3-BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYINDA SPACELİKE VE TİMELİKE REGLE YÜZEYLER

Aysel TURGUT

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
1995

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**3-BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYINDA
SPACELİKE VE TİMELİKE
REGLE YÜZEYLER**

Aysel TURGUT

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 10/03/1995 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından (100/ 95) not takdir edilerek oybirliği / ~~oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Prof.Dr. H.Hilmi HACISALİHOĞLU
Danışman

Prof.Dr. Ertuğrul ÖZDAMAR
Üye

Prof.Dr. Ali ÇALIŞKAN
Üye

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

3-BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYINDA SPACELİKE VE TİMELİKE REGLE YÜZEYLER

Aysel TURGUT

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 10/03/1995 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından (100/ 95) not takdir edilerek oybirliği / ~~oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Prof.Dr. H.Hilmi HACISALİHOĞLU
Danışman

Prof.Dr. Ertuğrul ÖZDAMAR Üye	Prof.Dr. Ali ÇALIŞKAN Üye

ÖZET

Doktora Tezi

3-BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYINDA SPACELİKE VE TİMELİKE REGLE YÜZEYLER

Aysel TURGUT
Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. H.Hilmi HACISALİHOĞLU
1995, Sayfa: 96
Jüri: Prof.Dr. H.Hilmi HACISALİHOĞLU
Prof.Dr. Ertuğrul ÖZDAMAR
Prof.Dr. Ali ÇALIŞKAN

Bu tez, dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, çalışmanın kapsamı ve amacı belirtilmiştir.

İkinci bölümde, çalışma için gerekli olan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike regle yüzeyler, merkez noktası, boğaz çizgisi, dağılma parametresi ve açılabilir spacelike regle yüzeylere ait teoremler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, 3-boyutlu Minkowski uzayında timelike regle yüzeyler, merkez noktası, boğaz çizgisi, dağılma parametresi ve açılabilir timelike regle yüzeylere ait teoremler verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Spacelike, timelike, regle yüzey, Minkowski 3-uzayı, açılabilir regle yüzey, merkez noktası, boğaz eğrisi (çizgisi), dağılma parametresi.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis
SPACELIKE AND TIMELIKE RULED SURFACES ON THE MINKOWSKI 3-SPACE

Aysel TURGUT
Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr. H.Hilmi HACISALİHOĞLU
1995, Page: 96
Jury: Prof.Dr. H.Hilmi HACISALİHOĞLU
Prof.Dr. Ertuğrul ÖZDAMAR
Prof.Dr. Ali ÇALIŞKAN

This thesis is composed of four chapters.

In the first chapter, the aim and content of the thesis are explained.

In the second chapter, basic definitions and theorems are given.

In the third chapter, spacelike ruled surfaces, central point, curve of striction, distribution parameter and theorems with related to developable spacelike ruled surfaces are obtained in the three dimensional Minkowski space.

In the fourth chapter, timelike ruled surfaces, central point, curve of striction, distribution parameter and theorems with related to developable timelike ruled surfaces are obtained in the three dimensional Minkowski space.

KEY WORDS: Spacelike, timelike, ruled surface, Minkowski 3-space, developable ruled surface, curve of striction, central point, distribution parameter.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlarken, değerli vakitlerini esirgemeden bana ayıran, her adımda bilgisine başvurduğum sayın hocam Prof.Dr. Hilmi HACISALİHOĞLU'na en derin saygı ve teşekkürlerimi arz ederim.

Bu çalışmayı hazırlarken benden manevi desteklerini esirgemeyen aileme minnet ve şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}^3_1$	3-boyutlu Minkowski uzayı
$< \ >$	Lorentz anlamında iç çarpım
$\| \ \|$	Lorentz anlamında norm
$\wedge$	3-boyutlu Minkowksi uzayında vektörel çarpım
D	$\mathbb{R}^3_1$ üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu
$\overline{D}$	Regle yüzey üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu
II	Regle yüzeyin ikinci temel tensörü
S	Regle yüzeyin şekil operatörü
I	Yüzeyin birinci temel tensörü
α	Regle yüzeyin dayanak eğrisi
ℓ	Regle yüzeyin anadoğrusu
$\overline{\alpha}$	Boğaz çizgisi
P_x	Dağılma parametresi

1. GİRİŞ

Bu çalışmada, 3-boyutlu Öklid uzayında çok iyi bilinen regle yüzeyler ve regle yüzeylere ait olan boğaz noktası, boğaz çizgisi, dağılma parametresi, açılabilir regle yüzeyler ve bu kavramlara ait temel teoremlerin, 3-boyutlu $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayındaki karşılıkları aranmıştır.

3-boyutlu $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında spacelike bir regle yüzey; dayanak eğrisi spacelike bir eğri ve anadoğrusu spacelike bir doğru alınarak elde edilmiştir. Spacelike regle yüzeylerde boğaz noktası, boğaz çizgisi, dağılma parametresi belirlenerek bu kavramlara ait temel teoremler elde edilmiştir. Ayrıca spacelike bir regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şartlar verilmiştir.

3-boyutlu Minkowski uzayında timelike regle yüzeyler farklı seçeneklerde elde edilebilir:

i) Dayanak eğrisi spacelike bir eğri ve anadoğruları timelike birer doğru olan regle yüzeylere timelike regle yüzeyler diyeceğiz. Bu cins bir yüzeyin boğaz noktasına, boğaz çizgisine, dağılma parametresine ve açılabilir regle yüzey olmasına ait temel teoremler verilmiştir.

ii) Dayanak eğrisi timelike bir eğri ve anadoğruları spacelike birer doğru olan regle yüzeylere de timelike regle yüzeyler diyeceğiz. Bu cins bir yüzeyin boğaz noktasına, boğaz çizgisine, dağılma parametresine ve açılabilir regle yüzey olmasına dair teoremler verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümdeki temel kavramlar ve teoremler (O'Neill, 1983) den alınmıştır.

2.1. Lorentz Uzayı

Tanım 2.1.1 (Skalar Çarpım Uzayı) :

V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde tanımlı

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü bilineer, simetrik ve nondejenere ise g ye V üzerinde bir skalar çarpım, bu durumda V vektör uzayına da bir skalar çarpım uzayı denir.

Tanım 2.1.2 (Simetrik Bilineer Formun İndeksi) :

V bir skalar çarpım uzayı, W da üzerindeki skalar çarpım negatif tanımlı olacak şekilde V nin en büyük boyutlu altuzayı olsun. Bu durumda W nin boyutuna g skalar çarpımının indeksi denir.

g skalar çarpımının indeksi ν ise $0 \leq \nu \leq \text{boy}V$ dir. Ayrıca V skalar çarpım uzayının indeksi, üzerinde tanımlı g skalar çarpımının indeksi olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.3 (Lorentz Uzayı) :

V bir skalar çarpım uzayı olsun. V nin indeksi ν olmak üzere $\nu=1$ ve boy $V \geq 2$ ise V skalar çarpım uzayına bir Lorentz uzayı denir.

Tanım 2.1.4 (Spacelike, Timelike ve Null Vektör):

V bir Lorentz uzayı olsun. $v \in V$ için

$g(v, v) > 0$ veya $v=0$ ise v ye spacelike vektör,
$g(v,v) < 0$ ise v ye timelike vektör,
$g(v, v) = 0$ ve $v \neq 0$ ise v ye null (lightlike) vektör

ve $\|v\| = |g(v,v)|^{1/2}$ reel sayısına v vektörünün normu denir.

V Lorentz uzayında tüm timelike vektörlerin cümlesi Γ olsun. $u \in \Gamma$ için

$$C(u) = \{v \in \Gamma \mid g(v,u) < 0\}$$

u vektörünü kapsayan V Lorentz uzayının timekonisi denir.

Teorem 2.1.5.

V Lorentz uzayı ve iki timelike vektör v, ω olsun. Bu durumda

i) $|g(v,\omega)| \geq \|v\| \cdot \|\omega\|$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlikte eşitlik olması için gerek ve yeter şart v ve ω nin lineer bağımlı olmasıdır.

ii) v, ω timelike vektörleri aynı timekonide ise

$$g(v,\omega) = -\|v\| \cdot \|\omega\| \operatorname{ch}\varphi$$

olacak şekilde bir tek $\varphi \geq 0$ sayısı vardır. Bu φ sayısına v ve ω timelike vektörleri arasındaki hiperbolik açı denir.

Burada v ve ω vektörleri aynı timekonide değilseler o zaman

$$|g(v,\omega)| = \|v\| \cdot \|\omega\| \operatorname{ch}\varphi \tag{2.1}$$

dir.

V Lorentz uzayında spacelike vektörler v ve ω olmak üzere

$$\cos\theta = \frac{g(v,\omega)}{\|v\| \cdot \|\omega\|} \tag{2.2}$$

olacak şekilde bir tek $0 \leq \theta \leq \pi$ sayısı vardır. Bu sayıya v ve ω spacelike vektörler arasındaki açı denir v ve ω spacelike vektörler için

$$g(v,\omega) \leq \|v\| \cdot \|\omega\| \tag{2.3}$$

eşitsizliği vardır.

Tanım 2.1.6 (Spacelike, Timelike ve Lightlike Altuzay):

V bir Lorentz uzayı ve W, V nin bir altuzayı olsun. Bu durumda

$g|_W$ pozitif tanımlı ise W ya spacelike altuzay,
$g|_W$ nondejenere ve indeksi 1 ise W ya timelike altuzay,
$g|_W$ dejenere ise W ya lihgtlike altuzay denir.

Teorem 2.1.7.

V bir Lorentz uzayı , V nin bir altuzayı W ve boy W ≥ 2 olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler birbirine denktirler.

i) W timelike uzay ise W bir Lorentz vektör uzayıdır.
ii) W uzayı iki tane lineer bağımsız null vektör içerir.
iii) W uzayı bir tane timelike vektör içerir.

2.2. Yarı-Riemann Manifoldları

Tanım 2.2.1 (Metrik Tensör) :

M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerinde simetrik, nondejenere ve sabit indeksli (0,2)-tipinden g tensör alanına bir metrik tensör denir.

Başka bir deyişle g, M manifoldunun her p noktasına T_pM tanjant uzayı üzerinde bir g_p skalar çarpımı karşılık getirir ve g skalar çarpımının indeksi her $p\in M$ için aynıdır.

Tanım 2.2.2 (Yarı-Öklidyen Uzay) :

IR^n, n-boyutlu standart reel vektör uzayı üzerinde her $p\in IR^n$ ve $v_p, \omega_p \in T_pIR^n$ olmak üzere

$$< v_p,\omega_p >= \sum_{i=1}^{n-\nu} v_i\omega_i - \sum_{i=n-\nu+1}^{n} v_i\omega_i \tag{2.4}$$

eşitliğiyle verilen ν-indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen uzaya yarı-Öklidyen uzay denir ve IR^n_ν ile gösterilir. Burada $1\leq i\leq n$ olmak üzere, sırasıyla, v_i ve ω_i ler v_p ve ω_p tanjant vektörlerin bileşenidir.

Tanım 2.2.3 (Minkowski Uzayı) :

$\mathbb{R}^n_\nu$ yarı-Öklidyen uzayında $\nu=1$ ve $n\geq 2$ ise $\mathbb{R}^n_1$ yarı-Öklidyen uzayına Minkowski n-uzay denir.

Tanım 2.2.4 (Yarı-Riemann Manifoldu) :

M diferensiyellenebilir bir manifold ve g de M üzerinde sabit indeksli bir metrik tensör olmak üzere (M, g) ikilisine bir yarı-Riemann manifoldu denir.

Bundan sonraki gösterimlerde (M, g) yarı-Riemann manifoldunu sadece M ile göstereceğiz.

Tanım 2.2.5 (Yarı-Riemann Manifoldunun İndeksi) :

M bir yarı-Riemann manifoldu olsun. g nin sabit indeksine M yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir.

Tanım 2.2.6 (Lorentz Manifoldu):

M bir yarı-Riemann manifoldu olsun. boy$M\geq 2$ ve M nin indeksi 1 ise M ye bir Lorentz manifoldu denir.

Bu tanıma göre bir M Lorentz manifoldu için

$$g_p(v_p,\omega_p)=\sum_{i=1}^{n-1} v_i\Big|_p \omega_i\Big|_p - v_n\Big|_p \omega_n\Big|_p \quad ; \quad p\in M,\ v_p,\omega_p\in T_pM$$

dir.

Tanım 2.2.7 (Spacelike, Timelike ve Null Eğri) :

M bir Lorentz manifoldu ve $\alpha: I\subset\mathbb{R}\to M$ bir eğri olsun. α eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere

$g(T, T) > 0$ ise α eğrisine spacelike eğri,
$g(T, T) < 0$ ise α eğrisine timelike eğri,
$g(T, T) = 0$ ve $T\neq 0$ ise α eğrisine null eğri denir.

Eğrinin bir özel hali olan doğruyu gözönüne alalım. Doğrunun doğrultman vektörü spacelike ise doğru spacelike doğru, doğrultman vektörü timelike ise doğru timelike doğru, doğrultman vektörü null ise doğru null doğrudur.

Tanım 2.2.8 (Yarı-Riemann Altmanifoldu) :

M bir yarı-Riemann manifoldu ve $\overline{M}$, M nin bir altmanifoldu olsun. $j : \overline{M} \to M$ inclusion dönüşümü olmak üzere her $p \in \overline{M}$ için

$$\left(j^*(g)\right)(p) = g(j(p))$$

şeklinde tanımlı $j^*(g)$ dönüşümü $\overline{M}$ üzerinde bir metrik tensör ise $\overline{M}$ ye M nin bir yarı-Riemann altmanifoldu denir.

Bundan sonraki gösterimlerde $\overline{M}$ üzerindeki metrik tensör ile M üzerindeki metrik tensörü g ile göstereceğiz.

Tanım 2.2.9 (İndirgenmiş Konneksiyon) :

$\overline{M}$, M nin bir yarı-Riemann altmanifoldu ve M üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu D olsun.

$$D: \chi(\overline{M}) \times \overline{\chi}(\overline{M}) \to \overline{\chi}(\overline{M})$$

indirgenmiş fonksiyona $\overline{M}$ yarı-Riemann altmanifoldu üzerine indirgenmiş konneksiyon denir. Burada $\overline{\chi}(\overline{M})$ ile, $\overline{M}$ nin her bir p noktasına T_pM de bir tanjant vektör karşılık getiren vektör alanlarının $\Im(\overline{M})$-modülü gösterilmektedir.

Teorem 2.2.10.

$\overline{M}$, M nin bir yarı-Riemann altmanifoldu ve M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu D olsun. Her V, $W \in \chi(\overline{M})$ için

$$\overline{D}_V W = \tan D_V W \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlı $\overline{D}$ fonksiyonu $\overline{M}$ üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonudur.

Tanım 2.2.11 (Şekil Tensörü) :

$\overline{M}$, M nin bir yarı-Riemann altmanifoldu olsun.

$$\begin{aligned} II: \chi(\overline{M}) \times \chi(\overline{M}) &\rightarrow \chi(\overline{M})^{\perp} \\ (V,W) &\rightarrow II(V,W) = \mathrm{nor} D_V W \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\Im(\overline{M})$-bilineer ve simetrik fonksiyonuna $\overline{M}$ nin şekil tensörü (veya ikinci temel form tensörü) denir.

Tanım 2.2.12 (Yarı-Riemann Hiperyüzeyi) :

n-boyutlu bir M yarı-Riemann manifoldunun (n-1)-boyutlu bir $\overline{M}$ yarı-Riemann altmanifolduna M nin yarı-Riemann hiperyüzeyi denir.

Tanım 2.2.13 (Şekil Operatörü) :

M nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi $\overline{M}$ ve $\overline{M}$ nin birim normal vektör alanı N olsun. Her V, $W \in \chi(\overline{M})$ için

$$g\,(S(V),W) = g\,(II(V,W),N) \tag{2.6}$$

şeklindeki (1,1)-tipinden tensör alanı S ye $\overline{M}$ nin N den elde edilen şekil operatörü denir.

Diğer bir deyişle, S şekil operatörü $\overline{M}$ nin her p noktasında

$$S : T_p(\overline{M}) \rightarrow T_p(\overline{M})$$

bir lineer operatördür.

Teorem 2.2.14.

M nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi $\overline{M}$ ve S, $\overline{M}$ nin normali olan N den elde edilen şekil operatörü olsun. Bu durumda $V \in \chi(\overline{M})$ için

$$S(V) = -D_V N \tag{2.7}$$

dir ve ayrıca S şekil operatörü self-adjointdir.

M nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ nin N normalinden elde edilen şekil operatörü S olmak üzere, her V, $W \in \chi(\overline{M})$ için

$$II(V,W) = \varepsilon\, g(S(V),W)N \qquad (2.8)$$

ve burada $\varepsilon = g(N,N)$ dir. Yarı-Riemann hiperyüzeyleri için Gauss Denklemi; her V, $W \in \chi(\overline{M})$ olmak üzere

$$D_V W = \overline{D}_V W + \varepsilon\, g(S(V),W)N \qquad (2.9)$$

şeklinde verilir.

Tanım 2.2.15 (Asimptotik çizgi) :

M nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ nin normali olan N den elde edilen şekil operatörü S ve $\alpha: I \to \overline{M}$ eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere

$$g\,(S\,(T),\,T) = 0 \qquad (2.10)$$

ise α eğrisine asimptotik çizgi (eğri) denir.

Tanım 2.2.16 (Jeodezik Eğri) :

M nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ üzerindeki konneksiyon $\overline{D}$ ve $\alpha: I \to \overline{M}$ eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere

$$\overline{D}_T\, T = 0$$

ise α eğrisine $\overline{M}$ üzerinde bir jeodezik eğri denir.

2.3. 3-Boyutlu IR_1^3 Minkowski Uzayı Üzerinde Vektörel Çarpım

n-boyutlu, ν-indeksli IR_ν^n yarı-Öklidyen uzayın, boyutunu 3 ve indeksini 1 olarak alalım. O zaman IR^3 üzerinde her $p \in IR^3$ ve $v_p,\ \omega_p \in T_p IR^3$ için

$$< v_p\,,\ \omega_p >= v_1\omega_1 + v_2\omega_2 - v_3\omega_3$$

eşitliğiyle verilen 1-indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen uzaya 3-boyutlu Minkowski uzayı denir ve $\mathbb{R}_1^3$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.1 (Vektörel Çarpım) :

$\mathbb{R}_1^3$, Minkowski uzayında iki vektör v ve ω olsun. $v=(v_1,v_2,v_3)$ ve $\omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ olmak üzere

$$(v_3\omega_2 - v_2\omega_3 \ , \ v_1\omega_3 - v_3\omega_1 \ , \ v_1\omega_2 - v_2\omega_1) \tag{2.11}$$

vektörüne v ve ω nin vektörel çarpımı (veya dış çarpımı) denir. $v x \omega$ veya $v \wedge \omega$ şeklinde gösterilir (Akutagawa ve Nishikawa, 1990).

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \ i=j \text{ ise} \\ 0 & , \ i \neq j \text{ ise} \end{cases} \quad \text{ve} \quad e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$$

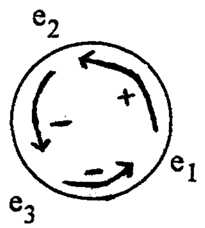
olmak üzere

$$v \wedge \omega = -\det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

veya

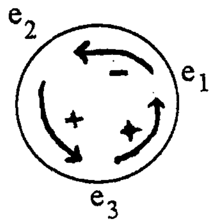
$$v \wedge \omega = \det \begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanabilir. Burada $e_1 \wedge e_2 = e_3$, $e_2 \wedge e_3 = -e_1$, $e_3 \wedge e_1 = -e_2$ dir. Saat yönünün tersi pozitif yön olarak alınmıştır. Bu ifadeyi



şeklinde sembolize edebiliriz.

Saat yönünün tersi negatif yön olarak kabul edilecek olursa o zaman $e_1 \wedge e_2 = -e_3$, $e_2 \wedge e_3 = e_1$, $e_3 \wedge e_1 = e_2$ olur ve



şeklinde sembolize edebiliriz. Bu durumda

$$v \wedge \omega = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Teorem 2.3.2.

$\mathbb{R}^3_1$, 3-boyutlu Minkowski uzayında üç vektör $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ ve $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ olsun. Bu durumda

i) $\langle u \wedge v, \omega \rangle = -\det(u, v, \omega)$ (2.13)

ii) $(u \wedge v) \wedge \omega = -\langle u, \omega \rangle v + \langle v, \omega \rangle u$ (2.14)

iii) $\langle u \wedge v, u \rangle = 0$ ve $\langle u \wedge v, v \rangle = 0$ (2.15)

iv) $\langle u \wedge v, u \wedge v \rangle = -\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle + (\langle u, v \rangle)^2$ (2.16)

dir.

İspat :

i) (2.11) den $u \wedge v = (u_3v_2 - u_2v_3\ ,\ u_1v_3 - u_3v_1\ ,\ u_1v_2 - u_2v_1)$

dir.

$$\langle u \wedge v, \omega \rangle = u_3v_2\omega_1 - u_2v_3\omega_1 + u_1v_3\omega_2 - u_3v_1\omega_2 - u_1v_2\omega_3 + u_2v_1\omega_3 \quad (2.17)$$

elde edilir.

$$-\det(u,v,\omega)=-\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{vmatrix}$$

$$-\det(u,v,\omega)=-u_1v_2\omega_3+u_1v_3\omega_2+u_2v_1\omega_3-u_2v_3\omega_1-u_3v_1\omega_2+u_3v_2\omega_1 \tag{2.18}$$

bulunur. (2.17) ve (2.18) den

$$<u\wedge v,\omega>=-\det(u,v,\omega)$$

dir.

$$\text{ii) } (u\wedge v)\wedge\omega=-\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ u_3v_2-u_2v_3 & u_1v_3-u_3v_1 & u_1v_2-u_2v_1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{vmatrix}$$

$$=(-u_1v_3\omega_3+u_3v_1\omega_3+u_1v_2\omega_2-u_2v_1\omega_2)e_1+(u_3v_2\omega_3-u_2v_3\omega_3$$
$$-u_1v_2\omega_1+u_2v_1\omega_1)e_2+(u_3v_2\omega_2-u_2v_3\omega_2-u_1v_3\omega_1+u_3v_1\omega_1)e_3$$

elde edilir. $(u\wedge v)\wedge\omega$ vektörünün birinci bileşenine $u_1v_1\omega_1$, ikinci bileşenine $u_2v_2\omega_2$ ve üçüncü bileşenine de $u_3v_3\omega_3$ ifadeleri bir eklenip bir çıkarılacak olursa

$$(u\wedge v)\wedge\omega=(-u_1v_3\omega_3+u_3v_1\omega_3+u_1v_2\omega_2-u_2v_1\omega_2-u_1v_1\omega_1+u_1v_1\omega_1)e_1$$
$$+(u_3v_2\omega_3-u_2v_3\omega_3-u_1v_2\omega_1+u_2v_1\omega_1+u_2v_2\omega_2-u_2v_2\omega_2)e_2$$
$$+(u_3v_2\omega_2-u_2v_3\omega_2-u_1v_3\omega_1+u_3v_1\omega_1+u_3v_3\omega_3-u_3v_3\omega_3)e_3$$
$$=(-u_1\omega_1-u_2\omega_2+u_3\omega_3)(v_1e_1+v_2e_2+v_3e_3)$$
$$+(v_1\omega_1+v_2\omega_2-v_3\omega_3)(u_1e_1+u_2e_2+u_3e_3)$$
$$=-<u,\omega>v+<v,\omega>u$$

elde edilir.

iii) (2.13) den, $<u\wedge v,u>=-\det(u,v,u)=0$ dır.
Aynı düşünce ile $<u\wedge v,v>=-\det(u,v,v)=0$ dır.

iv) (2.13), (2.14) ve determinant fonksiyonun özelliklerinden

$$
\begin{aligned}
<u\wedge v, u\wedge v> &= -\det(u,v,u\wedge v) \\
&= \det(u,u\wedge v,v) \\
&= -\det(u\wedge v,u,v) \\
&= <(u\wedge v)\wedge u, v> \\
&= <-<u,u>v+<v,u>u, v> \\
&= -<u,u><v,v>+(<u,v>)^2
\end{aligned}
$$

bulunur.

Teorem 2.3.3.

$\mathbb{R}^3_1$, 3-boyutlu Minkowski uzayında iki vektör u ve v olsun.

i) u ve v spacelike vektör ise $u\wedge v$ bir timelike vektördür.
ii) u spacelike ve v timelike vektör ise $u\wedge v$ spacelike vektördür.
iii) u spacelike ve v null vektör olmak üzere $<u,v>=0$ ise $u\wedge v$ null vektör, eğer $<u,v>\neq 0$ ise $u\wedge v$ spacelike vektördür.
iv) u ve v null vektör ise $u\wedge v$ spacelike vektördür.
v) u timelike ve v null vektör ise $u\wedge v$ spacelike vektördür.
vi) u ve v timelike vektör ise $u\wedge v$ spacelike vektördür.

İspat :

i) u ve v spacelike vektörler olduğundan $<u,u> >0$, $<v,v> >0$ ve $\|u\|^2 =<u,u>$, $\|v\|^2 =<v,v>$ dir. (2.16) dan

$$<u\wedge v,\ u\wedge v>=(<u,v>)^2-<u,u><v,v>=(<u,v>)^2-\|u\|^2\ \|v\|^2$$

dir. (2.3) den $(<u,v>)^2 \leq \|u\|^2\ \|v\|^2$ elde edilir ve buradan $(<u,v>)^2-\|u\|^2\ \|v\|^2 \leq 0$ bulunur. Burada u ve v vektörleri lineer bağımsızdır. Eğer lineer bağımlı iseler $u\wedge v=0$ dır. Bu nedenle $(<u,v>)^2-\|u\|^2\ \|v\|^2 \neq 0$ dır. O halde $<u\wedge v,\ u\wedge v> <0$ dır, $u\wedge v$ vektörü bir timelike vektördür.

ii) u spacelike ve v timelike vektör olduğundan $<u,u> >0$, $<v,v> <0$ ve $\|u\|^2 =<u,u>$, $-\|v\|^2 =<v,v>$ dir. (2.16) dan

$$
\begin{aligned}
<u\wedge v,\ u\wedge v> &= (<u,v>)^2-<u,u><v,v> \\
&= (<u,v>)^2+\|u\|^2\|v\|^2
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan $<u\wedge v,\, u\wedge v> \; >0$ dir. O halde $u\wedge v$ spacelike vektördür.

iii) u spacelike ve v null vektör olduğundan $<u,u> \; >0$ ve $<v,v>=0$ dir. (2.16) dan $<u\wedge v,\, u\wedge v>=(<u,v>)^2-<u,u><v,v>=(<u,v>)^2$ dir. Eğer $<u,v>=0$ ise $<u\wedge v,\, u\wedge v>=0$ dır. O zaman $u\wedge v$ null vektördür. Eğer $<u,v>\neq 0$ ise $<u\wedge v,\, u\wedge v> \; >0$ dir. Bu durumda $u\wedge v$ spacelike vektördür.

iv) u ve v null vektörler olduğundan $<u,u>=0$ ve $<v,v>=0$ dir. (2.16) dan

$$<u\wedge v,\, u\wedge v>=(<u,v>)^2-<u,u><v,v>=(<u,v>)^2$$

elde edilir. (O'Neill, 1983) den ortogonal iki null vektör lineer bağımlıdır. Bu durumda $u\wedge v=0$ dır. O halde $<u,v>\neq 0$ dır. Buradan $<u\wedge v,\, u\wedge v> \; >0$ olduğundan $u\wedge v$ spacelike vektördür.

v) u timelike ve v null vektör olduğundan $<u,u> \; <0$ ve $<v,v>=0$ dır. (2.16) dan

$$<u\wedge v,\, u\wedge v>=(<u,v>)^2-<u,u><v,v>=(<u,v>)^2$$

dir. (O'Neill, 1983) den $<u,v>\neq 0$ dir. O halde $u\wedge v$ spacelike vektördür.

vi) u ve v timelike vektör olduğundan $<u,u> \; <0$, $<v,v> \; <0$ ve $-\|u\|^2=<u,u>$, $-\|v\|^2=<v,v>$ dir. (2.16) dan

$$<u\wedge v,\, u\wedge v>=(<u,v>)^2-<u,u><v,v>=(<u,v>)^2-\|u\|^2\|v\|^2$$

elde edilir. Teorem 2.1.5 in (i) şıkkından

$$\begin{aligned}
&|<u,v>|>\|u\|\cdot\|v\| \\
&|<u,v>|^2>\|u\|^2\|v\|^2 \\
&|<u,v>|^2-\|u\|^2\|v\|^2>0
\end{aligned}$$

bulunur. (O'Neill, 1983) den $<u,v>\neq 0$ dir. O halde $u\wedge v$ spacelike vektördür.

2.4. 3-Boyutlu $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Yüzeyler

M yarı-Riemann manifoldu olarak 3-boyutlu $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski uzayını ve $\overline{M}$ yarı-Riemann hiperyüzeyi olarak da (U,φ) parametrizasyonu ile verilen

$$\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3_1$$
$$(u,v) \rightarrow \varphi(u,v) = \left(\varphi_1(u,v),\ \varphi_2(u,v),\ \varphi_3(u,v)\right)$$

φ(U) yüzeyini gözönüne alalım. $\left\{\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right),\ \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)\right\}$ lineer bağımsız olmak üzere yüzeyin vektör alanlarının bir bazı $\left\{\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right),\ \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)\right\}$ dir. Kısalık için $\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)$ yu φ_u ile göstereceğiz. Yüzeyin bir normali $N=\varphi_u \wedge \varphi_v$ dir. Gerçekten (2.15) den $<N, \varphi_u>=0$ ve $<N, \varphi_v>=0$ dır. Yüzeyin I. temel formunu yani metriğini hesaplamadan önce bazı eşitlikleri verelim.

$$E=<\varphi_u, \varphi_u>,\ \ F=<\varphi_u, \varphi_v>,\ \ G=<\varphi_v, \varphi_v> \qquad (2.19)$$

dir. Burada $<N,N>=<\varphi_u \wedge \varphi_v, \varphi_u \wedge \varphi_v>$ ve (2.16), (2.19) dan

$$\begin{aligned} <N,N> &= (<\varphi_u,\varphi_v>)^2 - <\varphi_u,\varphi_u><\varphi_v,\varphi_v> \\ <N,N> &= F^2 - EG \end{aligned} \qquad (2.20)$$

elde edilir. Şimdi yüzeyin I. temel formunu hesaplayalım. φ nin tam diferensiyeli

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv$$

dir.

$$\begin{aligned} I = (ds)^2 &= <d\varphi, d\varphi> \\ &= <\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial u}>(du)^2 + 2<\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}>dudv + <\frac{\partial\varphi}{\partial v}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}>(dv)^2 \\ &= E(du)^2 + 2Fdu\,dv + G(dv)^2 \end{aligned} \qquad (2.21)$$

bulunur. Buradan

$$\frac{(ds)^2}{(dv)^2}=E\left(\frac{du}{dv}\right)^2+2F\frac{du}{dv}+G \tag{2.22}$$

ve $\lambda=\frac{du}{dv}$, $I'=\frac{(ds)^2}{(dv)^2}$ olmak üzere

$$I'=E\lambda^2+2F\lambda+G \tag{2.23}$$

elde edilir. $\overline{M}$ yüzeyi üzerindeki $I=(ds)^2$ indirgenmiş metriğinin pozitif tanımlı veya indefinit olup olmadığını incelemek ile, $I=(dv)^2 I'$ olduğundan, I' yü incelemek aynıdır.

Tanım 2.4.1 (Nondejenere yüzey) :

IR^3_1, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey $\overline{M}$ olsun. Her $p\in\overline{M}$ ve her $\omega_p\in T_p\overline{M}$, $v_p\in T_p\overline{M}$ için

$$<v_p,\omega_p>=0 \Rightarrow v_p=0$$

önermesi sağlanıyorsa $\overline{M}$ ye IR^3_1 uzayında bir nondejenere yüzey denir (Beem ve Ehrlich, 1981).

$\overline{M}$ yüzeyi üzerindeki metriğin matris formu

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

dir. $\overline{M}$ yüzeyi üzerindeki metriğin nondejenere olması için gerek ve yeter şart

$$\det\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\neq 0$$

olmasıdır.

Bir başka ifadeyle, $\overline{M}$ yüzeyinin nondejenere yüzey olması için gerek ve yeter şart, yüzeyin normalinin null vektör alanı olmamasıdır.

Tanım 2.4.2 (Spacelike Yüzey) :

$\mathbb{R}^3_1$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik pozitif tanımlı ise $\overline{M}$ ye $\mathbb{R}^3_1$ de bir spacelike yüzey denir (Beem ve Ehrlich, 1981).

Teorem 2.4.3.

$\mathbb{R}^3_1$, 3-boyutlu Minkowski uzayında (U, φ) parametrizasyonu ile verilen bir

$$\begin{aligned}\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3_1 \\ (u,v) &\to \varphi(u,v) = \left(\varphi_1(u,v),\ \varphi_2(u,v),\ \varphi_3(u,v)\right)\end{aligned}$$

yüzeyinin spacelike bir yüzey olması için gerek ve yeter şart, yüzeyin normalinin timelike bir vektör alanı, yani

$$\langle N, N \rangle < 0 \qquad (2.25)$$

olmasıdır. Burada N, $\overline{M}$ yüzeyinin normal vektör alanıdır.

İspat:

$\overline{M}$ yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik $I = (dv)^2 I'$ ve $I' = E\lambda^2 + 2F\lambda + G$ dir. λ ya göre ikinci dereceden olan bu denklemin diskriminantı

$$\Delta = 4(F^2 - EG) = 4 \langle N, N \rangle$$

dir. $I' > 0$ olması için gerek ve yeter şart $\Delta < 0$ olmasıdır. O halde $\langle N, N \rangle < 0$ dır.

Tanım 2.4.4 (Timelike Yüzey) :

$\mathbb{R}^3_1$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik Lorentz metriği ise $\overline{M}$ ye timelike yüzey denir (Beem ve Ehrlich, 1981).

Teorem 2.4.5.

IR_1^3, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir $\overline{M}$ yüzeyinin timelike yüzey olması için gerek ve yeter şart yüzeyin normalinin spacelike bir vektör alanı, yani

$$<N, N> >0$$

olmasıdır.

İspat :

$\overline{M}$ yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik $I=(dv)^2 I'$ ve $I'=E\lambda^2+2F\lambda+G$ dir. λ ya göre ikinci dereceden olan bu denklemin diskriminantı

$$\Delta=4(F^2-EG)=4<N,N>$$

dir. I' nun Lorentz metriği olması için gerek ve yeter şart $\Delta>0$ olmasıdır. Buradan bir $\overline{M}$ yüzeyinin timelike olması için gerek ve yeter şart yüzeyin normalinin spacelike vektör alanı olmasıdır.

Tanım 2.4.6 (Gauss Eğriliği) :

IR_1^3, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey $\overline{M}$ ve $\overline{M}$ nin şekil operatörüne karşılık gelen matris S olsun. $p \in \overline{M}$ için

$$K(p)=\varepsilon \det S_p$$

$\overline{M}$ yüzeyinin p noktasındaki Gauss eğriliği ve $K:\overline{M}\to IR$ fonksiyonuna $\overline{M}$ yüzeyinin Gauss eğrilik fonksiyonu denir. Burada $\varepsilon=<N,N>=\pm1$ dir; N, $\overline{M}$ yüzeyinin normal vektör alanıdır.

$\overline{M}$ yüzeyi spacelike ise $\varepsilon=<N,N>=-1$ dir. O zaman

$$K=-\det S \tag{2.26}$$

dir.

M yüzeyi timelike ise $\varepsilon=<N,N>=1$ dir. O zaman

$$K=\det S \tag{2.27}$$

dir.

2.5. 3-Boyutlu IR_1^3 Minkowski Uzayında Regle Yüzeyler

(O'Neill, 1966) ve (Hacısalihoğlu, 1983) referanslarında 3-boyutlu Öklid uzayında, regle yüzey ve regle yüzeylere ait bazı kavramlar verilmiştir. Bu kavramları IR_1^3, 3-boyutlu Minkowski uzayına aşağıdaki gibi uyarlayabiliriz.

Tanım 2.5.1 (Regle Yüzey) :

IR_1^3, 3-boyutlu Minkowski uzayında, verilen bir ℓ doğrusunun, verilen bir α eğrisi boyunca hareket ettirilerek bir yüzey elde edilebiliyorsa, bu yüzeye 3-boyutlu Minkowski uzayında bir regle yüzey denir. Bu durumda verilen ℓ doğrusuna, regle yüzeyin bir anadoğrusu ve verilen α eğrisine, regle yüzeyin dayanak eğrisi denir.

Tanım 2.5.2 (Açılabilir Regle Yüzey) :

IR_1^3, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilirdir denir.

Tanım 2.5.3 (Boğaz Noktası) :

IR_1^3, 3-boyutlu Minkowski uzayında açılabilir olmayan bir regle yüzey verilsin. Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusunun ortak dikmesi varsa, bu dikmenin esas anadoğru üzerindeki ayağına boğaz (merkez veya striksiyon) noktası denir.

Tanım 2.5.4 (Boğaz Çizgisi) :

3-boyutlu Minkowski uzayında açılabilir olmayan bir regle yüzeyin anadoğrusu, dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine, regle yüzeyin boğaz (striksiyon) çizgisi (eğrisi) denir.

Tanım 2.5.5 (Ortogonal Yörünge) :

3-boyutlu Minkowski uzayında bir regle yüzeyin anadoğrularının herbirini dik olarak kesen bir eğri varsa, bu eğriye regle yüzeyin bir ortogonal yörüngesi denir.

3. 3-BOYUTLU IR_1^3 MİNKOWSKİ UZAYINDA SPACELİKE REGLE YÜZEYLER

3.1. Giriş

Bu bölümde 3-boyutlu IR_1^3 Minkowski uzayında dayanak eğrisi spacelike bir eğri, anadoğrusu spacelike bir doğru olan spacelike regle yüzeyler ve özellikleri incelenecektir. Ayrıca bu bölümde aksi belirtilmedikçe regle yüzeyin dayanak eğrisi spacelike bir eğri, anadoğruları da spacelike birer doğru olarak alınacaktır.

IR_1^3, 3-boyutlu Minkowski uzayında $\{0\}\subset I\subset IR$ olmak üzere diferensiyellenebilir birim hızlı bir eğri

$$
\begin{aligned}
\alpha : \; & I \to IR_1^3 \\
& t \to \alpha(t) = (\alpha_1(t),\, \alpha_2(t),\, \alpha_3(t))
\end{aligned}
$$

olsun. Her $t\in I$ için $\alpha(t)$ noktasındaki $T_{\alpha(t)}$ teğet vektörü ile anadoğrunun doğrultman vektörü lineer bağımsız olacak şekilde

$$
\begin{aligned}
\ell : \; & IR \to IR_1^3 \\
& v \to \ell(v) = (\alpha_1(t)+va_1(t),\, \alpha_2(t)+va_2(t),\, \alpha_3(t)+va_3(t))
\end{aligned}
$$

doğrusunu seçelim. Burada $1\leq i\leq 3$ olmak üzere $a_i(t)\in IR$, skalarları, $\alpha(t)$ noktasındaki doğrultman vektörünün bileşenleridir.

ℓ doğrusunun α eğrisi boyunca hareket etmesiyle, $(I x IR, \varphi)$ parametrizasyonu ile verilen bir regle yüzey olarak

$$
\begin{aligned}
\varphi : \; & I\times IR \to IR_1^3 \\
& (t,v) \to \varphi(t,v) = (\alpha_1(t)+va_1(t),\, \alpha_2(t)+va_2(t),\, \alpha_3(t)+va_3(t))
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu regle yüzeyi M ile gösterelim.

M regle yüzeyinin, α eğrisi boyunca ortonormal çatı alanı, α eğrisinin birim teğeti T ve ℓ anadoğrusunun teğet vektör alanı yani (doğrultman vektörü) Z ise bu düzlemde T ye dik olacak şekilde

$$Y = Z - \langle Z, T\rangle\, T$$

seçilerek Y spacelike vektör alanı elde edilir. Ayrıca

$$X=\frac{Y}{\|Y\|} \text{ alınırsa } \|X\|=1 \text{ ve } <X,T>=0 \tag{3.1}$$

olur.

$$N=T\wedge X \tag{3.2}$$

olmak üzere

$$<X,N>=0\,,\ <T,N>=0\,,\ <N,N>=-1$$

olur. Bu durumda {T, X, N} sistemi M nin ortonormal çatı alanıdır. Şimdi bu sistemin α-eğrisi boyunca değişimini inceleyelim. IR_1^3 üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu D olsun.

$$<T,T>=<X,X>=1\,,\ <N,N>=-1$$
$$T[<N,N>]=2<D_TN,N>=0$$

$<D_TN,N>=0$ bulunur. Benzer şekilde

$$<D_TT,T>=0\,,\ <D_TX,X>=0$$

elde edilir. a,b,c fonksiyonlarını

$$\begin{aligned}
a&=<D_TT,X>=T[<T,X>]-<T,D_TX>=-<T,D_TX>\\
b&=-<D_TT,N>=-T[<T,N>]+<T,D_TN>=<T,D_TN>\\
c&=-<D_TX,N>=-T[<X,N>]+<X,D_TN>=<X,D_TN>
\end{aligned} \tag{3.3}$$

eşitlikleriyle tanımlayalım. Burada

$$\begin{aligned}
D_TT&=aX+bN\\
D_TX&=-aT+cN\\
D_TN&=bT+cX
\end{aligned} \tag{3.4}$$

dir.

(3.4) ifadesinin matris formu

$$\begin{bmatrix} D_T T \\ D_T X \\ D_T N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ X \\ N \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

elde edilir.

Bir B matrisi $B^T = -\varepsilon B \varepsilon$ eşitliğini sağlıyorsa, bu matrise skew-adjoint matris denir (O'Neill, 1983). Burada $\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ matrisidir.

(3.5) ifadesindeki matrisi B ile gösterelim. Yani;

$$B = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda

$$-\varepsilon B \varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

dir. Diğer taraftan

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

dir. (3.6) ve (3.7) den $B^T = -\varepsilon B \varepsilon$ olduğundan B matrisi bir skew-adjoint matristir.

$$\begin{aligned} \varphi : I \times IR &\to IR_1^3 \\ (t, v) &\to \varphi(t, v) = \alpha(t) + vX(t) \end{aligned} \tag{3.8}$$

parametrizasyonu ile verilen M regle yüzeyi için

$$\begin{aligned} \varphi_t &= \dot{\alpha}(t) + v\dot{X}(t) = (1 - av)T + cvN \\ \varphi_v &= X(t) \end{aligned} \tag{3.9}$$

şeklinde ve

$$E = <\varphi_t, \varphi_t> = (1-av)^2 - c^2v^2 \quad (3.10)$$

$$F = <\varphi_t, \varphi_v> = 0 \ , \ G = <\varphi_v, \varphi_v> = 1$$

dir. Ayrıca (2.25) ifadesi gözönüne alınırsa

$$E = (1-av)^2 - c^2v^2$$

eşitliğini aşağıdaki şekilde yorumlayabiliriz.

$$E = (a^2 - c^2)v^2 - 2av + 1$$

ikinci dereceden denklemin kökleri

$$\min\left\{\frac{1}{a-c}, \frac{1}{a+c}\right\} \text{ ve } \max\left\{\frac{1}{a-c}, \frac{1}{a+c}\right\} \quad (3.11)$$

bulunur. Burada

$$a^2 - c^2 = <D_T X, D_T X> \quad (3.12)$$

dır. Bu durumda

1) $D_T X$ vektör alanı spacelike ise $a^2 - c^2 > 0$ dir. O zaman

$$-\infty < v < \min\left\{\frac{1}{a-c}, \frac{1}{a+c}\right\} \text{ veya } \max\left\{\frac{1}{a-c}, \frac{1}{a+c}\right\} < v < \infty \quad (3.13)$$

dur.

2) $D_T X$ vektör alanı timelike ise $a^2 - c^2 < 0$ dir. O zaman

$$\min\left\{\frac{1}{a-c}, \frac{1}{a+c}\right\} < v < \max\left\{\frac{1}{a-c}, \frac{1}{a+c}\right\} \quad (3.14)$$

dir.

3) $D_T X$ vektör alanı null ise $a^2 - c^2 = 0$ dir. O zaman

$$\begin{aligned} a > 0 \ \text{ise} \ v < \frac{1}{2a} \\ a < 0 \ \text{ise} \ v > \frac{1}{2a} \end{aligned} \tag{3.15}$$

dir.

Bu nedenle $D_T X$ vektör alanı hangi cins vektör alanı ise regle yüzeyin parametrizasyonunda tanımlı olan v parametresinin tanım aralığı, reel sayıların tümü olmayıp, yukarıda belirtilen aralıklar olacaktır. Bu bilgilere göre v nin tanım aralığını J ile gösterelim. Bu tanım aralığında v değeri sabit olmak üzere M spacelike regle yüzeyinin bir

$$\begin{aligned} \varphi_v : I \times \{v\} &\to M \\ (t,v) &\to \varphi_v(t,v) = \alpha(t) + vX(t) \end{aligned}$$

eğrisini belirtir. Bu eğrinin teğet vektör alanı

$$A = (1 - av)T + cvN \tag{3.16}$$

dir. (2.25) den $\langle N, N \rangle < 0$ ve $\langle A, A \rangle = -\langle N, N \rangle$ olduğundan A spacelike bir vektör alanıdır. Bu durumda φ_v eğrisi spacelike bir eğri olur ve

$$\langle X, A \rangle = (1 - av)\langle X, T \rangle + cv\langle X, N \rangle = 0 \tag{3.17}$$

dir.

3.2. Açılabilir Spacelike Regle Yüzeyler

Bir anadoğru boyunca, M spacelike regle yüzeyinin teğet düzlemlerinin çakışık olduğu genellikle doğru değildir. Ancak, bu düzlemlerin daima sabit olması, c fonksiyonu ile yakından ilgilidir. Bu durumda aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

Teorem 3.2.1.

M spacelike bir regle yüzey olsun. Bir anadoğru boyunca teğet düzlemlerin aynı olması için gerek ve yeter şart c=0 olmasıdır.

İspat :

M spacelike bir regle yüzey olsun. α dayanak eğrisi boyunca ortonormal çatı alanı $\{T, X, N\}$ ve anadoğrunun herhangi bir v=sbt değerine karşılık gelen noktasından geçen

$$\varphi_v : I \times \{v\} \to M$$

eğrisinin A=(1-av) T + cvN teğet vektör alanını gözönüne alalım.

α (t) noktasından geçen anadoğrunun her noktasında, teğet düzlemlerin sabit olması için, anadoğru boyunca N normal vektör alanının sabit olması gerekir. Çünkü bu halde, her teğet düzlemin ortak bir anadoğrusu var ve normalleri aynıdır. N normal vektörünün anadoğru boyunca sabit olması için $\{A,T\}$ sisteminin lineer bağımlı olması gerekir. Bu ise

$$A = (1-av)\, T + cvN$$

eşitliği gereğince c=0 olmasını gerektirir.

O halde bir anadoğru boyunca M nin teğet düzlemlerinin çakışık olması için c=0 olması gerek ve yeterdir.

Teorem 3.2.2.

Spacelike bir M regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart c=0 olmasıdır.

İspat :

Teoremin ispatı Tanım 2.5.2 ve Teorem 3.2.1 den açıktır.

Sonuç 3.2.3.

Spacelike bir M regle yüzeyi için

$$c = \det(T, X, \dot{X}) \tag{3.18}$$

dir.

İspat :

(3.4) den $\dot{X}$ vektör alanının değeri yerine yazılarak ve determinant fonksiyonunun özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}\det(T, X, \dot{X}) &= \det(T, X, -aT+cN)\\ &= -a\det(T, X, T) + c\det(T, X, N)\\ &= c\det(T, X, N)\\ &= c\end{aligned}$$

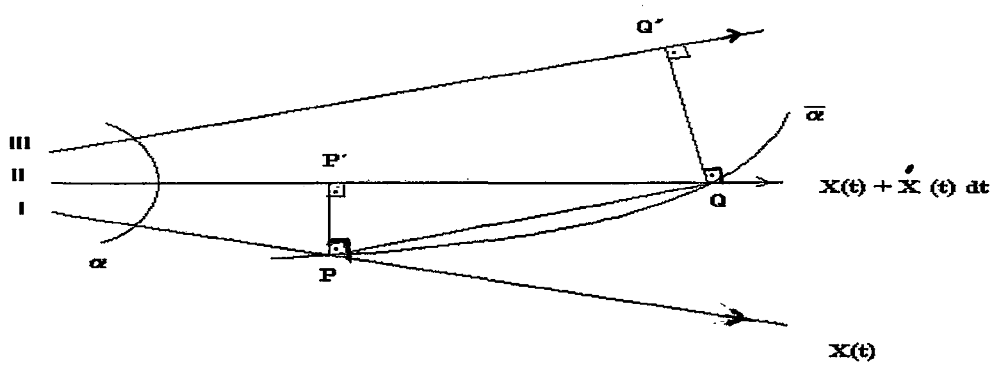
elde edilir. Burada $-1=\langle N,N\rangle=\langle T\wedge X,N\rangle= -\det(T,X,N)$ olup $\det(T,X,N)=1$ dir.

3.3. Boğaz Noktasının Yervektörü

Açılabilir olmayan spacelike bir regle yüzeyin merkez noktasının, dayanak eğrisine olan uzaklığı $\bar{u}$ olmak üzere, $\overline{\alpha}(t)$ yervektörü

$$\overline{\alpha}(t,\bar{u}) = \alpha(t) + \bar{u}\,X(t) \tag{3.19}$$

şeklinde ifade edilebilir, burada $\alpha(t)$ dayanak eğrisinin yervektörü ve X(t) de anadoğruya ait doğrultman vektörüdür. $\bar{u}$ parametresi, spacelike regle yüzeyin dayanak eğrisinin yervektörü ve doğrultman vektörü cinsinden bulunabilir. Spacelike regle yüzeyin, ilk ikisi X(t) ve X(t)+dX(t) olan, komşu üç anadoğrusu verilsin.



Şekil 3.1.

P, P′ ve Q, Q′ komşu anadoğruların ortak dikmelerinin anadoğrular üzerindeki ayakları olsunlar. Bu durumda P ve Q farklı iki boğaz noktasıdır. İlk iki komşu anadoğrunun ortak dikmesi

$$X(t)\wedge(X(t)+\dot{X}(t)dt)=X(t)\wedge\dot{X}(t)dt \tag{3.20}$$

nin bir katıdır. Limit halinde $\overrightarrow{PQ}$ vektörü $\overrightarrow{PP'}$ ile çakışacak ve boğaz eğrisinin teğeti olacaktır. Dolayısıyla

$$<X,\overrightarrow{PQ}>=0\,,\quad <X+D_TXdt\,,\overrightarrow{PQ}>=0 \tag{3.21}$$

olacağından

$$<D_TX\,,\ \overrightarrow{PQ}>=0$$

elde edilir.

$$<D_TX\,,\ \frac{d\overline{\alpha}}{dt}>=0$$

$$<D_TX\,,\ T+\overline{u}D_TX+\frac{d\overline{u}}{dt}X>=0$$

$$<T,\dot{X}>+\overline{u}<\dot{X},\dot{X}>=0$$

$$\overline{u}=-\frac{<T,\dot{X}>}{<\dot{X},\dot{X}>}=\frac{a}{a^2-c^2} \tag{3.22}$$

bulunur. Böylece boğaz eğrisinin yervektörü için (3.19) dan

$$\overline{\alpha}(t)=\alpha(t)-\frac{<T,\dot{X}>}{<\dot{X},\dot{X}>}X(t) \tag{3.23}$$

elde edilir. Burada $<\dot{X},\dot{X}>\neq 0$ dır.

Burada $\overline{u}=\dfrac{a}{a^2-c^2}$ =sabittir. Gerçekten (3.21) den $<\dot{\overline{\alpha}}(t)\,,\ X>=0$ dir. O zaman

$$<T+\left(\frac{a}{a^2-c^2}\right)\dot{X}+\left(\frac{a}{a^2-c^2}\right)^{\cdot}X,X>=0$$

$$<T,X>+\left(\frac{a}{a^2-c^2}\right)<\dot{X},X>+\left(\frac{a}{a^2-c^2}\right)^{\cdot}<X,X>=0$$

$$\left(\frac{a}{a^2-c^2}\right)^{\cdot}=0 \tag{3.24}$$

$$\frac{a}{a^2-c^2}=sbt$$

dir.

Teorem 3.3.1.

Açılabilir olmayan spacelike bir regle yüzeyin boğaz çizgisi dayanak eğrisinin seçilişinden bağımsızdır.

İspat :

Spacelike bir regle yüzeyin farklı iki dayanak eğrisi α ve β olmak üzere spacelike regle yüzey,

$$\varphi(t,v)=\alpha(t)+v\,X(t)$$

veya

$$\varphi(t,s)=\beta(t)+s\,X(t)$$

denklemiyle verilsin. Spacelike regle yüzeyin boğaz eğrileri sırasıyla,

$$\overline{\alpha}(t)=\alpha(t)-\frac{<T,\dot{X}>}{<\dot{X},\dot{X}>}X(t)$$

$$\overline{\beta}(t)=\beta(t)-\frac{<\dot{\beta},\dot{X}>}{<\dot{X},\dot{X}>}X(t)$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}\overline{\alpha}(t)-\overline{\beta}(t)&=\alpha(t)-\beta(t)-\frac{<T-\dot{\beta}(t),\dot{X}>}{<\dot{X},\dot{X}>}X(t)\\&=(v-s)X(t)-\frac{<(v-s)\dot{X},\dot{X}>}{<\dot{X},\dot{X}>}\;X(t)\\&=0\end{aligned}$$

bulunur. O halde boğaz çizgisi dayanak eğrisinin seçilişinden bağımsızdır.

Teorem 3.3.2.

Açılabilir olmayan bir M spacelike regle yüzeyi verilsin. $\alpha(t)$ noktasından geçen anadoğru üzerinde $\varphi(t,v_o)$ noktasının boğaz noktası olması için gerek ve yeter şart $\varphi\;(t,v_o)$ noktasındaki teğet düzlemin bir normalinin D_TX olmasıdır.

İspat :

M açılabilir olmayan spacelike bir regle yüzey olsun.

M nin dayanak eğrisi α üzerindeki $\alpha(t)$ noktasından geçen, anadoğru üzerinde $\varphi(t,v_o)$ noktasındaki teğet düzlemin bir normali $D_T X$ olsun.

$$\varphi_{v_o} : I \times \{v_o\} \rightarrow M$$

eğrisinin teğet vektör alanı $A=(1-av_o)\,T + cv_o N$ olmak üzere $<D_T X, A>=0$ dır. O halde

$$<-aT + cN, (1-av_o)\,T+v_o cN>=0$$

$$-a + (a^2-c^2)\,v_o=0$$

$$v_o = \frac{a}{a^2-c^2}$$

elde edilir. Bu ise $\varphi(t, v_o)$ noktasının boğaz noktası olması demektir.

$\alpha(t)$ noktasından geçen anadoğruya ait boğaz noktası $\varphi(t, v_o)$ olsun.

$$<\dot{X}, X>=<-aT+cN,\ X>=0$$
$$<\dot{X}, A>=<-aT+cN,\ (1-av)T+cvN>=-a+(a^2-c^2)v$$

dir. $\varphi(t, v_o)$ boğaz noktası olduğundan

$$-a+(a^2-c^2)v=0$$

olur. O zaman

$$<D_T X, A>=0$$

elde edilir. O halde $\varphi(t, v_o)$ boğaz noktasında teğet düzlemin bir normali $\dot{X}$ dir.

Boğaz noktasında $\dot{X}$ teğet düzlemin bir normali olduğundan boğaz noktasında $\dot{X}$ bir timelike vektördür. O halde

$$<\dot{X}, \dot{X}>=a^2-c^2<0 \tag{3.25}$$

dır.

Teorem 3.3.3.

Açılabilir olmayan bir M spacelike regle yüzeyinin boğaz eğrisi

$$\overline{\alpha}(t) = \alpha(t) + \frac{a}{a^2 - c^2} X(t)$$

bir spacelike eğridir.

İspat :

Teoremin ispatı için $\overline{\alpha}$ boğaz eğrisinin teğet vektör alanının spacelike bir vektör alanı olduğunu göstermek yeterlidir. $\overline{\alpha}$ nin teğet vektör alanı

$$\dot{\overline{\alpha}}(t) = \dot{\alpha}(t) + \left(\frac{a}{a^2 - c^2}\right)^{\cdot} X(t) + \left(\frac{a}{a^2 - c^2}\right) \dot{X}(t)$$

dir. (3.24) den

$$\frac{d\overline{\alpha}}{dt} = T + \left(\frac{a}{a^2 - c^2}\right) \dot{X}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} <\frac{d\overline{\alpha}}{dt}, \frac{d\overline{\alpha}}{dt}> &= <T,T> + 2\left(\frac{a}{a^2 - c^2}\right) <T,\dot{X}> + \frac{a^2}{\left(a^2 - c^2\right)^2} <\dot{X},\dot{X}> \\ &= 1 - 2\frac{a^2}{a^2 - c^2} + \frac{a^2}{\left(a^2 - c^2\right)^2}\left(a^2 - c^2\right) \\ &= 1 - \frac{a^2}{a^2 - c^2} \\ &= \frac{c^2}{c^2 - a^2} \end{aligned}$$

elde edilir. (3.25) den $c^2 - a^2 > 0$ dır. Bu durumda $\frac{c^2}{c^2 - a^2} > 0$ olur. O halde $<\frac{d\overline{\alpha}}{dt}, \frac{d\overline{\alpha}}{dt}> > 0$ dır.

3.4. Dağılma Parametresi

Spacelike bir M regle yüzeyinin dayanak eğrisi olarak boğaz eğrisini alalım. Bu durumda $\overline{u}=\frac{a}{a^2-c^2}=0$ olur. Buradan a=0 dir. O zaman $\dot{X}=-aT+cN$ olduğundan $\dot{X}$, yüzeyin normali N ile lineer bağımlıdır. O halde

$$\lambda\dot{X}=T\wedge X=\frac{d\overline{\alpha}}{dt}\wedge X$$

ve buradan

$$\lambda=\frac{<T\wedge X,\dot{X}>}{<\dot{X},\dot{X}>}=-\frac{\det(T,X,\dot{X})}{<\dot{X},\dot{X}>} \tag{3.26}$$

dir. λ ya spacelike regle yüzeyin dağılma parametresi denir ve λ veya P_X ile gösterilir. Burada $\dot{X}$ vektör alanı yüzeyin normali ile lineer bağımlı olduğundan, $\dot{X}$ bir timelike vektör alanıdır, dolayısıyla $<\dot{X},\dot{X}>\neq 0$ dır.

Teorem 3.4.1.

Bir M spacelike regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır.

İspat :

Teoremin ispatı (3.26), (3.18) ve Teorem 3.2.2 den açıktır.

Teorem 3.4.2.

Spacelike bir regle yüzey M olsun. M nin her noktasından bir tek ortogonal yörünge geçer.

İspat :

M nin bir parametrizasyonu

$$\begin{aligned} \varphi : I\times J &\to IR_1^3 \\ (t,v) &\to \varphi(t,v)=\alpha(t)+vZ(t) \end{aligned}$$

olsun. Ortogonal yörünge

$$\begin{aligned} \beta &: \tilde{I} \to M \\ s &\to \beta(s) = \alpha(s) + f(s)\, Z(s) \end{aligned} \tag{3.27}$$

şeklindedir. $\tilde{I}$, I nın içinde değilse bir öteleme ile $\tilde{I}$ yı I nın içine yatırabiliriz.. Yani $\tilde{I} \subset I$ olarak alabiliriz.

Şimdi $\varphi(s_0, v_0) = P_0$ noktasından bir tek ortogonal yörünge geçtiğini gösterelim. (3.27) nin türevini alırsak

$$\dot{\beta}(s) = \dot{\alpha}(s) + \dot{f}(s) Z(s) + f(s)\dot{Z}(s)$$

olur. β eğrisi her noktada Z(s) ye dik olduğundan $<\dot{\beta}(s), Z(s)>=0$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} <\dot{\alpha}(s) + \dot{f}(s)Z(s) + f(s)\dot{Z}(s),\ Z(s)> &= <\dot{\alpha}(s), Z(s)> \\ &\quad + \dot{f}(s) <Z(s),\ Z(s)> + f(s) <\dot{Z}(s),\ Z(s)> \\ \dot{f}(s) + <\dot{\alpha}(s),\ Z(s)> &= 0 \\ \frac{d\, f(s)}{ds} &= -<\dot{\alpha}(s),\ Z(s)> \\ d\, f(s) &= -<\dot{\alpha}(s),\ Z(s)> ds \\ f(s) &= -\int <\dot{\alpha}(s),\ Z(s)> ds + h \end{aligned}$$

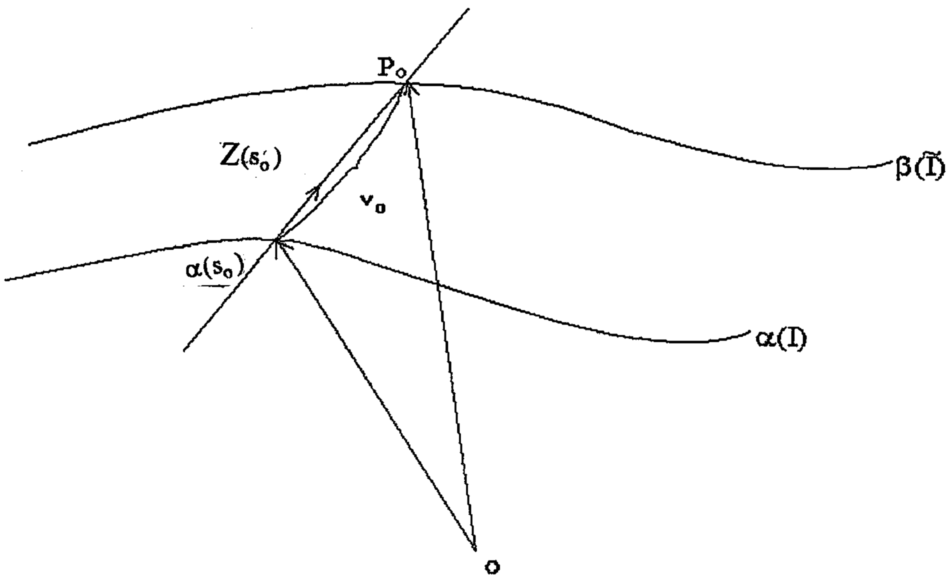
bulunur. Burada $<Z(s),\ Z(s)> = 1$ dir

$$-\int <\dot{\alpha}(s),\ Z(s)> ds = F(s)$$

dersek f(s)=F(s)+h olur. h keyfi seçildiğinden $<\dot{\beta}(s), Z(s)>=0$ koşulunu sağlayan bir çok eğri vardır. Bu eğrilerden P_0 noktasından geçeni bulmak istiyoruz. Buna göre

$$P_0 = \alpha(s) + (F(s) + h)\, Z(s)$$

olacak biçimde bir s sayısının bulunmasını istiyoruz.



Şekil 3.2.

$P_0 = \alpha(s_0)+v_0 Z(s_0)$ olduğundan $\alpha(s_0)+v_0 Z(s_0)=\alpha(s)+f(s)Z(s)$ olur. Buradan $\alpha(s_0)=\alpha(s)$ ve $v_0=f(s)$ bulunur. I aralığını α nın bire-bir olduğu bir aralık seçersek $s=s_0$ bulunur. $v_0=f(s)$ eşitliğinden $f(s_0)=F(s_0)+h$ ve buradan $h=f(s_0)-F(s_0)$ bulunur. Sonuç olarak P_0 noktasından geçen bir ve yalnız bir ortogonal yörünge vardır. Bu ortogonal yörünge her anadoğruyu keseceğinden $\tilde{I}=I$ olmak zorundadır.

Teorem 3.4.3.

Açılabilir olmayan spacelike bir regle yüzey M olsun. M nin herhangi iki anadoğrusu arasında ortogonal yörüngeler boyunca en uzun uzaklık, $v=\dfrac{a}{a^2-c^2}$ değerine karşılık gelen $\varphi_v : I \to M$ eğrisi boyunca ölçülen uzaklıktır.

İspat :

$t_1, t_2 \in I$ ve $t_1<t_2$ olmak üzere $\alpha(t_1)$ ve $\alpha(t_2)$ noktalarından geçen iki anadoğru gözönüne alalım. Bu iki anadoğru arasında, v=sbt ortogonal yörüngesi boyunca elde edilen uzaklığı j(v) ile gösterelim.

$$j(v)=\int_{t_1}^{t_2} \|A\|\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{|\langle A,A\rangle|}\, dt$$

$$j(v)=\int_{t_1}^{t_2} \left[(a^2-c^2)v^2-2av+1\right]^{1/2} dt$$

olur. j(v) nin maksimum değer alması $(j(v))^{\cdot}=0$ olması ile mümkündür. Bu ise

$$(a^2-c^2)v-a=0$$
$$v=\frac{a}{a^2-c^2}$$

olmasını gerektirir. Yani ortogonal yörünge olan

$$\beta : I \to M$$
$$t \to \beta(t)=\alpha(t)+\frac{a}{a^2-c^2}X(t)$$

eğrisi boyunca ölçülen uzaklık, sözkonusu iki anadoğru arasındaki ortogonal yörüngeler boyunca ölçülen en uzun uzaklıktır.

Teorem 3.4.4.

Spacelike bir regle yüzey M olsun. M nin anadoğruları M üzerinde asimptotik ve jeodezik çizgilerdir.

İspat :

Spacelike M regle yüzeyinin bir anadoğrusunun teğet vektör alanı X olsun. Her bir anadoğru bir doğru olduğundan IR_1^3 Minkowski uzayında bir jeodeziktir. Böylece

$$D_X X=0 \tag{3.28}$$

dir. (2.9) Gauss Denkleminde $\varepsilon=<N,N>=-1$ olduğundan

$$D_X X=\overline{D}_X X-<S(X),X>N$$

dir. Burada $\overline{D}$, M spacelike regle yüzeyi üzerindeki indirgenmiş konneksiyondur. (3.28) den

$$\overline{D}_X X=<S(X),X>N$$

dir. $(\overline{D}_X X)\in\chi(M)$ ve $(<S(X),X>N)\in\chi^{\perp}(M)$ dir. M spacelike yüzey (metrik nondejenere) olduğundan

$$\chi(\mathrm{IR}_1^3) = \chi(M) \oplus \chi^{\perp}(M) \quad \text{ve} \quad \chi(M) \cap \chi^{\perp}(M) = \{0\}$$

dir. O halde

$$\overline{D}_X X = 0 \qquad \text{ve} \qquad <S(X), X> = 0$$

elde edilir. M spacelike regle yüzeyinin anadoğruları asimptotik ve jeodezik çizgilerdir.

Teorem 3.4.5.

M spacelike bir regle yüzey olsun. M nin Gauss eğrilik fonksiyonu K olmak üzere her $p \in M$ için

$$K(p) \geq 0$$

dır.

İspat :

$p \in M$ noktasındaki anadoğrunun teğet vektör alanı X olsun. $\chi(M)$ nin {X, Y} ortonormal bazını elde edelim. X ve Y spacelike vektör alanlarıdır. M nin S şekil operatörünü ortonormal bazlar cinsinden

$$S(X) = c_1 X + c_2 Y$$
$$S(Y) = c_3 X + c_4 Y$$

şeklinde yazabiliriz. Bu durumda S şekil operatörüne karşılık gelen matris

$$S = \begin{bmatrix} <S(X), X> & <S(X), Y> \\ <S(Y), X> & <S(Y), Y> \end{bmatrix}$$

dir. (2.26), Teorem 2.2.14 ve Teorem 3.4.4 den

$$K = -\det S = (<S(X), Y>)^2 \tag{3.29}$$

bulunur. Buradan her $p \in M$ için $K(p) \geq 0$ dır.

Teorem 3.4.6.

M spacelike bir regle yüzey olsun. M nin dayanak eğrisinin birim teğet vektör alanı T, anadoğrusunun birim teğet vektör alanı (doğrultman vektörü) X ve yüzeyin birim normal vektör alanı N olmak üzere

$$\begin{aligned} T \wedge X &= N \\ T \wedge N &= X \\ X \wedge N &= -T \end{aligned} \tag{3.30}$$

dir.

İspat :

T ile X spacelike birim vektör alanları, N de timelike birim vektör alanı olduğundan

$$\langle T,T\rangle = \langle X,X\rangle = 1 \ ; \quad \langle N,N\rangle = -1$$

ve ayrıca det (T, X, N)=1 dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} &T \wedge X = \mu N \quad , \qquad \mu \in IR \\ &\langle T \wedge X, N\rangle = \mu \langle N,N\rangle \\ &-\det (T, X, N) = -\mu \\ &\mu = 1 \end{aligned}$$

bulunur. O halde $T \wedge X = N$ dir.

$$\begin{aligned} &T \wedge N = \gamma X \quad , \qquad \gamma \in IR \\ &\langle T \wedge N, X\rangle = \gamma \langle X,X\rangle \\ &-\det (T, N, X) = \gamma \\ &\det (T, X, N) = \gamma \\ &\gamma = 1 \end{aligned}$$

bulunur. O halde $T \wedge N = X$ dir.

$$X \wedge N = \xi T \quad , \quad \xi \in IR$$
$$<X \wedge N, T> = \xi <T,T>$$
$$-\det(X, N, T) = \xi$$
$$-\det(T, X, N) = \xi$$
$$\xi = -1$$

bulunur. O halde $X \wedge N = -T$ dir.

Teorem 3.4.7.

Açılabilir olmayan spacelike bir M regle yüzeyinin Gauss eğriliği bir anadoğru üzerinde boğaz noktasında minimum değerini alır.

İspat :

M, açılabilir olmayan spacelike bir regle yüzey olsun. $\chi(M)=sp\{A,X\}$ ortogonal bir bazdır.

$$A_0 = \frac{A}{\|A\|} = \frac{(1-av)T + cvN}{\left[(a^2-c^2)v^2 - 2av + 1\right]^{1/2}} \tag{3.31}$$

birim spacelike vektör alanı ve $\chi(M)=sp\ \{A_0,X\}$ ortonormal bir baz olur. $\varphi(t,v)$ noktasında M spacelike regle yüzeyin normalini $\tilde{N} = N_{\varphi(t,v)}$ ile gösterelim.

$$\begin{aligned}\tilde{N} &= A_0 \wedge X \\ &= \frac{1}{\|A\|}\big((1-av)T + cvN\big) \wedge X \\ &= \frac{1}{\|A\|}\{(1-av)T \wedge X + cvN \wedge X\}\end{aligned}$$

dir. (3.30) dan

$$\tilde{N} = \frac{1}{\|A\|}\{cvT + (1-av)N\} \tag{3.32}$$

elde edilir ve

$$<\tilde{N},\tilde{N}> = \frac{1}{\|A\|^2}\left[c^2v^2 - (1-av)^2\right] = -1$$

olduğundan $\tilde{N} = N_{\varphi(t,v)}$ birim timelike vektördür.

$$S(A_o) = \mu_1 A_o + \mu_2 X$$
$$S(X) = \mu_3 A_o + \mu_4 X$$

ve (3.29) dan

$$K = -\det S = (\mu_2)^2 = (< S(A_o), X >)^2 \tag{3.33}$$

dir. (2.7) den

$$S(A_o) = -D_{A_o}\tilde{N} = -\frac{d\tilde{N}}{dt^*} = -\frac{d\tilde{N}}{dt}\frac{dt}{dt^*}$$

dir. Burada t* ile φ_v , v=sbt eğrisinin yay parametresi gösterilmektedir. O halde

$$A_o = \frac{d\varphi(t,v)}{dt^*} = \frac{d\varphi(t,v)}{dt}\frac{dt}{dt^*} = A\frac{dt}{dt^*}$$

ve (3.31) den $\frac{dt}{dt^*} = \frac{1}{\|A\|}$ bulunur. Böylece

$$S(A_o) = -\frac{1}{\|A\|}\frac{d\tilde{N}}{dt}$$

$$= -\frac{1}{\|A\|}\left\{\left(\frac{1}{\|A\|}\right)^{\cdot}[cvT+(1-av)N] + \frac{1}{\|A\|}[-\dot{a}vN + (1\text{-}av)D_T N + \dot{c}vT + cvD_T T]\right\}$$

bulunur. (3.4) den $D_T T$ ve $D_T N$ değerleri yerlerine yazılır ve ifade T, X, N bazlarına göre düzenlenirse

$$S(A_o) = -\frac{1}{\|A\|}\left\{\left[\left(\frac{1}{\|A\|}\right)^{\cdot} cv + \frac{\dot{c}v}{\|A\|} + \frac{b(1-av)}{\|A\|}\right]T + \frac{c}{\|A\|}X + \left[\left(\frac{1}{\|A\|}\right)^{\cdot}(1-av) - \frac{\dot{a}v}{\|A\|} + \frac{bcv}{\|A\|}\right]N\right\}$$

elde edilir. Böylece

$$<S(A_o),X> = -\frac{c}{\|A\|^2} <X,X> = -\frac{c}{\|A\|^2}$$

olur. (3.33) den $\varphi(t,v)$ noktasındaki Gauss eğriliği

$$K(t,v) = \frac{c^2}{\|A\|^4}$$

$$K(t,v) = \frac{c^2}{\left[(a^2-c^2)v^2-2av+1\right]^2} \tag{3.34}$$

bulunur. Buradan

$$\frac{\partial K(t,v)}{\partial v} = -\frac{2c^2\left[(a^2-c^2)v^2-2av+1\right]\left[2(a^2-c^2)v-2a\right]}{\left[(a^2-c^2)v^2-2av+1\right]^4}$$

$$\frac{\partial K(t,v)}{\partial v} = -\frac{4c^2\left[(a^2-c^2)v-a\right]}{\left[<A,A>\right]^3}$$

dir. M açılabilir olmayan bir regle yüzey olduğundan $c \neq 0$ ve $<A,A> \, > 0$ dır. $\frac{\partial K(t,v)}{\partial v} = 0$ dan $v = \frac{a}{a^2-c^2}$ ekstremum noktası bulunur ve

$$\left.\frac{\partial^2 K(t,v)}{\partial^2 v}\right|_{v=\frac{a}{a^2-c^2}} > 0$$

dir. Böylece $v = \frac{a}{a^2-c^2}$ noktası $K(t,v)$ nin minimum noktasıdır. $v = \frac{a}{a^2-c^2}$ değerine anadoğru üzerindeki karşılık gelen nokta merkez noktası olduğundan X anadoğrusu üzerinde K fonksiyonu minimum değerini merkez noktasında alır. v nin bu değeri (3.34) de yerine yazılırsa

$$K_{min} = \frac{(a^2-c^2)^2}{c^2} \tag{3.35}$$

bulunur.

Teorem 3.4.8.

M spacelike bir regle yüzey olsun. M nin açılabilir olması için gerek ve yeter şart M nin Gauss eğrilik fonksiyonunun özdeş olarak sıfır olmasıdır.

İspat :

Teoremin ispatı (3.34) ve Teorem3.2.2 den kolayca görülür.

Teorem 3.4.9.

Bir M spacelike regle yüzeyinin dağılma parametresi yalnızca anadoğrulara bağlıdır.

İspat :

(3.35) den, bir anadoğru boyunca Gauss eğriliğinin minimum değeri

$$K_{min} = \frac{(a^2 - c^2)^2}{c^2}$$

dir. Boğaz noktasında a=0 ve (3.26) dan

$$K_{min} = c^2 = \left(\frac{1}{P_X}\right)^2$$

$$\sqrt{K_{min}} = \frac{1}{P_X}$$

$$P_X = \frac{1}{\sqrt{K_{min}}} \tag{3.36}$$

elde edilir. K_{min} değeri bir anadoğru boyunca bir tekdir. O halde dağılma parametresinin değeri bir anadoğru için aynıdır, anadoğrudan anadoğruya değişir.

3-boyutlu Öklid uzayındaki regle yüzeylerde, merkez noktası ile ilgili teorem, 1839 yılında Chasles tarafından verilmiştir. Şimdi bu teoremin 3-boyutlu Minkowski uzayındaki spacelike regle yüzeyler için karşılığını verelim.

Teorem 3.4.10.

M açılabilir olmayan spacelike bir regle yüzey olsun. M nin bir anadoğru boyunca normali N_v, bu anadoğru üzerindeki merkez noktasında M nin normali N ise N ile N_v arasındaki açının hiperbolik tanjantı, N_v nin başlangıç noktasının merkez noktasına olan uzaklığı ile doğru orantılıdır.

İspat :

M spacelike regle yüzeyi

$$\varphi : I \times J \to \mathrm{IR}_1^3$$
$$\varphi(t,v) = \left(\alpha_1(t) + va_1(t),\ \alpha_2(t) + va_2(t),\ \alpha_3(t) + va_3(t)\right)$$

olmak üzere (IxJ, φ) parametrizasyonu ile verilsin. v=0 için $\varphi(t,0)$ noktası M nin bir boğaz noktası olsun. $\alpha : I \to M$ eğrisi $\varphi(t,0)$ merkez noktasından geçen bir ortogonal yörünge olur. α eğrisinin birim teğet vektör alanı T ve $\alpha(t)$ noktasından geçen anadoğrunun birimi teğet vektör alanı X olmak üzere, $\varphi(t,0)$ noktasında Teorem 3.3.2 den $D_T X$ vektör alanı, M ye normaldir. Böylece v=0 olduğundan a=0 dir. Buna göre dağılma parametresi

$$P_X = \frac{1}{c} \tag{3.37}$$

dir. (3.32) den, anadoğru boyunca yüzeyin normali

$$N_v = \frac{cvT + N}{\sqrt{1 - c^2 v^2}} \tag{3.38}$$

dir. N ile N_v arasındaki açıyı θ ile gösterelim. N ile N_v birim timelike vektörlerdir. (3.38) den

$$\begin{aligned} \langle N, N_v \rangle &= \langle N, \frac{cvT + N}{\sqrt{1 - c^2 v^2}} \rangle \\ \langle N, N_v \rangle &= \frac{-1}{\sqrt{1 - c^2 v^2}} \end{aligned} \tag{3.39}$$

bulunur Teorem 2.1.5 in (ii) şıkkından

$$<N,N_v>=-\|N\|\,\|N_v\|\,ch\theta=-ch\theta \tag{3.40}$$

elde edilir. (3.37) den $c=\frac{1}{P_X}$ değeri (3.39) da yerine yazılırsa

$$ch\theta=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{P_X}\right)^2}}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} Sh^2\theta &= ch^2\theta-1 \\ &= \frac{1}{1-\left(\frac{v}{P_X}\right)^2}-1 \\ &= \frac{\left(\frac{v}{P_X}\right)^2}{1-\left(\frac{v}{P_X}\right)^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$th\theta=\frac{v}{P_X}$$

bulunur.

Sonuç 3.4.11.

Açılabilir olmayan spacelike bir M regle yüzeyi üzerinde bir anadoğru boyunca teğet düzlem $-\frac{1}{c}<v<\frac{1}{c}$ aralığındaki mümkün olan bütün dönmeleri yapar.

İspat :

M, açılabilir olmayan spacelike bir regle yüzey ve $p\in M$ noktasından geçen ℓ_p anadoğrusu üzerindeki merkez noktası p olsun. $p\in M$ noktasında M nin normali N_p

ve $q \in \ell_p$ noktasındaki normali de N_q olsun. p ve q noktaları arasındaki uzaklık v olmak üzere N_p ile N_q arasındaki açı θ ise Teorem 3.4.10 dan $\text{th}\theta = \frac{v}{P_X}$ dir. Boğaz noktasında $\dot{X}$ timelike vektör alanı olduğundan (3.14) den

$$\min\left\{\frac{1}{a-c}\,,\,\frac{1}{a+c}\right\} < v < \max\left\{\frac{1}{a-c}\,,\,\frac{1}{a+c}\right\}$$

dir. a=0 olduğundan

$$\min\left\{-\frac{1}{c}\,,\,\frac{1}{c}\right\} < v < \max\left\{-\frac{1}{c}\,,\,\frac{1}{c}\right\}$$

dir.

Eğer v=0 ise p ile q noktaları arasındaki uzaklık sıfirdır. O zaman p=q dir. Bu durumda thθ=0 ve buradan $e^{2\theta} = 1$ olur. Böylece θ=0 bulunur.

Eğer $0 < v < \max\left\{-\frac{1}{c}\,,\,\frac{1}{c}\right\}$ ise bu durumda thθ=vc dir. (3.3) ve Teorem 2.1.5 in (ii) şıkkından $c = -<\dot{X}, N> = \|\dot{X}\|\,\|N\|\,\text{ch}\theta$ olup c>0 dır. Buradan thθ>0 ve $e^{2\theta} > 1$ olup θ>0 bulunur.

Eğer $\min\left\{-\frac{1}{c}\,,\,\frac{1}{c}\right\} < v < 0$ ise bu durumda thθ<0 dır. Buradan θ<0 bulunur.

Sonuç olarak bir anadoğru boyunca teğet düzlem $-\frac{1}{c} < v < \frac{1}{c}$ değerlerine karşılık gelen mümkün bütün dönmeleri yapar.

Örnek 3.4.12.

$$\varphi(t,v) = \left(\left(\frac{\kappa}{\kappa^2-\tau^2} - v\right)\cos\sqrt{\kappa^2-\tau^2}\,t, \left(\frac{\kappa}{\kappa^2-\tau^2} - v\right)\sin\sqrt{\kappa^2-\tau^2}\,t, \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2-\tau^2}}\,t \right)$$

I. çeşit helikoid yüzeyi spacelike bir regle yüzeydir (Woestıjne, 1990). Burada κ ve τ dayanak eğrisi α nın, sırasıyla, birinci ve ikinci eğriliği, $|\kappa| > |\tau|$ olup $v < \min\left\{-\frac{1}{\tau+\kappa}, \frac{1}{\tau-\kappa}\right\}$ veya $v > \max\left\{\frac{-1}{\tau+\kappa}, \frac{1}{\tau-\kappa}\right\}$ dir. Yüzeyi $\varphi(t,v) = \alpha(t) + vX(t)$ formunda yazalım.

$$\varphi(t,v)=\left(\frac{\kappa}{\kappa^2-\tau^2}\cos\sqrt{\kappa^2-\tau^2}\,t,\frac{\kappa}{\kappa^2-\tau^2}\sin\sqrt{\kappa^2-\tau^2}\,t,\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2-\tau^2}}t\right)$$
$$+v\left(-\cos\sqrt{\kappa^2-\tau^2}\,t,-\sin\sqrt{\kappa^2-\tau^2}\,t,0\right)$$

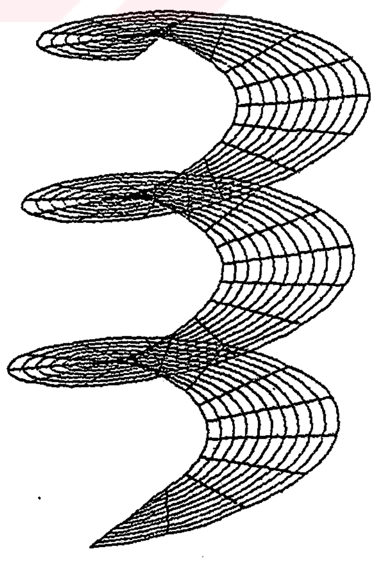
dir. $<\dot{\alpha},\dot{\alpha}>=1$ olduğundan α dayanak eğrisi spacelike ve $<X,X>=1$ olduğundan anadoğrular da spacelike birer doğrudur.

$$\dot{X}(t)=\left(\sqrt{\kappa^2-\tau^2}\sin\sqrt{\kappa^2-\tau^2}\,t,-\sqrt{\kappa^2-\tau^2}\cos\sqrt{\kappa^2-\tau^2}\,t,0\right)$$

ve $<\dot{X},\dot{X}>=\kappa^2-\tau^2$ olup $|\kappa|>|\tau|$ olduğundan $\dot{X}$ spacelike bir vektör alanıdır.

$$\det(T,X,\dot{X})=\begin{vmatrix}-\kappa\sin\sqrt{\kappa^2-\tau^2}\,t & \kappa\cos\sqrt{\kappa^2-\tau^2}\,t & \tau\\ -\cos\sqrt{\kappa^2-\tau^2}\,t & -\sin\sqrt{\kappa^2-\tau^2}\,t & 0\\ \sin\sqrt{\kappa^2-\tau^2}\,t & -\cos\sqrt{\kappa^2-\tau^2}\,t & 0\end{vmatrix}$$
$$=\tau\left(\cos^2\sqrt{\kappa^2-\tau^2}\,t+\sin^2\sqrt{\kappa^2-\tau^2}\,t\right)$$
$$=\tau$$

dir. Teorem 3.2.2 ve Sonuç 3.2.3 den I. çeşit helikoid yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart $\tau=0$ olmasıdır.



Şekil 3.3.

Örnek 3.4.13.

$$\varphi(t,v)=\left((\frac{\kappa}{\kappa^2-\tau^2}-v)\text{ch}\sqrt{\tau^2-\kappa^2}t,\frac{\tau t}{\sqrt{\tau^2-\kappa^2}},(\frac{\kappa}{\kappa^2-\tau^2}-v)\text{sh}\sqrt{\tau^2-\kappa^2}t\right)$$

II. çeşit helikoid yüzeyi spacelike bir regle yüzeydir (Woestıjne, 1990). Burada κ ve τ dayanak eğrisi α nın, sırasıyla, birinci ve ikinci eğriliği, $|\tau|>|\kappa|$ olup $\min\left\{\frac{-1}{\kappa-\tau},\frac{-1}{\kappa+\tau}\right\}<v<\max\left\{\frac{-1}{\kappa-\tau},\frac{-1}{\kappa+\tau}\right\}$ dir. Yüzeyi $\varphi(t,v)=\alpha(t)+vX(t)$ formunda yazalım.

$$\begin{aligned}\varphi(t,v)=&\left(\frac{\kappa}{\kappa^2-\tau^2}\text{ch}\sqrt{\tau^2-\kappa^2}t,\frac{\tau t}{\sqrt{\tau^2-\kappa^2}},\frac{\kappa}{\kappa^2-\tau^2}\text{sh}\sqrt{\tau^2-\kappa^2}t\right)\\&+v\left(-\text{ch}\sqrt{\tau^2-\kappa^2}t,\ 0,\ -\text{sh}\sqrt{\tau^2-\kappa^2}t\right)\end{aligned}$$

dir. $<\dot{\alpha},\dot{\alpha}>=1$ olduğundan α dayanak eğrisi spacelike ve $<X,X>=1$ olduğundan anadoğrular da spacelike birer doğrudur.

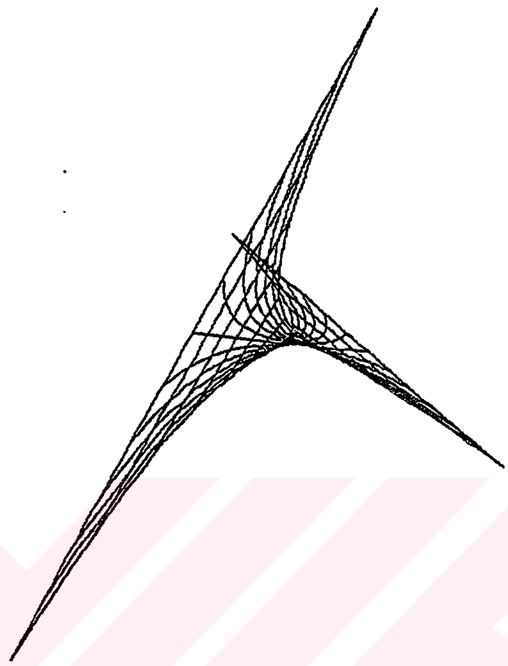
$$\dot{X}(t)=\left(-\sqrt{\tau^2-\kappa^2}\text{sh}\sqrt{\tau^2-\kappa^2}t,\ 0,\ -\sqrt{\tau^2-\kappa^2}\text{ch}\sqrt{\tau^2-\kappa^2}t\right)$$

ve $<\dot{X},\dot{X}>=\kappa^2-\tau^2$ olup $|\tau|>|\kappa|$ olduğundan $\dot{X}$ timelike bir vektör alanıdır. $<T,\dot{X}>=-\kappa$ ve (3.22) den

$\bar{u}=-\frac{<T,\dot{X}>}{<\dot{X},\dot{X}>}=\frac{\kappa}{\kappa^2-\tau^2}$ boğaz noktasının yervektörüdür. Boğaz eğrisi $\bar{\alpha}(t)=\alpha(t)+\frac{\kappa}{\kappa^2-\tau^2}X(t)$ ve

$$\begin{aligned}<\dot{\bar{\alpha}}(t),\dot{\bar{\alpha}}(t)>&=<T,T>+2\frac{\kappa}{\kappa^2-\tau^2}<T,\dot{X}>+\left(\frac{\kappa}{\kappa^2-\tau^2}\right)^2<\dot{X},\dot{X}>\\&=1-2\frac{\kappa^2}{\kappa^2-\tau^2}+\frac{\kappa^2}{\kappa^2-\tau^2}\\&=\frac{\tau^2}{\tau^2-\kappa^2}\end{aligned}$$

$\tau^2-\kappa^2>0$ olduğundan $\overline{\alpha}$ spacelike bir eğridir. det(T, X,$\dot{X}$)= -τ bulunur ve (3.26) dan dağılma parametresi $P_X=\frac{\tau}{\tau^2-\kappa^2}$ dir. Teorem 3.2.2 ve Sonuç 3.2.3 den II. çeşit helikoid yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart τ=0 olmasıdır.



Şekil 3.4.

Örnek 3.4.14.

$$\varphi(t,v)=\left(\frac{\kappa t^2}{2}+v,\ \frac{-\tau^2 t^3}{6}+t-\kappa v t,\ \frac{\kappa\tau\, t^3}{6}+\tau v t\right)$$

II. çeşit Enneper'in eşlenik yüzeyi spacelike bir regle yüzeydir (Woestıjne, 1990). Burada κ ve τ dayanak eğrisi α nın, sırasıyla , birinci ve ikinci eğriliği ve $|\kappa|=|\tau|\neq 0$ olup

$$\kappa>0 \quad \text{ise} \quad v<\frac{1}{2\kappa}$$
$$\kappa<0 \quad \text{ise} \quad v>\frac{1}{2\kappa}$$

dir. Yüzeyi $\varphi(t,v)=\alpha(t)+vX(t)$ formunda yazalım.

$$\varphi(t,v)=\left(\frac{\kappa t^2}{2},\ \frac{-\tau^2 t^3}{6}+t,\ \frac{\kappa\tau\, t^3}{6}\right)+v(1,\ -\kappa t,\ \tau t)$$

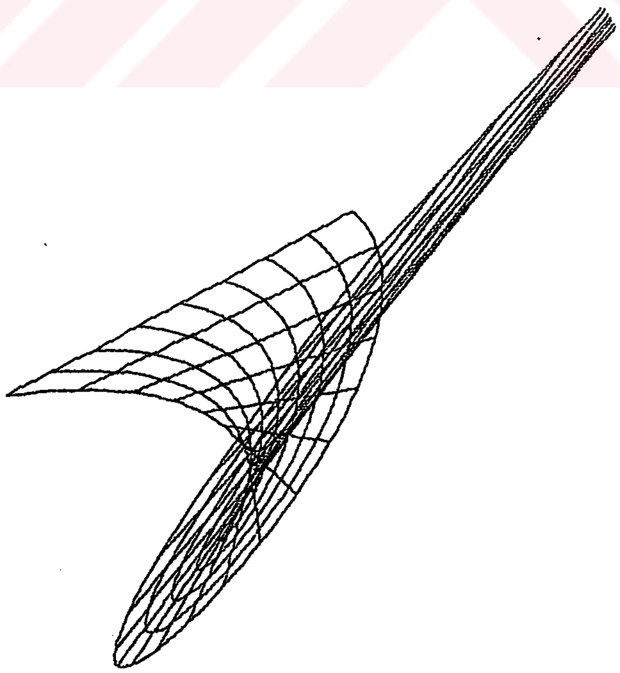
dir. $<\dot{\alpha},\dot{\alpha}>=1$ olduğundan α dayanak eğrisi spacelike ve $<X,X>=1$ olduğundan anadoğrular da spacelike birer doğrudur.

$$\dot{X}=(0,-\kappa,\tau) \quad \text{ve} \quad <\dot{X},\dot{X}>=\kappa^2-\tau^2$$

olup $|\kappa|=|\tau|$ olduğundan $\dot{X}$ bir null vektör alanıdır.

$$\det\,(T,X,\dot{X})=\begin{vmatrix} \kappa t & 1-\frac{\tau^2 t^2}{2} & \frac{\tau\kappa t^2}{2} \\ 1 & -\kappa t & \tau t \\ 0 & -\kappa & \tau \end{vmatrix}=-\tau$$

dur. Teorem 3.2.2 ve Sonuç 3.2.3 den bu yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart $\tau=0$ olmasıdır.



Şekil 3.5.

Örnek 3.4.15.

$$\varphi(t,v) = \alpha(t) + vX(t) = (0,t,0) + v(t,0,0)$$

xy-düzlemi spacelike bir regle yüzeydir (Woestijne, 1990). $<\dot{\alpha}, \dot{\alpha}>=1$ olduğundan dayanak eğrisi spacelike $<X,X>=t^2>0$ olduğundan anadoğrular da spacelike birer doğrudur.

4. 3-BOYUTLU $\mathbb{R}^3_1$ MİNKOWSKİ UZAYINDA TİMELİKE REGLE YÜZEYLER

4.1. Dayanak Eğrisi Spacelike ve Anadoğruları Timelike Olan Regle Yüzeyler

Bu kesimde 3-boyutlu $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski uzayında dayanak eğrisi spacelike bir eğri, anadoğruları timelike doğrular olan timelike regle yüzeyler ve özellikleri incelenecektir. Ayrıca bu kesimde aksi belirtilmedikçe regle yüzeyin dayanak eğrisi spacelike bir eğri, anadoğruları da timelike doğrular olarak alınacaktır.

$\mathbb{R}^3_1$, 3-boyutlu Minkowski uzayında $\{0\}\subset I\subset \mathbb{R}$ olmak üzere diferensiyellenebilir birim hızlı bir eğri

$$\begin{aligned} \alpha : I &\to \mathbb{R}^3_1 \\ t &\to \alpha(t) = \left(\alpha_1(t),\ \alpha_2(t),\ \alpha_3(t)\right) \end{aligned}$$

olsun. Her $t\in I$ için $\alpha(t)$ noktasındaki $T_{\alpha(t)}$ teğet vektörü ile anadoğrunun doğrultman vektörü lineer bağımsız olacak şekilde

$$\begin{aligned} \ell : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3_1 \\ v &\to \ell(v) = \left(\alpha_1(t)+vb_1(t),\ \alpha_2(t)+vb_2(t),\ \alpha_3(t)+vb_3(t)\right) \end{aligned}$$

doğrusunu seçelim. Burada $1\leq i\leq 3$ olmak üzere $b_i(t)\in\mathbb{R}$ skalarları, $\alpha(t)$ noktasındaki doğrultman vektörünün bileşenleridir.

ℓ doğrusunun α eğrisi boyunca hareket etmesiyle, $(I\times\mathbb{R},\varphi)$ parametrizasyonu ile verilen bir

$$\begin{aligned} \varphi : I\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3_1 \\ (t,v) &\to \varphi(t,v) = \left(\alpha_1(t)+vb_1(t),\ \alpha_2(t)+vb_2(t),\ \alpha_3(t)+vb_3(t)\right) \end{aligned}$$

regle yüzeyi elde edilir. Bu regle yüzeyi M ile gösterelim.

M regle yüzeyinin, α eğrisi boyunca ortonormal çatı alanı, α eğrisinin birim teğeti T ve ℓ anadoğrusunun teğet vektör alanı Z ise bu düzlemde T ye dik olacak şekilde

$$Y = Z - \langle Z, T\rangle T$$

seçilerek Y timelike vektör alanı elde edilir. Ayrıca

$$X = \frac{Y}{\|Y\|} \text{ alınırsa } \langle X,X\rangle = -1 \text{ ve } \langle X,T\rangle = 0 \tag{4.1}$$

olur.

$$N = T \wedge X \tag{4.2}$$

olmak üzere

$$\langle X,N\rangle = 0\ ,\ \langle T,N\rangle = 0\ ,\ \langle N,N\rangle = 1$$

olur. Bu durumda $\{T,N,X\}$ sistemi M nin ortonormal çatı alanıdır. Şimdi bu sistemin α-eğrisi boyunca değişimini inceleyelim. $\mathbb{R}^3_1$ üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu D olsun.

$$\langle T,T\rangle = 1\ ,\ \langle X,X\rangle = -1\ ,\ \langle N,N\rangle = 1$$
$$T[\langle N,N\rangle] = 2\langle D_T N,N\rangle = 0$$
$$\langle D_T N,N\rangle = 0$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\langle D_T T,T\rangle = 0\ ,\ \langle D_T X,X\rangle = 0$$

elde edilir. a,b,c fonksiyonlarını

$$\begin{aligned} a &= \langle T,D_T X\rangle = T\langle T,X\rangle - \langle D_T T,X\rangle = -\langle D_T T,X\rangle \\ b &= \langle D_T T,N\rangle = T\langle T,N\rangle - \langle T,D_T N\rangle = -\langle T,D_T N\rangle \\ c &= \langle D_T X,N\rangle = T\langle X,N\rangle - \langle X,D_T N\rangle = -\langle X,D_T N\rangle \end{aligned} \tag{4.3}$$

eşitlikleriyle tanımlayalım. Burada

$$\begin{aligned} D_T T &= \ \ bN + aX \\ D_T N &= -bT + cX \\ D_T X &= \ \ aT + cN \end{aligned} \tag{4.4}$$

dir.

(4.4) ifadesinin matris formu

$$\begin{bmatrix} D_T T \\ D_T N \\ D_T X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b & a \\ -b & 0 & c \\ a & c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ X \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

elde edilir.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & b & a \\ -b & 0 & c \\ a & c & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin transpozu

$$C^T = \begin{bmatrix} 0 & -b & a \\ b & 0 & c \\ a & c & 0 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

dir. Diğer taraftan

$$-\varepsilon C \varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & -b & a \\ b & 0 & c \\ a & c & 0 \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

dir. (4.6) ve (4.7) den $C^T = -\varepsilon C \varepsilon$ olduğundan C matrisi bir skew-adjoint matristir.

$$\begin{aligned} \varphi : I \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_1^3 \\ (t, v) &\to \varphi(t, v) = \alpha(t) + vX(t) \end{aligned} \tag{4.8}$$

parametrizasyonu ile verilen M regle yüzeyi için

$$\begin{aligned} \varphi_t &= \dot{\alpha}(t) + v\dot{X}(t) = (1 + av)T + cvN \\ \varphi_v &= X(t) \end{aligned} \tag{4.9}$$

şeklinde ve

$$E = \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle = (1+av)^2 + c^2 v^2 \tag{4.10}$$

$$F = \langle \varphi_t, \varphi_v \rangle = 0 \quad , \quad G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = -1$$

dir. Buradan $\langle N,N \rangle = F^2 - EG = E$ ve $E > 0$ olduğundan $\langle N,N \rangle > 0$ bulunur. Teorem 2.4.5 den M regle yüzeyi bir timelike yüzeydir.

$\varphi(t,v) = \alpha(t) + vX(t)$ ile verilen ifade ($I \times IR$, φ) parametrizasyonunda her $v \in IR$ sabit değeri için M nin bir $\varphi_v : I \times \{v\} \to M$ eğrisini belirtir. Bu eğrinin teğet vektör alanı ise

$$A = T + v\, D_T X$$

ve burada $D_T X = aT + cN$ olduğundan

$$A = (1+av)\, T + cvN \tag{4.11}$$

şeklinde bulunur. $\langle A,A \rangle = E$ ve $E > 0$ olduğundan A spacelike bir vektör alanıdır. Bu durumda φ_v eğrisi spacelike bir eğri ve

$$\langle X,A \rangle = (1+av) \langle X,T \rangle + cv \langle X,N \rangle = 0 \tag{4.12}$$

dır.

Bir anadoğru boyunca, M timelike regle yüzeyinin teğet düzlemlerinin çakışık olduğu genellikle doğru değildir. Ancak, bu düzlemlerin daima sabit olması, c fonksiyonu ile yakından ilgilidir. Bu durumda aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

Teorem 4.1.1.

M timelike bir regle yüzey olsun. Bir anadoğru boyunca teğet düzlemlerin aynı olması için gerek ve yeter şart $c=0$ olmasıdır.

İspat :

M timelike bir regle yüzey olsun. α dayanak eğrisi boyunca ortonormal çatı alanı $\{T,N,X\}$ ve anadoğrunun herhangi bir v=sbt değerine karşılık gelen noktasından geçen

$$\varphi_v : I\times\{v\}\rightarrow M$$

eğrisinin A= (1+av)T+cvN teğet vektör alanını gözönüne alalım.

$\alpha(t)$ noktasından geçen anadoğrunun her noktasında, teğet düzlemlerin sabit olması için, anadoğru boyunca N normal vektör alanının sabit olması gerekir. Çünkü bu halde, her teğet düzlemin ortak bir anadoğrusu var ve normalleri aynıdır. N normal vektörünün anadoğru boyunca sabit olması için $\{A,T\}$ sisteminin lineer bağımlı olması gerekir. Bu ise

$$A=(1+av)\,T+cvN$$

eşitliği gereğince c=0 olmasını gerektirir.

O halde bir anadoğru boyunca M nin teğet düzlemlerinin çakışık olması için c=0 olması gerek ve yeterdir.

Teorem 4.1.2.

Timelike bir M regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart c=0 olmasıdır.

İspat :

Teoremin ispatı Tanım 2.5.2 ve Teorem 4.1.1 den açıktır.

Sonuç 4.1.3.

Timelike bir M regle yüzeyi için

$$c = -\det(T, X, \dot{X}) \tag{4.13}$$

dir.

İspat :

(4.4) den $\dot{X}$ vektör alanının değeri yerine yazılır ve determinant fonksiyonun özellikleri kullanılırsa

$$\det(T, X, \dot{X}) = \det(T, X, aT+cN)$$
$$= a \det(T, X, T) + c \det(T, X, N)$$
$$= -c$$

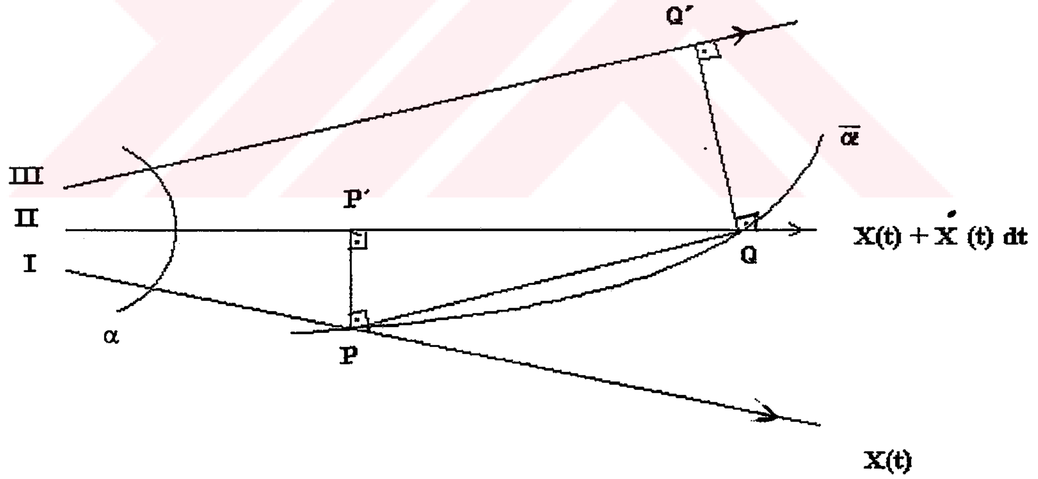
elde edilir. Burada $\det(T,X,N) = -1$ dir.

Boğaz Noktasının Yervektörü

Açılabilir olmayan timelike bir regle yüzeyin merkez noktasının dayanak eğrisine olan uzaklığı $\bar{u}$ olmak üzere, $\bar{\alpha}(t)$ yervektörü

$$\bar{\alpha}(t,\bar{u}) = \alpha(t) + \bar{u}\, X(t) \tag{4.14}$$

şeklinde ifade edilebilir, burada $\alpha(t)$ dayanak eğrisinin yervektörü ve $X(t)$ de anadoğruya ait doğrultman vektörüdür. $\bar{u}$ parametresi, timelike regle yüzeyin dayanak eğrisinin yervektörü ve doğrultman vektörü cinsinden bulunabilir. Timelike regle yüzeyin ilk ikisi $X(t)$ ve $X(t)+dX(t)$ olan, komşu üç anadoğrusu verilsin.



Şekil 4.1.

P, P′ ve Q, Q′ komşu anadoğruların ortak dikmelerinin anadoğrular üzerindeki ayakları olsunlar. Bu durumda P ve Q farklı iki boğaz noktasıdır. İlk iki komşu anadoğrunun ortak dikmesi

$$X(t) \wedge (X(t) + \dot{X}(t)dt) = X(t) \wedge \dot{X}(t)dt$$

nin bir katıdır. Limit halinde $\overrightarrow{PQ}$ vektörü $\overrightarrow{PP'}$ ile çakışacak ve boğaz eğrisinin teğeti olacaktır. Dolayısıyla

$$<X, \overrightarrow{PQ}>=0\ ,\quad <X+D_TX dt\ , \overrightarrow{PQ}>=0 \tag{4.15}$$

olacağından

$$<D_TX\ ,\ \overrightarrow{PQ}>=0$$

elde edilir.

$$<D_TX\ ,\ \frac{d\overline{\alpha}}{dt}>=0$$
$$<D_TX\ ,\ T+\overline{u}D_TX+\frac{d\overline{u}}{dt}X>=0$$
$$<T,\dot{X}>+\overline{u}<\dot{X},\dot{X}>=0$$
$$\overline{u}=-\frac{<T,\dot{X}>}{<\dot{X},\dot{X}>}=-\frac{a}{a^2+c^2} \tag{4.16}$$

bulunur. Böylece boğaz eğrisinin yervektörü için (4.14) den

$$\overline{\alpha}(t)=\alpha(t)-\frac{<T,\dot{X}>}{<\dot{X},\dot{X}>}X(t) \tag{4.17}$$

elde edilir. Burada $<\dot{X},\dot{X}>\neq 0$ dır.

Burada $\overline{u}=-\dfrac{a}{a^2+c^2}=\text{sbt}$ dir. Gerçekten $<X\ ,\ \dfrac{d\overline{\alpha}}{dt}>=0$ olduğundan

$$<T-\left(\frac{a}{a^2+c^2}\right)\dot{X}-\left(\frac{a}{a^2+c^2}\right)^{\cdot}X,X>=0$$
$$<T,X>-\left(\frac{a}{a^2+c^2}\right)<\dot{X},X>-\left(\frac{a}{a^2+c^2}\right)^{\cdot}<X,X>=0$$
$$\left(\frac{a}{a^2+c^2}\right)^{\cdot}=0 \tag{4.18}$$
$$\frac{a}{a^2+c^2}=\text{sbt}$$

dir. Buradan $\overline{u}=-\dfrac{a}{a^2+c^2}=\text{sabittir}$.

Teorem 4.1.4.

Açılabilir olmayan timelike bir regle yüzeyin boğaz çizgisi dayanak eğrisinin seçilişinden bağımsızdır.

İspat :

Timelike bir regle yüzeyin farklı iki dayanak eğrisi α ve β olmak üzere timelike regle yüzey,

$$\varphi(t,v)=\alpha(t)+v\,X(t)$$

veya

$$\varphi(t,s)=\beta(t)+s\,X(t)$$

denklemiyle verilsin. Timelike regle yüzeyin boğaz eğrileri, sırasıyla,

$$\overline{\alpha}(t)=\alpha(t)-\frac{<T,\dot{X}>}{<\dot{X},\dot{X}>}X(t)$$

$$\overline{\beta}(t)=\beta(t)-\frac{<\dot{\beta},\dot{X}>}{<\dot{X},\dot{X}>}X(t)$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}\overline{\alpha}(t)-\overline{\beta}(t)&=\alpha(t)-\beta(t)-\frac{<T-\dot{\beta},\dot{X}>}{<\dot{X},\dot{X}>}X(t)\\&=(v-s)X(t)-\frac{<(v-s)\dot{X},\dot{X}>}{<\dot{X},\dot{X}>}X(t)\\&=0\end{aligned}$$

bulunur. O halde boğaz çizgisi dayanak eğrisinin seçilişinden bağımsızdır.

Teorem 4.1.5.

Açılabilir olmayan bir M timelike regle yüzeyi verilsin. $\alpha(t)$ noktasından geçen anadoğru üzerinde $\varphi(t,v_o)$ noktasının boğaz noktası olması için gerek ve yeter şart $\varphi\,(t,v_o)$ noktasındaki teğet düzlemin bir normalinin D_TX olmasıdır.

İspat :

M açılabilir olmayan timelike bir regle yüzey olsun.

M nin dayanak eğrisi α üzerindeki $\alpha(t)$ noktasından geçen, anadoğru üzerinde $\varphi(t,v_o)$ noktasındaki teğet düzlemin bir normali $D_T X$ olsun.

$$\varphi_{v_o} : I \times \{v_o\} \to M$$

eğrisinin teğet vektör alanı $A=(1+av)T+cvN$ olmak üzere $<D_T X, A>=0$ dır. O halde

$$<aT + cN, (1+av_o)\, T+v_o\, cN>=0$$
$$a + (a^2+c^2)\, v_o=0$$
$$v_o = -\frac{a}{a^2+c^2}$$

elde edilir. Bu ise $\varphi(t,v_o)$ noktasının boğaz noktası olması demektir.

$\alpha(t)$ noktasından geçen anadoğruya ait boğaz noktası $\varphi(t,v_o)$ olsun.

$$<\dot{X},X>=<aT+cN,\ X>=0$$
$$<\dot{X},A>=<aT+cN,\ (1+av)T+cvN>=a+(a^2+c^2)v$$

dir. $\varphi(t,v_o)$ boğaz noktası olduğundan

$$a+(a^2+c^2)v=0$$

olur. O zaman $<D_T X, A>=0$ elde edilir. O halde $\varphi(t,v_o)$ boğaz noktasında teğet düzlemin bir normali $D_T X$ dir.

Teorem 4.1.6.

Açılabilir olmayan bir M timelike regle yüzeyinin boğaz eğrisi

$$\overline{\alpha}(t)=\alpha(t)-\frac{a}{a^2+c^2}X(t)$$

bir spacelike eğridir.

İspat :

Teoremin ispatı için $\overline{\alpha}$ boğaz eğrisinin teğet vektör alanının spacelike bir vektör alanı olduğunu göstermek yeterlidir. $\overline{\alpha}$ nin teğet vektör alanı

$$\dot{\bar{\alpha}}(t)=\dot{\alpha}(t)-\left(\frac{a}{a^2+c^2}\right)^{\cdot} X(t)-\left(\frac{a}{a^2+c^2}\right)\dot{X}(t)$$

dir. (4.18) den

$$\frac{d\bar{\alpha}}{dt}=T-\left(\frac{a}{a^2+c^2}\right)\dot{X}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}<\frac{d\bar{\alpha}}{dt},\frac{d\bar{\alpha}}{dt}>&=<T,T>-2\left(\frac{a}{a^2+c^2}\right)<T,\dot{X}>+\frac{a^2}{\left(a^2+c^2\right)^2}<\dot{X},\dot{X}>\\&=1-\frac{a^2}{a^2+c^2}\\&=\frac{c^2}{a^2+c^2}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $<\frac{d\bar{\alpha}}{dt},\frac{d\bar{\alpha}}{dt}> \;>0$ dır.

Dağılma Parametresi

Timelike bir M regle yüzeyin dayanak eğrisi olarak boğaz eğrisini alalım. Bu durumda $\bar{u}=-\frac{a}{a^2+c^2}=0$ olur. Buradan a=0 dır. O zaman $\dot{X}=aT+cN$ olduğundan $\dot{X}$, yüzeyin normali N ile lineer bağımlıdır. O halde

$$\lambda\dot{X}=T\wedge X=\frac{d\bar{\alpha}}{dt}\wedge X$$

ve buradan

$$\lambda=\frac{<T\wedge X,\dot{X}>}{<\dot{X},\dot{X}>}=\frac{\det(T,X,\dot{X})}{<\dot{X},\dot{X}>} \tag{4.19}$$

dir. λ ya timelike regle yüzeyin dağılma parametresi denir ve λ veya P_X ile gösterilir. Burada $\dot{X}$ vektör alanı yüzeyin normali ile lineer bağımlı olduğundan, $<\dot{X},\dot{X}>\neq 0$ dır.

Teorem 4.1.7.

Bir M timelike regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır.

İspat :

Teoremin ispatı (4.19), (4.13) ve Teorem 4.1.2 den açıktır.

Teorem 4.1.8.

Timelike bir regle yüzey M olsun. M nin her noktasından bir tek ortogonal yörünge geçer.

İspat :

M nin bir parametrizasyonu

$$\begin{aligned} \varphi : I \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3_1 \\ (t,v) &\to \varphi(t,v) = \alpha(t) + vZ(t) \end{aligned}$$

olsun. Ortogonal yörüngenin denklemi

$$\begin{aligned} \beta : \tilde{I} &\to M \\ s &\to \beta(s) = \alpha(s) + f(s)\, Z(s) \end{aligned} \tag{4.20}$$

şeklindedir. $\tilde{I}$, I nın içinde değilse bir öteleme ile $\tilde{I}$ yı I nın içine yatırabiliriz. Yani $\tilde{I} \subset I$ olarak alabiliriz.

Şimdi $\varphi(s_0, v_0) = P_0$ noktasından bir tek ortogonal yörünge geçtiğini gösterelim. (4.20) nin türevini alırsak

$$\dot{\beta}(s) = \dot{\alpha}(s) + \dot{f}(s)\, Z(s) + f(s)\, \dot{Z}(s)$$

olur. β eğrisi her noktada Z(s) ye dik olduğundan $\langle \dot{\beta}(s), Z(s) \rangle = 0$ olur. Buradan

$$<\dot{\alpha}(s)+\dot{f}(s)Z(s)+f(s)\dot{Z}(s),\ Z(s)>=<\dot{\alpha}(s),Z(s)>$$
$$+\dot{f}(s)<Z(s),\ Z(s)>+f(s)<\dot{Z}(s),\ Z(s)>$$
$$=\dot{f}(s)+<\dot{\alpha}(s),\ Z(s)>=0$$
$$\frac{d\,f(s)}{ds}=\ <\dot{\alpha}(s),\ Z(s)>$$
$$f(s)=\ \int<\dot{\alpha}(s),\ Z(s)>ds+h$$

bulunur. Burada $<Z(s),\ Z(s)>=-1$ dir.

$$\int<\dot{\alpha}(s),\ Z(s)>ds=F(s)$$

dersek f(s) = F(s) + h olur. h keyfi seçildiğinden $<\dot{\beta}(s),\ Z(s)>=0$ koşulunu sağlayan bir çok eğri vardır. Bu eğrilerden P_o noktasından geçeni bulmak istiyoruz. Buna göre

$$P_o = \alpha(s) + (F(s) + h)\ Z(s)$$

olacak biçimde bir s sayısını bulmak istiyoruz. $P_o = \alpha(s_o) + v_o\ Z(s_o)$ olduğundan

$$\alpha(s_o) + v_o\ Z(s_o) = \alpha(s) + f(s)\ Z(s)$$

olur. Buradan $\alpha(s_o)=\alpha(s)$ ve $v_o=f(s)$ bulunur. I aralığını α nın bire-bir olduğu bir aralık seçersek $s=s_o$ bulunur. $v_o=f(s)$ eşitliğinden $f(s_o)=F(s_o)+h$ ve buradan $h=f(s_o)-F(s_o)$ bulunur. Sonuç olarak P_o noktasından geçen bir ve yalnız bir ortogonal yörünge vardır. Bu ortogonal yörünge her anadoğruyu keseceğinden $\tilde{I}=I$ olmak zorundadır.

Teorem 4.1.9.

Açılabilir olmayan timelike bir regle yüzey M olsun. M nin herhangi iki anadoğrusu arasında ortogonal yörüngeler boyunca en kısa uzaklık, $v=-\dfrac{a}{a^2+c^2}$ değerine karşılık gelen $\varphi_v: I \to M$ eğrisi boyunca ölçülen uzaklıktır.

İspat :

$t_1, t_2 \in I$ ve $t_1<t_2$ olmak üzere $\alpha(t_1)$ ve $\alpha(t_2)$ noktalarından geçen iki anadoğru gözönüne alalım. Bu iki anadoğru arasında, v=sbt ortogonal yörüngesi boyunca elde edilen uzaklığı j(v) ile gösterelim.

$$j(v)=\int_{t_1}^{t_2}\|A\|\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{|<A,A>|}\,dt$$

$$j(v)=\int_{t_1}^{t_2}\left[(a^2+c^2)v^2+2av+1\right]^{1/2}dt$$

olur. j(v) nin minimum değer alması $\left(\dot{j(v)}\right)=0$ olması ile mümkündür. Bu ise

$$(a^2+c^2)v+a=0$$
$$v=-\frac{a}{a^2+c^2}$$

olmasını gerektirir. Yani ortogonal yörünge olan

$$\beta : I\to M$$
$$t\to \beta(t)=\alpha(t)-\frac{a}{a^2+c^2}X(t)$$

eğrisi boyunca ölçülen uzaklık, sözkonusu iki anadoğru arasındaki ortogonal yörüngeler boyunca ölçülen en kısa uzaklıktır.

Teorem 4.1.10.

Timelike bir regle yüzey M olsun. M nin anadoğruları M üzerinde asimptotik ve jeodezik çizgilerdir.

İspat :

M nin bir anadoğrusunun teğet vektör alanı X olsun. Her bir anadoğru bir doğru olduğundan IR_1^3 Minkowski uzayında bir jeodeziktir. Böylece

$$D_X X=0 \tag{4.21}$$

dir. (2.9) Gauss Denkleminde $\varepsilon=<N,N>=1$ olduğundan

$$D_X X=\overline{D}_X X+<S(X),X>N$$

dir. (4.21) den

$$\overline{D}_X X = - < S(X), X > N$$

dir. $(\overline{D}_X X) \in \chi(M)$ ve $(< S(X), X > N) \in \chi^{\perp}(M)$ dir. M timelike yüzey (metrik nondejenere) olduğundan

$$\chi(\mathbb{R}_1^3) = \chi(M) \oplus \chi^{\perp}(M) \quad \text{ve} \quad \chi(M) \cap \chi^{\perp}(M) = \{0\}$$

dir. O halde

$$\overline{D}_X X = 0 \qquad \text{ve} \qquad < S(X), X >= 0$$

elde edilir. M timelike regle yüzeyinin anadoğruları asimptotik ve jeodezik çizgilerdir.

Teorem 4.1.11.

M timelike bir regle yüzey olsun. M nin Gauss eğrilik fonksiyonu K olmak üzere her $p \in M$ için

$$K(p) \geq 0$$

dir.

İspat :

$p \in M$ noktasındaki anadoğrunun teğet vektör alanı X olsun. $\chi(M)$ nin $\{X, Y\}$ ortonormal bazını elde edelim. X timelike ve Y spacelike vektör alanlarıdır. M nin S şekil operatörünü ortonormal bazlar cinsinden

$$S(X) = c_1 X + c_2 Y$$
$$S(Y) = c_3 X + c_4 Y$$

şeklinde yazabiliriz. Bu durumda S şekil operatörüne karşılık gelen matris

$$S = \begin{bmatrix} - < S(X), X > & < S(X), Y > \\ - < S(Y), X > & < S(Y), Y > \end{bmatrix}$$

dir. (2.27), Teorem 2.2.14 ve Teorem 4.1.10 dan

$$K = \det S = (< S(X), Y >)^2 \qquad (4.22)$$

bulunur. Buradan her $p \in M$ için $K(p) \geq 0$ dır.

Teorem 4.1.12.

M timelike bir regle yüzey olsun. M nin dayanak eğrisinin birim teğet vektör alanı T, anadoğrunun birim teğet vektör alanı X ve yüzeyin birim normal vektör alanı N olmak üzere

$$\begin{aligned} T \wedge X &= N \\ T \wedge N &= X \\ X \wedge N &= T \end{aligned} \tag{4.23}$$

dir.

İspat :

T ile N spacelike birim vektör alanları, X de timelike birim vektör alanı olduğundan

$$<T,T>=1\ ,\ <X,X>=-1\ ,\ <N,N>=1$$

ve ayrıca det (T, X, N)= -1 dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} &T \wedge X = \mu N \quad , \quad \mu \in IR \\ &<T \wedge X, N> = \mu <N,N> \\ &-\det (T, X, N) = \mu \\ &\mu = 1 \end{aligned}$$

bulunur. O halde $T \wedge X = N$ dir.

$$\begin{aligned} &T \wedge N = \gamma X \quad , \quad \gamma \in IR \\ &<T \wedge N, X> = \gamma <X,X> \\ &-\det (T, N, X) = -\gamma \\ &-\det (T, X, N) = \gamma \\ &\gamma = 1 \end{aligned}$$

bulunur. O halde $T \wedge N = X$ dir.

$$X \wedge N = \xi T \quad , \quad \xi \in IR$$
$$<X \wedge N, T> = \xi <T,T>$$
$$-\det(X, N, T) = \xi$$
$$-\det(T, X, N) = \xi$$
$$\xi = 1$$

bulunur. O halde $X \wedge N = T$ dir.

Teorem 4.1.13.

Açılabilir olmayan timelike bir M regle yüzeyinin Gauss eğriliği bir anadoğru üzerinde boğaz noktasında maksimum değerini alır.

İspat :

Açılabilir olmayan timelike bir regle yüzey M olsun. $\chi(M)=sp\{A,X\}$ ortogonal bir bazdır.

$$A_o = \frac{A}{\|A\|} = \frac{(1+av)T + cvN}{\left[(a^2+c^2)v^2 + 2av + 1\right]^{1/2}} \tag{4.24}$$

birim spacelike vektör alanı ve $\chi(M)=sp\{A_o,X\}$ ortonormal bir baz olur. $\varphi(t,v)$ noktasında M timelike regle yüzeyin normalini $\tilde{N} = N_{\varphi(t,v)}$ ile gösterelim.

$$\tilde{N} = A_o \wedge X$$
$$= \frac{1}{\|A\|}\left[(1+av)T \wedge X + cvN \wedge X\right]$$

dir. (4.23) den

$$\tilde{N} = \frac{1}{\|A\|}\left[(1+av)N - cvT\right]$$

elde edilir ve

$$<\tilde{N},\tilde{N}> = \frac{1}{\|A\|^2}\left[(1+av)^2 + c^2v^2\right] = 1$$

olduğundan $\tilde{N} = N_{\varphi(t,v)}$ birim spacelike vektördür

$$S(A_o) = \mu_1 A_o + \mu_2 X$$
$$S(X) = \mu_3 A_o + \mu_4 X$$

ve (4.22) den

$$K = \det S = (\mu_2)^2 = \left(< S(A_o), X >\right)^2 \tag{4.25}$$

dir. (2.7) den

$$S(A_o) = -D_{A_o}\tilde{N} = -\frac{d\tilde{N}}{dt^*} = -\frac{d\tilde{N}}{dt}\,\frac{dt}{dt^*}$$

dir. Burada t* ile φ_v, v=sbt eğrisinin yay parametresi gösterilmektedir. O halde

$$A_o = \frac{d\varphi(t,v)}{dt^*} = \frac{d\varphi(t,v)}{dt}\,\frac{dt}{dt^*} = A\frac{dt}{dt^*}$$

ve (4.24) den $\frac{dt}{dt^*} = \frac{1}{\|A\|}$ bulunur. Böylece

$$S(A_o) = -\frac{1}{\|A\|}\,\frac{d\tilde{N}}{dt}$$
$$= -\frac{1}{\|A\|}\left\{\left(\frac{1}{\|A\|}\right)^{\dot{}}\left[(1+av)N - cvT\right] + \frac{1}{\|A\|}\left[\dot{a}vN + (1+av)D_TN - \dot{c}vT - cvD_TT\right]\right\}$$

bulunur. (4.4) den D_TT ve D_TN değerleri yerlerine yazılır ve ifade T,N,X bazlarına göre düzenlenirse

$$S(A_o) = -\frac{1}{\|A\|}\left\{\left[\left(\frac{1}{\|A\|}\right)^{\dot{}}(-cv) - \frac{\dot{c}v}{\|A\|} - \frac{b(1+av)}{\|A\|}\right]T + \left[\left(\frac{1}{\|A\|}\right)^{\dot{}}(1+av) - \frac{cbv}{\|A\|} + \frac{\dot{a}v}{\|A\|}\right]N + \frac{c}{\|A\|}X\right\}$$

elde edilir. Böylece

$$<S(A_0),X> = -\frac{c}{\|A\|^2}<X,X> = \frac{c}{\|A\|^2}$$

olur. (4.25) den $\varphi(t,v)$ noktasındaki Gauss eğriliği

$$K(t,v) = \frac{c^2}{\|A\|^4}$$

$$K(t,v) = \frac{c^2}{\left[(a^2+c^2)v^2+2av+1\right]^2} \tag{4.26}$$

bulunur. Buradan

$$\frac{\partial K(t,v)}{\partial v} = \frac{-2c^2\left[(a^2+c^2)v^2+2av+1\right]\left[2(a^2+c^2)v+2a\right]}{\left[(a^2+c^2)v^2+2av+1\right]^4}$$

$$\frac{\partial K(t,v)}{\partial v} = \frac{-4c^2\left[(a^2+c^2)v+a\right]}{\left[<A,A>\right]^3}$$

dir. M açılabilir olmayan bir regle yüzey olduğundan $c \neq 0$ ve $<A,A> > 0$ dır. $\frac{\partial K(t,v)}{\partial v}=0$ dan

$$v = -\frac{a}{a^2+c^2}$$

ekstremum noktası bulunur ve

$$\left.\frac{\partial^2 K(t,v)}{\partial^2 v}\right|_{v=-\frac{a}{a^2+c^2}} < 0$$

dir. Böylece $v = -\frac{a}{a^2+c^2}$ noktası $K(t,v)$ nin maksimum noktasıdır. $v = -\frac{a}{a^2+c^2}$ değerine anadoğru üzerindeki karşılık gelen nokta merkez noktası olduğundan X anadoğrusu üzerinde K fonksiyonu maksimum değerini merkez noktasında alır. v nin bu değeri (4.26) da yerine yazılırsa

$$K_{max} = \frac{(a^2 + c^2)^2}{c^2} \tag{4.27}$$

bulunur.

Teorem 4.1.14.

M timelike bir regle yüzey olsun. M nin açılabilir olması için gerek ve yeter şart M nin Gauss eğrilik fonksiyonunun özdeş olarak sıfır olmasıdır.

İspat :

Teoremin ispatı (4.26) ve Teorem 4.1.2 den kolayca görülür.

Teorem 4.1.15.

Bir M timelike regle yüzeyinin dağılma parametresi yalnızca anadoğrulara bağlıdır.

İspat :

(4.27) den, bir anadoğru boyunca Gauss eğriliğinin maksimum değeri

$$K_{max} = \frac{(a^2 + c^2)^2}{c^2}$$

dir. Boğaz noktasında a=0 ve (4.19) dan

$$K_{max} = c^2 = \left(\frac{1}{P_X}\right)^2$$

$$\sqrt{K_{max}} = \frac{1}{P_X}$$

$$P_X = \frac{1}{\sqrt{K_{max}}} \tag{4.28}$$

elde edilir. K_{max} değeri bir anadoğru boyunca bir tekdir. O halde dağılma parametresinin değeri bir anadoğru için aynıdır, anadoğrudan anadoğruya değişir.

3-boyutlu Öklid uzayındaki regle yüzeylerde, merkez nokta ile ilgili teorem, 1839 yılında Chasles tarafından yapılmış. Bu teoreme 3-boyutlu Minkowski uzayında dayanak eğrisi spacelike ve anadoğrusu timelike olan timelike regle yüzeylerde karşılık gelen teoremi verelim.

Teorem 4.1.16.

M açılabilir olmayan timelike bir regle yüzey olsun. M nin bir anadoğru boyunca normali N_v, bu anadoğru üzerindeki merkez noktasında M nin normali N ise N ile N_v arasındaki açının tanjantı, N_v nin başlangıç noktasının merkez noktasına olan uzaklığı ile doğru orantılıdır.

İspat :

M timelike regle yüzeyi

$$\varphi : I \times IR \rightarrow IR_1^3$$
$$\varphi(t,v) = (\alpha_1(t) + vb_1(t),\ \alpha_2(t) + vb_2(t),\ \alpha_3(t) + vb_3(t))$$

olmak üzere (IxIR,φ) parametrizasyonu ile verilsin. v=0 için $\varphi(t,0)$ noktası M nin bir boğaz noktası olsun. $\alpha : I \rightarrow M$ eğrisi $\varphi(t,0)$ merkez noktasından geçen bir ortogonal yörünge olur. α eğrisinin birim teğet vektör alanı T ve $\alpha(t)$ noktasından geçen anadoğrunun birim teğet vektör alanı X olmak üzere, $\varphi(t,0)$ noktasında Teorem 4.1.5 den $D_T X$ vektör alanı, M ye normaldir. Böylece v=0 olduğundan a=0 dir. Buna göre dağılma parametresi

$$P_X = \frac{1}{c} \qquad (4.29)$$

dir. Anadoğru boyunca yüzeyin normali

$$N_v = \frac{N - cvT}{\sqrt{c^2 v^2 + 1}} \qquad (4.30)$$

elde edilir. N ile N_v arasındaki açıyı θ ile gösterelim. N ile N_v birim spacelike vektörlerdir. (4.30) dan

$$
\begin{aligned}
&< N, N_v > = < N, \frac{N - cvT}{\sqrt{c^2 v^2 + 1}} > \\
&< N, N_v > = \frac{1}{\sqrt{c^2 v^2 + 1}}
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

bulunur. (2.2) den

$$
< N, N_v > = \|N\| \, \|N_v\| \cos\theta = \cos\theta \tag{4.32}
$$

elde edilir. (4.29) dan $c = \dfrac{1}{P_X}$ değeri (4.32) de yerine yazılırsa

$$
\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{v}{P_X}\right)^2}}
$$

bulunur.

$$
\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = \frac{\left(\dfrac{v}{P_X}\right)^2}{1 + \left(\dfrac{v}{P_X}\right)^2}
$$

elde edilir. Buradan

$$
\tan\theta = \frac{v}{P_X}
$$

bulunur.

Sonuç 4.1.17.

Açılabilir olmayan timelike bir M regle yüzeyi üzerinde bir anadoğru boyunca teğet düzlem bir uçdanötekine anadoğru etrafinda 180 derece döner.

İspat :

M, açılabilir olmayan bir timelike regle yüzey ve $p \in M$ noktasından geçen ℓ_p anadoğrusu üzerindeki merkez noktası p olsun. $p \in M$ noktasında M nin normalini N_p ve $q \in \ell_p$ noktasındaki normalini de N_q ile gösterelim. p ve q noktaları arasındaki uzaklık v olmak üzere N_p ile N_q arasındaki açı θ ise Teorem 4.1.16 dan $\tan\theta = \frac{v}{P_X}$ dir.

Eğer v=0 ise p ile q noktaları arasındaki uzaklık sıfırdır. O zaman p=q dir. Bu durumda $\tan\theta=0$ ve buradan $\theta=0$ bulunur. $v \in IR^+$ olduğunda ℓ_p üzerinde p nin bir tarafta kalan noktaları ve $v \in IR^-$ halinde de diğer tarafta kalan noktaları elde ederiz. $v \in IR^+$ halinde $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ dir. $v \in IR^-$ halinde ise $-\frac{\pi}{2} \leq \theta < 0$ dır. Böylece p nin iki tarafında N normal vektör alanı 90^o değişme gösterir. O halde, N ye normal olan teğet düzlem ℓ_p boyunca, p nin iki tarafında 90^o lik değişim gösterir.

Örnek 4.1.18.

$$\varphi(t,v) = \left(-(\frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2} + v)\,\mathrm{sh}\sqrt{\kappa^2+\tau^2}\,t,\ \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}t,\ -(\frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2} + v)\,\mathrm{ch}\sqrt{\kappa^2+\tau^2}\,t \right)$$

III. çeşit helikoid yüzeyi timelike bir regle yüzeydir (Woestıjne, 1990). Burada κ ve τ dayanak eğrisi α nın, sırasıyla, birinci ve ikinci eğriliğidir. Yüzeyi $\varphi(t,v) = \alpha(t) + vX(t)$ formunda yazalım.

$$\varphi(t,v) = \left(-\frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2}\mathrm{sh}\sqrt{\kappa^2+\tau^2}\,t,\ \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}t,\ -\frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2}\mathrm{ch}\sqrt{\kappa^2+\tau^2}\,t \right)$$
$$+ v\left(-\mathrm{sh}\sqrt{\kappa^2+\tau^2}\,t,\ 0,\ -\mathrm{ch}\sqrt{\kappa^2+\tau^2}\,t \right)$$

dir. $<\dot{\alpha}, \dot{\alpha}>=1$ olduğundan α dayanak eğrisi spacelike ve $<X,X>=-1$ olduğundan anadoğrular da timelike birer doğrudur.

$$\dot{X}(t) = \left(-\sqrt{\kappa^2+\tau^2}\,\mathrm{ch}\sqrt{\kappa^2+\tau^2}\,t,\ 0,\ -\sqrt{\kappa^2+\tau^2}\,\mathrm{sh}\sqrt{\kappa^2+\tau^2}\,t \right)$$

ve $<\dot{X},\dot{X}> = \kappa^2+\tau^2$ olup $\dot{X}$ spacelike bir vektör alanıdır.

$$\det(T,X,\dot{X}) = \begin{vmatrix} -\kappa \mathrm{ch}\sqrt{\kappa^2+\tau^2}t & \tau & -\kappa \mathrm{sh}\sqrt{\kappa^2+\tau^2}t \\ \mathrm{sh}\sqrt{\kappa^2+\tau^2}t & 0 & \mathrm{ch}\sqrt{\kappa^2+\tau^2}t \\ \mathrm{ch}\sqrt{\kappa^2+\tau^2}t & 0 & \mathrm{sh}\sqrt{\kappa^2+\tau^2}t \end{vmatrix} = \tau$$

dur. Teorem 4.1.2 ve Sonuç 4.1.3 den III. çeşit helikoid yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart $\tau=0$ olmasıdır.

$<T,\dot{X}>=-\kappa$ ve (4.16) dan $\overline{u} = -\frac{<T,\dot{X}>}{<\dot{X},\dot{X}>} = \frac{-\kappa}{\kappa^2+\tau^2}$ boğaz noktasının yervektörüdür. Boğaz eğrisi

$$\overline{\alpha}(t) = \alpha(t) - \frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2}X(t)$$

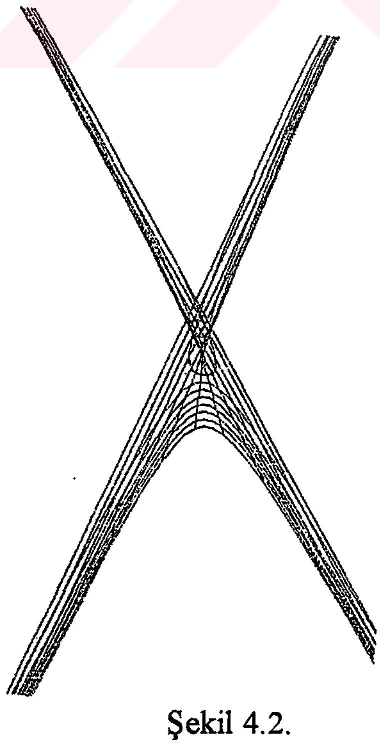
ve

$$<\dot{\overline{\alpha}}(t),\dot{\overline{\alpha}}(t)> = \frac{\tau^2}{\kappa^2+\tau^2} > 0$$

olduğundan $\overline{\alpha}$ spacelike bir eğridir. (4.19) dan dağılma parametresi

$$P_X = -\frac{(T,X,\dot{X})}{<\dot{X},\dot{X}>} = -\frac{\tau}{\kappa^2+\tau^2}$$

dir.



Şekil 4.2.

Örnek 4.1.19.

$$\varphi(t,v)=\alpha(t)+vX(t)=(t,0,0)+v(0,0,t)$$

xz- düzlemi timelike bir regle yüzeydir. $<\dot{\alpha},\dot{\alpha}>=1$ olduğundan dayanak eğrisi spacelike, $<X,X>= -t^2 < 0$ olduğundan anadoğrular da timelike birer doğrudur.

4.2. Dayanak Eğrisi Timelike ve Anadoğruları Spacelike Olan Regle Yüzeyler

Bu kesimde 3-boyutlu IR_1^3 Minkowski uzayında dayanak eğrisi timelike bir eğri, anadoğruları spacelike doğrular olan timelike regle yüzeyler ve özellikleri incelenecektir. Ayrıca bu kesimde aksi belirtilmedikçe regle yüzeyin dayanak eğrisi timelike bir eğri, anadoğruları da spacelike doğrular olarak alınacaktır.

IR_1^3, 3-boyutlu Minkowski uzayında $\{0\}\subset I\subset IR$ olmak üzere diferensiyellenebilir birim hızlı bir eğri

$$\begin{aligned} \alpha : I &\to IR_1^3 \\ t &\to \alpha(t)=\big(\alpha_1(t),\ \alpha_2(t),\ \alpha_3(t)\big) \end{aligned}$$

olsun. Her $t\in I$ için $\alpha(t)$ noktasındaki $T_{\alpha(t)}$ teğet vektörü ile anadoğrunun doğrultman vektörü lineer bağımsız olacak şekilde

$$\begin{aligned} \ell : IR &\to IR_1^3 \\ v &\to \ell(v)=\big(\alpha_1(t)+vc_1(t),\ \alpha_2(t)+vc_2(t),\ \alpha_3(t)+vc_3(t)\big) \end{aligned}$$

doğrusunu seçelim. Burada $1\le i\le 3$ olmak üzere $c_i(t)\in IR$, skalarları, $\alpha(t)$ noktasındaki doğrultman vektörünün bileşenleridir.

ℓ doğrusunun α eğrisi boyunca hareket etmesiyle, $(I\times IR,\varphi)$ parametrizasyonu ile verilen bir

$$\begin{aligned} \varphi : I\times IR &\to IR_1^3 \\ (t,v) &\to \varphi(t,v)=\big(\alpha_1(t)+vc_1(t),\ \alpha_2(t)+vc_2(t),\ \alpha_3(t)+vc_3(t)\big) \end{aligned}$$

regle yüzeyi elde edilir. Bu regle yüzeyi M ile gösterelim.

M regle yüzeyinin, α eğrisi boyunca ortonormal çatı alanı, α eğrisinin birim teğeti T ve ℓ anadoğrusunun teğet vektör alanı Z ile dik olacak şekilde

$$Y = Z + <Z, T> T$$

seçilerek, Y spacelike vektör alanı elde edilir. Ayrıca

$$X = \frac{Y}{\|Y\|} \text{ alınırsa } \|X\| = 1 \quad \text{ve} \quad <X,T>=0$$

olur.

$$N = T \wedge X$$

olmak üzere

$$<X,N>=0 \ , \ <T,N>=0 \ , \ <N,N>=1$$

olur. Bu durumda $\{X,N,T\}$ sistemi M nin ortonormal çatı alanıdır. Şimdi bu sistemin α-eğrisi boyunca değişimini inceleyelim. $\mathbb{R}^3_1$ üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu D olsun.

$$<T,T>=-1 \ , \ <X,X>=1 \ , \ <N,N>=1$$

eşitliklerinden

$$<D_T T,T>=<D_T X,X>=<D_T N,N>=0$$

bulunur. a,b,c fonksiyonlarını

$$\begin{aligned} a &=<D_T T,X>=-<T,D_T X> \\ b &=<D_T T,N>=-<T,D_T N> \\ c &=<D_T X,N>=-<X,D_T N> \end{aligned} \tag{4.33}$$

eşitlikleriyle tanımlayalım. Burada

$$\begin{aligned} D_T X &= \ \ cN + aT \\ D_T N &= -cX + bT \\ D_T T &= \ \ aX + bN \end{aligned} \tag{4.34}$$

dir. (4.34) ifadesinin matris formu

$$\begin{bmatrix} D_T X \\ D_T N \\ D_T T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c & a \\ -c & 0 & b \\ a & b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ N \\ T \end{bmatrix} \tag{4.35}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{bmatrix} 0 & c & a \\ -c & 0 & b \\ a & b & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi skew-adjoint bir matrisdir.

$$\begin{aligned} \varphi : I \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3_1 \\ (t, v) &\to \varphi(t, v) = \alpha(t) + vX(t) \end{aligned}$$

parametrizasyonu ile verilen M regle yüzeyi için

$$\begin{aligned} \varphi_t &= (1 + av)T + cvN \\ \varphi_v &= X \end{aligned}$$

şeklinde ve

$$E = -(1 + av)^2 + c^2 v^2 \tag{4.36}$$

F=0, G=1 dir. Ayrıca Teorem 2.4.5 gözönüne alınırsa

$$< N, N > = F^2 - EG = (1 + av)^2 - c^2 v^2$$

eşitliğini aşağıdaki şekilde yorumlayabiliriz.

$$<N,N>=(a^2-c^2)v^2+2av+1$$

ikinci dereceden denklemin kökleri

$$\min\left\{-\frac{1}{a-c}\ ,\ -\frac{1}{a+c}\right\} \text{ ve } \max\left\{-\frac{1}{a-c}\ ,\ -\frac{1}{a+c}\right\}$$

bulunur. Burada

$$a^2-c^2=-<D_TX\ ,\ D_TX> \tag{4.37}$$

dir. Burada

1) D_TX vektör alanı timelike ise $a^2-c^2>0$ dır. O zaman

$$-\infty<v<\min\left\{-\frac{1}{a-c}\ ,\ -\frac{1}{a+c}\right\} \text{ veya } \max\left\{-\frac{1}{a-c}\ ,\ -\frac{1}{a+c}\right\}<v<\infty$$

dur.

2) D_TX vektör alanı spacelike ise $a^2-c^2<0$ dır. O zaman

$$\min\left\{-\frac{1}{a-c}\ ,\ -\frac{1}{a+c}\right\}<v<\max\left\{-\frac{1}{a-c}\ ,\ -\frac{1}{a+c}\right\}$$

dir

3) D_TX vektör alanı null ise $a^2-c^2=0$ dır. O zaman

$$a>0 \quad \text{ise} \quad v<-\frac{1}{2a}$$

$$a<0 \quad \text{ise} \quad v>-\frac{1}{2a}$$

dır.

Bu nedenle D_TX vektör alanı hangi cins vektör alanı ise regle yüzeyin parametrizasyonunda tanımlı olan v parametresinin tanım aralığı, reel sayılar ekseninin tümü olmayıp, yukarıda belirtilen aralıklar olacaktır. Bu bilgilere göre v nin tanım aralığını J ile gösterelim. Bu tanım aralığında v değeri, sabit olmak üzere M spacelike regle yüzeyinin bir

$$\varphi_v : I \times \{v\} \to M$$
$$(t,v) \to \varphi_v(t,v) = \alpha(t) + vX(t)$$

eğrisini belirtir. Bu eğrinin teğet vektör alanı

$$A = (1+av)T + cvN \tag{4.38}$$

dir. $\langle A,A\rangle = -\langle N,N\rangle$ olduğundan A timelike bir vektör alanıdır. Bu durumda φ_v eğrisi timelike bir eğri olur ve $\langle X,A\rangle=0$ dir.

Bir anadoğru boyunca, M timelike regle yüzeyinin teğet düzlemlerinin çakışık olduğu genellikle doğru değildir. Ancak, bu düzlemlerin daima sabit olması, c fonksiyonu ile yakından ilgilidir. Bu durumda aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

Teorem 4.2.1.

M timelike bir regle yüzey olsun. Bir anadoğru boyunca teğet düzlemlerin aynı olması için gerek ve yeter şart $c=0$ olmasıdır.

İspat :

M timelike bir regle yüzey olsun. α dayanak eğrisi boyunca ortonormal çatı alanı $\{X,N,T\}$ ve anadoğrunun herhangi bir v=sbt değerine karşılık gelen noktasından geçen

$$\varphi_v : I \times \{v\} \to M$$

eğrisinin $A= (1+av)T+cvN$ teğet vektör alanını gözönüne alalım.

$\alpha(t)$ noktasından geçen anadoğrunun her noktasında, teğet düzlemlerin sabit olması için, anadoğru boyunca N normal vektör alanının sabit olması gerekir. Çünkü bu halde, her teğet düzlemin ortak bir anadoğrusu var ve normalleri aynıdır. N normal vektörünün anadoğru boyunca sabit olması için $\{A,T\}$ sisteminin lineer bağımlı olması gerekir. Bu ise $A=(1+av)\ T+cvN$ eşitliği gereğince $c=0$ olmasını gerektirir.

O halde bir anadoğru boyunca M nin teğet düzlemlerinin çakışık olması için $c=0$ olması gerek ve yeterdir.

Teorem 4.2.2.

Timelike bir M regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart c=0 olmasıdır.

İspat :

Teoremin ispatı Tanım 2.5.2 ve Teorem 3.2.1 den açıktır.

Sonuç 4.2.3.

Timelike bir M regle yüzeyi için

$$c=-\det(T,X,\dot{X}) \qquad (4.39)$$

dir.

İspat :

(4.34) den $\dot{X}$ vektör alanının değeri yerine yazılırsa $c=-\det(T,X,\dot{X})$ bulunur. Burada $\det(T,X,\dot{X})=-1$ dir.

Boğaz Noktasının Yervektörü

Açılabilir olmayan timelike bir regle yüzeyin merkez noktasının dayanak eğrisine olan uzaklığı $\bar{u}$ olmak üzere, $\bar{\alpha}(t)$ yervektörü

$$\bar{\alpha}(t,\bar{u})=\alpha(t)+\bar{u}\,X(t) \qquad (4.40)$$

şeklinde ifade edilebilir, burada $\alpha(t)$ dayanak eğrisinin yervektörü ve $X(t)$ de anadoğruya ait doğrultman vektörüdür. $\bar{u}$ parametresi, timelike regle yüzeyin dayanak eğrisinin yervektörü ve doğrultman vektörü cinsinden bulunabilir. Timelike regle yüzeyin, ilk ikisi $X(t)$ ve $X(t)+dX(t)$ olan, komşu üç anadoğrusu verilsin. P, P′ ve Q, Q′ komşu anadoğruların ortak dikmelerinin anadoğrular üzerindeki ayakları olsunlar. Bu durumda P ve Q farklı iki boğaz noktasıdır. İlk iki komşu anadoğrunun ortak dikmesi $X(t)\wedge\dot{X}(t)dt$ nin bir katıdır. Limit halinde $\overrightarrow{PQ}$ vektörü $\overrightarrow{PP'}$ ile çakışacak ve boğaz eğrisinin teğeti olacaktır. Dolayısıyla

$$<X,\overrightarrow{PQ}>=0\ ,\quad <X+D_TXdt\ ,\overrightarrow{PQ}>=0$$

olacağından $<D_TX\ ,\ \overrightarrow{PQ}>=0$ elde edilir.

$$<D_TX\ ,\ \frac{d\overline{\alpha}}{dt}>=0$$

dan

$$\overline{u}=-\frac{<T,\dot{X}>}{<\dot{X},\dot{X}>}=\frac{a}{c^2-a^2} \tag{4.41}$$

bulunur. Böylece boğaz eğrisinin yervektörü için (4.40) dan

$$\overline{\alpha}(t)=\alpha(t)+\frac{a}{c^2-a^2}X(t) \tag{4.42}$$

elde edilir. Burada $c^2-a^2\neq 0$ dir.

Burada $\overline{u}=\dfrac{a}{c^2-a^2}$ =sbt dir. Gerçekten $<\dot{\overline{\alpha}}(t)\ ,\ X>=0$ dan

$$\left(\frac{a}{c^2-a^2}\right)^{\cdot}=0 \tag{4.43}$$

ve buradan

$$\frac{a}{c^2-a^2}=\text{sbt}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.4.

Açılabilir olmayan timelike bir regle yüzeyin boğaz çizgisi dayanak eğrisinin seçilişinden bağımsızdır.

İspat :

Timelike bir regle yüzeyin farklı iki dayanak eğrisi α ve β olmak üzere timelike regle yüzey

$$\varphi(t,v)=\alpha(t)+v\,X(t)$$

veya

$$\varphi(t,s)=\beta(t)+s\,X(t)$$

denklemiyle verilsin. Timelike regle yüzeyin boğaz eğrileri, sırasıyla,

$$\overline{\alpha}(t)=\alpha(t)-\frac{<T,\dot{X}>}{<\dot{X},\dot{X}>}X(t)$$

$$\overline{\beta}(t)=\beta(t)-\frac{<\dot{\beta},\dot{X}>}{<\dot{X},\dot{X}>}X(t)$$

dir. Buradan $\overline{\alpha}(t)-\overline{\beta}(t)=0$ bulunur. O halde boğaz çizgisi dayanak eğrisinin seçilişinden bağımsızdır.

Teorem 4.2.5.

Açılabilir olmayan bir M timelike regle yüzeyi verilsin. $\alpha(t)$ noktasından geçen anadoğru üzerinde $\varphi(t,v_o)$ noktasının boğaz noktası olması için gerek ve yeter şart, D_TX nin $\varphi\,(t,v_o)$ noktasındaki teğet düzleminin normali olmasıdır.

İspat :

M açılabilir olmayan timelike bir regle yüzey olsun.

M nin dayanak eğrisi α üzerindeki $\alpha(t)$ noktasından geçen, anadoğru üzerinde $\varphi\,(t,v_o)$ noktasındaki teğet düzlemin bir normali D_TX olsun.

$$\varphi_{v_o}: I\times\{v_o\}\rightarrow M$$

eğrisinin teğet vektör alanı $A=(1+av)T+cvN$ olmak üzere $<D_TX,\ A>=0$ dan $v_o=\dfrac{a}{c^2-a^2}$ bulunur. Bu ise $\varphi(t,v_o)$ noktasının boğaz noktası olması demektir.

$$<\dot{X}, X> = <aT + cN, X> = 0$$

$\varphi(t, v_0)$ noktası boğaz noktası olduğundan

$$<\dot{X}, A> = -a + (c^2 - a^2)v = 0$$

bulunur. O halde $\varphi(t, v_0)$ boğaz noktasında teğet düzlemin bir normali $\dot{X}$ dir.

Boğaz noktasında $\dot{X}$ teğet düzlemin bir normali olduğundan boğaz noktasında $\dot{X}$ bir spacelike vektördür. O halde

$$<\dot{X}, \dot{X}> = c^2 - a^2 > 0 \tag{4.44}$$

dır.

Teorem 4.2.6.

Açılabilir olmayan bir M timelike regle yüzeyinin boğaz eğrisi

$$\overline{\alpha}(t) = \alpha(t) + \frac{a}{c^2 - a^2} X(t)$$

bir timelike eğridir.

İspat :

Teoremin ispatı için $\overline{\alpha}$ boğaz eğrisinin teğet vektör alanının timelike bir vektör alanı olduğunu göstermek yeterlidir. $\overline{\alpha}$ nin teğet vektör alanı (4.43) den

$$\frac{d\overline{\alpha}}{dt} = T + \left(\frac{a}{c^2 - a^2}\right)\dot{X}$$

dir. Buradan

$$<\frac{d\overline{\alpha}}{dt}, \frac{d\overline{\alpha}}{dt}> = -\frac{c^2}{c^2 - a^2}$$

elde edilir. (4.44) den

$$<\frac{d\overline{\alpha}}{dt}, \frac{d\overline{\alpha}}{dt}> < 0$$

dır.

Dağılma Parametresi

Timelike bir M regle yüzeyin dayanak eğrisi olarak boğaz eğrisini alalım. Bu durumda $\bar{u}=\dfrac{a}{c^2-a^2}=0$ olur. Buradan a=0 dır. O zaman $\dot{X}=aT+cN$ olduğundan $\dot{X}$, yüzeyin normali N ile lineer bağımlıdır. O halde

$$\lambda\dot{X}=T\wedge X=\frac{d\bar{\alpha}}{dt}\wedge X$$

ve buradan

$$\lambda=\frac{<T\wedge X,\dot{X}>}{<\dot{X},\dot{X}>}=-\frac{\det(T,X,\dot{X})}{<\dot{X},\dot{X}>} \qquad (4.45)$$

dir. λ ya timelike regle yüzeyin dağılma parametresi denir ve λ veya P_X ile gösterilir. Burada $\dot{X}$ vektör alanı yüzeyin normali ile lineer bağımlı olduğundan, $\dot{X}$ bir spacelike vektör alanıdır, dolayısıyla $<\dot{X},\dot{X}>\neq 0$ dır.

Teorem 4.2.7.

Bir M timelike regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır.

İspat :

Teoremin ispatı (4.45), (4.39) ve Teorem 4.2.2 den açıktır.

Teorem 4.2.8.

Timelike bir regle yüzey M olsun. M nin her noktasından bir tek ortogonal yörünge geçer.

İspat :

M nin bir parametrizasyonu

$$\begin{aligned}\varphi &: I\times J\to \mathbb{R}^3_1\\ &(t,v)\to\varphi(t,v)=\alpha(t)+vZ(t)\end{aligned}$$

olsun. Ortogonal yörüngenin denklemi

$$\begin{aligned} \beta &: \tilde{I} \to M \\ s &\to \beta(s) = \alpha(s) + f(s)\, Z(s) \end{aligned} \tag{4.46}$$

şeklindedir. $\tilde{I}$, I nın içinde değilse bir öteleme ile $\tilde{I}$ yı I nın içine yatırabiliriz. Yani $\tilde{I} \subset I$ olarak alabiliriz.

Şimdi $\varphi(s_0, v_0) = P_0$ noktasından bir tek ortogonal yörünge geçtiğini gösterelim. (4.46) nın türevini alırsak

$$\dot{\beta}(s) = \dot{\alpha}(s) + \dot{f}(s) Z(s) + f(s) \dot{Z}(s)$$

olur. β eğrisi her noktada Z(s) ye dik olduğundan $<\dot{\beta}(s), Z(s)> = 0$ olur. Buradan

$$f(s) = -\int < \dot{\alpha}(s), Z(s) > ds + h$$

bulunur. Burada $<Z(s), Z(s)> = 1$ dir.

$$-\int < \dot{\alpha}(s), Z(s) > ds = F(s)$$

dersek $f(s) = F(s) + h$ olur. h keyfi seçildiğinden $<\dot{\beta}(s), Z(s)> = 0$ koşulunu sağlayan bir çok eğri vardır. Bu eğrilerden P_0 noktasından geçeni bulmak istiyoruz. Buna göre

$$P_0 = \alpha(s) + (F(s) + h)\, Z(s)$$

olacak biçimde bir s sayısının bulunmasını istiyoruz. $P_0 = \alpha(s_0) + v_0\, Z(s_0)$ olduğundan

$$\alpha(s_0) + v_0\, Z(s_0) = \alpha(s) + f(s)\, Z(s)$$

olur. Buradan $\alpha(s_0) = \alpha(s)$ ve $v_0 = f(s)$ bulunur. I aralığını α nın bire-bir olduğu bir aralık seçersek $s = s_0$ bulunur. $v_0 = f(s)$ eşitliğinden $f(s_0) = F(s_0) + h$ ve buradan

$$h = f(s_0) - F(s_0)$$

bulunur. Sonuç olarak P_0 noktasından geçen bir ve yalnız bir ortogonal yörünge vardır. Bu ortogonal yörünge her anadoğruyu keseceğinden $\tilde{I} = I$ olmak zorundadır.

Teorem 4.2.9.

M, açılabilir olmayan timelike bir regle yüzey olsun. M nin herhangi iki anadoğrusu arasında ortogonal yörüngeler boyunca en uzun uzaklık, $v=\dfrac{a}{c^2-a^2}$ değerine karşılık gelen $\varphi_v : I \to M$ eğrisi boyunca ölçülen uzaklıktır.

İspat :

$t_1,\ t_2 \in I$ ve $t_1<t_2$ olmak üzere $\alpha(t_1)$ ve $\alpha(t_2)$ noktalarından geçen iki anadoğruyu gözönüne alalım. Bu iki anadoğru arasında, v=sbt ortogonal yörüngesi boyunca ölçülen uzaklığı $j(v)$ ile gösterelim.

$$j(v)=\int_{t_1}^{t_2} \|A\|\, dt=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{|<A,A>|}\, dt=\int_{t_1}^{t_2} \left[-c^2v^2+(1+av)^2\right]^{1/2} dt$$

olur. $j(v)$ nin maksimum değer alması $(j(v))^{\bullet}=0$ olması ile mümkündür. Bu ise $v=\dfrac{a}{c^2-a^2}$ olmasını gerektirir. Yani ortogonal yörünge olan

$$\beta : I \to M$$
$$t \to \beta(t)=\alpha(t)+\frac{a}{c^2-a^2}X(t)$$

eğrisi boyunca ölçülen uzaklık, anadoğru arasındaki ortogonal yörüngeler boyunca ölçülen en uzun uzaklıktır.

Teorem 4.2.10.

M, timelike bir regle yüzey olsun. M nin anadoğruları M üzerinde asimptotik ve jeodezik çizgilerdir.

İspat :

M, timelike regle yüzeyinin bir anadoğrusunun teğet vektör alanı X olsun. Her bir anadoğru bir doğru olduğundan $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski uzayında jeodeziktir. Böylece

$$D_X X = 0 \qquad (4.47)$$

dir. (2.9) Gauss Denkleminde $\varepsilon = \langle N,N \rangle = 1$ ve (4.47) den

$$\overline{D}_X X = -\langle S(X), X \rangle N$$

elde edilir. $(\overline{D}_X X) \in \chi(M)$, $(\langle S(X),X \rangle N) \in \chi^{\perp}(M)$ ve $\chi(IR_1^3) = \chi(M) \oplus \chi^{\perp}(M)$, $\chi(M) \cap \chi^{\perp}(M) = \{0\}$ olduğundan

$$\overline{D}_X X = 0 \qquad \text{ve} \qquad \langle S(X), X \rangle = 0$$

bulunur. M timelike regle yüzeyin anadoğruları asimptotik ve jeodezik çizgilerdir.

Teorem 4.2.11.

M timelike bir regle yüzey olsun. M nin Gauss eğrilik fonksiyonu K olmak üzere her $p \in M$ için

$$K(p) \geq 0$$

dır.

İspat :

$p \in M$ noktasındaki anadoğrunun teğet vektör alanı (doğrultman vektörü) X olsun. $\chi(M)$ nin $\{X,Y\}$ ortonormal bazını seçelim. X spacelike ve Y timelike vektör alanlarıdır. M nin S şekil operatörünü ortonormal bazlar cinsinden

$$S(X) = c_1 X + c_2 Y$$
$$S(Y) = c_3 X + c_4 Y$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda S şekil operatörüne karşılık gelen matris

$$S = \begin{bmatrix} \langle S(X),X \rangle & -\langle S(X),Y \rangle \\ \langle S(Y),X \rangle & -\langle S(Y),Y \rangle \end{bmatrix}$$

dir. (2.27), Teorem 2.2.14 ve Teorem 4.2.10 dan

$$K = \det S = (\langle S(X), Y \rangle)^2 \tag{4.48}$$

bulunur. Buradan her $p \in M$ için $K(p) \geq 0$ dır.

Teorem 4.2.12.

Bir M timelike regle yüzeyinin dayanak eğrisinin birim teğet vektör alanı T, anadoğrunun birim teğet vektör alanı X ve yüzeyin birim normal vektör alanı N olmak üzere

$$\begin{aligned} T \wedge X &= N \\ T \wedge N &= -X \\ X \wedge N &= -T \end{aligned} \tag{4.49}$$

dir.

İspat :

T timelike birim vektör alanı X ve N birim spacelike vektör alanları olduklarından

$$<T,T>=-1\ ,\ <X,X>=<N,N>=1$$

ve ayrıca det (T, X, N)= -1 dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} &T \wedge X = \mu N \quad , \qquad \mu \in IR \\ &<T \wedge X, N> = \mu \\ &-\det(T, X, N) = \mu \\ &\mu = 1 \end{aligned}$$

bulunur. O halde $T \wedge X = N$ dir.

$$\begin{aligned} &T \wedge N = \gamma X \quad , \qquad \gamma \in IR \\ &<T \wedge N, X> = \gamma \\ &\gamma = -1 \end{aligned}$$

bulunur. O halde $T \wedge N = -X$ dir.

$$\begin{aligned} &X \wedge N = \xi T \quad , \qquad \xi \in IR \\ &<X \wedge N, T> = -\xi \\ &\xi = -1 \end{aligned}$$

bulunur. O halde $X \wedge N = -T$ dir.

Teorem 4.2.13.

Açılabilir olmayan timelike bir M regle yüzeyinin Gauss eğriliği bir anadoğru üzerinde boğaz noktasında minimum değerini alır.

İspat :

M, açılabilir olmayan timelike bir regle yüzey olsun. $\chi(M)=sp\{A,X\}$ ortogonal bir bazdır.

$$A_o = \frac{A}{\|A\|} = \frac{cvN + (1+av)T}{\sqrt{\left|-(1+av)^2 + c^2v^2\right|}} \tag{4.50}$$

birim timelike vektör alanı ve $\chi(M)=sp\{A_o,X\}$ ortonormal bir baz olur. $\varphi(t,v)$ noktasında M timelike regle yüzeyinin normalini $\tilde{N} = N_{\varphi(t,v)}$ ile gösterelim.

$$\tilde{N} = A_o \wedge X = \frac{cvT + (1+av)N}{\left[(1+av)^2 - c^2v^2\right]^{1/2}} \quad \text{ve} < \tilde{N}, \tilde{N} >= 1 \tag{4.51}$$

olduğundan $\tilde{N} = N_{\varphi(t,v)}$ birim spacelike vektördür.

$$S(A_o) = \mu_1 A_o + \mu_2 X$$
$$S(X) = \mu_3 A_o + \mu_4 X$$

ve (4.48) den

$$K = \det S = (\mu_2)^2 = (< S(A_o), X >)^2 \tag{4.52}$$

dir. (2.7) den

$$S(A_o) = -D_{A_o}\tilde{N} = -\frac{d\tilde{N}}{dt^*} = -\frac{d\tilde{N}}{dt}\frac{dt}{dt^*}$$

dir. Burada t* ile φ_v, v=sbt eğrisinin yay parametresi gösterilmektedir. O halde

$$A_o = \frac{d\varphi(t,v)}{dt^*} = \frac{d\varphi(t,v)}{dt}\frac{dt}{dt^*} = A\frac{dt}{dt^*}$$

ve (4.50) den $\dfrac{dt}{dt^*}=\dfrac{1}{\|A\|}$ bulunur. Böylece

$$S(A_o)=-\frac{1}{\|A\|}\frac{d\tilde{N}}{dt}$$

$$=-\frac{1}{\|A\|}\left\{\left[\left(\frac{1}{\|A\|}\right)^{\cdot}cv+\frac{b(1+av)}{\|A\|}+\frac{\dot{c}v}{\|A\|}\right]T-\frac{c}{\|A\|}X\right.$$

$$\left.+\left[\left(\frac{1}{\|A\|}\right)^{\cdot}(1+av)+\frac{\dot{a}v+bcv}{\|A\|}\right]N\right\}$$

elde edilir. Böylece

$$<S(A_o),X>=\frac{c}{\|A\|^2}<X,X>=\frac{c}{\|A\|^2}$$

olur. (4.52) den $\varphi(t,v)$ noktasındaki Gauss eğriliği

$$K(t,v)=\frac{c^2}{\|A\|^4}$$

$$K(t,v)=\frac{c^2}{\left[(c^2-a^2)v^2-2av-1\right]^2} \qquad (4.53)$$

bulunur. Buradan

$$\frac{\partial K(t,v)}{\partial v}=-\frac{4c^2\left[(c^2-a^2)v-a\right]}{[<A,A>]^3}$$

dir. M açılabilir olmayan bir regle yüzey olduğundan $c\neq 0$ ve $-<A,A> >0$ dır. $\dfrac{\partial K(t,v)}{\partial v}=0$ dan

$$v=\frac{a}{c^2-a^2}$$

ekstremum noktası bulunur ve

$$\left.\frac{\partial^2 K(t,v)}{\partial^2 v}\right|_{v=\frac{a}{c^2-a^2}} > 0$$

dir. Böylece $v=\dfrac{a}{c^2-a^2}$ noktası $K(t,v)$ nin minimum noktasıdır. $v=\dfrac{a}{c^2-a^2}$ değerine anadoğru üzerinde karşılık gelen nokta merkez noktası olduğundan X anadoğrusu üzerinde K fonksiyonu minimum değerini merkez noktasında alır. v nin bu değeri (4.53) de yerine yazılırsa

$$K_{min}=\frac{(c^2-a^2)^2}{c^2} \tag{4.54}$$

bulunur.

Teorem 4.2.14.

M timelike bir regle yüzey olsun. M nin açılabilir olması için gerek ve yeter şart M nin Gauss eğrilik fonksiyonunun özdeş olarak sıfır olmasıdır.

İspat :

Teoremin ispatı (4.53) ve Teorem4.2.2 den kolayca görülür.

Teorem 4.2.15.

Bir M timelike regle yüzeyinin dağılma parametresi yalnızca anadoğrulara bağlıdır.

İspat :

(4.54) den, bir anadoğru boyunca Gauss eğriliğinin minimum değeri

$$K_{min}=\frac{(c^2-a^2)^2}{c^2}$$

dir. Boğaz noktasında a=0 ve (4.45) den

$$K_{min} = c^2 = \left(\frac{1}{P_X}\right)^2$$

$$\sqrt{K_{min}} = \frac{1}{P_X}$$

$$P_X = \frac{1}{\sqrt{K_{min}}} \tag{4.55}$$

elde edilir. K_{min} değeri bir anadoğru boyunca bir tekdir. O halde dağılma parametresinin değeri bir anadoğru için aynıdır, anadoğrudan anadoğruya değişir.

Chasles teoreminin 3-boyutlu Minkowski uzayında timelike regle yüzeylerde karşılığı olan teoremi verelim.

Teorem 4.2.16.

M açılabilir olmayan timelike bir regle yüzey olsun. M nin bir anadoğrusu boyunca normali N_v, bu anadoğru üzerindeki merkez noktasında M nin normali N ise N ile N_v arasındaki açının tanjantı, N_v nin başlangıç noktasının merkez noktasına olan uzaklığı ile doğru orantılıdır.

İspat :

M timelike regle yüzeyi

$$\varphi : I \times J \to \mathbb{R}^3_1$$
$$\varphi(t,v) = (\alpha_1(t) + vc_1(t),\ \alpha_2(t) + vc_2(t),\ \alpha_3(t) + vc_3(t))$$

olmak üzere (IxJ,φ) parametrizasyonu ile verilsin. v=0 için φ(t,0) noktası M nin bir boğaz noktası olsun. $\alpha : I \to M$ eğrisi φ(t,0) merkez noktasından geçen bir ortogonal yörünge olur. α eğrisinin birim teğet vektör alanı T ve α(t) noktasından geçen anadoğrunun birim teğet vektör alanı X olmak üzere, φ(t,0) noktasında Teorem 4.2.5 den $D_T X$ vektör alanı, M ye normaldir. Böylece v=0 olduğundan a=0 dır. Buna göre dağılma parametresi

$$P_X = \frac{1}{c} \tag{4.56}$$

dir. (4.51) den, anadoğru boyunca yüzeyin normali

$$N_v = \frac{cvT + N}{\sqrt{1 - c^2 v^2}} \tag{4.57}$$

elde edilir. N ile N_v arasındaki açıyı θ ile gösterelim. N ile N_v birim spacelike vektörlerdir. (4.57) den

$$< N, N_v >= \frac{1}{\sqrt{1 - c^2 v^2}} \tag{4.58}$$

bulunur. (2.2) den

$$< N, N_v >= \|N\| \, \|N_v\| \, \cos\theta = \cos\theta \tag{4.59}$$

elde edilir. (4.56) dan $c = \frac{1}{P_X}$ değeri (4.58) de yerine yazılırsa

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 - c^2 v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{P_X}\right)^2}}$$

bulunur. Buradan

$$\sin\theta = \frac{\frac{v}{P_X}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{P_X}\right)^2}}$$

dir. Böylece

$$\tan\theta = \frac{v}{P_X}$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.17.

Açılabilir olmayan timelike bir M regle yüzeyi üzerinde bir anadoğru boyunca teğet düzlem $-\frac{1}{c} < v < \frac{1}{c}$ aralığında anadoğru etrafında 180° döner.

İspat :

M, açılabilir olmayan timelike bir regle yüzey ve $p \in M$ noktasından geçen ℓ_p anadoğrusu üzerindeki merkez noktası p olsun. $p \in M$ noktasında M nin normalini N_p ve $q \in \ell_p$ noktasındaki normalini de N_q ile gösterelim. p ve q noktaları arasındaki uzaklık v olmak üzere N_p ile N_q arasındaki açı θ ise Teorem 4.2.16 dan $\tan\theta = \frac{v}{P_X}$ dir. Boğaz noktasındaki $\dot{X}$ spacelike vektör olduğundan

$$\min\left\{-\frac{1}{a-c}\ ,\ -\frac{1}{a+c}\right\} < v < \max\left\{-\frac{1}{a-c}\ ,\ -\frac{1}{a+c}\right\}$$

dir. a=0 olduğundan

$$\min\left\{-\frac{1}{c}\ ,\ \frac{1}{c}\right\} < v < \max\left\{-\frac{1}{c}\ ,\ \frac{1}{c}\right\}$$

dir.

Eğer v=0 ise p ile q noktaları arasındaki uzaklık sıfırdır. O zaman p=q dur. Bu durumda $\tan\theta=0$ ve buradan $\theta=0$ bulunur. Eğer $0 > v > \min\left\{-\frac{1}{c}\ ,\ \frac{1}{c}\right\}$ ise bu durumda $-\frac{\pi}{2} \leq \theta < 0$dır. Eğer $\max\left\{-\frac{1}{c}\ ,\ \frac{1}{c}\right\} > v > 0$ ise bu durumda $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ dir. O halde bu aralıklarda teğet düzlem 180^o döner.

Örnek 4.2.18.

$$\varphi(t,v) = \left(-\left(\frac{\kappa}{\kappa^2-\tau^2}+v\right)\mathrm{ch}\sqrt{\kappa^2-\tau^2}\,t,\ \frac{\tau t}{\sqrt{\kappa^2-\tau^2}},\ -\left(\frac{\kappa}{\kappa^2-\tau^2}+v\right)\mathrm{sh}\sqrt{\kappa^2-\tau^2}\,t \right)$$

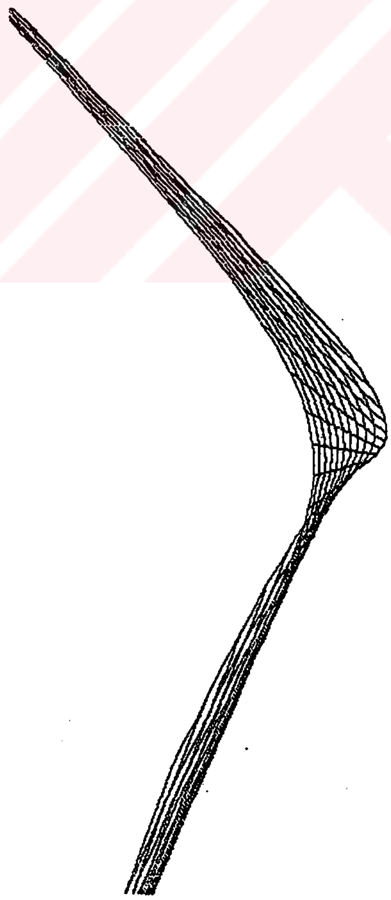
II. çeşit helikoid yüzeyi timelike bir regle yüzeydir (Woestijne, 1990). Burada κ ve τ dayanak eğrisi α nın, sırasıyla, birinci ve ikinci eğriliği, $|\kappa| > |\tau|$ olup $-\infty < v < \min\left\{-\frac{1}{\kappa-\tau}, -\frac{1}{\kappa+\tau}\right\}$ veya $\max\left\{-\frac{1}{\kappa-\tau}, -\frac{1}{\kappa+\tau}\right\} < v < \infty$ dir. Yüzeyi $\varphi(t,v) = \alpha(t) + vX(t)$ formunda yazalım.

$$\varphi(t,v)=\left(-\frac{\kappa}{\kappa^2-\tau^2}\mathrm{ch}\sqrt{\kappa^2-\tau^2}\,t,\quad \frac{\tau t}{\sqrt{\kappa^2-\tau^2}},\ -\frac{\kappa}{\kappa^2-\tau^2}\mathrm{sh}\sqrt{\kappa^2-\tau^2}\,t\right)$$
$$+v\left(-\mathrm{ch}\sqrt{\kappa^2-\tau^2}\,t,\ 0,\ -\mathrm{sh}\sqrt{\kappa^2-\tau^2}\,t\right)$$

dir. $<\dot{\alpha},\dot{\alpha}>=-1$ olduğundan α dayanak eğrisi timelike ve $<X,X>=1$ olduğundan anadoğrular da spacelike birer doğrudur.

$$\dot{X}(t)=\left(-\sqrt{\kappa^2-\tau^2}\,\mathrm{sh}\sqrt{\kappa^2-\tau^2}\,t,\ 0,\ -\sqrt{\kappa^2-\tau^2}\,\mathrm{ch}\sqrt{\kappa^2-\tau^2}\,t\right)$$

ve $<\dot{X},\dot{X}>=\tau^2-\kappa^2$ olup $|\kappa|>|\tau|$ olduğundan $\dot{X}$ timelike bir vektör alanıdır. $\det(T,X,\dot{X})=\dfrac{\tau}{\sqrt{\kappa^2-\tau^2}}$ dir. Teorem 4.2.2 ve Sonuç 4.2.3 den 2. çeşit helikoid yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart $\tau=0$ olmasıdır.



Şekil 4.3.

Örnek 4.2.19.

$$\varphi(t,v)=\left((\frac{\kappa}{\tau^2-\kappa^2}-v)\cos\sqrt{\tau^2-\kappa^2}t,\ (\frac{\kappa}{\tau^2-\kappa^2}-v)\ \sin\sqrt{\tau^2-\kappa^2}t,\frac{\tau t}{\sqrt{\tau^2-\kappa^2}}\right)$$

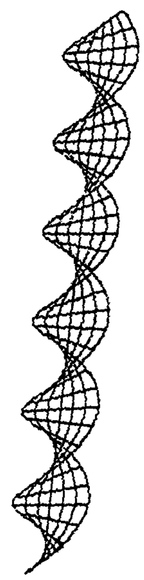
I. çeşit helikoid yüzeyi timelike bir regle yüzeydir (Woestijne, 1990). Burada κ ve τ dayanak eğrisi α nın, sırasıyla, birinci ve ikinci eğriliği, $|\kappa|<|\tau|$ olup $\min\left\{-\frac{1}{\tau+\kappa},\ \frac{1}{\tau-\kappa}\right\}<v<\max\left\{-\frac{1}{\tau+\kappa},\ \frac{1}{\tau-\kappa}\right\}$ dir. Yüzeyi $\varphi(t,v)=\alpha(t)+vX(t)$ formunda yazalım.

$$\begin{aligned}\varphi(t,v)=&\left(\frac{\kappa}{\tau^2-\kappa^2}\cos\sqrt{\tau^2-\kappa^2}t,\ \frac{\kappa}{\tau^2-\kappa^2}\ \sin\sqrt{\tau^2-\kappa^2}t,\ \frac{\tau t}{\sqrt{\tau^2-\kappa^2}}\right)\\&+v\left(-\cos\sqrt{\tau^2-\kappa^2}t,\ -\sin\sqrt{\tau^2-\kappa^2}t,\ 0\right)\end{aligned}$$

dir. $<\dot{\alpha},\dot{\alpha}>=-1$ olduğundan α dayanak eğrisi timelike ve <X,X>=1 olduğundan anadoğrular da spacelike birer doğrudur.

$$\dot{X}(t)=\left(\sqrt{\tau^2-\kappa^2}\ \sin\sqrt{\tau^2-\kappa^2}t,\ -\sqrt{\tau^2-\kappa^2}\ \cos\sqrt{\tau^2-\kappa^2}t,\ 0\right)$$

ve $<\dot{X},\dot{X}>=\tau^2-\kappa^2$ olup $|\tau|>|\kappa|$ olduğundan $\dot{X}$ spacelike bir vektör alanıdır. $<T,\dot{X}>=-\kappa$ ve (4.41) dan $\bar{u}=-\frac{<T,\dot{X}>}{<\dot{X},\dot{X}>}=\frac{\kappa}{\tau^2-\kappa^2}$ boğaz noktasının yervektörüdür. Boğaz eğrisi $\bar{\alpha}(t)=\alpha(t)+\frac{\kappa}{\tau^2-\kappa^2}X(t)$ ve $<\dot{\bar{\alpha}}(t),\dot{\bar{\alpha}}(t)>=-\frac{\tau^2}{\tau^2-\kappa^2}$ olup $\tau^2-\kappa^2>0$ olduğundan $\bar{\alpha}$ eğrisi timelike bir eğridir. $\det(T,X,\dot{X})=\tau$ bulunur ve (4.45) den dağılma parametresi $P_X=\frac{-\tau}{\tau^2-\kappa^2}$ dir. Teorem 4.2.2 ve Sonuç 4.2.3 den I. çeşit helikoid yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart τ=0 olmasıdır.



Şekil 4.4.

Örnek 4.2.20.

$$\varphi(t,v)=\left(\frac{\kappa t^2}{2}+v,\ -\frac{\kappa\tau t^3}{6}-\tau tv,\ \frac{\kappa^2 t^3}{6}+t+\kappa tv\right)$$

II. çeşit Enneper'in eşlenik yüzeyi timelike bir regle yüzeydir (Woestijne, 1990). Burada κ ve τ dayanak eğrisi α nın, sırasıyla, birinci ve ikinci eğriliği ve $|\kappa|=|\tau|\neq 0$ olup

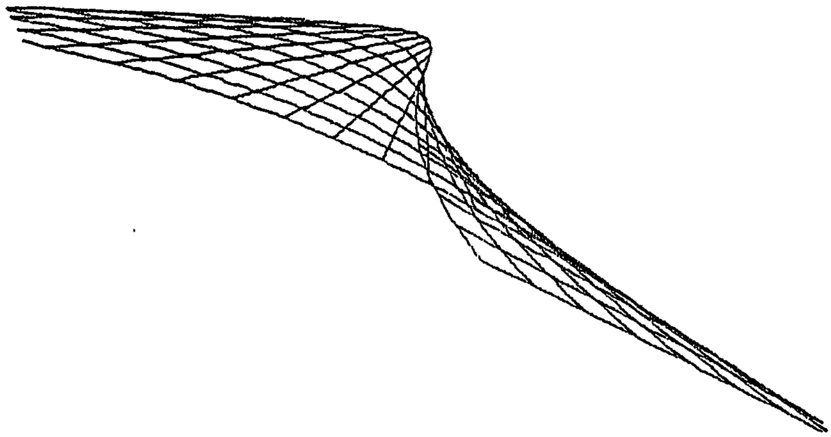
$$\kappa>0 \quad \text{ise} \quad v>-\frac{1}{2\kappa}$$
$$\kappa<0 \quad \text{ise} \quad v<-\frac{1}{2\kappa}$$

dir. Yüzeyi $\varphi(t,v)=\alpha(t)+vX(t)$ formunda yazalım.

$$\varphi(t,v)=\left(\frac{\kappa t^2}{2},\ -\frac{\kappa\tau t^3}{6},\ \frac{\kappa^2 t^3}{6}+t\right)+v(1,\ -\tau t,\ \kappa t)$$

dir. $<\dot{\alpha},\dot{\alpha}>=-1$ olduğundan α dayanak eğrisi timelike ve $<X,X>=1$ olduğundan anadoğrular da spacelike birer doğrudur.

$\dot{X} = (0, -\tau, \kappa)$ ve $< \dot{X}, \dot{X} >= \tau^2 - \kappa^2$ olup $|\kappa| = |\tau|$ olduğundan $\dot{X}$ bir null vektör alanıdır. $\det(T, X, \dot{X}) = -\tau$ dur. Teorem 4.2.2 ve Sonuç 4.2.3 den bu yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart τ=0 olmasıdır.



Şekil 4.5.

Örnek 4.2.21.

$$\varphi(t, v) = \alpha(t) + vX(t) = (0, 0, t) + v(t, 0, 0)$$

xz-düzlemi timelike bir regle yüzeydir (Woestijne, 1990). $< \dot{\alpha}, \dot{\alpha} >= -1$ olduğundan dayanak eğrisi timelike eğri, $< X, X >= t^2$ olduğundan anadoğrular birer spacelike doğrudur.

KAYNAKLAR

BEEM, J.K ve EHRLICH, P.E., 1981. Global Lorentzian Geometry. Marcel Dekker. Inc., New York.

HACISALİHOĞLU, H.H. 1983. Diferensiyel Geometri. İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları.

AKUTAGAWA, K. ve NISHIKAWA, S. 1990. The Gauss Map and Spacelike Surfaces with Prescribed Mean Curvature in Minkowski 3-space Töhoku Math. J.42, 67-82.

O'NEILL, B. 1983. Semi Riemannian Geometry. Academic Press. New York, London.

O'NEILL, B. 1966. Elemantary Differential Geometry. Acedemic Press. New York.

WOESTIJNE, V.D.I. 1990. Minimal Surfaces of te 3-dimensional Minkowski space. Proc. Congres "Géométrie différentielle et applications" Avignon (30 May-3 Jime 1988), World Scientific Publishing. Singapore. 344-369.

ÖZGEÇMİŞ

1964 yılında Niğde'nin Bor ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ankara'da tamamladı. 1982 yılında girdiği Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1986 yılında Matematikçi olarak mezun oldu. Ekim 1986-Şubat 1989 yılları arasında, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı.

1987 yılından itibaren G.Ü. Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.