



**İKİ DEĞİŞKENLİ HERMİTE POLİNOMLARINI İÇEREN SZÁSZ
OPERATÖRLERİNİN GENELLEMELERİ VE YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ**

Serdal YAZICI

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

NİSAN 2019

Serdal YAZICI tarafından hazırlanan “İKİ DEĞİŞKENLİ HERMITE POLİNOMLARINI İÇEREN SZÁSZ OPERATÖRLERİNİN GENELLEMELERİ VE YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Bayram ÇEKİM

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Başkan: Doç. Dr. Rabia AKTAŞ

Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Doç. Dr. Gürhan İÇÖZ

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 26/04/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

İmza

Serdal YAZICI

26/04/2019

İKİ DEĞİŞKENLİ HERMITE POLİNOMLARINI İÇEREN SZÁSZ
OPERATÖRLERİNİN GENELLEMELERİ VE YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Serdal YAZICI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Nisan 2019

ÖZET

Bu çalışmada Szász operatörlerinin iki değişkenli Hermite polinomları içeren bazı yeni genellemeleri verilmiş ve bu genellemelerin yaklaşım özellikleri; klasik süreklilik modülü, Peetre- K fonksiyoneli, ikinci süreklilik modülü, Voronovskaya tipi asimptotik formülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla incelenmiştir.

Bilim Kodu : 20406

Anahtar Kelimeler : Moment genelleme fonksiyonu, Hermite polinomları, Peetre- K fonksiyoneli, Lipschitz sınıfı, Voronovskaya asimptotik formülü

Sayfa Adedi : 113

Danışman : Doç. Dr. Bayram ÇEKİM

THE GENERALIZATIONS AND APPROXIMATION PROPERTIES OF SZÁSZ
OPERATORS INCLUDING BIVARIATE HERMITE POLYNOMIALS

(M. Sc. Thesis)

Serdal YAZICI

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

April 2019

ABSTRACT

In this study, new some generalizations of Szász operators including bivariate Hermite polynomials are introduced and approximation features of these generalizations with help of the classical modulus of continuity, Peetre's K functional, the second of modulus of continuity, Voronovskaya type asymptotic formula and the functions of Lipschitz class are investigated.

Science Code : 20406

Key Words : Moment Generating function, Hermite polynomials, Peetre's K functional, Lipschitz class, Voronovskaya type asymptotic formula

Page Number : 113

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Bayram ÇEKİM

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimimin her aşamasında kıymetli zamanını ayırarak görüş ve önerileri ile bana destek olan danışman hocam Doç. Dr. Bayram ÇEKİM'e ve desteklerini her zaman hissettiğim ailem ve arkadaşlarıma en içten dileklerimle teşekkür ederim. Ayrıca çalışmam süresince kendilerinden yardım aldığım Doç. Dr. Gürhan İÇÖZ, Doç. Dr. Cüneyt ÇEVİK, Prof. Dr. İbrahim BÜYÜKYAZICI'ya ve bana bu tezdeki çalıştığım teoriyi öğreten ders hocalarım Prof. Dr. Nurhayat İSPİR, Prof. Dr. İsmet YÜKSEL, Prof. Dr. Ogün DOĞRU, Doç. Dr. Mediha ÖRKÇÜ ve diğer tüm hocalarıma çok teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	9
2.1. Ön Bilgiler.....	9
2.2. Lineer Pozitif Operatör Dizileri.....	18
2.3. Klasik Süreklilik Modülü	26
2.4. Lipschitz Sınıfından Fonksiyonlar	28
2.5. Peetre- K Fonksiyoneli ve İkinci Süreklilik Modülü.....	29
2.6. İki Değişkenli Hermite Polinomları	31
2.7. Szász Operatör Dizisi	37
2.8. Moment Genelleyici Fonksiyon	41
3. İKİ DEĞİŞKENLİ HERMITE POLİNOMLARINI İÇEREN SZÁSZ OPERATÖRÜNÜN GENELLEMESİ.....	43
3.1. $\{G_n^\alpha\}$ Operatör Dizisinin Tanımı	43
3.2. $\{G_n^\alpha\}$ Dizisinin Bazı Test Değerleri ve Merkezi Momentleri	44
3.3. $\{G_n^\alpha\}$ Dizisi İçin Korovkin Tip Teorem	52
3.4. $\{G_n^\alpha\}$ Dizisinin $C_B[0, \infty)$ Sınıfındaki Bir Fonksiyonla Yaklaşımı.....	53
3.5. $\{G_n^\alpha\}$ Dizisinin Lipschitz Sınıfındaki Bir Fonksiyonla Yaklaşımı	58

3.6. $\{G_n^\alpha\}$ Dizisi İçin Voronovskaya Tip Teorem	60
4. İKİ DEĞİŞKENLİ HERMITE POLİNOMLARINI İÇEREN KANTOROVICH TİPLİ SZÁSZ OPERATÖRÜNÜN GENELLEMESİ	63
4.1. $\{S_n^\alpha\}$ Operatör Dizisinin Tanımı	63
4.2. $\{S_n^\alpha\}$ Dizisinin Bazı Test Değerleri ve Merkezi Momentleri.....	64
4.3. $\{S_n^\alpha\}$ Dizisi İçin Korovkin Tip Teorem.....	71
4.4. $\{S_n^\alpha\}$ Dizisinin $C_B[0, \infty)$ Sınıfındaki Bir Fonksiyonla Yaklaşımı	72
4.5. $\{S_n^\alpha\}$ Dizisinin Lipschitz Sınıfındaki Bir Fonksiyonla Yaklaşımı.....	77
4.6. $\{S_n^\alpha\}$ Dizisi İçin Voronovskaya Tip Teorem	80
5. İKİ DEĞİŞKENLİ HERMITE POLİNOMLARINI İÇEREN KANTOROVICH STANCU TİPLİ SZÁSZ OPERATÖRÜNÜN GENELLEMESİ.....	83
5.1. $\{S_n^{\alpha, \beta, \gamma}\}$ Operatör Dizisinin Tanımı	83
5.2. $\{S_n^{\alpha, \beta, \gamma}\}$ Dizisinin Bazı Test Değerleri ve Merkezi Momentleri.....	84
5.3. $\{S_n^{\alpha, \beta, \gamma}\}$ Dizisinin İçin Korovkin Tip Teorem.....	92
5.4. $\{S_n^{\alpha, \beta, \gamma}\}$ Dizisinin $C_B[0, \infty)$ Sınıfındaki Bir Fonksiyonla Yaklaşımı	93
5.5. $\{S_n^{\alpha, \beta, \gamma}\}$ Dizisinin Lipschitz Sınıfındaki Bir Fonksiyonla Yaklaşımı.....	98
5.6. $\{S_n^{\alpha, \beta, \gamma}\}$ Dizisi İçin Voronovskaya Tip Teorem.....	101
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	105
KAYNAKLAR	107
ÖZGEÇMİŞ	113

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. $S_n(f; x)$ operatörlerinin $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşımı	40
Şekil 2.2. (S_n) dizisinin bazı terimleri için $\varepsilon_n(f, x)$ yaklaşım hatası.....	41



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$M_{\theta,x}(A_n)$	$\{A_n\}$ operatör dizisinin moment genelleyici fonksiyonu
$\varepsilon_n(f, x)$	Yaklaşım Hatası
$\omega(f; \delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\omega_2(f; \delta)$	f fonksiyonunun ikinci süreklilik modülü
$K(f; \delta)$	f fonksiyonunun Peetre- K fonksiyoneli
$C[a, b]$	$[a, b]$ kümesinde tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı
$C[0, \infty)$	$[0, \infty)$ kümesinde tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_B[0, \infty)$	$[0, \infty)$ kümesinde tanımlı sürekli ve sınırlı fonksiyonlar uzayı
$C_B^k[0, \infty)$	$C_B^k[0, \infty) = \{f : f^{(k)} \in C_B[0, \infty), k = 1, 2, \dots\}$
$Lip_M(\alpha)$	α mertebeli M katsayılı Lipchitz sınıfı uzayı
$\ f\ _{C_B[0, \infty)}$	$\ f\ _{C_B[0, \infty)} = \sup_{x \in [0, \infty)} f(x) $
$\ f\ _{C_B^2[0, \infty)}$	$\ f\ _{C_B^2[0, \infty)} = \ f\ _{C_B[0, \infty)} + \ f'\ _{C_B[0, \infty)} + \ f''\ _{C_B[0, \infty)}$
$(f_n) \rightarrow f$	(f_n) dizisi f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır
$(f_n) \xrightarrow{\rightarrow} f$	(f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır

1. GİRİŞ

Uygulamalı matematik ve fonksiyonel analizin kesiştiği ortak bir bilimsel çalışma alanı olan yaklaşım teorisi, modern analizin babası olarak bilinen Alman matematikçi Karl Theodor Wilhelm Weierstrass'ın 1885 yılında ortaya attığı ve ispatladığı Weierstrass Yaklaşım Teoremi'ne dayanır. Bu teoreme göre; $[a, b]$ kapalı ve sınırlı aralığında tanımlı olan her sürekli fonksiyona düzgün yakınsak olacak şekilde bir polinom dizisi vardır. Yani, $f \in C[a, b]$ olmak üzere $C[a, b]$ de tanımlı öyle bir $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ polinom dizisi vardır ki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n - f\|_{C[a, b]} = 0$$

dır [1].

Weierstrass'ın bu teoremine göre; kapalı ve sınırlı bir aralıkta tanımlanan bir fonksiyonun karakteri, yine bu aralıkta tanımlanan polinom dizileriyle belirlenebilir. Çünkü, polinomlar en temel fonksiyonlardandır ve hesaplanmaları kolaydır. Weierstrass bu teoremden, her ne kadar teoremin şartlarını sağlayan bir polinom dizisinin varlığını Gauss-Weierstrass Dönüşümü yardımıyla ispatlasa da böyle bir polinom dizisinin örneğini vermemiştir. Böyle polinom dizilerinin ilk örneğini 1912 yılında Rus matematikçi Sergei Natonovich Bernstein bulmuştur [2]. Bernstein'in $[0, 1]$ aralığında bulduğu bu polinom dizisinin genel terimi; $f \in C[0, 1]$, $x \in [0, 1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

ile tanımlanır [2].

Aynı zamanda, yukarıda tanımlanan $\{B_n(f; x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine $f \in C[0, 1]$ ile verilen “Bernstein operatör dizisi” de denir. $[0, 1]$ üzerinde tanımlı Benstein polinomları $\zeta \in [0, 1]$ ve $\eta \in [a, b]$ olmak üzere $\eta := (b-a)\zeta + a$ dönüşümü yardımıyla keyfi bir $[a, b]$

aralığında da tanımlanabilir. Dolayısıyla Weierstrass Yaklaşım Teoremi için Benstein polinomları kullanılabilir.

Bernstein operatörlerinin önemi ilk zamanlarda fazla bilinmemiştir. Ancak bu operatörler yaklaşık elli yıl sonra, Fransız mühendis Pierre Étienne Bèzier tarafından ünlü bir otomobil üreticisi olan Renault'un otomobillerinin kasalarının tasarımında kullanılmasıyla popülerlik kazanmaya başlamıştır. Bèzier bu uygulamada temelleri Bernstein operatörlerine dayanan ve bilgisayar animasyonu gibi pek çok alanla ilişkili olan Bèzier eğrilerini kullanmaktaydı. Ayrıca Bèzier bu eğrileri otomobil endüstrisinde kullanan ilk bilim insanı değildir. Aslında, 1959 yılında Fransız matematikçi Paul de Casteljaou bu eğrileri ilk kez başka bir otomobil üreticisi olan Citroën'nin araçlarının gövde kısmının tasarımında kullanmıştır. Bernstein operatörünün otomotiv sektöründe kullanılması yaklaşım teorisine olan ilginin artmasıyla beraber bu teorinin gelişmesi için önemli bir adım olmuştur.

Yaklaşım teorisinin bir alt dalı da "Lineer Pozitif Operatörlerle Yaklaşım Teorisi" dir. Bu teorinin temeli 1953 yıllarında birbirlerinden bağımsız olarak yürütülen Harald Bohman ve Pavel Petrovich Korovkin'nin ortaya attığı Bohman-Korovkin Teoremleri'ne dayanmaktadır. Bohman belirli birkaç koşulla verilen özel bir lineer pozitif operatör dizisinin $[0,1]$ aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyona yaklaşım problemini incelenmiştir [3]. Daha sonra Korovkin de bu durumu genelleyerek keyfi kompakt aralıklarda lineer pozitif operatörlerin yakınsaklığını inceleyen "Bohman-Korovkin Teoremi" ni ileri sürmüştür [4]. Ayrıca 1960 yılında, Korovkin'nin "Lineer Pozitif Operatörler ve Yaklaşım Teorisi" adındaki kitabının Delhi'de ingilizce kopyalarının basılması bu teorinin gelişmesinde önemli bir şekilde rol oynamıştır [5].

Macar matematikçi Otto Szász, 1950 yılında $[0,1]$ üzerinde tanımlanan Bernstein operatörlerini sonsuz bir aralığa genellemiştir. Szász'ın $f \in C[0,\infty)$ için tanımladığı $\{S_n(f;x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ Szász operatör dizisi, $x \geq 0$ olmak üzere

$$S_n(f;x) = \exp(-nx) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

şeklinde tanımlanır [6].

Szász operatörlerinin şimdiye kadar birçok genellemesi yapılmıştır. Bunlardan en önemlilerinden biri de Kantorovich tipli genellemedir. $n \in \mathbb{N}$, $f \in C[0, \infty)$ ve $x \geq 0$ olmak üzere Szász operatör dizisinin Kantorovich tipli genellemesi

$$K_n(f; x) = n \exp(-nx) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt$$

ile verilmiştir [7].

Szász ve Bernstein operatörlerinin yanısıra Baskakov operatörleri [8], Lupaş operatörleri [9] ve Post Widder operatörleri [10] en çok kullanılan operatörlerden bazılarıdır ve bu operatörlerin birçok genellemesi de bulunmaktadır.

Yaklaşım teorisinde birçok genelleme türü ve bu genellemeler üzerinde çalışmalar vardır, fakat bunların tamamı hakkında bilgi vermek neredeyse imkansızdır. Aşağıda bazı genellemeler ve önemli çalışmalar hakkında kronolojik sıradan bağımsız olarak kısaca konu konu bilgiler verilmiştir.

Temel operatör genellemeleri: Kantorovich, Durmeyer, Beta, Stancu, Schurer ve Philips tipi genellemeler bu teori hakkında en çok kullanılan genellemelerden bazılarıdır.

Kuantum tipli operatör genellemeleri: Roman matematikçi Lupaş kuantum kalkülüsten yararlanarak Bernstein operatörlerini $0 \leq q_n < 1$ şeklindeki bir dizi yardımıyla modifiye etmiş ve bu operatörün bazı özelliklerini incelemiştir [11]. Ancak bu çalışma yaklaşım teorisi açısından sınırlı olduğundan bu çalışmadan yaklaşık on yıl sonra Philips bu konu hakkında yeniden bir çalışma yapmıştır [12]. Philips'in bu çalışmadaki elde ettiği en önemli sonuçlardan biri şüphesiz; eğer $q_n \rightarrow 1$ yakınsaması ne kadar hızlı ise q -Bernstein operatörlerinin de $f \in C[0, 1]$ fonksiyonuna yakınsamasının o kadar iyi olmasıdır. Bu konudaki önemli çalışmalardan bazıları Ostrovska [13], Aral [14] ve Gupta [15]'nin

verdiği çalışmalardır. Ayrıca kuantum kalkülüs hakkında daha fazla bilgi edinmek istenirse [16,17]'deki kitaplardan yararlanıla bilinir. Son zamanlarda q genellemeye benzer olarak (p, q) tipi genelleme ileri sürülmüştür. Yaklaşım teorisindeki ilk (p, q) tipi genelleme [18]'deki çalışmada Bernstein operatörleri için yapılmıştır. Ayrıca, Acar Szász operatörlerinin (p, q) tipindeki genellemesini vermiştir [19].

King tipli operatör genellemeleri: King, x^2 fonksiyonunu koruyacak şekilde bir operatör genellemesi yapmıştır [20]. King, Bernstein operatörünü x^2 fonksiyonunu koruyacak şekildeki $0 \leq r_n(x) \leq 1$ şartını sağlayan bir $r_n(x)$ terimi ile düzenlemiştir. B_n Bernstein operatörü ve $f \in C[0,1]$ olmak üzere King, bu çalışmasında tanımladığı operatörü

$$B_n^*(f) := B_n(f) \circ r_n \text{ ve } B_n^*(f; x) := (B_n(f) \circ r_n)(x) = B_n(f; r_n(x))$$

ile vermiştir [20]. Bu genellemede $r_n(x) = x$ alınırsa anlaşılacağı üzere Bernstein operatörleri elde edilir. Ayrıca, $B_n(t^2; r_n^*(x)) = x^2$ olacak şekildeki $r_n^*(x)$ terimi düşünüldüğünde King'in operatöründe $r_n(x) = r_n^*(x)$ alınırsa düzenlenen bu operatörün $f \in C[0,1]$ fonksiyonuna yaklaşımının Bernstein operatörüne göre daha iyi olduğu sonucuna varılır [20]. Ayrıca, Duman ve Özarslan Szász operatörlerini x^2 fonksiyonunu koruyacak şekilde yeniden düzenlemiştir [21]. King tipi genelleme yalnızca x^2 fonksiyonunu koruyacak şekilde yapılmamaktadır. Bu duruma en güzel örneklerden biri de yine Duman ve diğerlerinin vermiş olduğu Szász-Kantorovich operatörlerinin lineer fonksiyonları koruyacak şekilde düzenlediği çalışmadır [22].

Bileşke ve ters fonksiyon yardımıyla elde edilen operatör genellemeleri: Cárdenas-Morales ve diğerleri B_n^r operatörünü B_n Bernstein operatörü, $f \in C[0,1]$ ve τ belirli şartları sağlayan fonksiyon olmak üzere

$$B_n^r(f) := B_n(f \circ \tau^{-1}) \circ \tau \text{ ve } B_n^r(f; x) := (B_n(f \circ \tau^{-1}) \circ \tau)(x) = B_n(f \circ \tau^{-1}; \tau(x))$$

şeklinde tanıtmışlardır [23]. Tanımlanan bu operatörde τ fonksiyonu birim fonksiyon olarak alınırsa Bernstein operatörü elde edilir. Bu çalışmada orijinal operatöre göre daha iyi yaklaşım elde edilmiştir. Aslında bu tip genelleme King tipi genellenenin devamı sayılabilir. Çünkü King bu çalışmadan yaklaşık sekiz yıl önce genellemesini yaptığı operatörü bileşke fonksiyon yardımıyla oluşturmuştur. Ayrıca [24]'deki çalışmada Szász operatörleri bileşke ve ters fonksiyon yardımıyla tekrar düzenlenmiştir.

İki değişkenli operatör genellemeleri: Kingsley iki değişkenli Bernstein operatörlerini vermiş ve bu operatörlerin yaklaşım özelliklerini incelemiştir [25]. Bu konu hakkında Butzer de önemli bir çalışma yapmıştır [26]. Ayrıca, Volkov “Hangi özellikleri sağlayan iki değişkenli lineer pozitif operatör dizisi bir yüzeye yaklaşır?” sorusunun cevabını vermiştir [27].

Dunkl tipli operatör genellemeleri: Rosenblum, Gamma fonksiyonlarını kullanarak birtakım tanımlar ve eşitlikler vermiştir [28]. Sucu bu çalışmadan yararlanarak Szász operatörlerini bu tanımlar üzerine genelleterek inşa etmiştir [29]. Bu tip genelleme şimdilik sadece Szász ve Szász operatörlerin genellemelerine uygulanmaktadır. İçöz ve Çekim'in [30] ve [31]'deki çalışmalarında sırasıyla Szász operatörünün Dunkl genellemesinin integral tipini ve q -analoğunu tanıtmış ve yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir. Ayrıca, Srivastava ve diğerleri q -Kantorovich-Szász operatörünün Dunkl genellemesini incelemişlerdir [32].

Üstel fonksiyonu koruyan operatör genellemeleri: Bu tip genellemeler King tipi genellemelerin bir modifikasyonudur. İlk olarak bu tip genellemeyi Acar ve diğerleri $a > 0$ olmak üzere e^{2ax} değerini koruyacak şekilde Szász operatörlerini yeniden düzenlemiştir [33]. Bu çalışmada aslında kullanılan operatör Duman ve Özarslan'ın [21]'deki çalışmasında tanımlamış olduğu

$$S_n^*(f) := S_n(f) \circ \alpha_n \text{ ve } S_n^*(f; x) := (S_n(f) \circ \alpha_n)(x) = S_n(f; \alpha_n(x))$$

ile verilen operatördür. Burada S_n Szász operatörünü göstermektedir. [33]'deki çalışmada $\alpha_n(x)$ ifadesi $S_n(e^{2at}; \alpha_n(x)) = e^{2ax}$ olacak şekilde seçilmiştir. Bu çalışmadan sonra

benzer çalışmalar da yapılmaktadır.

Ağırlıklı uzaylarda yaklaşım: Gadjiev 1974 ve 1976 yıllarında ağırlıklı uzaylarda Korovkin Tipi Teoremleri incelemiş ve bazı önemli sonuçlar elde etmiştir [34,35]. Ayrıca Gadjiev ağırlıklı uzaylarda iki değişkenli değişkenli fonksiyonlar için Korovkin tipi teoremleri incelemiştir [36,37]. Bu çalışmaları destekler nitelikte İspir ağırlıklı uzaylarda süreklilik modülü tanımlayıp, bazı özellikler elde etmiştir [38].

İstatistiksel yaklaşım: Gadjiev ve Orhan, Korovkin teoremi ile Weierstrass teoremlerini istatistiksel yaklaşıma göre yeniden yorumlamıştır [39]. Daha sonra Duman ve diğerleri yaklaşım teorisinde A -istatistiksel yaklaşım konusunu incelemişlerdir [40]. Ayrıca [41]'deki çalışma bu konu hakkında önemli çalışmalardan biridir.

Özel polinomlar yardımıyla elde edilen operatör genellemeleri: Yaklaşım teorisinde özel polinomları içeren ilk genelleme 1964 yılında Cheney ve Sharma'nın Laguerre polinomlarından elde ettiği bir operatör genellemesidir [42]. Daha sonra 1969 yılında Jakimovski ve Leviatan Szász operatörlerini Appell polinomları içerecek şekilde genellemiştir [43]. Varma ve Taşdelen Charlier polinomlarını kullanarak Szász operatörlerinin farklı bir genellemesini vermiştir [44]. Diğer örnekler ise İsmail [45]'in vermiş olduğu Sheffer tipindeki polinomlar yardımıyla elde edilen operatör genellemeleri, Varma ve diğerlerinin [46] vermiş olduğu Brenke tipi polinomlar yardımıyla elde edilen operatör genellemeleri ve Sucu ve diğerlerinin [47] vermiş olduğu Boas-Buck tipi polinomlar yardımıyla elde edilen operatör genellemeleridir.

Bu tezde iki değişkenli Hermite polinomları yardımıyla elde edilen operatörlere değinilecektir. İki değişkenli Hermite polinomları $\alpha \geq 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$H_k(n, \alpha) = k! \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{n^{k-2r} \alpha^r}{r!(k-2r)!}$$

ile verilir [48,49]. 2016 yılında Krech bu polinomlarından yararlanarak, $f \in C[0, \infty)$, $x \geq 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$G_n^\alpha(f; x) = \exp(-nx - \alpha x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} H_k(n, \alpha) f\left(\frac{k}{n}\right)$$

şeklinde bir operatör tanımlamıştır [49]. Verilen bu operatörün Kantorovich ve Stancu-Kantorovich tipli genellemelerini Yazıcı ve Çekim sırasıyla [50] ve [51]'deki çalışmalarında elde etmişlerdir.

Bu tezin amacı [49], [50] ve [51]'deki çalışmalarda tanımlanan operatörlerin yaklaşım özelliklerini incelemektir.

Bu tezin birinci bölümü giriş bölümü olmak üzere altı ana bölümden oluşmaktadır:

- ❖ *İkinci bölüm:* Bu bölümde; temel fonksiyonel analiz bilgileri ve lineer pozitif operatör dizileri ile yaklaşım teorisine ilişkin bazı kavramlar verilmiştir.
- ❖ *Üçüncü, dördüncü ve beşinci bölüm:* Bu bölümlerde; sırasıyla [49], [50] ve [51]'deki çalışmalarda verilen operatörler ve bu operatörlerin Korovkin test değerleri, bazı merkezi momentleri verilmiştir. Ayrıca klasik süreklilik modülü, ikinci süreklilik modülü, Peetre-K fonksiyoneli ve Voronovskaya tipi asimptotik formül gibi yakınsama kriterleri yardımıyla bu operatörlerin bazı fonksiyon uzaylarındaki bir fonksiyona yaklaşımı hakkında bilgiler verilmiştir.
- ❖ *Altıncı bölüm:* Bu bölümde elde edilen sonuçlar üzerinde durulmuştur.



2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Ön Bilgiler

2.1.1. Tanım

Tanım kümesi doğal sayılar ya da doğal sayıların herhangi bir alt kümesi olan bir fonksiyonun sıralı elemanlı görüntü kümesine *dizi* ve buradaki fonksiyona da *dizi fonksiyonu* denir. Burada, bu görüntü kümesinin elemanlarının sıralı bir şekilde olması önemlidir, çünkü elemanların keyfi dizilimi ile dizi elde edilemez. Eğer bir dizinin fonksiyonunun değer kümesi reel sayılar kümesi ise bu diziye *reel sayı dizisi* veya *reel terimli dizi* denir. Yine benzer şekilde dizi fonksiyonunun değer kümesi kompleks sayılar kümesi ise bu diziye *kompleks sayı dizisi* veya *kompleks terimli dizi* denir. Ayrıca, dizi fonksiyonunun değerlerinin oluşturduğu kurala *dizinin genel terimi* denir. Genel terimi a_n olan dizi (a_n) şeklinde gösterilir. Yani,

$$f : A \subseteq \mathbb{N} \rightarrow B \neq \emptyset$$

$$n \rightarrow f(n) = a_n$$

$$f(A) = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = (a_n) \subseteq B$$

ile verilen $f(A) = (a_n)$ sıralı elemanlı görüntü kümesi, terimleri B üzerinde olan bir dizidir. Bu dizide; dizinin fonksiyonu f ve genel terimi $f(n) = a_n$ dir.

2.1.2. Tanım

(a_n) dizisi verilmiş olsun. Genel terimi,

$$T_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

şeklinde tanımlanan (T_n) dizisi göz önüne alınırsa $((a_n), (T_n))$ ikilisine *seri* adı verilir. Burada a_n terimine *serinin genel terimi* ve (T_n) dizisine de *serinin kısmi toplamlar dizisi* denir [52].

2.1.3. Tanım

$(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ dizisi ve $a \in \mathbb{R}$ sayısı verilsin. Eğer dizinin belirli bir teriminden sonra dizinin diğer terimleri a reel sayısına istenildiği kadar yakın oluyorsa yani, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ için $n > n_0$ olduğunda $|a_n - a| < \varepsilon$ oluyorsa (a_n) dizisi a sayısına *yakınsar* denir. Bu durum $(a_n) \rightarrow a$ ya da $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ şeklinde gösterilir [52].

2.1.4. Tanım

(a_n) dizisi verilmiş olsun. Eğer bir serinin genel terimi

$$T_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

ile verilen (T_n) kısmi toplamlar dizisi herhangi bir $s \in \mathbb{R}$ değerine yakınsak ise bu taktirde bu seriye *yakınsak seri* denir. Bu durum

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$$

ile gösterilir. Ayrıca bu s değerine *serinin yakınsadığı değer* denir [52].

2.1.5. Tanım

$X \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $F(X)$ kümesi de X aralığında tanımlı fonksiyonların bir kümesi olsun. Bu durumda verilen bir (f_n) dizisinin değer kümesi $F(X)$ ise bu taktirde $(f_n) \subseteq F(X)$ dizisine *fonksiyon dizisi veya değişken terimli dizi* denir.

Örnek

Her bir $n \in \mathbb{N}$ için f_n fonksiyonları $[a, b]$ üzerinde tanımlı ve sürekli olmak üzere

$$g: \mathbb{N} \rightarrow C[a, b]$$

$$n \rightarrow g(n) = f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(\mathbb{N}) = \{f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots\} = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots) = (f_n)$$

ile verilen $g(\mathbb{N}) = (f_n)$ sıralı elemanlı görüntü kümesi $C[a, b]$ üzerinde bir dizidir ve bu durum $(f_n) \subseteq C[a, b]$ şeklinde gösterilebilir. Bu dizinin fonksiyonu g ve genel terimi $g(n) = f_n$ dir.

2.1.6. Tanım

$X \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $F(X)$ kümesi de X aralığında tanımlı fonksiyonların bir kümesi olsun. $(f_n) \subseteq F(X)$ şeklinde bir fonksiyon dizisi olmak üzere

i. (f_n) dizisi X üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ ve her bir $x \in X$ için $\exists n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki, $n > n_0$ olduğunda $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ dur. Burada ε pozitif reel sayısının hem x hem de n_0 sayısına bağlı olduğuna, yani

$\varepsilon = \varepsilon(n_0, x)$ şeklinde olduğuna dikkat edilmelidir. (f_n) dizisinin X üzerinde bir f fonksiyonuna noktasal yakınsak olması $(f_n) \rightarrow f$ şeklinde gösterilir [53].

ii. (f_n) dizisi X üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in X$ için $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki, $n > n_0$ olduğunda $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ dur. ε pozitif reel sayısının sadece n_0 sayısına bağlı olduğuna, yani $\varepsilon = \varepsilon(n_0)$ şeklinde olduğuna dikkat edilmelidir. (f_n) dizisinin X üzerinde bir f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması $(f_n) \xrightarrow{\rightarrow} f$ şeklinde gösterilir [53].

2.1.7. Tanım

$X \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her bir $x \in X$ için $|f(x)| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı bulunabiliyorsa f fonksiyonuna *sınırlı fonksiyon* denir. Yine benzer şekilde bir $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ dizisinin fonksiyonu sınırlıysa yani; $\forall n \in \mathbb{N}, \exists M > 0$ için $|a_n| \leq M$ ise bu taktirde (a_n) dizisine *sınırlı dizi* denir [52].

2.1.8. Tanım

$X \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere

i. f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında *süreklidir*. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ vardır ki, $|x - x_0| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ dur. Ayrıca, eğer f fonksiyonu X kümesinin bütün noktalarında süreklirse f fonksiyonuna *X kümesi üzerinde süreklidir* ya da kısaca *f fonksiyonu süreklidir* denir [52].

ii. f fonksiyonu *düzgün süreklidir*. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır ki, $|x - y| < \delta$ olacak şekildeki $\forall x, y \in X$ için $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ dur [52].

2.1.1. Teorem

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Buna göre, f fonksiyonu sürekli ise sınırlıdır [52].

2.1.2. Teorem

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Buna göre, f fonksiyonu sürekli ise düzgün süreklidir [53].

2.1.3. Teorem

$X \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $F(X)$ kümesi de X aralığında tanımlı fonksiyonların bir kümesi olsun. $(f_n) \subseteq F(X)$ şeklinde bir fonksiyon dizisi olmak üzere (f_n) dizisinin X kümesinde f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul

$$R_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|$$

şeklinde verilen (R_n) dizisinin sıfıra yakınsayan bir dizi olmasıdır [53].

2.1.9. Tanım

p ve q sayıları, $1 < p, q < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşullarını sağlayan iki pozitif reel sayı olsun.

Her bir $x, y \in \ell_p = \left\{ x = (x_n) \subseteq \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır ve bu eşitsizliğe *Hölder eşitsizliği* denir. Bu eşitsizlikte özel olarak $p = q = 2$ olarak seçilirse

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir ve elde edilen bu eşitsizliğe de *Cauchy-Schwartz eşitsizliği* denir [54,55].

2.1.10. Tanım

$1 < p < \infty$ olmak üzere her bir $x, y \in \ell_p$ için

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği sağlanır ve bu eşitsizliğe *Minkowski eşitsizliği* denir [54,55].

Uyarı

Hölder ve Minkowski eşitsizliklerinin birçok formatı vardır. Eğer daha çok ayrıntılı bilgi edinilmek istenirse [54-56] kaynaklarına bakılabilir. Bu tezin ilerleyen bölümlerinde bu eşitsizliklerin kullanılması durumunda sadece verilen tanımların düşünülmesi yerine, önerilen kaynaklardaki tüm formatlar göz önüne alınarak duruma uygun olan düşünülmelidir.

2.1.11. Tanım

$X \neq \emptyset$ bir küme ve IF reel veya kompleks sayılar cismi olsun. Eğer

$$+: X \times X \rightarrow X$$

$$(x, y) \rightarrow +(x, y) = x + y$$

dönüşümü ve

$$\bullet: IF \times X \rightarrow X$$

$$(x, y) \rightarrow \bullet(x, y) = x.y$$

dış işlemi her bir $x, y, z \in X$ ve $a, b \in IF$ için

1. $x + y = y + x$,
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$,
3. $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ ögesi var,
4. $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ ögesi var,
5. $a(x + y) = ax + ay$,
6. $(a + b)x = ax + bx$,
7. $(ab)x = a(bx)$,
8. $1x = x$

özelliklerini sağlıyorsa X kümesine IF cismi üzerinde bir vektör uzayıdır ya da X kümesi IF üzerinde bir lineer uzaydır denir [54,55].

Örnek

$[a, b]$ üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların kümesi olan $C[a, b]$ uzayı;
 $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t) \text{ ve } (\lambda f)(t) = \lambda f(t)$$

tanımları altında $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır [55].

2.1.12. Tanım

X kümesi, IF reel ya da kompleks cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu her bir $x, y \in X$ ve her $\lambda \in IF$ için

$$1. \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta,$$

$$2. \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|,$$

$$3. \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

özelliklerini sağlarsa bu fonksiyona X üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine normlu uzay ya da kısaca X uzayına normlu uzay denir [54,55].

2.1.13. Tanım

Λ aralığı, $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin keyfi bir alt aralığı olsun. Λ üzerinde tanımlı reel değerli sınırlı ve sürekli fonksiyonların uzayı $C_B(\Lambda)$ olmak üzere,

$$\|\cdot\|_\infty: C_B(\Lambda) \rightarrow [0, \infty)$$

$$f \rightarrow \|f\|_{C_B(\Lambda)} = \sup_{x \in \Lambda} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanan $\|\cdot\|_\infty$ dönüşümü $C_B(\Lambda)$ üzerinde bir normdur, bu norma $C_B(\Lambda)$ üzerindeki düzgün norm veya supremum norm denir [54,55].

Özel olarak $\Lambda = [a, b]$ alınırsa, $[a, b]$ üzerinde tanımlı reel değerli ve sürekli her fonksiyon Teorem 2.1.1'den dolayı kompakt aralıkta sınırlı olacağından buradaki norm

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

şeklini alır ve bu norma $C[a, b]$ üzerindeki *maksimum norm* denir [54,55].

2.1.14. Tanım

Reel sayılar kümesi üzerinde mutlak değer fonksiyonu açık bir şekilde bir norm tanımlar, bu $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ normlu uzayına *alışılmış normlu uzay* denir [54,55].

2.1.4. Teorem

$\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve (f_n) , $C_B(\Lambda)$ uzayında bir fonksiyon dizisi olsun. (f_n) dizisinin Λ üzerinde bir f fonksiyonuna düzgün yakınsaması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{C_B(\Lambda)} = 0$$

ifadesinin sağlanmasıdır [54,55].

Uyarı

Bu kısımda, diziler ve fonksiyonlar ile ilgili bazı tanımlar alışılmış normlu uzay için verildi. Bu yüzden, herhangi bir normlu uzayda; bir dizinin yakınsaklığı, bir dizinin sınırlılığı, bir fonksiyon dizisinin noktasal yakınsaklığı, bir fonksiyon dizisinin düzgün yakınsaklığı, bir fonksiyonun sürekliliği ve bir fonksiyonun düzgün sürekliliği alışılmış uzaydakine benzer bir şekilde tanımlanabilir. Ayrıca, elemanları fonksiyon olan normlu uzaylarda bir operatör tanımlanabilir ve benzer tanımlar oluşturulabilir.

2.2. Lineer Pozitif Operatör Dizileri

2.2.1. Tanım

X ve Y elemanları fonksiyonlar olan normlu uzaylar olsun. Buna göre

$$S: X \rightarrow Y$$

$$f \rightarrow S(f) = S(f; \cdot): T \rightarrow D, \quad S(f)(x) = S(f; x)$$

ile verilen S dönüşümüne, X üzerinde tanımlı ve Y değerli bir operatör denir. Bir başka deyişle; bir operatör, normlu bir vektör uzayından aldığı bir fonksiyonu başka ya da aynı uzaydaki bir fonksiyona dönüştüren bir dönüşümdür. Burada T ve D kümeleri sırasıyla $S(f; \cdot) \in Y$ fonksiyonunun tanım ve değer kümesidir. Ayrıca burada, f fonksiyonu bir t parametresine bağlıysa, S operatörüne de fonksiyonun bağlı olduğu t parametresine göre uygulanmalıdır. Yani, $S(f; x) := S(f(t); x)$ şeklindedir [54,57].

Örnek

$A \neq \emptyset$ bir küme, $T(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f' \text{ mevcut}\}$ ve $H(\mathbb{R}) = \{f \mid f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ olmak üzere

$$D = \frac{d}{dx}: T(\mathbb{R}) \rightarrow H(\mathbb{R})$$

$$f \rightarrow \frac{d}{dx}(f) = f'$$

ile verilen $D = \frac{d}{dx}$ türev dönüşümü $T(\mathbb{R})$ uzayı üzerinde bir operatördür.

2.2.2. Tanım

X elemanları fonksiyonlar olan $\mathbb{R}$ cismi üzerinde normlu vektör uzayı olsun. Buna göre

$$K : X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \rightarrow K(f) = K_f$$

ile verilen K dönüşümüne X üzerinde bir *fonksiyonel* denir. Bir başka deyişle; bir fonksiyonel, bir vektör uzaydan aldığı bir fonksiyonu reel bir sayıya dönüştüren bir dönüşümdür [54,55].

Örnek

$$L_1^2 : \text{Int}([1,2]) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \rightarrow L_1^2(f) = \int_1^2 f(x) dx$$

ile verilen $[1,2]$ kümesi üzerindeki belirli integrali ifade eden L_1^2 dönüşümü $[1,2]$ kümesinde integrallenebilen fonksiyonların uzayı üzerinde bir fonksiyoneldir. Burada, $\text{Int}([1,2])$ kümesi, $[1,2]$ kümesinde üzerinde integrallenebilir fonksiyonların kümesini göstermektedir.

2.2.3. Tanım

X ve Y elemanları fonksiyonlar olan $\mathbb{R}$ cismi üzerinde normlu vektör uzayları olsun.

$S : X \rightarrow Y$ operatörü verilsin. Buna göre

i. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall f, g \in X$ için

$$S(af + bg) = aS(f) + bS(g)$$

eşitliği sağlanıyorsa S operatörüne *lineer bir operatör* denir [57,58].

ii. S operatörü pozitif bir fonksiyonu pozitif bir fonksiyona dönüştürüyorsa yani,

$$\forall f \text{ için } f \geq 0 \Rightarrow S(f) \geq 0$$

önermesi gerçekleşiyorsa S operatörüne *pozitif bir operatördür* denir [57,58].

iii. S operatörü hem lineer hem de pozitif ise bu taktirde S operatörüne *lineer pozitif operatör* denir [57,58].

2.2.1. Lemma

X ve Y elemanları fonksiyonlar olan normlu vektör uzayları olsun. $S: X \rightarrow Y$ lineer pozitif operatörü verilsin. Her $f, g \in X$ olmak üzere

$$i. \quad f \leq 0 \Rightarrow S(f) \leq 0,$$

$$ii. \quad f \leq g \Rightarrow S(f) \leq S(g),$$

$$iii. \quad |S(f)| \leq S(|f|)$$

özellikleri sağlanır [58].

2.2.2. Lemma

$S: X \rightarrow Y$ lineer pozitif operatörü verilsin. Eğer verilen operatör $S(1; x) = 1$ özelliğini sağlıyorsa her bir $f \in X$ için

$$|S(f; x) - f(x)| \leq S(|f(t) - f(x)|; x)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

S operatörleri lineer pozitif olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} & |S(f; x) - f(x)| \\ &= |S(f(t); x) - f(x)S(1; x)| \\ &\leq |S(f(t) - f(x); x)|, \text{ (Lineerlikten),} \\ &\leq S(|f(t) - f(x)|; x), \text{ (Lemma 2.2.1.iii'den),} \end{aligned}$$

elde edilir.

2.2.4. Tanım

$(X, \|\cdot\|_X)$ ve $(Y, \|\cdot\|_Y)$ elemanları fonksiyonlar olan normlu uzaylar olsun. $f_0 \in X$ fonksiyonu ve $S: X \rightarrow Y$ operatörü verilsin. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\delta = \delta(\varepsilon, f_0) > 0$ sayısı var öyle ki $\|f - f_0\|_X < \delta$ olduğunda $\|S(f) - S(f_0)\|_Y < \varepsilon$ oluyorsa bu taktirde, S operatörü f_0 değerinde süreklidir denir. Eğer S operatörü her $f \in X$ değerinde sürekli ise bu taktirde S operatörü X uzayında süreklidir denir.

2.2.5. Tanım

$(X, \|\cdot\|_X)$ ve $(Y, \|\cdot\|_Y)$ elemanları fonksiyonlar olan normlu uzaylar olsun. $S: X \rightarrow Y$ operatörü verilsin. Eğer her $f \in X$ fonksiyonu için,

$$\|S(f)\|_Y \leq M \|f\|_X$$

olacak şekilde en az bir $M > 0$ reel sayısı mevcutsa bu taktirde, S operatörüne X uzayında sınırlı operatör denir [54,55,58]. Ayrıca sınırlı bir operatörün normu

$$\|L\|_{X \rightarrow Y} = \inf \left\{ M : f \in X, \|S(f)\|_Y \leq M \|f\|_X \right\}$$

reel sayısıyla tanımlanır. Buna ek olarak, S operatörünün normu

$$\|L\|_{X \rightarrow Y} = \sup \left\{ \frac{\|S(f)\|_Y}{\|f\|_X} : f \in X, \|f\|_X \neq 0 \right\}$$

$$\|L\|_{X \rightarrow Y} = \sup \left\{ \|S(f)\|_Y : f \in X, \|f\|_X = 1 \right\}$$

$$\|L\|_{X \rightarrow Y} = \sup \left\{ \|S(f)\|_Y : f \in X, \|f\|_X \leq 1 \right\}$$

eşitliklerinden biriyle de verilebilir [54,55].

2.2.1. Teorem

$(X, \|\cdot\|_X)$ ve $(Y, \|\cdot\|_Y)$ elemanları fonksiyonlar olan normlu uzaylar olsun. $S: X \rightarrow Y$ operatörü verilsin. Buna göre, S operatörünün X uzayında sürekli olması için gerek ve yeter koşul S operatörünün X uzayında lineer ve sınırlı olmasıdır [54,55].

2.2.6. Tanım

$(X, \|\cdot\|_X)$ ve $(Y, \|\cdot\|_Y)$ elemanları reel değerli fonksiyonlar olan normlu uzaylar olsun. $\mathfrak{N}(X, Y) = \{S \mid S: X \rightarrow Y \text{ bir operatör}\}$ şeklinde bir küme olmak üzere, eğer verilen bir (S_n) dizisinin fonksiyonunun değer kümesi $\mathfrak{N}(X, Y)$ ise bu taktirde $(S_n) \subseteq \mathfrak{N}(X, Y)$ dizisine *operatör terimli dizi veya operatör dizisi* denir. Genel terimi S_n olan bir operatör dizisi (S_n) , $\{S_n\}$ ve $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sembollerinden biriyle gösterilebilir. Yani

$$h: \mathbb{N} \rightarrow \mathfrak{N}(X, Y)$$

$$n \rightarrow h(n) = S_n: X \rightarrow Y$$

$$h(\mathbb{N}) = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots\} = (S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots) = \{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

ile verilen $h(\mathbb{N}) = \{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sıralı elemanlı görüntü kümesi $\mathfrak{N}(X, Y)$ uzayı üzerinde bir operatör dizisidir ve bu durum $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{N}(X, Y)$ ile gösterilebilir. Ayrıca $\{S_n(f; \cdot)\} \subseteq Y$ ile verilen bir dizinin fonksiyon dizisi olduğu açıktır. $\{S_n(f; \cdot)\} \subseteq Y$ olduğundan $\{S_n(f; x)\} \subseteq \mathbb{R}$ şeklinde bir dizidir. Çünkü, Y uzayı reel değerli fonksiyonlardan oluşmaktadır [57].

2.2.7. Tanım

$\{S_n\}$ operatör dizisi verilsin. $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $\{S_n\}$ operatör dizisinin m -inci merkezi momenti

$$\Phi_m := \Phi_{n,m}(x) = S_n\left((t-x)^m; x\right)$$

ile tanımlanır [59].

2.2.2. Teorem (Weierstrass Yaklaşım Teoremi)

$[a, b]$ kapalı ve sınırlı aralığında tanımlı olan her sürekli fonksiyona düzgün yakınsak olacak şekilde bir polinom dizisi vardır. Yani $f \in C[a, b]$ olmak üzere $C[a, b]$ de tanımlı öyle bir $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ polinom dizisi vardır ki $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n - f\|_{C[a, b]} = 0$ dır [1,57-59].

2.2.3. Teorem (Bernstein Teoremi)

$f \in C[0, 1]$, $x \in [0, 1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

ile verilen $\{B_n(f; x)\}$ polinom dizisi verilsin. Buna göre, her bir $f \in C[0, 1]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n(f; \cdot) - f\|_{C[0, 1]} = 0$$

sağlanır [2,57-59]. Yani $\{B_n(f; x)\}$ polinom dizisi, $[0, 1]$ kümesi üzerindeki sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsaktır.

2.2.4. Teorem (Bohman Teoremi)

$n = 1, 2, 3, \dots$ ve $\nu = 0, 1, \dots, n$ için $\mu < \nu$ iken $\xi_{\mu, n} < \xi_{\nu, n}$ ile verilen $(0, 1)$ kümesi üzerindeki $\{\xi_{\nu, n}\}$ sistemi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{0, n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{n, n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\nu} \{\xi_{\nu+1, n} - \xi_{\nu, n}\} = 0 \quad (2.1)$$

ile verilen Eş. 2.1 şartlarını sağlasın. $x \in [0, 1]$ ve $\psi_{\nu, n}(x) \geq 0$ olmak üzere

$$S_n(f; x) = \sum_{v=0}^n f(\xi_{v,n}) \psi_{v,n}(x)$$

ile verilen bir dizinin $[0,1]$ kümesi üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart (S_n) operatör dizisinin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(e_k; \cdot) - e_k\|_{C[0,1]} = 0, \quad k = 0, 1, 2 \quad (2.2)$$

ile verilen Eş. 2.2 ifadesindeki koşullarını sağlamasıdır [3]. Burada, e_k fonksiyonları

$$e_k : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad e_k(x) = x^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

şeklindedir [3].

2.2.5. Teorem (Korovkin Teoremi)

$\{S_n\}$ lineer pozitif olan operatör dizisi verilsin. Eğer $\{S_n\}$ operatör dizisi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(e_k; \cdot) - e_k\|_{C[a,b]} = 0, \quad k = 0, 1, 2 \quad (2.3)$$

şartlarını sağlıyorsa her bir $f \in C[a,b]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(f; \cdot) - f\|_{C[a,b]} = 0$$

dır [5,57-59]. Yani, $\{S_n\}$ operatör dizisi, Eş. 2.3 şartlarını sağlıyorsa bu operatör dizisi $[a,b]$ üzerinde tanımlı olan sürekli bir fonksiyona düzgün bir şekilde yakınsar. Burada Eş.

2.3 ifadesinde verilen e_k , $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $e_k(x) = x^k$ ile verilir.

Uyarı

Teorem 2.2.5’de, $f \in C[a, b]$ olduğundan Teorem 2.1.1’den dolayı f fonksiyonu sınırlıdır. Ayrıca Teorem 2.1.2’den dolayı da f fonksiyonunun düzgün sürekli olduğuna dikkat edilmelidir.

2.2.8. Tanım

Belirli bir Λ lineer aralığında bir f fonksiyonuna yakınsayan bir $\{S_n\}$ operatör dizisi verilsin. $\{S_n\}$ dizisinin n -inci teriminin $x \in \Lambda$ noktasındaki $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşım hatası

$$\varepsilon_n(f, x) := |S_n(f; x) - f(x)| \quad (2.4)$$

pozitif reel sayısı ile verilir.

2.3. Klasik Süreklilik Modülü

2.3.1. Tanım

$\Lambda, \mathbb{R}$ nin keyfi bir alt aralığını gösterebilir. $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı ve sürekli bir fonksiyon ve $\delta > 0$ olsun. Buna göre

$$\omega(f; \delta) = \sup_{|t-x| \leq \delta} \{|f(t) - f(x)| : x, t \in \Lambda\} \quad (2.5)$$

ile verilen pozitif $\omega(f; \delta)$ reel sayısına f fonksiyonun süreklilik modülü denir. Burada t yerine $x+h$ alınırsa f fonksiyonunun süreklilik modülü

$$\omega(f; \delta) = \sup_{|h| \leq \delta} \{|f(x+h) - f(x)| : x+h, x \in \Lambda\} \quad (2.6)$$

şeklinde de verilebilir [60-62].

Anlaşılabacağı üzere eğer bir fonksiyon sınırlı değilse $\omega(f; \delta)$ sınırlı olamayacağından fonksiyonun sınırlı olması önemlidir. Bu yüzden, klasik süreklilik modülü sınırlı bir fonksiyon için anlamlıdır.

2.3.1. Teorem

Λ , $\mathbb{R}$ nin keyfi bir alt aralığını göstereyin, $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı ve sürekli bir fonksiyon ve $\delta > 0$ olsun. Buna göre f fonksiyonunun süreklilik modülü

$$i. \omega(f; \delta) \geq 0,$$

$$ii. 0 < \delta_1 \leq \delta_2 \Rightarrow \omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2),$$

$$iii. f \text{ düzgün sürekli} \Leftrightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(f; \delta) = 0,$$

$$iv. \forall m \in \mathbb{N} \text{ için, } \omega(f; m\delta) \leq m\omega(f; \delta),$$

$$v. \forall \eta \in \mathbb{R}^+ \text{ için, } \omega(f; \eta\delta) \leq (\eta + 1)\omega(f; \delta),$$

$$vi. \forall x, t \in \Lambda \text{ için, } |f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|),$$

$$vii. \forall x, t \in \Lambda \text{ için, } |f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t - x|}{\delta} + 1 \right) \omega(f; \delta)$$

özelliklerini sağlar [62].

2.4. Lipschitz Sınıfından Fonksiyonlar

2.4.1. Tanım

Λ aralığında tanımlı f fonksiyonu verilsin ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Eğer her bir $x, t \in \Lambda$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq M |t - x|^\alpha \quad (2.7)$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı mevcutsa, f fonksiyonuna α mertebeli M katsayılı *Lipschitz sınıfından bir fonksiyon* denir [62]. α mertebeli M katsayılı Lipschitz sınıfından fonksiyonların sınıfı

$$Lip_M(\alpha) = \left\{ f : x, t \in \Lambda, |f(t) - f(x)| \leq M |t - x|^\alpha \right\} \quad (2.8)$$

ile verilir [62].

Uyarı

Eğer Tanım 2.4.1’de $\alpha > 1$ alınırsa $\beta > 0$ olmak üzere $\alpha = \beta + 1$ şeklinde yazılabilir.

Şimdi $f \in Lip_M(\alpha)$ olsun. Buna göre, $\forall x, t \in \Lambda$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq M |t - x|^\alpha$$

$$|f(t) - f(x)| \leq M |t - x|^{\beta+1}$$

$$\left| \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \right| \leq M |t - x|^\beta \quad (2.9)$$

eşitsizliği elde edilir ve bu eşitsizlikte her iki tarafın $t \rightarrow x$ için limiti alınırsa

$$\lim_{t \rightarrow x} \left| \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \right| \leq \lim_{t \rightarrow x} M |t - x|^\beta \quad (2.10)$$

elde edilir. Buna göre

$$\left| \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \right| \leq M \left| \lim_{t \rightarrow x} (t - x) \right|^\beta$$

$$|f'(x)| \leq 0$$

$$f'(x) = 0$$

$$\exists c \in \mathbb{R}, \quad f(x) = c \quad (2.11)$$

Eş. 2.11 ifadesi her bir $x \in \Lambda$ için sağlandığından,

$$f : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = c$$

şeklinde bir sabit fonksiyon elde edilir. Yine benzer şekilde, $\alpha = 0$ olması durumunda f fonksiyonu açık bir şekilde sadece sınırlı fonksiyonu ifade edecektir. Bu yüzden tanımın daha anlamlı olması açısından Tanım 2.4.1'de α sayısı $0 < \alpha \leq 1$ olarak belirlenmiştir.

2.5. Peetre- K Fonksiyoneli ve İkinci Süreklilik Modülü

2.5.1. Tanım

$[0, \infty)$ kümesi üzerinde tanımlı sürekli ve sınırlı fonksiyonların kümesi $C_B[0, \infty)$ olmak üzere

$$C_B^2[0, \infty) = \{ f \in C_B[0, \infty) : f', f'' \in C_B[0, \infty) \}$$

ile verilen küme

$$\|\cdot\|_{C_B^2[0, \infty)} : C_B^2[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$$

$$f \rightarrow \|f\|_{C_B^2[0, \infty)} = \|f\|_{C_B[0, \infty)} + \|f'\|_{C_B[0, \infty)} + \|f''\|_{C_B[0, \infty)}$$

ile verilen dönüşümle bir normlu uzaydır. Burada, $\|\cdot\|_{C_B[0, \infty)}$ ile verilen norm, $C_B[0, \infty)$ üzerindeki supremum normu olmak üzere $C_B^2[0, \infty)$ normlu uzayına, *ikinci merteben türevli supremum normlu uzay* denir [60].

2.5.2. Tanım

Herhangi bir $f \in C_B[0, \infty)$ fonksiyonunun *Peetre-K fonksiyoneli*; $\delta > 0$ olmak üzere

$$K(f; \delta) = \inf_{g \in C_B^2[0, \infty)} \left\{ \|f - g\|_{C_B[0, \infty)} + \delta \|g\|_{C_B^2[0, \infty)} \right\} \quad (2.12)$$

reel sayısı ile verilir [60].

2.5.3. Tanım

Herhangi bir $f \in C_B[0, \infty)$ fonksiyonunun *ikinci süreklilik modülü*, $\delta > 0$ olmak üzere

$$\omega_2(f; \delta) = \sup_{0 < h \leq \delta} \left\{ |f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)| : x \in [0, \infty) \right\} \quad (2.13)$$

reel sayısı ile verilir [60].

2.5.1. Teorem

$f \in C_B[0, \infty)$ ve $\delta > 0$ olmak üzere Peetre- K fonksiyoneli ve ikinci süreklilik modülü arasında

$$K(f; \delta) \leq M \left\{ \omega_2(f; \sqrt{\delta}) + \min(1, \delta) \|f\|_{C_B[0, \infty)} \right\} \quad (2.14)$$

şeklinde bir bağıntı vardır. Burada, M pozitif bir sabittir [63].

2.6. İki Değişkenli Hermite Polinomları

2.6.1. Tanım

λ bir parametre olmak üzere

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + [q(x) + \lambda s(x)] y = 0, \quad a \leq x \leq b \quad (2.15)$$

ikinci basamaktan lineer diferensiyel denklemi göz önüne alınsın. L diferensiyel operatörü

$$L = \frac{d}{dx} \left(p \frac{d}{dx} \right) + q \quad (2.16)$$

olarak tanımlanırsa Eş. 2.15 denklemi

$$Ly + \lambda s(x)y = 0 \quad (2.17)$$

biçiminde verilebilir ve bu denkleme *Sturm-Liouville diferensiyel denklemi* denir. Ayrıca Eş. 2.17'deki denklem

$$\left. \begin{aligned} a_1 y(a) + a_2 y'(a) &= 0 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

sınır koşulları ile birlikte *Sturm-Liouville* sistemini tanımlar. Burada Sturm-Liouville sistemini sağlayan λ parametrelerine bu sistemin öz değerleri ve bu parametreler için elde edilen çözümlere de bahsi geçen sistemin öz fonksiyonları denir. Ek olarak, $s(x)$ ile verilen s fonksiyonuna sistemin potansiyel fonksiyonu denir [64].

Uyarı

Eş. 2.15'deki Sturm-Liouville diferensiyel denkleminde

$$-\infty < x < \infty, \quad q(x) = 0 \quad \text{ve} \quad p(x) = s(x) = e^{-x^2}$$

şeklinde alınırsa

$$\frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} \frac{dy}{dx} \right) + \lambda e^{-x^2} y = 0$$

$$-2xe^{-x^2} \frac{dy}{dx} + e^{-x^2} \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) + \lambda e^{-x^2} y = 0$$

$$-2x \frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) + \lambda \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y'' - 2xy + \lambda y = 0$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Özel olarak λ parametresi $\lambda = 2n$ şeklinde bir çift doğal sayı olarak alınırsa elde edilen bu diferensiyel denklemi kullanarak aşağıdaki tanım verilebilir.

2.6.2. Tanım

n bir doğal sayı olmak üzere

$$y'' - 2xy + 2ny = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (2.19)$$

diferensiyel denkleminin çözümlerinden biri olan ve

$$\overline{H}_n(x) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{(-1)^k n! (2x)^{n-2k}}{k! (n-2k)!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.20)$$

ile verilen polinomlara *Hermite polinomları* denir [65].

2.6.3. Tanım

$\{f_n\}$ fonksiyon dizisi olsun. Buna göre iki değişkenli bir G fonksiyonu değişkenlerinden birine göre Taylor serisine açılsın. Yani G fonksiyonu

$$G(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) t^k \quad (2.21)$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahip olsun. Bu durumda G fonksiyonuna $\{f_n\}$ fonksiyon dizisinin *üreteç veya doğurucu fonksiyonu* denir [64]. Benzer şekilde eğer G fonksiyonu üç veya daha fazla değişkenli olursa bu fonksiyonun değişkenlerinden birine göre Taylor serisine açılmış şekliyle benzer tanımdan bahsedilebilir.

2.6.1. Lemma

$\overline{H}_n$ Hermite polinomları için

$$\exp(2xt - t^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{H}_k(x) t^k}{k!} \quad (2.22)$$

bağıntısı gerçekleşeceğinden $G(x, t) = \exp(2xt - t^2)$ ile verilen G fonksiyonu $\{\overline{H}_n\}$ polinomları için doğurucu fonksiyondur [65].

2.6.4. Tanım

$m, n \in \mathbb{N}$ ve $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$H_k(x, y) = k! \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} \frac{x^{k-2r} y^r}{r!(k-2r)!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.23)$$

ile verilen polinomlara *iki değişkenli Hermite polinomları* denir [48]. Ayrıca bu polinomlar, Kampé de Fériet polinomları olarak da bilinmektedir. Bu polinomlar için

$$\exp(tx + yt^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k(x, y) t^k}{k!} \quad (2.24)$$

eşitliği sağlanır. Bu durumda iki değişkenli Hermite polinomları için üreteç fonksiyon

$$R(x, y, t) = \exp(tx + yt^2) \quad (2.25)$$

ile verilir [48].

Uyarı

İki değişkenli Hermite polinomları, tanımından anlaşacağı üzere her zaman pozitif değerli olmayabilir. Şimdi, iki değişkenli Hermite polinomları daima negatif olmayacak şekilde oluşturulsun. Yani, Tanım 2.6.4’de

$$y = \alpha \geq 0 \quad \text{ve} \quad x = n \in \mathbb{N}$$

olarak alınsın. Bu durumda

$$H_k(n, \alpha) = k! \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} \frac{n^{k-2r} \alpha^r}{r!(k-2r)!} \quad (2.26)$$

olarak verilebilir [49,50]. Benzer şekilde

$$\exp(nt + \alpha t^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k(n, \alpha) t^k}{k!} \quad (2.27)$$

elde edileceğinden özel seçilen iki değişkenli Hermite polinomları için doğurucu fonksiyon

$$R(n, \alpha, t) = \exp(nt + \alpha t^2) \quad (2.28)$$

ile verilir [49,50].

Örnek

Eş. 2.26 yardımıyla elde edilen bazı polinomlar

$$i. H_0(n, \alpha) = 1, \quad ii. H_1(n, \alpha) = n, \quad iii. H_2(n, \alpha) = n^2 + 2\alpha, \quad iv. H_3(n, \alpha) = n^3 + 6\alpha n,$$

$$v. H_4(n, \alpha) = n^4 + 12\alpha n^2 + 12\alpha^2, \quad vi. H_5(n, \alpha) = n^5 + 20\alpha n^3 + 60\alpha^2 n$$

şeklindedir.

Örnek

Eş. 2.26 ile verilen iki değişkenli Hermite polinomları için $H_3(n, \alpha)$ terimi

$$\left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 1$$

olduğundan dolayı

$$H_3(n, \alpha)$$

$$= 3! \sum_{r=0}^1 \frac{n^{3-2r} \alpha^r}{r! (3-2r)!}$$

$$= 3! \frac{n^{3-0} \alpha^0}{0! (3-0)!} + 3! \frac{n^{3-2} \alpha^1}{1! (3-2)!}$$

$$= n^3 + 6\alpha n$$

şeklinde bulunur. Bu örnekte terimlerin nasıl bulunacağı gösterilmiştir.

2.6.1. Teorem

Bir $x \in \Lambda$ için t nin bir analitik fonksiyonu olan G fonksiyonu

$$G(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) t^k, \quad |t| < r, \quad x \in \Lambda \quad (2.29)$$

şeklinde serinin yakınsaklık aralığı içerisinde t değişkenine göre Taylor serisine açılsın.

Bu taktirde

$$\frac{\partial^s}{\partial t^s} G(x, t) = \sum_{k=s}^{\infty} f_k(x) \frac{d^s}{dt^s} (t^k), \quad s = 1, 2, \dots \quad (2.30)$$

türev özelliği sağlanır [64].

2.6.1. Lemma

Eş. 2.26 ile verilen iki değişkenli Hermite polinomları

$$i. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k(n, \alpha) t^{k-1}}{(k-1)!} = e^{nt+\alpha t^2} (n + 2\alpha t)$$

$$ii. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{H_k(n, \alpha) t^{k-2}}{(k-2)!} = e^{nt+\alpha t^2} (n^2 + 4n\alpha t + 4\alpha^2 t^2 + 2\alpha)$$

$$iii. \sum_{k=3}^{\infty} \frac{H_k(n, \alpha) t^{k-3}}{(k-3)!} = e^{nt+\alpha t^2} (n^3 + 6n^2\alpha t + n(12\alpha^2 t^2 + 6\alpha) + 8\alpha^3 t^3 + 12\alpha^2 t)$$

$$iv. \sum_{k=4}^{\infty} \frac{H_k(n, \alpha) t^{k-4}}{(k-4)!} = e^{nt+\alpha t^2} \left\{ \begin{array}{l} n^4 + 8n^3\alpha t + n^2(24\alpha^2 t^2 + 12\alpha) \\ + n(32\alpha^3 t^3 + 48\alpha^2 t) + 16\alpha^4 t^4 + 48\alpha^3 t^2 + 12\alpha^2 \end{array} \right\}$$

özelliklerini sağlar [49].

İspat

Teorem 2.6.1'den yararlanılır ve Eş. 2.27'de her iki tarafın t parametresine göre türevi alınırsa istenilenler elde edilir.

2.7. Szász Operatör Dizisi

2.7.1. Tanım

$x \in [0, \infty)$ ve $f \in C[0, \infty)$ olmak üzere

$$S_n(f; x) = \exp(-nx) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.31)$$

ile verilen $\{S_n\}$ dizisine *Szász operatör dizisi* denir [6].

2.7.1. Lemma

Eş. 2.31 ile verilen $\{S_n\}$ operatör dizisi

$$\begin{aligned} i. S_n(1; x) &= 1, & ii. S_n(t; x) &= x, & iii. S_n(t^2; x) &= x^2 + \frac{x}{n}, \\ iv. S_n(t^3; x) &= x^3 + \frac{3x^2}{n} + \frac{x}{n^2}, & v. S_n(t^4; x) &= x^4 + \frac{6x^3}{n} + \frac{7x^2}{n^2} + \frac{x}{n^3} \end{aligned}$$

özelliklerini sağlar [66].

2.7.2. Lemma

Eş. 2.31 ile verilen $\{S_n\}$ operatör dizisi

$$\begin{aligned} i. \Phi_0 &= S_n((t-x)^0; x) = 1, & ii. \Phi_1 &= S_n((t-x)^1; x) = 0, & iii. \Phi_2 &= S_n((t-x)^2; x) = \frac{x}{n}, \\ iv. \Phi_3 &= S_n((t-x)^3; x) = \frac{x}{n^2}, & v. \Phi_4 &= S_n((t-x)^4; x) = \frac{x}{n^3} + \frac{3x^2}{n^2} \end{aligned}$$

merkezi moment değerlerine sahiptir [66].

2.7.1. Teorem

$f \in C_B[0, \infty)$ ve $x \in [0, b]$ olmak üzere Eş. 2.31 ile verilen $S_n(f; x)$ değeri $[0, b] \subseteq [0, \infty)$ kümesi üzerinde $f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır [66].

2.7.2. Teorem

Eş. 2.31 ile verilen $\{S_n\}$ operatör dizisi

$$i. f \in C_B[0, \infty), x \in [0, b] \Rightarrow |S_n(f; x) - f(x)| \leq (1 + \sqrt{b}) \omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$$ii. f \in C_B[0, \infty), x \in [0, b] \Rightarrow |S_n(f; x) - f(x)| \leq 2K\left(f; \frac{b}{4n}\right),$$

$$iii. f \in Lip_M(\alpha) \Rightarrow |S_n(f; x) - f(x)| \leq M\left(\frac{b}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2}},$$

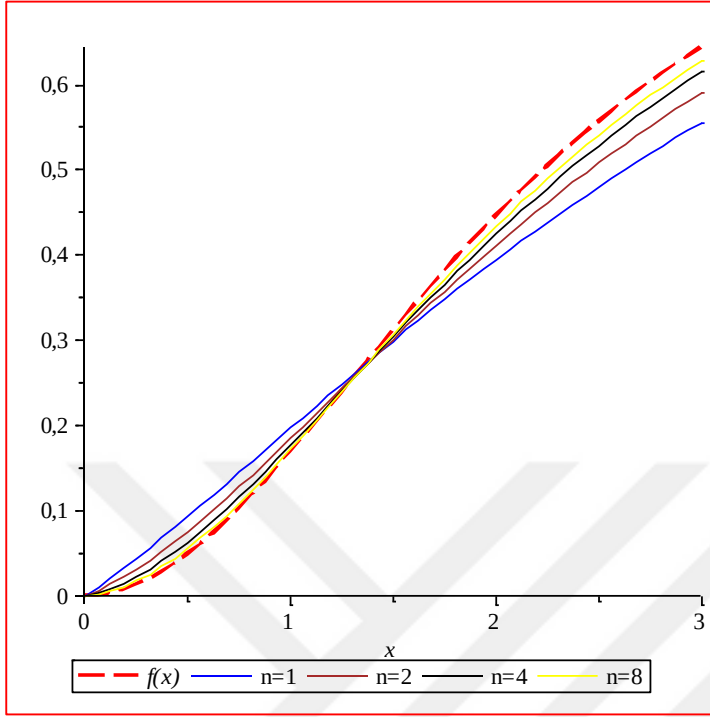
$$iv. f \in C_B^2[0, \infty) \text{ ve } x \text{ sabit bir nokta} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n\{S_n(f; x) - f(x)\} = \frac{1}{2} x f''(x)$$

özelliklerini sağlar [66].

Uyarı

Aslında, temel kavramlarda tanımlanan klasik süreklilik modülü, Lipschitz sınıfı, Peetre- K fonksiyoneli kavramları bazı fonksiyon sınıflarında bir operatörün o sınıftaki fonksiyonlara nasıl yakınsadığı hakkında bilgiler vermektedir. Ama her kriter her fonksiyon sınıfı için uygun olmayabilir. Bu yüzden hangi fonksiyon sınıfında çalışıyorsa ona göre kriter seçilmelidir. Örneğin, yukarıdaki Teorem 2.7.2'nin öncüllerinde sol tarafta çalışılan fonksiyon sınıfı, sağ tarafta ise bu sınıflar için bahsedilen kriterlere örnekler vardır.

Örnek

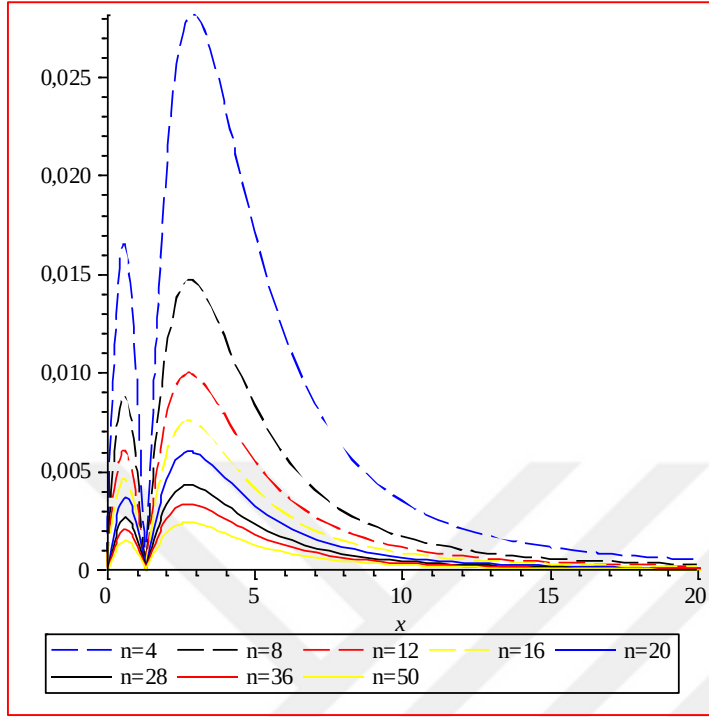


$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 5}$
fonksiyonu verilsin. $[0, 3]$
aralığında Szász operatör
dizisinin terimlerinin $f(x)$
fonksiyonuna yakınsadığı
yandaki şekilde verilmiştir.

Şekil 2.1. $S_n(f; x)$ operatörlerinin $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşımı

Yukarıdaki grafikte $f(x)$ fonksiyonu kesikli kırmızı ve $S_1(f; x)$, $S_2(f; x)$, $S_4(f; x)$ ve $S_8(f; x)$ operatörleri sırasıyla mavi, kahverengi, siyah ve sarı renkteki eğrilerle gösterilmiştir. Dikkat edilirse n değeri artıkça $S_n(f; x)$ operatörü de $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşmaktadır.

Örnek



$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 5}$ fonksiyonu verilsin. $[0, 20]$ aralığında Szász operatör dizisinin bazı terimlerinin f fonksiyonuna yaklaşım hatalarının grafiği yandaki şekilde verilmiştir.

Şekil 2.2. (S_n) dizisinin bazı terimleri için $\varepsilon_n(f, x)$ yaklaşım hatası

$\varepsilon_n(f, x) = |S_n(f; x) - f(x)|$ ve $x \in [0, 20]$ olmak üzere yukarıdaki grafikte $\varepsilon_4(f, x)$, $\varepsilon_8(f, x)$, $\varepsilon_{12}(f, x)$, $\varepsilon_{16}(f, x)$, $\varepsilon_{20}(f, x)$, $\varepsilon_{28}(f, x)$, $\varepsilon_{36}(f, x)$ ve $\varepsilon_{50}(f, x)$ yaklaşım hataları sırasıyla kesikli mavi, kesikli siyah, kesikli kırmızı, kesikli sarı, mavi, siyah, kırmızı ve sarı eğriler ile temsil edilmiştir. Dikkat edilirse n doğal sayısı artıkça hata sifıra yaklaşmaktadır. Bir başka deyişle n sayısı artıkça $S_n(f; x)$ operatörünün $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşımının artığı grafik üzerinde de görülmektedir.

2.8. Moment Genelleyici Fonksiyon

Bu bölümde lineer pozitif bir operatörün merkezi momentlerinin farklı bir yoldan elde edilmesi üzerinde durulacaktır. Gupta, Malik ve Rassias [67] 2018 yılında bu konu hakkında önemli bir çalışma yapmıştır. Ayrıca ayrıntılı bilgi için [67] ve [68] referanslarına bakılabilir.

2.8.1. Tanım

(A_n) lineer pozitif operatör dizisi verilsin. Bu lineer pozitif operatör dizisinin moment genelleyici fonksiyonu

$$M_{\theta,x}(A_n) := A_n(e^{\theta t}; x) \quad (2.32)$$

ile verilir [67,68].

Moment genelleyici fonksiyonun orijini değiştirilerek merkezi momenti bulmanın yöntemi aşağıda verilmiştir.

(A_n) lineer pozitif operatör dizisi verilsin. Buna göre (A_n) dizisinin m -inci merkezi momenti

$$e^{-\theta x} M_{\theta,x}(A_n) = e^{-\theta x} A_n(e^{\theta t}; x) \quad (2.33)$$

ifadesi $\theta=0$ noktası civarında kuvvet serisine açıldığında açılımın içinde yer alan $\frac{\theta^m}{m!}$ teriminin katsayısıyla bulunur [68].

Örnek

Eş. 2.31 ile verilen Szász operatör dizisinin moment genelleyici fonksiyonunu

$$M_{\theta,x}(S_n) = \exp \left(nx \left(e^{\frac{\theta}{n}} - 1 \right) \right)$$

şeklindedir [67,68].

3. İKİ DEĞİŞKENLİ HERMITE POLİNOMLARINI İÇEREN SZÁSZ OPERATÖRÜNÜN GENELLEMESİ

Bu bölümde G. Krech [49] tarafından verilen iki değişkenli Hermite polinomlarını içeren Szász operatör dizisinin bir genellemesinin tanımı ve bu genellenenin yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

3.1. $\{G_n^\alpha\}$ Operatör Dizisinin Tanımı

3.1.1. Tanım

$H_k(n, \alpha)$ Eş. 2.26 ile verilen özel seçilmiş iki değişkenli Hermite polinomlarını temsil etsin. $x \in [0, \infty)$, $f \in C[0, \infty)$ ve $\alpha \geq 0$ olmak üzere

$$G_n^\alpha(f; x) = \exp(-nx - \alpha x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} H_k(n, \alpha) f\left(\frac{k}{n}\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

ile verilen $\{G_n^\alpha\}$ operatör dizisine *iki değişkenli Hermite polinomlarını içeren Szász operatörlerinin genellemesi* denir [49].

Uyarı

$\overline{H}_k(n)$ ve $H_k(n, \alpha)$ sırasıyla Eş. 2.20 ve Eş. 2.26 ile verilen tek değişkenli ve iki değişkenli Hermite polinomlarını gösterebilirsin. Buna göre $H_k(2n, -1) = \overline{H}_k(n)$ olduğundan $x \in [0, \infty)$, $f \in C[0, \infty)$ olmak üzere Eş. 3.1 verilen operatör özel olarak $\alpha = -1$ için

$$\overline{G}_n^{-1}(f; x) = \exp(-2nx + x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \overline{H}_k(n) f\left(\frac{k}{2n}\right)$$

gibi tek değişkenli Hermite polinomlarına bağlı bir operatör şeklinde de yazılabilir. Bu operatör lineerdir ancak pozitif değildir [49]. Korovkin tipi yaklaşım lineer ve pozitif

operatörler için geçerlidir bu yüzden bu operatörün yaklaşım özelliklerini incelemek şimdilik mümkün değildir.

3.1.1. Lemma

$\{G_n^\alpha\}$ operatör dizisi lineer ve pozitifdir [49].

3.2. $\{G_n^\alpha\}$ Dizisinin Bazı Test Değerleri ve Merkezi Momentleri

3.2.1. Lemma

$\{G_n^\alpha\}$ operatör dizisi

i. $G_n^\alpha(1; x) = 1,$

ii. $G_n^\alpha(t; x) = x + \frac{2\alpha x^2}{n},$

iii. $G_n^\alpha(t^2; x) = x^2 + \frac{4\alpha x^3 + x}{n} + \frac{4\alpha^2 x^4 + 4\alpha x^2}{n^2},$

iv. $G_n^\alpha(t^3; x) = x^3 + \frac{6\alpha x^4 + 3x^2}{n} + \frac{12\alpha^2 x^5 + 18\alpha x^3 + x}{n^2} + \frac{24\alpha^2 x^4 + 8\alpha^3 x^6 + 8\alpha x^2}{n^3},$

v. $G_n^\alpha(t^4; x) = x^4 + \frac{8\alpha x^5 + 6x^3}{n} + \frac{24\alpha^2 x^6 + 48\alpha x^4 + 7x^2}{n^2}$

$$+ \frac{32\alpha^3 x^7 + 120\alpha^2 x^5 + 64\alpha x^3 + x}{n^3} + \frac{112\alpha^2 x^4 + 96\alpha^3 x^6 + 16\alpha^4 x^8}{n^4}$$

eşitliklerini sağlamaktadır [49].

İspat

i. Eş. 2.27’de $t = x$ alınırsa

$$\exp(nx + \alpha x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k(n, \alpha) x^k}{k!} \quad (3.2)$$

eşitliği yazılabilir. Buna göre Eş. 3.2 kullanılarak

$$\begin{aligned} G_n^\alpha(1; x) &= \exp(-nx - \alpha x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} H_k(n, \alpha) \\ &= \exp(-nx - \alpha x^2) \exp(nx + \alpha x^2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

ii. Lemma 2.6.1’in (i)-inci özelliğinde $t = x$ alınırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k(n, \alpha) x^{k-1}}{(k-1)!} = \exp(nx + \alpha x^2) (n + 2\alpha x) \quad (3.3)$$

eşitliği yazılabilir. Buna göre Eş. 3.3 kullanılarak

$$\begin{aligned} G_n^\alpha(t; x) &= \exp(-nx - \alpha x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} H_k(n, \alpha) \frac{k}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp(-nx - \alpha x^2) \frac{x}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} H_k(n, \alpha) \\
&= \exp(-nx - \alpha x^2) \frac{x}{n} \exp(nx + \alpha x^2) (n + 2\alpha x) \\
&= x + \frac{2\alpha x^2}{n}
\end{aligned}$$

elde edilir.

iii. Lemma 2.6.1'in (ii)-inci özelliğinde $t = x$ alınırsa

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{H_k(n, \alpha) x^{k-2}}{(k-2)!} = \exp(nx + \alpha x^2) (n^2 + 4n\alpha x + 4\alpha^2 x^2 + 2\alpha) \quad (3.4)$$

eşitliği yazılabilir. Buna göre $k^2 = k(k-1) + k$ olup, Eş. 3.4'den yararlanılarak

$$\begin{aligned}
&G_n^\alpha(t^2; x) \\
&= \exp(-nx - \alpha x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} H_k(n, \alpha) \frac{k^2}{n^2} \\
&= \exp(-nx - \alpha x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} H_k(n, \alpha) \frac{k(k-1) + k}{n^2} \\
&= \exp(-nx - \alpha x^2) \frac{x^2}{n^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-2}}{(k-2)!} H_k(n, \alpha) \\
&\quad + \exp(-nx - \alpha x^2) \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} H_k(n, \alpha) \frac{k}{n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^2}{n^2} (n^2 + 4n\alpha x + 4\alpha^2 x^2 + 2\alpha) + \frac{1}{n} G_n^\alpha(t; x) \\
&= \frac{x^2}{n^2} (n^2 + 4n\alpha x + 4\alpha^2 x^2 + 2\alpha) + \frac{1}{n} \left(x + \frac{2\alpha x^2}{n} \right)
\end{aligned}$$

$$= x^2 + \frac{4\alpha x^3 + x}{n} + \frac{4\alpha^2 x^4 + 4\alpha x^2}{n^2}$$

elde edilir.

iv. Lemma 2.6.1'in (iii)-inci özelliğinde $t = x$ alınırsa

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{H_k(n, \alpha) x^{k-3}}{(k-3)!} = \exp(nx + \alpha x^2) (n^3 + 6n^2 \alpha x + n(12\alpha^2 x^2 + 6\alpha) + 8\alpha^3 x^3 + 12\alpha^2 x) \quad (3.5)$$

eşitliği yazılabilir. $k^3 = k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) + k$ olup Eş. 3.4 ve Eş. 3.5'den yararlanılarak

$$\begin{aligned}
&G_n^\alpha(t^3; x) \\
&= \exp(-nx - \alpha x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} H_k(n, \alpha) \frac{k^3}{n^3} \\
&= \exp(-nx - \alpha x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} H_k(n, \alpha) \frac{k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) + k}{n^3} \\
&= \exp(-nx - \alpha x^2) \frac{x^3}{n^3} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{x^{k-3}}{(k-3)!} H_k(n, \alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \exp(-nx - \alpha x^2) \frac{3x^2}{n^3} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-2}}{(k-2)!} H_k(n, \alpha) \\
& + \exp(-nx - \alpha x^2) \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} H_k(n, \alpha) \frac{k}{n} \\
& = \frac{x^3}{n^3} \left(n^3 + 6n^2 \alpha x + n(12\alpha^2 x^2 + 6\alpha) + 8\alpha^3 x^3 + 12\alpha^2 x \right) \\
& + \frac{3x^2}{n^3} \left(n^2 + 4n\alpha x + 4\alpha^2 x^2 + 2\alpha \right) + \frac{1}{n^2} G_n^\alpha(t; x) \\
& = x^3 + \frac{6\alpha x^4 + 3x^2}{n} + \frac{12\alpha^2 x^5 + 18\alpha x^3 + x}{n^2} + \frac{24\alpha^2 x^4 + 8\alpha^3 x^6 + 8\alpha x^2}{n^3}
\end{aligned}$$

elde edilir.

v. Lemma 2.6.1'in (iv)-üncü özelliğinde $t = x$ alınır

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=4}^{\infty} \frac{H_k(n, \alpha) x^{k-4}}{(k-4)!} \\
& = \exp(nx + \alpha x^2) \left(n^4 + 8n^3 \alpha x + n^2 (24\alpha^2 x^2 + 12\alpha) \right. \\
& \quad \left. + n(32\alpha^3 x^3 + 48\alpha^2 x) + 16\alpha^4 x^4 + 48\alpha^3 x^2 + 12\alpha^2 \right)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

eşitliği yazılabilir.

$$k^4 = k(k-1)(k-2)(k-3) + 6k(k-1)(k-2) + 7k(k-1) + k$$

Olup, Eş. 3.4, Eş. 3.5 ve Eş. 3.6'dan

$$\begin{aligned}
& G_n^\alpha(t^4; x) \\
&= \exp(-nx - \alpha x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} H_k(n, \alpha) \frac{k^4}{n^4} \\
&= \exp(-nx - \alpha x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} H_k(n, \alpha) \frac{1}{n^4} \left\{ \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{+6k(k-1)(k-2)+7k(k-1)+k} \right\} \\
&= \exp(-nx - \alpha x^2) \frac{x^4}{n^4} \sum_{k=4}^{\infty} \frac{x^{k-4}}{(k-4)!} H_k(n, \alpha) + \exp(-nx - \alpha x^2) \frac{6x^3}{n^4} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{x^{k-3}}{(k-3)!} H_k(n, \alpha) \\
&+ \exp(-nx - \alpha x^2) \frac{7x^2}{n^4} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-2}}{(k-2)!} H_k(n, \alpha) + \exp(-nx - \alpha x^2) \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} H_k(n, \alpha) \frac{k}{n} \\
&= \frac{x^4}{n^4} \left(n^4 + 8n^3 \alpha x + n^2 (24\alpha^2 x^2 + 12\alpha) + n(32\alpha^3 x^3 + 48\alpha^2 x) + 16\alpha^4 x^4 + 48\alpha^3 x^2 + 12\alpha^2 \right) \\
&+ \frac{6x^3}{n^4} \left(n^3 + 6n^2 \alpha x + n(12\alpha^2 x^2 + 6\alpha) + 8\alpha^3 x^3 + 12\alpha^2 x \right) \\
&+ \frac{7x^2}{n^4} \left(n^2 + 4n\alpha x + 4\alpha^2 x^2 + 2\alpha \right) + \frac{1}{n^3} G_n^\alpha(t; x) \\
&= x^4 + \frac{8\alpha x^5 + 6x^3}{n} + \frac{24\alpha^2 x^6 + 48\alpha x^4 + 7x^2}{n^2} + \frac{32\alpha^3 x^7 + 120\alpha^2 x^5 + 64\alpha x^3 + x}{n^3} \\
&+ \frac{112\alpha^2 x^4 + 96\alpha^3 x^6 + 16\alpha^4 x^8}{n^4}
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.2.2. Lemma

$\{G_n^\alpha\}$ operatör dizisinin moment genelleyici fonksiyonu

$$M_{\theta,x}(G_n^\alpha) = \exp\left(nx\left(e^{\frac{\theta}{n}} - 1\right) + \alpha x^2\left(e^{\frac{2\theta}{n}} - 1\right)\right) \quad (3.7)$$

şeklindedir.

İspat

Tanım 2.8.1'deki moment genelleyici fonksiyonun tanımını kullanılarak

$$M_{\theta,x}(G_n^\alpha)$$

$$= G_n^\alpha(e^{\theta t}; x)$$

$$= \exp(-nx - \alpha x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} H_k(n, \alpha) e^{\frac{\theta k}{n}}$$

$$= \exp(-nx - \alpha x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\exp\left(\frac{\theta}{n}\right)x\right)^k}{k!} H_k(n, \alpha)$$

$$= \exp(-nx - \alpha x^2) \exp\left(nxe^{\frac{\theta}{n}} + \alpha e^{\frac{2\theta}{n}} x^2\right)$$

$$= \exp\left(nx\left(e^{\frac{\theta}{n}} - 1\right) + \alpha x^2\left(e^{\frac{2\theta}{n}} - 1\right)\right)$$

elde edilir.

3.2.3. Lemma

$\{G_n^\alpha\}$ operatör dizisi

i. $\Phi_0 = 1,$

ii. $\Phi_1 = \frac{2\alpha x^2}{n},$

iii. $\Phi_2 = \frac{x}{n} + \frac{4\alpha^2 x^4 + 4\alpha x^2}{n^2},$

iv. $\Phi_3 = \frac{6\alpha x^3 + x}{n^2} + \frac{8\alpha^3 x^6 + 24\alpha^2 x^4 + 8\alpha x^2}{n^3},$

v. $\Phi_4 = \frac{3x^2}{n^2} + \frac{24\alpha^2 x^5 + 32\alpha x^3 + x}{n^3} + \frac{16\alpha^4 x^8 + 96\alpha^3 x^6 + 112\alpha^2 x^4}{n^4}$

merkezi moment değerlerine sahiptir [49].

İspat

Lemma 3.2.2’de $M_{\theta,x}(G_n^\alpha)$ şeklindeki moment genelleyici fonksiyon elde edilmişti. Bu sonuçtan yararlanılarak

$$e^{-\theta x} M_{\theta,x}(G_n^\alpha) = \exp\left(nx\left(e^{\frac{\theta}{n}} - 1\right) + \alpha x^2\left(e^{\frac{2\theta}{n}} - 1\right) - \theta x\right)$$

ifadesi $\theta = 0$ noktası civarında kuvvet serisine açılırsa

$$\begin{aligned}
& \exp \left(nx \left(e^{\frac{\theta}{n}} - 1 \right) + \alpha x^2 \left(e^{\frac{2\theta}{n}} - 1 \right) - \theta x \right) \\
&= 1 + \frac{\theta^0}{0!} + \frac{2\alpha x^2}{n} \frac{\theta^1}{1!} + \frac{(nx + 4\alpha x^2 + 4\alpha^2 x^4)}{n^2} \frac{\theta^2}{2!} \\
&+ \frac{(nx + 8\alpha x^2 + 6\alpha nx^3 + 24\alpha^2 x^4 + 8\alpha^3 x^6)}{n^3} \frac{\theta^3}{3!} \\
&+ \frac{\left\{ nx + 16\alpha x^2 + 3n^2 x^2 + 32\alpha nx^3 + 112\alpha^2 x^4 \right.}{n^4} \frac{\theta^4}{4!} + O[\theta]^5 \\
&\quad \left. + 24\alpha^2 nx^5 + 96\alpha^3 x^6 + 16\alpha^4 x^8 \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. m -inci merkezi moment yukarıdaki açılımda $\frac{\theta^m}{m!}$ teriminin kat sayısı olacağından istenilen elde edilir.

3.3. $\{G_n^\alpha\}$ Dizisi İçin Korovkin Tip Teorem

Korovkin teoremi pozitif reel ekseninde tanımlı, sınırlı ve düzgün sürekli fonksiyonlar için araştırılacaktır.

3.3.1. Teorem

$[0, \infty)$ aralığında sınırlı ve düzgün sürekli bir f fonksiyon için $[a, b] \subseteq [0, \infty)$ kompakt aralığında $n \rightarrow \infty$ olduğunda

$$G_n^\alpha(f; x) \xrightarrow{\rightarrow} f(x) \quad (3.8)$$

dir [49].

İspat

Bu operatör dizisi Lemma 3.1.1'den dolayı lineer ve pozitiftir. Ayrıca Lemma 3.2.1'den dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n^\alpha(e_k; x) = e_k(x), \quad k = 0, 1, 2 \quad (3.9)$$

yazılabilir. Burada $e_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2$ şeklindedir. Bu operatör dizisinin lineer ve pozitif olduğu ve Eş. 3.9 dikkate alınırsa Korovkin teoreminden [4,5,57]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n^\alpha(f; x) = f(x)$$

elde edilir [49].

3.4. $\{G_n^\alpha\}$ Dizisinin $C_B[0, \infty)$ Sınıfındaki Bir Fonksiyonla Yaklaşımı

3.4.1. Teorem

$f \in C_B[0, \infty)$ fonksiyonu verilsin. Buna göre $x \in [0, \infty)$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\{G_n^\alpha\}$ operatör dizisi için

$$|G_n^\alpha(f; x) - f(x)| \leq 2\omega(f; \delta_n)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\delta_n = \sqrt{\frac{x}{n} + \frac{4\alpha^2 x^4 + 4\alpha x^2}{n^2}}$ şeklindedir [49].

İspat

G_n^α operatörleri lineer pozitif ve $G_n^\alpha(1; x) = 1$ olduğundan dolayı

$$\left| G_n^\alpha(f; x) - f(x) \right| \leq \omega(f; \delta) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta} G_n^\alpha(|t - x|; x) \right\} \quad (3.10)$$

yazılabilir. Ayrıca, Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak Lemma 3.2.1 ve Lemma 3.2.3'den

$$\begin{aligned} & G_n^\alpha(|t - x|; x) \\ &= \exp(-nx - \alpha x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} H_k(n, \alpha) \left| \frac{k}{n} - x \right| \\ &= \exp(-nx - \alpha x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} H_k(n, \alpha) \left| \frac{k}{n} - x \right| \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\exp(-nx - \alpha x^2) \frac{x^k}{k!} H_k(n, \alpha) \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\exp(-nx - \alpha x^2) \frac{x^k}{k!} H_k(n, \alpha) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\exp(-nx - \alpha x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} H_k(n, \alpha) \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\exp(-nx - \alpha x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} H_k(n, \alpha) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{G_n^\alpha((t - x)^2; x)} \sqrt{G_n^\alpha(1; x)} \\ &= \sqrt{\frac{x}{n} + \frac{4\alpha^2 x^4 + 4\alpha x^2}{n^2}} \end{aligned} \quad (3.11)$$

elde edilir. Eş. 3.10 ve Eş. 3.11 dikkate alınırsa

$$\left| G_n^\alpha(f; x) - f(x) \right| \leq \left\{ 1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{x}{n} + \frac{4\alpha^2 x^4 + 4\alpha x^2}{n^2}} \right\} \omega(f; \delta) \quad (3.12)$$

elde edilir. Eş. 3.12'de $\delta = \delta_n = \sqrt{\frac{x}{n} + \frac{4\alpha^2 x^4 + 4\alpha x^2}{n^2}}$ seçilirse

$$|G_n^\alpha(f; x) - f(x)| \leq 2\omega(f; \delta_n)$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

3.4.2. Teorem

$f \in C_B[0, \infty)$ fonksiyonu verilsin. Buna göre $x \in [0, \infty)$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\{G_n^\alpha\}$ operatör dizisi için

$$|G_n^\alpha(f; x) - f(x)| \leq 2K(f; \delta_n)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\delta_n = \frac{x + 2\alpha x^2}{n} + \frac{4\alpha^2 x^4 + 4\alpha x^2}{n^2}$ şeklindedir.

İspat

$g \in C_B^2[0, \infty)$ olsun. Bu fonksiyonun (x, t) aralığındaki Taylor formülünden

$$g(t) = g(x) + g'(x)(t-x) + g''(c)\frac{(t-x)^2}{2}, \quad c \in (x, t) \quad (3.13)$$

yazılabilir. G_n^α operatörünün lineerlik özelliği kullanılırsa

$$G_n^\alpha(g(t); x) - G_n^\alpha(g(x); x) = G_n^\alpha(g'(x)(t-x); x) + G_n^\alpha\left(g''(c)\frac{(t-x)^2}{2}; x\right)$$

$$G_n^\alpha(g(t) - g(x); x) = g'(x)G_n^\alpha((t-x); x) + \frac{g''(c)}{2}G_n^\alpha((t-x)^2; x) \quad (3.14)$$

elde edilir. Lemma 3.2.3 ve Eş. 3.14 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& G_n^\alpha (g(t) - g(x); x) \\
&= g'(x) \Phi_1 + \frac{g''(c)}{2} \Phi_2 \\
&= g'(x) \frac{2\alpha x^2}{n} + \frac{g''(c)}{2} \left(\frac{x}{n} + \frac{4\alpha^2 x^4 + 4\alpha x^2}{n^2} \right) \\
&\leq \|g''\|_{C_B[0,\infty)} \frac{2\alpha x^2}{n} + \frac{\|g''\|_{C_B[0,\infty)}}{2} \left(\frac{x}{n} + \frac{4\alpha^2 x^4 + 4\alpha x^2}{n^2} \right) \\
&\leq \left(\frac{x + 2\alpha x^2}{n} + \frac{4\alpha^2 x^4 + 4\alpha x^2}{n^2} \right) \left(\|g''\|_{C_B[0,\infty)} + \frac{\|g''\|_{C_B[0,\infty)}}{2} \right) \\
&\leq \left(\frac{x + 2\alpha x^2}{n} + \frac{4\alpha^2 x^4 + 4\alpha x^2}{n^2} \right) \|g\|_{C_B^2[0,\infty)} \tag{3.15}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 3.15 ve G_n^α operatörünün lineerlik özelliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| G_n^\alpha (f; x) - f(x) \right| \\
&= \left| G_n^\alpha (f; x) - G_n^\alpha (g; x) + G_n^\alpha (g; x) - g(x) + g(x) - f(x) \right| \\
&= \left| G_n^\alpha (f - g; x) + (G_n^\alpha (g; x) - g(x)) + (g(x) - f(x)) \right| \\
&\leq G_n^\alpha (|f - g|; x) + |f(x) - g(x)| + |G_n^\alpha (g; x) - g(x)|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq G_n^\alpha \left(\|f - g\|_{C_B[0,\infty)}; x \right) + \|f - g\|_{C_B[0,\infty)} + \left| G_n^\alpha (g; x) - g(x) \right| \\
&\leq \|f - g\|_{C_B[0,\infty)} G_n^\alpha (1; x) + \|f - g\|_{C_B[0,\infty)} + \|g\|_{C_B^2[0,\infty)} \left(\frac{x + 2\alpha x^2}{n} + \frac{4\alpha^2 x^4 + 4\alpha x^2}{n^2} \right) \\
&\leq 2\|f - g\|_{C_B[0,\infty)} + 2\|g\|_{C_B^2[0,\infty)} \left(\frac{x + 2\alpha x^2}{n} + \frac{4\alpha^2 x^4 + 4\alpha x^2}{n^2} \right) \tag{3.16}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Eş. 3.16'nın her iki tarafının $g \in C_B^2[0, \infty)$ için infimumu alınırsa

$$\begin{aligned}
\left| G_n^\alpha (f; x) - f(x) \right| &\leq \inf_{g \in C_B^2[0,\infty)} \left\{ 2\|f - g\|_{C_B[0,\infty)} + 2\|g\|_{C_B^2[0,\infty)} \left(\frac{x + 2\alpha x^2}{n} + \frac{4\alpha^2 x^4 + 4\alpha x^2}{n^2} \right) \right\} \\
\left| G_n^\alpha (f; x) - f(x) \right| &\leq 2K \left(f; \left(\frac{x + 2\alpha x^2}{n} + \frac{4\alpha^2 x^4 + 4\alpha x^2}{n^2} \right) \right) \tag{3.17}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 3.17'de $\delta_n = \frac{x + 2\alpha x^2}{n} + \frac{4\alpha^2 x^4 + 4\alpha x^2}{n^2}$ alınırsa

$$\left| G_n^\alpha (f; x) - f(x) \right| \leq 2K(f; \delta_n)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

3.4.3. Teorem

$f \in C_B[0, \infty)$ fonksiyonu verilsin. Buna göre $x \in [0, \infty)$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\{G_n^\alpha\}$ operatör dizisi için

$$\left| G_n^\alpha (f; x) - f(x) \right| \leq 2M \left\{ \omega_2 \left(f; \sqrt{\delta_n} \right) + \min(1, \delta_n) \|f\|_{C_B[0,\infty)} \right\}$$

şeklinde bir bağıntı vardır. Burada $\delta_n = \frac{x + 2\alpha x^2}{n} + \frac{4\alpha^2 x^4 + 4\alpha x^2}{n^2}$ şeklindedir.

İspat

Teorem 3.4.2 ve Teorem 2.5.1'den ispat açıktır.

3.5. $\{G_n^\alpha\}$ Dizisinin Lipschitz Sınıfındaki Bir Fonksiyonla Yaklaşımı

3.5.1. Teorem

$f \in Lip_M(\mu)$ fonksiyonu verilsin. Buna göre $x \in [0, \infty)$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\{G_n^\alpha\}$ operatör dizisi için

$$|G_n^\alpha(f; x) - f(x)| \leq M(\delta_n)^{\frac{\mu}{2}}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\delta_n = \frac{x}{n} + \frac{4\alpha^2 x^4 + 4\alpha x^2}{n^2}$ dir.

İspat

G_n^α operatörleri lineer pozitif ve $G_n^\alpha(1; x) = 1$ olduğundan dolayı

$$|G_n^\alpha(f; x) - f(x)| \leq M G_n^\alpha(|t - x|^\mu; x) \quad (3.18)$$

elde edilir. Ayrıca $p = \frac{2}{\mu}$ ve $q = \frac{2}{2 - \mu}$ için Hölder eşitsizliği, Lemma 3.2.1 ve Lemma

3.2.3 göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
& G_n^\alpha \left(|t-x|^\mu; x \right) \\
&= \exp(-nx - \alpha x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} H_k(n, \alpha) \left| \frac{k}{n} - x \right|^\mu \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\exp(-nx - \alpha x^2) \frac{x^k}{k!} H_k(n, \alpha) \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 \right)^{\frac{\mu}{2}} \left(\exp(-nx - \alpha x^2) \frac{x^k}{k!} H_k(n, \alpha) \right)^{\frac{2-\mu}{2}} \\
&\leq \left(\exp(-nx - \alpha x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} H_k(n, \alpha) \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 \right)^{\frac{\mu}{2}} \left(\exp(-nx - \alpha x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} H_k(n, \alpha) \right)^{\frac{2-\mu}{2}} \\
&= \left\{ G_n^\alpha \left((t-x)^2; x \right) \right\}^{\frac{\mu}{2}} \left\{ G_n^\alpha (1; x) \right\}^{\frac{2-\mu}{2}} \\
&= \left\{ \frac{x}{n} + \frac{4\alpha^2 x^4 + 4\alpha x^2}{n^2} \right\}^{\frac{\mu}{2}} \tag{3.19}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 3.18 ve Eş. 3.19 kullanılarak

$$\left| G_n^\alpha(f; x) - f(x) \right| \leq M \left\{ \frac{x}{n} + \frac{4\alpha^2 x^4 + 4\alpha x^2}{n^2} \right\}^{\frac{\mu}{2}} \tag{3.20}$$

eşitsizliği elde edilir. Eş. 3.20’de $\delta_n = \frac{x}{n} + \frac{4\alpha^2 x^4 + 4\alpha x^2}{n^2}$ alınırsa

$$\left| G_n^\alpha(f; x) - f(x) \right| \leq M (\delta_n)^{\frac{\mu}{2}}$$

bulunur.

3.6. $\{G_n^\alpha\}$ Dizisi İçin Voronovskaya Tip Teorem

3.6.1. Teorem

$x \in [0, \infty)$ sabit bir nokta ve f pozitif reel ekseninde düzgün sürekli ve sınırlı bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonun x noktasının komşuluğunda ikinci mertebeden türevi mevcut ve birinci mertebeden türevi sürekli ise bu taktirde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \{G_n^\alpha(f; x) - f(x)\} = 2\alpha x^2 f'(x) + \frac{x}{2} f''(x)$$

eşitsizliği sağlanır [49].

İspat

$$\xi_x(t) = \begin{cases} \frac{f(t) - f(x) - f'(x)(t-x) - \frac{1}{2} f''(x)(t-x)^2}{(t-x)^2}, & t \neq x, \\ 0, & t = x. \end{cases} \quad (3.21)$$

şeklindeki fonksiyon göz önüne alınsın. L'Hospital Kuralı gereği

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow x} \xi_x(t) \\ &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x) - f'(x)(t-x) - \frac{1}{2} f''(x)(t-x)^2}{(t-x)^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{f'(t) - f'(x) - f''(x)(t-x)}{2(t-x)} \\ &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{f''(t) - f''(x)}{2} \end{aligned}$$

$$=0$$

elde edilir. Şimdi f fonksiyonu $x \in [0, \infty)$ noktası civarında Taylor serisine açılırsa

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{1}{2} f''(x)(t-x)^2 + \xi_x(t)(t-x)^2 \quad (3.22)$$

şeklinde yazılabilir. Eş 3.22'nin her iki tarafına G_n^α operatörü uygulanırsa Lemma 3.2.1 ve Lemma 3.2.3'den

$$\begin{aligned} & G_n^\alpha(f; x) - f(x) \\ &= f'(x) G_n^\alpha(t-x; x) + \frac{1}{2} f''(x) G_n^\alpha((t-x)^2; x) + G_n^\alpha(\xi_x(t)(t-x)^2; x) \\ &= f'(x) \frac{2\alpha x^2}{n} + \frac{1}{2} f''(x) \left(\frac{x}{n} + \frac{4\alpha^2 x^4 + 4\alpha x^2}{n^2} \right) + G_n^\alpha(\xi_x(t)(t-x)^2; x) \end{aligned} \quad (3.23)$$

eşitliği yazılabilir. Ayrıca Lemma 2.2.2, Lemma 3.2.3 ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left| n G_n^\alpha(\xi_x(t)(t-x)^2; x) \right| \\ & \leq n G_n^\alpha(|\xi_x(t)|(t-x)^2; x) \\ &= n \exp(-nx - \alpha x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} H_k(n, \alpha) \left| \xi_x\left(\frac{k}{n}\right) \right| \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\exp(-nx - \alpha x^2) \frac{x^k}{k!} H_k(n, \alpha) \xi_x^2\left(\frac{k}{n}\right) \right)^{\frac{1}{2}} \left(n^2 \exp(-nx - \alpha x^2) \frac{x^k}{k!} H_k(n, \alpha) \left(\frac{k}{n} - x \right)^4 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \exp(-nx - \alpha x^2) \frac{x^k}{k!} H_k(n, \alpha) \xi_x^2\left(\frac{k}{n}\right) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} n^2 \exp(-nx - \alpha x^2) \frac{x^k}{k!} H_k(n, \alpha) \left(\frac{k}{n} - x\right)^4 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{G_n^\alpha(\xi_x^2(t); x)} \sqrt{n^2 G_n^\alpha((t-x)^4; x)} \\
&= \sqrt{G_n^\alpha(\xi_x^2(t); x)} \sqrt{3x^2 + \frac{24\alpha^2 x^5 + 32\alpha x^3 + x}{n} + \frac{16\alpha^4 x^8 + 96\alpha^3 x^6 + 112\alpha^2 x^4}{n^2}} \quad (3.24)
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Ayrıca ξ_x fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında sınırlı ve düzgün sürekli olacağı için Korovkin teoreminden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n^\alpha(\xi_x^2(t); x) = \xi_x^2(x) = 0$$

limiti sağlanacağından Eş. 3.24'den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n G_n^\alpha(\xi_x(t)(t-x)^2; x) = 0 \quad (3.25)$$

dır. Eş. 3.25 dikkate alınıp Eş. 3.23'ün her iki tarafı n doğal sayısı ile çarpılır ve $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa istenilen elde edilir.

4. İKİ DEĞİŞKENLİ HERMITE POLİNOMLARINI İÇEREN KANTOROVICH TIPLI SZÁSZ OPERATÖRÜNÜN GENELLEMESİ

Bu bölümde Yazıcı ve Çekim [50] tarafından verilen iki değişkenli Hermite polinomlarını içeren Kantorovich tipli Szász operatörünün genellemesinin tanımı ve yaklaşım özellikleri verilmiştir.

4.1. $\{S_n^\alpha\}$ Operatör Dizisinin Tanımı

4.1.1. Tanım

$H_k(n, \alpha)$ Eş. 2.26 ile verilen özel seçilmiş iki değişkenli Hermite polinomlarını temsil etsin. $x \in [0, \infty)$, $f \in C[0, \infty)$, $\alpha \geq 0$ ve

$$P_{n,k}^\alpha(x) = \exp(-nx - \alpha x^2) \frac{x^k}{k!} H_k(n, \alpha)$$

olmak üzere

$$S_n^\alpha(f; x) = n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^\alpha(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

ile verilen $\{S_n^\alpha\}$ operatör dizisine *iki değişkenli Hermite polinomlarını içeren Kantorovich tipli Szász operatörlerinin genellemesi* denir [50].

4.1.1. Lemma

$\{S_n^\alpha\}$ operatör dizisi lineer ve pozitifdir [50].

4.2. $\{S_n^\alpha\}$ Dizisinin Bazı Test Değerleri ve Merkezi Momentleri

4.2.1. Lemma

$\{S_n^\alpha\}$ operatör dizisi

$$i. S_n^\alpha(1; x) = 1,$$

$$ii. S_n^\alpha(t; x) = x + \frac{4\alpha x^2 + 1}{2n},$$

$$iii. S_n^\alpha(t^2; x) = x^2 + \frac{4\alpha x^3 + 2x}{n} + \frac{12\alpha^2 x^4 + 18\alpha x^2 + 1}{3n^2},$$

$$iv. S_n^\alpha(t^3; x) = x^3 + \frac{12\alpha x^4 + 9x^2}{2n} + \frac{24\alpha^2 x^5 + 48\alpha x^3 + 7x}{2n^2}$$

$$+ \frac{120\alpha^2 x^4 + 32\alpha^3 x^6 + 64\alpha x^2 + 1}{4n^3},$$

$$v. S_n^\alpha(t^4; x) = x^4 + \frac{8\alpha x^5 + 8x^3}{n} + \frac{24\alpha^2 x^6 + 60\alpha x^4 + 15x^2}{n^2}$$

$$+ \frac{32\alpha^3 x^7 + 144\alpha^2 x^5 + 108\alpha x^3 + 6x}{n^3}$$

$$+ \frac{840\alpha^2 x^4 + 560\alpha^3 x^6 + 80\alpha^4 x^8 + 210\alpha x^2 + 1}{5n^4}$$

eşitliklerini sağlamaktadır [50].

İspat

$\{G_n^\alpha\}$ operatör dizisinin Lemma 3.2.1'deki test değerlerinden faydalanarak aşağıdaki hesaplamalar yapılmıştır.

i. $S_n^\alpha(1; x)$

$$= n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^\alpha(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dt$$

$$= n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^\alpha(x) \frac{1}{n}$$

$$= G_n^\alpha(1; x)$$

$$= 1$$

elde edilir.

ii. $S_n^\alpha(t; x)$

$$= n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^\alpha(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} t dt$$

$$= n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^\alpha(x) \frac{2k+1}{2n^2}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \frac{k}{n} + \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x)$$

$$= G_n^{\alpha}(t; x) + \frac{1}{2n} G_n^{\alpha}(1; x)$$

$$= x + \frac{2\alpha x^2}{n} + \frac{1}{2n}$$

$$= x + \frac{4\alpha x^2 + 1}{2n}$$

elde edilir.

$$\text{iii. } S_n^{\alpha}(t^2; x)$$

$$= n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} t^2 dt$$

$$= n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \frac{3k^2 + 3k + 1}{3n^3}$$

$$= G_n^{\alpha}(t^2; x) + \frac{1}{n} G_n^{\alpha}(t; x) + \frac{1}{3n^2} G_n^{\alpha}(1; x)$$

$$= x^2 + \frac{4\alpha x^3 + x}{n} + \frac{4\alpha^2 x^4 + 4\alpha x^2}{n^2} + \frac{1}{n} \left(x + \frac{2\alpha x^2}{n} \right) + \frac{1}{3n^2}$$

$$= x^2 + \frac{4\alpha x^3 + 2x}{n} + \frac{12\alpha^2 x^4 + 18\alpha x^2 + 1}{3n^2}$$

elde edilir.

$$\text{iv. } S_n^\alpha(t^3; x) = n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^\alpha(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} t^3 dt$$

$$= n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^\alpha(x) \frac{4k^3 + 6k^2 + 4k + 1}{4n^4}$$

$$= G_n^\alpha(t^3; x) + \frac{3}{2n} G_n^\alpha(t^2; x) + \frac{1}{n^2} G_n^\alpha(t; x) + \frac{1}{4n^3} G_n^\alpha(1; x)$$

$$= x^3 + \frac{6\alpha x^4 + 3x^2}{n} + \frac{12\alpha^2 x^5 + 18\alpha x^3 + x}{n^2} + \frac{24\alpha^2 x^4 + 8\alpha^3 x^6 + 8\alpha x^2}{n^3}$$

$$+ \frac{3}{2n} \left(x^2 + \frac{4\alpha x^3 + x}{n} + \frac{4\alpha^2 x^4 + 4\alpha x^2}{n^2} \right) + \frac{1}{n^2} \left(x + \frac{2\alpha x^2}{n} \right) + \frac{1}{4n^3}$$

$$= x^3 + \frac{12\alpha x^4 + 9x^2}{2n} + \frac{24\alpha^2 x^5 + 48\alpha x^3 + 7x}{2n^2} + \frac{120\alpha^2 x^4 + 32\alpha^3 x^6 + 64\alpha x^2 + 1}{4n^3}$$

elde edilir.

$$\text{v. } S_n^\alpha(t^4; x)$$

$$= n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^\alpha(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} t^4 dt$$

$$= n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^\alpha(x) \frac{5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1}{5n^5}$$

$$\begin{aligned}
&= G_n^\alpha(t^4; x) + \frac{2}{n} G_n^\alpha(t^3; x) + \frac{2}{n^2} G_n^\alpha(t^2; x) + \frac{1}{n^3} G_n^\alpha(t; x) + \frac{1}{5n^4} G_n^\alpha(1; x) \\
&= x^4 + \frac{8\alpha x^5 + 6x^3}{n} + \frac{24\alpha^2 x^6 + 48\alpha x^4 + 7x^2}{n^2} + \frac{32\alpha^3 x^7 + 120\alpha^2 x^5 + 64\alpha x^3 + x}{n^3} \\
&\quad + \frac{112\alpha^2 x^4 + 96\alpha^3 x^6 + 16\alpha^4 x^8}{n^4} \\
&\quad + \frac{2}{n} \left(x^3 + \frac{6\alpha x^4 + 3x^2}{n} + \frac{12\alpha^2 x^5 + 18\alpha x^3 + x}{n^2} + \frac{24\alpha^2 x^4 + 8\alpha^3 x^6 + 8\alpha x^2}{n^3} \right) \\
&\quad + \frac{2}{n^2} \left(x^2 + \frac{4\alpha x^3 + x}{n} + \frac{4\alpha^2 x^4 + 4\alpha x^2}{n^2} \right) + \frac{1}{n^3} \left(x + \frac{2\alpha x^2}{n} \right) + \frac{1}{5n^4} \\
&= x^4 + \frac{8\alpha x^5 + 8x^3}{n} + \frac{24\alpha^2 x^6 + 60\alpha x^4 + 15x^2}{n^2} \\
&\quad + \frac{32\alpha^3 x^7 + 144\alpha^2 x^5 + 108\alpha x^3 + 6x}{n^3} + \frac{840\alpha^2 x^4 + 560\alpha^3 x^6 + 80\alpha^4 x^8 + 210\alpha x^2 + 1}{5n^4}
\end{aligned}$$

elde edilerek ispat tamamlanır.

4.2.2. Lemma

$\{S_n^\alpha\}$ operatör dizisinin moment genelleyici fonksiyonu

$$M_{\theta, x}(S_n^\alpha) = \frac{n}{\theta} \left(e^{\frac{\theta}{n}} - 1 \right) \exp \left(nx \left(e^{\frac{\theta}{n}} - 1 \right) + \alpha x^2 \left(e^{\frac{2\theta}{n}} - 1 \right) \right) \quad (4.2)$$

şeklindedir.

İspat

Tanım 2.8.1'deki moment genelleyici fonksiyonun tanımını kullanılarak

$$\begin{aligned}
 M_{\theta,x}(S_n^\alpha) &= S_n^\alpha(e^{\theta t}; x) \\
 &= n \exp(-nx - \alpha x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} H_k(n, \alpha) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^{\theta t} dt \\
 &= \frac{n}{\theta} \exp(-nx - \alpha x^2) \left(e^{\frac{\theta}{n}} - 1 \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\exp\left(\frac{\theta}{n}\right) x \right)^k}{k!} H_k(n, \alpha) \\
 &= \frac{n}{\theta} \left(e^{\frac{\theta}{n}} - 1 \right) \exp \left(nx \left(e^{\frac{\theta}{n}} - 1 \right) + \alpha x^2 \left(e^{\frac{2\theta}{n}} - 1 \right) \right)
 \end{aligned}$$

elde edilir.

4.2.3. Lemma

$\{S_n^\alpha\}$ operatör dizisi

i. $\Phi_0 = 1,$

ii. $\Phi_1 = \frac{4\alpha x^2 + 1}{2n},$

iii. $\Phi_2 = \frac{x}{n} + \frac{12\alpha^2 x^4 + 18\alpha x^2 + 1}{3n^2},$

$$\text{iv. } \Phi_3 = \frac{12\alpha x^3 + 5x}{2n^2} + \frac{32\alpha^3 x^6 + 120\alpha^2 x^4 + 64\alpha x^2 + 1}{4n^3},$$

$$\text{v. } \Phi_4 = \frac{3x^2}{n^2} + \frac{24\alpha^2 x^5 + 44\alpha x^3 + 5x}{n^3} + \frac{80\alpha^4 x^8 + 560\alpha^3 x^6 + 840\alpha^2 x^4 + 210\alpha x^2 + 1}{5n^4}$$

merkezi moment değerlerini sağlar [50].

İspat

Lemma 4.2.2’de $M_{\theta,x}(S_n^\alpha)$ şeklindeki moment genelleşici fonksiyon elde edilmişti. Bu sonuçtan yararlanılarak

$$e^{-\theta x} M_{\theta,x}(S_n^\alpha) = \frac{n}{\theta} \left(e^{\frac{\theta}{n}} - 1 \right) \exp \left(nx \left(e^{\frac{\theta}{n}} - 1 \right) + \alpha x^2 \left(e^{\frac{2\theta}{n}} - 1 \right) - \theta x \right)$$

ifadesi $\theta = 0$ noktası civarında kuvvet serisine açılırsa

$$\begin{aligned} e^{-\theta x} M_{\theta,x}(S_n^\alpha) &= \frac{n}{\theta} \left(e^{\frac{\theta}{n}} - 1 \right) \exp \left(nx \left(e^{\frac{\theta}{n}} - 1 \right) + \alpha x^2 \left(e^{\frac{2\theta}{n}} - 1 \right) - \theta x \right) \\ &= 1 \frac{\theta^0}{0!} + \frac{(4\alpha x^2 + 1)}{2n} \frac{\theta^1}{1!} + \frac{(3nx + 12\alpha^2 x^4 + 18\alpha x^2 + 1)}{3n^2} \frac{\theta^2}{2!} \\ &\quad + \frac{(24\alpha nx^3 + 10nx + 32\alpha^3 x^6 + 120\alpha^2 x^4 + 64\alpha x^2 + 1)}{4n^3} \frac{\theta^3}{3!} \end{aligned}$$

$$+ \frac{\left\{ \begin{array}{l} 15n^2x^2 + 220\alpha nx^3 + 25nx + 210\alpha x^2 + 1 \\ + 120\alpha^2 nx^5 + 80\alpha^4 x^8 + 560\alpha^3 x^6 + 840\alpha^2 x^4 \end{array} \right\}}{5n^4} \frac{\theta^4}{4!} + O[\theta]^5$$

elde edilir. m -inci merkezi moment yukarıdaki açılımda $\frac{\theta^m}{m!}$ teriminin katsayısı olacağından istenilen elde edilir.

4.3. $\{S_n^\alpha\}$ Dizisi İçin Korovkin Tip Teorem

Korovkin teoremi pozitif reel ekseninde tanımlı, sınırlı ve düzgün sürekli fonksiyonlar için araştırılacaktır.

4.3.1. Teorem

$[0, \infty)$ aralığında sınırlı ve düzgün sürekli bir f fonksiyon için $n \rightarrow \infty$ olduğunda $[a, b] \subseteq [0, \infty)$ kompakt aralığında

$$S_n^\alpha(f; x) \xrightarrow{\rightarrow} f(x) \quad (4.3)$$

dir [50].

İspat

Bu operatör dizisi Lemma 4.1.1'den dolayı lineer ve pozitifdir. Ayrıca Lemma 4.2.1'den dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^\alpha(e_k; x) = e_k(x), \quad k = 0, 1, 2 \quad (4.4)$$

yazılabilir. Burada $e_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2$ şeklindedir. Bu operatör dizisinin lineer ve pozitif olduğu ve Eş. 4.4 dikkate alınırsa Korovkin teoreminden [4,5,57]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^\alpha(f; x) = f(x)$$

elde edilir [50].

4.4. $\{S_n^\alpha\}$ Dizisinin $C_B[0, \infty)$ Sınıfındaki Bir Fonksiyonla Yaklaşımı

4.4.1. Teorem

$f \in C_B[0, \infty)$ fonksiyonu verilsin. Buna göre $x \in [0, b]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\{S_n^\alpha\}$ operatör dizisi için

$$|S_n^\alpha(f; x) - f(x)| \leq M \omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $M = 1 + \sqrt{b + 12\alpha^2 b^4 + 18\alpha b^2 + 1}$ şeklinde bir pozitif sayıdır [50].

İspat

S_n^α operatörleri lineer pozitif ve $S_n^\alpha(1; x) = 1$ olduğundan dolayı

$$|S_n^\alpha(f; x) - f(x)| \leq \omega(f; \delta) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta} S_n^\alpha(|t - x|; x) \right\} \quad (4.5)$$

yazılabilir. Ayrıca, S_n^α operatöründe önce sonsuz toplam içerisindeki integrale sonra da sonsuz toplama Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa ve sonrada Lemma 3.2.1 ve Lemma 4.2.3 kullanılırsa

$$S_n^\alpha(|t - x|; x) = n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^\alpha(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} |t - x| dt$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} n^{\frac{1}{2}} \left(n(t-x)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} n dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} n(t-x)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} n(t-x)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(P_{n,k}^{\alpha}(x) \right)^{\frac{1}{2}} \left(n P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (t-x)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \right)^{\frac{1}{2}} \left(n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (t-x)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\{ G_n^{\alpha}(1; x) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ S_n^{\alpha} \left((t-x)^2; x \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{x}{n} + \frac{12\alpha^2 x^4 + 18\alpha x^2 + 1}{3n^2}} \\
&\leq \sqrt{\frac{b}{n} + \frac{12\alpha^2 b^4 + 18ab^2 + 1}{3n^2}}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

elde edilir. Eş. 4.5 ve Eş 4.6 dikkate alınır

$$\left| S_n^\alpha(f; x) - f(x) \right| \leq \left\{ 1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{b}{n} + \frac{12\alpha^2 b^4 + 18\alpha b^2 + 1}{3n^2}} \right\} \omega(f; \delta) \quad (4.7)$$

elde edilir. Eş. 4.7’de $\delta = \delta_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ seçilirse $M = 1 + \sqrt{b + 12\alpha^2 b^4 + 18\alpha b^2 + 1}$ olup,

$$\left| S_n^\alpha(f; x) - f(x) \right| \leq M \omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

elde edilir ki ispat tamamlanmış olur.

4.4.2. Teorem

$f \in C_B[0, \infty)$ fonksiyonu verilsin. Buna göre $x \in [0, b]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\{S_n^\alpha\}$ operatör dizisi için

$$\left| S_n^\alpha(f; x) - f(x) \right| \leq 2K(f; \delta_n)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\delta_n = \frac{4\alpha b^2 + 2b + 1}{2n} + \frac{12\alpha^2 b^4 + 18\alpha b^2 + 1}{3n^2}$ şeklindedir [50].

İspat

$g \in C_B^2[0, \infty)$ olsun. Bu fonksiyon Taylor formülünden

$$g(t) = g(x) + g'(x)(t-x) + g''(c) \frac{(t-x)^2}{2}, \quad c \in (x, t) \quad (4.8)$$

şeklinde yazılabilir. S_n^α operatörünün lineerlik özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
S_n^\alpha(g(t);x) - S_n^\alpha(g(x);x) &= S_n^\alpha(g'(x)(t-x);x) + S_n^\alpha\left(g''(c)\frac{(t-x)^2}{2};x\right) \\
S_n^\alpha(g(t)-g(x);x) &= g'(x)S_n^\alpha((t-x);x) + \frac{g''(c)}{2}S_n^\alpha((t-x)^2;x)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

elde edilir. Lemma 4.2.3 ve Eş. 4.9 kullanılarak

$$\begin{aligned}
&S_n^\alpha(g(t)-g(x);x) \\
&= g'(x)\Phi_1 + \frac{g''(c)}{2}\Phi_2 \\
&= g'(x)\frac{4\alpha x^2+1}{2n} + \frac{g''(c)}{2}\left(\frac{x}{n} + \frac{12\alpha^2 x^4+18\alpha x^2+1}{3n^2}\right) \\
&\leq \|g''\|_{C_B[0,\infty)}\frac{4\alpha x^2+1}{2n} + \frac{\|g''\|_{C_B[0,\infty)}}{2}\left(\frac{x}{n} + \frac{12\alpha^2 x^4+18\alpha x^2+1}{3n^2}\right) \\
&\leq \left(\frac{4\alpha x^2+2x+1}{2n} + \frac{12\alpha^2 x^4+18\alpha x^2+1}{3n^2}\right)\left(\|g''\|_{C_B[0,\infty)} + \frac{\|g''\|_{C_B[0,\infty)}}{2}\right) \\
&\leq \left(\frac{4\alpha x^2+2x+1}{2n} + \frac{12\alpha^2 x^4+18\alpha x^2+1}{3n^2}\right)\|g''\|_{C_B^2[0,\infty)} \\
&\leq \left(\frac{4ab^2+2b+1}{2n} + \frac{12\alpha^2 b^4+18\alpha b^2+1}{3n^2}\right)\|g''\|_{C_B^2[0,\infty)}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

elde edilir. Eş. 4.10 ve S_n^α operatörünün lineerlik özelliği dikkate alınırsa

$$|S_n^\alpha(f;x) - f(x)| = |S_n^\alpha(f;x) - S_n^\alpha(g;x) + S_n^\alpha(g;x) - g(x) + g(x) - f(x)|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| S_n^\alpha(f-g; x) + (S_n^\alpha(g; x) - g(x)) + (g(x) - f(x)) \right| \\
&\leq S_n^\alpha(|f-g; x|) + |f(x) - g(x)| + |S_n^\alpha(g; x) - g(x)| \\
&\leq S_n^\alpha(\|f-g\|_{C_B[0, \infty)}; x) + \|f-g\|_{C_B[0, \infty)} + |S_n^\alpha(g; x) - g(x)| \\
&\leq \|f-g\|_{C_B[0, \infty)} S_n^\alpha(1; x) + \|f-g\|_{C_B[0, \infty)} \\
&\quad + \|g\|_{C_B^2[0, \infty)} \left(\frac{4\alpha b^2 + 2b + 1}{2n} + \frac{12\alpha^2 b^4 + 18\alpha b^2 + 1}{3n^2} \right) \\
&\leq 2\|f-g\|_{C_B[0, \infty)} + 2\|g\|_{C_B^2[0, \infty)} \left(\frac{4\alpha b^2 + 2b + 1}{2n} + \frac{12\alpha^2 b^4 + 18\alpha b^2 + 1}{3n^2} \right) \tag{4.11}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Eş. 4.11'in her iki tarafının $g \in C_B^2[0, \infty)$ için infimumu alınırsa

$$\begin{aligned}
|S_n^\alpha(f; x) - f(x)| &\leq 2 \inf_{g \in C_B^2[0, \infty)} \left\{ \|f-g\|_{C_B[0, \infty)} + \|g\|_{C_B^2[0, \infty)} \left(\frac{4\alpha b^2 + 2b + 1}{2n} + \frac{12\alpha^2 b^4 + 18\alpha b^2 + 1}{3n^2} \right) \right\} \\
|S_n^\alpha(f; x) - f(x)| &\leq 2K \left(f; \left(\frac{4\alpha b^2 + 2b + 1}{2n} + \frac{12\alpha^2 b^4 + 18\alpha b^2 + 1}{3n^2} \right) \right) \tag{4.12}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 4.12'de $\delta_n = \frac{4\alpha b^2 + 2b + 1}{2n} + \frac{12\alpha^2 b^4 + 18\alpha b^2 + 1}{3n^2}$ alınırsa

$$|S_n^\alpha(f; x) - f(x)| \leq 2K(f; \delta_n)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

4.4.3. Teorem

$f \in C_B[0, \infty)$ fonksiyonu verilsin. Buna göre $x \in [0, b]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\{S_n^\alpha\}$ operatör dizisi için

$$\left| S_n^\alpha(f; x) - f(x) \right| \leq 2M \left\{ \omega_2\left(f; \sqrt{\delta_n}\right) + \min(1, \delta_n) \|f\|_{C_B[0, \infty)} \right\}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\delta_n = \frac{4\alpha b^2 + 2b + 1}{2n} + \frac{12\alpha^2 b^4 + 18\alpha b^2 + 1}{3n^2}$ şeklindedir [50].

İspat

Teorem 4.4.2 ve Teorem 2.5.1'den ispat açıktır.

4.5. $\{S_n^\alpha\}$ Dizisinin Lipschitz Sınıfındaki Bir Fonksiyonla Yaklaşımı

4.5.1. Teorem

$f \in Lip_M(\mu)$ fonksiyonu verilsin. Buna göre $x \in [0, b]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\{S_n^\alpha\}$ operatör dizisi için

$$\left| S_n^\alpha(f; x) - f(x) \right| \leq M^* \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^\mu$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $M^* = M \left(b + 12\alpha^2 b^4 + 18\alpha b^2 + 1 \right)^{\frac{\mu}{2}}$ dir [50].

İspat

S_n^α operatörleri lineer pozitif ve $S_n^\alpha(1; x) = 1$ olduğundan dolayı

$$\left| S_n^\alpha (f; x) - f(x) \right| \leq M S_n^\alpha \left(|t-x|^\mu; x \right) \quad (4.13)$$

elde edilir. Ayrıca S_n^α operatöründe $p = \frac{2}{\mu}$ ve $q = \frac{2}{2-\mu}$ için Hölder eşitsizliği ilk önce sonsuz toplam içerisindeki integrale daha sonrada sonsuz toplama uygulanırsa Lemma 4.2.1 ve Lemma 4.2.3'den

$$\begin{aligned} & S_n^\alpha \left(|t-x|^\mu; x \right) \\ &= n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^\alpha(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} |t-x|^\mu dt \\ &= n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^\alpha(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} |t-x|^\mu dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^\alpha(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(n(t-x)^2 \right)^{\frac{\mu}{2}} n^{\frac{2-\mu}{2}} dt \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^\alpha(x) \left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} n(t-x)^2 dt \right)^{\frac{\mu}{2}} \left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} n dt \right)^{\frac{2-\mu}{2}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^\alpha(x) \left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} n(t-x)^2 dt \right)^{\frac{\mu}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(n P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (t-x)^2 dt \right)^{\frac{\mu}{2}} \left(P_{n,k}^{\alpha}(x) \right)^{\frac{2-\mu}{2}} \\
&\leq \left(n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (t-x)^2 dt \right)^{\frac{\mu}{2}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \right)^{\frac{2-\mu}{2}} \\
&= \left\{ S_n^{\alpha} \left((t-x)^2; x \right) \right\}^{\frac{\mu}{2}} \left\{ G_n^{\alpha} (1; x) \right\}^{\frac{2-\mu}{2}} \\
&= \left(\frac{x}{n} + \frac{12\alpha^2 x^4 + 18\alpha x^2 + 1}{3n^2} \right)^{\frac{\mu}{2}} \\
&\leq \left(\frac{b}{n} + \frac{12\alpha^2 b^4 + 18\alpha b^2 + 1}{3n^2} \right)^{\frac{\mu}{2}} \tag{4.14}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 4.13 ve Eş. 4.14 göz önüne alınırsa

$$\left| S_n^{\alpha} (f; x) - f(x) \right| \leq M \left\{ \frac{b}{n} + \frac{12\alpha^2 b^4 + 18\alpha b^2 + 1}{3n^2} \right\}^{\frac{\mu}{2}} \tag{4.15}$$

elde edilir. Eş. 4.15’de $M^* = M \left(b + 12\alpha^2 b^4 + 18\alpha b^2 + 1 \right)^{\frac{\mu}{2}}$ alınırsa ispat tamamlanır.

4.6. $\{S_n^\alpha\}$ Dizisi İçin Voronovskaya Tip Teorem

4.6.1. Lemma

$\{S_n^\alpha\}$ operatör dizisi

$$i. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n S_n^\alpha(t-x; x) = \frac{4\alpha x^2 + 1}{2},$$

$$ii. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n S_n^\alpha((t-x)^2; x) = x,$$

$$iii. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 S_n^\alpha((t-x)^4; x) = 3x^2$$

limitlerini sağlar.

İspat

İspat Lemma 4.2.3'den açıktır.

4.6.1. Teorem

$x \in [0, \infty)$ sabit bir nokta ve f pozitif reel ekseninde düzgün sürekli ve sınırlı bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonun x noktasının komşuluğunda ikinci mertebeden türevi mevcut ve birinci mertebeden türevi sürekli ise bu taktirde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \{S_n^\alpha(f; x) - f(x)\} = \frac{1}{2} \{(4\alpha x^2 + 1) f'(x) + x f''(x)\}$$

eşitsizliği sağlanır [50].

İspat

f fonksiyonu $x \in [0, \infty)$ noktası civarında Taylor serisine açılırsa

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{1}{2} f''(x)(t-x)^2 + \xi_x(t)(t-x)^2 \quad (4.16)$$

şeklinde yazılabilir. Burada ξ_x fonksiyonu Eş. 3.21 ile verilen $\xi_x(x) = 0$ ve $\lim_{t \rightarrow x} \xi_x(t) = 0$ şartlarını sağlayan sınırlı ve düzgün sürekli bir fonksiyondur. Eş 4.16'in her iki tarafına S_n^α operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} S_n^\alpha(f; x) - f(x) \\ = f'(x) S_n^\alpha(t-x; x) + \frac{1}{2} f''(x) S_n^\alpha((t-x)^2; x) + S_n^\alpha(\xi_x(t)(t-x)^2; x) \end{aligned} \quad (4.17)$$

eşitliği yazılabilir. Ayrıca S_n^α operatöründe önce sonsuz toplam içerisindeki integrale sonra da sonsuz toplama Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa ve Lemma 2.2.2 dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| n S_n^\alpha(\xi_x(t)(t-x)^2; x) \right| \\ & \leq n S_n^\alpha(|\xi_x(t)|(t-x)^2; x) \\ & = n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^\alpha(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} n |\xi_x(t)|(t-x)^2 dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(\xi_x^2(t) \right)^{\frac{1}{2}} \left(n^2 (t-x)^4 \right)^{\frac{1}{2}} dt \\
&\leq n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \xi_x^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} n^2 (t-x)^4 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(n P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \xi_x^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(n P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} n^2 (t-x)^4 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \xi_x^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(n^2 n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (t-x)^4 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{S_n^{\alpha}(\xi_x^2(t); x)} \sqrt{n^2 S_n^{\alpha}((t-x)^4; x)} \tag{4.18}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca Korovkin teoreminden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{\alpha}(\xi_x^2(t); x) = \xi_x^2(x) = 0$$

limiti sağlanacağından Eş. 4.18 ve Lemma 4.6.1 gözönüne alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n S_n^{\alpha}(\xi_x(t)(t-x)^2; x) = 0 \tag{4.19}$$

elde edilir. Eş. 4.19 ve Lemma 4.6.1 dikkate alınıp, Eş. 4.19'un her iki tarafı n doğal sayısı ile çarpılır ve $n \rightarrow \infty$ için limit alınır istenilen elde edilir.

5. İKİ DEĞİŞKENLİ HERMITE POLİNOMLARI İÇEREN STANCU-KANTOROVICH TIPLI SZÁSZ OPERATÖRÜNÜN GENELLEMESİ

Bu bölümde Yazıcı ve Çekim [51] tarafından verilen iki değişkenli Hermite polinomlarını içeren Stancu-Kantorovich tipli Szász operatörünün genellemesinin tanımı ve yaklaşım özellikleri verilmiştir.

5.1. $\{S_n^{\alpha,\beta,\gamma}\}$ Operatör Dizisinin Tanımı

5.1.1. Tanım

$H_k(n, \alpha)$ Eş. 2.26 ile verilen özel seçilmiş iki değişkenli Hermite polinomlarını temsil etsin. $x \in [0, \infty)$, $f \in C[0, \infty)$, $0 \leq \gamma \leq \beta$, $\alpha \geq 0$ ve

$$P_{n,k}^{\alpha}(x) = \exp(-nx - \alpha x^2) \frac{x^k}{k!} H_k(n, \alpha)$$

olmak üzere

$$S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(f; x) = n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{nt+\gamma}{n+\beta}\right) dt, \quad n=1, 2, \dots \quad (5.1)$$

ile verilen $\{S_n^{\alpha,\beta,\gamma}\}$ operatör dizisine *iki değişkenli Hermite polinomlarını içeren Stancu-Kantorovich tipli Szász operatörünün genellemesi* denir [51].

Uyarı

Eş. 5.1'deki integralde $s = \frac{nt+\gamma}{n+\beta}$ dönüşümü yapılırsa

$$dt = \frac{n+\beta}{n} ds, \quad t \rightarrow \frac{k}{n} \Rightarrow s \rightarrow \frac{k+\gamma}{n+\beta} \quad \text{ve} \quad t \rightarrow \frac{k+1}{n} \Rightarrow s \rightarrow \frac{k+\gamma+1}{n+\beta}$$

olacağından $\{S_n^{\alpha,\beta,\gamma}\}$ operatör dizisi

$$S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(f;x) = (n+\beta) \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k+\gamma}{n+\beta}}^{\frac{k+\gamma+1}{n+\beta}} f(s) ds, \quad n=1,2,\dots \quad (5.2)$$

şeklinde de tanımlanabilir. Ancak 4. bölümdeki verileri kullanarak işlemleri daha kolay yapmak adına bu operatör dizisi için Eş. 5.1'deki tanımı ele almak daha mantıklı olacaktır.

5.1.1. Lemma

$\{S_n^{\alpha,\beta,\gamma}\}$ operatör dizisi lineer ve pozitifdir [51].

5.2. $\{S_n^{\alpha,\beta,\gamma}\}$ Dizisinin Bazı Test Değerleri ve Merkezi Momentleri

5.2.1. Lemma

$\{S_n^{\alpha,\beta,\gamma}\}$ operatör dizisi

$$i. S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(1;x) = 1,$$

$$ii. S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(t;x) = \frac{n}{n+\beta} x + \frac{1}{2(n+\beta)} (4\alpha x^2 + 2\gamma + 1),$$

$$iii. S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(t^2;x) = \frac{n^2}{(n+\beta)^2} x^2 + \frac{n}{(n+\beta)^2} (4\alpha x^3 + (2\gamma+2)x)$$

$$+\frac{1}{3(n+\beta)^2}\left(12\alpha^2x^4+(12\gamma+18)\alpha x^2+3\gamma^2+3\gamma+1\right),$$

$$\text{iv. } S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(t^3;x)$$

$$=\frac{n^3}{(n+\beta)^3}x^3+\frac{n^2}{2(n+\beta)^3}\left(12\alpha x^4+(6\gamma+9)x^2\right)$$

$$+\frac{n}{2(n+\beta)^3}\left(24\alpha^2x^5+(24\gamma+48)\alpha x^3+(6\gamma^2+12\gamma+7)x\right)$$

$$+\frac{1}{4(n+\beta)^3}\left\{\frac{32\alpha^3x^6+(48\gamma+120)\alpha^2x^4}{+ (24\gamma^2+72\gamma+64)\alpha x^2+4\gamma^3+6\gamma^2+4\gamma+1}\right\},$$

$$\text{v. } S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(t^4;x)$$

$$=\frac{n^4}{(n+\beta)^4}x^4+\frac{n^3}{(n+\beta)^4}\left(8\alpha x^5+(4\gamma+8)x^3\right)$$

$$+\frac{n^2}{(n+\beta)^4}\left(24\alpha^2x^6+(24\gamma+60)\alpha x^4+(6\gamma^2+18\gamma+15)x^2\right)$$

$$+\frac{n}{(n+\beta)^4}\left\{\frac{32\alpha^3x^7+(48\gamma+144)\alpha^2x^5}{+ (24\gamma^2+96\gamma+108)\alpha x^3+(4\gamma^3+12\gamma^2+14\gamma+6)x}\right\}$$

$$+\frac{1}{5(n+\beta)^4}\left\{\frac{80\alpha^4x^8+(160\gamma+560)\alpha^3x^5+(120\gamma^2+600\gamma+840)\alpha^2x^4}{+ (40\gamma^3+180\gamma^2+320\gamma+210)\alpha x^2+5\gamma^4+10\gamma^3+10\gamma^2+5\gamma+1}\right\}$$

eşitliklerini sağlamaktadır [51].

İspat

Bu operatörün test değerlerini bulmak için $\{S_n^\alpha\}$ operatör dizisinin Lemma 4.2.1'deki test değerlerinden faydalanılacaktır.

i. $S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(1;x)$

$$= n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^\alpha(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dt$$

$$= S_n^\alpha(1;x)$$

$$= 1$$

elde edilir.

ii. $S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(t;x)$

$$= n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^\alpha(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{nt+\gamma}{n+\beta} dt$$

$$= \frac{n}{n+\beta} n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^\alpha(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} t dt + \frac{\gamma}{n+\beta} n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^\alpha(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dt$$

$$= \frac{n}{n+\beta} S_n^\alpha(t;x) + \frac{\gamma}{n+\beta} S_n^\alpha(1;x)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n}{n+\beta} \left(x + \frac{4\alpha x^2 + 1}{2n} \right) + \frac{\gamma}{(n+\beta)} \\
&= \frac{n}{n+\beta} x + \frac{1}{2(n+\beta)} (4\alpha x^2 + 2\gamma + 1)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

$$\text{iii. } S_n^{\alpha, \beta, \gamma} (t^2; x)$$

$$\begin{aligned}
&= n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(\frac{nt + \gamma}{n + \beta} \right)^2 dt \\
&= n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(\frac{n^2}{(n + \beta)^2} t^2 + \frac{2n\gamma}{(n + \beta)^2} t + \frac{\gamma^2}{(n + \beta)^2} \right) dt \\
&= \frac{n^2}{(n + \beta)^2} n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} t^2 dt + \frac{2n\gamma}{(n + \beta)^2} n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} t dt \\
&\quad + \frac{\gamma^2}{(n + \beta)^2} n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dt \\
&= \frac{n^2}{(n + \beta)^2} S_n^{\alpha} (t^2; x) + \frac{2n\gamma}{(n + \beta)^2} S_n^{\alpha} (t; x) + \frac{\gamma^2}{(n + \beta)^2} S_n^{\alpha} (1; x) \\
&= \frac{n^2}{(n + \beta)^2} \left(x^2 + \frac{4\alpha x^3 + 2x}{n} + \frac{12\alpha^2 x^4 + 18\alpha x^2 + 1}{3n^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2n\gamma}{(n+\beta)^2} \left(x + \frac{4\alpha x^2 + 1}{2n} \right) + \frac{\gamma^2}{(n+\beta)^2} \\
& = \frac{n^2}{(n+\beta)^2} x^2 + \frac{n}{(n+\beta)^2} (4\alpha x^3 + (2\gamma + 2)x) \\
& + \frac{1}{3(n+\beta)^2} (12\alpha^2 x^4 + (12\gamma + 18)\alpha x^2 + 3\gamma^2 + 3\gamma + 1)
\end{aligned}$$

olur.

$$\text{iv. } S_n^{\alpha, \beta, \gamma}(t^3; x)$$

$$\begin{aligned}
& = n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(\frac{nt + \gamma}{n + \beta} \right)^3 dt \\
& = n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{n^3 t^3 + 3n^2 t^2 \gamma + 3nt\gamma^2 + \gamma^3}{(n + \beta)^3} dt \\
& = \frac{n^3}{(n + \beta)^3} n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} t^3 dt + \frac{3n^2 \gamma}{(n + \beta)^3} n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} t^2 dt \\
& + \frac{3n\gamma^2}{(n + \beta)^3} n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} t dt + \frac{\gamma^3}{(n + \beta)^3} n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n^3}{(n+\beta)^3} S_n^\alpha(t^3; x) + \frac{3n^2\gamma}{(n+\beta)^3} S_n^\alpha(t^2; x) + \frac{3n\gamma^2}{(n+\beta)^3} S_n^\alpha(t; x) + \frac{\gamma^3}{(n+\beta)^3} S_n^\alpha(1; x) \\
&= \frac{n^3}{(n+\beta)^3} \left(x^3 + \frac{12\alpha x^4 + 9x^2}{2n} + \frac{24\alpha^2 x^5 + 48\alpha x^3 + 7x}{2n^2} + \frac{120\alpha^2 x^4 + 32\alpha^3 x^6 + 64\alpha x^2 + 1}{4n^3} \right) \\
&\quad + \frac{3n^2\gamma}{(n+\beta)^3} \left(x^2 + \frac{4\alpha x^3 + 2x}{n} + \frac{12\alpha^2 x^4 + 18\alpha x^2 + 1}{3n^2} \right) + \frac{3n\gamma^2}{(n+\beta)^3} \left(x + \frac{4\alpha x^2 + 1}{2n} \right) + \frac{\gamma^3}{(n+\beta)^3} \\
&= \frac{n^3}{(n+\beta)^3} x^3 + \frac{n^2}{2(n+\beta)^3} (12\alpha x^4 + (6\gamma + 9)x^2) \\
&\quad + \frac{n}{2(n+\beta)^3} (24\alpha^2 x^5 + (24\gamma + 48)\alpha x^3 + (6\gamma^2 + 12\gamma + 7)x) \\
&\quad + \frac{1}{4(n+\beta)^3} (32\alpha^3 x^6 + (48\gamma + 120)\alpha^2 x^4 + (24\gamma^2 + 72\gamma + 64)\alpha x^2 + 4\gamma^3 + 6\gamma^2 + 4\gamma + 1)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

$$v. S_n^{\alpha, \beta, \gamma}(t^4; x)$$

$$\begin{aligned}
&= n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^\alpha(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(\frac{nt + \gamma}{n + \beta} \right)^4 dt \\
&= n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^\alpha(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{n^4 t^4 + 4n^3 t^3 \gamma + 6n^2 t^2 \gamma^2 + 4nt \gamma^3 + \gamma^4}{(n + \beta)^4} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n^4}{(n+\beta)^4} n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} t^4 dt + \frac{4n^3\gamma}{(n+\beta)^4} n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} t^3 dt \\
&+ \frac{6n^2\gamma^2}{(n+\beta)^4} n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} t^2 dt + \frac{4n\gamma^3}{(n+\beta)^4} n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} t dt + \frac{\gamma^4}{(n+\beta)^4} n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dt \\
&= \frac{n^4}{(n+\beta)^4} S_n^{\alpha}(t^4; x) + \frac{4n^3\gamma}{(n+\beta)^4} S_n^{\alpha}(t^3; x) + \frac{6n^2\gamma^2}{(n+\beta)^4} S_n^{\alpha}(t^2; x) \\
&+ \frac{4n\gamma^3}{(n+\beta)^4} S_n^{\alpha}(t; x) + \frac{\gamma^4}{(n+\beta)^4} S_n^{\alpha}(1; x) \\
&= \frac{n^4}{(n+\beta)^4} \left\{ x^4 + \frac{8\alpha x^5 + 8x^3}{n} + \frac{24\alpha^2 x^6 + 60\alpha x^4 + 15x^2}{n^2} + \frac{32\alpha^3 x^7 + 144\alpha^2 x^5 + 108\alpha x^3 + 6x}{n^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{840\alpha^2 x^4 + 560\alpha^3 x^6 + 80\alpha^4 x^8 + 210\alpha x^2 + 1}{5n^4} \right\} \\
&+ \frac{4n^3\gamma}{(n+\beta)^4} \left(x^3 + \frac{12\alpha x^4 + 9x^2}{2n} + \frac{24\alpha^2 x^5 + 48\alpha x^3 + 7x}{2n^2} + \frac{120\alpha^2 x^4 + 32\alpha^3 x^6 + 64\alpha x^2 + 1}{4n^3} \right) \\
&+ \frac{6n^2\gamma^2}{(n+\beta)^4} \left(x^2 + \frac{4\alpha x^3 + 2x}{n} + \frac{12\alpha^2 x^4 + 18\alpha x^2 + 1}{3n^2} \right) + \frac{4n\gamma^3}{(n+\beta)^4} \left(x + \frac{4\alpha x^2 + 1}{2n} \right) + \frac{\gamma^4}{(n+\beta)^4} \\
&= \frac{n^4}{(n+\beta)^4} x^4 + \frac{n^3}{(n+\beta)^4} (8\alpha x^5 + (4\gamma + 8)x^3) \\
&+ \frac{n^2}{(n+\beta)^4} (24\alpha^2 x^6 + (24\gamma + 60)\alpha x^4 + (6\gamma^2 + 18\gamma + 15)x^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{n}{(n+\beta)^4} \left(32\alpha^3 x^7 + (48\gamma + 144)\alpha^2 x^5 + (24\gamma^2 + 96\gamma + 108)\alpha x^3 + (4\gamma^3 + 12\gamma^2 + 14\gamma + 6)x \right) \\
& + \frac{1}{5(n+\beta)^4} \left\{ \begin{aligned} & 80\alpha^4 x^8 + (160\gamma + 560)\alpha^3 x^5 + (120\gamma^2 + 600\gamma + 840)\alpha^2 x^4 \\ & + (40\gamma^3 + 180\gamma^2 + 320\gamma + 210)\alpha x^2 + 5\gamma^4 + 10\gamma^3 + 10\gamma^2 + 5\gamma + 1 \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilerek ispat tamamlanır.

5.2.2. Lemma

$\{S_n^{\alpha, \beta, \gamma}\}$ operatör dizisi

i. $\Phi_{n,0}(x) = 1,$

ii. $\Phi_{n,1}(x) = \frac{1}{2(n+\beta)} (4\alpha x^2 - 2\beta x + 2\gamma + 1),$

iii. $\Phi_{n,2}(x) = \frac{n}{(n+\beta)^2} x + \frac{1}{3(n+\beta)^2} \left\{ \begin{aligned} & 12\alpha^2 x^4 - 12\alpha\beta x^3 + (12\alpha\gamma + 3\beta^2 + 18\alpha)x^2 \\ & - (6\beta\gamma + 3\beta)x + 3\gamma^2 + 3\gamma + 1 \end{aligned} \right\},$

iv. $\Phi_{n,4}(x) = \frac{3n^2}{(n+\beta)^4} x^2 + \frac{n}{(n+\beta)^4} \left\{ \begin{aligned} & 24\alpha^2 x^5 - 24\alpha\beta x^4 + (44\alpha + 24\alpha\gamma + 6\beta^2)x^3 \\ & - (10\beta + 12\beta\gamma)x^2 + (6\gamma^2 + 10\gamma + 5)x \end{aligned} \right\}$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{5(n+\beta)^4} \left\{ \begin{aligned} & 8\alpha^4 x^8 - 160\alpha^3 \beta x^7 \\ & + (120\alpha^2 \beta^2 + 160\alpha^3 \gamma + 560\alpha^3)x^6 - (600\alpha^2 \beta + 40\alpha\beta^3 + 240\alpha^2 \beta \gamma)x^5 \\ & + (120\alpha^2 \gamma^2 + 600\alpha^2 \gamma + 180\alpha\beta^2 + 5\beta^4 + 840\alpha^2 + 120\alpha\beta^2 \gamma)x^4 \\ & - (20\beta^3 \gamma + 320\alpha\beta + 10\beta^3 + 120\alpha\beta \gamma^2 + 360\alpha\beta \gamma)x^3 \\ & + (30\beta^2 \gamma^2 + 180\alpha\gamma^2 + 40\alpha\gamma^3 + 320\alpha\gamma + 30\beta^2 \gamma + 10\beta^2 + 210\alpha)x^2 \\ & - (30\beta\gamma^2 + 20\beta\gamma^3 + 20\beta\gamma + 5\beta)x + 5\gamma^4 + 10\gamma^3 + 10\gamma^2 + 5\gamma + 1 \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

merkezi moment değerlerini sağlar [51].

İspat

Tanım 2.2.7'deki merkezi momentin tanımı, $\{S_n^{\alpha,\beta,\gamma}\}$ operatör dizisinin lineer olduğu ve binom açılımı gözönüne alınırsa m -inci merkezi moment

$$\begin{aligned}\Phi_{n,m}(x) &= S_n^{\alpha,\beta,\gamma}\left((t-x)^m; x\right) \\ &= S_n^{\alpha,\beta,\gamma}\left(\sum_{k=0}^m (-1)^k x^k t^{m-k}; x\right) \\ &= \sum_{k=0}^m (-1)^k x^k S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(t^{m-k}; x)\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikte sırasıyla $m=0,1,2,4$ alınarak Lemma 5.2.1 yardımıyla istenilenler elde edilir.

5.3. $\{S_n^{\alpha,\beta,\gamma}\}$ Dizisi İçin Korovkin Tip Teorem

Korovkin teoremi pozitif reel ekseninde tanımlı, sınırlı ve düzgün sürekli fonksiyonlar için araştırılacaktır.

5.3.1. Teorem

$[0, \infty)$ aralığında sınırlı ve düzgün sürekli bir f fonksiyon için $n \rightarrow \infty$ olduğunda $[a, b] \subseteq [0, \infty)$ kompakt aralığında

$$S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(f;x) \xrightarrow{\rightarrow} f(x) \quad (5.3)$$

dir [51].

İspat

$\{S_n^{\alpha,\beta,\gamma}\}$ dizisi Lemma 5.1.1'den dolayı lineer ve pozitifdir. Lemma 5.2.1'den dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(e_k;x) = e_k(x), \quad k = 0,1,2 \quad (5.4)$$

elde edilir. Burada $e_k(x) = x^k$, $k = 0,1,2$ şeklindedir. Bu operatör dizisinin lineer ve pozitif olduğu ve Eş. 5.4 dikkate alınırsa Korovkin teoreminden [4,5,57]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(f;x) = f(x)$$

elde edilir.

5.4. $\{S_n^{\alpha,\beta,\gamma}\}$ Dizisinin $C_B[0,\infty)$ Sınıfındaki Bir Fonksiyonla Yaklaşımı

5.4.1. Teorem

$f \in C_B[0,\infty)$ fonksiyonu verilsin. Buna göre $x \in [0,\infty)$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\{S_n^{\alpha,\beta,\gamma}\}$ operatör dizisi için

$$|S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(f;x) - f(x)| \leq 2\omega(f;\delta_n)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\Phi_{n,2}(x)$ değeri Lemma 5.2.2'de belirtilen ikinci merkezi moment olmak üzere $\delta_n = \sqrt{\Phi_{n,2}(x)}$ şeklindedir [51].

İspat

$S_n^{\alpha,\beta,\gamma}$ operatörleri lineer pozitif ve $S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(1; x) = 1$ olduğundan dolayı

$$\left| S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(f; x) - f(x) \right| \leq \omega(f; \delta) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta} S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(|t - x|; x) \right\} \quad (5.5)$$

elde edilir. Ayrıca, $S_n^{\alpha,\beta,\gamma}$ operatöründe önce sonsuz toplam içerisindeki integrale sonra da sonsuz toplama Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanır ve sonrada Lemma 3.2.1 ile Lemma 5.2.2 kullanılırsa

$$\begin{aligned} & S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(|t - x|; x) \\ &= n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left| \frac{nt + \gamma}{n + \beta} - x \right| dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} n^{\frac{1}{2}} \left(n \left(\frac{nt + \gamma}{n + \beta} - x \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} n dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} n \left(\frac{nt + \gamma}{n + \beta} - x \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} n \left(\frac{nt + \gamma}{n + \beta} - x \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(P_{n,k}^{\alpha}(x) \right)^{\frac{1}{2}} \left(n P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(\frac{nt+\gamma}{n+\beta} - x \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \right)^{\frac{1}{2}} \left(n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(\frac{nt+\gamma}{n+\beta} - x \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\{ G_n^{\alpha}(1; x) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ S_n^{\alpha, \beta, \gamma} \left((t-x)^2; x \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{\Phi_{n,2}(x)} \tag{5.6}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 5.5 ve Eş. 5.6 gözönüne alındığında

$$\left| S_n^{\alpha, \beta, \gamma}(f; x) - f(x) \right| \leq \left\{ 1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{\Phi_{n,2}(x)} \right\} \omega(f; \delta) \tag{5.7}$$

yazılabilir. Eş. 5.7'de $\delta = \delta_n = \sqrt{\Phi_{n,2}(x)}$ seçilirse

$$\left| S_n^{\alpha, \beta, \gamma}(f; x) - f(x) \right| \leq 2\omega(f; \delta_n)$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

5.4.2. Teorem

$f \in C_B[0, \infty)$ fonksiyonu verilsin. Buna göre $x \in [0, \infty)$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\{S_n^{\alpha, \beta, \gamma}\}$ operatör dizisi için

$$\left| S_n^{\alpha, \beta, \gamma}(f; x) - f(x) \right| \leq 2K(f; \delta_n)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\Phi_{n,1}(x)$ ve $\Phi_{n,2}(x)$ değerleri Lemma 5.2.2’de belirtilen merkezi momentler olmak üzere $\delta_n = \Phi_{n,1}(x) + \Phi_{n,2}(x)$ şeklindedir [51].

İspat

$g \in C_B^2[0, \infty)$ olsun. Bu fonksiyon Taylor formülünden

$$g(t) = g(x) + g'(x)(t-x) + g''(c) \frac{(t-x)^2}{2}, \quad c \in (x, t) \quad (5.8)$$

şeklinde yazılabilir. $S_n^{\alpha, \beta, \gamma}$ operatörünün lineerlik özelliği kullanılırsa

$$S_n^{\alpha, \beta, \gamma}(g(t); x) - S_n^{\alpha, \beta, \gamma}(g(x); x) = S_n^{\alpha, \beta, \gamma}(g'(x)(t-x); x) + S_n^{\alpha, \beta, \gamma}\left(g''(c) \frac{(t-x)^2}{2}; x\right)$$

$$S_n^{\alpha, \beta, \gamma}(g(t) - g(x); x) = g'(x) S_n^{\alpha, \beta, \gamma}((t-x); x) + \frac{g''(c)}{2} S_n^{\alpha, \beta, \gamma}((t-x)^2; x) \quad (5.9)$$

elde edilir. Lemma 5.2.2 ve Eş. 5.9 kullanılarak

$$S_n^{\alpha, \beta, \gamma}(g(t) - g(x); x)$$

$$= g'(x) \Phi_{n,1}(x) + \frac{g''(c)}{2} \Phi_{n,2}(x)$$

$$\leq \|g'\|_{C_B[0, \infty)} \Phi_{n,1}(x) + \frac{\|g''\|_{C_B[0, \infty)}}{2} \Phi_{n,2}(x)$$

$$\begin{aligned}
&\leq (\Phi_{n,1}(x) + \Phi_{n,2}(x)) \left(\|g\|_{C_B[0,\infty)} + \frac{\|g\|_{C_B[0,\infty)}}{2} \right) \\
&\leq (\Phi_{n,1}(x) + \Phi_{n,2}(x)) \|g\|_{C_B^2[0,\infty)} \tag{5.10}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 5.10 ve $S_n^{\alpha,\beta,\gamma}$ operatörünün lineerlik özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&|S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(f;x) - f(x)| \\
&= |S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(f;x) - S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(g;x) + S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(g;x) - g(x) + g(x) - f(x)| \\
&= |S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(f-g;x) + (S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(g;x) - g(x)) + (g(x) - f(x))| \\
&\leq S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(|f-g|;x) + |f(x) - g(x)| + |S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(g;x) - g(x)| \\
&\leq S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(\|f-g\|_{C_B[0,\infty)};x) + \|f-g\|_{C_B[0,\infty)} + |S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(g;x) - g(x)| \\
&\leq \|f-g\|_{C_B[0,\infty)} S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(1;x) + \|f-g\|_{C_B[0,\infty)} + \|g\|_{C_B^2[0,\infty)} (\Phi_{n,1}(x) + \Phi_{n,2}(x)) \\
&\leq 2\|f-g\|_{C_B[0,\infty)} + 2\|g\|_{C_B^2[0,\infty)} (\Phi_{n,1}(x) + \Phi_{n,2}(x)) \tag{5.11}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Eş. 5.11’de her iki tarafının $g \in C_B^2[0,\infty)$ için infimumunu alınırsa

$$\begin{aligned}
|S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(f;x) - f(x)| &\leq 2 \inf_{g \in C_B^2[0,\infty)} \left\{ \|f-g\|_{C_B[0,\infty)} + \|g\|_{C_B^2[0,\infty)} (\Phi_{n,1}(x) + \Phi_{n,2}(x)) \right\} \\
|S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(f;x) - f(x)| &\leq 2K(f; \Phi_{n,1}(x) + \Phi_{n,2}(x)) \tag{5.12}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 5.12’de $\delta_n = \Phi_{n,1}(x) + \Phi_{n,2}(x)$ alınır

$$\left| S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(f;x) - f(x) \right| \leq 2K(f;\delta_n)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

5.4.3. Teorem

$f \in C_B[0,\infty)$ fonksiyonu verilsin. Buna göre $x \in [0,\infty)$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\{S_n^{\alpha,\beta,\gamma}\}$ operatör dizisi için

$$\left| S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(f;x) - f(x) \right| \leq 2M \left\{ \omega_2(f;\sqrt{\delta_n}) + \min(1,\delta_n) \|f\|_{C_B[0,\infty)} \right\}$$

şeklinde bir bağıntı vardır. Burada $\Phi_{n,1}(x)$ ve $\Phi_{n,2}(x)$ değerleri Lemma 5.2.2’de belirtilen merkezi momentler olmak üzere $\delta_n = \Phi_{n,1}(x) + \Phi_{n,2}(x)$ şeklindedir [51].

İspat

Teorem 2.5.1’den ispat açıktır.

5.5. $\{S_n^{\alpha,\beta,\gamma}\}$ Dizisinin Lipschitz Sınıfındaki Bir Fonksiyonla Yaklaşımı

5.5.1. Teorem

$f \in Lip_M(\mu)$ fonksiyonu verilsin. Buna göre $x \in [0,\infty)$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\{S_n^{\alpha,\beta,\gamma}\}$ operatör dizisi için

$$\left| S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(f;x) - f(x) \right| \leq M(\delta_n)^{\frac{\mu}{2}}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\Phi_{n,2}(x)$ değeri Lemma 5.2.2’de belirtilen ikinci merkezi moment olmak üzere $\delta_n = \Phi_{n,2}(x)$ şeklindedir [51].

İspat

$S_n^{\alpha,\beta,\gamma}$ operatörleri lineer pozitif ve $S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(1;x)=1$ olduğundan dolayı

$$\left| S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(f;x) - f(x) \right| \leq M S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(|t-x|^\mu; x) \quad (5.13)$$

elde edilir. Ayrıca $S_n^{\alpha,\beta,\gamma}$ operatöründe $p = \frac{2}{\mu}$ ve $q = \frac{2}{2-\mu}$ için Hölder eşitsizliği ilk önce sonsuz toplam içerisindeki integrale daha sonrada sonsuz toplama uygulanırsa Lemma 3.2.1 ve Lemma 5.2.2’den

$$\begin{aligned} & S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(|t-x|^\mu; x) \\ &= n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^\alpha(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left| \frac{nt+\gamma}{n+\beta} - x \right|^\mu dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^\alpha(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(n \left(\frac{nt+\gamma}{n+\beta} - x \right)^2 \right)^{\frac{\mu}{2}} n^{\frac{2-\mu}{2}} dt \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^\alpha(x) \left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} n \left(\frac{nt+\gamma}{n+\beta} - x \right)^2 dt \right)^{\frac{\mu}{2}} \left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} n dt \right)^{\frac{2-\mu}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} n \left(\frac{nt+\gamma}{n+\beta} - x \right)^2 dt \right)^{\frac{\mu}{2}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(n P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(\frac{nt+\gamma}{n+\beta} - x \right)^2 dt \right)^{\frac{\mu}{2}} \left(P_{n,k}^{\alpha}(x) \right)^{\frac{2-\mu}{2}} \\
&\leq \left(n \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(\frac{nt+\gamma}{n+\beta} - x \right)^2 dt \right)^{\frac{\mu}{2}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \right)^{\frac{2-\mu}{2}} \\
&= \left\{ S_n^{\alpha,\beta,\gamma} \left((t-x)^2; x \right) \right\}^{\frac{\mu}{2}} \left\{ G_n^{\alpha}(1; x) \right\}^{\frac{2-\mu}{2}} \\
&= \left(\Phi_{n,2}(x) \right)^{\frac{\mu}{2}} \tag{5.14}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 5.13 ve Eş. 5.14 birlikte düşünülürse

$$\left| S_n^{\alpha,\beta,\gamma} (f; x) - f(x) \right| \leq M \left(\Phi_{n,2}(x) \right)^{\frac{\mu}{2}} \tag{5.15}$$

elde edilir. Eş. 5.15’de $\delta_n = \Phi_{n,2}(x)$ alınırsa ispat tamamlanır.

5.6. $\{S_n^{\alpha,\beta,\gamma}\}$ Dizisi İçin Voronovskaya Tip Teorem

5.7.1. Lemma

$\{S_n^{\alpha,\beta,\gamma}\}$ operatör dizisi

$$i. \lim_{n \rightarrow \infty} n S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(t-x; x) = \frac{4\alpha x^2 - 2\beta x + 2\gamma + 1}{2},$$

$$ii. \lim_{n \rightarrow \infty} n S_n^{\alpha,\beta,\gamma}((t-x)^2; x) = x,$$

$$iii. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 S_n^{\alpha,\beta,\gamma}((t-x)^4; x) = 3x^2$$

limitlerini sağlar [51].

İspat

Lemma 5.2.2'den ispat açıktır.

5.6.1. Teorem

$x \in [0, \infty)$ sabit bir nokta ve f pozitif reel ekseninde düzgün sürekli ve sınırlı bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonun x noktasının komşuluğunda ikinci mertebeden türevi mevcut ve birinci mertebeden türevi sürekli ise bu taktirde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \{S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(f; x) - f(x)\} = \frac{1}{2} \{ (4\alpha x^2 - 2\beta x + 2\gamma + 1) f'(x) + x f''(x) \}$$

eşitsizliği sağlanır [51].

İspat

f fonksiyonu $x \in [0, \infty)$ noktası civarında Taylor serisine açılırsa

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{1}{2} f''(x)(t-x)^2 + \xi_x(t)(t-x)^2 \quad (5.16)$$

şeklinde yazılabilir. Burada ξ_x fonksiyonu Eş. 3.21 ile verilen $\xi_x(x) = 0$ ve $\lim_{t \rightarrow x} \xi_x(t) = 0$ şartlarını sağlayan sınırlı ve düzgün sürekli bir fonksiyondur.

Eş 5.16'nın her iki tarafına $S_n^{\alpha, \beta, \gamma}$ operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} & S_n^{\alpha, \beta, \gamma}(f; x) - f(x) \\ &= f'(x) S_n^{\alpha, \beta, \gamma}(t-x; x) + \frac{1}{2} f''(x) S_n^{\alpha, \beta, \gamma}((t-x)^2; x) + S_n^{\alpha, \beta, \gamma}(\xi_x(t)(t-x)^2; x) \end{aligned} \quad (5.17)$$

eşitliği yazılabilir. Ayrıca Eş. 5.2 ile verilen $S_n^{\alpha, \beta, \gamma}$ operatöründe önce sonsuz toplam içerisindeki integrale sonra da sonsuz toplama Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa ve Lemma 2.2.2 dikkate alınır

$$\begin{aligned} & \left| n S_n^{\alpha, \beta, \gamma}(\xi_x(t)(t-x)^2; x) \right| \\ & \leq n S_n^{\alpha, \beta, \gamma}(|\xi_x(t)|(t-x)^2; x) \\ &= (n + \beta) \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k+\gamma}{n+\beta}}^{\frac{k+\gamma+1}{n+\beta}} n |\xi_x(s)|(s-x)^2 ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (n+\beta) \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k+\gamma}{n+\beta}}^{\frac{k+\gamma+1}{n+\beta}} \left(\xi_x^2(s) \right)^{\frac{1}{2}} \left(n^2 (s-x)^4 \right)^{\frac{1}{2}} ds \\
&\leq (n+\beta) \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \left(\int_{\frac{k+\gamma}{n+\beta}}^{\frac{k+\gamma+1}{n+\beta}} \xi_x^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\frac{k+\gamma}{n+\beta}}^{\frac{k+\gamma+1}{n+\beta}} n^2 (s-x)^4 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left((n+\beta) P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k+\gamma}{n+\beta}}^{\frac{k+\gamma+1}{n+\beta}} \xi_x^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(n^2 (n+\beta) P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k+\gamma}{n+\beta}}^{\frac{k+\gamma+1}{n+\beta}} (s-x)^4 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left((n+\beta) \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k+\gamma}{n+\beta}}^{\frac{k+\gamma+1}{n+\beta}} \xi_x^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(n^2 (n+\beta) \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{\alpha}(x) \int_{\frac{k+\gamma}{n+\beta}}^{\frac{k+\gamma+1}{n+\beta}} (s-x)^4 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(\xi_x^2(t); x)} \sqrt{n^2 S_n^{\alpha,\beta,\gamma}((t-x)^4; x)} \tag{5.18}
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca Korovkin teoreminden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(\xi_x^2(t); x) = \xi_x^2(x) = 0 \tag{5.19}$$

yazılabilir. Eş. 5.18, Eş. 5.19 ve Lemma 5.7.1 kullanılırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n S_n^{\alpha,\beta,\gamma}(\xi_x(t)(t-x)^2; x) = 0 \tag{5.20}$$

elde edilir. Eş. 5.20 ve Lemma 5.7.1 gözönüne alınarak, Eş. 5.19'un her iki tarafı n sayısı ile çarpılır ve daha sonra $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ S_n^{\alpha, \beta, \gamma} (f; x) - f(x) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ (4\alpha x^2 - 2\beta x + 2\gamma + 1) f'(x) + x f''(x) \right\}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.



6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde pozitif reel eksende tanımlı, sınırlı ve düzgün sürekli bir fonksiyonu $n \rightarrow \infty$ durumunda 3-5'inci bölümlerde belirtilen lineer pozitif operatör dizileri yardımıyla iki değişkenli Hermite polinomlarını içeren belirli toplamlar şeklinde yazmak mümkün bir duruma gelmiştir. Dolayısıyla bu tezde “bir fonksiyon iki değişkenli Hermite polinomları yardımıyla ifade edilebilir mi?” sorusunun cevabı bulunmaktadır.

3-5'inci bölümlerde belirtilen lineer pozitif operatör dizilerinin yakınsaklık özellikleri; süreklilik modülü, ikinci süreklilik modülü, Peetre- K fonksiyoneli, Voronovskaya tipi asimptotik formül ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla incelendi.

Beşinci bölümdeki $S_n^{\alpha,\beta,\gamma}$ operatöründe $\gamma = \beta = 0$ alınarak dördüncü bölümde verilen S_n^α operatörü elde edileceğinden dördüncü bölümde elde edilen tüm sonuçlar beşinci bölümdeki sonuçlardan da elde edilebilir. Yine benzer şekilde G_n^α operatöründe $\alpha = 0$ olması durumunda $H_k(n,0) = n^k$ olacağından Eş. 2.31 ile verilen Szász operatörü elde edilir ve bu durumda üçüncü bölümde elde edilen tüm sonuçlar $\alpha = 0$ için Szász operatörünün yaklaşım özelliklerini verir.

Bu operatörler 2016-2018 yılları arasında yakın bir zamanda tanıtıldıklarından dolayı verilen operatörlerle ilgili henüz fazla bir çalışma yapılmamıştır. Bu konu hakkında yapılan çalışmalar hakkında bilgi edinmek istenirse [49-51,69]'deki kaynaklara bakılabilir. Bu yüzden araştırmacılar isterlerse G_n^α , S_n^α ve $S_n^{\alpha,\beta,\gamma}$ operatörlerinin giriş bölümünde bahsedilen sayısızca genellemelerini yapabilirler. Örneğin, bu üç operatörde lineer fonksiyonları korumamaktadır. Dolayısıyla bu operatörler lineer fonksiyonları koruyacak şekilde oluşturulabilir. Yine benzer şekilde bu operatörler üstel fonksiyonları veya polinomları koruyacak şekilde de düzenlenebilir. Bu yüzden bu operatörlerin King tipi genellemesi yapılabilir. Ayrıca, yazarın araştırmacılara önerdiği bazı çalışmalar aşağıdaki gibidir:

- S_n^α Operatörünün (p,q) -Dunkl Tipi Genellemesi,

- S_n^α Operatörünün q -Tipi Genellemesi,
- İki Değişkenli Hermite Polinomları Yardımıyla İki Değişkenli Operatör Genellemesi,
- S_n^α Operatörünün Bileşke ve Ters Fonksiyon Yardımıyla Elde Edilen Genellemesi,
- G_n^α ve S_n^α Operatörlerinin Üstel Fonksiyonları Koruyacak Şekilde Genellemesi,
- G_n^α Operatörünün Durmeyer Tipli Genellemesi,
- G_n^α , S_n^α ve $S_n^{\alpha,\beta,\gamma}$ Operatörlerinin Farkları Üzerine Bir Çalışma.

Bu operatörler ayrıca Casteljau algoritmalarında ve Bézier eğrilerinde yeni bir nesne inşası için kullanılabilir.



KAYNAKLAR

1. Weierstrass, K. (1885). Über die analytische Darstellbarkeit sogenanter willkürlicher Funktionen enier reellen Veränderlichen. *Sitzungsbericte de Akademie zu Berlin*, 633-639, 789-805.
2. Bernstein, S.N. (1912). Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul de probabilités. *Commununications of the Kharkov Mathematical Society*, 13(2), 1-2.
3. Bohman, H. (1953). On approximation of continuous and of analytic functions. *Arkiv för Matematik*, 2, 43-56.
4. Korovkin, P.P. (1953). Convergence of positive linear operators in the space of continuous functions. (Russian) *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 90, 961-964.
5. Korovkin, P.P. (1960). *Linear operators and approximation theory*. Delhi: Hindustan Publishing Corporation (India), 1-66.
6. Szász, O. (1950). Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 45, 239-245.
7. Totik, V. (1983). Approximation by Szász-Mirakjan-Kantorovich operators in L^p $p > 1$. *Analysis Mathematica*, 9(2), 147-167.
8. Baskakov, V.A. (1957). An example of a sequence of linear positive operators in the space of continuous functions. (Russian) *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 113, 249-251.
9. Lupaş, A. (1995). *The approximation by some positive linear operators*. Paper presented at the Proceedings of the International Dort-mund Meeting on Approximation Theory, Berlin.
10. Widder, D.V. (1941). *The Laplace transform*. Princeton: Princeton University Press, 1-390.
11. Lupaş, A. (1987). *A q -analogue of the Bernstein operator*. Paper presented at the Seminar on Numerical and Statistical Calculus, Cluj-Napoca.
12. Phillips, G.M. (1997). Bernstein polynomials based on the q -integers. *Annals of Numerical Mathematics*, 4, 511-518.
13. Ostrovska, S. (2006). On the Lupaş q -analogue of the Bernstein operator. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 36(5), 1615-1629.
14. Aral, A. (2008). A generalization of Szász-Mirakyan operators based on q -integers. *Mathematical and Computer Modelling*, 47(9-10), 1052-1062.
15. Gupta, V. (2008). Some approximation properties of q -Durrmeyer operators. *Applied Mathematics and Computation*, 197(1), 172-178.

16. Kac, V. and Cheung, P. (2002). *Quantum calculus*. New York: Springer, 1-106.
17. Aral, A., Gupta, V., and Agarwal, R.P. (2013). *Applications of q -calculus in operator theory*. New York: Springer Science+Business Media, 1-251.
18. Mursaleen, M., Ansari, K.J., Khan, A. (2015). On (p, q) analogue of Bernstein operators. *Applied Mathematics and Computation*, 266, 874-882.
19. Acar, T. (2016). (p, q) -Generalization of Szász-Mirakjan operators. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39(10), 2685-2695.
20. King, J.P. (2003). Positive linear operators which preserve x^2 . *Acta Mathematica Hungarica*, 99(3), 203-208.
21. Duman, O. and Özarslan, M.A. (2007). Szász–Mirakjan type operators providing a better error estimation. *Applied Mathematics Letters*, 20(12), 1184-1188.
22. Duman, O., Özarslan, M.A. and Vecchia, B.D. (2009). Modified Szász-Mirakjan-Kantorovich operators preserving linear functions. *Turkish Journal of Mathematics*, 33, 151-158.
23. Cárdenas-Morales, D. Garrancho, P. and Raşa, I. (2011). Bernstein-type operators which preserve polynomials. *Computers & Mathematics with Applications*, 62(1), 158-163.
24. Aral, A., Inoan, D. and Raşa, I. (2014). On the generalized Szász–Mirakjan operators. *Results in Mathematics*, 65(3-4), 441-452.
25. Kingsley, E.H. (1951). Bernstein polynomials for functions of two variables of class $C^{(k)}$. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2(1), 64-71.
26. Butzer, P.L. (1953). On two-dimensional Bernstein polynomials. *Canadian Journal of Mathematics*, 5, 107-113.
27. Volkov, V.I. (1957). On the convergence of sequences of linear positive operators in the space of continuous functions of two variables. (Russian) *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 115, 17-19.
28. Rosenblum, M. (1994). Generalized Hermite polynomials and the Bose-like oscillator calculus. *Operator Theory: Advances and Application*, 73, 369–396.
29. Sucu, S. (2014). Dunkl analogue of Szasz operators. *Applied Mathematics and Computation*, 244, 42-48.
30. İçöz, G. and Çekim, B. (2016). Stancu-type generalization of Dunkl analogue of Szász-Kantorovich operators. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39(7), 1803-1810.

31. İçöz, G. and Çekim, B. (2015). Dunkl generalization of Szász operators via q -calculus. *Journal of Inequalities and Applications*, *Journal of Inequalities and Applications*, 2015, 1-11.
32. Srivastava, H. M., Mursaleen, M., Alotaibi, A.M., Nasiruzzaman, M., Al-Abied, A. A. H. (2017). Some approximation results involving the q -Szász-Mirakjan-Kantorovich type operators via Dunkl's generalization. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 40(15), 5437-5452.
33. Acar, T., Aral, A. and Gonska, H. (2017). On Szász–Mirakyan operators preserving e^{2ax} , $a > 0$. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 14(1), 1-14.
34. Gadjiev, A.D. (1974). The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets, and theorems analogous to that of PP Korovkin. (Russian) *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 218,1001-1004.
35. Gadjiev, A.D. (1976). Theorems of Korovkin type. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 20, 995-998.
36. Gadjiev, A.D. (1980). Positive linear operators in weighted spaces of functions of several variables. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk Seriya Matematicheskaya*, 4, 32-37.
37. Gadjiev, A.D. (1975). Weighted approximation of continuous functions by linear operators on the whole real axis. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk Seriya Matematicheskaya*, 5, 41-45.
38. İspir, N. (2001). On modified Baskakov operators on weighted spaces. *Turkish Journal of Mathematics*, 25(3), 355-365.
39. Gadjiev, A.D. and Orhan, C. (2002). Some approximation theorems via statistical convergence. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 32(1), 129-138.
40. Duman, O., Khan, M.K., Orhan, C. (2003). A -Statistical convergence of approximating operators. *Mathematical Inequalities and Applications*, 6(4), 689-99.
41. Duman, O. and Orhan, C. (2004). Statistical approximation by positive linear operators. *Studia Mathematica*, 161(2), 187-197.
42. Cheney, E.W. and Sharma, A. (1964). Bernstein power series. *Canadian Journal of Mathematics*, 16, 241–252.
43. Jakimovski, A. and Leviatan D. (1969). Generalized Szasz operators for the approximation in the infinite interval. *Mathematica (Cluj)*, 11, 97-103.
44. Varma, S. and Taşdelen, F. (2012). Szász type operators involving Charlier polynomials. *Mathematical and Computer Modelling*, 56(5–6), 118-122.
45. Ismail, M.E.H. (1974). On a generalization of Szász operators. *Mathematica (Cluj)*, 39 259–267.

46. Varma, S., Sucu, S. and İçöz, G. (2012). Generalization of Szasz operators involving Brenke type polynomials. *Computers & Mathematics with Applications*, 64(2), 121-127.
47. Sucu, S., İçöz, G. and Varma, S. (2012). On some extensions of Szasz operators including Boas-Buck type polynomials. *Abstract and Applied Analysis*, Article ID 680340, 15 pages.
48. Appell, P. and Kampe de Fériet, J. (1926). *Hypergeometriques et hyperspheriques: polynomes d'Hermite*. Paris: Gauthier-Villars.
49. Krech, G. (2016). A note on some positive linear operators associated with the Hermite polynomials. *Carpathian Journal of Mathematics*, 32 (1), 71-77.
50. Yazıcı, S. and Çekim, B. (2017). A Kantorovich type generalization of the Szász operators via two variable Hermite polynomials. *Gazi University Journal of Science*, 30(4), 432-440.
51. Yazıcı, S. ve Çekim, B. (2018, 12-15 Eylül). *İki değişkenli Hermite polinomlarını içeren Szász operatörlerinin Stancu-Kantorovich tipli genellemesi*. 31. Ulusal Matematik Sempozyumu'nda sunuldu, Erzincan.
52. Balcı, M. (2010). *Matematik analiz 1*. Ankara: Balcı Yayınları, 77-131, 319-350.
53. Balcı, M. (2011). *Matematik analiz 2*. Ankara: Balcı Yayınları, 1-27.
54. Soydan, Y. (2012). *Fonksiyonel analiz*. Ankara: Nobel Yayınları, 1-184.
55. Kılıç, S.A. ve Erdem, M. (1987). *Fonksiyonel analize giriş*. Ankara: Gazi Üniversitesi Yayınları, 62-100.
56. Hardy, G., Littlewood, J.E. and Polya, G. (2001). *Inequalities*. Cambridge: Cambridge University Press, 21-26, 30-32, 119-121, 123, 139-143, 146-150.
57. Altomare, F. and Campiti, M. (1994). *Korovkin type approximation theory and its application*. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 195-352.
58. Hacıyev, A. ve Hacısalıhoğlu, H.H. (1995). *Lineer pozitif operatör dizilerinin yakınsaklığı*. Ankara: AÜFF Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, 1-78.
59. Lorentz, G.G. (1953). *Bernstein polynomials*. Toronto: University of Toronto Press, 3-125.
60. Ditzian, Z. and Totik, V. (1987). *Moduli of smoothness*, New York: Springer-Verlag, 10-35.
61. Anastassiou, G.A. and Gal, S.G. (2000). *Approximation theory: Moduli of continuity and global smoothness preservation*, Basel: Birkhäuser-Verlag, 1-203.

62. Gupta, V. and Agarwal, R.P. (2014). *Convergence estimates in approximation theory*, Delhi: Springer International Publishing, 1-17.
63. Ciupa, A. (1995). A class of integral Favard- Szász type operators, *Studia Univ. Babeş-Bolyai Math.*, 40 (1), 39–47.
64. Altın, A. (2011). *Uygulamalı matematik*, Ankara: Gazi Kitabevi, 157-215, 235-236.
65. Oldham, K., Myland J., Spanier, J. (2008). *An atlas of functions*, New York: Springer-Verlag, 217-229.
66. Yılmaz, M. (2004). *Szász Operatörleri ve Bir Genellemesinin Yaklaşım ve Diferensiyel Özellikleri*, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 19-40.
67. Gupta, V., Malik, N. and Rassias, T.M. (2018). Moment-generating functions and moments of linear positive operators, *Modern Discrete Mathematics and Analysis*, 187-215.
68. Gupta, V., Rassias, T.M., Agrawal, P.N. and Acu, A.M. (2018). *Recent advances in constructive approximation theory*, Springer Optimization and Its Application, Volume 138, 1-29.
69. Aktaş, R., Çekim, B, and Taşdelen, F. (2018). A Dunkl analogue of operators including two-variable Hermite polynomials. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 1-11.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : YAZICI, Serdal
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 20.07.1993, Göksun
 Medeni hali : Bekar
 e-mail : serdal.yazici@gazi.edu.tr



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik Ana Bilim Dalı	Devam Ediyor
Lisans	Erciyes Üniversitesi/Matematik Bölümü	2015
Lise	Çardak ÇPL/Fen Bilimleri Alanı	2011

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

[Y1] Yazıcı, S. and Çekim, B. (2017). A Kantorovich type generalization of the Szász operators via two variable Hermite polynomials. *Gazi University Journal of Science*, 30(4), 432-440.

Bildiriler

[B1] Yazıcı, S. and Çekim, B. (2018, 11-13 September). *A new generalization of Szász operators and its approximation properties*. Paper presented at the Second International Conference on Pure and Applied Mathematics, Van.

[B2] Yazıcı, S. ve Çekim, B. (2018, 12-15 Eylül). *İki değişkenli Hermite polinomlarını içeren Szász operatörlerinin Stancu-Kantorovich tipli genellemesi*. 31. Ulusal Matematik Sempozyumu'nda sunuldu, Erzincan.

Hobiler

Raspberry Pi, Arduino, Müzik, Doğa Yürüyüşü, Organik Tarım, Dağcılık



GAZİ GELECEKTİR..