



**İDEAL OPERATÖRLER VE İDEAL OPERATÖRLERİN
TERSİ**

İrem Mesude GEYİKÇİ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ARALIK 2018

İrem Mesude GEYİKÇİ tarafından hazırlanan ‘İDEAL OPERATÖRLER VE İDEAL OPERATÖRLERİN TERSİ’ adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Bahri TURAN

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Başkan: Prof. Dr. Birol ALTIN

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Prof. Dr. Gülen BAŞCANBAZ TUNCA

Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Tez Savunma Tarihi: 13/12/2018

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

İrem Mesude GEYİKÇİ

13/12/2018

İDEAL OPERATÖRLER VE İDEAL OPERATÖRLERİN TERSİ
(Yüksek Lisans Tezi)

İrem Mesude GEYİKÇİ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Aralık 2018

ÖZET

Bu tezde, ideal operatörler ve invers ideal operatörler çalışılmıştır. Önce, ideal ve invers ideal operatörlerin temel özellikleri ve bilinen operatör sınıfları ile ilişkileri incelenmiştir. Sonra birebir ve örten bir ideal operatörünün tersinin ne zaman ideal operatör olacağı elde edilmiştir.

Bilim Kodu : 20404

Anahtar Kelimeler : Riesz uzayı, ideal operatörler, invers ideal operatörler

Sayfa Adedi : 57

Danışman : Prof. Dr. Bahri TURAN

IDEAL OPERATORS AND THE INVERSE OF IDEAL OPERATORS
(M.Sc. Thesis)

İrem Mesude GEYİKÇİ

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
December 2018

ABSTRACT

In this thesis, it has been studied on ideal operators and inverse ideal operators. Firstly, the fundamental properties of ideal operators and inverse ideal operators, besides the relations of them with known operator classes have been examined. Then, when the inverse of one to one and surjective ideal operator became an ideal operator has been obtained.

Science Code : 20404
Key Words : Riesz space, ideal operators, invers ideal operators
Page Number : 57
Supervisor : Prof. Dr. Bahri TURAN

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlarken bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan, değerli eleştiri ve fikirleri ile beni yönlendiren sayın hocam Prof. Dr. Bahri TURAN'a ve çalışma süresince manevi desteklerini esirgemeyen aileme ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	3
2.1. İdeal Operatörler.....	22
2.2. Diklik Koruyan Operatörler	37
2.3. İdeal Operatörün Tersisi	47
3. SONUÇ VE ÖNERİLER	53
KAYNAKLAR	55
ÖZGEÇMİŞ	57

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$A \uparrow$	Yukarı yönlendirilmiş küme
A^d	A kümesinin dik tümleyeni
$A \perp B$	Dik kümeler
B_x	x tarafından üretilen band
$B(E)$	E 'deki bandların kümesi
E^+	E uzayının pozitif kısmı
$E \oplus F$	İki Riesz uzayının direkt toplamı
I_x	x tarafından üretilen ideal
$L(E, F)$	Operatörlerin vektör uzayı
$L_b(E, F)$	Sıra sınırlı operatörler uzayı
$Orth(E)$	E üzerinde tanımlı ortomorfizmaların kümesi
$P(E)$	E üzerinde tanımlı projeksiyonların kümesi
$ T $	T 'nin modülü (mutlak değeri)
x^+	x 'in pozitif kısmı
x^-	x 'in negatif kısmı
$ x $	x 'in modülü (mutlak değeri)
$x_\alpha \uparrow x$	Yukarı yönlendirilmiş ve supremumu x olan ağ
$x_\alpha \downarrow x$	Aşağı yönlendirilmiş ve infimumu x olan ağ
$x \vee y$	x ile y 'nin supremumu
$x \wedge y$	x ile y 'nin infimumu
$x \perp y$	Birbirine dik elemanlar

Simgeler **$Z(E)$** **Açıklamalar**

Merkez operatörlerin kümesi

1. GİRİŞ

E ve F Riesz uzayı $T: E \rightarrow F$ lineer dönüşüm olmak üzere eğer $x \perp y$ iken $Tx \perp Ty$ oluyorsa T ye diklik koruyan operatör denir. Y.A. Abramovich [1] de aşağıdaki soruyu vermiştir.

E ve F Riesz uzayı $T: E \rightarrow F$ birebir ve örten dikliği koruyan operatör ise T^{-1} dikliği koruyan operatör müdür?

Y.A. Abramovich ve Arkady K. Kitover E ve F her hangi Riesz uzayı iken sorunun yanıtının olumsuz olduğunu, kendi diklik koruyan olan fakat tersi diklik koruyan olmayan bir örnek oluşturarak göstermişlerdir. Bu nedenle E ve F uzayları üzerine hangi hipotezler konulursa sorunun yanıtı olumlu olur araştırması yapıla gelmiştir. Örneğin [4] ve [7] da E göreceli düzgün tam Riesz uzayı ve F normlu Riesz uzayı ise yanıtın olumlu olduğu gösterilmiştir.

E Archimedian Riesz uzayı $T: E \rightarrow E$ lineer dönüşüm olmak üzere her $x, y \in E$ için $x \perp y \Rightarrow Tx \perp y$ ise T ye band koruyan operatör denir. Benzer şekilde Y.A. Abramovich ve Arkady K. Kitover aynı soruyu band koruyan operatörler için de sordu. Sorunun olumlu yanıtı [7] da E principal projeksiyon özelliğine sahip ya da göreceli düzgün tam olduğunda verildi.

E ve F Riesz uzayları ve $T: E \rightarrow F$ bir operatör olsun. Her $I \subseteq E$ ideali için $T(I) \subseteq F$ de ideal oluyorsa T ye *ideal operatör*, her $J \subseteq F$ ideali için $T^{-1}(J) \subseteq E$ de ideal oluyorsa T ye *invers ideal operatör* denir. Biz de benzer soruyu ideal operatörler için sorarak ideal operatörlerin tersinin ne zaman ideal operatör olduğunu araştırdık.

Bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde konu için alt yapı oluşturacak tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde B.Turan'ın [11] "On ideal operators" isimli makalesi baz alınarak ideal ve invers ideal operatörlerin temel özellikleri detaylı olarak incelenmiş, literatürde iyi bilinen operatör sınıfları ile karşılaştırmaları yapılmıştır. Örneğin, aralık koruyan operatör, band ve ideal koruyan operatörlerle ilişkileri örnekler oluşturularak verilmiştir. Özellikle dikliği koruyan operatörlerle ilişkisi elde edilmeye çalışılarak yukarda verilen soruya katkı

sağlanmaya çalışılmıştır. Son kısımda ise yukarda verilen sorunun ideal operatörler için yanıtı elde edilmeye çalışılmıştır.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar ve bazı teoremler [2], [3], [9] ve [12] kullanılarak verilmiştir.

1.1. Tanım (Sıralı küme)

E boştan farklı bir küme olmak üzere E üzerinde tanımlı ' $\leq$ ' bağıntısı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, ' $\leq$ ' bağıntısına *(kısmi)sıralama bağıntısı*, $(E, \leq)$ ikilisine de *(kısmi) sıralı küme* denir.

- i) Her $x \in E$ için $x \leq x$ (*yansıma özelliği*)
- ii) Her $x, y \in E$ için $x \leq y$ ve $y \leq x \Rightarrow x = y$ (*ters simetri özelliği*)
- iii) Her $x, y, z \in E$ için $x \leq y$ ve $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (*geçişme özelliği*)

1.2. Tanım (Supremum ve infimum)

$(A, \leq)$ kısmi sıralı küme $B \subseteq A$ ve $a, b \in A$ olmak üzere;

- i) Her $x \in B$ için $x \leq a$
- ii) Her $x \in B$ için $x \leq b$ iken $a \leq b$

şartlarını sağlayacak şekilde bir a elemanı varsa buna B kümesinin *üst sınırlarının en küçüğü* (*supremumu*) denir ve $\sup B = a$ biçiminde gösterilir.

- i) Her $x \in B$ için $a \leq x$
- ii) Her $x \in B$ için $b \leq x$ iken $b \leq a$

şartlarını sağlayacak şekilde bir a elemanı varsa buna B kümesinin *alt sınırlarının en büyüğü* (*infimumu*) denir ve $\inf B = a$ biçiminde gösterilir.

1.3. Teorem (IR de infimum)

$A \subseteq \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. $\inf A = a$ olması için gerekli ve yeterli koşul

- i) Her $x \in A$ için $a \leq x$
 - ii) Her $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ için $x_\varepsilon - a < \varepsilon$ olacak şekilde bir $x_\varepsilon \in A$ vardır.
- şartlarının sağlanmasıdır.

1.4. Teorem (IR de supremum)

$A \subseteq \mathbb{R}$ ve $b \in \mathbb{R}$ olsun. $\sup A = b$ olması için gerekli ve yeterli koşul

- i) Her $x \in A$ için $x \leq b$

ii) Her $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ için $b - x_\varepsilon < \varepsilon$ olacak şekilde bir $x_\varepsilon \in A$ vardır. şartlarının sağlanmasıdır.

1.5. Tanım (Latis)

$(E, \leq)$ bir sıralı küme olsun. E nin iki elemanlı her alt kümesinin supremumu ve infimumu varsa E ye *latis(örgü)* denir. $\sup\{x, y\} = x \vee y$ ve $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ biçiminde tanımlanır. Bir latiste her sonlu alt küme bir supremuma ve infimuma sahiptir. Sonlu alt kümedeki elemanlar $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ise

$$\sup(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \bigvee_{i=1}^n x_i$$

$$\inf(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^n x_i$$

şeklinde gösterilir.

1.6. Tanım (Complement)

E bir latise olsun. E nin bir en büyük elemanı varsa buna *birim*, en küçük elemanı varsa buna *sıfır eleman* denir ve sırasıyla e ve θ ile gösterilir.

E birimli ve sıfırlı bir latise $x \in E$ olsun. $x \wedge x' = \theta$ ve $x \vee x' = e$ olacak şekilde bir $x' \in E$ varsa buna x elemanının *complementi* denir.

1.7. Tanım (Sıralı vektör uzayı)

E reel vektör uzayı ve üzerindeki sıralama bağıntısı ' $\leq$ ' olmak üzere, her $x, y \in E$ ve $x \leq y$ için;

i) Her $z \in E$ için $x + z \leq y + z$

ii) Her $0 \leq \alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha x \leq \alpha y$

koşullarını sağlayan E uzayına *sıralı vektör uzayı* denir.

1.8. Tanım (Riesz uzayı)

E sıralı vektör uzayı olsun. E deki herhangi iki elemanın supremumu veya infimumu var ve E ye ait ise, E ye *Riesz Uzayı* denir.

1.9. Tanım

Bir Riesz uzayının boştan farklı ve üstten sınırlı (sayılabilir) her alt kümesinin supremumu veya boştan farklı ve alttan sınırlı (sayılabilir) her alt kümesinin infimumu varsa bu Riesz uzayına *Dedekind tam* (σ -Dedekind tam) Riesz uzayı denir.

1.10. Teorem

E bir Riesz uzayı ve $x, y, z \in E$ olmak üzere, aşağıdaki önermeler doğrudur.

- 1) $x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)]$ ve $x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]$
- 2) $x + y = (x \wedge y) + (x \vee y)$
- 3) $x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z)$ ve $x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$
- 4) $\lambda \geq 0$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) $\lambda(x \vee y) = \lambda x \vee \lambda y$ ve $\lambda(x \wedge y) = \lambda x \wedge \lambda y$ [2].

1.11. Tanım:

E Riesz uzayı ve $x \in E$ olmak üzere; $x^+ = x \vee 0$, $x^- = (-x) \vee 0$, $|x| = x \vee (-x)$ elemanlarına sırasıyla $x \in E$ nin *pozitif kısmı*, *negatif kısmı* ve *modülü* (mutlak değeri) denir.

1.12. Teorem

E bir Riesz uzayı ve $x \in E$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

- 1) $x = x^+ - x^-$
- 2) $|x| = x^+ + x^-$
- 3) $x^+ \wedge x^- = 0$

Ayrıca $x = y - z$ ve $y \wedge z = 0$ ise $y = x^+$, $z = x^-$ dir [2].

1.13. Tanım

A ve B bir Riesz uzayının alt kümeleri olmak üzere, aşağıdaki tanımlamaları yazabiliriz.

- i) $|A| = \{|a|: a \in A\}$
- ii) $A^+ = \{a^+: a \in A\}$
- iii) $A^- = \{a^-: a \in A\}$
- iv) $A \vee B = \{a \vee b: a \in A, b \in B\}$
- v) $A \wedge B = \{a \wedge b: a \in A, b \in B\}$
- vi) $x \vee A = \{x \vee a: a \in A\}$
- vii) $x \wedge A = \{x \wedge a: a \in A\}$

1.14. Teorem

E Riesz uzayı ve $x \in E$ olsun. Aşağıdaki önermeler doğrudur.

- 1) $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ ve $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$
- 2) $|x - y| = (x \vee y) - (x \wedge y)$
- 3) $|x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x + y| + |x - y|)$
- 4) $|x| \wedge |y| = \frac{1}{2}||x + y| - |x - y||$ [2].

1.15. Tanım

E Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ alt vektör uzayı olsun. Her $x, y \in A$ için $x \vee y \in A$ veya $x \wedge y \in A$ oluyorsa A 'ya E 'nin *Riesz alt vektör uzayı* denir.

1.16. Sonuç

E sıralı vektör uzayı olsun. Aşağıdakiler denktir.

- i) E Riesz uzayıdır.
- ii) Her $x \in E$ için $x^+ \in E$
- iii) Her $x \in E$ için $x^- \in E$
- iv) Her $x \in E$ için $|x| \in E$

1.17. Teorem

Bir E Riesz uzayının herhangi üç x, y, z elemanları aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar.

- 1) $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$
- 2) $|(x \vee z) - (y \vee z)| \leq |x - y|$ ve $|(x \wedge z) - (y \wedge z)| \leq |x - y|$
- 3) Eğer $x, y, z \in E^+$ ise $x \wedge (y + z) = (x \wedge y) + (x \wedge z)$ [2].

1.18. Tanım (Diklik)

E Riesz uzayının herhangi iki elemanı x, y için $|x| \wedge |y| = 0$ ise, bu elemanlar birbirine *diktir* denir ve $x \perp y$ ile gösterilir.

Bir Riesz uzayının iki A, B alt uzayı için, ' $\forall a \in A, \forall b \in B$ için $a \perp b$ ' önermesi sağlanırsa, A ve B *diktir* denir ve $A \perp B$ ile gösterilir.

1.19. Tanım (Dik Tümleyen)

Bir E Riesz uzayının boştan farklı bir alt kümesi A olmak üzere

$\{x \in E: \forall a \in A \text{ için } a \perp x\}$ kümesine A nın *dik tümleyeni* denir ve A^d ile gösterilir. $(A^d)^d$ benzer şekilde tanımlanır ve $A \cap A^d = \{0\}$ dır.

1.20. Tanım (Artan ve azalan ağ)

(x_α) Riesz uzayında bir ağ(net) olmak üzere,

- i) Her $x_\alpha, x_\beta \in (x_\alpha)$ için $x_\alpha \leq x_s$ ve $x_\beta \leq x_s$ olacak şekilde $x_s \in (x_\alpha)$ varsa (x_α) ya yukarı yönlendirilmiş ağ denir ve $x_\alpha \uparrow$ yazılır.
- ii) Her $x_\alpha, x_\beta \in (x_\alpha)$ için $x_s \leq x_\alpha$ ve $x_s \leq x_\beta$ olacak şekilde $x_s \in (x_\alpha)$ varsa (x_α) ya aşağı yönlendirilmiş ağ denir ve $x_\alpha \downarrow$ yazılır.
- iii) $x_\alpha \uparrow x$ ifadesi $x_\alpha \uparrow$ ve $\sup(x_\alpha) = x$; $x_\alpha \downarrow x$ ifadesi $x_\alpha \downarrow$ ve $\inf(x_\alpha) = x$ anlamındadır. Aynı tanımlar (x_n) dizisi için de verilebilir.

1.21. Tanım (Arşimedyan Riesz Uzayı)

E Riesz uzayında her $x \in E^+$ için $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere; $\frac{1}{n}x \downarrow 0$ ise E ye *Arşimedyan* (*Archimedean*) Riesz uzayı denir.

1.22. Tanım (İdeal, band)

E Riesz uzayı ve G alt vektör uzayı olsun.

- Her $y \in E$ ve $x \in G$ olmak üzere $|y| \leq |x|$ iken $y \in G$ oluyorsa G ye *ideal* denir.
- I ideal ve herhangi bir $\{x_\alpha\} \subseteq I$ olmak üzere $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ iken $x \in I$ oluyorsa, I ideale E uzayında *band* denir. E deki tüm bandlerin kümesini $B(E)$ ile göstereceğiz.

- $\emptyset \neq A \subseteq E$ kümesini kapsayan en küçük Riesz alt uzayına (ideale/banda) A kümesinin ürettiği Riesz alt uzayı (ideal/band) denir.

$A \subseteq E$ alt kümesinin ürettiği ideal;

$$I_A = \left\{ x \in E : |x| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|, \text{ olacak şekilde } 0 \leq i \leq n \text{ olmak üzere } \lambda_i \in \mathbb{R}^+, \right. \\ \left. x_i \in A \text{ ve en az bir } n \in \mathbb{N} \text{ vardır.} \right\}$$

E Riesz uzayının herhangi bir x elemanının ürettiği ideal;

$$I_x = \{ y \in E : |y| \leq \lambda |x| \text{ olacak şekilde } \lambda \in \mathbb{R} \text{ vardır} \}$$

$A \subseteq E$ alt kümesinin ürettiği band;

$$B_A = \{ x \in E : 0 \leq x_\alpha \uparrow |x| \text{ olacak şekilde } \{x_\alpha\} \subseteq A \text{ var} \}$$

E Riesz uzayının herhangi bir x elemanının ürettiği band;

$$B_x = \{ y \in E : |y| \wedge n|x| \uparrow |y| \} \text{ biçiminde elde edilir.}$$

1.23. Tanım

E Riesz uzayı $0 < e \in E$ olsun.

i) Eğer $I_e = E$ ise e 'ye *güçlü birim (strong unit)* denir.

ii) Eğer $B_e = E$ ise e 'ye *zayıf birim (weak unit)* denir.

1.24. Tanım (Sıra sınırlılık)

A bir Riesz uzayının alt kümesi olsun. Her $y \in A$ için $y \leq x$ olacak şekilde x varsa A ya 'üstten sınırlı', her $y \in A$ için $x \leq y$ olacak şekilde x varsa A ya 'alttan sınırlı', A alttan ve üstten sınırlı ise, A ya *sıra (order) sınırlı* denir.

Riesz uzayının herhangi iki x ve y elemanı için $(x \leq y)$

$[x, y] = \{ z \in E : x \leq z \leq y \}$ şeklinde tanımlanan alt kümesine *sıra aralığı* denir.

1.25. Tanım

E Archimedean Riesz uzay, $(x_\alpha) \subseteq E$, $x \in E$ olsun.

$|x_\alpha - x| \leq y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(y_\alpha) \subseteq E$ neti varsa (x_α) , x elemanına *sıra (order) yakınsaktır* denir.

1.26. Tanım

E Archimedian Riesz uzayı, $(x_n) \subseteq E$, $x \in E$ ve $u \in E^+$ olsun.

- i) Her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ iken $|x_n - x| \leq \varepsilon \cdot u$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisi x elemanına *u-düzgün yakınsak* denir.
- ii) $x_n \rightarrow x$ (u-düzgün yakınsak) olacak şekilde bir $0 \leq u \in E$ varsa, (x_n) dizisi x elemanına *göreceli düzgün yakınsak* denir.

1.27. Tanım

E Archimedian Riesz uzayı, $(x_n) \subseteq E$ olsun.

- i) ‘Her $m \in \mathbb{N}^+$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}^+$ ve $n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_{n+m}| \leq y_n \downarrow 0$ ’ önermesi doğru olacak şekilde $(y_n) \subseteq E$ varsa (x_n) e *order Cauchy dizisi* denir.
- ii) $u \in E^+$ olmak üzere, ‘ $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}^+ \exists \forall m, n \geq n_0$ için $|x_n - x_m| \leq \varepsilon \cdot u$ ’ önermesi doğru ise (x_n) e *u-düzgün Cauchy dizisi* denir.
- iii) En az bir $u \in \mathbb{N}^+$ için (x_n) u-düzgün Cauchy dizisi ise (x_n) e *göreceli düzgün Cauchy dizisi* denir.

1.28. Tanım

E Riesz uzay olmak üzere, E nin her düzgün Cauchy dizisi göreceli düzgün yakınsak oluyorsa, E ye *düzgün tam Riesz uzayı* denir.

1.29. Tanım

E Riesz uzay, $\|\cdot\|$ E üzerinde norm olsun. Her $x, y \in E$ için $|x| \leq |y|$ iken

$\|x\| \leq \|y\|$ ise bu norma ‘*örgü norm*’ denir. Üstelik E bu norma göre tam ise ‘*Banach örgüsü*’ denir.

1.30. Tanım (AM uzayı)

E Banach örgüsü olsun. Her $x, y \in E^+$ için $x \wedge y = 0$ iken

$\|x \vee y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ oluyorsa E ’ye *soyut-M uzayı (AM-uzayı)* denir. Eğer E soyut-M uzayı güçlü birime sahipse E ’ye *birimli soyut-M uzayı* denir.

1.31. Teorem

E düzgün tam Riesz uzayı ve $0 < x \in E$ olsun. I_x, E içinde x tarafından üretilen principal ideal ise $y \in I_x$ için $\|y\|_\infty = \inf\{\lambda > 0: |y| \leq \lambda x\}$ biçiminde tanımlı $\|\cdot\|_\infty$ bir normdur. Bu normla I_x bir AM-uzayıdır ve kapalı birim yuvarı $[-x, x]$ aralığıdır [2].

İspat:

Öncelikle $\|\cdot\|_\infty$ norm şartlarını sağladığını göstermeliyiz. Bunun için ilk başta fonksiyon olduğunu gösterelim.

$A_y = \{\lambda > 0: |y| \leq \lambda x\}$ olarak tanımlayalım.

$y \in I_x$ olduğundan $|y| \leq \lambda x$ olacak şekilde $\lambda > 0$ vardır. O halde $A_y \neq \emptyset$ dir. Ayrıca A_y alttan sıfırla sınırlı olup IR Dedekind tam olduğundan $\inf A_y \in IR$ var olup $\|\cdot\|_\infty$ anlamlıdır. İyi tanımlılığını görmek için her $z, y \in I_x$ için $z = y$ iken $\|z\|_\infty = \|y\|_\infty$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} z = y &\Rightarrow A_z = A_y \\ &\Rightarrow \inf A_z = \inf A_y \\ &\Rightarrow \|z\|_\infty = \|y\|_\infty \end{aligned}$$

olduğundan $\|\cdot\|_\infty$ iyi tanımlıdır. O halde $\|\cdot\|_\infty$ fonksiyondur.

Şimdi norm şartlarını sağlatalım.

$N_1)$ Her $y \in I_x$ için $\|y\|_\infty = 0 \Leftrightarrow y = 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$(\Rightarrow)$ $\|y\|_\infty = 0$ olduğunu kabul edelim. 1.3. Teoremi kullanılarak

$$\begin{aligned} \|y\|_\infty = 0 &\Rightarrow \inf\{\lambda > 0: |y| \leq \lambda x\} = 0 \\ &\Rightarrow \exists (\lambda_n) \subseteq A_y \ni \lambda_n \downarrow 0 \\ &\Rightarrow \forall n \in IN^+ \text{ için } |y| \leq \lambda_n x \\ &\Rightarrow y = 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $y = 0$ olduğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned} y = 0 &\Rightarrow \forall n \in IN^+ \text{ için } |y| \leq \frac{1}{n} x \\ &\Rightarrow \left\{ \frac{1}{n}, n \in IN^+ \right\} \subseteq A_y \\ &\Rightarrow 0 \leq \inf A_y \subseteq \inf \left\{ \frac{1}{n}, n \in IN^+ \right\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \inf A_y = 0$$

$$\Rightarrow \|y\|_\infty = 0$$

N_2) Her $y \in I_x$, $\beta \in \mathbb{R}$ için $\|\beta y\|_\infty = |\beta| \|y\|_\infty$ olduğunu göstermeliyiz.

Öncelikle $\beta = 0$ için eşitlik aşıkardır. Şimdi ise $\beta \neq 0$ için inceleyelim.

$$\begin{aligned} \|\beta y\|_\infty &= \inf\{\lambda > 0: |\beta y| \leq \lambda x\} \\ &= \inf\{\lambda > 0: |\beta| |y| \leq \lambda x\} \\ &= \inf\left\{\lambda > 0: |y| \leq \frac{\lambda}{|\beta|} x\right\} \\ &= \inf\left\{\frac{\lambda}{|\beta|} > 0: |y| \leq \frac{\lambda}{|\beta|} x\right\} \\ &= |\beta| \inf\left\{\frac{\lambda}{|\beta|} > 0: |y| \leq \frac{\lambda}{|\beta|} x\right\} \\ &= |\beta| \|y\|_\infty \end{aligned}$$

N_3) Her $y, z \in I_x$ için 1.3. Teoremden her $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ için $\lambda_\varepsilon < \|y\|_\infty + \frac{\varepsilon}{2}$ ve $\mu_\varepsilon < \|z\|_\infty + \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $\lambda_\varepsilon \in A_y$, $\mu_\varepsilon \in A_z$ vardır. Buradan

$\lambda_\varepsilon + \mu_\varepsilon < \|y\|_\infty + \|z\|_\infty + \varepsilon$ elde edilir. Diğer yandan $\lambda_\varepsilon \in A_y$ ve $\mu_\varepsilon \in A_z \Rightarrow |y| \leq \lambda_\varepsilon \cdot x$ ve $|z| \leq \mu_\varepsilon \cdot x \Rightarrow |y| + |z| \leq \lambda_\varepsilon \cdot x + \mu_\varepsilon \cdot x = (\lambda_\varepsilon + \mu_\varepsilon) \cdot x$ olur. $|y + z| \leq |y| + |z|$ olduğu göz önüne alınırsa $|y + z| \leq (\lambda_\varepsilon + \mu_\varepsilon) \cdot x$ dir. Bu $\lambda_\varepsilon + \mu_\varepsilon \in A_{y+z}$ olması demektir. O halde $\|y + z\|_\infty = \inf A_{y+z} \leq \lambda_\varepsilon + \mu_\varepsilon < \|y\|_\infty + \|z\|_\infty + \varepsilon$ olur. Her $\varepsilon > 0$ için doğru olduğu düşünülürse $\|y + z\|_\infty \leq \|y\|_\infty + \|z\|_\infty$ dır.

O halde $\|\cdot\|_\infty$ norm şartlarını sağlar. Şimdi ise $(I_x, \|\cdot\|_\infty)$ Banach uzayı olduğunu gösterelim. Bunun için $(x_n) \subseteq I_x$ keyfi bir Cauchy dizisi olsun. Cauchy dizisinin tanımından her $\varepsilon > 0$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ öyle ki her $m, n \geq n_0$ iken $\|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon$ dur. $\|\cdot\|_\infty$ un tanımından her $y \in I_x$ için $|y| \leq \|y\|_\infty \cdot x$ olduğundan

$|x_n - x_m| \leq \|x_n - x_m\|_\infty \cdot x < \varepsilon \cdot x$ ve böylece $|x_n - x_m| \leq \varepsilon \cdot x$ elde edilir. Bu durumda (x_n) x -düzgün Cauchy dizisidir. E düzgün tam olduğundan $x_n \rightarrow y$ olacak şekilde $y \in E$ vardır.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |x_n - x_m| \leq \varepsilon. x \Rightarrow |x_n - y| \leq \varepsilon. x$$

$$\Rightarrow x_n - y \in I_x$$

$$\Rightarrow (x_n - y) - x_n \in I_x$$

$$\Rightarrow -y \in I_x$$

$$\Rightarrow y \in I_x$$

olduğu bulunur.

Diğer yandan

$$\|x\|_\infty = \inf\{\lambda > 0: |x| \leq \lambda. x\} = 1 \text{ olup}$$

$$|x_n - y| \leq \varepsilon. x \Rightarrow \|x_n - y\|_\infty \leq \|\varepsilon. x\|_\infty = \varepsilon \|x\|_\infty = \varepsilon \text{ bulunur. O halde } (I_x, \|\cdot\|_\infty)$$

Banach uzayıdır.

Şimdi $\|\cdot\|_\infty$ un M-norm olduğunu gösterelim. I_x de $u \wedge v = 0$ olsun. Amacımız $\|u \vee v\|_\infty = \max\{\|u\|_\infty, \|v\|_\infty\}$ eşitliğini göstermek. Bunun için

$m = \max\{\|u\|_\infty, \|v\|_\infty\}$ diyelim. $|u + v| = |u| + |v|$ ve $u + v = u \vee v$ olduğu göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned} |u| \leq |u| + |v| = |u + v| &\Rightarrow \inf\{\lambda > 0: |u| \leq \lambda|x|\} \leq \inf\{\lambda > 0: |u + v| \leq \lambda|x|\} \\ &\Rightarrow \|u\|_\infty \leq \|u + v\|_\infty \dots (*) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} |v| \leq |u| + |v| = |u + v| &\Rightarrow \inf\{\lambda > 0: |v| \leq \lambda|x|\} \leq \inf\{\lambda > 0: |u + v| \leq \lambda|x|\} \\ &\Rightarrow \|v\|_\infty \leq \|u + v\|_\infty \dots (**) \end{aligned}$$

bulunur. (*) ve (**) dan $\max\{\|u\|_\infty, \|v\|_\infty\} \leq \|u + v\|_\infty = \|u \vee v\|_\infty$ (I)

Diğer yandan $0 \leq u \vee v \leq [\|u\|_\infty x] \vee [\|v\|_\infty x] \leq mx \vee mx = mx \Rightarrow \|u \vee v\|_\infty \leq m$ (II)

(I) ve (II) den $\|u \vee v\|_\infty = \max\{\|u\|_\infty, \|v\|_\infty\}$ eşitliği sağlanır.

Şimdi $B = \{y \in I_x: \|y\|_\infty \leq 1\}$ olmak üzere $B = [-x, x]$ olduğunu gösterelim.

Her y için

$$y \in [-x, x] \Rightarrow |y| \leq |x|$$

$$\Rightarrow 1 \in A_y$$

$$\Rightarrow \|y\|_\infty \leq 1$$

$$\Rightarrow y \in B$$

olur. Tersine $y \in B$ yani $\|y\|_\infty \leq 1$ olsun. $|y| \leq \|y\|_\infty \cdot x \Rightarrow |y| \leq 1 \cdot x \Rightarrow y \in [-x, x]$ bulunur. Buradan istenen sağlanmış olur.

1.32. Teorem (Kakutani-Bohnenblust and M. Krein-S. Krein)

E Banach örgüsü olsun. E 'nin birimli soyut-M uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul E ile $C(K)$ izometrik ($E \cong C(K)$) olacak şekilde K kompakt Hausdorff uzayının var olmasıdır [2].

Bu teoremden I_x , birimi $|x|$ olan AM-uzayı olduğundan $I_{|x|} = I_x \cong C(K)$ olacak şekilde K kompakt Hausdorff uzayı vardır.

1.33. Tanım (Lineer dönüşüm veya operatör)

E ve F iki vektör uzayı olmak üzere bir $T: E \rightarrow F$ dönüşümü her $x, y \in E$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ eşitliğini sağlıyorsa T ye *lineer dönüşüm veya operatör* denir.

1.34. Tanım (Pozitif operatör)

E ve F iki sıralı vektör uzayı $T: E \rightarrow F$ operatör olsun. Her $x \geq 0$ için $T(x) \geq 0$ oluyorsa T operatörüne *pozitif operatör* denir.

1.35. Sonuç

E ve F Riesz uzayları, $T: E \rightarrow F$ bir operatör olmak üzere $|T|$ var ise her $x \in E^+$ için $|Tx| \leq |T|(x)$ eşitsizliği sağlanır.

1.36. Teorem

E ve F Riesz uzayları ve $T: E \rightarrow F$ bir operatör olsun. Her $x \in E^+$ için $\sup\{|Ty|: |y| \leq x\}$ varsa $|T|$ vardır ve $|T|(x) = \sup\{|Ty|: |y| \leq x\}$ dir [2].

1.37. Teorem (Kantorovic)

E Riesz uzayı, F Archimedian Riesz uzayı ve $T: E^+ \rightarrow F^+$ toplamsal dönüşüm yani her $x, y \in E^+$ için $T(x + y) = T(x) + T(y)$ olsun. O zaman T , E den F içine bir tek ve pozitif operatör olarak genişler. Bu genişleme yine T ile gösterilirse, $T: E \rightarrow F$, her $x \in E$ için $T(x) = T(x^+) - T(x^-)$ şeklindedir [2].

1.38. Tanım ($L_b(E, F)$)

E ve F Riesz uzayları, $T: E \rightarrow E$ operatörü E nin sıra sınırlı alt kümelerini F nin sıra sınırlı alt kümelerine dönüştürüyorsa, T operatörüne *sıra sınırlı operatör* denir. E den F ye tanımlanan bütün sıra sınırlı operatörlerin uzayı $L_b(E, F)$ ile gösterilir.

$L_b(E, F) = \{T \in L(E, F): A \subseteq E \text{ sıra sınırlı iken } T(A) \subseteq F \text{ sıra sınırlı}\}$. $F = IR$ alınırsa $L_b(E, IR) = E^\sim$ yani E nin sıra duali elde edilir.

1.39. Tanım (Alt lineer dönüşüm)

G vektör uzayı, F Riesz uzayı ve $p: G \rightarrow F$ bir fonksiyon olmak üzere eğer;

i) Her $x, y \in G$ için $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

ii) Her $\lambda \in IR^+$ için $p(\lambda x) = \lambda p(x)$

şartları sağlanırsa p ye '*alt lineer dönüşüm*' denir.

1.40. Teorem (Hahn-Banach)

G reel vektör uzayı, F Dedekind tam Riesz uzayı ve $p: G \rightarrow F$ alt lineer dönüşüm olsun.

$H \subseteq G$ alt vektör uzayı olmak üzere her $x \in H$ için $S(x) \leq P(x)$ olacak biçimde $S: H \rightarrow F$ lineer dönüşümü için,

i) H üzerinde $T = S$

ii) Her $x \in G$ için $T(x) \leq P(x)$

şartlarını sağlayacak şekilde $T: G \rightarrow F$ operatörü vardır [2].

1.41. Tanım (Projeksiyon band, projeksiyon, pozitif ve band projeksiyon)

E Riesz uzayında bir B bandı için $E = B \oplus B^d$ ise B ye *projeksiyon band* denir. Eğer E Dedekind tam ise $B \subseteq E$ bandı için $E = B \oplus B^d$ sağlanır. $P: E \rightarrow E$ lineer dönüşümü için $P^2 = P$ ise, P ye *projeksiyon* denir. P, E Riesz uzayı üzerinde projeksiyon ve pozitif operatör ise, P ye *pozitif projeksiyon* denir. $B \subseteq E$ projeksiyon band olsun. Bu durumda

$E = B \oplus B^d$ ve her $x \in E$ için $x = x_1 + x_2; x_1 \in B, x_2 \in B^d$ $P_B: E \rightarrow E; P_B(x) = x_1$ biçiminde tanımlayalım.

$P^2(x) = P(P(x)) = P(x_1) = P(x_1 + 0) = x_1 = P(x)$ olduğundan $P^2 = P$ dir.

$x \geq 0$ iken $x = x_1 + x_2$; $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ yazılışı tek türdür. Ayrıca, $P_B(x) = x_1 \geq 0$ olduğunu düşünürsek P_B pozitif projeksiyondur. Benzer şekilde $P_{B^d}: E \rightarrow E$; $P_{B^d}(x) = x_2$ biçiminde tanımlandığından P_{B^d} projeksiyonu da pozitifdir. Ayrıca pozitif projeksiyon

$P \leq I$ ise P ye sıra veya band projeksiyon denir. P_B pozitif projeksiyonu *band projeksiyondur*. E deki tüm band projeksiyonların kümesini $P(E)$ ile göstereceğiz.

1.42. Tanım (Principal projeksiyon)

E Riesz uzayı ve $x \in E$ olmak üzere, x in ürettiği band olan B_x projeksiyon band ise x e projeksiyon eleman, ürettiği banda *principal band* denir. Bir Riesz uzayında her elemanı projeksiyon eleman ise bu uzaya *principal projeksiyon özelliğine sahiptir* denir. Bu durumda $E = B_x \oplus B_x^d$ olur.

1.43. Teorem

E Riesz uzayı olmak üzere $A, B \subseteq E$, projeksiyon band iseler $A^d, A \cap B, A + B$ projeksiyon banddır ve

1. $P_{A^d} = I - P_A$
 2. $P_{A \cap B} = P_A P_B = P_B P_A$
 3. $P_{A+B} = P_A + P_B - P_{A \cap B}$
- eşitlikleri sağlanır [2].

1.44. Tanım

E ve F Riesz uzayları ve $T: E \rightarrow F$ bir operatör olmak üzere, her $x, y \in E$ için $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$ eşitliği gerçekleşiyorsa, T operatörüne *Riesz (latis) homomorfizması* denir.

1.45. Teorem

E ve F iki Riesz uzayı, $T: E \rightarrow F$ bir operatör olmak üzere aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

- (1) T operatörü Riesz homomorfizmasıdır.
- (2) Her $x \in E$ için $T(x^+) = (Tx)^+$
- (3) Her $x, y \in E$ için $T(x \wedge y) = T(x) \wedge T(y)$
- (4) Her $x, y \in E$ için E uzayı içinde $x \wedge y = 0$ ise F uzayı içinde $T(x) \wedge T(y) = 0$

(5) Her $x \in E$ için $T(|x|) = |Tx|$ [2].

1.46. Tanım

E ve F Riesz uzayı, $T: E \rightarrow F$ Riesz homomorfizması olsun. T birebir ve örtense T 'ye Riesz izomorfizmi denir. E 'den F 'ye Riesz izomorfizmi varsa, E ve F Riesz izomorfiktir denir.

1.47. Teorem

E ve F Riesz uzayları, $T: E \rightarrow F$ birebir ve örten operatör olmak üzere T 'nin Riesz izomorfizmi olması için gerekli ve yeterli koşul T ve T^{-1} operatörlerinin pozitif olmasıdır [9].

1.48. Tanım

E ve F Riesz uzayları ve $T: E \rightarrow F$ bir operatör olmak üzere, her $x, y \in E$ için $x \perp y$ iken $Tx \perp Ty$ oluyorsa T operatörüne *diklik koruyan operatör* denir.

1.49. Teorem

E ve F Riesz uzayları ve $T: E \rightarrow F$ sıra sınırlı diklik koruyan operatör olsun.

i) $T = T^+ - T^-$ olacak şekilde $T^+, T^-: E \rightarrow F$ Riesz homomorfizmi vardır.

ii) $|T|$ vardır, $|T|$ Riesz homomorfizmidir,

$|T| = T^+ + T^-$ ve $|Tx| = ||T|x|| = |T||x|$ ($x \in E$) dir [2].

1.50. Tanım

E ve F Riesz uzayları ve $T: E \rightarrow F$ bir pozitif operatör olmak üzere, her $x \in E^+$ için $T[0, x] = [0, Tx]$ oluyorsa, T operatörüne *aralık koruyan operatör* denir.

1.51. Tanım (Merkez)

E Riesz uzayı ve $T: E \rightarrow E$ operatör ve $I: E \rightarrow E$ birim operatör olmak üzere,

$-\lambda I \leq T \leq \lambda I$ olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{R}^+$ varsa, T ye *merkez operatör* denir. Merkez operatörlerin kümesi $Z(E)$ ile gösterilir. Yani $Z(E) = \{T \in L_b(E): -\lambda I \leq T \leq \lambda I\}$ şeklinde ifade edilir.

1.52. Tanım

E ve F Riesz uzayları, $T: E \rightarrow F$ bir operatör ve $\{x_\alpha\} \subseteq E$ olmak üzere,

$x_\alpha \rightarrow 0$ (order) iken F de $Tx_\alpha \rightarrow 0$ (order) oluyorsa T operatörüne *sıra sürekli operatör* denir.

$\{x_\alpha\} \subseteq E$ ve $x \in E$ olmak üzere, $T: E \rightarrow F$ pozitif operatörünün sıra sürekli olması aynı zamanda; $x_\alpha \uparrow x$ iken $Tx_\alpha \uparrow Tx$ olması veya $x_\alpha \downarrow 0$ iken $Tx_\alpha \downarrow 0$ olması anlamına gelir. T sıra sınırlı operatör olarak alınırsa T nin sıra sürekli olması da $x_\alpha \downarrow 0$ iken $\inf\{Tx_\alpha\} = 0$ olmasına denktir. E Riesz uzayından F Riesz uzayına sıra sürekli operatörlerin kümesi $L_n(E, F)$ ile gösterilir. Bu küme $L_b(E, F)$ nin alt uzayıdır ve $L_n(E, F) \subseteq L_b(E, F) \subseteq L(E, F)$ dır. E üzerinde bütün sıra sürekli lineer fonksiyonellerin vektör uzayı $L_n(E, IR) = E_n^\sim$ olarak gösterilir.

1.53. Tanım

E Riesz uzayı, $T: E \rightarrow E$ operatör olsun. E nin her I ideali için $T(I) \subseteq I$ oluyorsa T ye ideal koruyan veya stabilizer denir ve bunların kümesi

$S(E) = \{T \in L_b(E): \forall I \subseteq E \text{ ideal için } T(I) \subseteq I\}$ şeklinde gösterilir.

Bunlar arasında $Z(E) \subseteq S(E)$ ilişkisi vardır.

1.54. Tanım

E Riesz uzayı, $T: E \rightarrow E$ operatör olsun. E nin her B bandı için $T(B) \subseteq B$ oluyorsa T ye *band koruyan operatör* denir.

1.55. Teorem

E Archimedian Riesz uzayı $T: E \rightarrow E$ lineer dönüşüm olmak üzere aşağıdakiler denktir.

- 1) T band koruyan operatör
- 2) Her $x, y \in E$ için $x \perp y \Rightarrow Tx \perp y$
- 3) Her $x \in E$ için $T(x) \in B_x$ [2].

1.56. Teorem

E principal projeksiyon özelliğine sahip Archimedian Riesz uzayı $T: E \rightarrow E$ lineer dönüşüm olsun. T nin band koruyan olması için gerek ve yeter şart her P projeksiyon için $TP = PT$ olmasıdır [2].

1.57. Tanım

Band koruyan sıra sınırlı operatöre *ortomorfizma* denir ve E nin bütün ortomorfizmalarının kümesi $Orth(E)$ ile gösterilir.

Her band aynı zamanda ideal olduğundan $Z(E) \subseteq S(E) \subseteq Orth(E)$ dir.

1.58. Teorem

E Riesz uzayı olmak üzere $\pi_1, \pi_2 \in Orth(E)$ ve $D^{dd} = E$ olacak şekilde $D \subseteq L$ olsun. Her $f \in D$ için $\pi_1 f = \pi_2 f$ ise $\pi_1 = \pi_2$ dir [11].

1.59. Tanım

A, IR cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Her $x, y, z \in A$ ve her $\alpha \in IR$ için $\because A \times A \rightarrow A$ çarpımı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa A ya IR üzerinde bir *cebiri* denir.

$$C1) \quad \alpha \cdot (x \cdot y) = (\alpha \cdot x) \cdot y = x \cdot (\alpha \cdot y)$$

$$C2) \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \text{ve} \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

$$C3) \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

A reel cebir olup aynı zamanda Riesz uzayı iken her $a, b \in A^+$ için $a \cdot b \in A^+$ koşulunu sağlıyorsa A ya *l-cebiri* veya *Riesz cebiri* denir.

1.60. Tanım

A *l-cebiri* olmak üzere, her $a, b \in A$, her $c \in A^+$ için $a \wedge b = 0$ iken $ca \wedge b = ac \wedge b = 0$ koşulunu sağlıyorsa A ya *f-cebiri* denir.

1.61. Örnek

$C(K)$ fonksiyon uzayı fonksiyonların noktasal çarpım işlemine göre birimli bir *f-cebiri*dir.

1.62. Teorem

A birimli *f-cebiri* olsun. $a \perp b$ olması için gerekli ve yeterli şart $a \cdot b = 0$ dir.

1.63. Teorem

A Archimedian birimli *f-cebiri* olmak üzere

$$p: A \rightarrow Orth(A), \quad \pi_a: A \rightarrow A,$$

$$a \rightarrow p(a) = \pi_a, \quad b \rightarrow \pi_a(b) = a \cdot b$$

biçiminde tanımlı p dönüşümü cebir ve Riesz izomorfizmidir.

İspat

p nin anlamlı olduğunu gösterelim. Yani $\pi_a \in Orth(A)$ olduğunu göstermeliyiz.

Her $a \in A$ için $x, y \in A$ olmak üzere $x \perp y$ iken $\pi_a(x) \perp y$ olduğunu görelim.

f -cebiri tanımından $x \perp y$ iken $ax \perp y$ olacağından π_a , band koruyandır. Ayrıca A l -cebiri olduğundan $b \in A^+$ için $\pi_a(b) = a \cdot b \geq 0$ dır. O halde π_a pozitifdir. Yani π_a sıra sınırlıdır. p nin iyi tanımlı ve lineer olduğu kolay görülür.

p nin cebir homomorfizmi olduğunu gösterelim.

Her $a, b \in A$ için $p(ab) = p(a)p(b)$ olduğunu görmeliyiz.

$p(ab) = \pi_{ab}$ ve her $c \in A$ için

$$\pi_{ab}(c) = (ab)c = a(bc) = \pi_a(bc) = \pi_a(\pi_b(c)) = \pi_a\pi_b(c) \text{ olduğundan}$$

$$p(ab) = p(a)p(b) \text{ dir.}$$

Şimdi ise $a \perp b$ iken $p(a) \perp p(b)$ olduğunu görelim. 1.62 Teoremi kullanılarak

$$a \perp b \Rightarrow a \cdot b = 0$$

$$\Rightarrow p(ab) = p(0) = 0$$

$$\Rightarrow p(a) \cdot p(b) = 0$$

$$\Rightarrow p(a) \perp p(b)$$

olduğundan p dikliği koruyandır. Ayrıca pozitif olduğundan p Riesz homomorfizmidir.

p nin birebir olduğunu gösterelim. Yani $\text{Çekp} = \{0\}$ olduğunu görmeliyiz.

$$\{0\} \subseteq \text{Çekp} \dots (I)$$

Diğer yandan her $a \in A$ için

$$p(a) = 0 \text{ ise } \pi_a = 0 \text{ olup her } b \in A \text{ için } \pi_a(b) = a \cdot b = 0$$

olur ki böylece $b = e$ için $\pi_a(e) = a \cdot e = a = 0$ dır... (II)

(I) ve (II) den $\text{Çekp} = \{0\}$ olduğundan p birebirdir.

p nin örtenliğine bakalım. Bunun için her $S \in \text{Orth}(A)$ için $p(a) = S$ olacak şekilde bir $a \in A$ olduğunu görmeliyiz.

e , A nın birimi ve $S(e) = a \in A$ olsun. Bu durumda 1.58. Teoremden

$$\pi_a(e) = \pi_{S(e)}(e) = S(e)e = S(e) \text{ dir. Buradan } S \text{ ile } \pi_a, e \text{ üzerinde eşit olduğundan } S \text{ ile}$$

$\pi_a, B_e = A$ üzerinde de eşittir. O halde her $b \in A$ için $S(b) = \pi_a(b)$ olduğundan $p(a) = S$ dir.

p^{-1} in pozitif olduğunu gösterelim. Bunun için $p^{-1}: Orth(A) \rightarrow A$ olup her $S \in Orth(A)^+$ için $p^{-1}(S) \geq 0$ olduğunu görmeliyiz. 1.47. Teorem kullanılarak $S \in Orth(A)^+$ olup p örten olduğundan en az bir $a \in A$ için $p(a) = \pi_a = S$ dir. Her $b \in A^+$ için $\pi_a(b) = S(b) \geq 0$ olduğundan $a \cdot b = S(b) \geq 0$ dir. $0 < e \in A^+$ için $a \cdot e \geq 0$ olduğundan $a \geq 0$ olup $p(a) = S$ dir. O halde $a = p^{-1}(S) \geq 0$ dir. Bu durumda p dönüşümü cebir ve Riesz izomorfizmidir.

1.64. Örnek

$C(K)$ birimli f-cebiridir. Buradan

$$p: C(K) \rightarrow Orth(C(K)), f \rightarrow p(f) = \pi_f, \pi_f: C(K) \rightarrow C(K), g \rightarrow \pi_f(g) = f \cdot g$$

olup $Orth(C(K)) \equiv C(K)$ dir.

1.65. Teorem

E Archimedian Riesz uzayı olsun. $Orth(E)$ Riesz uzayıdır ve her $\pi, \pi_1, \pi_2 \in Orth(E)$ ve her $u \in E^+$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

- i) $(\pi_1 \vee \pi_2)u = (\pi_1 u) \vee (\pi_2 u)$ ve $(\pi_1 \wedge \pi_2)u = (\pi_1 u) \wedge (\pi_2 u)$
- ii) $(\pi^+)u = (\pi u)^+, (\pi^-)u = (\pi u)^-$ ve $|\pi|u = |\pi u|$ [12].

1.66. Lemma

E normlu örgü uzayı ve π, E de pozitif ortomorfizm olsun. π nin norm sınırlı olması için gerekli ve yeterli koşul $\pi \leq \lambda I$ olacak şekilde $\lambda \in IR^+$ var olmasıdır. Bu durumda π nin operatör normu $\|\pi\| = \inf\{\lambda: \pi \leq \lambda I\}$ dir [12].

İspat

($\Rightarrow$) π norm sınırlı olsun. Olmayana ergi yöntemini kullanırsak $\pi \leq \lambda I$ olacak şekilde $\lambda \in IR^+$ olmasın. Bu durumda her n için $(\pi - nI)^+ > 0$ dir. Buradan $(\pi - nI)^+ > 0$ ise $(\pi - nI)^+(u_n) > 0$ olacak şekilde $(u_n) \in E^+$ dizisi vardır. Ayrıca $v_n = (\pi - nI)^+(u_n)$ olarak tanımlayalım.

$$\begin{aligned} (\pi - nI)(v_n) &= [(\pi - nI)^+ - (\pi - nI)^-][(\pi - nI)^+(u_n)] \\ &= (\pi - nI)^+[(\pi - nI)^+(u_n)] - (\pi - nI)^-[(\pi - nI)^+(u_n)] \\ &= ((\pi - nI)^+)^2(u_n) \geq 0 \end{aligned}$$

olduğundan $\pi(v_n) - nI(v_n) \geq 0$ olup $\pi(v_n) \geq nI(v_n)$ bulunur. Buradan

$\|\pi(v_n)\| \geq \|nv_n\| = n\|v_n\|$ olur ki bu da π nin norm sınırlı olmasıyla çelişir. O halde $\pi \leq \lambda I$ olacak şekilde $\lambda \in IR^+$ vardır.

$(\Leftarrow) \pi \leq \lambda I$ olacak şekilde $\lambda \in IR^+$ olsun.

$|\pi f| = \pi(|f|) \leq \lambda |f|$ elde edilir. Buradan $\|\pi\| = \inf\{\mu > 0: \|\pi x\| \leq \mu \|x\|\}$ olduğu düşünülürse $\|\pi\| \leq \lambda$ olur. Böylece $\|\pi\| \leq \inf\{\lambda: \pi \leq \lambda I\}$ elde edilir....(I)

Diğer yandan $\|\pi\|_\infty = \inf\{\lambda: \pi \leq \lambda I\}$ diyelim. $\|\pi\| \geq \|\pi\|_\infty$ olduğunu göstermeliyiz. $\|\pi\|_\infty = 0$ ise $\|\pi\| \geq 0 = \|\pi\|_\infty$ olur. Şimdi ise $\|\pi\|_\infty > 0$ olsun. $\varepsilon > 0$ için

$\lambda = \|\pi\|_\infty - \varepsilon > 0$ olsun. $(\pi - \lambda I)^+ \neq 0$ olduğuna gösterelim. Olmayana ergi yöntemini kullanırsak $(\pi - \lambda I)^+ = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$(\pi - \lambda I)^+ = 0 \Rightarrow (\pi - \lambda I) \vee 0 = 0 \Rightarrow \pi - \lambda I \leq 0 \Rightarrow \pi \leq \lambda I$$

dır. Ayrıca $\|\pi\|_\infty = \inf\{\mu: \pi \leq \mu I\}$ olup $\|\pi\|_\infty \leq \lambda = \|\pi\|_\infty - \varepsilon$ olur ki bu da çelişkidir. Her zaman $(\pi - \lambda I)^+ \geq 0$ ve $(\pi - \lambda I)^+ \neq 0$ olduğundan $(\pi - \lambda I)^+ > 0$ elde edilir. Diğer yandan $(\pi - \lambda I)^+ > 0$ için $(\pi - \lambda I)(v) > 0$ olacak şekilde $v \in L^+$ vardır.

$$(\pi - \lambda I)^+(v) > 0 \Rightarrow ((\pi - \lambda I) \vee 0)(v) > 0$$

$$\Rightarrow \pi v \geq \lambda v > 0$$

$$\Rightarrow \|\pi v\| \geq \lambda \|v\|$$

$$\Rightarrow \frac{\|\pi v\|}{\|v\|} \geq \lambda$$

$$\Rightarrow \left\| \pi \left(\frac{v}{\|v\|} \right) \right\| \geq \lambda$$

$$\Rightarrow \|\pi\| \geq \lambda = \|\pi\|_\infty - \varepsilon$$

dir. $\varepsilon \rightarrow 0$ için $\|\pi\| \geq \|\pi\|_\infty$ elde edilir....(II)

(I) ve (II) den $\|\pi\| = \|\pi\|_\infty$ elde edilir.

1.67. Teorem

E normlu örgü uzayı ve π , E de bir ortomorfizm olsun. Bu durumda π nin norm sınırlı olması için gerekli ve yeterli koşul $|\pi| \leq \lambda I$ olacak şekilde $\lambda \in IR^+$ var olmasıdır. Bu durumda $\|\pi\| = \inf\{\lambda: |\pi| \leq \lambda I\}$ dır [12].

İspat

1.66.Lemma dan $\pi \in Orth(E)$ için π norm sınırlı gerekli ve yeterli koşul $|\pi|$ norm sınırlı ve bunların normlarının eşit olduğunu göstermek yeter. $|\pi|$ norm sınırlı ise her $x \in E$ için $|\pi x| = |\pi||x|$ olduğundan $\|\pi x\| = \| |\pi x| \| = \| |\pi||x| \| \leq \| |\pi| \| \cdot \|x\|$ olur. Buradan π norm sınırlı ve $\|\pi\| \leq \| |\pi| \|$ bulunur. Şimdi π norm sınırlı olsun. Her $x \in E$ için $\| |\pi|x \| = \| |\pi||x| \| = \| \pi|x| \|$ olduğundan $\| |\pi|x \| = \| |\pi||x| \| = \| \pi|x| \| \leq \|\pi\| \|x\|$ olur ki bu $|\pi|$ nin norm sınırlı ve $\| |\pi| \| \leq \|\pi\|$ olmasını verir.

1.68. Sonuç

E Banach örgüsü ise $Orth(E) = Z(E)$ dir.

İspat

$Z(E) \subseteq Orth(E)$ olduğunu biliyoruz. Şimdi $\pi \in Orth(E)$ alalım. $\pi = \pi^+ - \pi^-$ ve Banach örgüsü üzerinde tanımlı her pozitif operatör sürekli olduğundan [2] den π sürekli yani norm sınırlıdır. 1.67.Teoremden $|\pi| \leq \lambda I$ olacak şekilde $\lambda \in IR^+$ vardır. Buradan $Orth(E) \subseteq Z(E)$ elde edilir.

2.1. İdeal Operatörler

Bu bölümde [11] da verilen "On Ideal Operators" isimli makale detaylıca incelenmiştir.

2.1.1. Tanım

E ve F Riesz uzayları ve $T: E \rightarrow F$ bir operatör olsun. Her $J \subseteq F$ ideali için $T^{-1}(J) \subseteq E$ de ideal oluyorsa T ye *invers ideal operatör* denir.

2.1.2. Tanım

E ve F Riesz uzayları ve $T: E \rightarrow F$ bir operatör olsun. Her $I \subseteq E$ ideali için $T(I) \subseteq F$ de ideal oluyorsa T ye *ideal operatör* denir.

2.1.3. Teorem

E ve F Riesz uzayları ve $T: E \rightarrow F$ bir operatör ve I_x , x tarafından üretilen (order) ideal olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler doğrudur.

- i) T ideal operatördür $\Leftrightarrow$ Her $x \in E$ için $I_{Tx} \subseteq T(I_x)$
- ii) T invers ideal operatördür $\Leftrightarrow$ Her $x \in E$ için $T(I_x) \subseteq I_{Tx}$
- iii) T invers ideal operatördür $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in E$ için $|y| \leq |x|$ için $|Ty| \leq \lambda |Tx|$ olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{R}^+$ vardır.

İspat

i)

($\Rightarrow$) T nin ideal operatör olduğunu kabul edelim. Her $x \in E$ için $T(I_x)$, Tx i kapsayan F içinde ideal ve I_{Tx} , Tx i kapsayan en dar ideal olduğundan $I_{Tx} \subseteq T(I_x)$ dir.

($\Leftarrow$) Her $x \in E$ için $I_{Tx} \subseteq T(I_x)$ olsun. I , E içinde keyfi bir ideal olmak üzere $T(I)$ F nin alt uzayıdır. Şimdi, her $y \in F$, $z \in T(I)$ ve $|y| \leq |z|$ için $y \in T(I)$ olduğunu gösterelim.

$z \in T(I)$ olduğundan $Tx = z$ olacak şekilde $x \in I$ vardır. $z = Tx \in I_{Tx}$ ve I_{Tx} ideal olduğundan $y \in I_{Tx}$ olur. Hipotezden $y \in T(I_x)$ elde edilir. Diğer yandan $x \in I$ olduğundan $I_x \subseteq I$ ve buradan $T(I_x) \subseteq T(I)$ olacağından $y \in T(I)$ bulunur.

ii)

($\Rightarrow$) T nin invers ideal operatör olduğunu kabul edelim. Her $x \in E$ için $T^{-1}(I_{Tx}) \subseteq E$ de idealdir. Ayrıca $x \in T^{-1}(I_{Tx})$ ve I_x x i kapsayan en dar ideal olduğundan $I_x \subseteq T^{-1}(I_{Tx})$ olur. Buradan $T(I_x) \subseteq T(T^{-1}(I_{Tx})) \subseteq I_{Tx}$ dir.

($\Leftarrow$) Her $x \in E$ için $T(I_x) \subseteq I_{Tx}$ olsun. J , F içinde keyfi bir ideal olmak üzere $T^{-1}(J)$ E nin alt uzayıdır. Şimdi, her $x, y \in E$, $x \in T^{-1}(J)$ ve $|y| \leq |x|$ için $y \in T^{-1}(J)$ olduğunu gösterelim. $|y| \leq |x|$ ve I_x ideal olduğundan $y \in I_x$ olur. Buradan $T(y) \in T(I_x)$ dir ve böylece $T(y) \in I_{Tx}$ dir. Diğer yandan $x \in T^{-1}(J)$ olup $T(x) \in J$ ve J ideal olduğundan $I_{Tx} \subseteq J$ dir. $I_{Tx} \subseteq J$ ve $T(y) \in I_{Tx}$ olduğundan $T(y) \in J$ olup $y \in T^{-1}(J)$ dir. Buradan T invers ideal operatördür.

iii)

($\Rightarrow$) T invers ideal operatör olsun. Her $x, y \in E$, $|y| \leq |x|$ için $y \in I_x$ dir. ii) den

$T(I_x) \subseteq I_{Tx}$ olduğundan $Ty \in I_{Tx}$ olur. Buradan $|Ty| \leq \lambda |Tx|$ olacak şekilde $\lambda \in IR^+$ vardır.

($\Leftarrow$) ii) den her $x \in E$ için $T(I_x) \subseteq I_{Tx}$ olduğunu gösterelim. $u \in T(I_x)$ ise $Ty = u$ olacak şekilde $y \in I_x$ vardır.

$$y \in I_x \Rightarrow \exists \beta \in IR^+, |y| \leq \beta |x|$$

$$\Rightarrow \exists \beta, \lambda \in IR^+, |Ty| \leq \beta \lambda |Tx|$$

$$\Rightarrow Ty = u \in T(I_x)$$

elde edilir.

2.1.4. Teorem

Her aralık koruyan operatör ideal operatördür.

İspat

E ve F Riesz uzayları ve $T: E \rightarrow F$ bir aralık koruyan operatör olmak üzere I, E içinde keyfi bir ideal olsun. T lineer olduğundan $T(I)$ alt uzaydır. Şimdi ideal olduğunu gösterelim. Her $y \in F$, $x \in T(I)$ ve $|y| \leq |x|$ olmak üzere, $x \in T(I)$ olduğundan $Tz = x$ olacak şekilde $z \in I$ vardır.

$0 \leq y^+ \leq |y| \leq |x| = |Tz| \leq T|z|$ olup $y^+ \in [0, T|z|]$ dür ve T aralık koruyan operatör olduğundan $z \in I$ ve $T(u) = y^+$ olacak şekilde $u \in [0, |z|]$ vardır.

$0 \leq y^- \leq |y| \leq |x| = |Tz| \leq T|z|$ olup $y^- \in [0, T|z|]$ dür ve T aralık koruyan operatör olduğundan $z \in I$ ve $T(w) = y^-$ olacak şekilde $w \in [0, |z|]$ vardır.

Diğer yandan $z \in I$ ve I ideal olduğundan $u, w \in [0, |z|]$ olup $u, v \in I$ olur. Buradan

$u, v \in I$ olduğundan $t = u - w \in I$ olup

$T(t) = T(u - w) = T(u) - T(w) = y^+ - y^- = y$ olduğundan $y \in T(I)$ dir.

2.1.5. Örnek

İdeal operatörlerin kümesi vektör uzayı değildir.

Çözüm

$I: IR^2 \rightarrow IR^2 ; (x, y) \rightarrow I(x, y) = (x, y)$ ideal operatördür.

$T: IR^2 \rightarrow IR^2 ; (x, y) \rightarrow T(x, y) = (y, 0)$ operatörü için

IR^2 nin idealleri

$$I_1 = \{(0, x): x \in IR\}$$

$$I_2 = \{(x, 0): x \in IR\}$$

$$I_3 = \{(0, 0)\}$$

$$I_4 = IR^2$$

dir. I_3 ve I_4 aşıkâr ideallerdir. I_1 ve I_2 için bakalım.

Öncelikle $I_1 = \{(0, x): x \in IR\} \subseteq IR^2$ nin ideal olduğunu gösterelim.

I_1 , IR^2 nin alt uzayıdır. Şimdi ise I_1 in solid olduğunu gösterelim.

Her $(x, y) \in IR^2$, $(0, v) \in I_1$ ve $|(x, y)| \leq |(0, v)|$ olmak üzere $(x, y) \in I_1$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} |(x, y)| \leq |(0, v)| &\Rightarrow (|x|, |y|) \leq (0, |v|) \\ &\Rightarrow 0 \leq |x| \leq 0 \text{ ve } |y| \leq |v| \\ &\Rightarrow x = 0 \text{ ve } |y| \leq |v| \\ &\Rightarrow (x, y) \in I_1 \text{ dir.} \end{aligned}$$

O halde I_1 solid alt uzay olduğundan idealdir.

$I_2 = \{(x, 0): x \in IR\} \subseteq IR^2$ nin ideal olduğunu gösterelim.

I_2 , IR^2 nin alt uzayıdır. Şimdi ise I_2 nin solid olduğunu gösterelim.

Her $(x, y) \in IR^2$, $(v, 0) \in I_2$ ve $|(x, y)| \leq |(v, 0)|$ olmak üzere $(x, y) \in I_2$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} |(x, y)| \leq |(v, 0)| &\Rightarrow (|x|, |y|) \leq (|v|, 0) \\ &\Rightarrow 0 \leq |x| \leq |v| \text{ ve } |y| \leq 0 \\ &\Rightarrow |x| \leq |v| \text{ ve } y = 0 \\ &\Rightarrow (x, y) \in I_2 \text{ dir.} \end{aligned}$$

O halde I_2 solid alt uzay olduğundan idealdir.

IR^2 nin diğ er alt uzayları: $\{(x, y): \exists m \in IR, m \neq 0 \text{ ve } y = mx\}$ şeklindedir. IR^2 nin başka ideali olmadığını göstermek için olmayana ergi yöntemini kullanalım.

$I = \{(x, y): \exists m \in IR, m \neq 0 \text{ ve } y = mx\}$, IR^2 nin başka bir ideali olsun.

$m > 0$ için $(1, \frac{m}{2}) \leq (1, m)$ ve $(1, m) \in I$ olup $(1, \frac{m}{2}) \in I$ olur ki bu da çelişkidir. Aynı şekilde $m < 0$ için de çelişki  ıkaca ından IR^2 nin başka bir ideali yoktur.

Ayrıca

$$T(I_1) = \{T(0, x): x \in IR\} = \{(x, 0): x \in IR\} = I_2$$

$$T(I_2) = I_1$$

$$T(I_3) = I_3$$

$$T(I_4) = I_2$$

olup her biri ideal olduğundan T ideal operatördür.

$$(I + T)(x, y) = (x + y, y) \text{ olup}$$

$$(I + T)(I_1) = \{(I + T)(0, x): x \in IR\} = \{(x, x): x \in IR\} \text{ ideal olmadığını gösterelim.}$$

$(I + T)(I_1)$ nin ideal olmadığını göstermek için olmayana ergi yöntemini kullanalım.

$$(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}) \leq (1, 1) \text{ ve } (1, 1) \in (I + T)(I_1) \text{ olup } (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}) \in (I + T)(I_1) \text{ olur ki bu da çelişkidir. O}$$

halde ideal operatörlerin kümesi vektör uzayı değildir.

2.1.6.  rnek

 nvers ideal operatörlerin kümesi vektör uzay değildir.

  z m

Vektör uzay olmadığını göstermek için $S, T: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]; f \rightarrow S(f) = f(0).1,$

$T(f) = f(1).1$ tanımlayalım. S ve T invers ideal operatörlerdir fakat $S + T$ invers ideal operatör değildir. S ve T nin lineer dönüşümler olduğunu görmek kolaydır.

Şimdi pozitif olduğunu gösterelim. Gerçekten her $f \in C[0, 1]^+$ için

$$0 \leq f \Rightarrow \text{Her } x \in [0, 1] \text{ için } f(x) \geq 0$$

$$\Rightarrow f(0) \geq 0$$

$$\Rightarrow f(0).1 \geq 0$$

olduğundan $S \geq 0$ dir. Benzer şekilde $T \geq 0$ dir. Şimdi ise S ve T nin invers ideal operatör olduğunu gösterelim. $f, g \in C[0,1]$ için

$$\begin{aligned} |g| \leq |f| &\Rightarrow \text{Her } x \in [0,1] \text{ için } |g(x)| \leq |f(x)| \\ &\Rightarrow x = 0 \text{ için } |Sg| = |g(0) \cdot \mathbf{1}| \leq |f(0) \cdot \mathbf{1}| = |Sf| \end{aligned}$$

olduğundan 2.1.3. Teorem iii) den S invers ideal operatördür.

$$\begin{aligned} |g| \leq |f| &\Rightarrow \text{Her } x \in [0,1] \text{ için } |g(x)| \leq |f(x)| \\ &\Rightarrow x = 1 \text{ için } |Tg| = |g(1) \cdot \mathbf{1}| \leq |f(1) \cdot \mathbf{1}| = |Tf| \end{aligned}$$

olduğundan T invers ideal operatördür. Fakat

$$f(x) = 2x - 1 \text{ ve } g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2x - 1, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

alırsak $|g| \leq |f|$ dir. Fakat

$$\begin{aligned} |(S+T)(g)| &= |S(g) + T(g)| = |g(0) \cdot \mathbf{1} + g(1) \cdot \mathbf{1}| = |0 + 1| = 1 \\ |(S+T)(f)| &= |S(f) + T(f)| = |f(0) \cdot \mathbf{1} + f(1) \cdot \mathbf{1}| = |-1 + 1| = 0 \end{aligned}$$

olup $|(S+T)(g)| = 1 \leq \lambda |(S+T)(f)| = 0$ olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{R}^+$ olmadığından $S+T$ invers ideal operatör değildir.

Başka bir örnek olarak aşağıdaki örneği verebiliriz.

$I: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 ; (x, y) \rightarrow I(x, y) = (x, y)$ ideal operatördür.

$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 ; (x, y) \rightarrow T(x, y) = (-y, 0)$ operatörü için

$\mathbb{R}^2$ nin idealleri

$$I_1 = \{(x, 0): x \in \mathbb{R}\}$$

$$I_2 = \{(0, x): x \in \mathbb{R}\}$$

$$I_3 = \{(0, 0)\}$$

$$I_4 = \mathbb{R}^2$$

dir ve

$T^{-1}(I_1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) \in I_1\} = \mathbb{R}^2$ olduğunu gösterelim.

Her zaman $T^{-1}(I_1) \subseteq \mathbb{R}^2$ dir.(*)

Diğer yandan $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ alalım.

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow T(x, y) = (-y, 0) \in I_1$$

$$\Rightarrow (x, y) \in T^{-1}(I_1)$$

olur. O halde $\mathbb{R}^2 \subseteq T^{-1}(I_1)$ dir.(**)

(*) ve (**) dan $T^{-1}(I_1) = \mathbb{R}^2$ dir.

$T^{-1}(I_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) \in I_2\} = I_1$ olduğunu gösterelim.

Öncelikle $(x, y) \in T^{-1}(I_2)$ alalım.

$$(x, y) \in T^{-1}(I_2) \Rightarrow T(x, y) = (-y, 0) \in I_2$$

$$\Rightarrow y = 0$$

$$\Rightarrow (x, y) \in I_1$$

olur. O halde $T^{-1}(I_2) \subseteq I_1$ dir.(*)

Diğer yandan $(x, y) \in I_1$ alalım.

$$(x, y) \in I_1 \Rightarrow y = 0$$

$$\Rightarrow T(x, 0) = (0, 0) \in I_2$$

$$\Rightarrow T(x, y) \in I_2$$

$$\Rightarrow (x, y) \in T^{-1}(I_2)$$

olur. O halde $I_1 \subseteq T^{-1}(I_2)$ dir.(**)

(*) ve (**) dan $T^{-1}(I_2) = I_1$ dir.

$T^{-1}(I_3) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) \in I_3\} = I_1$ olduğunu gösterelim.

Öncelikle $(x, y) \in I_1$ alalım.

$$(x, y) \in I_1 \Rightarrow y = 0$$

$$\Rightarrow T(x, 0) = (0, 0) \in I_3$$

$$\Rightarrow T(x, y) \in I_3$$

$$\Rightarrow (x, y) \in T^{-1}(I_3)$$

dir. O halde $I_1 \subseteq T^{-1}(I_3)$ dir.(*)

Diğer yandan $(x, y) \in T^{-1}(I_3)$ alalım.

$$(x, y) \in T^{-1}(I_3) \Rightarrow T(x, y) = (-y, 0) \in I_3$$

$$\Rightarrow y = 0$$

$$\Rightarrow (x, y) \in I_1$$

dir. O halde $T^{-1}(I_3) \subseteq I_1$ dir....(**)

(*) ve (**) dan $T^{-1}(I_3) = I_1$ dir.

$T^{-1}(I_4) = T^{-1}(IR^2) = IR^2$ olduğunu gösterelim.

Öncelikle $(x, y) \in T^{-1}(I_4)$ alalım.

$$(x, y) \in T^{-1}(I_4) \Rightarrow T(x, y) = (-y, 0) \in I_4$$

$$\Rightarrow (x, y) \in IR^2$$

olur. O halde $T^{-1}(I_4) \subseteq IR^2$ dir. ...(*)

Diğer yandan $(x, y) \in IR^2$ alalım.

$$(x, y) \in IR^2 \Rightarrow T(x, y) \in I_4$$

$$\Rightarrow (x, y) \in T^{-1}(I_4)$$

olur. O halde $IR^2 \subseteq T^{-1}(I_4)$ dir. ...(**)

(*) ve (**) dan $T^{-1}(I_4) = IR^2$ dir. O halde T invers ideal operatördür.

$$(I + T)^{-1}(I_2) = \{(x, y) \in IR^2 : (I + T)(x, y) \in I_2\}$$

$$= \{(x, y) \in IR^2 : (x - y, y) \in I_2\}$$

dir ve $A = \{(x, x) : x \in IR\}$ diyelim ve $(I + T)^{-1}(I_2)$ in A kümesine eşit olduğunu gösterelim.

$(x, y) \in (I + T)^{-1}(I_2)$ alalım.

$$(x, y) \in (I + T)^{-1}(I_2) \Rightarrow (I + T)(x, y) = (x - y, y) \in I_2$$

$$\Rightarrow x - y = 0$$

$$\Rightarrow x = y$$

$$\Rightarrow (x, y) \in A$$

dır.

Diğer yandan $(x, y) \in A$ alalım.

$$(x, y) \in A \Rightarrow x = y$$

$$(I + T)(x, y) = (x - y, y) = (0, y) \in I_2 \Rightarrow (x, y) \in (I + T)^{-1}(I_2) \text{ dır.}$$

$A = \{(x, x): x \in IR\}$ ideal olmadığından $I + T$ invers ideal operatör değildir.

Şimdi ise ideal operatörlerle stabilizerlerin operatörlerin iki farklı sınıf olduğuna dair örneklerle geçelim.

2.1.7. Örnek

Her ideal operatör stabilizer olmak zorunda değildir.

Çözüm

$T: IR^2 \rightarrow IR^2 ; (x, y) \rightarrow T(x, y) = (y, x)$ şeklinde bir dönüşüm tanımlayalım.

T nin lineer olduğunu görmek kolaydır.

IR^2 nin idealleri

$$I_1 = \{(0, x): x \in IR\}$$

$$I_2 = \{(x, 0): x \in IR\}$$

$$I_3 = \{(0, 0)\}$$

$$I_4 = IR^2$$

dir. Örnek 2.1.5 ten T ideal operatördür. Fakat

$T(I_1) = \{T(0, x): x \in IR\} = \{(x, 0): x \in IR\} = I_2$ olup $T(I_1) \not\subset I_1$ olduğundan T stabilizer değildir. Dolayısıyla T ideal operatör fakat stabilizer değildir.

2.1.8. Örnek

Her stabilizer ideal operatör olmak zorunda değildir.

Çözüm

$E = C[0, 1]$, $p: [0, 1] \rightarrow IR$; $x \mapsto p(x) = x$ ve $\pi_p: E \rightarrow E$; $f \mapsto \pi_p(f) = p \cdot f$ operatörünü tanımlayalım. π_p operatörü stabilizerdir fakat ideal operatör değildir. π_p nin lineer dönüşüm olduğunu görmek kolaydır. Şimdi π_p operatörünün stabilizer olduğunu gösterelim.

E Banach örgüsü olduğundan $Z(E) = Orth(E)$ dir. Ayrıca $Z(E) \subseteq S(E) \subseteq Orth(E)$ olduğundan $Z(E) = S(E) = Orth(E)$ dir.

$\pi_p \in Orth(E)$ olduğundan $\pi_p \in S(E)$ dir.

Diğer yandan

$$u: [0,1] \rightarrow IR ; x \rightarrow u(x) = \begin{cases} \left| x \sin \frac{1}{x} \right| ; x \in]0,1] \\ 0 ; x = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlayalım.

i) $u \in C[0,1]$ olduğunu gösterelim.

' $\forall \epsilon > 0$ için $\exists \delta > 0 \ni |x - 0| < \delta$ iken $|f(x) - f(0)| < \epsilon$ ' önermesinin doğru olduğunu göstermeliyiz.

$$|f(x) - f(0)| = \left| \left| x \sin \frac{1}{x} \right| - 0 \right| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| < \delta.1 \text{ olup } \epsilon = \delta \text{ seçilirse } u,$$

sıfır noktasında süreklidir.

$x \neq 0$ için $x \sin \frac{1}{x}$ süreklidir.

ii) $u \in L_p$ olduğunu gösterelim.

$x \neq 0$ olsun.

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \leq 1. x \text{ olup } |u|(x) = |u(x)| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| = x = p(x) \text{ dir.}$$

$x = 0$ olsun.

$$x = 0 \Rightarrow |u|(0) = 0 = p(0)$$

O halde $|u| \leq p$ dir yani $u \in L_p$ dir.

iii) $f = \mathbf{1}$ alınırsa $\pi_p(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. $p = p$ olduğundan $p \in \pi_p(C[0,1])$ dir.

iv) $u \notin \pi_p(C[0,1])$ olduğunu gösterelim. Olmayana ergi yöntemi kullanalım. O halde

$u \in \pi_p(C[0,1])$ olsun.

$$\begin{aligned}
u \in \pi_p(C[0,1]) &\Rightarrow \exists f \in C[0,1] : \pi_p(f) = u \\
&\Rightarrow \forall x \in [0,1] \text{ için } \pi_p(f)(x) = u(x) \\
&\Rightarrow \forall x \in [0,1] \text{ için } (p.f)(x) = u(x) \\
&\Rightarrow \forall x \in [0,1] \text{ için } p(x).f(x) = u(x) \\
&\Rightarrow x \neq 0 \text{ için } x.f(x) = x. \left| \sin \frac{1}{x} \right| \\
&\Rightarrow x \neq 0 \text{ için } f(x) = \left| \sin \frac{1}{x} \right|
\end{aligned}$$

O halde en az bir $\lambda \in IR$ için $f(x) = \begin{cases} \left| \sin \frac{1}{x} \right|; & x \neq 0 \\ \lambda & ; x = 0 \end{cases}$ biçimindedir. $\left(\frac{2}{n\pi}\right)$ dizisi sıfıra yakınsar. Fakat $\left(f\left(\frac{2}{n\pi}\right)\right)$ dizisi $(1,0,1,0 \dots)$ olduğundan $\left(f\left(\frac{2}{n\pi}\right)\right)$ yakınsak değildir. Sonuç olarak f fonksiyonu $x = 0$ noktasında sürekli olamaz, bu ise çelişkidir. O halde $u \notin \pi_p(C[0,1])$ yani $\pi_p(C[0,1])$ ideal değildir.

2.1.9. Lemma

E Riesz uzay, $0 < \varepsilon < 1$ ve $u_0 \geq u_\alpha \downarrow 0$ ise $\bigcap_\alpha I_{(u_\alpha - \varepsilon u_0)^+} = \{0\}$ dir.

İspat

$0 \leq x \in \bigcap_\alpha I_{(u_\alpha - \varepsilon u_0)^+} \Rightarrow \forall \alpha, x \in I_{(u_\alpha - \varepsilon u_0)^+} \Rightarrow x \wedge (\varepsilon u_0 - u_\alpha)^+ = 0$ dir. Gerçekten $(\varepsilon u_0 - u_\alpha)^+ = (u_\alpha - \varepsilon u_0)^-$ ve $(u_\alpha - \varepsilon u_0)^+ \perp (\varepsilon u_0 - u_\alpha)^+$ olduğundan $I_{(u_\alpha - \varepsilon u_0)^+} \perp (\varepsilon u_0 - u_\alpha)^+$ dir. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
u_\alpha \downarrow 0 &\Rightarrow -u_\alpha \uparrow 0 \Rightarrow (\varepsilon u_0 - u_\alpha) \uparrow \varepsilon u_0 \\
&\Rightarrow (\varepsilon u_0 - u_\alpha) \vee 0 \uparrow (\varepsilon u_0 \vee 0) \\
&\Rightarrow (\varepsilon u_0 - u_\alpha)^+ \uparrow \varepsilon u_0 \\
&\Rightarrow |x| \wedge (\varepsilon u_0 - u_\alpha)^+ \uparrow |x| \wedge \varepsilon u_0 \leq \varepsilon u_0 \downarrow 0 \\
&\Rightarrow \forall \alpha \text{ için } |x| \wedge (\varepsilon u_0 - u_\alpha)^+ = 0
\end{aligned}$$

dir. Buradan $x \wedge \varepsilon u_0 = 0$ olup $x \wedge u_0 = 0$ elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
0 \leq u_\alpha \text{ ve } u_\alpha - \varepsilon \cdot u_0 \leq u_\alpha &\Rightarrow (u_\alpha - \varepsilon \cdot u_0)^+ \leq u_\alpha \leq u_0 \\
&\Rightarrow 0 \leq x \wedge (u_\alpha - \varepsilon \cdot u_0)^+ \leq x \wedge u_0 = 0 \\
&\Rightarrow x \wedge (u_\alpha - \varepsilon \cdot u_0)^+ = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
x \in I_{(u_\alpha - \varepsilon \cdot u_0)^+} &\Rightarrow \exists \lambda_\alpha \ni 0 \leq x \leq \lambda_\alpha (u_\alpha - \varepsilon \cdot u_0)^+ \\
&\Rightarrow 0 \leq x \wedge x \leq x \wedge \lambda_\alpha (u_\alpha - \varepsilon \cdot u_0)^+ = 0 \\
&\Rightarrow x = 0
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece istenen elde edilmiş olur.

2.1.10. Önerme

$T: E \rightarrow F$ sıra sınırlı birebir ve ideal operatör ise T sıra sürekli.

İspat

E de $u_0 \geq u_\alpha \downarrow 0$ olsun. T nin sıra sürekli olduğunu göstermek için $\inf |T_{u_\alpha}| = 0$ olduğunu göstermeliyiz. T sıra sınırlı olduğundan her $0 \leq x \leq u_0$ için $|Tx| \leq y$ olacak şekilde

$y \in F^+$ vardır. $0 < \varepsilon < 1$ olsun. Bu durumda $0 \leq x \leq \varepsilon \cdot u_0$ için $|Tx| \leq \varepsilon \cdot y$ dir. Her α için $0 \leq z \leq |T_{u_\alpha}|$ iken $z = 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
0 \leq z \leq |T_{u_\alpha}| &= |T[(u_\alpha - \varepsilon u_0)^+] + T(u_\alpha \wedge \varepsilon u_0)| \\
&\leq |T[(u_\alpha - \varepsilon u_0)^+]| + |T(u_\alpha \wedge \varepsilon u_0)| \\
&\leq |T[(u_\alpha - \varepsilon u_0)^+]| + \varepsilon \cdot y
\end{aligned}$$

olup buradan T nin birebir ve ideal operatör olduğu göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}
0 \leq z - \varepsilon \cdot y &\leq |T[(u_\alpha - \varepsilon u_0)^+]| \Rightarrow (z - \varepsilon \cdot y) \vee 0 \leq |T[(u_\alpha - \varepsilon u_0)^+]| \vee 0 \\
&\Rightarrow (z - \varepsilon \cdot y)^+ \leq |T[(u_\alpha - \varepsilon u_0)^+]| \\
&\Rightarrow (z - \varepsilon \cdot y)^+ \in \bigcap_\alpha I_{T[(u_\alpha - \varepsilon u_0)^+]} \\
&\Rightarrow (z - \varepsilon \cdot y)^+ \in \bigcap_\alpha T(I_{(u_\alpha - \varepsilon u_0)^+}) \\
&\Rightarrow (z - \varepsilon \cdot y)^+ \in T(\bigcap_\alpha I_{(u_\alpha - \varepsilon u_0)^+})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (z - \varepsilon \cdot y)^+ &\in T(\{0\}) = \{0\} \\ \Rightarrow (z - \varepsilon \cdot y)^+ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her $\varepsilon > 0$ için $(z - \varepsilon y)^+ = 0$ bulunur. Bu da her $\varepsilon > 0$ için $z \leq \varepsilon \cdot y$ demektir. F Archimedean Riesz uzayı olduğundan $z = 0$ elde edilir.

2.1.11. Teorem

E ve F Riesz uzayları ve $T: E \rightarrow F$ bir operatör olmak üzere aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

- i) T sıra sınırlı ve diklik koruyan operatördür.
- ii) Her $x, y \in E$ için $|y| \leq |x|$ iken $|Ty| \leq |Tx|$ dır [7].

İspat

$\Rightarrow$) T sıra sınırlı ve diklik koruyan operatör olsun. 1.49. Teoremden $|T|$ vardır. Buradan her $x, y \in E$ için $|y| \leq |x|$ ise $|T||y| \leq |T||x|$ dır. Böylece 1.49. Teoremi kullanılarak

$$|Ty| \leq |Tx| \text{ elde edilir.}$$

$\Leftarrow$) Her $x, y \in E$ için $|y| \leq |x|$ iken $|Ty| \leq |Tx|$ olsun. Buradan T sıra sınırlıdır. E de $|x| = |y|$ ise F de $|Tx| = |Ty|$ dir. Diğer yandan $y = |x|$ seçelim. Buradan 1.49. Teoremden her $x \in E$ için $|Tx| = |T|x|$ olduğundan T diklik koruyan operatördür.

2.1.12. Teorem

E, G Riesz uzayı, F Dedekind tam, $R: E \rightarrow G$ sıra sınırlı ve diklik koruyan operatör ise $\varphi: L_b(G, F) \rightarrow L_b(E, F)$, $T \rightarrow \varphi(T) = TR$ ideal operatördür.

İspat

$T \in L_b(G, F)$ alalım. φ nin ideal operatör olduğunu göstermek için $I_{\varphi(T)} \subseteq \varphi(I_T)$ olduğunu göstermeliyiz. $S \in I_{\varphi(T)}$ olsun. $S \in I_{\varphi(T)}$ ise $|S| \leq \lambda |\varphi(T)|$ olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{R}^+$ vardır. Önce $\lambda = 1$ yani $|S| \leq |\varphi(T)|$ varsayalım. $R(E) \subseteq G$ alt uzaydır. Şimdi

$$T_1: R(E) \rightarrow F$$

$$R(x) \rightarrow T_1 R(x) = S(x)$$

olarak tanımlayalım.

Öncelikle her $R(x) \in R(E)$ için $T_1 R(x) = S(x) \in F$ olduğundan T_1 anlamlıdır.

İyi tanımlılığı görmek için her $R(x), R(y) \in R(E)$ için $R(x) = R(y)$ olsun.

$$|S(x) - S(y)| \leq |S||x - y|$$

$$\leq |TR||x - y|$$

$$\leq |T||R||x - y|$$

$$= |T||Rx - Ry| = 0$$

olduğundan $S(x) = S(y)$ dir. O halde T_1 iyi tanımlıdır.

$p: G \rightarrow F, y \rightarrow p(y) = |T|(|y|)$ olarak tanımlayalım.

Her $y \in G$ için F Dedekınd tam olduğundan $|T|(|y|) \in F$ dir. Böylece p anlamlıdır.

İyi tanımlılığı görmek için her $x, y \in G$ için $x = y$ olsun.

$$x = y \Rightarrow |x| = |y|$$

$$\Rightarrow |T|(|x|) = |T|(|y|)$$

$$\Rightarrow p(x) = p(y)$$

olduğundan p iyi tanımlıdır.

p nin alt lineer olduğunu gösterelim.

Her $x, y \in G$ için $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ olduğunu görelim.

$$p(x + y) = |T|(|x + y|) \leq |T|(|x| + |y|)$$

$$= |T||x| + |T||y|$$

$$= p(x) + p(y)$$

Her $x \in G$ ve her $\lambda \in IR^+$ için $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ olduğunu gösterelim.

$$p(\lambda x) = |T|(|\lambda y|) = |T|\lambda|y| = \lambda|T|(|y|) = \lambda p(x)$$

şartları sağlandığı için p alt lineerdir.

Şimdi ise her $z \in R(E)$ için $T_1(z) \leq p(z)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} T_1(z) &= T_1 R(x) = S(x) \leq |S|(|x|) \\ &\leq |TR|(|x|) \\ &\leq |T||R||x| \\ &\leq |T||Rx| \\ &= p(Rx) \\ &= p(z) \end{aligned}$$

olduğundan $T_1(z) \leq p(z)$ dir.

O halde Hahn-Banach teoreminden $\widehat{T_1}: G \rightarrow F$ öyle ki $\widehat{T_1}/_{R(E)} = T_1$ olacak şekilde $\widehat{T_1}$ operatörü vardır. Her $y \in G^+$ için $\widehat{T_1}(y) \leq p(y) = |T|(y) \Rightarrow \widehat{T_1} \leq |T|$ dir. Diğer yandan her $y \in G^+$ için $(-\widehat{T_1})(y) = \widehat{T_1}(-y) \leq p(-y) = |T|(y)$ dir. Bu durumda

$|\widehat{T_1}| \leq |T| \Rightarrow \widehat{T_1} \in I_T \Rightarrow \varphi(\widehat{T_1}) \in \varphi(I_T) \Rightarrow \widehat{T_1} R \in \varphi(I_T) \Rightarrow S \in \varphi(I_T)$ dir. Şimdi $S \in I_{\varphi(T)}$ olmak üzere $|S| \leq \lambda |\varphi(T)| = \lambda |TR| \Rightarrow \left| \frac{S}{\lambda} \right| \leq |TR|$ olup ispatın ilk kısmından $\frac{S}{\lambda} \in \varphi(I_T)$ olur. $\varphi(I_T)$ vektör uzayı olduğundan $S \in \varphi(I_T)$ elde edilir.

2.1.13. Sonuç

E, G Riesz uzayı ve $T: E \rightarrow G$ operatör olsun.

T sıra sınırlı ve diklik koruyan operatör ise $T^\sim: G^\sim \rightarrow E^\sim$ ideal operatördür.

İspat

2.2.12. Teoreminde F yerine IR alınırsa IR Dedekind tam olduğundan

$\varphi: L_b(G, IR) \rightarrow L_b(E, IR)$ yani $\varphi: G^\sim \rightarrow E^\sim$ ideal operatör, $T^\sim(f) = f \circ T = \varphi(f)$ olduğundan $T^\sim = \varphi$ olup böylece $T^\sim$ ideal operatördür.

2.1.14. Önerme

Her sıra sınırlı diklik koruyan operatör invers ideal operatördür.

İspat

2.1.3. Teorem iii) den açıktır. Buradan $T(I_x) \subseteq I_{Tx}$ elde edilir.

2.2. Diklik Koruyan Operatörler

Bu bölümde ideal operatörler ile dikliği koruyan operatörler arasındaki ilişkiler verilmiştir.

2.2.1. Lemma: E Riesz uzayı olmak üzere

$\forall x, y \in E, x \perp y \Leftrightarrow I_x \cap I_y = \{0\}$ dır.

İspat

Her $x, y \in E$ için

$(\Rightarrow) x \perp y$ olsun. $z \in I_x \cap I_y$ alalım.

$z \in I_x \cap I_y \Rightarrow z \in I_x$ ve $z \in I_y$

$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^+$ için $|z| \leq \lambda|x|$ ve $\exists \mu \in \mathbb{R}^+$ için $|z| \leq \mu|y|$

$\Rightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ için $|z| \leq \lambda|x| \wedge \mu|y|$

$\Rightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ için $|z| \leq (\lambda + \mu)(|x| \wedge |y|)$

$\Rightarrow |z| = 0$

$\Rightarrow z = 0$

$(\Leftarrow) I_x \cap I_y = \{0\}$ olsun.

$|x| \wedge |y| \leq |x| \Rightarrow |x| \wedge |y| \in I_x$ ve $|x| \wedge |y| \leq |y| \Rightarrow |x| \wedge |y| \in I_y$ olup

$|x| \wedge |y| \in I_x \cap I_y = \{0\}$ olduğundan $x \perp y$ dir.

2.2.2. Önerme

E, F Riesz uzay, $T: E \rightarrow F$ lineer operatör olsun.

i) T birebir ideal operatör ise T diklik koruyandır.

ii) T birebir örten inverse ideal operatör ise T^{-1} diklik koruyandır.

İspat

i) T birebir ideal operatör olsun. T nin diklik koruyan operatör olduğunu göstermek için her $x, y \in E$, $x \perp y$ iken $Tx \perp Ty$ olduğunu göstermeliyiz.

Lemma 2.2.1. den $x \perp y$ olduğundan $I_x \cap I_y = \{0\}$ dır. Diğer yandan T ideal operatör olduğundan $I_{Tx} \subseteq T(I_x)$ ve $I_{Ty} \subseteq T(I_y)$ dir. Bunlar ve T nin birebir olmasından

$$\begin{aligned} I_{Tx} \subseteq T(I_x) \text{ ve } I_{Ty} \subseteq T(I_y) &\Rightarrow I_{Tx} \cap I_{Ty} \subseteq T(I_x) \cap T(I_y) = T(I_x \cap I_y) = \{0\} \\ &\Rightarrow I_{Tx} \cap I_{Ty} = \{0\} \\ &\Rightarrow Tx \perp Ty \end{aligned}$$

elde edilir.

ii) F de $z \perp w$ iken $T^{-1}(z) \perp T^{-1}(w)$ olduğunu göstermeliyiz, $z, w \in F$ ve T örten olduğundan $Tx = z$ ve $Ty = w$ olacak şekilde $x, y \in E$ vardır yani $Tx \perp Ty$ iken $x \perp y$ olduğunu göstermeliyiz.

Lemma 2.2.1. den $Tx \perp Ty$ olduğundan $I_{Tx} \cap I_{Ty} = \{0\}$ dır. Diğer yandan T invers ideal operatör olduğundan $T(I_x) \subseteq I_{Tx}$ ve $T(I_y) \subseteq I_{Ty}$ dir.

$$\begin{aligned} T(I_x) \subseteq I_{Tx} \text{ ve } T(I_y) \subseteq I_{Ty} &\Rightarrow T(I_x) \cap T(I_y) \subseteq I_{Tx} \cap I_{Ty} = \{0\} \\ &\Rightarrow T(I_x \cap I_y) \subseteq \{0\} \\ &\Rightarrow I_x \cap I_y = \{0\} \\ &\Rightarrow x \perp y \end{aligned}$$

olur.

2.2.3. Önerme

E, F Riesz uzay, $T: E \rightarrow F$ sıra sınırlı birebir örten operatör olsun. T ideal operatör ise T^{-1} ideal operatördür.

İspat

T ideal operatör olsun. $I \subseteq F$ ideal iken $T^{-1}(I) \subseteq E$ in ideal olduğunu göstermeliyiz. Öncelikle $T^{-1}(I)$, E nin alt uzayıdır. Şimdi her $y \in E$, $x \in T^{-1}(I)$ için $|y| \leq |x|$ iken

$y \in T^{-1}(I)$ olduğunu göstermeliyiz. T birebir ve 2.2.2. Teorem den T diklik koruyandır. T diklik koruyan ve 2.1.11. Teorem den $|Ty| \leq |Tx|$ elde edilir. Hipotezden $x \in T^{-1}(I)$ olduğundan $Tx \in I$ dır ve I ideal olduğundan $Ty \in I$ olur. Böylece $y \in T^{-1}(I)$ elde edilir. O halde T^{-1} ideal operatördür.

2.2.4. Sonuç

$T: E \rightarrow F$ sıra sınırlı diklik koruyan birebir ve örten operatör ise T^{-1} de diklik koruyan operatördür.

İspat

T sıra sınırlı diklik koruyan operatör olsun. O halde önerme 2.1.14. den T invers ideal operatördür. T invers ideal operatör olduğundan T^{-1} ideal operatördür. Bu durumda T^{-1} diklik koruyan operatördür.

Genellikle aralık koruyan operatörlerle Riesz homomorfizmaları birbirinden bağımsızdırlar.

2.2.5. Örnek

$\beta: C[0,1] \rightarrow IR$, $f \rightarrow \beta(f) = \int_0^1 f(t)dt$, şeklinde tanımlanan β pozitif operatörü aralık koruyandır fakat Riesz homomorfizması değildir.

Çözüm

İntegral fonksiyonu pozitif olduğu için $f \geq 0$ aldığımızda $\beta(f) \geq 0$ olur. Her pozitif lineer fonksiyonel aralık koruyan olduğu için β operatörü de aralık koruyandır. Riesz homomorfizması olmadığını göstermek için,

$$f: [0,1] \rightarrow IR$$

$$x \rightarrow fx = x - \frac{1}{2}$$

biçiminde tanımlanan sürekli fonksiyonu alalım.

$$|\beta f| = \left| \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx \right| = \left| \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right) \Big|_0^1 \right| = |0 - 0| = 0 \dots \dots *$$

$$|f|x = |fx| = \begin{cases} -x + \frac{1}{2}, & x \leq \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2}, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

olduğunu kullanarak

$$\begin{aligned} \beta(|f|) &= \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| dx = \int_0^{1/2} \left(-x + \frac{1}{2}\right) dx + \int_{1/2}^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx \\ &= \left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x}{2} \right) \Big|_0^{1/2} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right) \Big|_{1/2}^1 \\ &= -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \dots \dots ** \end{aligned}$$

buluruz. * ve ** gereğince $|\beta f| < \beta(|f|)$ dir. $|\beta f| \neq \beta(|f|)$ olduğundan 1.45.Teorem gereği β Riesz homomorfizması değildir.

2.2.6. Örnek

$L_1[0,1] = \{g|g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ integrallenebilir fonksiyon}\}$ olmak üzere

$$T: C[0,1] \rightarrow L_1[0,1]$$

$$f \rightarrow Tf: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \rightarrow (Tf)(t) = t \cdot f(t) \quad (t \in [0,1])$$

biçiminde tanımlanan T operatörü Riesz homomorfizmasıdır ancak aralık koruyan değildir.

Çözüm

$f \in C[0,1]$ ve $t \in [0,1]$ olmak üzere

$$\begin{aligned}(T|f|)(t) &= t \cdot |f|(t) \\ &= t \cdot |f(t)| \\ &= |t \cdot f(t)| \\ &= |(Tf)(t)| \\ &= |Tf|(t)\end{aligned}$$

eşitliğinden T Riesz homomorfizmasıdır. Şimdi T nin aralık koruyan operatör olmadığını olmayana ergi yöntemini kullanarak ispatlayalım. Bunun için T nin aralık koruyan operatör olduğunu kabul edelim. Her $t \in [0,1]$ için $\mathbf{1}(t) = 1$ biçiminde tanımlanan sabit fonksiyon $C[0,1]$ in elemanıdır.

$$h: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow h(t) = \begin{cases} t \cdot \left| \sin \frac{1}{t} \right| & : t \neq 0 \\ 0 & : t = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan h fonksiyonu sürekli dolayısıyla integrallenebilir.

$\mathbf{1} \in C[0,1]$ ve her $t \in [0,1]$ için $\mathbf{1}(t) = 1$ olacak şekildeki sabit fonksiyonu belirtmek üzere;

her $t \in [0,1]$ için $0 \leq \sin t \leq 1$ dir ve buradan $0 \leq t \left| \sin \frac{1}{t} \right| \leq t = T\mathbf{1}(t) = t \cdot 1$ doğrudur.

T operatörü aralık koruyan olduğundan $0 \leq f \leq \mathbf{1}$ ve $t \in [0,1]$ için $T(f)(t) = h(t)$ olacak şekilde $f \in C[0,1]$ vardır. Bu ve T nin tanımı her $t \in [0,1]$ için $T(f)(t) = t \cdot f(t) = h(t)$ olmasını gerektirir. O halde her $t \in (0,1]$ için

$f(t) = \frac{h(t)}{t} = \left| \sin \frac{1}{t} \right|$ olur. f sürekli olduğundan $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ vardır. Bu bize $\lim_{t \rightarrow 0^+} \left| \sin \frac{1}{t} \right|$ limitinin var olmasını verir ki bu bir çelişkidir. O halde T operatörü aralık koruyan olamaz.

2.2.7. Sonuç

E ve F Riesz uzayları ve $T: E \rightarrow F$ operatör olsun.

- i) T birebir aralık koruyan operatör ise T Riesz homomorfizmasıdır.
- ii) T örten Riesz homomorfizması ise T aralık koruyan operatördür.

İspat

i) T birebir aralık koruyan operatör olsun. Her aralık koruyan operatör ideal operatördür.

2.2.2. Önerme i) den T Riesz homomorfizmasıdır.

ii) T örten Riesz homomorfizması olsun. $y \in [0, Tx]$ olacak şekilde $x, y \in E^+$ alalım. T örten olduğundan $Tz = y$ olacak şekilde $z \in E$ vardır. $u = |z| \wedge x$ alalım.

$$\begin{aligned} u = |z| \wedge x &\Rightarrow Tu = T(|z| \wedge x) \\ &= T(|z|) \wedge Tx \\ &= |Tz| \wedge Tx \\ &= |y| \wedge Tx \\ &= y \wedge Tx \\ &= y \end{aligned}$$

dir ve ayrıca $u = |z| \wedge x$ ve $0 \leq |z| \wedge x \leq x$ olduğundan $u \in [0, x]$ olup $[0, Tx] \subseteq T[0, x] \dots (I)$

Diğer yandan T pozitif olduğundan $T[0, x] \subseteq [0, Tx] \dots (II)$

(I) ve (II) den $T[0, x] = [0, Tx]$ olup T aralık koruyan operatördür.

2.2.8. Sonuç

i) $T: E \rightarrow F$ birebir örten operatör olsun.

T aralık koruyan operatördür $\Leftrightarrow T$ Riesz homomorfizmasıdır.

ii) $T: E \rightarrow F$ örten Riesz homomorfizması ise her $x \in E$ için $T(I_x) = I_{Tx}$ dir.

İspat

i) 2.2.7. Sonuç i) ve ii) den T aralık koruyan operatördür $\Leftrightarrow T$ Riesz homomorfizmasıdır.

ii) T örten Riesz homomorfizması olsun. T Riesz homomorfizması ise T sıra sınırlı ve diklik koruyan operatördür. Bu durumda T invers ideal operatördür ve 2.1.3 Teorem ii) den $T(I_x) \subseteq I_{Tx}$ dir....(I)

Diğer yandan 2.2.7. Sonuç ii) den T aralık koruyan operatördür. Bu durumda T ideal operatördür ve 2.1.3. Teorem i den $I_{Tx} \subseteq T(I_x)$ dir....(II)

O halde (I) ve (II) den $T(I_x) = I_{Tx}$ dir.

2.2.9. Tanım

E Riesz uzayı ve $x \in E$ olsun. $Z(I_x)$ te seçilen her operatörün $Z(E)$ içine düşecek şekilde E üzerine genişlemesi varsa E ye $Z(E)$ -genişleme özelliğine sahiptir denir.

2.2.10. Örnek

E σ -Dedekind tam ise E , $Z(E)$ -genişleme özelliğine sahiptir [10].

2.2.11. Lemma

E düzgün tam ve $Z(E)$ -genişleme özelliğine sahip olsun. Herhangi bir $u \in E$ ve $y \in I_u$ alınsın. Bu durumda $\pi(u) = y$ olacak şekilde $\pi \in Z(E)$ vardır.

İspat

i) $u = 0$ için aşikardır.

ii) $0 < |u|$ olsun. $I_u = I_{|u|} \cong C(K)$ olacak şekilde K kompakt Hausdorff uzayı vardır ve $|u| = \mathbf{1}$. $y \in I_u$ için $I_{|u|} \cong C(K) \cong \text{Orth}(C(K)) = Z(C(K))$ olduğundan $\pi_y: I_{|u|} \rightarrow I_{|u|}$, $\pi_y(z) = y \cdot z$ şeklinde tanımlı π_y , $Z(I_u)$ nun elemanıdır. Ayrıca $\pi_y(|u|) = y \cdot |u| = y \cdot \mathbf{1} = y$ dir. Hipotezden π_y nin bir $\pi \in Z(E)$ genişlemesi vardır ve $\pi(|u|) = \pi_y(|u|) = y$ dir.

2.2.12. Teorem

E, F düzgün tam Riesz uzay ve $Z(E)$ -genişleme özelliğine sahip olsun.

$T: E \rightarrow F$ operatörünü alalım.

- i) T ideal operatördür $\Leftrightarrow$ Herhangi bir $\pi \in Z(F)$ ve $u \in E$ için $\pi(Tu) = T(\pi u)$ olacak şekilde $S \in Z(E)$ vardır.
- ii) T invers ideal operatördür $\Leftrightarrow$ Herhangi bir $\pi \in Z(E)$ ve $u \in E$ için $T(\pi u) = S(Tu)$ olacak şekilde $S \in Z(F)$ vardır.

İspat

i)

($\Rightarrow$) T nin ideal operatör olduğunu kabul edelim. $\pi \in Z(F)$, $0 \leq |\pi| \leq I$ ve $u \in E$ olsun. $|\pi T(u)| \leq |\pi| |Tu| \leq |Tu|$ dir ve T ideal operatör olduğundan 2.1.3. Teorem i) kullanılarak

$Tv = \pi Tu$ olacak şekilde $v \in I_u$ vardır. 2.2.11.Lemma kullanılarak $Su = v$ olacak şekilde $S \in Z(E)$ bulunur.

($\Leftarrow$) T nin ideal operatör olduğunu göstermek için $I_{Tu} \subseteq T(I_u)$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $v \in I_{Tu}$ alalım. 2.2.11.Lemma dan $\pi(Tu) = v$ olacak şekilde $\pi \in Z(F)$ vardır. Buradan $S \in Z(E)$ olacak şekilde $\pi(Tu) = T(S(u)) = v$ bulunur. Böylece $S \in Z(E)$, $S(I_u) \subseteq I_u$ ve $Su \in I_u$ elde edilir.

ii)

($\Rightarrow$) T nin invers ideal operatör olduğunu kabul edelim. $\pi \in Z(E)$, $0 \leq |\pi| \leq I$ ve $u \in E$ olsun. Buradan $|\pi(u)| \leq |u|$ olup T invers ideal operatör olduğundan $|T\pi(u)| \leq \lambda|Tu|$ olacak şekilde $\lambda \in IR$ vardır. Böylece $T(\pi(u)) \in I_{Tu}$ olup 2.2.11.Lemma dan

$T(\pi u) = S(Tu)$ olacak şekilde $S \in Z(F)$ vardır.

($\Leftarrow$) T nin invers ideal operatör olduğunu göstermek için $T(I_u) \subseteq I_{Tu}$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $y \in I_u$ alalım. 2.2.11.Lemma dan $\pi(u) = y$ olacak şekilde

$\pi \in Z(E)$ vardır. Buradan $T(\pi(u)) = Ty$ olup hipotezden $T(\pi(u)) = Ty = S(T(u))$ elde edilir. Böylece $S(T(u)) \in I_{Tu}$ ve $Ty \in I_{Tu}$ elde edilir.

2.2.13. Teorem

E ve F Riesz uzay, $T: E \rightarrow F$ örten sıra sınırlı diklik koruyan operatör ise $h: Z(E) \rightarrow Z(F)$, her $\pi \in Z(E)$ için $h(\pi)T = T\pi$ olacak şekilde bir h f-cebir homomorfizması vardır [4].

Şimdi yukarıdaki teoremin karıştını vereceğiz. Önce aşağıdaki Lemma yı verelim.

2.2.14. Lemma

E ve F Riesz uzay, $T: E \rightarrow F$ operatör olsun. $B_{|x|} \cap B_{|y|} = B_{|x| \wedge |y|}$ dir.

İspat

$|x| \wedge |y| \leq |x| \in B_{|x|}$ olduğundan $|x| \wedge |y| \in B_{|x|}$ dir. Aynı şekilde

$|x| \wedge |y| \leq |y| \in B_{|y|}$ olduğundan $|x| \wedge |y| \in B_{|y|}$ dir. Bu durumda

$|x| \wedge |y| \in B_{|x|} \cap B_{|y|}$ elde edilir. Böylece $B_{|x| \wedge |y|} \subseteq B_{|x|} \cap B_{|y|}$ sağlanır....(I)

Diğer taraftan $z \in B_{|x|} \cap B_{|y|}$ alalım.

$z \in B_{|x|} \cap B_{|y|} \Rightarrow z \in B_{|x|}$ ve $z \in B_{|y|}$

$$\Rightarrow n|x| \wedge |z| \uparrow |z| \text{ ve } n|y| \wedge |z| \uparrow |z|$$

$$\Rightarrow n(|x| \wedge |y|) \wedge |z| \uparrow |z|$$

$$\Rightarrow z \in B_{|x| \wedge |y|}$$

dir. O halde $B_{|x|} \cap B_{|y|} \subseteq B_{|x| \wedge |y|}$ elde edilir....(II)

(I) ve (II) den $B_{|x|} \cap B_{|y|} = B_{|x| \wedge |y|}$ sağlanır.

2.2.15. Sonuç

E Riesz uzay olsun. $x \perp y \Leftrightarrow B_x \cap B_y = \{0\}$ dır.

İspat

$(\Rightarrow)$ $x \perp y$ olsun. $x \perp y$ olduğundan $|x| \wedge |y| = 0$ dir. 2.2.14.Lemma kullanılırsa

$B_x \cap B_y = \{0\}$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $B_x \cap B_y = \{0\}$ olsun. $|x| \wedge |y| \in B_x$ ve $|x| \wedge |y| \in B_y$ olduğundan

$0 \leq |x| \wedge |y| \in B_x \cap B_y = \{0\}$ elde edilir buradan $|x| \wedge |y| = 0$ bulunur ki böylece $x \perp y$ elde edilmiş olur.

2.2.16. Önerme

E ve F Riesz uzay, E pricipial projeksiyon özelliğine sahip ve $T: E \rightarrow F$ lineer operatör olsun.

$h: Z(E) \rightarrow Z(F)$, her $\pi \in Z(E)$ için $h(\pi)T = T\pi$ olacak şekilde f -cebir homomorfizması (ya da diklik koruyan) varsa T diklik koruyandır.

İspat

T nin diklik koruyan olduğunu göstermek için $x \perp y$ iken $Tx \perp Ty$ olduğunu göstermeliyiz. B_x x in ürettiği, B_y y nin ürettiği band olsun. E pricipal projeksiyon özelliğine sahip olduğu için B_x belirlediği projeksiyon P_x ve B_y nin belirlediği projeksiyon P_y olsun. $P_x, P_y \in Z(E)$ olduğundan ve hipotezden $h(P_x)T = TP_x$ ve $h(P_y)T = TP_y$ sağlanır. Ayrıca $P_x x = x$ ve $P_y y = y$ olduğundan $h(P_x)Tx = TP_x x = T(P_x x) = Tx$ ve

$h(P_y)Ty = TP_y y = T(P_y y) = Ty$ dir. Buradan $|h(P_x)Tx| = |Tx|$ ve $|h(P_y)Ty| = |Ty|$ elde edilir. $h(P_x), h(P_y) \in Z(F)$ olduğundan $|h(P_x)||Tx| = |Tx|$ ve $|h(P_y)||Ty| = |Ty|$ dir. Diğer taraftan $x \perp y$ iken 2.2.15.Sonuçtan $B_x \cap B_y = \{0\}$ dir ve 1.43.Teorem

$P_{B_x \cap B_y} = P_{B_x} P_{B_y}$ olup $P_{\{0\}} = \{0\} = P_{B_x} P_{B_y}$ olduğundan $P_x \perp P_y$ dir. Ayrıca h diklik koruyan olduğundan $h(P_x) \perp h(P_y)$ dir.

$$\begin{aligned} |Tx| \wedge |Ty| &= |h(P_x)||Tx| \wedge |h(P_y)||Ty| \\ &\leq |h(P_x)|(|Tx| + |Ty|) \wedge |h(P_y)|(|Tx| + |Ty|) \\ &\leq |h(P_x) \wedge h(P_y)|(|Tx| + |Ty|) = 0 \end{aligned}$$

oldüğundan $Tx \perp Ty$ dir yani T diklik koruyandır.

2.2.17. Önerme

E ve F Riesz uzay, E $Z(E)$ -genişleme özelliğine sahip olsun. $T: E \rightarrow F$ lineer birebir örten operatör olsun. $h: Z(E) \rightarrow Z(F)$, her $\pi \in Z(E)$ için $h(\pi)T = T\pi$ olacak şekilde h operatörü varsa T^{-1} diklik koruyandır.

İspat

2.2.2.Önerme ii) den T nin invers ideal operatör olduğunu göstermeliyiz. Bunun için

$|y| \leq |x|$ iken $|Ty| \leq \lambda |Tx|$ olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{R}^+$ var olduğunu göstermeliyiz. $|y| \leq |x|$ olsun.

$\pi x = y$ olacak şekilde $\pi \in Z(E)$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} \pi x = y &\Rightarrow T\pi x = Ty \\ &\Rightarrow h(\pi)Tx = Ty \\ &\Rightarrow |h(\pi)Tx| = |Ty| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |h(\pi)||Tx| = |Ty|$$

dir. Ayrıca $h(\pi) \in Z(F)$ olduğundan $|h(\pi)| \leq \lambda I_f$ olacak şekilde $\lambda \in IR^+$ vardır. Böylece $|Ty| = |h(\pi)||Tx| \leq \lambda I_f |Tx| = \lambda |Tx|$ olduğundan T nin invers ideal operatördür. O halde T^{-1} diklik koruyandır.

2.3. İdeal Operatörün Tersi

Bu kısımda birebir ve örten bir ideal operatörün tersinin bazı koşullarda ideal operatör olduğunu göstereceğiz. Önce bazı hazırlıklar yapacağız.

E, F vektör örgüsü $T: E \rightarrow F$ birebir örten operatör olmak üzere $T^{-1}: F \rightarrow E$ lineer operatörü vardır. O halde her $S \in L(E)$ için $TST^{-1}: F \rightarrow F$ biçiminde tanımlı dönüşüm bir operatördür. Bu durumda

$h: L(E) \rightarrow L(F), S \rightarrow h(S) = TST^{-1}$ operatörü tanımlanabilir.

Benzer şekilde

$u: L(F) \rightarrow L(E), H \rightarrow u(H) = T^{-1}HT$ operatörü tanımlanabilir.

Şimdi h operatörünü $Z(E)$ ye kısıtlarsak $h: Z(E) \rightarrow L(F)$ operatörü vardır. Benzer şekilde u operatörünü $Z(F)$ ye kısıtlarsak $u: Z(F) \rightarrow L(E)$ operatörü vardır.

2.3.1. Lemma

E, F Riesz uzayları $T: E \rightarrow F$ birebir örten operatör olmak üzere $h: Z(E) \rightarrow Z(F)$,

$\pi \rightarrow h(\pi) = T\pi T^{-1}$ anlamlı ise h birebir cebir homomorfizmasıdır. Benzer şekilde $u: Z(F) \rightarrow Z(E), \pi \rightarrow u(\pi) = T^{-1}\pi T$ anlamlı ise u birebir cebir homomorfizmasıdır.

İspat

Her $\pi_1, \pi_2 \in Z(E)$ için

$$\begin{aligned} h(\pi_1) \cdot h(\pi_2) &= (T\pi_1 T^{-1})(T\pi_2 T^{-1}) \\ &= T\pi_1 (T^{-1}T)\pi_2 T^{-1} \\ &= T\pi_1 \pi_2 T^{-1} \\ &= h(\pi_1 \pi_2) \end{aligned}$$

olduğundan h cebir homomorfizmidir.

h nin birebir olduğunu göstermek için $0 \neq \pi \in Z(E)$ alalım. $\pi \neq 0$ ise $\pi(x) \neq 0$ olacak şekilde $x \in E$ vardır. $y := Tx$ olmak üzere $T\pi T^{-1}(y) = T\pi T^{-1}(Tx) = T\pi(x) \neq 0$ elde edilir. O halde h birebirdir.

Benzer şekilde her $\pi_1, \pi_2 \in Z(F)$ için

$$\begin{aligned} u(\pi_1) \cdot u(\pi_2) &= (T^{-1}\pi_1 T)(T^{-1}\pi_2 T) \\ &= T^{-1}\pi_1 (TT^{-1})\pi_2 T \\ &= T^{-1}\pi_1 \pi_2 T \\ &= u(\pi_1 \pi_2) \end{aligned}$$

olduğundan u cebir homomorfizmidir.

u nin birebir olduğunu göstermek için $0 \neq \pi \in Z(F)$ alalım. $\pi \neq 0$ ise $\pi(x) \neq 0$ olacak şekilde $x \in F$ vardır. $y := T^{-1}x$ olmak üzere $T^{-1}\pi T(y) = T^{-1}\pi T(T^{-1}x) = T^{-1}\pi(x) \neq 0$ elde edilir. O halde u birebirdir.

2.3.2. Tanım

E vektör örgüsü olmak üzere $Z(E)$ ile değişmeli olan operatörlerin kümesine $Z(E)$ nin commutantı denir ve $Z(E)_C$ ile gösterilir. Yani

$$Z(E)_C = \{T \in L(E) : \forall \pi \in Z(E) \text{ için } T\pi = \pi T\} \text{ dir.}$$

2.3.3. Lemma

E, F vektör örgüsü, $T: E \rightarrow F$ birebir örten operatör olmak üzere

i) Her $\pi \in Z(E)$ için $T\pi T^{-1} \in Z(F)_C$ olması için gerek ve yeter koşul her $S \in Z(F)$ için $T^{-1}ST \in Z(E)_C$ dır.

ii) Her $\pi \in Z(F)$ için $T^{-1}\pi T \in Z(E)_C$ olması için gerek ve yeter koşul her $S \in Z(E)$ için $TST^{-1} \in Z(F)_C$ dır.

İspat

i)

$\Rightarrow$ Her $\pi \in Z(E)$ için $T\pi T^{-1} \in Z(F)_C$ olsun. Her $S \in Z(F)$ ve $H \in Z(E)$ için

$$\begin{aligned} (T^{-1}ST)H &= (T^{-1}ST)HT^{-1}T \\ &= T^{-1}S(TH T^{-1})T \\ &= T^{-1}(THT^{-1})ST \\ &= H(T^{-1}ST) \end{aligned}$$

elde edilir.

$\Leftrightarrow$ Her $S \in Z(F)$ için $T^{-1}ST \in Z(E)_C$ olsun. Her $\pi \in Z(E)$ ve $H \in Z(F)$ için

$$\begin{aligned} (T\pi T^{-1})H &= (T\pi T^{-1})HTT^{-1} \\ &= T\pi(T^{-1}HT)T^{-1} \\ &= T(T^{-1}HT)\pi T^{-1} \\ &= H(T\pi T^{-1}) \end{aligned}$$

elde edilir.

ii)

$\Rightarrow$ Her $\pi \in Z(F)$ için $T^{-1}\pi T \in Z(E)_C$ olsun. Her $S \in Z(E)$ ve $H \in Z(F)$ için

$$\begin{aligned} (TST^{-1})H &= (TST^{-1})HTT^{-1} \\ &= TS(T^{-1}HT)T^{-1} \\ &= T(T^{-1}HT)ST^{-1} \\ &= H(TST^{-1}) \end{aligned}$$

elde edilir.

$\Leftarrow$ $S \in Z(E)$ için $TST^{-1} \in Z(F)_C$ olsun. Her $\pi \in Z(F)$ ve $H \in Z(E)$ için

$$\begin{aligned} (T^{-1}\pi T)H &= (T^{-1}\pi T)HT^{-1}T \\ &= T^{-1}\pi(THT^{-1})T \\ &= T^{-1}(T\pi T^{-1})HT \\ &= H(T^{-1}\pi T) \end{aligned}$$

elde edilir.

2.3.4. Lemma

E, F Riesz uzayları, $T: E \rightarrow F$ birebir örten operatör olmak üzere

i) E göreceli düzgün tam ve her $\pi \in Z(E)$ için $T\pi T^{-1} \in Z(F)$ ise $|\pi| \leq I$ iken $|T\pi T^{-1}| \leq I$ dir.

ii) F göreceli düzgün tam ve her $\pi \in Z(F)$ için $T^{-1}\pi T \in Z(E)$ ise $|\pi| \leq I$ iken $|T^{-1}\pi T| \leq I$ dir.

İspat

i) Her $\pi \in Z(E)$ için $T\pi T^{-1} \in Z(F)$ olsun. $h: Z(E) \rightarrow Z(F)$, $\pi \rightarrow h(\pi) = T\pi T^{-1}$ anlamlıdır. E göreceli düzgün tam olduğundan $Z(E)$ göreceli düzgün tam dır. Buradan h Riesz homomorfizmidir [12]. Her Riesz homomorfizması pozitifdir. Ayrıca

$h(I) = TIT^{-1} = I$ olduğundan birimi birime götürür. $|\pi| \leq I$ iken $|T\pi T^{-1}| = |h(\pi)| \leq h(|\pi|) \leq h(I) = I$ dır.

ii) Her $\pi \in Z(F)$ için $T^{-1}\pi T \in Z(E)$ olsun. $u: Z(F) \rightarrow Z(E)$, $\pi \rightarrow u(\pi) = T^{-1}\pi T$ anlamlıdır. F göreceli düzgün tam olduğundan $Z(F)$ göreceli düzgün tam dır. Buradan u Riesz homomorfizmidir [12]. Her Riesz homomorfizması pozitifdir. Ayrıca

$u(I) = T^{-1}IT = I$ olduğundan birimi birime götürür. $|\pi| \leq I$ iken $|T^{-1}\pi T| = |u(\pi)| \leq u(|\pi|) \leq u(I) = I$ dır.

2.5 Tanım

E Riesz uzay olsun. Her $x, y \in E$ için $|y| \leq |x|$ iken $\pi x = y$, $\pi \in Z(E)$ ve $|\pi| \leq I$ olacak şekilde π varsa E zengin merkeze sahiptir denir.

2.3.6. Teorem

E Banach örgüsü ise her $T: E \rightarrow E$ band koruyan operatör sıra sınırlıdır [1].

2.3.7. Teorem

E ve F σ - Dedekind tam Banach örgüsü $T: E \rightarrow F$ birebir ve örten ideal operatör ise T^{-1} ideal operatördür.

İspat

2.1.3. Teorem ii den T^{-1} in ideal operatör olduğunu göstermek için her $x \in E$, $T(I_x) \subseteq I_{Tx}$ olduğunu göstermek yeter. Her $z \in T(I_x)$ için

$$z \in T(I_x) \Rightarrow \exists y \in I_x: Ty = z$$

$$y \in I_x \Rightarrow \exists \lambda \in IR^+, |y| \leq \lambda|x|$$

$$\Rightarrow \exists \pi \in Z(E), \pi(x) = y \quad [1]$$

$$\Rightarrow \exists \pi \in Z(E), T\pi x = (T\pi T^{-1})(Tx) = y \dots (*)$$

olur. Diğer yandan $J \subseteq E$ ideali için $T(J) \subseteq F$ ideal olur. Her $S \in Z(F)$ için $ST(J) \subseteq T(J)$ ve böylece $T^{-1}ST \subseteq J$ olur. Yani her $S \in Z(F)$ için $T^{-1}ST$ ideali sabit bırakan operatör olur.

[1] Sonuç 2.3.6. dan $T^{-1}ST$ sıra sınırlıdır. Böylece her $S \in Z(F)$ için $T^{-1}ST \in S(E) =$

$Z(E)$ olur. 2.3.3.Lemma i den her $\pi \in Z(E)$ için $T\pi T^{-1} \in Z(F)_C$ dır. [2] Teorem 8.3 den $T\pi T^{-1}$ band koruyan ve yine [1] Sonuç 2.8. den sıra sınırlıdır. Buradan her $\pi \in Z(E)$ için $T\pi T^{-1} \in Orth(F) = Z(F)$ olur. Şimdi (*) dan $|Ty| = |T\pi T^{-1}(Tx)| \leq \mu|Tx|$ elde edilir. Buradan $z \in I_{Tx}$ ve böylece $T(I_x) \subseteq I_{Tx}$ bulunur.

3. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmanın temel amaçlarından biri ideal ve invers ideal operatörleri inceleyerek birebir ve örten bir ideal operatörün tersinin ne zaman ideal operatör olacağını elde etmektir. E ve F σ -Dedekind tam Banach örgüsü $T: E \rightarrow F$ birebir ve örten ideal operatör iken T^{-1} in ideal operatör olduğunu elde ettik. Sonraki hedefimiz ideal ve invers ideal operatörlerle dikliği koruyan operatörler arasında ilişkileri elde ederek girişte verilen temel problem ‘ E ve F Riesz uzayı $T: E \rightarrow F$ birebir ve örten dikliği koruyan operatör ise T^{-1} dikliği koruyan operatör müdür’ sorusunun çözümüne katkı sağlamaktır. Belli koşullarda denklikler, genel durumlarda birbirini gerektirmeyen örnekler verdik. Fakat tam olarak denklikleri karakterize edip ana problemin çözümüne istenen düzeyde katkı elde edemedik. Acaba hangi hipotezler altında elde edilebilir sorusu hala açık bir sorudur ve bu yönde çalışmalarımızı devam ettirmeyi düşünmekteyiz.

KAYNAKLAR

1. Abramovich, V. A., and Kitover A.K. (2000). Inverses of disjointness preserving operators. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 143(679), 1-1.
2. Aliprantis, C. D., and Burkinshaw, O. (1985). *Positive operators*. London: Academic Press, 194-195.
3. Aliprantis, C. D., and Burkinshaw, O. (1990). *Principles of real analysis*. London: Academic Press, 14-21.
4. Hart, D. R. (1985). Some properties of disjointness preserving operators. *Indagationes Mathematicae*, 88 (2),183-197.
5. Huijsmans, C. B., and Luxemburg, W. A. J. (1992). *Positive operators and semigroups on Banach lattices*. Kluwer.
6. Huijsmans, C. B., and Wickstead, A. W. (1992). The inverse of band preserving and disjointness preserving operators. *Indagationes Mathematicae*, 3(2), 179-183.
7. Huijsmans, C. B., and De Pagter, B. (1994). Invertible disjointness preserving operators. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 37(1), 125-132.
8. Luxemburg, W. A. J., and Schep, A. R. (1978, January). A Radon-Nikodym type theorem for positive operators and a dual. *Indagationes Mathematicae*, 81(1), 357-375.
9. Luxemburg, W.A.J., Zaanen, A.C. (1971). *Riesz Space I*. Amsterdam: North Holland.
10. Pagter, B. de (1981). *f-Algebras and Orthomorphisms*, Thesis, Leiden Universty, Netherlands.
11. Turan, B. (2003). On ideal operators. *Positivity*, 7, 141-148.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : GEYİKÇİ İrem Mesude
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 28.10.1993 Ankara
Medeni hali : Bekar
e-mail : irem.mesude@hotmail.com



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Gazi Üniv./ Matematik Bölümü	Devam ediyor
Lisans	Gazi Üniv./ Matematik Bölümü	2015
Lise	Yahya Kemal Beyatlı Anadolu Lisesi	2011

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2017	Öncü Kolej	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

-

Hobiler

Yüzme, tenis, gitar



GAZİ GELECEKTİR..