_\beta \leq x + \bigwedge_{\alpha} \bigvee_{\alpha \leq \beta} k_\beta = x + \bigwedge_{\alpha} k_\alpha = x + 0$$

$$\Rightarrow \lim_\alpha \sup x_\alpha \leq x$$

Benzer şekilde,

$$-k_\alpha \leq x_\alpha - x \Rightarrow x - k_\alpha \leq x_\alpha$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{\alpha \leq \beta} (x - k_\beta) \leq \bigwedge_{\alpha \leq \beta} x_\beta$$

$$\Rightarrow x - \bigvee_{\alpha \leq \beta} k_\beta \leq \bigwedge_{\alpha \leq \beta} x_\beta$$

$$\Rightarrow x - \bigwedge_{\alpha} \bigvee_{\alpha \leq \beta} k_\beta = x - \bigwedge_{\alpha} k_\alpha = x - 0 \leq \bigvee_{\alpha} \bigwedge_{\alpha \leq \beta} x_\beta$$

$$\Rightarrow x \leq \bigvee_{\alpha} \bigwedge_{\alpha \leq \beta} x_\beta$$

$$\Rightarrow x \leq \lim_\alpha \inf x_\alpha$$

Ayrıca her $\alpha \le \beta$ ve keyfi sabit $\gamma \ge \alpha$ için,

$$\bigwedge_{\alpha \le \beta} x_\beta \le x_\gamma \le \bigvee_{\alpha \le \beta} x_\beta \Rightarrow \bigwedge_{\alpha \le \beta} x_\beta \le x_\gamma \le \bigwedge_\alpha \bigvee_{\alpha \le \beta} x_\beta$$

$$\Rightarrow \bigvee_\alpha \bigwedge_{\alpha \le \beta} x_\beta \le x_\gamma \le \bigwedge_\alpha \bigvee_{\alpha \le \beta} x_\beta$$

$$\Rightarrow \bigvee_\alpha \bigwedge_{\alpha \le \beta} x_\beta \le \bigwedge_\alpha \bigvee_{\alpha \le \beta} x_\beta$$

$$\Rightarrow \lim_\alpha \inf x_\alpha \le \lim_\alpha \sup x_\alpha$$

Yani $x \le \lim_\alpha \inf x_\alpha \le \lim_\alpha \sup x_\alpha \le x$ dır. O halde $x = \lim_\alpha \inf x_\alpha = \lim_\alpha \sup x_\alpha$ olur.

($\Leftarrow$) $\lim_\alpha \sup x_\alpha = \bigwedge_\alpha \bigvee_{\alpha \le \beta} x_\beta = x$ olsun.

$y_\alpha = \bigvee_{\alpha \le \beta} x_\beta$ ve $y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2} \in (y_\alpha)$ için $y_{\alpha_3} \le y_{\alpha_1}$ ve $y_{\alpha_3} \le y_{\alpha_2}$ olmak üzere $y_{\alpha_3} \vee y_{\alpha_3} \le y_{\alpha_1} \vee y_{\alpha_2}$

dir. O halde $y_{\alpha_3} \in (y_\alpha)$ olur. Yani $y_\alpha \downarrow$ dır. $\inf y_\alpha = x$ olduğundan $y_\alpha \downarrow x$ olur.

Aynı şekilde, $\lim_\alpha \inf x_\alpha = \bigvee_\alpha \bigwedge_{\alpha \le \beta} x_\beta = x$ olsun.

$z_\alpha = \bigwedge_{\alpha \le \beta} x_\beta$ ve $z_{\alpha_1}, z_{\alpha_2} \in (z_\alpha)$ için $z_{\alpha_1} \le z_{\alpha_3}$ ve $z_{\alpha_2} \le z_{\alpha_3}$ olmak üzere $z_{\alpha_1} \wedge z_{\alpha_2} \le z_{\alpha_3} \wedge z_{\alpha_3}$

dır. O halde $z_{\alpha_3} \in (z_\alpha)$ olur. Yani $z_\alpha \uparrow$ dır. $\sup z_\alpha = x$ olduğundan $z_\alpha \uparrow x$ olur. Şimdi,

$x_\alpha \le \bigvee_{\alpha \le \beta} x_\beta$ ve $z_\alpha \le x$ olduğundan $-x \le -z_\alpha$ dır. O halde $x_\alpha - x \le \bigvee_{\alpha \le \beta} x_\beta - z_\alpha$ olur.

$$x_\alpha - x \le \bigvee_{\alpha \le \beta} x_\beta - \bigwedge_{\alpha \le \beta} x_\beta$$

$$= y_\alpha - z_\alpha$$

dır. $x \le y_\alpha$ ve $z_\alpha \le x_\alpha$ olduğundan $-x_\alpha \le -z_\alpha$ dır. Dolayısıyla $x - x_\alpha \le y_\alpha - z_\alpha$ olur.

$$x - x_\alpha \le \bigvee_{\alpha \le \beta} x_\beta - \bigwedge_{\alpha \le \beta} x_\beta$$

$$= y_\alpha - z_\alpha$$

dır. O halde $|x_\alpha - x| \le y_\alpha - z_\alpha$ dır. $y_\alpha - z_\alpha = u_\alpha$ olsun. $y_\alpha \downarrow$ ve $z_\alpha \uparrow$ olduğundan $-z_\alpha \downarrow$ dır. O halde $y_\alpha - z_\alpha \downarrow$ elde edilir. Yani $u_\alpha \downarrow$ dır. Ayrıca $y_\alpha \downarrow x$ ve $z_\alpha \uparrow x$ olduğundan $-z_\alpha \downarrow -x$ olur. Dolayısıyla $y_\alpha - z_\alpha \downarrow 0$ elde edilir. O halde $u_\alpha \downarrow 0$ olur. Yani $|x_\alpha - x| \le u_\alpha \downarrow 0$ dır. O halde $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ olur.

3.2.4. Teorem

A Dedekind tam birimli sıralı cebir ve $a \in A^+$ olsun.

$$a_{n_l} = \inf(\lim_\alpha \inf p_\alpha a) = \inf(\lim_\alpha \sup p_\alpha a) = \inf(\sup(p_\alpha a))$$

eşitlikleri A_r içinde doğrudur.

(Burada infimumlar $(p_\alpha) \subseteq OI(A)$ ve $p_\alpha \uparrow e$ olmak üzere (p_α) netleri üzerinden alınıyor.)

İspat

Keyfi bir $b \in A^+$, $(p_\alpha) \subseteq OI(A)$ ve $p_\alpha \uparrow e$ için,

$T: A^+ \to A^+$

$$b \to T(b) = \inf(\sup_\alpha(p_\alpha b))$$

biçiminde tanımlayalım. Her $b \in A^+$, $(p_\alpha) \subseteq OI(A)$ ve $p_\alpha \uparrow e$ için $p_\alpha \leq e$ olduğundan $p_\alpha b \leq b$ dir. A Dedekind tam olduğundan $\sup_\alpha (p_\alpha b) \in A^+$ vardır.

Ayrıca $(p_\alpha) \subseteq OI(A)$, $p_\alpha \uparrow e$ için $0 \leq \sup_\alpha (p_\alpha b)$ olduğundan $\inf_{p_\alpha}(\sup_\alpha(p_\alpha b)) \in A^+$ vardır. O halde T anlamlıdır. Ayrıca T iyi tanımlıdır.

$b \in A_{n_l}{}^+$ için $Tb = b$ ve $c \in A^+$ için $0 \leq Tc \leq c$ dir.

$b \in A_{n_l}{}^+ \Rightarrow$ Her $(r_\alpha) \subseteq OI(A)$, $r_\alpha \downarrow 0$ için $r_\alpha b \xrightarrow{o} 0$

$\Rightarrow$ Her $(r_\alpha) \subseteq OI(A)$, $r_\alpha \downarrow 0$, en az bir (b_α), $(c_\alpha) \subseteq A$ için, $b_\alpha \leq r_\alpha b \leq c_\alpha$, $(b_\alpha) \uparrow 0$, $(c_\alpha) \downarrow 0$

$\Rightarrow$ Her $(r_\alpha) \subseteq OI(A)$, $r_\alpha \downarrow 0$, en az bir (b_α), $(c_\alpha) \subseteq A$ için,

$b - c_\alpha \leq b - r_\alpha b = (e - r_\alpha)b \leq b$

elde edilir. $p_\alpha = (e - r_\alpha)$ olmak üzere $p_\alpha \uparrow e$ dir. Buradan $b = \sup(b - c_\alpha) \leq \sup(p_\alpha b)$ ve böylece $b \leq \inf(\sup(p_\alpha b))$ olur. Diğer yandan $\sup(p_\alpha b) \leq b$ olduğundan $\inf(\sup(p_\alpha b) \leq b$ elde edilir. O halde $Tb = b$ dir.

Her α için $p_\alpha \leq e$ ise $p_\alpha c \leq c$ olur.

$$\sup_\alpha(p_\alpha c) \leq c \Rightarrow \inf_{p_\alpha}(\sup_\alpha(p_\alpha c)) \leq c$$

dir. O halde $Tc \leq c$ dir.

$b, c \in A^+$ olsun.

$$\begin{aligned} T(b + c) &= \inf_{p_\alpha}(\sup_\alpha(p_\alpha b + p_\alpha c)) \\ &= \inf_{p_\alpha}(\sup_\alpha(p_\alpha b) + \sup_\alpha(p_\alpha c)) \\ &\geq Tb + Tc \end{aligned}$$

dir. Diğer yandan, $OI(A)$ içinde $p_\alpha \uparrow e$ ve $q_\beta \uparrow e$, $(p_\alpha q_\beta)_{(\alpha,\beta)}$ neti için her (α, β), $p_\alpha q_\beta \leq d$ olsun.

$$p_\alpha q_\beta \leq d \Rightarrow \sup_\alpha(p_\alpha q_\beta) = \sup_\alpha p_\alpha\, q_\beta = e q_\beta \leq d$$

$$\Rightarrow \sup_{\beta}(q_\beta) \leq d$$

$$\Rightarrow e \leq d$$

dir. Buradan,

$$T(b+c) \leq \sup_{\alpha,\beta}(p_\alpha\, q_\beta(b+c))$$

$$= \sup_{\alpha,\beta}(p_\alpha\, q_\beta b) + \sup_{\alpha,\beta}(p_\alpha\, q_\beta c)$$

$$\leq \sup_{\alpha}(p_\alpha\, b) + \sup_{\beta}(q_\beta\, c)$$

dır. p_α, q_β keyfi olduğundan,

$$T(b+c) \leq \inf_{p_\alpha}(\sup_{\alpha}(p_\alpha\, b) + \sup_{\beta}(q_\beta\, c))$$

$$= Tb + \inf_{q_\beta}(\sup_{\beta}(q_\beta\, c))$$

$$= Tb + Tc$$

dir. O halde T toplamsaldır.

[3] Teorem 1.7 Kantorovic teoreminden $\hat{T}: A_r \to A_r$ genişlemesi vardır ve $0 \leq \hat{T} \leq I$ dır.

Her $c \in {A_r}^+$ için $0 \leq \hat{T} = Tc \leq c = Ic$ dir.

$b \in A_{n_l} \subseteq A_r$ Riesz uzay olduğundan $b^+, b^- \in A^+$ için $b = b^+ - b^-$ şeklinde yazılabilir.

$$\hat{T}b = \hat{T}(b^+ - b^-)$$

$$= \hat{T}(b^+) - \hat{T}(b^-)$$

$$= T(b^+) - T(b^-)$$

$$= b^+ - b^-$$

$$= b$$

dir. $b \in {A_{s_l}}^o$ olsun.

$$p_\alpha \uparrow e \text{ iken } p_\alpha b = 0 \Rightarrow \sup_{\alpha}(p_\alpha b) = 0$$

$$\Rightarrow \inf_{p_\alpha}(\sup_{\alpha}(p_\alpha b)) = 0$$

$$\Rightarrow Tb = 0$$

dir. Dolayısıyla T sıra süreklidir.

Yani ${A_{s_l}}^o$ üzerinde T sıfırdır. Lemma 3.2.1 den ${A_{s_l}}^o$, A_{s_l} içinde sıra yoğundur. Keyfi $b \in A_{s_l}$ için, $b_\beta \xrightarrow{o} b$ olacak şekilde $(b_\beta) \subseteq {A_{s_l}}^o$ vardır. Böylece T sıra sürekli olur. Yani $T(b_\beta) \xrightarrow{o} Tb$ dir. Buradan $T(b_\beta) = 0 \to Tb$ olur. Dolayısıyla $Tb = 0$ bulunur. Sonuç olarak keyfi $a \in A^+$ için,

$$a_{n_l} = Ta_{n_l}$$

$= \ Ta$

$= \inf(\sup(p_\alpha a))$

$\geq \inf(\lim \sup p_\alpha a)$

$\geq \inf(\lim \inf p_\alpha a_{n_l})$

$= a_{n_l}$

elde edilir.

3.2.2. Sonuç

Teorem 3.2.4 de verilen hipotezler altında A_r içinde her $(p_\alpha) \subseteq OI(A)$ ve $p_\alpha \downarrow 0$ için,

$a_{s_l} = \sup\limits_{p_\alpha}(\inf\limits_{\alpha}(p_\alpha a)) = \sup\limits_{p_\alpha}(\lim\limits_{\alpha} \inf(p_\alpha a)) = \sup\limits_{p_\alpha}(\lim\limits_{\alpha} \sup(p_\alpha a))$

sağlanır.

İspat

Her $(p_\alpha) \subseteq OI(A)$ ve $p_\alpha \downarrow 0$ olmak üzere,

$a_{s_l} = a - a_{n_l}$

$= a - \inf\limits_{q_\alpha \uparrow e}(\sup\limits_{\alpha}(q_\alpha a))$

$= a + \sup\limits_{q_\alpha \uparrow e}(\inf\limits_{\alpha}(-q_\alpha a))$

$= \sup\limits_{q_\alpha \uparrow e}(\inf\limits_{\alpha}(a - q_\alpha a))$

$= \sup\limits_{q_\alpha \uparrow e}(\inf\limits_{\alpha}({q_\alpha}^d a))$

$= \sup\limits_{p_\alpha \downarrow 0}(\inf\limits_{\alpha}(p_\alpha a))$

dir. $p_\alpha \downarrow 0$ iken,

$a_{s_l} = a - a_{n_l}$

$= a - \inf\limits_{q_\alpha \uparrow e}(\lim\limits_{\alpha} \sup(q_\alpha a))$

$= a + \sup\limits_{q_\alpha \uparrow e}(\lim\limits_{\alpha} \inf -q_\alpha a)$

$= \sup\limits_{q_\alpha \uparrow e}(\lim\limits_{\alpha} \inf(a - q_\alpha a))$

$= \sup\limits_{p_\alpha \downarrow 0}(\lim\limits_{\alpha} \inf p_\alpha a)$

dir. O halde $\sup(\inf\limits_{\alpha}(p_\alpha a)) = \sup(\lim\limits_{\alpha} \inf p_\alpha a)$ olur.

3.2.11. Önerme

A Dedekind tam birimli sıralı cebir ve $a \in A$ olsun. ${N_{a_{s_l}}}^{l}$, a nın l-sıra sürekli eleman olduğu, $OI(A)$ nın en geniş solid alt kümesidir.

İspat

J, $OI(A)$ nın a elemanının l-sıra sürekli olduğu herhangi bir alt küme olmak üzere, $(p_\alpha) \subseteq {N_{a_{s_l}}}^{l}$ ve $p_\alpha \downarrow 0$ olsun. Her α için $c \leq p_\alpha$, $c \in OI(A)$ ise $p_\alpha \in {N_{a_{s_l}}}^{l}$ ve ${N_{a_{s_l}}}^{l}$ solid olduğundan $c \in {N_{a_{s_l}}}^{l}$ dir. O halde ${N_{a_{s_l}}}^{l}$ içinde $\inf p_\alpha = 0$ olur. $A = A_{n_l} \oplus A_{s_l}$ olmasından dolayı $a = a_{n_l} + a_{s_l}$, $a_{n_l} \in A_{n_l}$, $a_{s_l} \in A_{s_l}$ biçiminde yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} p_\alpha a &= p_\alpha(a_{n_l} + a_{s_l}) \\ &= p_\alpha a_{n_l} + p_\alpha a_{s_l} \end{aligned}$$

dır. Şimdi $q \in J$ ve $q \notin {N_{a_{s_l}}}^{l}$ olsun. O halde $q a_{s_l} \neq 0$ dır.

$a_{s_l} \notin A_{n_l} \Rightarrow \exists c \in A_{a_{s_l}}, \exists p_\alpha\, [p_\alpha \uparrow e, p_\alpha c = 0 \wedge c \neq 0]$,

$c \in A_{a_{s_l}}$ ise $-\lambda|a_{s_l}| \leq c \leq \lambda|a_{s_l}|$

önermeleri doğrudur. $|\frac{c}{\lambda}| = b$ olsun. O halde $0 < b \leq |a_{s_l}| \leq |a|$ ve $0 < qb$ dir. $q_\alpha = p_\alpha q$ olmak üzere $q_\alpha \uparrow q$ dır. a, J içinde l-sıra sürekli olduğundan b, J içinde l-sıra süreklidir, $q - q_\alpha \downarrow 0$ için $qb = (q - q_\alpha)b \xrightarrow{o} 0$ ve $qb = 0$ dır. O halde bu $0 < qb$ olmasıyla çelişir. İspat tamamlanır.

3.2.5. Teorem

E Dedekind tam Riesz uzay, $T: E \rightarrow E$ bir operatör olsun. T nin l-sıra sürekli olması için gerek ve yeter şart T nin regüler operatör olmasıdır.

İspat

$(\Rightarrow)$ T, l-sıra sürekli olsun.

$P_n = \begin{cases} e, & n = 1 \\ 0, & n \geq 0 \end{cases}$ biçiminde tanımlansın. $P_n \downarrow 0$ ve $P_n T \xrightarrow{o} 0$ ise en az bir (S_n), $(K_n) \subseteq L(E)$ için $S_n \leq P_n T \leq K_n$ ve $(S_n) \uparrow 0$, $(K_n) \downarrow 0$ dır. $n = 1$ için $S_1 \leq P_1 T \leq K_1$ ise $S_1 \leq T \leq K_1$ ve $0 \leq K_1$ olur. Yani $T \leq K_1$ dir. O halde $T = K_1 - (K_1 - T)$ ve $0 \leq K_1$, $0 \leq K_1 - T$ olduğundan T regüler operatördür.

($\Leftarrow$) T regüler operatör olsun. T regüler ve E Dedekind tam olduğundan $|T|$ pozitif lineer operatörü vardır. Keyfi $(P_\alpha) \subseteq OI(L(E))$ ve $P_\alpha \downarrow 0$ olsun. Lemma 2.2.2 den $L(E)$ içinde $P_\alpha \downarrow 0$ dır. $-P_\alpha|T| \leq P_\alpha T \leq P_\alpha|T|$ ve $-P_\alpha|T| \uparrow 0$, $P_\alpha|T| \downarrow 0$ dır. O halde $P_\alpha T \overset{o}{\to} 0$ olur. Yani T l-sıra süreklidir.

3.2.6. Teorem

E Dedekind tam Riesz uzay, $T: E \to E$ operatör olsun. Aşağıdakiler denktir.

(i) T, $L(E)$ içinde r-sıra süreklidir.

(ii) T, $L(E)$ içinde sıra süreklidir.

(iii) T sıra sürekli operatördür.

İspat

(ii $\Rightarrow$ i) T, $L(E)$ içinde sıra sürekli olsun. O halde $L(E)_{\mathrm{n}} = L(E)_{\mathrm{n_l}} \cap L(E)_{\mathrm{n_r}}$ olduğundan T, r-sıra süreklidir.

(iii $\Rightarrow$ ii) T sıra sürekli operatör olsun. O halde T sıra sınırlı olur ve E Dedekind tam Riesz uzay olduğundan $|T|$ vardır. Her $(P_\alpha) \subseteq OI(L(E))$ ve $P_\alpha \downarrow 0$ için,

$-P_\alpha|T| \leq P_\alpha T \leq P_\alpha|T|$ ve $-|T|P_\alpha \leq TP_\alpha \leq |T|P_\alpha$ için $(-P_\alpha|T|) \uparrow 0$, $(P_\alpha|T|) \downarrow 0$ ve $(-|T|P_\alpha) \uparrow 0$, $(|T|P_\alpha) \downarrow 0$ olduğundan $P_\alpha T \overset{o}{\to} 0$ ve $TP_\alpha \overset{o}{\to} 0$ olur. T, $L(E)$ içinde hem r-sıra sürekli hem l-sıra süreklidir. O halde $L(E)_{\mathrm{n}} = L(E)_{\mathrm{n_l}} \cap L(E)_{\mathrm{n_r}}$ olduğundan T, $L(E)$ içinde sıra süreklidir.

(i $\Rightarrow$ iii) T, $L(E)$ içinde r-sıra sürekli ve T pozitif olsun. $x \in E^+$için $Tx = 0$ ise, her $z \in {B_{\mathrm{x}}}^+$ için $Tz = 0$ olduğunu gösterelim. $z \in {B_{\mathrm{x}}}^+$ ise [3] Teorem 1.38 den $z \wedge nx \uparrow z$ dir. $y_{\mathrm{n}} = (nx - z)^-$ ve $P_{\mathrm{y_n}}$, $B_{\mathrm{y_n}}$ nin tanımladığı projeksiyonlar olarak tanımlansın. Her *n* için, $z - nx \leq P_{\mathrm{y_n}}(y_{\mathrm{n}}) \leq P_{\mathrm{y_n}}(z)$ olur. Buradan $(I - P_{\mathrm{y_n}})(z) \leq nx$ elde edilir. E Archimedian Riesz uzay olduğundan $(I - P_{\mathrm{y_n}})(z) = 0$ dır. Böylece $T(I - P_{\mathrm{y_n}})(z) = 0$ olur. Ayrıca, her *n* ve *y*, $y_0 \in E^+$ için $0 \leq y_0 \leq P_{\mathrm{y_n}}(y) = 0$ olsun.

$$
\begin{aligned}
nx \leq (n+1)x &\Rightarrow nx - z \leq (n+1)x - z \\
&\Rightarrow (z - (n+1)x) \vee 0 \leq (z - nx) \vee 0 \\
&\Rightarrow ((n+1)x - z)^- \leq (nx - z)^- \\
&\Rightarrow y_{\mathrm{n+1}} \leq y_{\mathrm{n}}
\end{aligned}
$$

dir. O halde $y_{\mathrm{n}} \downarrow$ olur. Yani $P_{\mathrm{y_n}} \downarrow$ dir.

$nx \in B_x$, $z \in B_x$ için $y_n = (nx - z) \wedge 0 \le nx - z$ olduğundan $nx - z \in B_x$ dir. Yani $y_n \in B_x$ olur. $B_{y_n} \subseteq B_x$ dir. Her n için $P_{y_n}(y) \in B_{y_n} \subseteq B_x$ olur. Dolayısıyla $y_0 \in B_{y_n}$ ise $y_0 \in B_x$ dir. Her n için $(nx - z)^+ \perp y_n$ olduğundan $(nx - z)^+ \perp y_0$ veya $(x - \frac{z}{n})^+ \perp y_0$ dır.

$0 \le x - (x - \frac{z}{n})^+ \le \frac{1}{n} z$ ise E Archimedian Riesz uzay olduğundan $x - (x - \frac{z}{n})^+ \downarrow 0$ dır. Dolayısıyla $(x - \frac{z}{n})^+ \uparrow x$ olur. Buradan $x \perp y_0$ dır. $x \perp y_0$ ise $y_0 \in {B_x}^d$ ve $y_0 \in B_x$ olduğundan $y_0 = 0$ dır. O halde $\inf P_{y_n} = 0$ olur. Yani $P_{y_n} \downarrow 0$ dır. T, r-sıra sürekli ve pozitif olduğundan,

$$Tz = T(I - P_{y_n})(z) + TP_{y_n}(z)$$
$$= TP_{y_n}(z) \downarrow 0$$

dır. O halde $Tz = 0$ dır.

Her $w \in E^+$ için $P_x(w) \in {B_x}^+$ olduğundan $TP_x(w) = 0$ dır. Keyfi w için, $w = w^+ - w^-$ şeklinde yazılabilir. $TP_x(w^+) = 0$ ve $TP_x(w^-) = 0$ olduğundan $TP_x(w) = 0$ olur. Dolayısıyla $TP_x = 0$ dır. T pozitif olsun. Her $x \in E^+$ için $Tx = 0$ ise $TP_x = 0$ olduğu gösterildi. Şimdi, olmayana ergi yöntemi kullanılarak, T sıra sürekli olmasın. $N_s = \{x \in E;\ |S|(|x|) = 0\}$ ve ${N_s}^d = C_s$ olmak üzere [3] Teorem 4.9 dan dolayı $0 < S \le T$ ve $C_s = \{0\}$ olacak şekilde S operatörü vardır. T r-sıra sürekli olduğundan S de r-sıra süreklidir. Bir önceki teoremden S l-sıra süreklidir. O halde S sıra sürekli elemandır. $C_s = \{0\}$ olduğundan ${C_s}^d = ({N_s}^d)^d = E$ dir. O halde N_s, E içinde sıra yoğun idealdir. Buradan, N_s içinde kesin sıfırdan büyük bir $\{z_\beta\}$ maximal disjoint sistem vardır. Yukarıdaki ispattan her β için $S(z_\beta) = 0$ iken $SP_{z_\beta} = 0$ dır.

$D = \{\sum_{i=1}^{n} P_{z_{\beta_i}}, n \in \mathbb{N}\}$ kümesi tanımlansın. $d_1 = \sum_{i=1}^{n} P_{z_{\beta_i}}$ ve $d_2 = \sum_{j=1}^{m} P_{z_{\alpha_j}}$ olsun.

$d \in D$ için,

$$z_{\gamma_k} = \begin{cases} z_{\beta_i}, & k = 1,2,\dots,n \\ z_{\alpha_j}, & k = n+1,\dots,n+m \end{cases}$$

tanımlansın. $k \in 1, 2, \dots, n+m$ için $z_{\beta_1}, \dots, z_{\beta_n}, z_{\alpha_{n+1}}, \dots, z_{\alpha_{n+m}}$ dir. $d = \sum_{k=1}^{n+m} P_{z_{\gamma_k}}$ alınırsa, $d \in D$ olacak şekilde $d = \sum_{k=1}^{n+m} P_{z_{\gamma_k}} \ge d_1$ ve $d \ge d_2$ dir. O halde $D \uparrow$ olur. $x, y \in E^+$, her β için $P_{z_\beta} x \le y$ olsun. Eğer $0 < (x - y)^+$ ise en az bir β_0 için $0 < P_{z_{\beta_0}}((x - y)^+)$ dır.

$$P_{z_{\beta_0}} x \le y \Rightarrow P_{z_{\beta_0}}(P_{z_{\beta_0}} x) \le P_{z_{\beta_0}} y$$
$$\Rightarrow P_{z_{\beta_0}} x \le P_{z_{\beta_0}} y$$
$$\Rightarrow P_{z_{\beta_0}} x - P_{z_{\beta_0}} y \le 0$$

$\Rightarrow P_{z_{\beta_0}}(x-y) \leq 0$

dır. $0 < (P_{z_{\beta_0}}(x-y))^+ = (P_{z_{\beta_0}}(x-y)^+) = 0$ olur. Bu bir çelişkidir. O halde $(x-y)^+ = 0$ dır. $x \leq y$ elde edilir. …(∗)

(P_{z_β}) ikişer ikişer dik olduğundan $\sum_{i=1}^{n} P_{z_{\beta_i}} = \bigvee_{i=1}^{n} P_{z_{\beta_i}}$ olur. Her $d \in D$, en az bir $n \in \mathbb{N}$ ve her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $P_{z_{\beta_i}} \leq I$ olduğundan $d = \bigvee_{i=1}^{n} P_{z_{\beta_i}} \leq I$ olur. Yani I, D için bir üst sınırdır. Başka bir üst sınır H olsun. Her $d \in D$ için $d \leq H$ olur. (∗) göz önüne alınırsa,

$P_{z_\beta} \leq H \Rightarrow$ Her $x \in E^+$ için $P_{z_\beta}(x) \leq H(x)$

$\Rightarrow$ Her $x \in E^+$ için $x \leq H(x)$

$\Rightarrow$ Her $x \in E^+$ için $x = I(x) \leq H(x)$

$\Rightarrow I \leq H$

$\Rightarrow \sup D = I$

dır. O halde $D \uparrow I$ olur. Her $P \in D$ için $SP = 0$ olsun. $\sup\limits_{p \in D} SP = 0$ ise $S(\sup P) = 0$ olur.

$D = (P_\alpha)$ alalım. $P_\alpha \uparrow I$ olur.

$I - P_\alpha \Rightarrow S(I - P_\alpha) \xrightarrow{o} 0$ ve $SI - SP_\alpha \downarrow$

$\Rightarrow \inf(SI - SP_\alpha) = 0$

$\Rightarrow SI + \inf(-SP_\alpha) = 0$

$\Rightarrow S - \sup SP_\alpha = 0$

$\Rightarrow S = \sup SP_\alpha$

$\Rightarrow S = 0$

dır. Bu ise $0 < S \leq T$ olmasıyla çelişir. O halde T sıra sürekli operatördür. $T \in L(E)_{n_r} \subseteq L(E)_r \subseteq L_b(E)$ ve E Dedekind tam olduğundan $|T|$ vardır. Her $P \in OI(L(E))$ için $|T|P = |TP|$ dir. İspatın ilk kısmından ve $|T|$ pozitif olduğundan $|T|$ sıra sürekli operatördür. Dolayısıyla $|T|$ sıra sürekli ise T sıra sürekli operatördür.

4. ORTOMORFİZM ELEMANLAR

Bu bölümde ortomorfizm elemanlar uzayının, ortomorfizm operatörler uzayına benzer özelliklerini elde ettik.

4.1. Ortomorfizm Elemanların Özellikler

4.1.1. Tanım

E Riesz uzay, $T: E \to E$ lineer dönüşüm olsun. Eğer her $B \subseteq E$ bandı için $T(B) \subseteq B$ ise T *ye band koruyan* denir [3].

4.1.2. Tanım

E Riesz uzay, $T: E \to E$ sıra sınırlı ve band koruyan lineer dönüşüme *ortomorfizm* denir [3].

4.1.3. Tanım

A birimli sıralı cebir ve $a \in A$ olsun. Her $p \in OI(A)$ için $(e-p)ap = 0$ ise *a ya sıra idempotent koruyan elemandır* denir. Eğer $a \in A_{\mathrm{r}}$ ise *a ya ortomorfizm eleman* denir. A sıralı cebirinin bütün ortomorfizm elemanlarının kümesi $Orthe(A)$ ile gösterilir [1].

4.1.1. Önerme

A birimli sıralı cebir ve $a \in A$ olsun.

(i) a nın sıra idempotent koruyan olması için gerek ve yeter şart a nın bütün sıra idempotentler ile değişmeli olmasıdır.

(ii) Eğer a nın modülü varsa,
a nın sıra idempotent koruyan olması için gerek ve yeter şart $OI(A)$ içinde $p_1 \perp p_2$ ise A içinde $p_1 a \perp p_2 a$ olmasıdır [1].

İspat

(i) $(\Rightarrow)$ a sıra idempotent koruyan olsun. Her $p \in OI(A)$ için,

$$p^{\mathrm{d}}ap = 0 \Rightarrow (e-p)ap = 0$$
$$\Rightarrow ap - pap = 0$$

$\Rightarrow ap = pap \ldots$ (I)

dir. Diğer yandan p^{d} yerine p alınırsa,

$pap^{\mathrm{d}} = 0 \Rightarrow pa(e-p) = 0$

$\Rightarrow pa - pap = 0$

$\Rightarrow pa = pap \ldots$(II)

dir. Dolayısıyla (I) ve (II) den $ap = pa$ olur.

($\Leftarrow$) a bütün sıra idempotentlerle değişmeli olsun. Her $p \in OI(A)$ için,

$ap = pa \Rightarrow ap^2 = pap$

$\Rightarrow ap = pap$

$\Rightarrow ap - pap = 0$

$\Rightarrow p^{\mathrm{d}}ap = 0$

dır. O halde a sıra idempotent koruyandır.

(ii) ($\Rightarrow$) a sıra idempotent koruyan olsun. Yani her $p \in OI(A)$ için $p^{\mathrm{d}}ap = 0$ dır. $OI(A)$ içinde $p_1 \perp p_2$ olmak üzere $0 \leq p_1|a|$ ve $0 \leq |a|p_2$ dir. Başka bir alt sınır b olsun.

$b \in A$, $p_1|a| \geq b$ ve $|a|p_2 \geq b \Rightarrow {p_1}^{\mathrm{d}}p_1|a| \geq {p_1}^{\mathrm{d}}b$ ve $|a|p_2p_1 \geq bp_1$

$\Rightarrow 0 \geq {p_1}^{\mathrm{d}}b$ ve $0 \geq bp_1$

$\Rightarrow 0 \geq ({p_1}^{\mathrm{d}} + p_1)b = b$

olur. O halde $p_1|a| \wedge |a|p_2 = 0$ dır. a sıra idempotent koruyan olduğu için $|a|p_2 = |ap_2| = |p_2a| = p_2|a|$ dır. O halde $p_1a \perp p_2a$ olur.

($\Leftarrow$) $p \in OI(A)$, $p^{\mathrm{d}} \perp p$ olduğundan $p^{\mathrm{d}}a \perp pa$ olur. $0 \leq |p^{\mathrm{d}}ap| \leq (p^{\mathrm{d}}|a|) \wedge (|a|p) = 0$ olur. Dolayısıyla $|p^{\mathrm{d}}a| \wedge |ap| = 0$ dır. Ayrıca $p \leq e$ olduğundan, $|p^{\mathrm{d}}ap| \leq |p^{\mathrm{d}}a|$ ise $|p^{\mathrm{d}}ap| \leq p^{\mathrm{d}}|a|$ olur. $p^{\mathrm{d}} \leq e$ olduğundan, $p^{\mathrm{d}}|ap| \leq |ap|$ ise $|p^{\mathrm{d}}ap| \leq |a|p$ dir. O halde $0 \leq |p^{\mathrm{d}}ap| \leq p^{\mathrm{d}}|a| \wedge |a|p = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $p^{\mathrm{d}}ap = 0$ dır. Yani a sıra idempotent koruyandır.

4.1.1. Sonuç

A sıralı cebir ve $a \in A$ olsun. a sıra idempotent koruyan ve a^{-1} varsa, a^{-1} sıra idempotent koruyandır [1].

İspat

$p^{\mathrm{d}}a^{-1}p = b$ olsun. $p \in OI(A)$ için,

$ab = ap^{\mathrm{d}}a^{-1}p$

$= p^{\mathrm{d}} a a^{-1} p$

$= 0$

olur. Yani $ab = 0$ elde edilir. a^{-1} var olduğundan $a^{-1}ab = 0$ dır. Dolayısıyla $p^{\mathrm{d}} a^{-1} p = b = 0$ olur. O halde a^{-1} sıra idempotent koruyandır.

E Riesz uzay ve $A = L(E)$ birimli sıralı cebiri alındığında $Orth(E)$ ve $Orthe(A)$ karşılaştırılması yapıldığında bu iki kümenin genelde eşit olmadığı görülür.

4.1.1. *Örnek*

[0,1] de tanımlı parçalı afin, sürekli fonksiyonların uzayı E olsun. E Riesz uzay ve [3] Problem 7 den $Orth\ (E) = \{\lambda I;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ dir. $A = L(E)$ olsun.

$P \in OI(A)$ ise $P^2 = P$ ve $0 \leq P \leq I$ dir. Ayrıca $OI(A) \subseteq Orth\ (E)$ olduğundan $P \in OI(A)$ ise $P \in Orth\ (E)$ olur. O halde en az bir $\lambda \in \mathbb{R}$ için $P = \lambda I$ dır.

$\lambda \in [0, \infty)$ için,

$P^2 = \lambda I \circ \lambda I = \lambda^2 I \Rightarrow$ Her $x \in E$ için $\lambda x = \lambda^2 x$

$\Rightarrow x \neq 0$ için $(\lambda^2 - \lambda)x = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 = \lambda$

$\Rightarrow P = 0$ veya $P = I$

olur. Yani $OI(A) = \{0, I\}$ dır. Buradan $L(E)_{\mathrm{r}} = Orthe(A)$ elde edilir. $L(E)_{\mathrm{r}} \neq Orth(E)$ olduğundan $T \in Orthe(A)$ fakat $T \notin Orth(E)$ olacak şekilde T operatörü vardır.

4.1.2. *Örnek*

E principal projeksiyon özelliğine sahip Riesz uzay ve $A = L(E)$ olsun. $P(E)$, E üzerinde sıra projeksiyon olmak üzere [3] Teorem 3.10 dan $P(E) = OI(A)$ dır. Diğer yandan, [3] Teorem 8.3 ve Önerme 4.1.1 den dolayı $Orth(E) = Orthe(A)$ olur.

4.1.3. *Örnek*

$C[0,1]$, [0,1] kapalı aralığında tanımlı, reel değerli sürekli fonksiyonlar olmak üzere $A = C[0,1]$ sıralı cebiri alınırsa [5,s.140] (v) den $OI(A) = \{\theta, \mathbf{1}\}$ olduğundan $Orthe(A) = A_{\mathrm{r}} = A$ olur.

4.1.2. Önerme

A birimli sıralı cebir olsun. $A_{\mathrm{e}} \subseteq Orthe(A)$ dır [1].

İspat

Her $a \in A_{\mathrm{e}}$ ve her $p \in OI(A)$ için,

$$
\begin{aligned}
a \in A_{\mathrm{e}} &\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^{+}, -\lambda e \leq a \leq \lambda e \\
&\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^{+}, -\lambda ep \leq ap \leq \lambda ep \\
&\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^{+}, -\lambda p \leq ap \leq \lambda p \\
&\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^{+}, p^{\mathrm{d}}(-\lambda)p \leq p^{\mathrm{d}}ap \leq p^{\mathrm{d}}\lambda p \\
&\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^{+}, -\lambda p^{\mathrm{d}}p \leq p^{\mathrm{d}}ap \leq \lambda p^{\mathrm{d}}p \\
&\Rightarrow 0 \leq p^{\mathrm{d}}ap \leq 0 \\
&\Rightarrow p^{\mathrm{d}}ap = 0 \\
&\Rightarrow a \in Orthe(A)
\end{aligned}
$$

olduğundan $A_{\mathrm{e}} \subseteq Orthe(A)$ bulunur.

4.1.3. Önerme

A birimli sıralı cebir, A_{r} Riesz uzay olmak üzere $Orthe(A)$, A_{r} içinde bandtır.

İspat

$Orthe(A)$, A_{r} nin alt uzayıdır. $b \in A$, $a \in Orthe(A)$ ve $p \in OI(A)$ olsun.

$$
\begin{aligned}
|b| \leq |a| &\Rightarrow p|b| \leq p|a| \\
&\Rightarrow |pb| \leq |pa| \\
&\Rightarrow |pb|p^{\mathrm{d}} \leq |pa|p^{\mathrm{d}} \\
&\Rightarrow |pbp^{\mathrm{d}}| \leq |pap^{\mathrm{d}}| \\
&\Rightarrow 0 \leq pbp^{\mathrm{d}} \leq 0 \\
&\Rightarrow pbp^{\mathrm{d}} = 0
\end{aligned}
$$

olur. O halde $Orthe(A)$ idealdir. Şimdi $(x_{\alpha}) \subseteq Orthe(A)$, $x_{\alpha} \uparrow x$ ve $x \in A$ olsun.

$$
\begin{aligned}
0 &\leq p^{\mathrm{d}}xp \\
&= p^{\mathrm{d}}(x - x_{\alpha})p + p^{\mathrm{d}}x_{\alpha}p \\
&\leq x - x_{\alpha} \downarrow 0
\end{aligned}
$$

olur. Yani $p^{\mathrm{d}}xp = 0$ dır. Dolayısıyla $x \in Orthe(A)$ olur. O halde $Orthe(A)$ bandtır.

4.1.2. Sonuç

A birimli sıralı cebir ve A_r Riesz uzay olsun. A_r içinde e nin ürettiği band B_e olmak üzere, $B_e \subseteq Orthe(A)$ dır.

İspat

Önerme 4.1.3 den $Orthe(A)$ band ve birimi kapsadığından ve B_e nin tanımından $B_e \subseteq Orthe(A)$ olur.

4.2. Birim Elemanın Ürettiği Bandın Ortomorfizm Elemanlara Eşit Olma Şartları

E Dedekind tam Riesz uzay Örnek 4.1.2 ve [3] Teorem 8.11 den $Orth(E) = Orthe(A) = B_I$ olur. Fakat herhangi bir birimli sıralı cebir için $B_e = Orthe(A)$ eşitliği doğru değildir. Örnek 4.1.1 den $A_r = L_r(E) = Orthe(A)$ fakat $B_I \neq L_r(E)$ dir.

4.2.1. Teorem

A Riesz cebiri ve e birim eleman olmak üzere birimin ürettiği ideal A_e f-cebiridir.

İspat

$a, b \in A_e$ ise sırasıyla A_e tanımından, en az bir $\lambda, \beta \in \mathbb{R}^+$ için $-\lambda e \leq a \leq \lambda e$ ve $-\beta e \leq b \leq \beta e$ dir. $a \leq \lambda e$ ise $\lambda e - a \geq 0$ ve $-\beta e \leq b$ ise $b + \beta e \geq 0$ dır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} 0 \leq (\lambda e - a)(b + \beta e) &\Rightarrow 0 \leq \lambda b + \lambda\beta e - ab - \beta a \\ &\Rightarrow ab \leq \lambda b + \lambda\beta e - \beta a \\ &\Rightarrow ab \leq \lambda\beta e + \lambda\beta e + \lambda\beta e \\ &\Rightarrow ab \leq 3\lambda\beta e \end{aligned}$$

$\mu = 3\lambda\beta$ ise $ab \leq \mu e$ olur. Diğer yandan $-\lambda e \leq a$ ise $0 \leq a + \lambda e$ ve $-\beta e \leq b$ ise $-b - \beta e \leq 0$ dır. Buradan,

$$\begin{aligned} (a + \lambda e)(-b - \beta e) \leq 0 &\Rightarrow -ab - a\beta - \lambda b - \lambda\beta e \leq 0 \\ &\Rightarrow -a\beta - \lambda b - \lambda\beta e \leq ab \\ &\Rightarrow -\lambda\beta e - \lambda\beta e - \lambda\beta e \leq ab \\ &\Rightarrow -3\lambda\beta e \leq ab \end{aligned}$$

$-\mu = -3\lambda\beta$ ise $-\mu e \leq ab$ dir. Dolayısıyla en az bir $\mu \in \mathbb{R}^+$ için $-\mu e \leq ab \leq \mu e$ olduğundan $ab \in A_e$ olur. O halde A_e, A içinde alt cebirdir. A Riesz cebiri ise A_e Riesz cebiridir.

$a \in A_e$ olsun. En az bir $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $-a \leq \lambda e$ ve $a \leq \lambda e$ olur. Buradan $|a| \leq \lambda e$ elde edilir. Diğer yandan $-\lambda e \leq 0 \leq |a|$ olduğundan $-\lambda e \leq |a| \leq \lambda e$ dir. O halde $|a| \in A_e$ olur. Dolayısıyla A_e Riesz uzaydır. Şimdi $a, b, c \in A_e{}^+$ ve $a \wedge b = 0$ için A_e tanımından sırasıyla en az bir $\lambda, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$ için $0 \leq a \leq \lambda e$, $0 \leq b \leq \beta e$, $0 \leq c \leq \gamma e$ dir.

$0 \leq c \leq \gamma e \Rightarrow 0 \leq ac \leq \gamma a$

$$\Rightarrow 0 \leq ac \wedge b \leq \gamma a \wedge b \leq (\gamma + 1)a \wedge (\gamma + 1)b = (\gamma + 1)(a \wedge b) = 0$$

olur. Buradan $ac \wedge b = 0$ dır. O halde A_e f-cebiridir.

[1] Sonuç 1.3 de A_e nin değişmeli cebir olduğu verilmiştir. Onun ispatından farklı olarak Teorem 4.2.1 den A_e nin değişmeli cebir olduğu elde edilebilir.

4.2.1. Sonuç

A Riesz cebiri olmak üzere A_e değişmeli cebirdir.

İspat

[3] Teorem 8.21 den her f-cebiri değişmelidir. Dolayısıyla A_e f-cebiri olduğundan değişmeli cebir olur.

4.2.1. Lemma

A birimli sıralı cebir ve A_r principal projeksiyon özelliğine sahip Riesz uzay olsun. $b \in Orthe(A)$ olması için gerek ve yeter şart her $a \in A_e$ için $ab = ba$ olmasıdır.

İspat

($\Rightarrow$) $b \in Orthe(A)$ olsun. Her $p \in OI(A)$ için $pb = bp$ olur. [3] Teorem 6.8 den keyfi $a \in A_e$ için $0 \leq a - a_n \leq \frac{1}{n} e$ olacak şekilde $a_n e$ – adım fonksiyonu vardır ve $a_n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i$ burada $\lambda_i \in \mathbb{R}, p_i \in OI(A)$ dir.

$$\begin{aligned} a_n b &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i\, b \\ &= \sum_{i=1}^{k} b \lambda_i p_i \\ &= b \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i \\ &= b a_n \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $0 \le ba - ba_{\mathrm{n}} \le \frac{1}{\mathrm{n}} b$ ve $0 \le ab - a_{\mathrm{n}}b \le \frac{1}{\mathrm{n}} b$ olur. Buradan $a_{\mathrm{n}}b = ba_{\mathrm{n}} \to ab$ ve $a_{\mathrm{n}}b = ba_{\mathrm{n}} \to ba$ dir. Limit tek olduğundan $ab = ba$ olur.

($\Leftarrow$) Her $a \in A_{\mathrm{e}}$ için $ab = ba$ olsun. Keyfi $p \in OI(A)$ ise $OI(A) \subseteq A_{\mathrm{e}}$ olduğundan $p \in A_{\mathrm{e}}$ dir. Buradan $pb = bp$ olur. O halde $b \in Orthe(A)$ dır.

4.2.1. Tanım

A birimli sıralı cebir, A_{r} Riesz uzay ve $°(Orthe(A)^{\sim}) = \{0\}$ olsun. Her $b, c \in Orthe(A)$, $0 \le b \le c$ için $0 \le a_{\alpha} \le e$ olacak şekilde en az bir $(a_{\alpha}) \subseteq A_{\mathrm{e}}$ neti varsa ve $\sigma(Orthe(A), Orthe(A)^{\sim})$ topolojisine göre $a_{\alpha}c \to b$ ise $Orthe(A)$ ya *topolojik dolu* denir [7].

4.2.1. *Örnek*

E Dedekind tam Riesz uzay ve $°(E^{\sim}) = \{0\}$ olmak üzere $A = L(E)$ alınırsa [6] Teorem 4.3 den $A_{\mathrm{e}} = Z(E)$ ye göre $Orthe(A) = Orth(E)$ topolojik doludur.

A birimli sıralı cebir ve A_{r} Riesz uzayı olmak üzere her $b, c \in Orthe(A)$ ve $p \in OI(A)$ için $(bc)p = p(bc)$ olduğundan $Orthe(A)$ Riesz cebiridir.

$b \in Orthe(A)$ ve $a \in A$ olmak üzere,

$L_{\mathrm{b}}: Orthe(A) \to Orthe(A)$

$$b \to L_{\mathrm{b}}(a) = ab$$

ve

$R_{\mathrm{b}}: Orthe(A) \to Orthe(A)$

$$b \to R_{\mathrm{b}}(a) = ba$$

dönüşümleri lineerdir. Eğer $0 \le b$ ise L_{b} ve R_{b} operatörleri pozitif operatörlerdir. Dolayısıyla $L_b{}^{\sim}: Orthe(A)^{\sim} \to Orthe(A)^{\sim}$ ve $R_b{}^{\sim}: Orthe(A)^{\sim} \to Orthe(A)^{\sim}$ operatörleri tanımlıdır.

$h \in Orthe(A)^{\sim}$ ve $a \in A_e$ olmak üzere,

$S_{\mathrm{h}}: Orthe(A) \to A_{\mathrm{e}}{}^{\sim}$

$$b \to S_{\mathrm{b,h}}\,,\ S_{\mathrm{b,h}}(a) = h(ab)$$

$V_{\mathrm{h}}: Orthe(A) \to A_{\mathrm{e}}{}^{\sim}$

$$b \to V_{\mathrm{b,h}}\,,\ V_{\mathrm{b,h}}(a) = h(ba)$$

operatörleri tanımlansın. S_{h} ve V_{h} lineer operatörlerdir. Eğer $0 \leq h$ ise S_{h} ve V_{h} pozitif operatörlerdir.

Aşağıdaki Lemma, [7] Teorem 3.2 nin adaptasyonu olarak elde edilmiştir.

4.2.2. Lemma

A birimli sıralı cebir ve A_{r} Riesz uzay olsun. Eğer $Orthe(A)^{\sim}$, $Orthe(A)$ nın noktalarını ayırıyor ve $Orthe(A)$, A_{e} ye göre topolojik dolu ise S_{h} örgü homomorfizmdir. Ayrıca A_{r} principal projeksiyon özelliğine sahip ise V_{h} örgü homomorfizmdir.

İspat

Her $b, c \in Orthe(A)$ ve $b \wedge c = 0$ olsun. Her $h \in Orthe(A)^{\sim}_{+}$ için $S_{\mathrm{b,h}} \wedge S_{\mathrm{c,h}} = 0$ olduğunu göstermeliyiz. $0 \leq a \in A$ için [3] Teorem 1.13 den,

$$[S_{\mathrm{h}}(b) \wedge S_{\mathrm{h}}(c)](a) = (S_{\mathrm{b,h}} \wedge S_{\mathrm{c,h}})(a)$$
$$= \inf\{S_{\mathrm{b,h}}(a_1) + S_{\mathrm{c,h}}(a_2);\ a_1 + a_2 = a, a_1, a_2 \geq 0\}$$
$$= \inf\{h(a_1 b) + h(a_2 c);\ a_1 + a_2 = a, a_1, a_2 \geq 0\}$$

olduğu biliniyor. $d = b + c$ olsun. $A_{\mathrm{b}}, A_{\mathrm{c}}$ ve A_{d} sırasıyla b, c, d tarafından üretilen idealler olmak üzere $A_{\mathrm{d}} = A_{\mathrm{b}} \oplus A_{\mathrm{c}}$ dir. $p\colon A_{\mathrm{d}} \to A_{\mathrm{b}}$ sıra projeksiyon ve J, $Orthe(A)$ üzerindeki sıra sınırlı fonksiyonellerin A_{d} ye kısıtlanmışlarının kümesi olsun. Yani, $J = \{f|A_{\mathrm{d}} : f \in Orthe(A)^{\sim}\}$. J nin $A_{\mathrm{d}}^{\sim}$ içinde vektör uzayı olduğunu görmek kolaydır. Her $h \in J$ ve her $g \in A_{\mathrm{d}}^{\sim}$ için $|g| \leq |h|$ olsun. $h \in J$ ise $f|A_{\mathrm{d}} = h$ olacak şekilde $f \in Orthe(A)^{\sim}$ vardır. $|g| \leq |h| \Rightarrow |g| \leq |f|A_{\mathrm{d}}|$ dir. $g\colon A_{\mathrm{d}} \to \mathbb{R}$ olmak üzere [3] Teorem 2.1. Hahn-Banach teoreminden $\hat{g}\colon Orthe(A) \to \mathbb{R}$ sıra sınırlı dönüşümü vardır ve $\hat{g}|A_{\mathrm{d}} = g$ olur. Yani $g \in J$ dir. Dolayısıyla J, $Orthe(A)^{\sim}$ içinde idealdir. $\tilde{p}\colon A_{\mathrm{d}}^{\sim} \to A_{\mathrm{d}}^{\sim}$ olmak üzere $0 \leq \tilde{p} \leq I$ dır. $\tilde{p}$ ideal koruyan olduğundan $\tilde{p}(J) \subseteq J$ olur. Buradan $p\colon (A_{\mathrm{d}}, \sigma(A_{\mathrm{d}}, J)) \to (A_{\mathrm{d}}, \sigma(A_{\mathrm{d}}, J))$ projeksiyonu süreklidir. $0 \leq p(d) \leq d$ olduğundan en az bir $(a_\alpha) \subseteq A_{\mathrm{e}}$, $0 \leq a_\alpha \leq e$ ve $a_\alpha d \to p(d) = b$ dir. $p(a_\alpha d) \xrightarrow{\sigma(A_{\mathrm{d}}, J)} b \Rightarrow p(L_{a_\alpha}(d)) \to b$ dir. $L_{a_\alpha} \in Z(A_{\mathrm{d}})$ olur. $L_{a_\alpha}, p \in Z(A_{\mathrm{d}})$ ve $Z(A_{\mathrm{d}})$ değişmeli olduğundan $L_{a_\alpha} p = p L_{a_\alpha}$ elde edilir. $p(L_{a_\alpha} d) = L_{a_\alpha}(pd) = a_\alpha p d = a_\alpha b \to b$ dir. $d = b + c \Rightarrow a_\alpha d = a_\alpha b + a_\alpha c$ olur. Buradan $a_\alpha c \to 0$ dır. Her α için $(a - a a_\alpha) + a a_\alpha = a$ olduğundan,

$(S_{\mathrm{b,h}} \wedge S_{\mathrm{c,h}})(a) \leq h[(a - aa_\alpha)b + (aa_\alpha)c]$

$= h[a((b - a_\alpha b) + a_\alpha c)]$

$= L_a{}^{\sim}(h)((b - a_\alpha b) + a_\alpha c)$

olur.

$(S_{\mathrm{b,h}} \wedge S_{\mathrm{c,h}})(a) \leq \lim_\alpha L_a{}^{\sim}(h)((b - a_\alpha b) + a_\alpha c)$

$= L_a{}^{\sim}(h)(\lim_\alpha((b - a_\alpha b) + a_\alpha c))$

$= 0$

dır. O halde S_{h} örgü homomorfizdir. Şimdi A_{r} principal projeksiyon özelliğine sahip Riesz uzay olsun. Her $b, c \in Orthe(A)$ ve $b \wedge c = 0$ olsun. Her $h \in Orthe(A)_+^{\sim}$ için $V_{\mathrm{b,h}} \wedge V_{\mathrm{c,h}} = 0$ olduğunu göstermeliyiz. $0 \leq a \in A$ için,

$[V_{\mathrm{h}}(b) \wedge V_{\mathrm{h}}(c)](a) = (V_{\mathrm{b,h}} \wedge V_{\mathrm{c,h}})(a)$

$= \inf\{V_{\mathrm{b,h}}(a_1) + V_{\mathrm{c,h}}(a_2);\ a_1 + a_2 = a, a_{1,} a_2 \geq 0\}$

$= \inf\{h(ba_1) + h(ca_2);\ a_1 + a_2 = a, a_{1,} a_2 \geq 0\}$

olur. $d = b + c$ olmak üzere $A_{\mathrm{b}}, A_{\mathrm{c}}$ ve A_{d} sırasıyla b, c, d tarafından üretilen idealler, $A_{\mathrm{d}} = A_{\mathrm{b}} \oplus A_{\mathrm{c}}$ dir. $p: A_{\mathrm{d}} \to A_{\mathrm{b}}$ sıra projeksiyon ve $J = \{f|A_{\mathrm{d}}: f \in Orthe(A)^{\sim}\}$ dir. J nin $A_{\mathrm{d}}{}^{\sim}$ içinde vektör uzayı ve J nin $Orthe(A)^{\sim}$ içinde ideal olduğu benzer şekilde gösterilir. $\tilde{p}: A_{\mathrm{d}}{}^{\sim} \to A_{\mathrm{d}}{}^{\sim}$ olmak üzere $0 \leq \tilde{p} \leq I$ dır. $\tilde{p}$ ideal koruyan olduğundan $\tilde{p}(J) \subseteq J$ olur. Buradan $p: (A_{\mathrm{d}}, \sigma(A_{\mathrm{d}}, J)) \to (A_{\mathrm{d}}, \sigma(A_{\mathrm{d}}, J))$ projeksiyonu süreklidir. $0 \leq p(d) \leq d$ ve A_{r} principal projeksiyon özelliğine sahip Riesz uzay olduğundan en az bir $(a_\alpha) \subseteq A_{\mathrm{e}}$, $0 \leq a_\alpha \leq e$ ve $da_\alpha = a_\alpha d \to p(d) = b$ dir. Benzer şekilde $L_{a_\alpha} \in Z(A_{\mathrm{d}})$ ve $L_{a_\alpha} p = pL_{a_\alpha}$ olur. $p\left(L_{a_\alpha} d\right) = L_{a_\alpha}(pd) = a_\alpha pd = a_\alpha b \to b$ ve ayrıca A_{r} principal projeksiyon özelliğine sahip Riesz uzay olduğundan $ba_\alpha = a_\alpha b$ dir. Dolayısıyla $ba_\alpha \to b$ olur. Ayrıca $d = b + c \Rightarrow a_\alpha d = a_\alpha b + a_\alpha c$ olur. Buradan $a_\alpha c \to 0$ dir ve $ca_\alpha = a_\alpha c$ olduğundan $ca_\alpha \to 0$ elde edilir. Her α için,

$(V_{\mathrm{b,h}} \wedge V_{\mathrm{c,h}})(a) \leq h[b(a - a_\alpha a) + c(a_\alpha a)]$

$= h[((b - ba_\alpha) + ca_\alpha)a]$

$= h[R_a((b - ba_\alpha) + ca_\alpha)]$

$= R_a{}^{\sim}(h)((b - ba_\alpha) + ca_\alpha)$

dır.

$(V_{\mathrm{b,h}} \wedge V_{\mathrm{c,h}})(a) \leq \lim_\alpha R_a{}^{\sim}(h)((b - ba_\alpha) + ca_\alpha)$

$= R_a{}^{\sim}(h)(\lim_\alpha((b - ba_\alpha) + ca_\alpha)$

$= 0$

olur. O halde V_{h} örgü homomorfizmdir.

4.2.1. Önerme

A birimli sıralı cebir, A_{r} principal projeksiyon özelliğine sahip Riesz uzay, $e \in Orthe(A)$ birim eleman ve $Orthe(A)$, A_{e} ye göre topolojik dolu olmak üzere $Orthe(A)$ içinde birimin ürettiği band B_{e}, $Orthe(A)$ kümesine eşittir.

İspat

$0 \leq b \in Orthe(A)$ ve $e \wedge b = 0$ ise her $0 \leq h \in Orthe(A)^{\sim}$ için,

$$
\begin{aligned}
0 \leq S_{\mathrm{b,h}} &= S_{\mathrm{b,h}} \wedge S_{\mathrm{b,h}} \\
&= S_{\mathrm{be,h}} \wedge S_{\mathrm{b,h}} \quad \ldots(*)
\end{aligned}
$$

olur. Burada her $a \in A_{\mathrm{e}}$ için,

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{be,h}}(a) &= h\big(a(be)\big) \\
&= h\big(b(ae)\big) \\
&= h\big(L_{\mathrm{b}}(ae)\big) \\
&= L_{\mathrm{b}}{}^{\sim}(h)(ae) \\
&= S_{\mathrm{e},L_{\mathrm{b}}{}^{\sim}(\mathrm{h})}(a)
\end{aligned}
$$

olur. $(*)$ eşitliğinde yazıldığında,

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{be,h}} \wedge S_{\mathrm{b,h}} &= S_{\mathrm{e},L_{\mathrm{b}}{}^{\sim}(\mathrm{h})} \wedge S_{\mathrm{b,h}} \\
&\leq S_{\mathrm{e},L_{\mathrm{b}}{}^{\sim}(\mathrm{h})\vee \mathrm{h}} \wedge S_{\mathrm{b},L_{\mathrm{b}}{}^{\sim}(\mathrm{h})\vee \mathrm{h}} \\
&= S_{\mathrm{e}\wedge \mathrm{b},L_{\mathrm{b}}{}^{\sim}(\mathrm{h})\vee \mathrm{h}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olur. Dolayısıyla $0 \leq S_{\mathrm{b,h}} \leq 0$ dır. Yani $S_{\mathrm{b,h}} = 0$ olur. $0 \leq b$ ve keyfi $h \in Orthe(A)^{\sim}$ için $h = h^{+} - h^{-}$ şeklinde yazılabilir. O halde $S_{\mathrm{b,h}} = S_{\mathrm{b,h^{+}-h^{-}}} = S_{\mathrm{b,h^{+}}} - S_{\mathrm{b,h^{-}}}$ olur. İspatın ilk kısmından $S_{\mathrm{b,h^{+}}} = 0$ ve $S_{\mathrm{b,h^{-}}} = 0$ olduğundan $S_{\mathrm{b,h}} = S_{\mathrm{b,h^{+}}} - S_{\mathrm{b,h^{-}}} = 0$ olur. Benzer şekilde keyfi $b \in Orthe(A)$ için $b = b^{+} - b^{-}$ şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla $S_{\mathrm{b,h}} = S_{\mathrm{b^{+}-b^{-},h}} = S_{\mathrm{b^{+},h}} - S_{\mathrm{b^{-},h}}$ dir. İspatın ikinci kısmından $S_{\mathrm{b^{+},h}} = 0$ ve $S_{\mathrm{b^{-},h}} = 0$ olduğundan $S_{\mathrm{b,h}} = S_{\mathrm{b^{+},h}} - S_{\mathrm{b^{-},h}} = 0$ elde edilir. Şimdi e birim elemanı için, $S_{\mathrm{b,h}}(e) = h(be) = h(b)$ ve $S_{\mathrm{b,h}} = 0$ olduğundan $h(b) = 0$ olur. Buradan $b = 0$ dır. Böylece $e^{\mathrm{dd}} = Orthe(A)$ olur aynı zamanda $e^{\mathrm{dd}} = B_{\mathrm{e}}$ olduğundan $Orthe(A) = B_{\mathrm{e}}$ olduğu görülür.

4.2.2. Önerme

A birimli sıralı cebir, A_r principal projeksiyon özelliğine sahip Riesz uzay, $e \in Orthe(A)$ birim eleman ve $Orthe(A)$, A_e ye göre topolojik dolu olmak üzere $Orthe(A)$ içinde birimin ürettiği band A_r içinde birimin ürettiği banda eşittir.

İspat

$Orthe(A)$ kümesi A_r içinde bandtır. Birim elemanın $Orthe(A)$ içinde ürettiği band $B_e^1 = \{y \in B: |y| \wedge ne \uparrow |y|\}$ ve A_r içinde ürettiği band $B_e^2 = \{y \in A_r: |y| \wedge ne \uparrow |y|\}$ olmak üzere $Orthe(A) \subseteq A_r$ olduğundan $B_e^1 \subseteq B_e^2$ olur. Diğer yandan $y \in A_r$ ve $|y| \wedge ne \uparrow |y|$ olsun. Her n için $|y| \wedge ne \leq ne$ olduğundan $ne \in B_e^1$ dir. Dolayısıyla B_e^1 band olduğu için $|y| \wedge ne \in B_e^1$ dir. Ayrıca B_e^1 band olduğundan sıra kapalıdır ve $|y| \in B_e^1$ olur. Buradan $B_e^2 \subseteq B_e^1$ elde edilir. O halde $B_e^1 = B_e^2$ dir.

E Dedekind tam Riesz uzay ve $E^\sim$, E nin noktalarına ayırıyor ise, her $\pi \in Orth(E)$ ve her $\mu \in Orth(E)^\sim$ için $\mu(\pi) = 0$ olsun. Her $x \in E$ ve $f \in E^\sim$ için,

$H_{x,f} : Orth(E) \to \mathbb{R}$

$$\pi \to H_{x,f}(\pi) = f(\pi x)$$

biçiminde tanımlı $H_{x,f}$ sıra sınırlıdır. Yani $H_{x,f} \in Orth(E)^\sim$ dır. Her $x \in E$ ve $f \in E^\sim$ için,

$$H_{x,f}(\pi) = 0 \Rightarrow H_{x,f}(\pi) = f(\pi x) = 0$$
$$\Rightarrow \pi x = 0$$
$$\Rightarrow \pi = 0$$

dır. Yani $Orth(E)^\sim$, $Orth(E)$ nin noktalarını ayırır. Dahası Örnek 4.2.1 den $A_e = Z(E)$ ye göre $Orthe(A) = Orth(E)$ topolojik dolu olduğunu biliyoruz. Bu gözlem ve Önerme 4.2.1 den, daha önce teorem olarak kanıtlanmış olan aşağıdaki sonucu elde ederiz.

4.2.2. Sonuç

E Dedekind tam Riesz uzay ve $°(E^\sim) = \{0\}$ olsun. $L_r(E)$ içinde birim operatörün ürettiği band B_I, $Orth(E)$ ye eşittir.

4.2.2. Teorem

A sıralı cebir, A_r principal projeksiyon özelliğine sahip Riesz uzay ve $Orthe(A)$, A_e ye göre topolojik dolu ise $Orthe(A)$ f-cebiridir.

İspat

Her $b, c \in Orthe(A)$, $a \in A_e$, $b \wedge c = 0$ ve her $d \in Orthe(A)_+$ olsun. Her $h \in Orthe(A)_+^\sim$ için,

$$
\begin{aligned}
S_{db,h}(a) &= h(a(db)) \\
&= h(d(ab)) \\
&= h(L_d(ab)) \\
&= L_d{}^\sim(h)(ab) \\
&= S_{b,L_d{}^\sim(h)}(a)
\end{aligned}
$$

olur. Dolayısıyla $S_{db,h} = S_{b,L_d{}^\sim(h)}$ dır.

$$
\begin{aligned}
0 \le S_{db \wedge c,h} &= S_{db,h} \wedge S_{c,h} \\
&= S_{b,L_d{}^\sim(h)} \wedge S_{c,h} \\
&= S_{b,L_d{}^\sim(h) \vee h} \wedge S_{c,L_d{}^\sim(h) \vee h} \\
&= S_{b \wedge c,L_d{}^\sim(h) \vee h} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

dır. Buradan $S_{db \wedge c,h} = 0$ elde edilir.

$e \in Orthe(A)$ birim elemanı için $S_{db \wedge c,h}(e) = h(db \wedge c)$ dir. Dolayısıyla $db \wedge c = 0$ olur. Diğer yandan,

$$
\begin{aligned}
V_{bd,h}(a) &= h((bd)a) \\
&= h((ba)d) \\
&= h(R_d(ba)) \\
&= R_d{}^\sim(h)(ba) \\
&= V_{b,R_d{}^\sim(h)}(a)
\end{aligned}
$$

dir. Dolayısıyla $V_{bd,h} = V_{b,R_d{}^\sim(h)}$ olur.

$$
\begin{aligned}
0 \le V_{bd \wedge c,h} &= V_{bd,h} \wedge V_{c,h} \\
&= V_{b,R_d{}^\sim(h)} \wedge V_{c,h} \\
&= V_{b,R_d{}^\sim(h) \vee h} \wedge V_{c,R_d{}^\sim(h) \vee h} \\
&= V_{b \wedge c,R_d{}^\sim(h) \vee h} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olur. Buradan $V_{bd \wedge c,h} = 0$ elde edilir. $e \in Orthe(A)$ birim elemanı için $V_{bd \wedge c,h}(e) = h(bd \wedge c)$ dir. Dolayısıyla $bd \wedge c = 0$ olur. O halde $Orthe(A)$ f-cebiridir.

4.2.3. Sonuç

E Dedekind tam Riesz uzay ve $°(E^{\sim}) = \{0\}$ olsun. $Orth(E)$ bir f- cebirdir. Dahası $L_{\mathrm{r}}(E)$ nin dolu altcebiridir.

4.2.4. Sonuç

A sıralı cebir, A_{r} principal projeksiyon özelliğine sahip Riesz uzay ve $Orthe(A)$, A_{e} ye göre topolojik dolu olmak üzere her f-cebiri [3] Teorem 8.21 den değişmeli cebir olduğu için $Orthe(A)$ değişmeli cebirdir.

4.2.5. Sonuç

A sıralı cebir, A_{r} principal projeksiyon özelliğine sahip Riesz uzay ve $°(Orthe(A)^{\sim}) = \{0\}$ olsun. $Orthe(A)$ f-cebiri olması için gerek ve yeter şart $Orthe(A)$, A_{e} ye göre topolojik doludur.

İspat

$Orthe(A)$ f-cebiri ise [7] Önerme 2.6 dan $Orthe(A)$, A_{e} ye göre topolojik doludur. Diğer yandan $Orthe(A)$, A_{e} ye göre topolojik dolu ise Teorem 4.2.2 den $Orthe(A)$ f-cebiridir.

4.2.2. *Örnek*

$A = l_{\infty} \oplus \mathbb{R}$ cebiri için $Orthe(A)$ f-cebiri değildir.
l_{∞} reel Dedekind tam sıralı Banach cebiri ve birimi e_0 olmak üzere, l_{∞}, $\mathbb{R}$ üzerinde vektör uzaydır. l_{∞}, $(x_{\mathrm{n}}) \leq (y_{\mathrm{n}}) \Leftrightarrow$ Her n için $x_{\mathrm{n}} \leq y_{\mathrm{n}}$ sıralamasıyla Riesz uzaydır. (x_{n}), l_{∞} içinde Cauchy dizisi olsun. Yani $n, m \to \infty$ için, $\|x_{\mathrm{n}} - x_{\mathrm{m}}\|_{\infty} = \sup\limits_{\mathrm{s}} |x_{\mathrm{n}}^{\mathrm{s}} - x_{\mathrm{m}}^{\mathrm{s}}| \to 0$ olsun. $\varepsilon > 0$ ve her $n, m > N$ için, $\|x_{\mathrm{n}} - x_{\mathrm{m}}\|_{\infty} < \varepsilon$ sağlayan bir $N \in \mathbb{N}$ göz önüne alınsın. Bu durumda $(x_{\mathrm{n}}^{\mathrm{s}})$ dizisi $\mathbb{R}$ içinde bir Cauchy dizidir. Çünkü her $n, m \geq N$ ve her $s \in \mathbb{N}^{+}$ için, $|x_{\mathrm{n}}^{\mathrm{s}} - x_{\mathrm{m}}^{\mathrm{s}}| \leq \|x_{\mathrm{n}} - x_{\mathrm{m}}\|_{\infty} < \varepsilon$ olur. O halde $\mathbb{R}$ tam olduğundan her bir $s \in \mathbb{N}^{+}$ için $(x_{\mathrm{n}}^{\mathrm{s}})$ dizisi yakınsaktır. $x_{\mathrm{n}}(s) = \lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty} x_{\mathrm{n}}(s)$ olsun. Böylece her $s \in S$ ve her $n \geq N$ için,

$$\begin{aligned} |x_{\mathrm{n}}^{\mathrm{s}} - x^{\mathrm{s}}| &= \lim_{\mathrm{m}\to\infty} |x_{\mathrm{n}}^{\mathrm{s}} - x_{\mathrm{m}}^{\mathrm{s}}| \\ &\leq \lim_{\mathrm{m}\to\infty} \|x_{\mathrm{n}} - x_{\mathrm{m}}\|_{\infty} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Buradan, $\sup\limits_{s\,\in\,\mathbb{N}^+} |x_n^s - x^s| < \varepsilon$ bulunur. Dolayısıyla $n \to \infty$ için, $\|x_n - x\|_\infty = \sup\limits_{s\,\in\,\mathbb{N}^+} |x_n^s - x^s| \to 0$ dır. Yani $x \in l_\infty$ dir. O halde $l_\infty, \|.\|_\infty$ normuna göre Banach uzay olur. Şimdi, $(x_n)(y_n) = (x_n y_n)$ işlemi ile $\alpha \in \mathbb{R}$ ve (x_n), (y_n), $(z_n) \in l_\infty$ için,

(i) $\alpha((x_n)(\,y_n)) = \alpha(x_n y_n)$

$= (\alpha x_n y_n)$

$= (\alpha x_n)(y_n)$

dir. Ayrıca,

$\alpha((x_n)(y_n)) = \alpha(x_n y_n)$

$= (x_n \alpha y_n)$

$= (x_n)(\alpha y_n)$

(ii) $\alpha((x_n)(\,y_n)) = \alpha(x_n y_n)$

$= (\alpha x_n y_n)$

$= (\alpha x_n)(y_n)$

dir. Ayrıca,

$\alpha((x_n)(y_n)) = \alpha(x_n y_n)$

$= (x_n \alpha y_n)$

$= (x_n)(\alpha y_n)$

dir. Yani, $\alpha((x_n)(\,y_n)) = (\alpha x_n)(y_n) = (x_n)(\alpha y_n)$ olur.

(iii) $(x_n)((y_n) + (z_n)) = (x_n)((y_n + z_n))$

$= (x_n y_n) + (x_n z_n)$

$= (x_n)(y_n) + (x_n)(z_n)$

ve

$((x_n) + (y_n))(\,z_n) = ((x_n + y_n))(z_n)$

$= (x_n z_n) + (x_n y_n)$

$= (x_n)(z_n) + (x_n)(y_n)$

$(x_n)\big((y_n) + (z_n)\big) = (x_n)(y_n) + (x_n)(z_n)$, $\big((x_n) + (y_n)\big)(z_n) = (x_n)(z_n) + (x_n)(y_n)$ olur.

(iv) $(x_n)((y_n)(z_n)) = (x_n)((y_n z_n))$

$= (x_n y_n z_n)$

$= (x_n y_n)(z_n)$

$= ((x_n)(y_n))(z_n)$

olur. Yani $(x_n)((y_n)(z_n)) = ((x_n)(y_n))(z_n)$ elde edilir.

O halde l_∞ cebirdir.

(x_n), $(y_n) \in l_\infty^+$ için $0 \leq x_n \leq M$ ve $0 \leq y_n \leq K$ olacak şekilde M, $K > 0$ vardır. $0 \leq x_n y_n \leq MK$ olacak şekilde $MK > 0$ var ve $(x_n y_n) = (x_n)(y_n)$ olduğundan $(x_n)(y_n) \in l_\infty^+$ olur. Dolayısıyla l_∞ sıralı cebirdir.

$e = (1, 1, \dots)$ birim ve her n için,

$$P_n = (s_i) = \begin{cases} s_i = 1, 1 \leq i \leq n \\ s_i = 0, \quad n < i \end{cases}$$

ve $P_{n+1} = (r_i)$ olsun. $i \leq n$ için $s_i = r_i$ ise $s_i \leq r_i$ dir. $i = n+1$ ise $s_i = 0 < r_i = 1$ ise $s_i \leq r_i$ dir. $i > n+1$ ise $s_i = r_i = 0$ ise $s_i \leq r_i$ dir. O halde $P_n \leq P_{n+1}$ dir. Dolayısıyla $P_n \uparrow$ dır.$P_n \leq a = (a_i) \in l_\infty$ olsun. Keyfi $i \in \mathbb{N}$ ve $P_n \leq (a_i)$ olduğundan $i < n$ için, $P_n = (1, 1, \dots, 1_{(i.)}, \dots, 1_{(n.)}, 0, 0, \dots)$ dir. $P_n = (s_i)$ olmak üzere $i < n$ olduğundan $s_i = 1$ dir. $P_n \leq (a_i)$ olduğundan $s_i \leq a_i$ ise $1 \leq a_i$ dir. i keyfi olduğundan $e \leq a$ olur. $\sup P_n = e$ ve $P_n \uparrow$ olduğundan $P_n \uparrow e$ olur.

$f_n : l_\infty \to \mathbb{R}$

$$(x_n) \to f_n(x_n) = x_n$$

şeklinde tanımlansın.

$$\begin{aligned} f_n[(x_n)(y_n)] &= f_n[(x_n y_n)] \\ &= x_n y_n \\ &= f_n(x_n) f_n(y_n) \end{aligned}$$

olur. O halde f çarpımsaldır. $\|f\| = \inf\{M > 0;\ |f(x)| \leq M\|x\|\}$ olduğundan her n için, $|f_n(x_n)| = |x_n| \leq 1\|x\|$ olur. Buradan $\|f_n\| \leq 1$ elde edilir. $l_\infty' = \{f;\ f : l_\infty \to \mathbb{R}$ lineer, sınırlı$\}$ normlu uzay ve Banach uzaydır. l_∞ birim yuvarı, $B = \{f \in l_\infty';\ \|f\| \leq 1\}$ dır. Alaoğlu teoreminden B, $\sigma(l_\infty', l_\infty)$-kompakttır. $f_n \to f$, $\sigma(l_\infty', l_\infty)$ olacak şekilde $f \in l_\infty'$ vardır. Her $x \in l_\infty$ için $f_n(x) \to f(x)$ dir. Keyfi $y = (y_i) \in c_0$ seçilsin. $(y_i) \in c_0$ ise her $\varepsilon > 0$ için en az bir $i_0 \in \mathbb{N}$, $i_0 < i$ için $|y_i| < \varepsilon$ olur. Her $\varepsilon > 0$ ve $i_0 < i$ için, $f_n(y) = y_i$ ise $|f_n(x)| = |y_i| < \varepsilon$ dir. Dolayısıyla $(f_n(y)) \to 0$ olur. Diğer yandan, $f_n(y) \to f(y)$ dir. Dolayısıyla $f(y) = 0$ dır. O halde $f(c_0) = \{0\}$ olur.

$A = l_\infty \oplus \mathbb{R}$ $(b_1, \lambda_1) + (b_2, \lambda_2) = (b_1 + b_2, \lambda_1 + \lambda_2)$ ve $\beta(b, \lambda) = (\beta b, \beta\lambda)$ işlemleri ile vektör uzaydır.

$(b_1, \lambda_1) \leq (b_2, \lambda_2) \Leftrightarrow b_1 \leq b_2$ ve $\lambda_1 \leq \lambda_2$ sıralamasıyla, her (b_1, λ_1), (b_2, λ_2), $(b_3, \lambda_3) \in A$ için, $(b_1, \lambda_1) \leq (b_1, \lambda_1) \Leftrightarrow b_1 \leq b_1$ ve $\lambda_1 \leq \lambda_1$ olduğundan yansıma özelliğini sağlar.

$(b_1,\lambda_1) \leq (b_2,\lambda_2)$ ve $(b_2,\lambda_2) \leq (b_1,\lambda_1) \Rightarrow b_1 \leq b_2$ ve $\lambda_1 \leq \lambda_2, b_2 \leq b_1$ ve $\lambda_2 \leq \lambda_1$

$\Rightarrow b_1 \leq b_2, b_2 \leq b_1$ ve $\lambda_1 \leq \lambda_2, \lambda_2 \leq \lambda_1$

$\Rightarrow b_1 = b_2$ ve $\lambda_1 = \lambda_2$

$\Rightarrow (b_1,\lambda_1) = (b_2,\lambda_2)$

olduğundan ters simetrik olma özelliğini sağlar.

$(b_1,\lambda_1) \leq (b_2,\lambda_2)$ ve $(b_2,\lambda_2) \leq (b_3,\lambda_3) \Rightarrow b_1 \leq b_2$ ve $\lambda_1 \leq \lambda_2, b_2 \leq b_3$ ve $\lambda_2 \leq \lambda_3$

$\Rightarrow b_1 \leq b_2, b_2 \leq b_3$ ve $\lambda_1 \leq \lambda_2, \lambda_2 \leq \lambda_3$

$\Rightarrow b_1 \leq b_2 \leq b_3$ ve $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$

$\Rightarrow b_1 \leq b_3$ ve $\lambda_1 \leq \lambda_3$

$\Rightarrow (b_1,\lambda_1) \leq (b_3,\lambda_3)$

olduğundan geçişme özelliğini sağlar.

$(b_1,\lambda_1) \leq (b_2,\lambda_2) \Rightarrow b_1 \leq b_2$ ve $\lambda_1 \leq \lambda_2$

$\Rightarrow b_1 + b_3 \leq b_2 + b_3$ ve $\lambda_1 + \lambda_3 \leq \lambda_2 + \lambda_3$

$\Rightarrow (b_1 + b_3, \lambda_1 + \lambda_3) \leq (b_2 + b_3, \lambda_2 + \lambda_3)$

dır. Her $\alpha \geq 0$ için,

$(b_1,\lambda_1) \leq (b_2,\lambda_2) \Rightarrow b_1 \leq b_2$ ve $\lambda_1 \leq \lambda_2$

$\Rightarrow \alpha b_1 \leq \alpha b_2$ ve $\alpha\lambda_1 \leq \alpha\lambda_2$

$\Rightarrow (\alpha b_1, \alpha\lambda_1) \leq (\alpha b_2, \alpha\lambda_2)$

$\Rightarrow \alpha(b_1,\lambda_1) \leq \alpha(b_2,\lambda_2)$

dır. O halde A sıralı vektör uzaydır.

(b_1,λ_1), $(b_2,\lambda_2) \in A$ için $(b_1,\lambda_1) \vee (b_2,\lambda_2) = (b_1 \vee b_2, \lambda_1 \vee \lambda_2)$ olduğunu görmek kolaydır. l_∞ Riesz uzay olduğundan $b_1 \vee b_2 \in l_\infty$ dur. Aynı şekilde $\mathbb{R}$ Riesz uzay olduğundan $\lambda_1 \vee \lambda_2 \in \mathbb{R}$ olur. Dolayısıyla $(b_1,\lambda_1) \vee (b_2,\lambda_2) = (b_1 \vee b_2, \lambda_1 \vee \lambda_2) \in A$ olur. O halde A Riesz uzaydır.

Şimdi, $(b_1,\lambda_1) * (b_2,\lambda_2) = (b_1 b_2, \lambda_1 f(b_2) + \lambda_2 f(b_1) + \lambda_1\lambda_2)$ işlemi tanımlansın. Her $(b_1,\lambda_1), (b_2,\lambda_2), (b_3,\lambda_3) \in A$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için,

$\alpha[(b_1,\lambda_1) * (b_2,\lambda_2)] = \alpha(b_1 b_2, \lambda_1 f(b_2) + \lambda_2 f(b_1) + \lambda_1\lambda_2)$

$= (\alpha b_1 b_2, \alpha(\lambda_1 f(b_2) + \lambda_2 f(b_1) + \lambda_1\lambda_2))$

$= (\alpha b_1 b_2, \alpha\lambda_1 f(b_2) + \alpha\lambda_2 f(b_1) + \alpha\lambda_1\lambda_2)$ … (I)

$[\alpha(b_1,\lambda_1)] * (b_2,\lambda_2) = (\alpha b_1, \alpha\lambda_1) * (b_2,\lambda_2)$

$= (\alpha b_1 b_2, \alpha\lambda_1 f(b_2) + \lambda_2 f(\alpha b_1) + \alpha\lambda_1\lambda_2)$

$= (\alpha b_1 b_2, \alpha\lambda_1 f(b_2) + \alpha\lambda_2 f(b_1) + \alpha\lambda_1\lambda_2)$ … (II)

$(b_1,\lambda_1) * [\alpha(b_2,\lambda_2)] = (b_1,\lambda_1) * (\alpha b_2, \alpha\lambda_2)$

$$= (b_1 \alpha b_2, \lambda_1 f(\alpha b_2) + \alpha\lambda_2 f(b_1) + \lambda_1 \alpha\lambda_2)$$
$$= (\alpha b_1 b_2, \alpha\lambda_1 f(b_2) + \alpha\lambda_2 f(b_1) + \alpha\lambda_1\lambda_2) \dots \text{(III)}$$

O halde (I) = (II) = (III) dür.

$$(b_1,\lambda_1) * [(b_2,\lambda_2) + (b_3,\lambda_3)] = (b_1,\lambda_1) * (b_2 + b_3, \lambda_2 + \lambda_3)]$$
$$= (b_1(b_2 + b_3), \lambda_1 f(b_2 + b_3) + (\lambda_2 + \lambda_3) f(b_1)$$
$$+\lambda_1 (\lambda_2 + \lambda_3))$$
$$= (b_1 b_2 + b_1 b_3, \lambda_1\big(f(b_2) + f(b_3)\big) + \lambda_2 f(b_1)$$
$$+\lambda_3 f(b_1) + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3)$$
$$= (b_1 b_2 + b_1 b_3, \lambda_1 f(b_2) + \lambda_1 f(b_3) + \lambda_2 f(b_1) + \lambda_3 f(b_1)$$
$$+\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3) \dots \text{(IV)}$$

$$[(b_1,\lambda_1) * (b_2,\lambda_2)] + [(b_1,\lambda_1) * (b_3,\lambda_3)] = (b_1 b_2, \lambda_1 f(b_2) + \lambda_2 f(b_1) + \lambda_1\lambda_2)$$
$$+(b_1 b_3, \lambda_1 f(b_3) + \lambda_3 f(b_1) + \lambda_1\lambda_3)$$
$$= (b_1 b_2 + b_1 b_3, \lambda_1 f(b_2) + \lambda_1 f(b_3) + \lambda_2 f(b_1)$$
$$+\lambda_3 f(b_1) + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3) \dots \text{(V)}$$

O halde (IV) = (V) dir.

Ve,

$$[(b_1,\lambda_1) + (b_2,\lambda_2)] * (b_3,\lambda_3) = (b_1 + b_2, \lambda_1 + \lambda_2) * (b_3,\lambda_3)$$
$$= ((b_1 + b_2) b_3, (\lambda_1 + \lambda_2) f(b_3) + \lambda_3 f(b_1 + b_2)$$
$$+(\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_3)$$
$$= (b_1 b_3 + b_2 b_3, \lambda_1 f(b_3) + \lambda_2 f(b_3) + \lambda_3 f(b_1)$$
$$+\lambda_3 f(b_1) + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3) \dots \text{(VI)}$$

$$[(b_1,\lambda_1) * (b_3,\lambda_3)] + [(b_2,\lambda_2) * (b_3,\lambda_3)] = (b_1 b_3, \lambda_1 f(b_3) + \lambda_3 f(b_1) + \lambda_1\lambda_3)$$
$$+(b_2 b_3, \lambda_2 f(b_3) + \lambda_3 f(b_2) + \lambda_2\lambda_3)$$
$$= (b_1 b_3 + b_2 b_3, \lambda_1 f(b_3) + \lambda_2 f(b_3)$$
$$+\lambda_3 f(b_1) + \lambda_3 f(b_1) + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3) \dots \text{(VII)}$$

O halde (VI) = (VII) dir.

$$(b_1,\lambda_1) * [(b_2,\lambda_2) * (b_3,\lambda_3) = (b_1,\lambda_1) * [(b_2 b_3, \lambda_2 f(b_3) + \lambda_3 f(b_2) + \lambda_2\lambda_3)]$$
$$= (b_1 b_2 b_3, \lambda_1 f(b_2 b_3) + (\lambda_2 f(b_3) + \lambda_3 f(b_2)$$
$$+\lambda_2\lambda_3) f(b_1) + \lambda_1\lambda_2 f(b_3) + \lambda_1\lambda_3 f(b_2) + \lambda_1\lambda_2\lambda_3)$$
$$= (b_1 b_2 b_3, \lambda_1 f(b_2) f(b_3) + \lambda_2 f(b_3) f(b_1) + \lambda_3 f(b_2) f(b_1)$$
$$+\lambda_2\lambda_3 f(b_1) + \lambda_1\lambda_2 f(b_3) + \lambda_1\lambda_3 f(b_2) + \lambda_1\lambda_2\lambda_3) \dots \text{(VIII)}$$

$$[(b_1,\lambda_1) * (b_2,\lambda_2)] * (b_3,\lambda_3) = (b_1 b_2, \lambda_1 f(b_2) + \lambda_2 f(b_1) + \lambda_1\lambda_2) * (b_3,\lambda_3)$$
$$= (b_1 b_2 b_3, (\lambda_1 f(b_2) + \lambda_2 f(b_1) + \lambda_1\lambda_2) f(b_3)$$

$$+\lambda_3 f(b_1 b_2) + (\lambda_1 f(b_2) + \lambda_2 f(b_1) + \lambda_1\lambda_2)\lambda_3)$$
$$= (b_1 b_2 b_3, \lambda_1 f(b_2) f(b_3) + \lambda_2 f(b_3) f(b_1) + \lambda_3 f(b_2) f(b_1)$$
$$+\lambda_2\lambda_3 f(b_1) + \lambda_1\lambda_2 f(b_3) + \lambda_1\lambda_3 f(b_2) + \lambda_1\lambda_2\lambda_3)\ldots\text{(IX)}$$

O halde (VIII) = (IX) dur.

Dolayısıyla $*$ işlemi ile A cebir olur.

Ayrıca, $e = (e_0, 0)$, $e_0 = (1, 1, \ldots)$ için,

$$(b,\lambda) * (e_0, 0) = (be_0, \lambda f(e_0) + 0f(b) + \lambda 0)$$
$$= (b, \lambda f(e_0))$$
$$= (b, \lambda)$$

dir. Yani A nın birimi $e = (e_0, 0)$ dir.

$\|.\|: A \to \mathbb{R}$

$(b,\lambda) \to \|(b,\lambda)\|_A = \|b\|_\infty + |\lambda|$

biçiminde tanımlansın. $\|.\|$ anlamlı ve iyi tanımlıdır.

$0 \leq \|b\|_\infty$ ve $0 \leq |\lambda|$ olduğundan $0 \leq \|b\|_\infty + |\lambda|$ olur. Dolayısıyla $0 \leq \|(b,\lambda)\|_A$ dır.

$$(b,\lambda) = (\theta, 0) \Leftrightarrow b = \theta \text{ ve } \lambda = 0$$
$$\Leftrightarrow \|b\|_\infty = 0 \text{ ve } |\lambda| = 0$$
$$\Leftrightarrow \|b\|_\infty + |\lambda| = 0$$
$$\Leftrightarrow \|(b,\lambda)\|_A = 0$$

dır.

$$\|\beta(b,\lambda)\|_A = \|(\beta b, \beta\lambda)\|_A$$
$$= \|\beta b\|_\infty + |\beta\lambda|$$
$$= |\beta|\|b\|_\infty + |\beta||\lambda|$$
$$= |\beta|\|(b,\lambda)\|_A$$

dır.

$$\|(b_1,\lambda_1) + (b_2,\lambda_2)\|_A = \|(b_1 + b_2, \lambda_1 + \lambda_2)\|_A$$
$$= \|b_1 + b_2\|_\infty + |\lambda_1 + \lambda_2|$$
$$\leq \|b_1\|_\infty + \|b_2\|_\infty + |\lambda_1| + |\lambda_2|$$

dır. O halde $(A, \|.\|_A)$ normlu uzaydır.

$$\|(b_1,\lambda_1)\|_A \|(b_2,\lambda_2)\|_A = (\|b_1\|_\infty + |\lambda_1|)(\|b_2\|_\infty + |\lambda_2|)$$
$$= \|b_1\|_\infty \|b_2\|_\infty + |\lambda_2|\|b_1\|_\infty + |\lambda_1|\|b_2\|_\infty + |\lambda_1||\lambda_2| \ldots(*)$$

$$|f(b_2)| \leq \|f\|\|b_2\|_\infty \leq 1\|b_2\|_\infty \Rightarrow |\lambda_1||f(b_2)| \leq |\lambda_1|\|b_2\|_\infty \ldots(**)$$

$$\|(b_1,\lambda_1) * (b_2,\lambda_2)\|_A = \|(b_1 b_2, \lambda_1 f(b_2) + \lambda_2 f(b_1) + \lambda_1\lambda_2)\|_A$$

$$= \|b_1 b_2\|_\infty + |\lambda_1 f(b_2) + \lambda_2 f(b_1) + \lambda_1 \lambda_2|$$
$$\leq \|b_1\|_\infty \|b_2\|_\infty + |\lambda_1 f(b_2)| + |\lambda_2 f(b_1)| + |\lambda_1 \lambda_2|$$
$$(*) \text{ ve } (**) \leq \|b_1\|_\infty \|b_2\|_\infty + |\lambda_2| \|b_1\|_\infty + |\lambda_1| \|b_2\|_\infty + |\lambda_1| |\lambda_2|$$

dir. O halde A Banach cebiridir.

$l_\infty = B$ olmak üzere $OI(A) = \{(p, 0);\ p \in OI(B)\}$ olduğu kolayca görülür.

Şimdi $Orthe(A) = \{(b, \lambda); b \in Orthe(B) \text{ ve } \lambda \in \mathbb{R}\}$ olduğunu gösterelim. $\{(b, \lambda); b \in Orthe(B) \text{ ve } \lambda \in \mathbb{R}\} = D$ olsun. $a \in Orthe(A)$ ise en az bir $c \in B$, $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a = (c, \lambda)$ ve her $q \in OI(A)$ için $a * q = q * a$ dur. $q \in OI(A)$ olduğundan $q = (p, 0)$, $p \in OI(B)$ biçiminde yazılabilir.

$$a * q = q * a \Rightarrow (c, \lambda) * (p, 0) = (p, 0) * (c, \lambda)$$
$$\Rightarrow (cp, \lambda f(p) + 0f(c) + 0) = (pc, 0f(c) + \lambda f(p) + 0)$$
$$\Rightarrow cp = pc \text{ ve } \lambda f(p) = \lambda f(p)$$

olur. Buradan $c \in Orthe(B)$ elde edilir. Dolayısıyla $a \in D$ dir. Benzer şekilde, $(b, \lambda) \in D$ ve her $q \in OI(A)$ olsun. Burada $q = (p, 0)$, $p \in OI(B)$ biçiminde yazılabilir.

$$(b, \lambda) * q = q * (b, \lambda) \Rightarrow (b, \lambda) * (p, 0) = (p, 0) * (b, \lambda)$$
$$\Rightarrow (bp, \lambda f(p) + 0f(b) + 0) = (pb, 0f(b) + \lambda f(p) + 0)$$
$$\Rightarrow bp = pb \text{ ve } \lambda f(p) = \lambda f(p)$$

dir. O halde $(b, \lambda) \in Orthe(A)$ olur. Böylece $Orthe(A) = \{(b, \lambda); b \in Orthe(B) \text{ve } \lambda \in \mathbb{R}\}$ dir. Şimdi $(e, 0)$,$(0,1) \in Orthe(A)$ için,

$$(e, 0) \perp (0,1) \Rightarrow (e, 0) * (0,1) = (e0, 0f(0) + 1f(e) + 0)$$
$$= (0,1)$$

olur. Dolayısıyla $Orthe(A)$ f-cebiri değildir. O halde Sonuç 4.2.5 den $Orthe(A)$, A_{e} ye göre topolojik dolu değildir.

4.3. Ortomorfizm Elemanların Sıra Sürekliliği

E Riesz uzay olmak üzere her $T: E \to E$ ortomorfizmi sıra süreklidir. E Dedekind tam Riesz uzay ve $A = L(E)$ alındığında $Orthe(A) \subseteq A_{\mathrm{n}}$ dir. Fakat herhangi bir sıralı cebir için bu kapsama doğru değildir.

4.3.1. *Örnek*

$K = \{-\frac{1}{k};\ k \in \mathbb{N}^+\} \cup [0,1]$, $E = C(K)$ ve $A = L(E)$ olsun. $I \in Orthe(A)$ dir. Fakat Örnek 3.2.2 de gösterildiği üzere sıra sürekli eleman değildir.

A Dedekind tam olsa bile $Orthe(A) \subseteq A_{\mathrm{n}}$ olmayabilir.

4.3.2. *Örnek*

Örnek 4.2.2 deki $A = l_\infty \oplus \mathbb{R}$ cebiri göz önüne alındığında $Orthe(A) \subseteq A_{\mathrm{n}}$ doğru değildir. $(0,1) \in Orthe(A)$ dır. $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $p_{\mathrm{n}} = (1,1,\dots,1_{(\mathrm{n}.)},0,0,\dots)$ için, $(p_{\mathrm{n}}) \subseteq OI(B)$ ve $p_{\mathrm{n}} \uparrow e_0$ olsun. Buradan $e_0 - p_{\mathrm{n}} \downarrow 0$ olur. Her n için,

$$\begin{aligned}(e_0 - p_{\mathrm{n}}, 0) * (0,1) &= ((e_0 - p_{\mathrm{n}})0, 1f(e_0 - p_{\mathrm{n}}) + 0f(0) + 0) \\ &= (0, f(e_0 - p_{\mathrm{n}})\end{aligned}$$

olur. f lineer olduğundan $f(e_0 - p_{\mathrm{n}}) = f(e_0) - f(p_{\mathrm{n}})$ olarak yazılabilir. Ve f çarpımsal olduğundan $f(e_0) = f(e_0 e_0) = f(e_0)f(e_0) = f(e_0)^2$ dır. Buradan $f(e_0) = 1$ olur. Ayrıca, $(p_{\mathrm{n}}) \subseteq c_0$ olduğundan $f(p_{\mathrm{n}}) = 0$ dır. Yani $(e_0 - p_{\mathrm{n}}) * (0,1) = (0,1)$ elde edilir. Buradan $(0,1) \notin A_{\mathrm{n}}$ olur. O halde $Orthe(A) \subseteq A_{\mathrm{n}}$ doğru olmadığı görülür [1].

4.3.1. Önerme

A herhangi bir birimli sıralı cebir olsun. $a \in Orthe(A)$ iken $a \in A_{\mathrm{n_l}}$ olması için gerek ve yeter şart $a \in A_{\mathrm{n_r}}$ olmasıdır [1].

İspat

($\Rightarrow$) $a \in Orthe(A)$ ise her $p \in OI(A)$ için $pa = ap$ dir. Şimdi $a \in A_{\mathrm{n_l}}$ olsun. $a \in A_{\mathrm{n_l}}$ ise her $(p_\alpha) \subseteq OI(A)$ ve $p_\alpha \downarrow 0$ için $p_\alpha a \overset{\mathrm{o}}{\to} 0$ dır. Dolayısıyla $p_\alpha a = a p_\alpha$ olur. O halde $(p_\alpha) \subseteq OI(A)$ ve $p_\alpha \downarrow 0$ için $a p_\alpha \overset{\mathrm{o}}{\to} 0$ olduğundan $a \in A_{\mathrm{n_r}}$ dir.

($\Leftarrow$) Benzer şekilde ispatlanır.

4.3.1. Teorem

A Dedekind tam sıralı cebir ve $A_{\mathrm{s_l}}{}^{\mathrm{o}} \cap A_{\mathrm{n_l}}{}^{\mathrm{o}} = \{0\}$ olsun. O halde $Orthe(A) \subseteq A_{\mathrm{n}}$ dir [1].

İspat

$a \in Orthe(A)$ olsun. $0 \leq a$ seçilebilir. $OI(A)$ içinde $p_\alpha \downarrow 0$ ve A içinde $0 \leq ap_\alpha \downarrow b$ olsun. $OI(A)$ içinde ${p_\alpha}^{\mathrm{d}} \uparrow e$ dir.

$0 \leq b \leq ap_\alpha \Rightarrow 0 \leq {p_\alpha}^{\mathrm{d}} b \leq {p_\alpha}^{\mathrm{d}} ap_\alpha$

$\Rightarrow {p_\alpha}^{\mathrm{d}} b = 0$

olur.

$0 \leq b \leq ap_\alpha \Rightarrow 0 \leq b{p_\alpha}^{\mathrm{d}} \leq ap_\alpha {p_\alpha}^{\mathrm{d}}$

$\Rightarrow b{p_\alpha}^{\mathrm{d}} = 0$

dır. Yani ${p_\alpha}^{\mathrm{d}} b = b{p_\alpha}^{\mathrm{d}} = 0$ olur. Dolayısıyla $b \in {A_{\mathrm{s_l}}}^{\mathrm{o}} \cap {A_{\mathrm{n_l}}}^{\mathrm{o}} = \{0\}$ olduğundan $b = 0$ dır. Böylece $a \in A_{\mathrm{n_l}}$ elde edilir. O halde $Orthe(A) \subseteq A_{\mathrm{n}}$ olur.

4.3.1. Sonuç

E Dedekind tam Riesz uzay, $A = L(E)$ iken ${A_{\mathrm{s_l}}}^{\mathrm{o}} = \{0\}$ olduğundan $Orthe(A) \subseteq A_{\mathrm{n}}$ dir [1].

İspat

$0 \leq T \in L_{\mathrm{r}}(E)$, $(p_\alpha) \subseteq OI(L(E))$ ve $p_\alpha \uparrow e$ için $p_\alpha T = 0$ ise her $x \in E^+$ için $0 \leq Tx$ dir. Ayrıca,

$p_\alpha Tx \uparrow ITx = Tx \Rightarrow 0 \uparrow Tx$

$\Rightarrow Tx = 0$

$\Rightarrow T = 0$

dır. Keyfi $x \in E$ için $x = x^+ - x^-$ olsun.

$0 \leq Tx$

$= T(x^+ - x^-)$

$= Tx^+ - Tx^-$

$= 0$

dır. Keyfi $T \in L_{\mathrm{r}}(E)$ için $T = T^+ - T^-$ yazılabilir. ${A_{\mathrm{s_l}}}^{\mathrm{o}}$, A_{r} içinde ideal olduğundan $T^+, T^- \in {A_{\mathrm{s_l}}}^{\mathrm{o}}$ dır. $T^+ = 0$ ve $T^- = 0$ ise $T = T^+ - T^- = 0$ olur. O halde ${A_{\mathrm{s_l}}}^{\mathrm{o}} = \{0\}$ dır. Bir önceki teoremden ${A_{\mathrm{s_l}}}^{\mathrm{o}} \cap {A_{\mathrm{n_l}}}^{\mathrm{o}} = \{0\}$ olduğundan $Orthe(A) \subseteq A_{\mathrm{n}}$ olur.

4.3.1. Tanım

A birimli sıralı cebir, A_{r} Riesz uzay ve $a \in A$ olsun.

$L_a : A_{\mathrm{r}} \to A_{\mathrm{r}}$

$b \to L_a b = ab$

tanımlansın. Eğer $L_a b$ Riesz homomorfizm ise a ya *örgü homomorfizm eleman* denir [1].

4.3.2. Önerme

A sıralı cebir, A_{r} Riesz uzay ve $b \in A$ tersinir olsun. b ve b^{-1} nin örgü homomorfizm eleman olması için gerek ve yeter şart $b, b^{-1} \in A^{+}$ olmasıdır [1].

İspat

($\Rightarrow$) b ve b^{-1} örgü homomorfizm eleman olsun. $L_{\mathrm{b}} : A_{\mathrm{r}} \to A_{\mathrm{r}}$ örgü homomorfizm ise L_{b} pozitiftir. $0 \leq e$ olduğundan $L_{\mathrm{b}} e = be = b$ dir. O halde $0 \leq b$ olur. Yani $b \in A^{+}$ dır. Benzer şekilde, $L_{\mathrm{b}^{-1}} : A_{\mathrm{r}} \to A_{\mathrm{r}}$ örgü homomorfizm ise $L_{\mathrm{b}^{-1}}$ pozitiftir. $0 \leq e$ olduğundan $L_{\mathrm{b}^{-1}} e = b^{-1} e = b^{-1}$ olur. Yani $b^{-1} \in A^{+}$ dır.

($\Leftarrow$) $b, b^{-1} \in A^{+}$ olsun. Her $a \in A_{\mathrm{r}}$ için L sıralı cebir olduğundan $|L_{\mathrm{b}} a| = |ba| \leq b|a|$ dır. Buradan $b^{-1}|ba| \leq b^{-1}b|a| = |a|$ olur. Ayrıca $|a| = |b^{-1}ba| \leq b^{-1}|ba|$ dır. Dolayısıyla $|a| \leq b^{-1}|ba| \leq |a|$ olur. O halde $|a| = b^{-1}|ba|$ ve $b|a| = |ba|$ dır. Benzer şekilde, Her $a \in A_{\mathrm{r}}$ için L sıralı cebir olduğundan $|L_{\mathrm{b}^{-1}} a| = |b^{-1}a| \leq b^{-1}|a|$ dır. $b|b^{-1}a| \leq bb^{-1}|a| = |a|$ olur. Ayrıca $|a| = |bb^{-1}a| \leq b|b^{-1}a|$ dir. Dolayısıyla $|a| \leq b|b^{-1}a| \leq |a|$ olur. O halde $|a| = b|b^{-1}a|$ ve $b^{-1}|a| = |b^{-1}a|$ dir. Böylece b ve b^{-1} örgü homomorfizm eleman olur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Egor A. Alekhno tarafından [1] de sıralı cebirlerde verilen sıra sürekli elemanlar ve ortomorfizm elemanlar bu makale baz alınarak incelenmiştir. Bu tezde, ortomorfizm elemanlar uzayının ortomorfizm operatörler uzayına benzer özelliklerini elde etmek hedef olarak belirlenmiştir. Genel durumda aynı özelliklere sahip olmadıkları görüldükten sonra hangi şartlarda aynı özelliklere sahip olacakları araştırılarak belirlenen hedefe ulaşılmıştır.

A birimli sıralı cebir, A_{r} principal projeksiyon özelliğine sahip Riesz uzay, $e \in Orthe(A)$ birim eleman ve $Orthe(A)$, A_{e} ye göre topolojik dolu olmak üzere $Orthe(A)$ içinde birimin ürettiği band B_{e}, $Orthe(A)$ kümesine eşit olduğu,

A birimli sıralı cebir, A_{r} principal projeksiyon özelliğine sahip Riesz uzay ve $Orthe(A)$, A_{e} ye göre topolojik dolu ise $Orthe(A)$ f-cebiri olduğu gösterilmiştir.

Elde edilenlerin doğrultusunda, benzer araştırmaların sıra sürekli elemanlar içinde yapılabileceğini ve çalışmalarımızı bu yönde devam ettirmeyi düşünmekteyiz.

KAYNAKLAR

1. Alekhno, E. A. (2017). The order continuity in ordered algebras. *Positivity*, 21, 539-574.

2. Alekhno, E. A. (2012). The irreducibility in ordered Banach algebras. *Positivity*, 16(1), 143-176.

3. Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. (1985). *Positive operators*. London: Academic Press, 1-55, 106-126.

4. Luxemburg, W. A. J. and Zaanen, A. C. (1971). *Riesz Space I*. Amsterdam: North Holland, 48-121.

5. Zaanen, A. C. (1983). *Riesz Space II*. Amsterdam: North Holland, 89-140, 645-692.

6. Luxemburg, W. A. J. and Schep, A. R. (1978, January). A Radon-Nikodym type theorem for positive operators and a dual. *Indagationes Mathematicae*, 81(1), 357-375.

7. Turan, B. (2000). On f-Linearity and f-Orthomorphisms. *Positivity*, 4, 293-301.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: GÜRKÖK Hüma
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 17.04.1994 Ankara
Medeni hali	: Bekar
e-mail	: gurkokhuma@gmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek Lisans	Gazi Üniversitesi/ Matematik Bölümü	Devam Ediyor
Lisans	Hacettepe Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2016
Lise	Kanuni Lisesi	2012

İş Deneyimi

-

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1) Gürkök, H. (2019, 28-29 Haziran). Sıralı Cebirlerde Ortomorfizm Elemanlar, 14. Ankara Matematik Günleri Sempozyumu, Ankara.

Hobiler

Origami, Satranç, Basketbol.

GAZİ GELECEKTİR...