

BAZI AKIŞKAN HAREKETLERİNİ BELİRLEYEN DENKLEMLER
İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ

Belma DOĞANAY

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2010
ANKARA

Belma DOĞANAY tarafından hazırlanan BAZI AKIŞKAN HAREKETLERİNİ
BELİRLEYEN DENKLEMLER İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN
ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu
onaylarım.

Doc. Dr. Meryem KAYA

.....

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Nuri ÖZALP

(Matematik Anabilim Dalı , Ankara Üniversitesi)

Doc. Dr. Meryem KAYA

Matematik Anabilim Dalı,Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Adil Mısır

Matematik Anabilim Dalı Gazi Üniversitesi

Tarih: 07/ 07 / 2010

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini
onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Belma DOĞANAY

**BAZI AKIŞKAN HAREKETLERİNİ BELİRLEYEN DENKLEMLER İÇİN
SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ**

(Yüksek Lisans Tezi)

Belma DOĞANAY

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HAZİRAN 2010

ÖZET

Bu çalışmada bazı akışkan hareketlerini belirleyen denklem sistemleri için başlangıç - sınır değer problemleri ve bu problemlerin çözümleri üzerine bazı bilinen sonuçlar incelenmiştir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Tezin birinci bölümünü oluşturan giriş kısmında akışkanlar hakkında genel bilgi verilmiş ve türbülanslı akışkanların önemi vurgulanmıştır. Bu durumların günlük hayattaki örneklerinden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde kullanılan notasyonlar ve temel kavramlar hakkında genel bilgi verilmiştir.

Üçüncü ve dördüncü bölümde bazı akışkan denklemleri için literatürde bilinen bazı sonuçlar çalışılmıştır. Üçüncü bölümde Kelvin -Voigt denklem sistemi için verilen başlangıç sınır değer probleminin çözümlerinin varlığı, tekliği ve sürekliliği ispatlanmıştır [5,7].

Dördüncü bölümde ise viskoz akışkanların genelleştirilmiş bir denklemi için sınır değer problemi tanımlanmış ve zayıf çözümlerinin varlığı ve sürekliliği üzerine sonuçlar verilmiştir [5].

Bilim Kodu : 204.1.138

Anahtar Kelimeler: Galerkin Metodu, Viskoelastik Akışlar, Çözümlerin Varlığı ve Tekliği

Sayfa Adedi : 54

Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Meryem KAYA

**SOLVABILITY OF INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR
EQUATIONS DESCRIBING SOME MOTIONS OF FLUIDS**

(M.Sc. Thesis)

Belma DOĞANAY

**GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

June 2010

ABSTRACT

This work aims to analyze the initial value boundary problem for equations of some motions of fluids, and some known results on the solution of these problems are examined.

This thesis consists of four chapters.

In the introduction part of the first section, general information are given about fluids and emphasized the importance of turbulent fluids. Examples of these situations are discussed in daily life.

In the second part, notations and basic terms are introduced and given general information.

In the third and fourth parts, some results in literature for some fluids known so far are studied. In the third part, the existence, uniqueness and continuity of solutions of boundary value problems which are given for the Kelvin -Voigt equations are proved [5,7].

In the fourth part, boundary value problems for a generalized equation of the viscous fluids are defined and the results on the existence and continuity of weak solution of these equations are given [5].

Science Code : 204.1.138

Key Words : Galerkin Method, Motion of Viscous Fluids, Existence and Uniqueness of Solutions

Page Number: 54

Advisor : Assoc. Prof. Dr. Meryem KAYA

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarım sırasında bana olan güvenini hep koruyan, değerli yardımlarını esirgemeyen, bilgi ve deneyimleriyle beni donatan değerli hocam Doç. Dr. Meryem KAYA'ya teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Sağladığı burs imkanıyla çalışmalarına maddi, manevi destek olan TÜBİTAK'a teşekkürü bir borç bilirim.

Hayatımın her aşamasında benden ilgi ve sevgilerini eksik etmeyen üzerimde sonsuz emekleri olan Babama, Anneme, Ablama ve dostluktan ileri kardeşlik duygusu ile bağlı olduğum desteğini her an hissettiğim Duygu SAĞBAŞ'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	vi
TEŞEKKÜR.....	viii
İÇİNDEKİLER.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. NOTASYON VE TEMEL KAVRAMLAR.....	4
3. KELVIN-VOIGT DENKLEMİ.....	14
3.1. Notasyonlar.....	14
3.2. Kelvin-Voigt Denkleminin Zayıf Çözümlerinin Varlığı Üzerine.....	15
3.3. Kelvin-Voigt Denkleminin Zayıf Çözümlerinin Tekliği ve Sürekliliği Üzerine.....	30
4. VİSKOZ AKIŞKANLARIN GENELLEŞTİRİLMİŞ BİR DENKLEMİ.....	34
4.1. Viskoz Akışkanların Genelleştirilmiş Bir Denkleminin Çözümlerinin Varlığı ve Sürekliliği Üzerine.....	35
KAYNAKLAR.....	54
ÖZGEÇMİŞ.....	55

1. GİRİŞ

Akışkan hareketlerini belirleyen denklemler geometriye, sınır değerlerine ve mekaniğin bazı temel kanunları olan momentumun, kütle, enerjinin korunumuna bağlı olarak ortaya çıkmaktadır.

Deformasyon hızının kayma gerilmesiyle doğru orantılı olduğu akışkanlara Newton tipi akışkanlar denilmektedir. Newton tipi akışkanların deformasyon hızı kayma gerilmesi ile doğru orantılı olup lineerdir ve viskozitesi sabittir. Newton denkleminin T stres tensörü, $D(\vec{v}) = (D_{ik}\vec{v})$ strain tensör ve ρ sıkıştırılmaz viskoz akışkanın basıncı olmak üzere aşağıdaki forma sahip olduğu bilinir.

$$T = -\rho E + 2\nu D \quad (1.1)$$

Burada; ν kinematik viskozite katsayısıdır. Bu ilişki akışkanın iç sürtünme katsayısının olmadığı varsayılarak oluşturulmuştur. Yani, bu akışkanlar küçük bir dış kuvvet etkisi etkisinde şekil değiştirme hızı sonsuz olan akışkanlardır.

Eğer iç sürtünme katsayılarının sıfırdan farklı olduğu kabul edilirse Eş. 1.1 deki bağıntı

$$T = -\rho E + 2\nu D + 2\mu \frac{dD}{dt} \quad (1.2)$$

şeklini alır. Burada; μ viskozite (iç sürtünme) katsayısı ve

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + vgrad \quad (1.3)$$

Stokes türevidir. Eş. 1.2'deki stres tensörünü

$$\frac{dv}{dt} = divT + f \quad (1.4)$$

şeklindeki Cauchy formunda yazılmış bir sürekli hareket denkleminde yerine yazarsak;

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + v_k \frac{\partial v}{\partial x_k} - \mu \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial t} + v_k \frac{\partial \Delta v}{\partial x_k} \right) + \text{grad } \rho = f, \quad \text{div } v = 0 \quad (1.5)$$

denklem sistemi elde edilir. Eş. 1.5'den $\mu = 0$ için

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + v_k \frac{\partial v}{\partial x_k} + \text{grad } \rho = f, \quad \text{div } v = 0 \quad (1.6)$$

şeklinde tanımlı Navier –Stokes denklemleri elde edilir.

Navier-Stokes denklemleri, ismini Claude-Louis Navier ve George Gabriel Stokes'tan almış olan, sıvılar ve gazlar gibi akışkanların hareketini tanımlamaya yarayan bir dizi denklemden oluşmaktadır. İlk olarak 1822'de Navier tarafından ortaya konmuş olan bu denklemler 1845'de Stokes tarafından yeniden incelenmiştir. Bu denklemlerin Pouesille ve Couette akışları gibi basit durumlar dışında analitik çözümleri bilinmemektedir. Sınırlı bir bölgede tanımlı Navier-Stokes denklemi için tanımlanan bir problemin çözümünün varlık ve tekliği iki boyutlu uzayda ispatlanmış olup, üç boyutlu uzayda ise ancak veriler üzerinde kısıtlamalar yapılması koşulu ile sağlanabilmiştir.

Bu denklemler en kullanışlı denklemlerin başında gelmektedirler. Çünkü, gerek akademik gerekse ekonomik birçok kabulün fiziğini açıklamaktadır. Hava akımları ve okyanus akıntılarının, boru içindeki su akışının, galaksideki yıldız hareketlerinin, kanat etrafındaki hava akımlarının modellenmesinde ve hesaplarında sıkça kullanılırlar.

Eş. 1.5 denkleminin özel bir hali olarak,

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + v_k \frac{\partial v}{\partial x_k} - \mu \frac{\partial \Delta v}{\partial t} + \text{grad } \rho = f, \quad \text{div } v = 0 \quad (1.7)$$

denklem sistemi elde edilir. Eş. 1.7 ile verilen sistem fiziksel olarak anlamlıdır. Söz konusu sistem, bir viskoz sıkıştırılmaz Newton tipi akışkanın akışını tanımlamaktadır öyleki ani etkiyen bir kuvvet altında akışkanın harekete geçebilmesi için $\frac{\mu}{\nu}$ birim zamanı gerektirmektedir. Bu akışkan modeli ilk olarak Voigt tarafından ortaya konmuş olup,

$$T = -pE + 2\nu(1 + \frac{\mu}{\nu} \frac{\partial}{\partial t})D \quad (1.8)$$

şeklinde tanımlı stres tensörünün Eş. 1.4' de yerine yazılmasıyla elde edilir. Lineer viskoelastik Kelvin-Voigt denklem sistemi için verilen başlangıç sınır değer probleminin genel çözümlerinin varlığı konusunda Oskolkov'un ve viskoz akışkanların genelleştirilmiş denklemleri için verilen başlangıç sınır değer probleminin genel çözümlerinin varlığı hakkında ise Karazeeva'nın çalışmaları öne çıkmaktadır [5, 7].

Türbülans, bir sıvının ya da gazın hareket halindeki düzensizliğidir. Türbülanslı akış ise, bir akışkanın herhangi bir noktasındaki hızının, zamana göre hem doğrultu hem de büyüklük bakımından değişiklik gösterebildiği düzensiz akış biçimidir. Bu durumun günlük hayatta pek çok örneğini görebiliriz.

Bacadan çıkan duman, ırmaklardaki kanallardaki ve okyanuslardaki su hareketleri, araba, uçak ve gemilerin çevresindeki hava akışları, kasırgalar türbülanslı akışlara örnek teşkil eder.

Yukarıda ifade edilen genelleştirilmiş viskoz akışkan denklemleri ve özel halleri için pek çok çalışma yapılmıştır ve halen yapılmaktadır. Bilim adamları için bu denklemlerin çeşitli başlangıç ve sınır şartları altında çözümlerinin varlığı, tekliği ve süreklilik gibi birtakım özellikleri ilgi çeken araştırma konuları olmuştur [5 – 7, 12].

2. NOTASYON VE TEMEL KAVRAMLAR

$\mathfrak{R}^n$, n boyutlu Öklid uzayı ve Ω , $\mathfrak{R}^n$ 'de açık sınırlı bir bölge olsun.

$u : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$ türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\nabla u(x_1, \dots, x_n) = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}); \quad |\nabla u|^2 = \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) \quad \text{ve}$$

$u : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}^n$ türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$u \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^n u_i D_i u_j, \quad 1 \leq i \leq n \text{ dir. Burada,}$$

$$D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq n \text{ dir.}$$

2.1. Tanım

Ω , $\mathfrak{R}^n$ 'de bir bölge olsun. Ω üzerindeki sürekli fonksiyonların kümesi $C(\Omega)$ ile gösterilir [9].

$$C(\Omega) = \{u : u(x), \Omega \text{ üzerinde sürekli}$$

2.2. Tanım

$C^m(\Omega)$, $\mathfrak{R}^n$ 'nin bir Ω bölgesi için m 'ye kadar ve m . mertebeden olan türevleri sürekli olan fonksiyonlar uzayıdır [9].

$$C^m(\Omega) = \{u; u, u', u'', \dots, u^{(m)} \text{ sürekli fonksiyondur}\}$$

şeklinde yazılabilir ve bu uzay üzerindeki norm;

$$\|u\|_{C^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |D^\alpha u(x)|$$

biçiminde tanımlanır [6].

2.3. Tanım

$C^\infty(\Omega)$ uzayı ise, Ω üzerinde her mertebeden türevleri sürekli olan fonksiyonların uzayıdır ve

$$C^\infty(\Omega) \subset \dots \subset C^m(\Omega) \subset C^{m-1}(\Omega) \subset \dots \subset C(\Omega)$$

bağıntısı vardır [11].

2.4. Tanım

$\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}$ kümesinin kapanışına $u(x)$ fonksiyonunun Ω bölgesindeki desteği denir ve $\text{supp } u$ ile gösterilir. Eğer $\text{supp } u \subset\subset \Omega$ ise u fonksiyonu Ω üzerinde kompakt desteğe sahiptir denir [1].

2.5. Tanım

Ω üzerinde sonsuz mertebeden türevleri olan ve kompakt desteğe sahip fonksiyonların uzayı C_0^∞ veya $D(\Omega)$ ile gösterilir [1].

2.6. Tanım

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de bir bölge ve p pozitif bir reel sayı olsun. Ω üzerinde tanımlanmış

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$$

koşulunu sağlayan, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonlarının sınıfına $L^p(\Omega)$ uzayı denir. $1 \leq p < \infty$ için $L^p(\Omega)$ uzayı üzerindeki norm,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlanır. $p = 2$ için $L^2(\Omega)$ Hilbert uzayıdır ve üzerindeki iç çarpım

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega)$$

biçiminde tanımlanır [6].

2.7. Tanım

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de bir bölge olmak üzere Ω üzerinde hemen hemen her yerde (h.h.h.y) sınırlı, ölçülebilir fonksiyonların sınıfına $L^\infty(\Omega)$ uzayı denir.

$L^\infty(\Omega) = \{u : |u(x)| \leq k; k = s.b.t., h.h.h.y \Omega \text{ üzerinde}\}$ şeklinde yazılabilir.

$1 \leq p < \infty$ olmak üzere $L^\infty(\Omega) \subset \dots \subset L^p(\Omega) \dots \subset L^1(\Omega)$ bağıntısı vardır ve bu uzay üzerindeki norm

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|$$

biçiminde tanımlanır [1].

2.8. Tanım

X , bir Banach uzayı olsun ve $1 \leq p < \infty$ olsun. $u : t \in (0, T) \rightarrow u(t) \in X$ şeklinde tanımlanmış olan ölçülebilir L^p fonksiyonlarının uzayına $L^p(0, T, X)$ uzayı denir ve üzerindeki norm

$$\|u\|_{L^p(0, T, X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} ; \quad 1 \leq p < \infty$$

biçiminde tanımlanır. $L^p(0, T, X)$ uzayı bir Banach uzayıdır. $p = \infty$ ise $L^\infty(0, T, X)$ uzayı $(0, T)$ 'den X 'e tanımlanmış olan düzgün sınırlı ve ölçülebilir fonksiyonların bir uzayıdır ve üzerindeki norm

$$\|u\|_{L^\infty(0, T, X)} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, T)} \|u(t)\|_X ; \quad p = \infty$$

biçiminde tanımlanır [10,11].

2.9. Tanım (Sobolev Uzayları)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, m negatif olmayan bir tamsayı ve $1 \leq p < \infty$ olsun.

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

biçiminde tanımlanan uzaya Sobolev uzayı denir. Burada $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ çoklu indis, α_i ' ler negatif olmayan tamsayılar ve $1 \leq i \leq n$ için $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ olmak üzere

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha_i \in \mathbb{Z} \text{ türev operatörüdür. Sobolev uzayları Banach}$$

uzaylarıdır. $C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonlar sınıfının $W^{m,p}(\Omega)$ uzayının normuna göre kapanışı da Sobolev uzayı olup $W_0^{m,p}(\Omega)$ biçiminde gösterilir. Üzerindeki norm

$$\|u\|_{W_0^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlanır. $m=0$ için $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ dır. $p=2$ ise $W^{m,2}$ uzayı bir Hilbert uzayıdır ve $H^m(\Omega)$ ile gösterilir. Bu uzay üzerindeki iç çarpım

$$\langle u, v \rangle_m = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx$$

biçiminde ve bu uzay üzerindeki norm ise

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^m (D^i u)^2 dx \right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, $m=2$ için $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ yazılabilir [1].

2.10. Tanım

$u, v \in L_{loc}^1(\Omega)$ olmak üzere

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} u = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u^{(\alpha)} \varphi, \quad \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$$

eşitliği sağlanacak şekilde $v = D^{\alpha} u$ ya u nun α . genelleştirilmiş (zayıf) türevi denir. Burada; $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ çoklu indis α_i ler negatif olmayan tamsayılar ve $1 \leq i \leq n$ olmak üzere $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ şeklindedir [9].

2.11. Tanım

X , normlu bir lineer uzay olsun. X uzayı üzerindeki tüm lineer ve sınırlı fonksiyoneller uzayına X uzayının duali denir ve X' ile gösterilir [4].

2.12. Tanım

X normlu bir lineer uzay olsun ve $\{x_n\} \in X$ olsun. Eğer her $f \in X'$ için $f(x_n) \rightarrow f(x)$ ise x_n dizisi $x \in X$ e zayıf yakınsaktır denir [4].

2.13. Tanım

X normlu bir lineer uzay ve X' , X in duali olsun. f_n , X' de bir dizi olmak üzere her $x \in X$ için $f_n(x) \rightarrow f(x)$ oluyorsa f_n dizisi, f 'e zayıf-* yakınsaktır denir ve

$$f_n \xrightarrow{*} f$$

şeklinde gösterilir [10].

2.14. Tanım

X bir Banach uzayı, X' X in dual uzayı ve $X'' \equiv (X')'$ şeklinde tanımlansın. A , X den X'' ye lineer dönüşümü bir izometri olsun. Eğer bu izometri örten ise (yani $X \simeq X''$) ise X uzayına refleksif uzay denir.

2.1. Lemma (Young Eşitsizliği)

$a, b, \varepsilon > 0$ ve $1 < p < \infty$ olsun.

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{p} a^p + \frac{1}{p' \varepsilon^{p'/p}} b^{p'}, \quad p' = p/(p-1)$$

eşitsizliği sağlanır [2].

2.2. Lemma (ε – Young Eşitsizliği)

$1 < p, q < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda $a, b, \varepsilon > 0$ için

$$ab \leq \varepsilon a^p + c(\varepsilon) b^q$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $c(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{q/p} q^{-1}$ dir [2].

2.3. Lemma (Hölder Eşitsizliği)

$1 \leq p \leq \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$ ise

$$\left| \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \right| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

eşitsizliği sağlanır [2] .

2.4. Lemma (Poincare-Friedrichs Eşitsizliği)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge olsun. $c = c(\Omega) > 0$ olmak üzere $\forall u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ için

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

eşitsizliği sağlanır [6].

2.5. Lemma (Gronwall Eşitsizliği - Türev Formu)

Negatif olmayan u sürekli fonksiyonu ve hemen hemen her bir $t \in [0, T]$ için

$$u'(t) \leq \alpha(t)u(t) + \beta(t)$$

eşitsizliği sağlansın. Burada $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ negatif olmayan ve $[0, T]$ üzerinde integrallenebilir fonksiyonlardır. Bu durumda her $t \in [0, T]$ için

$$u(t) \leq e^{\int_0^t \alpha(s)ds} \left[u(0) + \int_0^t \beta(s)ds \right]$$

eşitsizliği sağlanır [2].

2.6. Lemma (Gronwall Eşitsizliği - İntegral Formu)

u ve v , $[0, t]$ aralığında sürekli ve negatif olmayan fonksiyonlar ve c negatif olmayan bir tamsayı olsun. Eğer

$$u(t) \leq c + \int_0^t u(s)v(s)ds, \quad t \in [0, T]$$

ise bu durumda

$$u(t) \leq c \exp \left\{ \int_0^t v(s)ds \right\}$$

eşitsizliği sağlanır [2].

2.1. Teorem (Picard Lindelöf)

$f(t, x)$, $B_0 : t_0 \leq t \leq t_0 + a$ $\|x - x_0\| \leq b$ üzerinde sürekli ve Lipschitz koşulunu sağlasın. Bu durumda

$$x' = f(t, x), x(t_0) = x_0$$

başlangıç değer problemi $[t_0, t_0 + a]$ üzerinde bir tek $x(t)$ çözümüne sahiptir. Burada a ve b pozitif reel sayılar ve

$$\alpha = \min \left(a, \frac{b}{\mu} \right), \mu = \max_{(t,x) \in B_0} \|f(t, x)\|$$

olarak tanımlıdır [8].

2.2. Teorem (Arzela-Ascoli)

$X \subset R^n$ kompakt alt cümlesi üzerinde $(f_n(x))$, $n=1,2,\dots$ fonksiyonlar dizisi düzgün sınırlı ve eşsüreklı olsun. Bu durumda X üzerinde düzgün yakınsak bir $(f_{n_k}(x))$ alt dizisi vardır.

3. KELVIN-VOIGT DENKLEMİ

Bu bölümde Kelvin-Voigt denkleminin çözümlerinin bazı özellikleri incelenmiştir. Öncelikle ele alınan problemin incelendiği temel uzaylar hakkında genel bilgi verilmiş ve söz konusu uzaylar üzerinde Kelvin-Voigt denkleminin karşılık gelen başlangıç sınır değer problemi ifade edilmiştir. Daha sonra bu problemin zayıf çözümleriyle ilgili varlık ve teklik sonuçları incelenmiş ve son olarak da çözümün sürekliliği üzerinde durulmuştur. Bu kısımda [5] ve [7] nolu kaynaklar incelenerek çalışılmıştır.

3.1. Notasyonlar

Ω , $\mathbb{R}^n$ 'de Lipschitz sınırlı bir bölge olsun. Şimdi ileriki bölümlerde kullandığımız ve bu bölümün de temel uzaylarını oluşturan V , V' , H uzaylarını tanımlayalım.

$$V = \{u \in C_0^\infty(\Omega), \operatorname{div} u = 0\} \quad (3.1)$$

$$V', V \text{ nin } H^1(\Omega) \text{ uzayındaki kapanışı} \quad (3.2)$$

$$H, V \text{ nin } L^2(\Omega) \text{ uzayındaki kapanışı} \quad (3.3)$$

Burada H uzayı üzerindeki iç çarpım $L^2(\Omega)$ dan indirgenmiş

$$(u, v) = \int_{\Omega} u \cdot v dx$$

ile tanımlanan iç çarpım ve V' uzayı üzerindeki iç çarpım ise

$$(u, v) = \sum_{|\alpha| \leq 1} (D^\alpha u, D^\alpha v) \text{ şeklinde tanımlanmıştır. } H' \text{ ve } V' \text{ sırasıyla } H \text{ ve } V$$

uzaylarının dual uzayı olmak üzere $V \subset H \equiv H' \subset V'$ sağlanır. Ayrıca her bir uzay bir sonraki uzayda yoğundur ve buradaki birebir dönüşümler süreklidir [11].

Yukarıda yaptığımız tanımların bir sonucu olarak $f \in H$ ve $u \in V$ 'nin H 'daki iç çarpımı; $f \in V'$ ve $u \in V$ olması halindeki $\langle f, u \rangle$ çarpımı ile aynıdır. Yani ;
 $\langle f, u \rangle = (f, u), \forall f \in H, \forall u \in V$ yazılabilir [11].

3.2. Kelvin-Voigt Denkleminin Zayıf Çözümlerinin Varlığı Üzerine

$$u_t - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u - \mu \Delta u_t + \nabla p = f ; \Omega \times [0, T] ; T > 0 \quad (3.4)$$

$$\nabla \cdot u = 0 ; \Omega \times [0, T] \quad (3.5)$$

$$u = 0 ; \partial\Omega \times [0, T] (\partial\Omega, \Omega \text{ nın sınırındır}) \quad (3.6)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) ; \Omega \text{ da} \quad (3.7)$$

Kelvin-Voigt denkleminin karşılık gelen yukarıda belirtilen başlangıç sınır değer probleminin zayıf çözümleriyle ilgili varlık sonuçları üzerinde durulacaktır. Varlık teoremini ispat etmeden önce ;

$$b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i (D_i v_j) w_j dx$$

Üç lineer formuyla ilgili olarak aşağıdaki lemmalar verilecektir. Öncelikle üç lineer formla ilgili çalışmalarda sık kullanılan eşitsizliğe yer verilecektir. Bu eşitsizlik Lemma 3.1 ile ifade edilecektir.

3.1. Lemma

$\Omega, \mathbb{R}^n$ 'de bir bölge olsun. $n = 2$ için

$$\|v\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{1/4} \|v\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\text{grad } v\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

eşitsizliği sağlanır [11].

3.2. Lemma

$\forall u \in V, v, w \in H_0^1(\Omega) \cap L^n(\Omega)$ için

$$b(u, v, w) = -b(u, w, v)$$

ve $\forall u \in V, v \in H_0^1(\Omega) \cap L^n(\Omega)$ için

$$b(u, v, v) = 0 \quad ;$$

eşitlikleri sağlanır [11].

3.3. Lemma

Ω , açık bir bölge olsun. $n = 2$ olmak üzere $\forall u, v, w \in H_0^1(\Omega)$ için

$$|b(u, v, w)| \leq 2^{1/2} \|u\|^{1/2} \|\nabla u\|^{1/2} \|\nabla v\| \|w\|^{1/2} \|\nabla w\|^{1/2} \quad (3.8)$$

sağlanır. Ayrıca, $u \in L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, H)$ alınırsa, $Bu = u \cdot \nabla u$ olmak üzere

$Bu \in L^2(0, T; V')$ olur [11].

İspat

$$\begin{aligned} |b(u, v, w)| &\leq \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} |u_i (D_i v_j) w_j| dx \\ &\leq \sum_{i,j=1}^2 \|u_i\|_{L^4(\Omega)} \|D_i v_j\|_{L^2(\Omega)} \|w_j\|_{L^4(\Omega)} \end{aligned}$$

$$\leq \left(\sum_{i,j=1}^2 \|D_i v_j\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^2 \|u_i\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{j=1}^2 \|w_j\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \quad (3.9)$$

Lemma 3.1'den ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \|u_i\|_{L^4(\Omega)}^2 &\leq 2^{1/2} \sum_{i=1}^2 \left(\|u_i\|_{L^2(\Omega)} \|grad u_i\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq 2^{1/2} \|u\| \|\nabla u\| \end{aligned} \quad (3.10)$$

elde edilir. Benzer şekilde w için

$$\sum_{i=1}^2 \|w_i\|_{L^4(\Omega)}^2 \leq 2^{1/2} \|w\| \|\nabla w\| \quad (3.11)$$

yazılır. Eş. 3.10 ve Eş. 3.11, Eş. 3.9'da yerine yazılırsa Eş. 3.8 elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur [11].

3.1. Teorem

Ω , $\mathbb{R}^2$ de sınırlı bir bölge olmak üzere $f, f_t \in L^2(0, T, \Omega)$ ve $u_0 \in V \cap W^{2,2}$ olsun. Bu durumda Eş. 3.4 - Eş. 3.7 probleminin

$$u \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V) \quad \text{ve} \quad u_t \in L^2(0, T; V')$$

olacak şekilde u zayıf çözümü vardır [5–7, 11].

İspat

Teoremin ispatında Faedo-Galerkin metodu kullanılacaktır.

Eş. 3.4 - Eş. 3.7 probleminin varyasyonel formunu elde etmek için Eş. 3.4'deki denklemi $\varphi \in V$ ile skaler çarparak Ω_T üzerinden integral alınırsa;

$$(u_t, \varphi) - \nu(\Delta u, \varphi) + (u \cdot \nabla u, \varphi) - \mu(\Delta u_t, \varphi) + (\nabla p, \varphi) = (f, \varphi) \quad (3.12)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$(u_t, \varphi) + \nu(\nabla u, \nabla \varphi) + (u \cdot \nabla u, \varphi) + \mu(\nabla u_t, \nabla \varphi) = (f, \varphi) \quad (3.13)$$

eşitliği bulunur. Böylece her $m \in N$ için

$$u_m = \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i \quad (3.14)$$

yaklaşık çözümü tanımlanır ve u_m Eş. 3.13 de yerine yazılırsa ;

$$(u'_m, w_j) + \mu(\nabla u'_m, \nabla w_j) + \nu(\nabla u_m, \nabla w_j) + (u_m \nabla u_m, w_j) = (f, w_j), j = 1, \dots, m \quad (3.15)$$

$$u_m(0) = u_{0m} \quad (3.16)$$

elde edilir. Burada $u_{0m}, w_1, \dots, w_m$ tarafından gerilen uzay üzerinde u_0 'ın V 'de dik izdüşümüdür ve $m \rightarrow \infty$ iken $u_{0m} \rightarrow u_0$ dır. $g_{im}, 1 \leq i \leq m$ fonksiyonları $[0, T]$ üzerinde tanımlı skaler fonksiyonlardır. Eş. 3.15 eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \left\{ (w_i, w_j) + \mu(\nabla w_i, \nabla w_j) \right\} g'_{im}(t) + \nu \sum_{i=1}^m (\nabla w_i, \nabla w_j) g_{im}(t) \\ & + \sum_{i,s=1}^m (w_i \nabla w_s, w_j) g_{im}(t) g_{sm}(t) = (f, w_j) \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.17)$$

$w_1, \dots, w_m$ ler V de lineer bağımsız olduğundan

$$(w_i, w_j) + \mu(\nabla w_i, \nabla w_j) \quad 1 \leq i, j \leq m$$

elemanlarının oluşturduğu matris singüler olmayan matristir. Dolayısıyla tersi vardır. Bu matrisin tersiyle Eş. 3.17 çarpılırsa;

$$g'_{im}(t) + \nu \sum_{j=1}^m a_{ij} g_{jm}(t) + \sum_{j,s=1}^m b_{isj} g_{jm}(t) g_{sm}(t) = \sum_{j=1}^m \gamma_{ij}(f, w_j) \quad 1 \leq i \leq m \quad (3.18)$$

sabit katsayılı diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Burada $a_{ij} \in \mathfrak{R}$, $b_{isj} \in \mathfrak{R}$ ve $\gamma_{ij} \in \mathfrak{R}$ dir. Eş. 1.14'den dolayı $g_{im}(0)$, u_{0m} in i . bileşenidir.

$$g_{im}(0) = (u_0, w_i) \quad 1 \leq i \leq m \quad (3.19)$$

Böylece Eş. 3.18'deki lineer diferansiyel denklem Eş. 3.19 daki başlangıç koşulları ile birlikte $[0, T_m]$ üzerinde tek olarak belirlenir. Burada $T_m \leq T$ dir. Şimdi u_m çözümleri üzerinde bazı değerlendirmeler elde edilerek $T_m = T$ olduğu görülecektir.

Eş. 3.11 deki denklem $g_{im}(t)$ lerle çarpılıp $i = 1, \dots, m$ e toplam alınırsa

$$(\partial_t u_m, u_m) + \mu(\nabla \partial_t u_m, \nabla u_m) + \nu(\nabla u_m, \nabla u_m) + (u_m \nabla u_m, u_m) = (f, u_m) \quad (3.20)$$

denklemini elde edilir. Lemma 3.2'den

$$(u_m \nabla u_m, u_m) = b(u_m, u_m, u_m) = 0$$

olduğundan Eş. 3.20

$$\frac{d}{dt} (\|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2) + h \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\nu \|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2(f, u_m) \quad (3.21)$$

şeklinde yazılır. Schwarz eşitsizliği ve Young eşitsizliği kullanılarak;

$$\begin{aligned} \|(f, u_m)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_m\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{2\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

bulunur.

$$\|u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \lambda_1^{-1} \|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (3.23)$$

olarak bilinen Poincare-Friedrichs eşitsizliğini kullanarak Eş. 3.21'den

$$\frac{d}{dt} \left(\|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + (\nu\lambda_1 - \varepsilon) \|u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (3.24)$$

elde edilir. $\varepsilon = \frac{\nu\lambda_1}{2}$ seçilerek $\alpha = \min \left\{ \frac{\nu}{\mu}, \frac{\nu\lambda_1}{2} \right\}$ şeklinde seçilirse;

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \alpha \left(\|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) &\leq \frac{1}{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad (3.25) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Eş. 3.25'in çözümünden

$$\|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left\{ \|u_{0m}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \|\nabla u_{0m}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} e^{-\alpha t} + \frac{2}{\nu\lambda_1} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (3.26)$$

bulunur. $f \in L^2(0, T, \Omega)$, $u_0 \in V$ ve $\forall m$ için ;

$$\|u_{0m}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_{0m}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}^2$$

olduğu göz önüne alınırsa, Eş. 3.26 dan $M > 0$ sabit bir sayı olmak üzere

$$\|u_m(t)\|^2 + \mu \|\nabla u_m(t)\|^2 \leq M \quad (3.27)$$

$$\|u_m(t)\|^2 \leq M \quad (3.28)$$

yazılır.

$$\|u_m(x, t)\|^2 = \sum_{i=1}^m g_{im}^2(t) \leq M \text{ olacağından } \forall i = 1, \dots, m \text{ için}$$

$$g_{im}^2(t) \leq g_{1m}^2 + \dots + g_{mm}^2 \leq M \text{ yani } |g_{im}| \leq M^{1/2} \text{ olur.}$$

Eş. 3.18 ve Eş. 3.19 denklemlerine dönülecek olursa $T_m = T$ dir. Eş. 3.28 in sağ tarafı sonlu ve m den bağımsız olduğundan ,

$$u_m \in L^\infty(0, T; H) . \quad (3.29)$$

elde edilir. Eş. 3.25 de $\alpha \|u_m(t)\|^2$ terimi ihmal edilip 0'dan T 'ye integral alınırsa,

$$\begin{aligned} & \left(\|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \mu \alpha \int_0^T \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ & \leq \frac{2}{\mu \lambda_1} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \|\nabla u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ & \leq \frac{2}{\mu \lambda_1} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Her m için Eş. 3.30'un sağ tarafı sınırlı olduğundan $C > 0$ olmak üzere

$$\int_0^T \|\nabla u_m(t)\|^2 dt \leq C \quad \text{ve} \quad u_m \in L^2(0, T; V) \quad \text{yazılır.} \quad (3.31)$$

Eş. 3.29 ve Eş. 3.31 den

$$u_m \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V) \text{ dır.} \quad (3.32)$$

Eş. 3.29 dan ve zayıf yıldız topolojisine göre $m' \rightarrow \infty$ iken $u_m' \xrightarrow{*} u \in L^\infty(0, T; H)$ olacak şekilde u_m nin u_m' alt dizisi vardır. Yani $\forall v \in L^1(0, T; H)$ için $m' \rightarrow \infty$ iken

$$\int_0^T (u_m'(t) - u(t), v(t)) dt \rightarrow 0 \quad \text{dır.} \quad (3.33)$$

Diğer yandan Eş. 3.31 dan zayıf topolojiye göre $m' \rightarrow \infty$ iken $u_m' \rightarrow u_* \in L^2(0, T; V)$ olacak şekilde u_m nin bir u_m' alt dizisi vardır. Yani $\forall v \in L^2(0, T; V')$ için $m' \rightarrow \infty$ iken

$$\int_0^T (u_m'(t) - u_*(t), v(t)) dt \rightarrow 0 \quad (3.34)$$

yazılabilir.

$\forall v \in L^2(0, T; H)$ için

$$\int_0^T (u_m'(t), v(t)) dt \rightarrow \int_0^T (u_*(t), v(t)) dt \quad (3.35)$$

elde edilir. Eş. 3.33 ve Eş. 3.34 karşılaştırılırsa; $\forall v \in L^2(0, T; H)$ için

$$\int_0^T (u(t) - u_*(t), v(t)) dt = 0 \quad (3.36)$$

olur. Böylece

$$u = u_* \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \quad (3.37)$$

yazılır. Buradan lineer terimler için limite geçmek kolaydır ancak lineer olmayan terim için aşağıdaki Lemma ve Teoreme ihtiyaç duyulmaktadır.

3.4. Lemma

$f(x, 0) \in L^2(\Omega)$, $u_0(x) \in V \cap W_2^2$ olsun. Bu durumda Eş. 3.4 - Eş. 3.7 probleminde

$$\|\nabla u_t(x, 0)\|^2 + \|u_t(x, 0)\|^2 \leq \ell, \quad \ell = sbt.$$

bağıntısı sağlanır [7].

İspat

Eş. 3.4 ile verilen denklemde, $t = 0$ için

$$u_t(x, 0) - \Delta u_t(x, 0) + gradp(x, 0) = f(x, 0) + v\Delta u_0(x) - u_{0_k}(x)u_{0_{x_k}} \equiv F(x)$$

elde edilir. Burada $f(x, 0) \in L^2(\Omega)$, $u_0(x) \in V \cap W_2^2$ olduğundan $F(x) \in L^2(\Omega)$ yazılabilir. Diğer yandan yukarıdaki denkleme

$P_H : L^2 \rightarrow H$ projeksiyon operatörü uygulanırsa,

$$u_t(x, 0) - \Delta u_t(x, 0) = -P_H F(x), \quad x \in \Omega, \quad u_t(x, 0)|_{\partial\Omega} = 0$$

eliptik sınır değer problemi elde edilir. Yukarıdaki denklemin $u_t(x, 0)$ ile çarpımı alınır ve oluşan denklemin sağ tarafında Schwarz ve Young eşitsizlikleri uygulanırsa

$$\|u_t(x, 0)\|^2 + \|\nabla u_t(x, 0)\|^2 \leq \frac{1}{2\varepsilon} \|P_H F(x)\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|u_t\|^2$$

eşitsizliği elde edilir ve gerekli düzenleme ile

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \|u_t(x, 0)\|^2 + \|\nabla u_t(x, 0)\|^2 \leq \frac{1}{2\varepsilon} \|F(x)\|^2$$

yazılır. Burada $\varepsilon = 1$ seçilir ve $F(x) \in L^2(\Omega)$ olduğu göz önüne alınır

$$\|u_t(x, 0)\|^2 + 2\|\nabla u_t(x, 0)\|^2 \leq \|F(x)\|^2 = \ell$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. Şimdi aşağıdaki Teorem kullanılarak u_m in u ya güçlü yakınsak olduğu gösterilecektir.

3.2. Teorem

$X \subset\subset H \subset Y$ Banach uzayları ve X refleksif uzay olsun. Eğer $u_m, L^2(0, T, X)$ de düzgün sınırlı bir dizi ve $\frac{du_m}{dt}, p > 1$ olmak üzere $L^p(0, T, Y)$ de düzgün sınırlıysa bu durumda $L^2(0, T, H)$ de güçlü yakınsak bir alt dizi vardır [10].

Bu teoremi kullanmak için öncelikle;

$p = 2$ olması halinde $\frac{du_m}{dt}$ nin $L^2(0, T, V')$ de düzgün sınırlı olduğu gösterilecektir.

Eş. 3.15 sisteminin t 'ye göre türevi alınır ve daha sonra oluşan sistem $\frac{dg_{im}}{dt}$ lerle çarpılarak $i = 1, \dots, m$ e toplam alınırsa;

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|u_m'\|^2 + \mu \|\nabla u_m'\|^2 \right) + \nu \|\nabla u_m'\|^2 + \left((u_m \cdot \nabla u_m)', u_m' \right) = (f_t, u_t) \quad (3.38)$$

bulunur.

Burada nonlinear terim için m 'den bağımsız olarak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} (u \cdot \nabla u)_t &= \sum u_i \partial_i u_t = (u_1 \partial_1 u_1 + u_2 \partial_2 u_1)_t + (u_1 \partial_1 u_2 + u_2 \partial_2 u_2)_t \\ &= u_{1t} \partial_1 u_1 + u_1 (\partial_1 u_1)_t + u_{2t} \partial_2 u_1 + u_2 (\partial_2 u_1)_t \\ &\quad + u_{1t} \partial_1 u_2 + u_1 (\partial_1 u_2)_t + u_{2t} \partial_2 u_2 + u_2 (\partial_2 u_2)_t \\ &= u_t \cdot \nabla u + u \cdot \nabla u_t \end{aligned} \quad (3.39)$$

Eş. 3.39 ve Lemma 3.2 birlikte düşünülürse, Eş. 3.38

$$\frac{d}{dt} \left(\|u_m'\|^2 + \mu \|\nabla u_m'\|^2 \right) + 2\nu \|\nabla u_m'\|^2 + 2b(u_m', u_m, u_m') = 2(f_t, u_m') \quad (3.40)$$

şeklinde yazılır. Son denklemin sağ tarafına sırasıyla Schwarz ve Young eşitsizliği uygulanır ve Lemma 3.3'den faydalanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\|u'_m\|^2 + \mu \|\nabla u'_m\|^2 \right) + 2\nu \|\nabla u'_m\|^2 &\leq \frac{1}{\varepsilon} \|f_t\|^2 + \varepsilon \|u'_m\|^2 + 2^{3/2} \|u'_m\| \|\nabla u'_m\| \|\nabla u_m\| \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon} \|f_t\|^2 + \varepsilon \|u'_m\|^2 + 2\varepsilon_1 \|u'_m\|^2 \|\nabla u_m\|^2 + \frac{1}{\varepsilon_1} \|\nabla u'_m\|^2
\end{aligned} \tag{3.41}$$

elde edilir. Eş. 3.41'in sol tarafındaki $2\nu \|\nabla u'_m\|^2$ terimi ihmal edilir ve Eş. 3.27 sağ tarafta dikkate alınırsa

$$\frac{d}{dt} \left(\|u'_m\|^2 + \mu \|\nabla u'_m\|^2 \right) \leq \frac{1}{\varepsilon} \|f_t\|^2 + \left(\varepsilon + \frac{2\varepsilon_1 M}{\mu} \right) \|u'_m\|^2 + \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\mu}{\mu} \|\nabla u'_m\|^2$$

yazılabilir. Burada $\alpha = \max \left\{ \varepsilon + \frac{2\varepsilon_1 M}{\mu}, \frac{1}{\varepsilon_1 \mu} \right\}$ alırsak,

$$\frac{d}{dt} \left(\|u'_m\|^2 + \mu \|\nabla u'_m\|^2 \right) \leq \frac{1}{\varepsilon} \|f_t\|^2 + \alpha \left(\|u'_m\|^2 + \mu \|\nabla u'_m\|^2 \right) \tag{3.42}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte Gronwall Lemması uygulanırsa;

$$\left(\|u'_m(t)\|^2 + \mu \|\nabla u'_m(t)\|^2 \right) \leq e^{\alpha t} \left(\|u'_m(0)\|^2 + \mu \|\nabla u'_m(0)\|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \|f_t\|^2 \right)$$

elde edilir. Böylece Lemma 3.4'den

$$\left(\|u'_m(t)\|^2 + \mu \|\nabla u'_m(t)\|^2 \right) \leq e^{\alpha t} \left(\ell + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \|f_t\|^2 \right) \tag{3.43}$$

yazılabilir. Yani

$$u'_m(t) \in L^2(0, T; V') \tag{3.44}$$

dir. O halde, $L^2(0, T; V')$ da $du_m/dt \xrightarrow{*} \dot{u}$ dir. Yani, $\forall \psi \in L^2(0, T; V)$ için

$$\int_0^T \frac{du_m}{dt}(t) \psi(t) dt \rightarrow \int_0^T \dot{u}(t) \psi(t) dt \quad (3.45)$$

yazılabilir. Şimdi $\psi(t) \in C_0^\infty(0, T; V)$ alırsak, Eş. 3.45'in sol tarafına kısmi integrasyon uygulayabiliriz. Böylece; u_m nın u ye zayıf yakınsaklığını ve

$\frac{d\psi}{dt} \in C_0^\infty(0, T; V) \subset L^2(0, T; V)$ bağıntısını kullanarak,

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{du_m}{dt}(t) \psi(t) dt &= - \int_0^T u_m(t) \frac{d\psi}{dt} \\ &\rightarrow - \int_0^T u(t) \frac{d\psi}{dt}(t) \end{aligned} \quad (3.46)$$

yazabiliriz. Eş. 3.44 ve Eş. 3.45 den $\psi(t) \in C_0^\infty(0, T; V)$ için

$$\int_0^T \dot{u}(t) \psi(t) dt = - \int_0^T u(t) \frac{d\psi}{dt}(t) dt \quad (3.47)$$

elde edilir ve böylece $\dot{u} = du/dt$ olduğu görülür. Dolayısıyla; $L^2(0, T; V')$ de

$$du_m/dt \xrightarrow{*} du/dt \quad (3.48)$$

yazılabilir. O halde Teorem 3.2'den $L^2(0, T; H)$ da u_m , u ya güçlü yakınsaktır, diyebiliriz.

Nonlinear terimin yakınsaklığı için aşağıdaki Lemmaya yer verilecektir.

3.5. Lemma

$u_\mu, L^2(0, T; V)$ de u ya zayıf yakınsak ve $L^2(0, T; H)$ da u ya güçlü yakınsak olsun.

Bu durumda $\forall w \in C^1(\Omega \times [0, T])$ için

$$\int_0^T b(u_\mu(t), u_\mu(t), w(t)) dt \rightarrow \int_0^T b(u(t), u(t), w(t)) dt$$

sağlanır [11].

Eş. 3.15 ve Eş. 3.16 denklemlerinden limite geçmek için $[0, T]$ üzerinde sürekli olarak türetilen $\varphi(T) = 0$ olacak şekilde bir φ fonksiyonu düşünelim. Eş. 3.15 $\varphi(t)$ ile çarpılır ve integrali alınırsa;

$$\begin{aligned} & \int_0^T (u'_m(t), w_j) \varphi(t) dt + \mu \int_0^T (\nabla u'_m(t), \nabla w_j) \varphi(t) dt + \nu \int_0^T (\nabla u_m(t), \nabla w_j) \varphi(t) dt \\ & + \int_0^T (u_m \nabla u_m, w_j) \varphi(t) dt = \int_0^T (f, w_j) \varphi(t) dt. \end{aligned} \quad (3.49)$$

yazılır. Eş. 3.49'un ilk terimine kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_0^T (u'_m(t), w_j) \varphi(t) dt = -(u_m(0), w_j) \varphi(0) - \int_0^T (u_m(t), w_j) \varphi'(t) dt \quad (3.50)$$

elde edilir. Benzer şekilde ikinci terimden

$$\int_0^T (\nabla u'_m(t), \nabla w_j) \varphi(t) dt = -(\nabla u_m(0), \nabla w_j) \varphi(0) - \int_0^T (\nabla u_m(t), \nabla w_j) \varphi'(t) dt \quad (3.51)$$

Eş. 3.50 ve Eş. 3.51, Eş. 3.49'da yerine konursa

$$\begin{aligned}
& -\int_0^T (u_m(t), w_j) \varphi'(t) dt - \mu \int_0^T (\nabla u_m(t), \nabla w_j) \varphi'(t) dt + \\
& \nu \int_0^T (\nabla u_m(t), \nabla w_j) \varphi(t) dt + \int_0^T b(u_m(t), u_m(t), w_j) \varphi(t) dt \\
& = (u_{0m}, w_j) \varphi(0) + \mu (\nabla u_{0m}, \nabla w_j) \varphi(0) + \int_0^T \varphi(t) (f, w_j) dt
\end{aligned} \tag{3.52}$$

elde edilir. Lemma 3.5'den faydalanılarak eşitliğin sol tarafındaki integrallerde $m \rightarrow \infty$ iken limit alınır ve V de $u_{0m} \rightarrow u_0$ a güçlü yakınsak olduğu göz önünde bulundurulursa;

$$\begin{aligned}
& -\int_0^T (u(t), w_j) \varphi'(t) dt - \mu \int_0^T (\nabla u(t), \nabla w_j) \varphi'(t) dt \\
& + \nu \int_0^T (\nabla u(t), \nabla w_j) \varphi(t) dt + \int_0^T b(u(t), u(t), w_j) \varphi(t) dt \\
& = (u_0, w_j) \varphi(0) + \mu (\nabla u_0, \nabla w_j) \varphi(0) + \int_0^T \varphi(t) (f, w_j) dt
\end{aligned} \tag{3.53}$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlik her j için sağlandığından w_j lerin sonlu bir lineer kombinasyonu olan her bir v içinde sağlanır. Yani,

$$\begin{aligned}
& -\int_0^T (u(t), v(t)) \varphi'(t) dt - \mu \int_0^T (\nabla u(t), \nabla v(t)) \varphi'(t) dt \\
& + \nu \int_0^T (\nabla u(t), \nabla v(t)) \varphi(t) dt + \int_0^T (u(t) \nabla u(t), v(t)) \varphi(t) dt
\end{aligned}$$

$$= (u_0, v) \varphi(0) + \mu (\nabla u_0, \nabla v) \varphi(0) + \int_0^T \varphi(t) (f, v) dt \quad (3.54)$$

yazılabilir.

Eş. 3.49 de $\varphi = \phi \in C_0^\infty$ yazılırsa;

$$\frac{d}{dt} \{ (u, v) + \mu (\nabla u, \nabla v) \} + \nu (\nabla u, \nabla v) + (u \nabla u, v) = (f, v), \quad \forall v \in V \quad (3.55)$$

eşitliği $(0, T)$ üzerinde genelleştirilmiş anlamda sağlanır. Böylece Teorem 3.1 in ispatı tamamlanmış olur.

3.3. Kelvin-Voigt Denkleminin Zayıf Çözümlerinin Tekliği ve Sürekliliği Üzerine

Bu bölümde Kelvin-Voigt denkleminin zayıf çözümünün tekliği ve sürekliliği incelenecektir. Teklik teoremini ifade etmeden önce incelemelerimizin temelini oluşturan aşağıdaki Lemma ifade edilecektir.

3.6. Lemma

V, H, V' Hilbert uzaylarını ele alalım. V' uzayı V uzayının, H' de H uzayının dual uzayı olmak üzere $V \subset H \equiv H' \subset V'$ olduğundan $u \in L^2(0, T, V)$ ve u 'nun türevi u' olmak üzere $u' \in L^2(0, T, V')$ ise bu durumda u fonksiyonu $[0, T] \rightarrow H$ 'ya hemen hemen her yerde sürekli bir fonksiyondur ve

$$\frac{d}{dt} (u, u) = \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2 \langle u', u \rangle$$

eşitliği $[0, T]$ üzerinde genelleştirilmiş anlamda sağlanır [11].

3.3. Teorem

İki boyutlu uzayda Eş. 3.4 – Eş. 3.7 probleminin bir tek u çözümü vardır. Bununla birlikte u , $[0, T]$ den H ya hemen hemen her yerde sürekli bir fonksiyona eşittir

İspat

Eş. 3.37'den $u \in L^2(0, T; V)$ ve Eş. 3.44'den $u'_m(t) \in L^2(0, T; V')$ olduğundan. Lemma 3.6 dan faydalananarak u 'nın $[0, T]$ den H ya hemen hemen her yerde sürekli bir fonksiyon olduğu söylenebilir. Yani; $u \in C(0, T; H)$ yazılabilir.

Eş. 3.4 - Eş. 3.7 probleminde çözümün tekliğini inceleyelim. Kabul edelimki Eş. 3.4 -Eş. 3.7 probleminin iki çözümü u ve v olsun. Buna göre;

$$\begin{aligned} u_t - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u - \mu \Delta u_t + \nabla p &= f \\ v_t - \nu \Delta v + v \cdot \nabla v - \mu \Delta v_t + \nabla p &= f \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu denklemler taraf tarafa çıkarılır ve $w = u - v$ alınırsa;

$$w_t + (u \cdot \nabla u - v \cdot \nabla v) - \mu \Delta w_t - \nu \Delta w = 0 \quad (3.56)$$

elde edilir. Eş. 3.56 $w(t)$ ile çarpılırsa;

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|w\|^2 + \mu \|\nabla w\|^2) + \nu \|\nabla w\|^2 + b(u, u, w) + b(v, v, w) = 0 \quad (3.57)$$

bulunur. Denklemin sağ tarafındaki terimler incelenirse;

$$b(w, v, w) = \int w \cdot \nabla v \cdot w = \int (u - v) \cdot \nabla v (u - v)$$

$$b(w, v, w) = \int u \cdot \nabla v (u - v) - \int v \cdot \nabla v (u - v)$$

$$b(w, v, w) = b(u, v, w) - b(v, v, w)$$

eşitliğin sağ tarafına $b(u, u, w)$ terimi eklenip çıkarılırsa

$$b(w, v, w) = b(u, v, w) - b(v, v, w) - b(u, u, w) + b(u, u, w)$$

bulunur. Üç lineer formun özelliğinden

$$b(w, v, w) = -b(v, v, w) + b(u, u, w)$$

yazılır. Böylece Eş. 3.44'den

$$\frac{d}{dt} \left(\|w\|^2 + \mu \|\nabla w\|^2 \right) + 2\nu \|\nabla w\|^2 \leq 2|b(w, v, w)|$$

elde edilir. Lemma 3.3'den

$$\frac{d}{dt} \left(\|w\|^2 + \mu \|\nabla w\|^2 \right) + 2\nu \|\nabla w\|^2 \leq 2^{3/2} \|w\| \|\nabla w\| \|\nabla v\|$$

Young eşitsizliği kullanılırsa;

$$\frac{d}{dt} \left(\|w\|^2 + \mu \|\nabla w\|^2 \right) + 2\nu \|\nabla w\|^2 \leq 2\varepsilon \|w\|^2 \|\nabla v\|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|\nabla w\|^2$$

Eş. 3.23 ' den $\|\nabla v\|^2 \leq \frac{M}{h}$ olduğundan yukarıdaki denklem

$$\frac{d}{dt} \left(\|w\|^2 + \mu \|\nabla w\|^2 \right) \leq 2\varepsilon \frac{M}{\mu} \|w\|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|\nabla w\|^2 \quad (3.58)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\alpha = \max \left\{ \frac{2\varepsilon M}{\mu}, \frac{1}{\mu\varepsilon} \right\}$ alırsak;

$$\frac{d}{dt} \left(\|w\|^2 + \mu \|\nabla w\|^2 \right) \leq \alpha \left(\|w\|^2 + \mu \|\nabla w\|^2 \right) \quad (3.59)$$

elde edilir. Böylece Eş. 3.46

$$\int_0^t \frac{d}{dt} \left(e^{-\alpha t} \left(\|w\|^2 + \mu \|\nabla w\|^2 \right) \right) \leq 0$$

biçiminde yazılır. Daha sonra bu eşitsizlikten 0 dan t ye integral alınırsa

$$0 \leq e^{-\alpha t} \left(\|w(t)\|^2 + \mu \|\nabla w(t)\|^2 \right) \leq e^0 \left(\|w(0)\|^2 + \mu \|\nabla w(0)\|^2 \right) = 0$$

bulunur. Yani, $\forall t \in [0, T]$ için $\|w\|^2 \leq 0$ dır. Böylece

$$u = v \quad (3.60)$$

bulunur. İki boyutlu uzayda Eş. 3.4 – Eş. 3.7 probleminin çözümü tektir.

4.VİSKOZ AKIŞKANLARIN GENELLEŞTİRİLMİŞ BİR DENKLEMİ

Bu kısım Karazeeva'nın viskoz akışkanlarla ilgili makalesi incelenerek oluşturulmuştur [5].

Sıkıştırılmaz akışkanların hareketleri genel olarak

$$\frac{\partial}{\partial t} v + v_k \frac{\partial v}{\partial x_k} + grad p = div \sigma + f, \quad div v = 0 \quad (4.1)$$

şeklindeki denklem sistemi ile tanımlanır. Burada, $\sigma = (\sigma_{ik})$ stres tensörünün sapmasıdır öyleki $tr \sigma = 0$ ($tr \sigma$ ile tensörün izi ifade edilmektedir.) dır. Bir

akışkanın türü, deformasyon hızları tensörü $D(v) = \frac{\nabla v + \nabla v^T}{2}$ ile σ arasındaki

bağıntıyı açıklayan denklemler yardımıyla belirlenir. Bu denklemlere hal denklemi denir. Hal denklemlerinin en basit örneği bir ideal sıkıştırılmaz akışkanı tanımlayan

$$\sigma = 0$$

denklemdir. Eğer, hal denklemi

$$\sigma = 2\mu D$$

şeklinde ise bu durumda Newtonian akışkanlar söz konusu olur ve bu akışkanların hareketleri Navier –Stokes denklemleri yardımıyla ifade edilir.

Bu bölümde,

$$\sigma = 2\mu D + KD$$

şeklinde olan hal denklem tipini ele alacağız. Burada K , ileriki kısımlarda tanımlayacağımız sürekli, pozitif tanımlı ve lineer bir operatördür. K nın pozitif tanımlılığı fiziksel olarak anlamlıdır çünkü enerji dağılımının pozitif olmasına karşılık gelen kuadratik form

$$-(div\sigma, v)_{2,\Omega} = \int_{\Omega} \sigma : \nabla v = \int_{\Omega} \sigma : D = \int_{\Omega} KD : D \geq 0$$

şeklinde tanımlıdır. Burada iz, ‘bir matrisin izi’ anlamında kullanılmak üzere,

$$KD : D = \text{iz} (KD) (D)^T$$

olarak ifade edilmektedir.

4.1.Viskoz Akışkanların Genelleştirilmiş Bir Denkleminin Çözümlerinin Varlığı ve Sürekliliği Üzerine

Bu bölümde, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $Q_T = \Omega \times [0, T]$ olmak üzere

$$v_t + v \cdot \nabla v - \mu \Delta v - \text{div}(KD) + \text{grad } p = f \quad ; \quad Q_T \text{ 'de} \quad (4.2)$$

$$\nabla \cdot v = 0 \quad ; \quad Q_T \text{ 'de} \quad (4.3)$$

$$v|_{\partial Q_T} = 0 \quad ; \quad \partial Q_T \text{ 'de} \quad (4.4)$$

$$v(x, 0) = v_0(x) \quad ; \quad \Omega \text{ 'da} \quad (4.5)$$

problemi incelenmiştir. Burada

$$v = (v_1, v_2) : Q_T \rightarrow \mathbb{R}^2$$

akışın hızını,

$$p: Q_T \rightarrow \mathfrak{R}$$

akışın basıncını gösteren bilinmeyen fonksiyonlardır. Öncelikle Eş. 4.2 – Eş. 4.5 ile verilen problemin varlık sonuçları incelenecektir. Burada $f, f: Q \rightarrow \mathfrak{R}^2$ şeklinde tanımlıdır. $K: L^2(Q_T) \rightarrow L^2(Q_T)$ operatörü ise sürekli, sınırlı ve lineer olsun ayrıca aşağıdaki özellikleri sağlasın.

(1) K , sınırlıdır.

$$\|KD\|_{2,Q_T} \leq C_k \|D\|_{2,Q_T} \quad (4.6)$$

(2) K , pozitif tanımlıdır.

$$\int_{Q_T} ((KD): D) \geq 0 \quad (4.7)$$

(3) $(\partial/\partial t) \circ K$ operatörü, $L^2(Q_T)$ de sınırlıdır, yani

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t}(KD) \right\|_{2,Q_T} \leq C_1 \|D\|_{2,Q_T} \quad (4.8)$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi Eş. 4.2 - Eş. 4.5 probleminin varlığı ile ilgili aşağıdaki teoremi ifade edelim.

4.1. Teorem

$\Omega, \mathfrak{R}^2$ de sınırlı bir bölge, $f, f_t \in L^{2,1}(Q_T)$ ve $v_0 \in W^{2,2}(\Omega) \cap H(\Omega)$ olsun.

$0 < T \leq \infty$ olmak üzere Eş. 4.2.- Eş. 4.5 probleminin bir çözümü vardır öyleki;

$$v \in L^\infty(0, T, H) \cap L^2(0, T, V) \text{ ve } v_t \in L^2(0, T, V')$$

sağlanır [5]. Burada $L^{2,1}(Q_T)$ deki norm,

$$\|v\|_{2,1} = \int_0^T \|v\|_{2,\Omega} dt$$

olarak tanımlıdır.

İspat

İspat için Faedo – Galerkin metodu kullanılacaktır.

$\{\varphi_r\}$, $k = 1, 2, \dots$, $W^{2,2} \cap V(\Omega)$ uzayı üzerinde bir baz olsun. Böylece her $k \in N$ için

$v_k(x, t) = \sum_{i=1}^k c_{ki}(t) \varphi_i(x)$ yaklaşık çözümü tanımlanır ve $v_k(x, t)$ Eş. 4.2 – Eş. 4.5 in

varyasyonel formunda yerine yazılırsa;

$$(v_k', \varphi_r) + \mu(\nabla v_k, \nabla \varphi_r) + (v_k \cdot \nabla v_k, \varphi_r) + (KD(v_k), \nabla \varphi_r) = (f, \varphi_r) \quad (4.9)$$

bulunur. Buradan da;

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k (\varphi_i, \varphi_r) c_{ki}' + \mu \sum_{i=1}^k (\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_r) c_{ki} + \sum_{i,s=1}^k (\varphi_i \nabla \varphi_s, \varphi_r) c_{ki} c_{ks} \\ & + \sum_{i=1}^k (K(\nabla \varphi_i c_{ki}), \nabla \varphi_r) = (f, \varphi_r) \end{aligned}$$

$i = 1, \dots, k$ denklem sistemi elde edilir. $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ lar lineer bağımsızdır.

(φ_i, φ_r) ($1 \leq i, r \leq k$) elemanlarının oluşturduğu matris singüler olmayan matristir,

dolayısıyla tersi vardır. Bu matrisin tersi ile yukarıdaki sistem çarpılırsa;

$$\frac{dc_{ki}}{dt} + \mu \sum_{i=1}^k w_{ir} c_{ki} + \sum_{i,s=1}^k w_{isr} c_{ki} c_{ks} + \sum_{i=1}^k (KD, \nabla \varphi_r) = f_r \quad (4.10)$$

sabit katsayılı diferansiyel denklemi elde edilir.

v_{0k} , $W^{2,2}(\Omega) \cap V(\Omega)$ da v_0 in $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ tarafından gerilen uzayda dik izdüşümüdür.

Böylece Eş. 4.14 deki sistem

$$c_{ki}(0) = c_{0r} = (u_0, \varphi_r) \quad (4.11)$$

başlangıç şartıyla birlikte düşünülür. Burada,

$$\begin{aligned} f_r &= (f, \varphi_r) \\ w_{ir} &= (\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_r) \\ w_{isr} &= (\varphi_i \cdot \nabla \varphi_s, \varphi_r) \end{aligned}$$

olarak alınmıştır. $f_r \in L^2(0, T)$ ve daha sonra elde edileceği üzere c_{ki} ler sınırlı w_{ir} ler reel sabitler olduğundan Picard Lindelof teoreminden dolayı Eş. 4.10 - Eş. 4.11 deki sistemin bir tek $c_{ki} \in W^{1,2}(0, T_k)$ çözümü vardır öyleki $T_k \leq T$ dir.

Eş. 4.10 daki denklem c_{ki} lerle çarpılıp $i = 1, \dots, k$ ya toplam alınırsa;

$$(v'_k, v_k) + \mu (\nabla v_k, \nabla v_k) + (v_k \cdot \nabla v_k, v_k) - (\operatorname{div}(KD), v_k) = (f, v_k) \quad (4.12)$$

denklemini elde edilir. Burada,

$$(v'_k, v_k) = \left(\frac{\partial v_k}{\partial t}, v_k \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (v_k, v_k) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_k\|^2 \text{ ve } (v_k \cdot \nabla v_k, v_k) = 0$$

olduğu dikkate alınır ve Eş. 4.12 deki denklem düzenlenirse;

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_k\|_{2,\Omega}^2 + \mu \|\nabla v_k\|_{2,\Omega}^2 + \int_{\Omega} ((KD):D) = \int_{\Omega} f v_k \quad (4.13)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemde 0 dan t ye integral alınır;

$$\frac{1}{2} \left(\|v_k(t)\|_{2,\Omega}^2 - \|v_k(0)\|_{2,\Omega}^2 \right) + \mu \int_0^t \|\nabla v_k\|_{2,\Omega}^2 + \int_{Q_T} ((KD):D) = \int_{Q_T} f v_k \quad (4.14)$$

bulunur. Eş. 4.7 den $\int_{Q_T} ((KD):D)$ teriminin pozitif tanımlı olduğu göz önüne alınır;

$$\begin{aligned} \|v_k\|_{2,\Omega}^2 &\leq \|v_k(0)\|_{2,\Omega}^2 + 2 \int_0^t \left| \int_{\Omega} f v \right| \\ &\leq \|v_k(0)\|_{2,\Omega}^2 + 2 \int_0^t \|f\|_{2,\Omega} \|v_k\|_{2,\Omega} \\ &\leq \|v_k(0)\|_{2,\Omega}^2 + 2 \sup_t \|v_k\|_{2,\Omega} \int_0^t \|f\|_{2,\Omega} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $L^{2,\infty}$ uzayındaki normun

$$\|v\|_{2,\infty} = \sup \|v\|_{2,\Omega}$$

şeklinde tanımlı olduğu dikkate alınır

$$\|v_k\|_{2,\Omega}^2 \leq \|v_k(0)\|_{2,\Omega}^2 + 2 \|v_k\|_{2,\infty} \int_0^t \|f\|_{2,\Omega} \quad (4.15)$$

elde edilir. Eş. 4.19 un sol tarafını maksimize edersek;

$$\|v_k\|_{2,\infty}^2 \leq \|v_k(0)\|_{2,\Omega}^2 + 2 \|v_k\|_{2,\infty} \int_0^t \|f\|_{2,\Omega} \quad (4.16)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik çözülerek v_k nın normu için aşağıdaki hesaplamaya ulaşılır.

$$\|v_k\|_{2,\infty}^2 \leq \int_0^t \|f\|_{2,\Omega} + \sqrt{\|v_k(0)\|_{2,\Omega}^2 + \left(\int_0^t \|f\|_{2,\Omega}\right)^2} := C_2(t) \quad (4.17)$$

Eş. 4.14 e geri dönülürse;

$$\frac{1}{2} \left(\|v_k\|_{2,\Omega}^2 - \|v_k(0)\|_{2,\Omega}^2 \right) + \mu \int_0^t \|\nabla v_k\|_{2,\Omega}^2 \leq \int_0^t \left| \int_{\Omega} f v_k \right| \quad (4.18)$$

yazılabilir. Böylece;

$$\begin{aligned} \|v_k(t)\|_{2,\Omega}^2 + 2\mu \int_0^t \|\nabla v_k\|_{2,\Omega}^2 &\leq 2 \int_0^t |(f, v_k)_{\Omega}| + \|v_k(0)\|_{2,\Omega}^2 \\ &\leq \|v_k(0)\|_{2,\Omega}^2 + 2 \int_0^t \|f\|_{2,\Omega} \|v_k\|_{2,\Omega} \\ &\leq \|v_k(0)\|_{2,\Omega}^2 + 2 \sup_t \|v_k\|_{2,\Omega} \int_0^t \|f\|_{2,\Omega} \end{aligned}$$

ve Eş. 4.17 den faydalanılırsa;

$$\begin{aligned} \|v_k(t)\|_{2,\Omega}^2 + 2\mu \int_0^t \|\nabla v_k\|_{2,\Omega}^2 &\leq \|v_k(0)\|_{2,\Omega}^2 + 2 \|v_k\|_{2,\infty} \int_0^t \|f\|_{2,\Omega} \\ &\leq \|v_k(0)\|_{2,\Omega}^2 + 2 \|f\|_{2,1} \left(\|f\|_{2,1} + \sqrt{\|v_k(0)\|_{2,\Omega}^2 + \left(\int_0^t \|f\|_{2,\Omega}\right)^2} \right) \\ &:= C_3(t) \end{aligned} \quad (4.19)$$

bulunur. Buradan

$$\|v_k\|^2 \leq C_3(t) \quad (4.20)$$

elde edilir.

$$\|v_k(x, t)\|^2 = \sum_{i=1}^k c_{ki}^2(t) \leq C_3(t)$$

olacağından $\forall i=1, \dots, k$ için $c_{ki}^2(t) \leq c_{k1}^2(t) + \dots + c_{kk}^2(t) \leq C_3(t)$ yani $|c_{ki}| \leq (C_3(t))^{1/2}$ olur. E.ş 4.10 – E.ş 4.11 denklemlerine geri dönülürse $\forall k \in N$ için $T_K = T$ dir. Şimdi $k \rightarrow \infty$ için $\{v_k\}$ dizisinin yakınsaklığını incelenecektir. $r \in N$ sabit bir sayı olmak üzere

$$G_k^{(r)}(t) = (v_k(t), \varphi_r)$$

şeklindeki fonksiyonlar dizisini ele alalım. $\{G_k^{(r)}(t)\}$ fonsiyonlar dizisinin düzgün sınırlı ve düzgün sürekli olduğu gösterilecektir. Eş. 4.20 den $\{G_k^{(r)}(t)\}$ dizisinin düzgün sınırlı olduğu aşıkardır.

Eş. 4.9 daki denklemin s den t ye integrali alınırsa;

$$\int_s^t (v_k', \varphi_r) dt = -\mu \int_s^t (\nabla v_k, \nabla \varphi_r) dt - \int_s^t (v_k \nabla v_k, \varphi_r) dt - \int_s^t (KD, \nabla \varphi_r) dt + \int_s^t (f, \varphi_r) dt$$

eşitliğinden;

$$\begin{aligned} |(v_k(t), \varphi_r) - (v_k(s), \varphi_r)| &= \left| -\mu \int_s^t (\nabla v_k, \nabla \varphi_r) dt - \int_s^t (v_k \nabla v_k, \varphi_r) dt \right. \\ &\quad \left. - \int_s^t (KD, \nabla \varphi_r) dt + \int_s^t (f, \varphi_r) dt \right| \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}
\left| (v_k(t), \varphi_r) - (v_k(s), \varphi_r) \right| &\leq \mu \int_s^t \|\nabla v_k\| \cdot \|\nabla \varphi_r\| dt \\
&+ \int_s^t \|v_k\| \|\nabla v_k\| \cdot \max_{x \in \Omega} |\varphi_r(x)| dt \\
&+ \int_s^t \|KD\| \|\nabla \varphi_r\| dt + \int_s^t \|f\| \cdot \|\varphi_r\| dt
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Burada;

$$\|\nabla \varphi_r\| = M_1 \quad ; \quad \max_{x \in \Omega} |\varphi_r(x)| = M_2 \tag{4.22}$$

olarak gösterilir, Poincare eşitsizliği ve Eş. 4.20 göz önüne alınır;

$$\begin{aligned}
\left| (v_k(t), \varphi_r) - (v_k(s), \varphi_r) \right| &\leq \mu M_1 \int_s^t \|\nabla v_k\| dt \\
&+ M_2 C_3^{1/2} \int_s^t \|\nabla v_k\| dt + M_1 \int_s^t \|KD\| dt + M_1 \int_s^t \|f\| dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
\left| (v_k(t), \varphi_r) - (v_k(s), \varphi_r) \right| &\leq \mu M_1 \sqrt{t-s} \left(\int_s^t \|\nabla v_k\|^2 dt \right)^{1/2} \\
&+ M_2 C_3^{1/2} \sqrt{t-s} \left(\int_s^t \|\nabla v_k\|^2 dt \right)^{1/2} + M_1 \sqrt{t-s} \left(\int_s^t \|KD\|^2 dt \right)^{1/2} \\
&+ M_1 \sqrt{t-s} \left(\int_s^t \|f\|^2 dt \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitsizlik düzenlenirse;

$$\left| (v_k(t), \varphi_r) - (v_k(s), \varphi_r) \right| \leq (\mu M_1 C_3^{1/2} + M_2 C_3 + M_1 C_3^{1/2} C_k + C_3^{1/2}) \sqrt{t-s}$$

elde edilir. Böylece,

$$t \rightarrow s \text{ iken } \left| (v_k(t), \varphi_r) - (v_k(s), \varphi_r) \right| \rightarrow 0 \quad (4.23)$$

Buradan $\{G_k^{(r)}(t)\}$ nin düzgün sürekli olduğu görülür. Ascoli-Arzela teoreminden $\{G_k^{(r)}(t)\}_{k \in N}$ dizisinden yakınsak bir alt dizi seçebiliriz. Bu alt diziyi Cantor'un diogonalleştirme metodundan $\{G_k^{(r)}(t)\}_{k \in N}$; bu dizi düzgün olarak sürekli bir $G^{(r)}(t)$ fonksiyonuna yakınsaktır. H uzayının zayıf kompaktlığından

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (v_k(t) - v(t), \varphi_r) = 0$$

düzgün olarak $t \in [0, T]$ ve $\forall r \in N$ olacak şekilde $v(t) \in H$ vardır. Şimdi $v_k(t)$ nin $v(t)$ ye L^2 de zayıf yakınsak olduğu başka bir deyişle;

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (v_k(t) - v(t), w) = 0 ; t \in [0, T] ; \forall w \in L^2(\Omega)$$

olduğu gösterilecektir. Helmholtz ayrışımından sadece $w \in H$ için yukarıdaki ifadeyi göstermek yeterlidir. $v_k - v \in H$ olduğundan $w \in H$ olursa $(v_k - v, w) = 0$ olur.

$$w = \sum_{r=1}^{\infty} w_r \varphi_r = \sum_{r=1}^N w_r \varphi_r + w^{(N)} \quad (4.24)$$

olarak yazılır.

$$\begin{aligned}
\left| (v_k(t) - v(t), w) \right| &\leq \sum_{r=1}^N \left| (v_k(t) - v(t), w_r \varphi_r) \right| + \left| (v_k(t) - v(t), w^{(N)}) \right| \\
&\leq \sum_{r=1}^N \|w\| \left| (v_k(t) - v(t), \varphi_r) \right| + 2C_3^{1/2} \|w^{(N)}\|
\end{aligned}$$

$v_k(t), v(t)$ ye zayıf yakınsak olduğundan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |(v_k(t) - v(t), \varphi_r)| = 0 \text{ ve } \forall \varepsilon > 0 \exists N > k \in \mathbb{N} \text{ için } \|w^{(N)}\| < \varepsilon$$

olur. Buradan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (v_k(t) - v(t), w) = 0 \quad (4.25)$$

elde edilir.

Eş. 4.20 den $\text{ess sup } \|v_k\|^2 \leq C_3(t)$ olduğundan;

$$v_k \in L^\infty(0, T; H) \quad (4.26)$$

yazılabilir. Bu bize $k \rightarrow \infty$ iken $L^\infty(0, T; H)$ da bir u elemanın varlığını gösterir.

Eş. 4.20 den $\{v_k\}$ dizisi $L^\infty(0, T; H)$ da sınırlıdır ve $L^\infty(0, T; H)$ uzayı zayıf kompakttır. Buna göre v_k dizisi $L^\infty(0, T; H)$ da zayıf yıldız topolojisine göre v ye yakınsar. Başka bir deyişle;

$$k \rightarrow \infty \text{ iken } \int_0^T (v_k - v, w) ds \rightarrow 0, \quad \forall w \in L^1(0, T; H) \text{ dır.} \quad (4.27)$$

$$\text{Eş. 4.19 dan } \int_0^T \|\nabla v_k\|_{2,\Omega}^2 \leq C_3(t) \text{ olduğundan;}$$

$$v_k \in L^2(0, T; V) \quad (4.28)$$

yazılabilir. v_k , $L^2(0, T; V)$ da zayıf yıldız topolojisine göre v^* a zayıf yakınsar. Eş. 4.22'ye benzer şekilde;

$$\int_0^T (v_k - v^*, w) ds \rightarrow 0, \forall w \in L^2(0, T; V') \quad (4.29)$$

yazılabilir. $\{v_k\}$ dizisinin limitinin tekliğinden

$$v_k = v \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \quad (4.30)$$

yazılır.

Eş. 4.25, Eş. 4.27, Eş. 4.29 dikkate alınır ve Friedrichs eşitsizliği kullanılırsa $\{v_k\}$ dizisinin v ye güçlü yakınsadığı gösterilebilir.

4.1. Lemma (Friedrichs Eşitsizliği)

C , $\mathbb{R}^n$ de bir küp olsun. Bu durumda herhangi $\eta > 0$ için $w_i \in L^\infty(C)$, $i = 1, \dots, k$ olmak üzere

$$\int_0^T \|w(t)\|_{2,C}^2 dt \leq \sum_{i=1}^k \int_0^T (w(t), w_i)_C^2 dt + \eta \int_0^T \|\nabla w(t)\|_{2,C}^2 dt \quad (4.31)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $K(\eta, C) \in \mathbb{N}$ fonksiyonu vardır.

Eş. 4.31 de $w = v_k - v$ alınırsa

$$\int_0^T \|v_k - v\|_{2,C}^2 dt \leq \sum_{i=1}^k \int_0^T (v_k - v(t), w_i)_C^2 dt + \eta \int_0^T \|\nabla v_k - \nabla v\|_{2,C}^2 dt$$

elde edilir. $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T (v_k - v(t), \varphi_r) = 0$ ve Eş. 4.23 den

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \|v_k - v\|_{2,C}^2 dt = 0 \quad (4.32)$$

elde edilir. Dolayısıyla; $v_k \rightarrow v$ ye güçlü yakınsar. Böylece Lemma 3.5 den

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T [(v_k, \nabla v_k, \varphi_r) - (v, \nabla v, \varphi_r)] dt \rightarrow 0 \quad (4.33)$$

olduğu açıktır.

Şimdi Eş. 4.9 ve Eş. 4.11 denklemlerinden limite geçmek için $[0, T]$ üzerinde sürekli türetilen $\psi(T) = 0$ olacak şekilde bir ψ fonksiyonu düşünelim. Eş. 4.9 $\psi(t)$ ile çarpılır ve t ye göre integrali alınır;

$$\begin{aligned} & \int_0^T (v_k', \varphi_r) \psi(t) dt + \mu \int_0^T (\nabla v_k, \nabla \varphi_r) \psi(t) dt + \int_0^T (v_k, \nabla v_k, \varphi_r) \psi(t) dt \\ & + \int_0^T (K \nabla v_k, \nabla \varphi_r) \psi(t) dt = \int_0^T (f, \varphi_r) \psi(t) dt \end{aligned} \quad (4.34)$$

bulunur. Eş. 4.34'ün ilk teriminde kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$\int_0^T (v_k', \varphi_r) \psi(t) dt = -(v_k(0), \varphi_r) \psi(0) - \int_0^T (v_k(t), \varphi_r) \psi'(t) dt \quad (4.35)$$

elde edilir. Eş. 4.35, Eş. 4.34 de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
& -\int_0^T (v_k(t), \varphi_r) \psi'(t) dt + \mu \int_0^T (\nabla v_k, \nabla \varphi_r) \psi(t) dt + \int_0^T (v_k \cdot \nabla v_k, \varphi_r) \psi(t) dt \\
& + \int_0^T (K \nabla v_k, \nabla \varphi_r) \psi(t) dt = -(v_{0k}, \varphi_r) \psi(0) + \int_0^T (f, \varphi_r) \psi(t) dt
\end{aligned} \tag{4.36}$$

yazılabilir. Ayrıca, $v_k \rightarrow v$ ye ve $\nabla v_k \rightarrow \nabla v$ ye zayıf yakınsadığından

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T (v_k(t) - v(t), \varphi_r) = 0 \tag{4.37}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T (\nabla v_k(s) - \nabla v(s), \varphi_r) ds = 0 \tag{4.38}$$

yazılabilir. Burada $k \rightarrow \infty$ için Eş. 4.36 da Eş. 4.33, Eş. 4.37 ve Eş. 4.38 eşitlikleri kullanılarak limite geçilebilir. Eşitliğin sol tarafındaki integrallerde $m \rightarrow \infty$ iken limit alınır ve $v_{0k} \rightarrow v_0$ a güçlü yakınsak olduğu göz önünde bulundurulursa;

$$\begin{aligned}
& -\int_0^T (v(t), \varphi_r) \psi'(t) dt + \mu \int_0^T (\nabla v, \nabla \varphi_r) \psi(t) dt + \int_0^T (v \cdot \nabla v, \varphi_r) \psi(t) dt \\
& + \int_0^T (K \nabla v, \nabla \varphi_r) \psi(t) dt = -(v_0, \varphi_r) \psi(0) + \int_0^T (f, \varphi_r) \psi(t) dt
\end{aligned} \tag{4.39}$$

elde edilir. Bu eşitlik her r için sağlandığından φ_r lerin sonlu bir lineer kombinasyonu olan her bir w için de sağlanır. Yani,

$$\begin{aligned}
& -\int_0^T (v(t), w) \psi'(t) dt + \mu \int_0^T (\nabla v, \nabla w) \psi(t) dt + \int_0^T (v \cdot \nabla v, w) \psi(t) dt \\
& + \int_0^T (K \nabla v, \nabla w) \psi(t) dt = -(v_0, w) \psi(0) + \int_0^T (f, w) \psi(t) dt
\end{aligned} \tag{4.40}$$

yazılabilir. Eş. 4.44 de $\psi = \phi \in C_0^\infty$ yazılırsa;

$$\frac{d}{dt}(v, w) + \mu(\nabla v, \nabla w) + (v \cdot \nabla v, w) - ((KD), \nabla w) = (f, w) \quad (4.41)$$

denklemini genelleştirilmiş anlamda sağlanır. Son olarak; v 'nin Eş. 4.5'i sağladığı gösterilecektir. Bunun için öncelikle Eş. 4.41'i ψ ile çarpıp, integralini alalım ve oluşan denklemin ilk terimine kısmi integrasyon uygulayalım. Bu durumda;

$$\begin{aligned} & -\int_0^T (v(t), w) \psi'(t) dt + \mu \int_0^T (\nabla v, \nabla w) \psi(t) dt + \int_0^T (v \cdot \nabla v, w) \psi(t) dt \\ & + \int_0^T (K \nabla v, \nabla w) \psi(t) dt = -(v(0), w) \psi(0) + \int_0^T (f, w) \psi(t) dt \end{aligned} \quad (4.42)$$

elde edilir. Eş. 4.42, Eş. 4.40 ile karşılaştırılırsa;

$$(v(0) - v_0, u) \psi(0) = 0 \quad (4.43)$$

elde edilir. Burada özel olarak $\psi(0) = 1$ seçebiliriz. Böylece,

$$(v(0) - v_0, u) = 0, \forall u \in V \quad (4.44)$$

bulunur ve Eş. 4.5 sağlanır. Şimdi $v_t \in L^\infty(0, T; H)$ olduğu gösterilecektir. Eş. 4.9'un t 'ye göre türevi alınır ve yaklaşık çözüm dikkate alınarak denklem düzenlenirse;

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k (\varphi_i, \varphi_r) c_{ki}'(t) + \mu \sum_{i=1}^k (\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_r) c_{ki}'(t) + \sum_{i,s=1}^k (\varphi_i \nabla \varphi_s, \nabla \varphi_r) c_{ki}' c_{ks} + \sum_{i,s=1}^k (\varphi_i \nabla \varphi_s, \nabla \varphi_r) c_{ki}' c_{ks}' \\ & + \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial}{\partial t} K(\nabla \varphi_i c_{ki}), \nabla \varphi_r \right) = (f_t, \varphi_r) \end{aligned} \quad (4.45)$$

$i = 1, \dots, k$ denklem sistemi elde edilir. Eş. 4.45 de gerekli düzenlemeler yapılır ve sistem $(d/dt)c_{ki}$ lerle çarpılıp $i = 1, \dots, k$ ya toplam alınırsa;

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v'_k\|_{2,\Omega}^2 + \mu \|\nabla v'_k\|_{2,\Omega}^2 + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (KD) \nabla v'_k + b(v'_k, v_k, v'_k) = (f', v') \quad (4.46)$$

denklemini elde edilir. Burada Lemma 3.4 den;

$$|b(v'_k, v, v'_k)| \leq 2^{1/2} \|v'_k\|_{2,\Omega} \|\nabla v\|_{2,\Omega} \|\nabla v'_k\|_{2,\Omega} \quad (4.47)$$

yazılabilir. Eş. 4.47 de Young eşitsizliği uygulanırsa,

$$|b(v'_k, v, v'_k)| \leq 2^{1/2} \left(\frac{1}{2} \varepsilon^2 \|\nabla v'_k\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2} \|v'_k\|_{2,\Omega}^2 \|\nabla v\|_{2,\Omega}^2 \right) \quad (4.48)$$

bulunur. Eş. 4.48 de $\frac{1}{2} \varepsilon^2 = K_2$ ve $\frac{1}{2\varepsilon^2} = C_{K_2}$ seçelim. O halde;

$$|b(v'_k, v, v'_k)| \leq 2^{1/2} \left(K_2 \|\nabla v'_k\|_{2,\Omega}^2 + C_{K_2} \|v'_k\|_{2,\Omega}^2 \|\nabla v\|_{2,\Omega}^2 \right) \quad (4.49)$$

yazılabilir. Buradan $C_{K_2} = (1/4) K_2^{-1} \ni K_2 > 0$ olduğu açıktır. Young eşitsizliğini ve Schwarz eşitsizliğini kullanarak Eş. 4.46'nın diğer terimlerini de inceleyecek olursak;

$$\begin{aligned} |(f', v'_k)| &\leq \|f'\|_{2,\Omega} \|v'_k\|_{2,\Omega} \\ &\leq \frac{1}{2} \|f'\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|f'\|_{2,\Omega}^2 \|v'_k\|_{2,\Omega}^2 \end{aligned} \quad (4.50)$$

ve

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (KD) \nabla v_k' \right| &\leq \left\| \frac{\partial}{\partial t} KD \right\|_{2,\Omega} \left\| \nabla v_k' \right\|_{2,\Omega} \\
&\leq K_1 \left\| \nabla v_k^2 \right\|_{2,\Omega}^2 + C_{K_1} \left\| \frac{\partial}{\partial t} KD \right\|_{2,\Omega}^2
\end{aligned} \tag{4.51}$$

öyle ki $C_{K_1} = (1/4) K_1^{-1}$ dir. Eğer $2^{1/2} K_2 = \mu/4$ ve $K_1 = \mu/4$ alırsak;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| v_k' \right\|_{2,\Omega}^2 + \mu \left\| \nabla v_k' \right\|_{2,\Omega}^2 &\leq \left(\frac{1}{2} \left\| f' \right\|_{2,\Omega} + \frac{1}{2} \left\| f' \right\|_{2,\Omega} \left\| v_k' \right\|_{2,\Omega}^2 \right) \\
&\quad + \left(\frac{\mu}{4} \left\| \nabla v_k' \right\|_{2,\Omega}^2 + \frac{2}{\mu} \left\| v_k' \right\|_{2,\Omega}^2 \left\| \nabla v \right\|_{2,\Omega}^2 \right) \\
&\quad + \left(\frac{\mu}{4} \left\| \nabla v_k^2 \right\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{\mu} \left\| \frac{\partial}{\partial t} KD \right\|_{2,\Omega}^2 \right)
\end{aligned} \tag{4.52}$$

elde edilir. Bu eşitsizliği düzenlersek;

$$\frac{d}{dt} \left\| v_k' \right\|_{2,\Omega}^2 \leq \left\| f' \right\|_{2,\Omega} + \left\| f' \right\|_{2,\Omega} \left\| v_k' \right\|_{2,\Omega}^2 + \frac{4}{\mu} \left\| v_k' \right\|_{2,\Omega}^2 \left\| \nabla v \right\|_{2,\Omega}^2 + \frac{2}{\mu} \left\| \frac{\partial}{\partial t} KD \right\|_{2,\Omega}^2 \tag{4.53}$$

bulunur. Gronwall lemmasından

$$\left\| v_k' \right\|_{2,\Omega}^2 \leq \exp \left(\int_0^t \left(\left\| f' \right\| + \frac{4}{\mu} \left\| \nabla v_k \right\|^2 \right) d\tau \right) \cdot \left(\left\| v_k' (0) \right\|_{2,\Omega}^2 + \int_0^t \left(\left\| f' \right\| + \frac{2}{\mu} \left\| \frac{\partial}{\partial t} KD \right\|_{2,\Omega}^2 \right) d\tau \right) \tag{4.54}$$

elde edilir. Burada Eş. 4.8 ve Eş. 4.23 den

$$\begin{aligned} \int_0^t \left\| \frac{\partial}{\partial t} KD \right\|_{2,\Omega}^2 &\leq C_1^2 \|D\|_{2,Q_T}^2 \\ &\leq C_1^2 \|\nabla v_k\|_{2,Q_T}^2 \end{aligned}$$

ve

$$2\mu \|\nabla v_k\|_{2,Q_T}^2 \leq C_3$$

olduğunu biliyoruz. Yukarıdaki eşitsizlikler dikkate alınarak;

$$\begin{aligned} \|v'_k\|_{2,\Omega}^2 &\leq \exp\left(\int_0^t \|f'\| + \frac{2}{\mu^2} C_3(t)\right) \cdot \left(\|v'_k(0)\|_{2,\Omega}^2 + \int_0^t \|f'\| + \frac{1}{\mu} C_1^2 \frac{C_3}{2\mu}\right) \\ &\leq C_4(t) \end{aligned} \tag{4.55}$$

elde edilir. Buradan $v'_k \in L^\infty(0, T, H)$ yazılabilir. Diğer yandan, Eş. 4.52 de 0 dan t ye integral alınırsa;

$$\begin{aligned} \|v'_k(t)\|_{2,\Omega}^2 + \mu \int_0^t \|\nabla v'_k\|_{2,\Omega}^2 &\leq \|v'_k(0)\|_{2,\Omega}^2 + \int_0^t \|f'\|_{2,\Omega} + \left(\int_0^t \|f'\|_{2,\Omega}\right) \|v'_k\|_{2,\infty}^2 \\ &\quad + \frac{4}{\mu} \|v'_k\|_{2,\infty}^2 \int_0^t \|\nabla v_k\|_{2,\Omega}^2 + \frac{2}{\mu} \int_0^t \left\| \frac{\partial}{\partial t} KD \right\|_{2,\Omega}^2 + \mu \int_0^t \|\nabla v'_k\|_{2,\Omega}^2 \\ &\leq \|v'_k(0)\|_{2,\Omega}^2 + C_4(t) \int_0^t \|f'\|_{2,\Omega} + \int_0^t \|f'\|_{2,\Omega} \\ &\quad + \frac{2}{\mu^2} C_3(t) C_4(t) + \frac{1}{\mu^2} C_1^2 C_3 := C_5(t) \end{aligned} \tag{4.56}$$

olduğu görülür. Buradan

$$v_k' \in L^2(0, T; V') \quad (4.57)$$

yazılabilir. O halde, $L^2(0, T; V')$ da $dv_k/dt \xrightarrow{*} \dot{v}$ dir. Yani, $\forall \psi \in L^2(0, T; V)$ için

$$\int_0^T \frac{dv_k}{dt}(t) \psi(t) dt \rightarrow \int_0^T \dot{v}(t) \psi(t) dt \quad (4.58)$$

yazılabilir. Şimdi $\psi(t) \in C_0^\infty(0, T; V)$ alırsak Eş. 4.58 in sol tarafına kısmi integrasyon uygulayabiliriz. Böylece; v_k nin v ye zayıf yakınsaklığını ve

$\frac{d\psi}{dt} \in C_0^\infty(0, T; V) \subset L^2(0, T; V)$ bağıntısını kullanarak,

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{dv_k}{dt}(t) \psi(t) dt &= - \int_0^T v_k(t) \frac{d\psi}{dt} dt \\ &\rightarrow - \int_0^T v(t) \frac{d\psi}{dt}(t) dt \end{aligned} \quad (4.59)$$

yazabiliriz. Eş. 4.58 ve Eş. 4.59 dan $\psi(t) \in C_0^\infty(0, T; V)$ için

$$\int_0^T \dot{v}(t) \psi(t) dt = - \int_0^T v(t) \frac{d\psi}{dt}(t) dt \quad (4.60)$$

elde edilir. Dolayısıyla; $L^2(0, T; V')$ da

$$dv_k/dt \xrightarrow{*} dv/dt \quad (4.61)$$

yazılabilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi çözümün sürekliliğini ifade edebiliriz. $v \in L^2(0, T; V)$ ve $v' \in L^2(0, T; V')$ olduğundan Lemma 3.6'dan faydalanırsak u 'nun $[0, T]$ den H ya hemen hemen her yerde sürekli bir fonksiyon olduğu söylenebilir. Yani; $u \in C(0, T; H)$ yazılabilir.

KAYNAKLAR

1. Adams, R.A., "Sobolev Spaces", **Academic Press London**, 1-268 (1975).
2. Evans, L.C., "Partial Differential Equations", Graduate Studies in Mathematics Volume 19 (**American Mathematical Society**), United States of America, (1998).
3. Galdi, G.P., "Lectures in Mathematical Fluid Dynamics" Ed; G. P., Galdi, J.G. Heywood and R. Rannacher, **Birkhauser Verlag**, Boston-Berlin, 17-21 (2000).
4. Gilbarg, D., Trudinger, N.S., "Elliptic Partial Differential Equations of Second Order", **Springer Verlag**, Berlin, Heidelberg, (1983).
5. Karazeeva, N.A., "Solvability of Initial Boundary Value Problems For Equations Describing Motions of Linear Viscoelastic Fluids", **2005 Hindawi Publishing Corporation Journal of Applied Mathematics**, 59-80, (2005).
6. Ladyzhenskaya, O.A., "The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow", **Gordon and Breach Science Publishers Ltd.**, Newyork, 173-179 (1969).
7. Oskolkov, A.P., "The Uniqueness and Global Solvability of Boundary-Value Problems For The Equations of Motion For Aqueous Solutions of Polymers", **Zap. Nauchn. Sem. LOMI**, Vol. 38, pp. 98-136 (1973).
8. Rama Mohana Rao, M., " Ordinary Differential Equations ", **Edward Arnold Miller**, (1979).
9. Reddy, B.D., "Functional Analysis and Boundary-Value Problems:an Introductory Treatment", **John Wiley& Sons Inc.**, Newyork, NY 10158, (1986).
10. Robinson, J.C., "Infinite-Dimensional Dynamical Systems", **Cambridge University Press**, USA, (2001).
11. Temam, R., "Navier-Stokes Equations Theory and Numerical Analysis, Revised ed.", **North-Holland Publishing Company - Amsterdam**, New York, 1-13, 157-173, 247-264, 278-318 (1997).
12. Temam, R., "Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis 1st ed.", **SIAM**, Philadelphia 1-25 (1983).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı,adı : DOĞANAY, Belma
Uyruğu : T.C.
Doğum Tarihi ve Yeri : 25.08.1985
Medeni Hali : Bekar
E-mail : [bapple @hotmail.com](mailto:bapple@hotmail.com)
Tel : 0505-536 72 31

Eğitim Derecesi	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Orta Okul ve Lise	Ankara Atatürk Lisesi (Anadolu Lisesi)	2003
Lisans	Ankara Üniversitesi	2007

İş Tecrübesi

Yıl	Yer	Görev
2008-...	Türkiye Vakıflar Bankası T.A.O.	Uzman Yrd.

Yabancı Dil

İngilizce