



**AGRATINI OPERATÖRLERİ VE BAZI GENELLEŞMELERİNİN
YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ**

Aslıhan GÜLSÜN

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

TEMMUZ 2019

Aslıhan GÜLSÜN tarafından hazırlanan “AGRATİNİ OPERATÖRLERİ VE BAZI GENELLEŞMELERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Ogün DOĞRU

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Başkan: Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Prof. Dr. Birol ALTIN

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Prof. Dr. İsmet YÜKSEL

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Özge DALMANOĞLU

Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı, Başkent Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 10/07/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Aslıhan GÜLSÜN

10/07/2019

AGRATİNİ OPERATÖRLERİ VE BAZI GENELLEŞMELERİNİN YAKLAŞIM
ÖZELLİKLERİ
(Doktora Tezi)

Aslıhan GÜLSÜN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Temmuz 2019

ÖZET

Bu çalışmada altı bölüm bulunmaktadır. Giriş kısmında tez hakkında genel bilgiler verilmiştir. İkinci kısımda tezde kullanılacak olan bazı kavramlar ve tanımlar verilmiştir. Üçüncü bölümde Agratini operatörleri ve bazı genelleşmeleri ile ilgili olan literatürdeki çalışmaların bazıları verilmiştir. Dördüncü bölümde birçok iyi bilinen operatörü içeren ve Doğru tarafından tanımlanan lineer pozitif operatörlerin Kantorovich tipli integral genelleşmesi tanımlanarak bu genelleşmenin L_p uzaylarındaki Korovkin tipi A-istatistiksel yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Ayrıca Voronovskaja tipli bir teorem de verilmiştir. Beşinci bölümde bu operatörlerin L_p uzaylarındaki A-istatistiksel yaklaşım hızı, Peetre-K fonksiyoneli, Lipschitz sınıfından fonksiyonlar, Lipschitz tipi maksimal fonksiyonlar ve süreklilik modülü kullanılarak hesaplanmıştır. Son olarak altıncı bölüm ise sonuç bölümü olarak verilmiştir.

Bilim Kodu : 20406
Anahtar Kelimeler : Agratini operatörü, Korovkin tipli teoremler, Kantorovich tipli operatörler, Peetre-K fonksiyoneli , süreklilik modülü, Lipschitz sınıfı, yaklaşım hızı, yaklaşım özellikleri, A-istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık
Sayfa Adedi : 67
Danışman : Prof. Dr. Ogün DOĞRU

AGRATINI OPERATORS AND APPROXIMATION PROPERTIES OF SOME
GENERALIZATIONS

(Ph.D. Thesis)

Ashhan GÜLSÜN

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2019

ABSTRACT

There are six sections in this study. In the introduction, general information about the thesis is given. In the second section, some notions and definitions used in this study are given. In the third section, some of studies in literature about Agratini operators and some generalizations of this operators are given. In the fourth chapter, a Kantorovich type integral generalizations of linear positive operators including many well-known operators which was defined by Doğru are introduced and Korovkin type A-statistical approximation properties are examined in the L_p spaces. Also Voronovskaja type theorem is given. In the fifth chapter, A-statistical approximation order in the L_p spaces of this operators is calculated by using Peetre-K functional, Lipschitz type functions, Lipschitz type maksimal functions and modulus of continuity. Last, sixth part is given as conclusion part.

Science Code : 20406

Key Words : Agratini operators, Korovkin Type Theorems, Kantorovich Type operators, Peetre-K functional, modulus of continuity, Lipschitz class, approximation order, approximation properties, A-statistical convergence, statistical convergence

Page Number : 67

Supervisor : Prof. Dr. Ogün DOĞRU

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında bilgi ve deneyimlerinden yararlanmamı sağlayan, yardım ve katkılarıyla bana yol gösteren değerli danışmanım Prof. Dr. Ogün DOĞRU “Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü” ‘ya, maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, daima yanımda olan sevgili ve kıymetli eşim Mehmet GÜLSÜN’e, hayatımın her aşamasında yanımda olan canım aileme ve özellikle üzerimde emeği çok olan biricik kız kardeşim Beyhan COŞKUN’a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
1. GİRİŞ	1
2. TANIM VE TEOREMLER	5
2.1. Lineer Pozitif Operatörleri	5
2.2. Lineer Pozitif Operatörlerinin Özellikleri	6
2.3. Lineer Pozitif Operatörlerin Yakınsaklığı	7
2.4. Lineer Pozitif Operatörlerin Yaklaşım Hızı	15
3. AGRATİNİ OPERATÖRLERİ VE BAZI GENELLEŞMELERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ	17
4. AGRATİNİ OPERATÖRLER DİZİSİNİN KANTOROVİCH TIPLI GENELLEŞMESİ VE L_p UZAYLARINDAKİ A-İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ	27
4.1. L_p Uzaylarında Korovkin Tipi Yaklaşım Özellikleri	27
4.2. L_p Uzaylarında Korovkin Tipi A-İstatistiksel Yaklaşım Özellikleri	37
4.3. Voronovskaja Tipi Yaklaşım Özellikleri	42
5. AGRATİNİ OPERATÖRLER DİZİSİNİN KANTOROVİCH TIPLI GENELLEŞMESİNİN L_p UZAYLARINDAKİ A-İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIM HIZI	47
5.1. Peetre-K Fonksiyoneli Yardımıyla Yaklaşım Hızı	47
5.2. Lipschitz Sınıfı Fonksiyonları Yardımıyla Yaklaşım Hızı	51
5.3. Süreklilik Modülü Yardımıyla Yaklaşım Hızı	54
5.4. Lipschitz Tipi Maksimal Fonksiyonlar Yardımıyla Yaklaşım Hızı	57

Sayfa

6. SONUÇ VE ÖNERİLER	61
KAYNAKLAR	63
ÖZGEÇMİŞ	67

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığındaki sürekli fonksiyonlar uzayı
$L_p[a, b]$	$[a, b]$ aralığında p-inci kuvvetten Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonların uzayı
$L(f; x)$	L operatörünün f fonksiyonuna uygulanması
$\omega(f; \delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$K(f; \delta)$	f fonksiyonunun Petree K-fonksiyoneli
$\omega_2(f; \delta)$	f fonksiyonunun 2. süreklilik modülü
$\tilde{\omega}_\alpha(f, x)$	α mertebeli Lipschitz tipi maksimal fonksiyonlar
$Lip_M(\alpha)$	Lipschitz sınıfından fonksiyonların uzayı
$B_n(f; x)$	f fonksiyonunun Bernstein polinomu
$C_n(f; x)$	Bernstein kuvvet serileri
$M_n(f; x)$	Meyer-König ve Zeller (MKZ) operatörü
$M_n^*(f; x)$	MKZ operatörlerinin Kantorovich Tipli İntegral genelleşmesi
$D_n(f; x)$	Agratini operatörleri
$D_n^*(f; x)$	Agratini operatörlerinin Kantorovich Tipli İntegral genelleşmesi
$C^2[a, b]$	$g, g', g'' \in C[a, b]$ olan fonksiyon uzayı
$\ g\ _{C^2[a, b]}$	$\ g\ _{C^2[a, b]} = \ g\ _{C[a, b]} + \ g'\ _{C[a, b]} + \ g''\ _{C[a, b]}$ ile tanımlı norm
$\ g\ _{L^2(D)}$	$\ g\ _{L^2(D)} := \ g\ _{L(D)} + \ g'\ _{L(D)} + \ g''\ _{L(D)}$ ile tanımlı norm
$\ \cdot\ _p$	L_p uzayındaki norm
st	İstatistiksel yakınsak diziler uzayı
st_A	A-istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$\ \cdot\ _{C[a, b]}$	$C[a, b]$ uzayındaki norm

1. GİRİŞ

Yaklaşımlar teorisi özellikle fonksiyonel analiz olmak üzere matematiğin birçok dalıyla yakın ilişki içerisinde. Bu teori ortaya atılan problemin çözümü için kullanışlı bir gereçtir.

Alman matematikçi Karl Weierstrass, sonlu aralıkta sürekli olan her fonksiyona bu aralıkta yakınsayan bir polinomun karşılık geldiğini ortaya atmış ve varlığını ispatlamıştır [1]. Weierstrass teoremi olarak bilinen bu teorem kapalı aralıkta sürekli olan fonksiyonlara polinomlarla düzgün yaklaşılabileceğini göstermektedir. Böylelikle yaklaşımlar teorisinin geliştirilmesinde önemli bir adım atılmıştır. Daha sonralarda birçok matematikçi bu teoremi gerçekleyen polinomlar tanımlamışlar ve yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir. Bu ispatlardan en ilginç olanı 1912 yılında Bernstein tarafından aşağıdaki gibi tanımlanan polinom için verilmiştir [2].

$f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $x \in [0,1]$ için

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

şeklinde tanımlanan polinom, Bernstein polinomu olarak bilinir. Bu polinomlar lineer pozitif operatörlerdir. Bernstein, polinomlarının $[0,1]$ aralığında sürekli olan f fonksiyonuna düzgün olarak yakınsadığını göstermiştir [2,3].

Bernstein polinomunun yaklaşım özellikleri $[0,1]$ aralığında incelenmiştir [3]. Fonksiyonunun sınırsız aralıklarda olması halinde de başka operatörler için yaklaşım problemleri incelenmiştir. 1950 yılında Szasz tarafından aşağıdaki operatör tanımlanmıştır [4].

$$S_n(f; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Szasz operatörleri olarak bilinen ve lineer pozitif operatör olan bu operatör dizisinin yaklaşım özellikleri Korovkin teoremleri yardımıyla incelenmiştir.

Literatürde birçok yaklaşım operatörleri tanımlanmıştır ve onların Korovkin tipi yaklaşım özellikleri ve yakınsaklık hızları araştırılmıştır [5].

Bohman ve Korovkin lineer pozitif operatörlerin sonlu aralıkta sürekli fonksiyona yaklaşımına ilişkin çok önemli teoremler vermişlerdir [3,6,7]. Bohman toplam şeklindeki lineer pozitif operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonuna düzgün yakınsaklığı ile ilgili kullanışlı bir takım kriterler vermiştir [3,6]. Korovkin, Bohman'ın sonucunu daha da genelleyen ve lineer pozitif operatörlerle yaklaşım teorisini derinleştiren ve Korovkin'in kendi adıyla isimlendirilen bir teorem vermiştir [3,7]. Korovkin'in kendi adıyla anılan bu teorem, bu konu ile ilgili çalışmalara büyük katkı sağlamıştır. Teoremdaki koşula göre, keyfi bir $(T_n(f))$ lineer pozitif operatör dizisinin f fonksiyonuna kapalı ve sonlu bir aralıkta düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart, $(T_n(e_i))$ dizisinin verilen aralıkta $i = 0,1,2$ için $e_i(x) = x^i$ ile tanımlı test fonksiyonuna düzgün yakınsamasıdır. Teoremda verilen bu koşul, sürekli fonksiyonlara lineer pozitif operatörlerle yaklaşım teorisinin temelini oluşturmuştur.

Korovkin teoremi yardımıyla yaklaşım özellikleri incelenebilen Bleimann-Butzer-Hahn (BBH) operatörleri, Szasz operatörleri, Meyer-König-Zeller (MKZ) operatörleri gibi birçok lineer pozitif operatör dizisi tanımlanmıştır. Operatörler tanımlandıktan sonra bu operatörlerin çeşitli genelleşmeleri de ele alınmıştır. Daha sonra tanımlanan Durrmeyer ve Kantorovich tipli genelleşmeler olarak bilinen integral tipli genelleşmeler oldukça önem kazanmıştır [8-10]. Örneğin, Doğru tarafından Meyer-König ve Zeller operatörünün bir genelleşmesi olarak bazı koşullar altında aşağıdaki operatör tanımlanmıştır [11].

$$L_n(f; x) = \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{k+n}\right) \varphi_n^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}, \quad n \in \mathbb{N}, f \in C[0, A], A \in (0,1).$$

Doğru'nun tanımlamış olduğu bu operatörlerin bir genelleşmesi, 2001 yılında Agratini tarafından birtakım koşullarla birlikte $f \in C[0, a], a \in (0,1)$ için

$$D_n(f; x) = \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(k)}(0) x^k}{k!} f\left(\frac{k}{k+n+\beta_k}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

ile verilmiştir [12]. Doğru, Duman ve Orhan, Agratini tarafından tanımlanan bu operatörlerin bazı yaklaşım özelliklerini A -istatistiksel yakınsaklığı kullanarak incelemiş ve Kantorovich tipli integral genelleşmesini aşağıdaki gibi

$$D_n^*(f; x) = \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(k)}(0)x^k}{k! c_{n,k}} \int_k^{k+c_{n,k}} f\left(\frac{\xi}{k+n+\beta_k}\right) d\xi, \quad n \in \mathbb{N}$$

tanımlamış, ayrıca bu operatörlerin L_p uzaylarında A -istatistiksel yakınsaklık hızlarını da vermişlerdir [13]. O halde yaklaşımlar teorisinde, klasik anlamda yakınsaklık kavramının yanı sıra istatistiksel yakınsaklık kavramı da önemli bir çalışma alanı olarak karşımıza çıkmaktadır. İlk defa 1950 yılında Fast tarafından tanımlanan bu kavramı Gadjiev ve Orhan, lineer pozitif operatör dizilerinin Korovkin tipli yaklaşım özelliklerinin incelenebileceği bir teoremlerle geliştirmişlerdir [14]. Verilen bu teorem vasıtasıyla bilinen birçok lineer pozitif operatörün istatistiksel yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızları incelenebilmiştir.

Biz çalışmamızda Doğru, tarafından [15] de tanımlanan, Agratini operatörleri gibi iyi bilinen birçok operatörü de içeren

$$L_n(f; x) = \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{a_{n,v}}\right) \varphi_n^{(v)}(0) \frac{x^v}{v!} \quad (1.1)$$

lineer pozitif operatörlerinin Kantorovich tipli bir genelleşmesini tanımlayacağız.

İntegral tipli bir genelleşme olan bu genelleşmenin yaklaşım özelliklerini A -istatistiksel yakınsaklığı kullanarak L_p uzaylarında inceleyeceğiz.

Bu tezin dördüncü ve beşinci kısımları orijinal bölümler olup, tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde, diğer bölümlere yardımcı bilinen temel tanımlar ve yaklaşım teorisinin önemli bazı teoremleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Agratini operatörlerinin bazı genelleşmelerine ait daha önce incelenmiş olan ve bu operatörlerin yaklaşım özellikleri ile ilgili literatürdeki bazı çalışmalara yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde, Doğru, tarafından L_n ile verilen lineer pozitif operatörlerin Kantorovich tipli bir integral genelleşmesi tanımlanmıştır. Tanımlanan bu operatörlere ait bazı eşitsizliklerin yer aldığı lemmalar ve teoremler ispatlanmıştır ve A -istatistiksel yakınsaklık kavramı yardımıyla L_p uzaylarındaki yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Ayrıca oluşturulan operatörler için Voronovskaja tipli bir teorem de verilmiştir.

Beşinci bölümde ise tanımlanmış olan Kantorovich tipli lineer pozitif operatörlerin L_p uzaylarındaki A -istatistiksel yaklaşım hızları Peetre-K fonksiyoneli, Lipschitz sınıfı fonksiyonları, Lipschitz tipi maksimal fonksiyonları ve süreklilik modülü yardımı ile elde edilmiştir.

Son olarak altıncı bölümde, çalışmamızdan elde ettiğimiz bazı sonuçlara yer verilmiştir.

2. TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde öncelikle tezin içeriğinde kullanılacak olan lineer pozitif operatörler tanımlanacak ve sağladığı bazı temel özelliklere değinilecektir. Ayrıca bu operatörlerin yaklaşım özelliklerine dair literatürdeki bazı teoremler verilecektir.

2.1. Lineer Pozitif Operatörler

2.1.1. Tanım

X ve Y reel değerli iki fonksiyon uzayı olsun. $L: X \rightarrow Y$ şeklinde tanımlanan dönüşümlere operatör denir [3].

Bu durumda L operatörü X uzayında tanımlı her f fonksiyonuna Y uzayında bir Lf fonksiyonu karşılık getirir. Yani operatör fonksiyonu fonksiyona dönüştüren bir bağıntıdır. Lf fonksiyonunun x noktasındaki değeri $L(f; x)$ biçiminde gösterilir.

2.1.2. Tanım

$L: X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. L operatörü eğer $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\forall f, g \in X$ için $L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$ şartını sağlıyorsa L operatörüne lineer operatör denir [3].

2.1.3. Tanım

Eğer bir L operatörü için, $f \geq 0$ iken $L(f) \geq 0$ oluyorsa L operatörüne pozitif operatör denir [3].

2.1.4. Tanım

Lineerlik ve pozitiflik özelliğini sağlayan operatörlere lineer pozitif operatörler denir [3]. Bir L operatörü lineer pozitif operatör ise $f < 0$ iken $L(f) < 0$ olur.

2.1.5. Tanım

$L: X \rightarrow Y$ operatörü verilsin. Eğer L operatörü

$$\|Lf\|_Y \leq M\|f\|_X$$

eşitsizliğini gerçekliyors L operatörüne sınırlı operatör denir [3].

2.2. Lineer Pozitif Operatörlerin Özellikleri

2.2.1. Lemma

Lineer pozitif operatörler monoton artandır. Yani

$$g \leq f \Rightarrow L(g) \leq L(f)$$

dir [3].

İspat

$g \leq f$ olsun. Bu durumda $f - g \geq 0$ ve L operatörü pozitif olduğundan

$$L(f - g) \geq 0$$

yazılabilir. Diğer taraftan L operatörünün

$$L(f - g) = L(f) - L(g)$$

lineerliğinin kullanılmasıyla ispat tamamlanır.

2.2.2. Lemma

L bir lineer pozitif operatör olmak üzere

$$|L(g)| \leq L(|g|)$$

sağlanır [3].

İspat

Bir g fonksiyonu için

$$-|g| \leq g \leq |g|$$

eşitsizliği sağlanır. L operatörü lineer olduğundan monoton artandır. O halde

$$L(-|g|) \leq L(g) \leq L(|g|)$$

yazılabilir. L operatörünün

$$L(-|g|) = -L(|g|)$$

lineerliğinin kullanılmasıyla

$$-L(|g|) \leq L(g) \leq L(|g|)$$

eşitsizliği elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

2.3. Lineer Pozitif Operatörlerin Yakınsaklığı

2.3.1. Tanım

Kapalı bir $[a, b]$ aralığında tanımlı ve sürekli olan tüm reel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeye $C[a, b]$ fonksiyon uzayı denir [3].

2.3.2. Tanım

$f \in C[a, b]$ olmak üzere bu uzay üzerinde tanımlanan norm,

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

ile gösterilir [3].

2.3.3. Tanım

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f_n(x)$ e bir fonksiyon dizisi denir ve (f_n) ile gösterilir. Bir (f_n) fonksiyonlar dizisinin $C[a, b]$ normunda f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması, her

$x \in [a, b]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{C[a,b]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

olması demektir. Bu durum $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ şeklinde gösterilir [3].

Yaklaşımlar teorisinde düzgün yakınsaklık kavramı ilk defa Weierstrass tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir.

2.3.4. Teorem

$f \in C[a, b]$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için
 $|f(x) - p_n(x)| < \varepsilon$
 olacak şekilde bir $p_n(x)$ polinomu vardır [1].

Weierstrass bu teoremle sonlu bir aralıkta sürekli her fonksiyona aynı aralıkta yakınsayan bir polinomun varlığını iddia etmiş ve ispatlamıştır.

Weierstrass teoremini sağlayan polinomlara bir örnek olarak 1912 yılında Rus matematikçi S.N. Bernstein, $x \in [0,1]$ için

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

ile verilen bir polinom tanımlamıştır ve aşağıdaki teorem ispatlanmıştır.

2.3.5. Teorem

$f \in C[0,1]$ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için
 $|f(x) - B_n(f; x)| < \varepsilon$
 dur (Bernstein 1912) [2].

Böylelikle Bernstein bu teoremiyle $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsayan bu polinomun varlığından bahsetmiş ve aynı zamanda bu polinomu açık bir şekilde ifade etmiştir. Bohman 1951 yılında toplam şeklindeki lineer pozitif operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında sürekli fonksiyonlara yakınsaklığını incelemiştir. Bohman, her $x \in [0,1]$, $0 \leq \alpha_{k,n} \leq 1$ olduğunda

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f(\alpha_{k,n}) P_{k,n}(x); P_{k,n}(x) \geq 0$$

lineer pozitif operatörler dizisinin, $[0,1]$ aralığında $n \rightarrow \infty$ için f fonksiyonuna yakınsaklığının düzgün olması için gerekli ve yeterli koşulun

$e_i = t^i$ olmak üzere, $i = 0,1,2$ için

$$L_n(e^i; x) \Rightarrow x^i$$

şeklinde olduğunu göstermiştir [3,6].

1953 yılında Korovkin, Bohman teoremini genelleştirerek lineer pozitif operatörler yardımıyla f fonksiyonuna yaklaşım problemine dair çok önemli bir teorem vermiştir [7].

Şimdi ilerideki teoremlerin ispatında sıkça kullanılacak olan ve yaklaşım teorisinde önemli bir yere sahip olan Korovkin teoremi verilecektir.

2.3.6. Teorem

$f \in C[a, b]$ tüm reel ekseninde $|f| \leq M_f$ şartını sağlayan bir fonksiyon olsun. Eğer $(A_n(f; x))$ lineer pozitif operatör dizisi $[a, b]$ üzerinde;

$$i^*) A_n(1; x) \Rightarrow 1$$

$$ii^*) A_n(t; x) \Rightarrow x$$

$$iii^*) A_n(t^2; x) \Rightarrow x^2$$

şartlarını sağlıyorsa bu durumda (A_n) operatör dizisi $[a, b]$ üzerinde

$$A_n(f; x) \Rightarrow f(x)$$

dir.

Yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |A_n(f; x) - f(x)| = 0$$

dır [3,7].

İspat

$f \in C[a, b]$ olsun. f sürekli olduğundan tanım gereği her $\varepsilon > 0$ için en az bir δ bulunur ve $|t - x| < \delta$ iken $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$

eşitsizliği sağlanır. $|t - x| \geq \delta$ olduğunda ise $|f| \leq M_f$ kabulünden ve üçgen eşitsizliğinden dolayı

$$|f(t) - f(x)| < |f(t)| + |f(x)| \leq 2M_f \quad (2.1)$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$|t - x| \geq \delta \text{ iken } \frac{|t - x|}{\delta} \geq 1$$

olacağından

$$\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$$

eşitsizliği sağlanır ve Eş. 2.1 ifadesinden

$$|f(t) - f(x)| \leq 2M_f \leq 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

yazılabilir. O halde

$$|t-x| < \delta \text{ için } |f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

$$|t-x| \geq \delta \text{ için } |f(t) - f(x)| \leq 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

olup $\forall x, t \in [a, b]$ için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \quad (2.2)$$

dir. Şimdi (A_n) lineer operatör dizisinin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(f) - f\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliğini sağladığı gösterilecektir. Lineerlikten

$$\begin{aligned} |A_n(f(t); x) - f(x)| &= |A_n(f(t); x) - f(x) + A_n(f(x); x) - A_n(f(x); x)| \\ &= |A_n(f(t) - f(x); x) + f(x)(A_n(1; x) - 1)| \end{aligned}$$

dir. Üçgen eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$|A_n(f(t); x) - f(x)| \leq |A_n(f(t) - f(x); x)| + |f(x)(A_n(1; x) - 1)| \quad (2.3)$$

elde edilir. Lemmadan 2.2.2

$$|A_n(f(t) - f(x); x)| \leq A_n(|f(t) - f(x)|; x)$$

olur. Lineer operatör pozitif ve $|f(t) - f(x)| \geq 0$ olduğundan

$$A_n(|f(t) - f(x)|; x) = A_n(|f(t) - f(x)|; x)$$

dir. O halde $|f| \leq M_f$ eşitsizliği yardımıyla Eş. 2.3 ifadesi

$$|A_n(f(t); x) - f(x)| \leq A_n(|f(t) - f(x)|; x) + M_f |A_n(1; x) - 1|$$

şekline dönüşür. (A_n) monoton artan olduğundan Eş. 2.2 den

$$|A_n(f(t); x) - f(x)| \leq A_n\left(\varepsilon + 2\frac{M_f}{\delta^2}(t-x)^2; x\right) + M_f |A_n(1; x) - 1| \quad (2.4)$$

elde edilir. Diğer taraftan A_n operatörünün lineer pozitif olduğu dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} A_n\left(\varepsilon + 2\frac{M_f}{\delta^2}(t-x)^2; x\right) &= A_n(\varepsilon; x) + A_n\left(2\frac{M_f}{\delta^2}(t-x)^2; x\right) \\ &= \varepsilon A_n(1; x) + 2\frac{M_f}{\delta^2} A_n(t^2 - 2xt + x^2; x) \\ &= \varepsilon A_n(1; x) + 2\frac{M_f}{\delta^2} \{A_n(t^2; x) - x^2 - x^2 + 2x^2 \\ &\quad - 2xA_n(t; x) + x^2 A_n(1; x)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon A_n(1; x) + 2 \frac{M_f}{\delta^2} \{A_n(t^2; x) - x^2 + 2x^2 - 2xA_n(t; x) \\
&\quad + x^2 A_n(1; x) - x^2\} \\
&= \varepsilon A_n(1; x) + 2 \frac{M_f}{\delta^2} \{(A_n(t^2; x) - x^2) + 2x(x - A_n(t; x)) \\
&\quad + x^2(A_n(1; x) - 1)\}
\end{aligned}$$

yazılır ve bu eşitliğin Eş. 2.4'de kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
|A_n(f(t); x) - f(x)| &\leq \varepsilon A_n(1; x) + 2 \frac{M_f}{\delta^2} \{(A_n(t^2; x) - x^2) + 2x(x - A_n(t; x)) \\
&\quad + x^2(A_n(1; x) - 1)\} + M_f |A_n(1; x) - 1|
\end{aligned} \tag{2.5}$$

bulunur. O halde Eş. 2.5 ifadesi (i^*) , (ii^*) ve (iii^*) koşullarından, $\forall \varepsilon_n > 0$ için

$$|A_n(f(t); x) - f(x)| \leq \varepsilon_n$$

olur ve burada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$$

dır. Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(f) - f\|_{C[a,b]} = 0$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanır.

Korovkin Teoremi, lineer pozitif operatörlerin sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsaklığını ispatlamada oldukça basit bir yöntem vermiştir. Yani (i^*) -(iii^*) koşullarındaki fonksiyonlar üzerinde operatörler dizisi düzgün yakınsak ise uzayın keyfi fonksiyonu için de aynı norma göre sonlu aralıkta yakınsaklık sağlanır. Böylece bu teorem, sürekli fonksiyonların sonlu aralıkta lineer pozitif operatörler yardımıyla yaklaştırılmasına ilişkin çalışmalara büyük katkı sağlamıştır. Gadjiev tarafından sınırsız bölgelerde tanımlanmış operatör dizileri için böyle bir teoremin geçerli olmadığı ispatlanmıştır ve ağırlıklı normlu uzaylarda yakınsaklık teoreminin nasıl verilmesi gerektiği gösterilmiştir [16].

2.3.7. Teorem

Eğer (A_n) lineer pozitif operatörler dizisi

$$A_n(1; x) \Rightarrow 1$$

$$A_n((t - x)^2; x) \Rightarrow 0$$

koşullarını sağlıyor ise bu taktirde $C[a, b]$ uzayındaki f fonksiyonu için $n \rightarrow \infty$ iken

$$A_n(f; x) \Rightarrow f(x)$$

olur [3,17].

Bernstein polinomları Teorem 2.3.6 gerçekler.

Gerçekten, $f \in C[0,1]$ olmak üzere,

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}$$

ile verilen Bernstein polinomları için

$$B_n(1; x) = 1, B_n(t; x) = x \text{ ve } B_n(t^2; x) = x^2 + \frac{x-x^2}{n}$$

olduğundan, (B_n) pozitif operatörler dizisi için Teorem 2.3.6 gerçekleşir [3,18].

2.3.8. Teorem

$p > 1$ ve $q > 0$ reel sayıları

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

şartını sağlasın. Bu durumda $\forall (a_k) \in l_p, \forall (b_k) \in l_q$ dizileri için

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $p = q = 2$ için bu eşitsizlik Cauchy-Schwarz eşitsizliği adını alır (Hölder Eşitsizliği) [19].

Şimdi L_p uzayındaki Korovkin Teoremi incelenmeden önce L_p uzayının tanımı verilecektir.

2.3.9. Tanım

$L_p[a, b]$ uzayının elemanları, ölçülebilir fonksiyonlar olup modülleri p-inci kuvvetten ($p \geq 1$) Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonlardır. O halde bir

$f \in L_p[a, b]$ için

$$\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty$$

dur. Bu uzaydaki norm,

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

ile tanımlanır [3].

2.3.10. Teorem

$$p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere

$f \in L_p[a, b]$, $g \in L_q[a, b]$ ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (İntegraller için Hölder eşitsizliği) [3].

2.3.11. Teorem

$p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere, $f, g \in L_p[a, b]$ için

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

dir (Minkowski eşitsizliği) [3].

2.3.12. Teorem

f , $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon ve ϕ , $[c, d]$ kapalı aralığı üzerinde diferensiyellenebilir bir konveks fonksiyon olsun. $c \leq f(x) \leq d$ olmak üzere

$$\phi \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi(f(x)) dx$$

eşitsizliği sağlanır (Jensen Eşitsizliği) [20].

2.3.13. Teorem

$T_n: L_p[a, b] \rightarrow L_p[a, b]$ ile tanımlı (T_n) pozitif lineer operatör dizisi olsun. Eğer,

i°) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|T_n\| \leq C$ olacak biçimde bir $C > 0$ mevcut ise

ii°) $v = 0, 1, 2$ için

$$\|T_n(t^v; x) - x^v\|_p \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$$

şartları sağlanıyorsa, bu taktirde her $f \in L_p[a, b]$ için;

$$\|T_n(f; \cdot) - f\|_p \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$$

gerçeklenir [21].

İspat

Öncelikle ispatta kullanılacak olan Luzin Teoremi ifade edilsin.

Luzin Teoremi: $f \in L_p[a, b]$ ise her $\varepsilon > 0$ için $\|f - g\|_p < \varepsilon$ olacak şekilde $C[a, b]$ uzayında sürekli bir g fonksiyonu vardır. Yani $C[a, b]$ uzayı $L_p[a, b]$ uzayında yoğundur [22].

Luzin Teoreminden $\forall f \in L_p[a, b]$ için $\|f - g\|_p < \varepsilon$ olacak şekilde $C[a, b]$ de sürekli bir g fonksiyonu alınsın. $g \in C[a, b]$ olduğundan, $\forall \varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır ve $\forall x, t \in [a, b]$ için $|t - x| < \delta$ iken

$$|g(t) - g(x)| < \varepsilon \quad (2.6)$$

sağlanır. Ayrıca g fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli olduğundan sınırlıdır. O halde öyle bir $C > 0$ sayısı bulunabilir ki, $\forall x \in [a, b]$ için $|g(x)| \leq C$ sağlanır. $|t - x| \geq \delta$ olduğunda ise $\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$ olacağından,

$$|g(t) - g(x)| \leq |g(t)| + |g(x)| \leq C + C \leq 2C \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \quad (2.7)$$

bulunur. Dolayısıyla Eş. 2.6 ve Eş. 2.7 ifadelerinden $\forall x, t \in [a, b]$ için

$$|g(t) - g(x)| \leq \varepsilon + 2C \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \quad (2.8)$$

yazılabilir. Diğer taraftan pozitif lineer operatörlerin lineerliği ve monotonluğu kullanılarak,

$$\begin{aligned} \|T_n(f; x) - f(x)\|_p &= \|T_n(f - g + g; x) - f(x) - g(x) + g(x)\|_p \\ &\leq \|T_n(f - g; x)\|_p + \|T_n(g; x) - g(x)\|_p + \|f - g\|_p \\ &\leq \|T_n(|f - g|; x)\|_p + \|T_n(g; x) - g(x)\|_p + \|f - g\|_p \\ &\leq \|f - g\|_p \|T_n(1; x)\|_p + \|T_n(g; x) - g(x)\|_p + \|f - g\|_p \\ &\leq \varepsilon M + \|T_n(g; x) - g(x)\|_p + \varepsilon \end{aligned}$$

yazılır.

g fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli olduğundan $x \in [a, b]$ için $|g(x)| \leq C$ idi, o halde

$$\|T_n(g; x) - g(x)\|_p = \|T_n(g(t) - g(x) + g(x); x) - g(x)\|_p$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|T_n(g(t) - g(x); x)\|_p + \|T_n(g(x); x) - g(x)\|_p \\
&\leq \|T_n(|g(t) - g(x)|; x)\|_p + |g(x)| \|T_n(1; x) - 1\|_p \\
&\leq \|T_n(|g(t) - g(x)|; x)\|_p + C \|T_n(1; x) - 1\|_p
\end{aligned}$$

olup, Eş. 2.8 ifadesi ve operatörün lineerliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\|T_n(|g(t) - g(x)|; x)\|_p &\leq \left\| T_n \left(\varepsilon + 2C \frac{(t-x)^2}{\delta^2}; x \right) \right\|_p \\
&= \left\| \varepsilon T_n(1; x) + \frac{2C}{\delta^2} T_n((t-x)^2; x) \right\|_p \\
&= \left\| \varepsilon T_n(1; x) + \varepsilon - \varepsilon + \frac{2C}{\delta^2} T_n((t-x)^2; x) \right\|_p \\
&= \left\| \varepsilon (T_n(1; x) - 1) + \varepsilon + \frac{2C}{\delta^2} T_n((t-x)^2; x) \right\|_p \\
&\leq \varepsilon \|T_n(1; x) - 1\|_p + \varepsilon + \left\| \frac{2C}{\delta^2} T_n((t-x)^2; x) \right\|_p
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
\|T_n((t-x)^2; x)\|_p &= \|T_n(t^2; x) - 2xT_n(t; x) + x^2T_n(1; x)\|_p \\
&= \|(T_n(t^2; x) - x^2) - 2x(T_n(t; x) - x) + x^2(T_n(1; x) - 1)\|_p
\end{aligned}$$

olduğundan $a < b$ için,

$$\begin{aligned}
\|T_n f - f\|_p &\leq \varepsilon (\|T_n(1; x) - 1\|_p + M + 2) \\
&\quad + \frac{2C}{\delta^2} \|(T_n(t^2; x) - x^2) - 2b(T_n(t; x) - x) + b^2(T_n(1; x) - 1)\|_p \\
&\quad + C \|T_n(1; x) - 1\|_p
\end{aligned}$$

dir. Korovkin koşullarından dolayı $n \rightarrow \infty$ için eşitsizliğin sağ tarafı sıfıra yakınsar. Böylece ispat tamamlanır.

2.4. Lineer Pozitif Operatörlerin Yaklaşım Hızı

Yaklaşımlar teorisinde önemli yere sahip olan yaklaşım hızı kavramından bahsedilecektir.

2.4.1. Tanım

(α_n) ve (β_n) , $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $0 \leq \alpha_n \leq \beta_n$ ve $n \rightarrow \infty$ için $\alpha_n \rightarrow 0$ ve $\beta_n \rightarrow 0$ koşullarını sağlayan fonksiyon dizileri olsunlar. O halde (α_n) dizisinin sıfıra yaklaşma hızı, (β_n) dizisinin sıfıra yaklaşma hızından daha hızlıdır denir.

Lineer pozitif operatörler dizisi Korovkin Teoremi ve bazı versiyonları gereğince $f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsak idi. Bu durumda $\|H_n f - f\|$ sifıra yakınsayan bir dizi olarak alınabilir. O halde $(H_n(f; x))$ herhangi bir lineer pozitif operatör dizisi olsun, $n \rightarrow \infty$ için $\gamma_n \rightarrow 0$ olmak üzere eğer,

$$\|H_n f - f\| \leq C \gamma_n$$

olacak biçimde bir (γ_n) dizisi bulunabilirse γ_n 'in sifıra yaklaşma hızı, $H_n(f; x)$ 'in $f(x)$ 'e yaklaşma hızının değerlendirilmesine yardımcı olur. Bu değerlendirmeyi yapmak için bir çok araç kullanılır. Çalışmamızda bu hız, süreklilik modülü, Peetre K fonksiyoneli, Lipschitz sınıfından fonksiyonlar ve Lipschitz tipi maksimal fonksiyonlar yardımıyla hesaplanacaktır. Yukarıda bahsi geçen bu kavramların tanımları beşinci bölümde verilecektir.

3. AGRATİNİ OPERATÖRLERİ VE BAZI GENELLEŞMELERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde Agratini operatörleri ve bazı genelleşmeleri ile ilgili olan literatürdeki çalışmaların bazılarını değinilecektir.

Alman matematikçiler Meyer-König ve Zeller, $x \in [0,1)$ ve $f \in C[0,1)$ için

$$M_n(f; x) = (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{k+n+1}\right) \binom{k+n}{k} x^k$$

ile verilen Meyer-König ve Zeller Operatörünü tanımlamışlardır [23]. Lupaş ve Müller tarafından bu operatörlerin yaklaşım özellikleri incelenmiştir [24]. Cheney ve Sharma bu operatörlere bazı değişiklikler yapmıştır ve bu operatörler Bernstein kuvvet serileri olarak bilinir [25]. Khan, Cheney-Sharma operatörlerinin yakınsaklık hızlarını elde etmiştir [26].

$M_n(f; x)$ operatörünün bir genelleşmesi 1998 yılında Doğru tarafından

$1^\circ) (\varphi_n)$ fonksiyonlar dizisindeki her fonksiyon $B = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq A, A \in (0,1)\}$ diskini

içeren D tanım kümesi üzerinde analitiktir,

$$2^\circ) \varphi_n^{(0)}(0) = \varphi_n(0) > 0,$$

$$3^\circ) \varphi_n^{(k)}(0) = \frac{d^k}{dx^k} \varphi_n(x) \big|_{x=0} \geq 0, k = 1, 2, \dots,$$

$$4^\circ) \varphi_n^{(k)}(0) = \gamma_n(k+n)(1+l_{n,k})\varphi_n^{(k-1)}(0), k = 1, 2, \dots,$$

$$l_{n,k} = O\left(\frac{1}{n}\right), l_{n,k} \geq 0, \gamma_n = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ ve } \gamma_n \geq 1 \text{ (} n, k = 1, 2, \dots \text{), } f \in C[0, A]$$

koşulları altında

$$L_n(f; x) = \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{k+n}\right) \varphi_n^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}$$

olarak tanımlanmış ve bu operatörlerin bazı yaklaşım özellikleri incelenmiştir [11]. 2001 yılında Agratini ise Doğru operatörlerinin Stancu tipli bir genelleşmesini tanımlamıştır [12]. Daha sonra Doğru ve Özalp bu operatörlerin Kantorovich tipli genelleşmesini elde etmiştir [27]. İntegral tipi Meyer-König ve Zeller operatörlerinin L_p metriğinde yaklaşım özellikleri Müller [28], Totik [29], Jihua ve Luoqing [30] tarafından incelenmiştir. Sonrasında Doğru, Duman ve Orhan, Agratini tarafından tanımlanan pozitif lineer operatörler dizisi ve bu dizilerin Kantorovich tipli genelleşmesi için yaklaşım özelliklerini A -istatistiksel yakınsaklığı kullanarak vermişlerdir [13].

Burada bahsi geçen A -istatistiksel yakınsaklık kavramına dair bilgiler dördüncü bölümde verilecektir.

Şimdi Doğru, Duman ve Orhan tarafından [13] de elde edilen bazı lemma ve teoremlere değinilecektir .

$A = (a_{jn})$ düzgün toplanabilir negatif olmayan bir matris ve $(\alpha_n), (\beta_k), (\gamma_{n,k})$ gerçel dizileri aşağıdaki şartları sağlasın.

$$1^*) \alpha_n \geq 1 \ (n \in \mathbb{N}) \text{ ve } st_A - \lim_n \alpha_n = 1,$$

$$2^*) 0 \leq \beta_k \leq 1 + \beta_{k+1} \ (k \in \mathbb{N}),$$

$$3^*) 0 \leq \gamma_{n,k} \leq \frac{c}{n} \ (c > 0, k, n \in \mathbb{N}).$$

Ayrıca (φ_n) fonksiyonlar dizisi ise aşağıdaki koşulları sağlasın.

$a^*)$ (φ_n) dizisinin her elemanı $B = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq a\}$ diskini içeren Ω tanım kümesi üzerinde analitiktir, burada $a \in (0,1)$ dir,

$$b^*) \varphi_n^{(0)}(0) = \varphi_n(0) > 0 \ (n \in \mathbb{N}),$$

$$c^*) \varphi_n^{(k)}(0) = \frac{d^k}{dx^k} \varphi_n(x) \Big|_{x=0} \geq 0 \ (k, n \in \mathbb{N}),$$

$$d^*) \varphi_n^{(k)}(x) = \alpha_n(k + n + \beta_k)(1 + \gamma_{n,k})\varphi_n^{(k-1)}(x), \ (k, n \in \mathbb{N}).$$

Buradaki $\alpha_n, \beta_k, \gamma_{n,k}$ dizileri sırasıyla (1^*) , (2^*) ve (3^*) şartlarını sağlamaktadır. Verilen bu koşullarla birlikte, Doğru , Duman ve Orhan,

$$D_n(f; x) = \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(k)}(0)x^k}{k!} f\left(\frac{k}{k+n+\beta_k}\right), n \in \mathbb{N}, f \in C[0, a] \quad (3.1)$$

olarak Agratini tarafından tanımlanan pozitif lineer operatörler dizisi için A -istatistiksel yakınsaklığı kullanarak Korovkin tipi bir teorem vermişlerdir [13]. Bu teoremi vermeden önce gerekli Lemmalar hatırlatılsın.

3.1. Lemma

$A = (a_{jn})$ düzgün toplanabilir negatif olmayan bir regüler matris olsun. O halde Eş. 3.1 ile verilen lineer pozitif operatörler için

$$st_A - \lim_n \|D_n(t; x) - x\|_{C[0,a]} = 0$$

dır [13].

3.2. Lemma

$A = (a_{jn})$ düzgün toplanabilir negatif olmayan regüler bir matris olsun. Eş. 3.1 ile tanımlı lineer pozitif operatörler için

$$st_A - \lim_n \|D_n(t^2; x) - x^2\|_{C[0,a]} = 0$$

dır [13].

3.3. Teorem

$A = (a_{jn})$ düzgün toplanabilir negatif olmayan regüler bir matris olsun. Her $f \in C[0, a]$ için

$$st_A - \lim_n \|D_n(f; x) - f(x)\|_{C[0,a]} = 0$$

olur [13].

Agratini operatörlerinin Kantorovich tipli genelleşmesi, Doğru, Duman ve Orhan tarafından

$$D_n^*(f; x) = \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(k)}(0)x^k}{k!c_{n,k}} \int_k^{k+c_{n,k}} f\left(\frac{\xi}{k+n+\beta_k}\right) d\xi, n \in \mathbb{N} \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanmıştır [13]. Burada $\alpha_n, \beta_k, \gamma_{n,k}$ dizileri sırasıyla (1^*) , (2^*) ve (3^*)

ve (φ_n) fonksiyonlar dizisi de (a^*) , (b^*) , (c^*) ve (d^*) koşullarını sağlamaktadır. Ayrıca f , $(0,1)$ aralığı üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon ve $c_{n,k}$ ise her $k, n \in \mathbb{N}$ için $0 < c_{n,k} \leq 1$ koşulunu sağlayan bir dizidir.

Bazı özel seçimlerle tanımlanan D_n ve D_n^* operatörlerinin bilinen birçok lineer pozitif operatörü içerdiği görülmektedir [13].

Gerçekten,

$$m_{n,k} = \binom{n+k}{k} x^k (1-x)^{n+1}$$

olmak üzere Eş. 3.1 de $\beta_k = 1$, $\varphi_n(x) = (1-x)^{-n-1}$ seçildiği takdirde $D_n(f; x)$ operatörü,

$$M_n(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} m_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{k+n+1}\right)$$

biçimindeki Meyer-König ve Zeller operatörlerine dönüşür [23].

Eğer Eş. 3.1 ifadesinde $\beta_k = 0$, $\varphi_n(x) = (1-x)^{-n-1}$ seçilirse $D_n(f; x)$ operatörü

$$C_n(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} m_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{k+n}\right)$$

olarak tanımlı Cheney ve Sharma operatörlerine dönüşür [25]. Bu operatörler literatürde Bernstein kuvvet serileri olarak bilinir.

Eğer Eş. 3.1 de $t \leq 0$ için $\beta_k = 0$, $\varphi_n(x, t) = (1-x)^{-n-1} \exp\left(\frac{tx}{x-1}\right)$ seçilirse $D_n(f; x)$ operatörü

$$P_n(f; x) = (1-x)^{n+1} \exp\left(\frac{tx}{1-x}\right) \sum_{k=0}^{\infty} L_k^n(t) x^k f\left(\frac{k}{k+n}\right)$$

ile verilen bir diğer Cheney ve Sharma operatörlerine dönüşür [25].

Eğer Eş. 3.1 de $t \leq 0$ için $\beta_k = 1$, $\varphi_n(x, t) = (1-x)^{-n-1} \exp\left(\frac{tx}{x-1}\right)$ seçilirse $D_n(f; x)$ operatörü Khan tarafından tanımlanan

$$Z_n(f; x) = (1 - x)^{n+1} \exp\left(\frac{tx}{1-x}\right) \sum_{k=0}^{\infty} L_k^n(t) x^k f\left(\frac{k}{k+n+1}\right)$$

operatörüne dönüşür [26]. Yukarıdaki son iki örnekte verilen $L_k^n(t)$, k dereceli aşağıdaki şekilde tanımlanan Laguerre polinomudur [13].

$$L_k^n(t) = \sum_{r=0}^k (-1)^r \frac{\Gamma(k+n+1)}{(k-r)! \Gamma(n+r+1) r!} t^r.$$

Eş. 3.2’de $\beta_k = 0$ seçildiği takdirde D^* operatörü Meyer-König ve Zeller operatörlerinin Kantorovich tipli aşağıdaki genelleşmesine dönüşür [27].

$$M_n^*(f; x) = \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{n,k}} \int_k^{k+\alpha_{n,k}} f\left(\frac{\xi}{k+n}\right) d\xi \varphi_n^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}, n \in \mathbb{N}.$$

Eş. 3.2 ifadesinde $\beta_k = 0$, $\varphi_n(x) = (1-x)^{-n-1}$, $c_{n,k} = \frac{n}{k+n+1}$ seçildiği takdirde $\alpha_n = 1$,

$\gamma_{n,k} = 0$ (her $k, n \in \mathbb{N}$ için) olur, o yüzden D^* operatörü

$$M_n^*(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(n+k)(n+k+1)}{n} \int_{\frac{k}{n+k}}^{\frac{k+1}{n+k+1}} f(u) du \right) m_{n,k}(x)$$

operatörüne dönüşür [29].

Şimdi A -istatistiksel yakınsaklık kullanılarak $D_n^*(f; x)$ operatörleri için Doğru, Duman ve Orhan tarafından verilen Korovkin tipi teorem hatırlatılsın.

3.4. Teorem

$A = (a_{jn})$ negatif olmayan regüler toplanabilir bir matris olsun. Her $f \in C[0, a]$ için $st_A - \lim_n \|D_n^*(f; x) - f(x)\|_{C[0,a]} = 0$ dır [13].

A matrisi yerine I birim matrisi alınırsa A -istatistiksel yakınsaklık, klasik anlamda yakınsaklığa dönüşür.

Doğru [15] de iyi bilinen bu operatörleri de içeren bir lineer pozitif operatör tanımlamıştır ve bu operatörlerin Korovkin tipli yaklaşım ve ağırlıklı yaklaşım özelliklerini incelemiştir. Bazı fonksiyonlar yardımıyla bu operatörlerin yaklaşım oranlarını da elde etmiştir.

İyi bilinen birçok operatörün genelleşmesi olan bu operatör

$$L_n(f; x) = \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{a_{n,v}}\right) \varphi_n^{(v)}(0) \frac{x^v}{v!} \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlanmıştır [15]. Burada

$$a_{n,v} = \frac{\varphi_n^{(v)}(0)}{\varphi_n^{(v-1)}(0)}, \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{a_{n,v}}{v} = \mu, 0 \leq x < \frac{1}{\mu}$$

ve $f \in C[0, \frac{1}{\mu})$ dır. $\varphi_n(x) \in C^\infty$ fonksiyonlar dizisi de aşağıdaki koşulları sağlamaktadır.

i) (φ_n) dizisinin her elemanı $B = \{z \in \mathbb{C}: |z| < \frac{1}{\mu}\}$ diskini içeren D tanım kümesi üzerinde analitiktir,

$$ii) \varphi_n^{(v)}(0) = \frac{d^v}{dx^v} \varphi_n(x) \Big|_{x=0} > 0, (v = 1, 2, \dots),$$

$$iii) \forall x \in [0, \frac{1}{\mu}) \text{ için } \varphi_n(x) > 0,$$

$$iv) \left| \frac{v+1}{a_{n,v+1}} - \frac{v}{a_{n,v}} \right| \leq c_n \text{ koşulunu sağlayan bir } (c_n) \text{ dizisi vardır ve } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \text{ dır.}$$

Eş. 3.3 ile tanımlı L_n operatörü bazı özel seçimlerle aşağıdaki operatörlere dönüşmektedir [15].

$\varphi_n(x) = (1-x)^{-n-1}$ seçimiyle $a_{n,v} = v + n, \mu = 1$ ve $c_n = \frac{1}{n}$ olur, bu nedenle Eş. 3.3 ile verilen L_n operatörü Cheney ve Sharma tarafından tanımlanan ve Bernstein kuvvet serileri olarak isimlendirilen

$$C_n(f; x) = \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{v+n}\right) \binom{n+v}{v} x^v (1-x)^{n+1}, 0 \leq x < 1$$

operatörüne dönüşür [25].

$\varphi_n(x) = (1+x)^n$ seçimiyle $a_{n,v} = n - v + 1$ olup

$$B_n(f; x) = (1+x)^{-n} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{n-v+1}\right) \binom{n}{v} x^v$$

şeklinde tanımlanan Bleimann, Butzer ve Hahn(BBH) operatörlerine dönüşmektedir [31].

$\varphi_n(x) = e^{nx}$ seçildiği takdirde ise $a_{n,v} = n$, $\mu = 0$ ve $c_n = \frac{1}{n}$ olur ve Eş. 3.3 operatörü

$$S_n(f; x) = e^{-nx} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{n}\right) \frac{(nx)^v}{v!}$$

biçiminde tanımlanan Szasz operatörlerine dönüşür [4].

Şimdi Doğru tarafından [15] de tanımlanan $L_n(f; x)$ operatörleri için Korovkin tipli yaklaşım sonuçları hatırlatılsın.

3.5. Lemma

Her $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, a]$ ($0 < a < \frac{1}{\mu}$) için

$$L_n(e_0; x) = 1$$

dir [15].

3.6. Lemma

Her $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, a]$ ($0 < a < \frac{1}{\mu}$) için

$$L_n(e_1; x) = x$$

olur [15].

3.7. Lemma

Her $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, a]$ ($0 < a < \frac{1}{\mu}$) için

$$|L_n(e_2; x) - x^2| \leq c_n x$$

eşitsizliği elde edilir [15].

3.8. Teorem

(i) – (iv) şartlarını sağlayan Eş. 3.3 ile tanımlanan lineer pozitif operatörler dizisi $[0, a]$ üzerinde $f \in C[0, a]$ fonsiyonuna düzgün yakınsaktır [15].

3.9. Teorem

$f \in C[0, a]$ için Eş. 3.3’de tanımlı lineer pozitif L_n operatörü

$$\|L_n(f; \cdot) - f\| \leq (1 + \sqrt{a})\omega(f, \sqrt{c_n})$$

eşitsizliğini sağlar. Burada $\omega(f, \sqrt{c_n})$ Eş. 5.8 de tanımlanan süreklilik modulüdür ve c_n ise (iv) koşulundaki dizidir [15].

α mertebeli Lipschitz tipi maksimal fonksiyonlar Lenze tarafından

$$\tilde{\omega}_\alpha = \sup_{t \neq x, t \in [0, a]} \frac{|f(x) - f(t)|}{|x - t|^\alpha}, \quad x \in [0, a], \alpha \in (0, 1]$$

olarak tanımlanmıştır [32]. $\tilde{\omega}_\alpha(f, x)$ ’in sınırlılığı $f \in Lip_M(\alpha)$ ’ e denktir. Lipschitz tipi maksimal fonksiyonlar yardımıyla $|L_n(f; x) - f(x)|$ farkı için yakınsaklık hızı aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

3.10. Teorem

L_n , Eş. 3.3 ifadesinde verilen lineer pozitif operatör dizisi olmak üzere

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq (c_n x)^{\frac{\alpha}{2}} \tilde{\omega}_\alpha(f, x)$$

sağlanır [15].

Eş. 3.3’de tanımlı L_n lineer pozitif operatörü için verilen (iv) koşulundaki

$\left| \frac{v+1}{a_{n,v+1}} - \frac{v}{a_{n,v}} \right| \leq c_n$ eşitsizliğini sağlayan (c_n) dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ yerine $st - \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ alınmış ve aşağıdaki teorem elde edilmiştir.

3.11. Teorem

Her $f \in C_M[0, a]$, $(0 < a < \frac{1}{\mu})$ için

$$st - \lim_n \|L_n(f; \cdot) - f\|_{C[0,a]} = 0$$

dır [33].

Böylece Teorem 3.9 ve Teorem 3.10'da $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ koşulu yerine $st - \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ koşulu getirildiğinde $L_n(f; \cdot)$ 'in f 'e istatistiksel düzgün yakınsaklık hızı elde edilir [33]. Canatan ve Doğru [33] de Eş. 3.3'de tanımlı L_n operatörü için Voronovskaja tipli bir teorem de vermişlerdir.

3.12. Lemma

Eş. 3.3 ile verilen L_n lineer pozitif operatörü için

$$L_n(t^3; x) \leq x^3 + 3x^2c_n + xc_n^2$$

ve

$$L_n(t^4; x) \leq x^4 + 6c_nx^3 + 4c_n^2x^2 + c_n^3x$$

bulunur [33].

3.13. Teorem

Eş. 3.3'de tanımlı L_n lineer pozitif operatörü için

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c_n} [L_n(t; x) - f(x)] = \frac{f''(x)}{2} x$$

sağlanır [33].

4. AGRATİNİ OPERATÖRLER DİZİSİNİN KANTOROVİCH TIPLI GENELLEŞMESİ VE L_p UZAYLARINDAKİ A-İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

4.1. L_p Uzaylarında Korovkin Tipi Yaklaşım Özellikleri

Tezin orijinal kısmını oluşturan bu bölümde amacımız Eş. 3.3 ile verilen L_n operatörünün Kantorovich tipli bir genelleşmesini tanımlamak ve bu operatörlerin yaklaşım özelliklerini incelemektir.

Doğru tarafından tanımlanan Eş. 3.3 operatörünün Kantorovich tipli genelleşmesi olarak

$$L_n^*(f; x) = \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \varphi_n^{(v)}(0) \frac{x^v}{v! c_{n,v}} \int_v^{v+c_{n,v}} f\left(\frac{\xi}{a_{n,v}}\right) d\xi, \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.1)$$

operatörünü tanımlayalım. Burada

$$a_{n,v} = \frac{\varphi_n^{(v)}(0)}{\varphi_n^{(v-1)}(0)}, \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{a_{n,v}}{v} = \mu > 0, \quad 0 \leq x < \frac{1}{\mu},$$

$f, [0, \frac{1}{\mu})$ aralığı üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon ve $(c_{n,v})$ her $n, v \in \mathbb{N}$ için

$$0 < c_{n,v} \leq 1$$

koşulunu sağlayan pozitif bir sayı dizisidir.

$(\varphi_n) \in C^\infty$ fonksiyonlar dizisi ise aşağıdaki şartları sağlasın.

1) (φ_n) dizisinin her elemanı $B = \{z \in \mathbb{C}: |z| < \frac{1}{\mu}\}$ diskini içeren D tanım kümesi üzerinde analitiktir,

$$2) \varphi_n^{(v)}(0) = \frac{d^v}{dx^v} \varphi_n(x) \Big|_{x=0} > 0, \quad (v = 1, 2, \dots),$$

$$3) \forall x \in [0, \frac{1}{\mu}) \text{ için } \varphi_n(x) > 0,$$

$$4) \frac{c_{n,v}}{a_{n,v}} \leq d_n \text{ koşulunu sağlayan bir } (d_n) \text{ dizisi vardır ve } \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0 \text{ dır.}$$

$L_n^*(f; x)$ operatörlerinin lineer ve pozitif olduğu açıktır. $L_n^*(f; x)$ operatörü bilinen birçok operatörü içermektedir. Gerçekten,

$a_{n,v} = v + n$ alındığı takdirde, $L_n^*(f; x)$ operatörü Meyer-König ve Zeller operatörünün Kantorovich tipli genelleşmesine dönüşür [27].

$\varphi_n(x) = (1 - x)^{-n-1}$, $a_{n,v} = v + n$, $c_{n,v} = \frac{n}{v+n+1}$ seçimiyle Eş. 4.1'deki L_n^* operatörü Totik tarafından tanımlanan operatörlere dönüşür [29].

$a_{n,v} = v + n + \beta_v$ seçildiği takdirde ise L_n^* operatörü Doğru , Duman ve Orhan tarafından [13] de tanımlanan D^* operatörüne dönüşür. Buradaki (β_v) dizisi (2^*) koşulunu sağlayan dizidir.

Korovkin tipi yaklaşım teorisi, pozitif lineer operatörler dizisi yardımıyla bir fonksiyona yaklaşma problemini ele alan köklü bir araştırma alanıdır.

Bu alt bölümde Korovkin teoremi yardımıyla L_n^* lineer pozitif operatörlerinin yaklaşım özellikleri elde edilecektir.

Esas sonucu elde etmek için bazı lemmalar gereklidir, öncelikle onlar verilecektir. Ayrıca $v = 0, 1, 2$ için $e_v = t^v$ olup L_n operatörü ise Eş. 3.3 ile verilen Doğru tarafından [15] de tanımlanan pozitif lineer operatördür.

4.1.1. Lemma

Her $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, a]$ ($0 < a < \frac{1}{\mu}$) için,

$$L_n^*(e_0; x) = 1$$

dir.

İspat

$$\frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \varphi_n^{(v)}(0) \frac{x^v}{v! c_{n,v}} \int_v^{v+c_{n,v}} d\xi = 1$$

olduğundan ispat açıktır.

4.1.2. Lemma

Her $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, a]$ ($0 < a < \frac{1}{\mu}$) için,

$$L_n^*(e_1; x) \leq x + \frac{1}{2} d_n$$

olur.

İspat

$$\begin{aligned} L_n^*(e_1; x) &= \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \varphi_n^{(v)}(0) \frac{x^v}{v! c_{n,v}} \int_v^{v+c_{n,v}} \frac{\xi}{a_{n,v}} d\xi \\ &= \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \varphi_n^{(v)}(0) \frac{x^v v}{v! a_{n,v}} + \frac{1}{2\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \varphi_n^{(v)}(0) \frac{x^v c_{n,v}}{v! a_{n,v}} \end{aligned}$$

dir. Burada Eş. 3.3 ifadesinden

$$\frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \varphi_n^{(v)}(0) \frac{x^v v}{v! a_{n,v}} = L_n(e_1; x)$$

ve (4) koşulundan $\frac{c_{n,v}}{a_{n,v}} \leq d_n$ olduğundan son eşitlik için

$$L_n^*(e_1; x) \leq L_n(e_1; x) + \frac{1}{2} d_n$$

yazılabilir ve Lemma 3.6'dan

$$L_n^*(e_1; x) \leq x + \frac{1}{2} d_n$$

eşitsizliği elde edilir.

4.1.3. Lemma

Her $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, a]$ ($0 < a < \frac{1}{\mu}$) için,

$$|L_n^*(e_2; x) - x^2| \leq (c_n + d_n)x + \frac{1}{3} d_n^2$$

eşitsizliği sağlanır.

Buradaki c_n dizisi, (iv) koşulunda verilen dizidir.

İspat

$$\begin{aligned}
 L_n^*(e_2; x) &= \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \varphi_n^{(v)}(0) \frac{x^v}{v! c_{n,v}} \int_v^{v+c_{n,v}} \left(\frac{\xi}{a_{n,v}} \right)^2 d\xi \\
 &= \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \varphi_n^{(v)}(0) \frac{x^v}{v!} \left(\frac{v}{a_{n,v}} \right)^2 + \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \varphi_n^{(v)}(0) \frac{x^v}{v!} \frac{v c_{n,v}}{a_{n,v}^2} \\
 &\quad + \frac{1}{3\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \varphi_n^{(v)}(0) \frac{x^v}{v!} \left(\frac{c_{n,v}}{a_{n,v}} \right)^2
 \end{aligned}$$

olup burada Eş. 3.3’de verilen L_n operatörü tanımından

$$\frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \varphi_n^{(v)}(0) \frac{x^v}{v!} \left(\frac{v}{a_{n,v}} \right)^2 = L_n(e_2; x),$$

(4) koşulundan $\frac{c_{n,v}}{a_{n,v}} \leq d_n$ ve dolayısıyla

$$\frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \varphi_n^{(v)}(0) \frac{x^v}{v!} \frac{v c_{n,v}}{a_{n,v}^2} \leq d_n L_n(e_1; x)$$

olduğundan

$$|L_n^*(e_2; x) - x^2| \leq |L_n(e_2; x) - x^2| + d_n L_n(e_1; x) + \frac{1}{3} d_n^2,$$

bulunur ayrıca Lemma 3.6 ve Lemma 3.7 kullanılırsa

$$|L_n^*(e_2; x) - x^2| \leq (c_n + d_n)x + \frac{1}{3} d_n^2$$

eşitsizliği elde edilir ki böylece ispat tamamlanır.

4.1.4. Lemma

Her $n \in \mathbb{N}$ için eğer

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{a_{n,v}}{c_{n,v}} \int_0^{\frac{1}{\mu}} T_{n,v}(x) dx < K$$

olacak şekilde K pozitif sayısı var ise

$$\|L_n^*(f; x)\|_p^p \leq K \|f\|_p^p$$

olur. Burada

$$T_{n,v}(x) = \frac{1}{\varphi_n(x)} \frac{\varphi_n^{(v)}(0) x^v}{v!}$$

dir.

İspat

$p, q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için

$$|L_n^*(f; x)|^p \leq \left(\sum_{v=0}^{\infty} \left| \frac{a_{n,v}}{c_{n,v}} T_{n,v}^{\frac{1}{p}}(x) T_{n,v}^{\frac{1}{q}}(x) \int_{\frac{v}{a_{n,v}}}^{\frac{v+c_{n,v}}{a_{n,v}}} f(u) du \right| \right)^p$$

olup son eşitsizliğe,

$$a_n = \frac{a_{n,v}}{c_{n,v}} T_{n,v}^{\frac{1}{p}}(x) \int_{\frac{v}{a_{n,v}}}^{\frac{v+c_{n,v}}{a_{n,v}}} f(u) du, b_n = T_{n,v}^{\frac{1}{q}}(x)$$

alınarak Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$|L_n^*(f; x)|^p \leq \sum_{v=0}^{\infty} \left| \frac{a_{n,v}}{c_{n,v}} T_{n,v}^{\frac{1}{p}}(x) \int_{\frac{v}{a_{n,v}}}^{\frac{v+c_{n,v}}{a_{n,v}}} f(u) du \right|^p \left(\sum_{v=0}^{\infty} T_{n,v}(x) \right)^{\frac{p}{q}} \quad (4.2)$$

elde edilir.

$$\left(\sum_{v=0}^{\infty} T_{n,v}(x) \right)^{\frac{p}{q}} = 1$$

olduğundan Eş. 4.2

$$|L_n^*(f; x)|^p \leq \sum_{v=0}^{\infty} \left| \frac{a_{n,v}}{c_{n,v}} T_{n,v}^{\frac{1}{p}}(x) \int_{\frac{v}{a_{n,v}}}^{\frac{v+c_{n,v}}{a_{n,v}}} f(u) du \right|^p \quad (4.3)$$

olur. Diğer taraftan Jensen eşitsizliğinden

$$\sum_{v=0}^{\infty} \left| \frac{a_{n,v}}{c_{n,v}} T_{n,v}^{\frac{1}{p}}(x) \int_{\frac{v}{a_{n,v}}}^{\frac{v+c_{n,v}}{a_{n,v}}} f(u) du \right|^p \leq \sum_{v=0}^{\infty} \frac{a_{n,v}}{c_{n,v}} T_{n,v}(x) \int_{\frac{v}{a_{n,v}}}^{\frac{v+c_{n,v}}{a_{n,v}}} |f(u)|^p du$$

yazılabilir. O halde Eş. 4.3 için

$$\begin{aligned} |L_n^*(f; x)|^p &\leq \sum_{v=0}^{\infty} \frac{a_{n,v}}{c_{n,v}} T_{n,v}(x) \int_{\frac{v}{a_{n,v}}}^{\frac{v+c_{n,v}}{a_{n,v}}} |f(u)|^p du \\ &= \|f\|_p^p \sum_{v=0}^{\infty} T_{n,v}(x) \frac{a_{n,v}}{c_{n,v}} \end{aligned}$$

dür. Ayrıca

$$|L_n^*(f; x)|^p \leq \|f\|_p^p \sum_{v=0}^{\infty} T_{n,v}(x) \frac{a_{n,v}}{c_{n,v}}$$

eşitsizliğin her iki tarafı 0'dan $\frac{1}{\mu}$ 'ye integre edilirse

$$\int_0^{\frac{1}{\mu}} |L_n^*(f; x)|^p dx \leq \|f\|_p^p \sum_{v=0}^{\infty} \frac{a_{n,v}}{c_{n,v}} \int_0^{\frac{1}{\mu}} T_{n,v}(x) dx$$

bulunur ve son olarak

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{a_{n,v}}{c_{n,v}} \int_0^{\frac{1}{\mu}} T_{n,v}(x) dx < K$$

olduğundan

$$\|L_n^*(f; x)\|_p^p \leq K \|f\|_p^p$$

eşitsizliği elde edilir ki ispat tamamlanır.

$a_{n,v} = v + n + \beta_v$ alındığı taktirde Lemma4.1.4'da verilen L_n^* operatörü yerine Eş. 3.2 deki D^* operatörü alınır. D^* operatörü özel seçimlerle [29] da Totik tarafından verilen operatör ile yer değiştirirse $K = 2$ olur.

Şimdi Eş. 4.1'de tanımlanan L_n^* operatörleri için aşağıdaki sonuç verilecektir.

4.1.5. Teorem

$f \in L_p[0, a]$ ($0 < a < \frac{1}{\mu}$) olsun. Eğer Lemma4.1.4'da verilen pozitif K sabiti mevcut ise

$L_n^*(f; x)$ operatörü için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n^*(f; \cdot) - f\|_p = 0$$

dır.

İspat

İspat için L_p uzayları için verilen Korovkin teoreminin koşullarını göstermek yeterli olacaktır [21].

İlk olarak Lemma 4.1.1'den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n^*(e_0; x) - 1\|_p = 0$$

olduğu açıktır.

İkinci olarak,

$$\begin{aligned} L_n^*(e_1; x) - x &= \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \varphi_n^{(v)}(0) \frac{x^v v}{v! a_{n,v}} - x + \frac{1}{2\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \varphi_n^{(v)}(0) \frac{x^v c_{n,v}}{v! a_{n,v}} \\ &= L_n(e_1; x) - x + \frac{1}{2\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \varphi_n^{(v)}(0) \frac{x^v c_{n,v}}{v! a_{n,v}} \end{aligned}$$

dür. Buradaki $L_n(e_1; x)$ operatörü Eş. 3.3 ile tanımlı pozitif lineer operatördür. 3.6. Lemma 3.6'dan ve (4) koşulundan son eşitlik için

$$0 \leq |L_n^*(e_1; x) - x| \leq \frac{1}{2} d_n$$

yazılabilir ve bu eşitsizliğin her tarafına $L_p[0, a]$ uzayındaki norm uygulanırsa,

$$0 \leq \|L_n^*(e_1; x) - x\|_p \leq \frac{a^{\frac{1}{p}}}{2} d_n$$

elde edilir. Ayrıca (4) koşulunda $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n^*(e_1; x) - x\|_p = 0$$

bulunur.

Son olarak Lemma 4.1.3 gereğince

$$|L_n^*(e_2; x) - x^2| \leq (c_n + d_n)x + \frac{1}{3} d_n^2,$$

$$0 \leq |L_n^*(e_2; x) - x^2| \leq (c_n + d_n)x + \frac{1}{3} d_n^2$$

yazılır ve son eşitsizliğe $L_p[0, a]$ uzayındaki norm uygulanırsa

$$0 \leq \|L_n^*(e_2; x) - x^2\|_p \leq \left(\frac{a^{p+1}}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} (c_n + d_n) + \frac{a^{\frac{1}{p}}}{3} d_n^2$$

olur. Diğer taraftan (iv) ve (4) koşullarında sırasıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n^*(e_2; x) - x^2\|_p = 0$$

elde edilir ki böylelikle ispat tamamlanır, yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n^*(f; \cdot) - f\|_p = 0$$

dır.

4.1.6. Teorem

$f \in C^1[0, a]$ ve $x \in [0, a]$ ($0 < a < \frac{1}{\mu}$) olmak üzere

$$|L_n^*(f; x) - f(x)| \leq \frac{1}{2} |f'(x)| d_n + 2\omega(f'; \sqrt{\lambda_n}) \sqrt{\lambda_n}, \quad \lambda_n = c_n a + \frac{1}{3} d_n^2$$

dir. Burada $\omega(f'; \sqrt{\lambda_n})$, Eş. 5.8 de verilen süreklilik modülüdür.

İspat

$f \in C^1[0, a]$ ve $t \in [0, a]$ olmak üzere

$$f(t) - f(x) = f'(x)(t - x) + \int_x^t (f'(u) - f'(x)) du$$

eşitliğine L_n^* operatörü uygulanır ve süreklilik modülünün

$$|f(y) - f(x)| \leq \omega(f; \delta) \left(\frac{|y - x|}{\delta} + 1 \right), \delta > 0$$

$$\left| \int_x^t |f'(y) - f'(x)| dy \right| \leq \omega(f'; \delta) \left(\frac{(t - x)^2}{\delta} + |t - x| \right)$$

özellliği kullanılırsa

$$|L_n^*(f; x) - f(x)| \leq |f'(x)| |L_n^*(t - x; x)| + \omega(f'; \delta) \left(\frac{1}{\delta} L_n^*((t - x)^2; x) + L_n^*(|t - x|; x) \right)$$

eşitsizliği elde edilir. Daha sonra $L_n^*(|t - x|; x)$ için Cauchy-Schwartz eşitsizliği uygulanıp son eşitsizlikte yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$|L_n^*(f; x) - f(x)| \leq |f'(x)| |L_n^*(t - x; x)| + \omega(f'; \delta) \sqrt{L_n^*((t - x)^2; x)} \left(\frac{1}{\delta} \sqrt{L_n^*((t - x)^2; x)} + 1 \right)$$

bulunur. Ayrıca Lemma 4.1.2 ve Lemma 4.1.3'den $x \in [0, a]$ için

$$L_n^*((t - x)^2; x) \leq c_n a + \frac{1}{3} d_n^2 \text{ ve } L_n^*(t - x; x) \leq \frac{1}{2} d_n$$

olduğundan

$$|L_n^*(f; x) - f(x)| \leq \frac{1}{2} d_n |f'(x)| + \omega(f'; \delta) \sqrt{c_n a + \frac{1}{3} d_n^2} \left(\frac{1}{\delta} \sqrt{c_n a + \frac{1}{3} d_n^2} + 1 \right)$$

elde edilir. Son olarak $\delta = \sqrt{c_n a + \frac{1}{3} d_n^2}$ seçilirse istenilen elde edilir.

4.1.7. Tanım

Herhangi bir $[a, b] \subset \mathbb{R}$ aralığı, $f \in C[a, b]$ için $\delta > 0$ olmak üzere f nin 2. süreklilik modülü

$$\omega_2(f, \delta) = \sup_{0 < h < \delta} \sup_{x, x+2h \in [a, b]} |f(x+2h) - 2f(x+h) - f(x)|$$

dir. Ayrıca

$$K(f; \delta) \leq S\omega_2(f, \sqrt{\delta})$$

olacak şekilde $S > 0$ sayısı vardır. Burada K , Peetre- K fonksiyoneli olup $f \in C[a, b]$ ve $\delta \geq 0$ olmak üzere

$$K(f; \delta) = \inf_{g \in C^2[a, b]} \left\{ \|f - g\|_{C[a, b]} + \delta \|g\|_{C^2[a, b]} \right\}$$

ile verilir [34].

4.1.8. Teorem

Her $f \in C[0, a]$ ($0 < a < \frac{1}{\mu}$), $g \in C^2[0, a]$ için Eş. 4.1 ile verilen L_n^* operatörü,

$$|L_n^*(f; x) - f(x)| \leq 2S\omega_2\left(f, \frac{1}{2}\sqrt{\left(c_n a + \frac{1}{3}d_n^2\right) + d_n}\right)$$

eşitsizliğini sağlar. Buradaki $S > 0$ sayısı Tanım 4.1.7’de bahsi geçen sabit sayıdır.

İspat

$g \in C^2[0, a]$ ve $t \in [0, a]$ olsun. g için Taylor formülünden

$$g(t) = g(x) + (t - x)g'(x) + \int_x^t (t - u)g''(u)du$$

yazılır. L_n^* operatörü eşitliğin her iki tarafına uygulanır ve üçgen eşitsizliği ve Lemma 2.2.2 kullanılırsa

$$\begin{aligned} |L_n^*(g; x) - g(x)| &\leq |g'(x)L_n^*(t - x; x)| + \left| L_n^*\left(\int_x^t (t - u)g''(u)du; x\right) \right| \\ &\leq \|g'\|_{C[0, a]} |L_n^*(t - x; x)| + L_n^*\left(\left|\int_x^t (t - u)g''(u)du\right|; x\right) \end{aligned}$$

elde edilir ve burada Lemma 4.1.2’den

$$L_n^*(t - x; x) \leq \frac{1}{2} d_n$$

Ayrıca Lemma 4.1.3'den $x \in [0, a]$ için

$$L_n^*((t - x)^2; x) \leq c_n a + \frac{1}{3} d_n^2$$

olup gerekli işlemler yapıldığı taktirde

$$\begin{aligned} |L_n^*(g; x) - g(x)| &\leq \frac{1}{2} \|g'\|_{C[0,a]} d_n + \frac{1}{2} \|g''\|_{C[0,a]} |L_n^*((t - x)^2; x)| \\ &\leq \frac{1}{2} \|g'\|_{C[0,a]} + \frac{1}{2} \|g''\|_{C[0,a]} \left(c_n a + \frac{1}{3} d_n^2 \right) \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan $f \in C[0, a]$ için, L_n^* operatörünün lineerliği ve monotonluğundan

$$\begin{aligned} |L_n^*(f; x) - f(x)| &= |L_n^*(f - g + g; x) - f(x) - g(x) + g(x)| \\ &\leq |L_n^*(f - g; x)| + |L_n^*(g; x) - g(x)| + |f(x) - g(x)| \\ &\leq |L_n^*(|f - g|; x)| + |L_n^*(g; x) - g(x)| + \|f - g\|_{C[0,a]} \\ &\leq \|f - g\|_{C[0,a]} |L_n^*(1; x)| + |L_n^*(g; x) - g(x)| + \|f - g\|_{C[0,a]} \\ &\leq 2\|f - g\|_{C[0,a]} + |L_n^*(g; x) - g(x)| \end{aligned}$$

dir.

$$|L_n^*(g; x) - g(x)| \leq \frac{1}{2} \|g'\|_{C[0,a]} d_n + \frac{1}{2} \|g''\|_{C[0,a]} \left(c_n a + \frac{1}{3} d_n^2 \right)$$

elde edilmişti, bu eşitsizlik son eşitsizlikte kullanılırsa

$$|L_n^*(f; x) - f(x)| \leq 2\|f - g\|_{C[0,a]} + \frac{1}{2} \|g'\|_{C[0,a]} d_n + \frac{1}{2} \|g''\|_{C[0,a]} \left(c_n a + \frac{1}{3} d_n^2 \right)$$

olur ve burada $C^2[a, b]$ uzaylarındaki norm tanımından

$$\|g'\|_{C[0,a]} + \|g''\|_{C[0,a]} \leq \|g\|_{C^2[0,a]}$$

olduğundan

$$|L_n^*(f; x) - f(x)| \leq 2 \left[\|f - g\|_{C[0,a]} + \frac{1}{4} \left(\left(c_n a + \frac{1}{3} d_n^2 \right) + d_n \right) \|g\|_{C^2[0,a]} \right]$$

yazılır ve bu son ifadenin sağ tarafının $g \in C^2[0, a]$ için infimumu alınır Petree K-fonksiyonelinin tanımından

$$|L_n^*(f; x) - f(x)| \leq 2K \left(f; \frac{1}{4} \left(\left(c_n a + \frac{1}{3} d_n^2 \right) + d_n \right) \right)$$

dir ve Tanım 4.1.7 gereğince

$$K(f; \delta) \leq S \omega_2(f, \sqrt{\delta})$$

olacak şekilde $S > 0$ sayısı vardır o halde

$$\begin{aligned}
|L_n^*(f; x) - f(x)| &\leq 2K \left(f, \frac{1}{4} \left(\left(c_n a + \frac{1}{3} d_n^2 \right) + d_n \right) \right) \\
&\leq 2S\omega_2 \left(f, \frac{1}{2} \sqrt{\left(c_n a + \frac{1}{3} d_n^2 \right) + d_n} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir ki ispat tamamlanır.

4.2. L_p Uzaylarında Korovkin Tipi A-İstatistiksel Yaklaşım Özellikleri

Bu bölümde tanımlamış olduğumuz Eş. 4.1 ile verilen operatörün L_p uzaylarında Korovkin tipi A-istatistiksel yaklaşım özellikleri incelenecektir.

İstatistiksel yakınsaklık kavramı ilk olarak Fast tarafından geliştirilmiştir [35]. Birçok alanda kullanılan bu kavram Salat , Fridy , Connor gibi birçok matematikçinin ilgisini çekmiştir [36-38]. Şimdi istatistiksel yakınsaklık ve yoğunluk kavramları hatırlatılsın.

$K \subset \mathbb{N}$ altkümesi olsun. $K_n = \{k \leq n: k \in K\}$ ve K kümesinin eleman sayısı $|K|$ ile gösterilsin.

4.2.1. Tanım

Bir $K \subset \mathbb{N}$ altkümesi için

$$\lim_n \frac{1}{n} |K_n|$$

limiti mevcut ise bu limit değerine K kümesinin yoğunluğu (doğal yoğunluğu) denir ve $\delta(K)$ ile gösterilir [39].

Örneğin,

$$\delta(\mathbb{N}) = 1, \delta(\{2k: k \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2} \text{ ve } \delta(\{k^2: k \in \mathbb{N}\}) = 0$$

dır.

4.2.2. Tanım

$x := (x_k)$ reel ya da kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\delta(k \in \mathbb{N}: |x_k - L| \geq \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, x dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim_k x_k = L$ şeklinde gösterilir [35,37].

Yakınsak her dizi aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır. Fakat tersi doğru değildir.

Örneğin, genel terimi

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = b^2 \\ 0, & k \neq b^2 \end{cases}$$

olan $x := (x_k)$ dizisi $st - \lim_k x_k = 0$ olur fakat klasik anlamda yakınsak değildir. Diğer taraftan eğer (x_k) dizisi bir L sayısına klasik anlamda yakınsak ise herhangi bir $\varepsilon > 0$ komşuluğu dışında dizinin sonlu elemanı olması, bu elemanların yoğunluğunun sıfır olması demektir. Buradan klasik anlamda yakınsak olan her dizinin istatistiksel yakınsak olduğu görülmektedir.

Korovkin Teoreminin L_p uzayındaki istatistiksel versiyonu aşağıdaki gibi verilmiştir.

4.2.3. Teorem

$T_n: L_p[a, b] \rightarrow L_p[a, b]$ ile tanımlı (T_n) pozitif lineer operatör dizisi olsun. Eğer

$a^\circ) \forall n \in \mathbb{N}$ için $\|T_n\| \leq C$ olacak şekilde bir $C > 0$ mevcut ise

$b^\circ) v = 0, 1, 2$ için

$$st - \lim_n \|T_n(t^v; x) - x^v\|_p = 0$$

şartları sağlandığı taktirde, $\forall f \in L_p[a, b]$ için,

$$st - \lim_n \|T_n(f; x) - f(x)\|_p = 0$$

elde edilir [14].

İspat

(b°) koşulundan dolayı $\varepsilon > 0$ verildiğinde $v = 0, 1, 2$ için $n_v(\varepsilon)$ ve 1 yoğunluklu K_v alt kümesi vardır öyle ki $\forall n \in K_v$ ve $n > n_v$ ($v = 0, 1, 2$) için,

$$\|T_n(t^v; x) - x^v\|_p < \varepsilon \tag{4.4}$$

dur.

$\delta(K_0 \cap K_1 \cap K_2) = 1$ olduğundan Eş. 4.4 ifadesi $n > \max\{n_0, n_1, n_2\}$ ve $n \in K := K_0 \cap K_1 \cap K_2$ için de sağlanır. Hipotezden $C > 0$ olmak üzere $\|T_n\|_{L_p \rightarrow L_p} \leq C$ ($n = 1, 2, \dots$) koşulunu sağlayan bir C sabiti mevcuttur. $C[a, b]$, $L[a, b]$ 'de yoğun olduğundan Luzin Teoremi gereği, $f \in L_p[a, b]$ verildiğinde $\|f - g\|_p < \varepsilon$ olacak biçimde $g \in C[a, b]$ mevcuttur. Buradan T_n operatörünün lineerliği ve monotonluğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \|T_n(f; x) - f(x)\|_p &\leq \|T_n(f - g; x)\|_p + \|T_n(g; x) - g(x)\|_p + \|f - g\|_p \\ &\leq \varepsilon(C + 1) + \|T_n(g; x) - g(x)\|_p \end{aligned} \quad (4.5)$$

bulunur. g fonksiyonu verilen aralıkta sürekli olduğundan her $x \in [a, b]$ ve bir $M > 0$ pozitif sayısı için $|g(x)| \leq M$ yazılabilir. O halde,

$$\begin{aligned} \|T_n(g; x) - g(x)\|_p &\leq \|T_n(g(t) - g(x) + g(x); x) - g(x)\|_p \\ &\leq \|T_n(|g(t) - g(x)|; x)\|_p + |g(x)| \|T_n(1; x) - 1\|_p \\ &\leq \|T_n(|g(t) - g(x)|; x)\|_p + M \|T_n(1; x) - 1\|_p \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $g \in C[a, b]$ olduğundan, M ve δ pozitif bir sabit olmak üzere, her $x, t \in [a, b]$ için Eş. 2.8 ifadesindeki gibi

$$|g(t) - g(x)| < \varepsilon + 2M \frac{(t - x)^2}{\delta^2}$$

yazılabilir. Dolayısıyla $a < b$ için,

$$\begin{aligned} \|T_n(|g(t) - g(x)|; x)\|_p &\leq \left\| T_n \left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} (t - x)^2; x \right) \right\|_p \\ &= \left\| \varepsilon(T_n(1; x) - 1 + 1) + \frac{2M}{\delta^2} T_n((t - x)^2; x) \right\|_p \\ &\leq \varepsilon (\|T_n(1; x) - 1\|_p + 1) + \frac{2M}{\delta^2} (\|T_n(t^2; x) - x^2\|_p \\ &\quad - 2b \|T_n(t; x) - x\|_p + b^2 \|T_n(1; x) - 1\|_p) \end{aligned} \quad (4.6)$$

dir. Eş. 4.4'den, $n \in K$ ve $n > \max\{n_0, n_1, n_2\}$ için Eş. 4.6'daki son eşitsizlik Eş. 4.5'de yerine yazıldığı takdirde $n \rightarrow \infty$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(f; x) - f(x)\|_p = 0$$

olur, istenilen elde edilir.

Şimdi önceki bölümlerde bahsi geçen A -istatistiksel yakınsaklık kavramına dair bilgiler verilecektir.

$A := (a_{n,k})$, ($n, k = 1, 2, \dots$) sonsuz toplanabilir bir matris olsun. Verilen bir $x := (x_k)$ dizisi için x in A -dönüşümü

$$(Ax)_n := \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} x_k$$

ile verilmektedir ve $Ax := ((Ax)_n)$ olarak gösterilmektedir. Burada her n için seriler yakınsaktır. $\lim_k x_k = L$ olduğunda $\lim_n (Ax)_n = L$ ise A matrisi regülerdir denir [40].

4.2.4. Tanım

A negatif olmayan regüler bir matris olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: |x_k - L| \geq \varepsilon} a_{n,k} = 0$$

olacak biçimde bir L sayısı varsa (x_k) dizisi L sayısına A -istatistiksel yakınsaktır denir ve $st_A - \lim_k x_k = L$ ile gösterilir [41-45].

A -istatistiksel yakınsak tanımında A matrisi yerine C_1 Cesaro matrisi alınırsa istatistiksel yakınsaklık elde edilir [35,37,46]. A matrisi yerine birim matris alınırsa klasik anlamdaki yakınsaklık elde edilir.

Canatan ve Doğru Eş. 3.3'de tanımlı L_n pozitif lineer operatörü için (iv) deki $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ koşulu yerine $st - \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ koşulunu almışlar ve Teorem 4.2.3 yardımıyla Eş. 3.3 operatörlerinin istatistiksel yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir [33]. Teorem 4.2.3 istatistiksel yakınsaklık için verilmiştir fakat ispat A -istatistiksel yakınsaklık için de çalışır [14,47].

Şimdi Teoremi 4.2.3 ışığında, Eş. 4.1 ile verilen L_n^* operatörü için (4) de verilen $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ koşulu yerine $st_A - \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ ve Eş. 3.3 ile tanımlı L_n operatörü için (iv) de verilen $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ yerine $st_A - \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ koşulu alınıp aşağıdaki teorem verilecektir.

4.2.5. Teorem

$f \in L_p[0, a]$ ($0 < a < \frac{1}{\mu}$) olmak üzere Eş. 4.1'de tanımlı olan pozitif lineer operatörü için

$$st_A - \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n^*(f; \cdot) - f\|_p = 0$$

dır.

İspat

L_p uzaylarındaki istatistiksel yakınsaklık için verilen Korovkin teoreminin şartlarının sağlandığını göstermek teoremin ispatı için yeterli olacaktır.

Lemma 4.1.1'den

$$st_A - \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n^*(e_0; x) - 1\|_p = 0$$

olduğu açıktır.

Lemma 4.1.2'den

$$0 \leq |L_n^*(e_1; x) - x| \leq \frac{1}{2} d_n$$

olup eşitsizliğe $L_p[0, a]$ normu uygulanırsa

$$0 \leq \|L_n^*(e_1; x) - x\|_p \leq \frac{a^{\frac{1}{p}}}{2} d_n,$$

elde edilir ve $st_A - \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ olduğundan

$$st_A - \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n^*(e_1; x) - x\|_p = 0$$

bulunur.

Son olarak Lemma 4.1.3 gereğince

$$0 \leq |L_n^*(e_2; x) - x^2| \leq (c_n + d_n)x + \frac{1}{3} d_n^2,$$

olup eşitsizliğe $L_p[0, a]$ normunu uygulanırsa

$$0 \leq \|L_n^*(e_2; x) - x^2\|_p \leq \left(\frac{a^{p+1}}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} (c_n + d_n) + \frac{a^{\frac{1}{p}}}{3} d_n^2$$

elde edilir. Ayrıca $st_A - \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$, $st_A - \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ olduğundan

$$st_A - \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n^*(e_2; x) - x^2\|_p = 0$$

dır.

Sonuç olarak $v = 0,1,2$ için $e_v = t^v$ olmak üzere

$$st_A - \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n^*(t^v; x) - x^v\|_p = 0, v = 0,1,2$$

sağlandığından Teoremi 4.2.3 gereğince ispat tamamlanır.

4.3. Voronovskaja Tipi Yaklaşım Özellikleri

4.3.1. Teorem

Eş. 4.1 ile tanımlı $(L_n^*(f; x))$ dizisi için

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma_n} |L_n^*(f; x) - f(x)| = 0$$

elde edilir. Burada (c_n) ve (d_n) , (iv) ve (4) koşullarındaki diziler, γ_n ler ise $st - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{\gamma_n} = 0$ ve $st - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{\gamma_n} = 0$ olacak şekilde dizilerdir.

İspat

Teoremin ispatı için [48] de verilen teknik kullanılacaktır. Taylor açılımından

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t - x) + (t - x)^2 \left(\frac{f''(x)}{2} + \eta(t - x) \right) \quad (4.7)$$

yazılabilir. Burada

$$\eta(t - x) = \frac{f'''(x)}{3!} (t - x) + \dots$$

ve η sürekli bir fonksiyon olup $t \rightarrow x$ için sıfıra yakınsar.

Eş. 4.7 ifadesinde $t = \frac{\xi}{a_{n,v}}$ alınırsa

$$f\left(\frac{\xi}{a_{n,v}}\right) = f(x) + f'(x)\left(\frac{\xi}{a_{n,v}} - x\right) + \frac{f''(x)}{2}\left(\frac{\xi}{a_{n,v}} - x\right)^2 + \left(\frac{\xi}{a_{n,v}} - x\right)^2 \eta\left(\frac{\xi}{a_{n,v}} - x\right) \quad (4.8)$$

bulunur. Diğer taraftan η sürekli bir fonksiyon olduğu için sınırlıdır. Yani her h için bir pozitif H sabiti vardır ve $|\eta(h)| \leq H$ dır.

Eş. 4.8'in her iki tarafına L_n^* operatörü uygulanırsa

$$L_n^*(f; x) = f(x)L_n^*(1; x) + f'(x)L_n^*((t-x); x) + \frac{f''(x)}{2}L_n^*((t-x)^2; x) \\ + \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(v)}(0)x^v}{v! c_{n,v}} \int_v^{v+c_{n,v}} \left(\frac{\xi}{a_{n,v}} - x \right)^2 \eta \left(\frac{\xi}{a_{n,v}} - x \right) d\xi$$

elde edilir. $L_n^*(1; x) = 1$ ve L_n^* operatörü lineer olduğundan son eşitlik için

$$L_n^*(f; x) = f(x) + f'(x)[L_n^*(t; x) - x] + \frac{f''(x)}{2}[L_n^*(t^2; x) - 2xL_n^*(t; x) + x^2] + I$$

yazılabilir. Burada

$$I = \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(v)}(0)x^v}{v! c_{n,v}} \int_v^{v+c_{n,v}} \left(\frac{\xi}{a_{n,v}} - x \right)^2 \eta \left(\frac{\xi}{a_{n,v}} - x \right) d\xi \\ = \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\substack{v=0 \\ \left| \frac{\xi}{a_{n,v}} - x \right| \leq \delta}}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(v)}(0)x^v}{v! c_{n,v}} \int_v^{v+c_{n,v}} \left(\frac{\xi}{a_{n,v}} - x \right)^2 \eta \left(\frac{\xi}{a_{n,v}} - x \right) d\xi \\ + \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\substack{v=0 \\ \left| \frac{\xi}{a_{n,v}} - x \right| > \delta}}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(v)}(0)x^v}{v! c_{n,v}} \int_v^{v+c_{n,v}} \left(\frac{\xi}{a_{n,v}} - x \right)^2 \eta \left(\frac{\xi}{a_{n,v}} - x \right) d\xi \quad (4.9)$$

dir.

η sürekli olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $\delta(\varepsilon)$ vardır ve

$$\left| \eta \left(\frac{\xi}{a_{n,v}} - x \right) \right| \leq \varepsilon$$

dur. Ayrıca $\left| \frac{\xi}{a_{n,v}} - x \right| > \delta$ için η sınırlıdır o halde

$$\left| \eta \left(\frac{\xi}{a_{n,v}} - x \right) \right| \leq H$$

olur. Bu bilgiler Eş. 4.9'da kullanılırsa

$$I \leq \varepsilon \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(v)}(0)x^v}{v! c_{n,v}} \int_v^{v+c_{n,v}} \left(\frac{\xi}{a_{n,v}} - x \right)^2 d\xi + HJ \quad (4.10)$$

elde edilir. Burada

$$J = \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\substack{v=0 \\ \left| \frac{\xi}{a_{n,v}} - x \right| > \delta}}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(v)}(0)x^v}{v! c_{n,v}} \int_v^{v+c_{n,v}} \left(\frac{\xi}{a_{n,v}} - x \right)^2 d\xi$$

olmak üzere, $\left| \frac{\xi}{a_{n,v}} - x \right| > \delta$ olması nedeniyle

$$\frac{\left(\frac{\xi}{a_{n,v}} - x \right)^2}{\delta^2} > 1$$

dir. Bu yüzden

$$J \leq \frac{1}{\delta^2} \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(v)}(0)x^v}{v! c_{n,v}} \int_v^{v+c_{n,v}} \left(\frac{\xi}{a_{n,v}} - x \right)^4 d\xi. \quad (4.11)$$

eşitsizliği yazılır. Ayrıca Eş. 4.11’de ifadesi Eş. 4.10’ de kullanılırsa

$$I \leq \varepsilon L_n^*((t-x)^2; x) + H \frac{1}{\delta^2} L_n^*((t-x)^4; x) \quad (4.12)$$

bulunur. Diğer taraftan Lemma 3.6, Lemma 3.7, Lemma 3.12, Lemma 4.1.2, Lemma 4.1.3 ve (4) koşulundan

$$L_n^*(t; x) \leq x + \frac{1}{2} d_n$$

$$L_n^*(t^2; x) \leq c_n x + x^2 + d_n x + \frac{1}{3} d_n^2$$

$$L_n^*(t^3; x) \leq x^3 + 3x^2 c_n + x c_n^2 + \frac{3}{2} c_n d_n x + \frac{3}{2} d_n x^2 + d_n^2 x + \frac{1}{4} d_n^3$$

$$L_n^*(t^4; x) \leq x^4 + 6c_n x^3 + 4c_n^2 x^2 + c_n^3 x + 2d_n x^3 + 6c_n d_n x^2 + 2d_n c_n^2 x + 2d_n^2 c_n x \\ + 2d_n^2 x^2 + d_n^3 x + \frac{1}{5} d_n^4$$

olduğunu göstermek kolaydır. O halde elde edilen bu eşitsizlikler Eş 4.12’de kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$|L_n^*(f; x) - f(x)| \leq \gamma_n \left| \frac{1}{2} f'(x) \frac{d_n}{\gamma_n} + \frac{f''(x)}{2} \left(\frac{c_n}{\gamma_n} x + \frac{1}{3} \frac{d_n^2}{\gamma_n} \right) + \varepsilon \left(\frac{c_n}{\gamma_n} x + \frac{1}{3} \frac{d_n^2}{\gamma_n} \right) \right|$$

$$+ \frac{H}{\delta^2} \left(\frac{c_n^3 x + 2d_n c_n^2 x + 2d_n^2 c_n x + \frac{1}{5} d_n^4}{\gamma_n} \right) \Bigg|$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca $st - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{\gamma_n} = 0$ ve $st - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{\gamma_n} = 0$ olduğundan

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma_n} |L_n^*(f; x) - f(x)| = 0$$

dır ki böylece ispat tamamlanır.

5. AGRATİNİ OPERATÖRLER DİZİSİNİN KANTOROVİCH TİPLİ GENELLEŞMESİNİN L_p UZAYLARINDAKİ A-İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIM HIZI

Pozitif lineer operatörler tarafından yaklaşımda, yaklaşma hızının hesaplanması ayrıca hızlı bir yakınsama hızı elde etme oldukça önemlidir. Çalışmamızın orijinal kısımlarından olan bu bölümde tanımlamış olduğumuz Eş. 4.1 ile verilen L_n^* lineer pozitif operatörlerinin L_p uzaylarındaki A-istatistiksel yaklaşım hızı Peetre-K fonksiyoneli, Lipschitz sınıfından fonksiyonlar, süreklilik modülü ve Lipschitz tipi maksimal fonksiyonlar yardımıyla hesaplanacaktır.

Bu bölümde Eş. 4.1 ile tanımlı L_n^* operatörü için (4) şartında verilen $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ koşulu yerine $st_A - \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ ve Eş. 3.3 ile tanımlı L_n operatörü için (iv) şartında verilen $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ koşulu yerine ise $st_A - \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ alınacaktır.

5.1. Peetre-K fonksiyoneli Yardımıyla Yaklaşım Hızı

Bu alt bölümde Peetre-K fonksiyoneli kullanılarak L_p metriğinde L^* operatörü için A-istatistiksel yaklaşım hızı elde edilecektir. Totik [29] da $p \geq 1$ için L_p metriğinde K-fonksiyoneli yardımıyla $M_n^*(f; x)$ operatörlerinin yaklaşım hızını elde etmiştir. Bernstein-Durrmeyer operatörleri, Kantorovich polinomları ve Riesz tipi toplanabilir operatörlerinin yakınsaklık hızı üzerine bir takım sonuçlar [49-51] de bulunabilir. Şimdi bu bölümde gerekli olan notasyonlar tanımlanacaktır.

$D \subset \mathbb{R}$ olsun. $L_p^2(D)$, $L_p(D)$ deki fonksiyonların uzayı olarak tanımlanır ve

$g, g', g'' \in L_p(D)$ dir. K-fonksiyonelinin tanımı aşağıdaki gibi verilir [13].

5.1.1. Tanım

$f \in L_p(D)$ ve $\delta \geq 0$ olmak üzere

$$K(f; \delta) = \inf_{g \in L_p^2(D)} \left\{ \|f - g\|_{L_p(D)} + \delta \|g\|_{L_p^2(D)} \right\}$$

ifadesine Peetre K-fonksiyoneli denir. Burada $L_p^2(D)$ üzerindeki norm

$$\|g\|_{L_p^2(D)} := \|g\|_{L_p(D)} + \|g'\|_{L_p(D)} + \|g''\|_{L_p(D)}$$

ile verilir [13].

Peetre-K fonksiyoneli ve $\|g\|_{L_p^2(D)}$ normu Bleimann, Butzer ve Hahn tarafından D üzerinde tanımlı sınırlı ve düzgün sürekli fonksiyonların uzayı $C_B(D)$ için tanımlanmıştır [31].

5.1.2. Teorem

$n \in \mathbb{N}$ ve $f \in L_p(0, \frac{1}{\mu})$ olmak üzere $L_n^*(f; x)$ operatörleri için

$$\|L_n^*(f; x) - f(x)\|_p \leq (K + 1)K_p(f; \delta_n)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada K sabiti Lemma 4.1.4'deki sabit ile aynıdır ve

$$\delta_n = \frac{1}{2} \left(\left(d_n + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{\mu} c_n$$

dir.

İspat

$g \in L_p^2(0, \frac{1}{\mu})$ olmak üzere L_n^* operatörü

$$g(t) - g(x) = g'(x)(t - x) + \frac{1}{2}g''(x)(t - x)^2$$

Taylor formülüne uygulanırsa,

$$L_n^*(g; x) - g(x) = g'(x)L_n^*((t - x); x) + \frac{1}{2}g''(x)L_n^*((t - x)^2; x)$$

bulunur ve eşitsizliğin her iki tarafının $(0, \frac{1}{\mu})$ üzerinde L_p normu alınır,

$$\left(\int_0^{\frac{1}{\mu}} |L_n^*(g; x) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^{\frac{1}{\mu}} \left| g'(x)L_n^*((t - x); x) + \frac{1}{2}g''(x)L_n^*((t - x)^2; x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

yazılır ve eşitliğin sağ tarafına Minkowski integral eşitsizliği uygulanırsa

$$\left(\int_0^{\frac{1}{\mu}} |L_n^*(g; x) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_0^{\frac{1}{\mu}} |g'(x) L_n^*((t-x); x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{1}{\mu}} |g''(x) L_n^*((t-x)^2; x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir. O halde son eşitsizlikten

$$\|L_n^*(g; x) - g(x)\|_p \leq \|L_n^*((t-x); x)\|_{C(0, \frac{1}{\mu})} \|g'(x)\|_p + \frac{1}{2} \|L_n^*((t-x)^2; x)\|_{C(0, \frac{1}{\mu})} \|g''(x)\|_p \quad (5.1)$$

yazılabilir. Burada Lemma 4.1.2 ve Lemma 4.1.3 den $x \in (0, \frac{1}{\mu})$ için

$$\|L_n^*((t-x); x)\|_{C(0, \frac{1}{\mu})} \leq \frac{1}{2} d_n$$

ve

$$\|L_n^*((t-x)^2; x)\|_{C(0, \frac{1}{\mu})} \leq \frac{1}{\mu} c_n + \frac{1}{3} d_n^2$$

olduğunu göstermek kolaydır. Ayrıca

$$\frac{1}{2} d_n \leq \frac{1}{2} \left(\left(d_n + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{\mu} c_n \quad \text{ve} \quad (5.2)$$

$$\frac{1}{\mu} c_n + \frac{1}{3} d_n^2 \leq \frac{1}{2} \left(\left(d_n + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{\mu} c_n$$

olup, $L_p^2(0, \frac{1}{\mu})$ uzaylarındaki norm tanımından

$$\|g'(x)\|_p + \|g''(x)\|_p \leq \|g\|_{L_p^2(D)} \quad (5.3)$$

olduğu da açıktır.

O halde Eş. 5.2 ifadesi Eş. 5.1 de kullanılırsa

$$\|L_n^*(g; x) - g(x)\|_p \leq \left[\frac{1}{2} \left(\left(d_n + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{\mu} c_n \right] (\|g'(x)\|_p + \|g''(x)\|_p) \quad (5.4)$$

bulunur ve Eş. 5.3, Eş. 5.4'de kullanıldığı takdirde ise

$$\|L_n^*(g; x) - g(x)\|_p \leq \left[\frac{1}{2} \left(\left(d_n + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{\mu} c_n \right] \|g\|_{L_p^2(D)} \quad (5.5)$$

eşitsizliği elde edilir.

Diğer taraftan

$$|L_n^*(f; x) - f(x)| = |L_n^*(f; x) - L_n^*(g; x) + L_n^*(g; x) + g(x) - g(x) - f(x)|$$

eşitliğinin $L_p(0, \frac{1}{\mu})$ normu alınıp Minkowski integral eşitsizliği uygulanırsa

$$\|L_n^*(f; x) - f(x)\|_p \leq \|L_n^*(f; x) - L_n^*(g; x)\|_p + \|L_n^*(g; x) - g(x)\|_p + \|f - g\|_p \quad (5.6)$$

olur. Lemma 4.1.4'de f yerine $f - g$ alınıp Eş. 5.6'da kullanılırsa

$$\|L_n^*(f; x) - f(x)\|_p \leq (K + 1)\|f - g\|_p + \|L_n^*(g; x) - g(x)\|_p \quad (5.7)$$

yazılır. Buradan Eş. 5.5 ifadesi Eş. 5.7'de kullanılıp gerekli düzenlemeler yapıldığı takdirde

$$\|L_n^*(f; x) - f(x)\|_p \leq (K + 1) \left\{ \|f - g\|_p + \left(\frac{1}{2} \left(\left(d_n + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{\mu} c_n \right) \|g\|_{L_p^2(D)} \right\}$$

olup $g \in L_p^2(0, \frac{1}{\mu})$ üzerinden infimum alınır

$$\|L_n^*(f; x) - f(x)\|_p \leq (K + 1)K_p(f; \delta_n)$$

elde edilir ki ispat tamamlanır. Burada

$$st_A - \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0 \text{ ve } st_A - \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \text{ olduğundan}$$

$$st_A - \lim_{n \rightarrow \infty} K_p(f; \delta_n) = 0$$

dır.

O halde Teorem 5.1.2 $L_n^*(f; x)$ operatörler dizisinin L_p uzayında $f(x)$ e A -istatistiksel yakınsaklığını verir.

$$\|L_n^*(f; x) - f(x)\|_p \leq (K + 1)K_p(f; \delta_n)$$

eşitsizliği ise $L_n^*(f; x)$ operatörlerinin L_p uzayında A -istatistiksel yaklaşım hızını verir. A matrisi birim matris alındığı takdirde bu operatörlerin klasik anlamda yakınsaklık hızı, C_1 Cesàro matrisi alındığında ise istatistiksel yakınsaklık hızı hesaplanmış olur.

5.2. Lipschitz Sınıfı Fonksiyonları Yardımıyla Yaklaşım Hızı

5.2.1. Tanım

$f(x)$, I aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere, her $x, t \in I$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq M|t - x|^\alpha$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfına Lipschitz sınıfı fonksiyonlar, M ' ye de Lipschitz sabiti denir ve $f \in Lip_M(\alpha)$ ile gösterilir [5].

Verilen I aralığında $f \in Lip_M(\alpha)$ ise

- a) f fonksiyonu bu aralıkta sürekli.
- b) $\alpha > 1$ için f fonksiyonu sabittir.

5.2.2. Teorem

$f \in Lip_M(\alpha)$ olsun. $x \in (0, \frac{1}{\mu})$ olmak üzere $L_n^*(f; x)$ operatörleri için

$$\|L_n^*(f; x) - f(x)\|_p \leq \frac{M}{\mu^{\frac{1}{p}}} B_n^{\frac{\alpha}{2}}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$B_n = \frac{c_n}{\mu} + \frac{1}{3} d_n^2$$

dir.

İspat

$f \in Lip_M(\alpha)$ olsun.

$$\begin{aligned} |L_n^*(f; x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(v)}(0) x^v}{v! c_{n,v}} \int_v^{v+c_{n,v}} \left(f\left(\frac{\xi}{a_{n,v}}\right) - f(x) \right) d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(v)}(0) x^v}{v! c_{n,v}} \int_v^{v+c_{n,v}} \left| f\left(\frac{\xi}{a_{n,v}}\right) - f(x) \right| d\xi \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(v)}(0) x^v a_{n,v}}{v! c_{n,v}} \int_{\frac{v}{a_{n,v}}}^{\frac{v+c_{n,v}}{a_{n,v}}} |f(t) - f(x)| dt$$

dir. $f \in Lip_M(\alpha)$ olduğundan $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere,

$$|f(t) - f(x)| \leq M|t - x|^\alpha$$

olup bu eşitsizlik son eşitsizlikte kullanıldığı taktirde

$$|L_n^*(f; x) - f(x)| \leq \frac{M}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(v)}(0) x^v a_{n,v}}{v! c_{n,v}} \int_{\frac{v}{a_{n,v}}}^{\frac{v+c_{n,v}}{a_{n,v}}} |t - x|^\alpha dt$$

elde edilir. Buradan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p = \frac{2}{\alpha}$ ve $q = \frac{2}{2-\alpha}$ seçilip integral için Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} |L_n^*(f; x) - f(x)| &\leq \frac{M}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(v)}(0) x^v a_{n,v}}{v! c_{n,v}} \left(\int_{\frac{v}{a_{n,v}}}^{\frac{v+c_{n,v}}{a_{n,v}}} (t - x)^2 dt \right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\int_{\frac{v}{a_{n,v}}}^{\frac{v+c_{n,v}}{a_{n,v}}} dt \right)^{\frac{2-\alpha}{2}} \\ &= M \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{\varphi_n^{(v)}(0) x^v a_{n,v}}{\varphi_n(x) v! c_{n,v}} \int_{\frac{v}{a_{n,v}}}^{\frac{v+c_{n,v}}{a_{n,v}}} (t - x)^2 dt \right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\varphi_n^{(v)}(0) x^v a_{n,v}}{\varphi_n(x) v! c_{n,v}} \int_{\frac{v}{a_{n,v}}}^{\frac{v+c_{n,v}}{a_{n,v}}} dt \right)^{\frac{2-\alpha}{2}} \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitsizlikte

$$a = \left(\frac{\varphi_n^{(v)}(0) x^v a_{n,v}}{\varphi_n(x) v! c_{n,v}} \int_{\frac{v}{a_{n,v}}}^{\frac{v+c_{n,v}}{a_{n,v}}} (t - x)^2 dt \right)^{\frac{\alpha}{2}} \text{ ve } b = \left(\frac{\varphi_n^{(v)}(0) x^v a_{n,v}}{\varphi_n(x) v! c_{n,v}} \int_{\frac{v}{a_{n,v}}}^{\frac{v+c_{n,v}}{a_{n,v}}} dt \right)^{\frac{2-\alpha}{2}}$$

olmak üzere $p = \frac{2}{\alpha}$ ve $q = \frac{2}{2-\alpha}$ seçilip Hölder eşitsizliği uygulanıldığı taktirde

$$|L_n^*(f; x) - f(x)| \leq M \left(\sum_{v=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(v)}(0) x^v a_{n,v}}{\varphi_n(x) v! c_{n,v}} \int_{\frac{v}{a_{n,v}}}^{\frac{v+c_{n,v}}{a_{n,v}}} (t - x)^2 dt \right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\sum_{v=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(v)}(0) x^v a_{n,v}}{\varphi_n(x) v! c_{n,v}} \int_{\frac{v}{a_{n,v}}}^{\frac{v+c_{n,v}}{a_{n,v}}} dt \right)^{\frac{2-\alpha}{2}}$$

olur ve

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(v)}(0) x^v a_{n,v}}{\varphi_n(x) v! c_{n,v}} \int_{\frac{v}{a_{n,v}}}^{\frac{v+c_{n,v}}{a_{n,v}}} dt = 1$$

olduğundan son eşitsizlik

$$|L_n^*(f; x) - f(x)| \leq M \left(\sum_{v=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(v)}(0) x^v a_{n,v}}{\varphi_n(x) v! c_{n,v}} \int_{\frac{v}{a_{n,v}}}^{\frac{v+c_{n,v}}{a_{n,v}}} (t-x)^2 dt \right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$= M(L_n^*((t-x)^2; x))^{\frac{\alpha}{2}}$$

şeklini alır. Burada

$$L_n^*((t-x)^2; x) = L_n^*(t^2; x) - 2xL_n^*(t; x) + x^2$$

olup, Lemma 4.1.2 ve Lemma 4.1.3 den $x \in (0, \frac{1}{\mu})$ için

$$L_n^*((t-x)^2; x) \leq c_n x + \frac{1}{3} d_n^2 \leq \frac{c_n}{\mu} + \frac{1}{3} d_n^2$$

dır. O halde

$$|L_n^*(f; x) - f(x)| \leq M(L_n^*((t-x)^2; x))^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\leq M \left(\frac{c_n}{\mu} + \frac{1}{3} d_n^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

yazılır ve son olarak bu eşitsizliğin $L_p(0, \frac{1}{\mu})$ de integral normu alınırsa

$$\|L_n^*(f; x) - f(x)\|_p \leq \frac{M}{\mu^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{c_n}{\mu} + \frac{1}{3} d_n^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Burada $st_A - \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ ve $st_A - \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ olduğundan

$$st_A - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{c_n}{\mu} + \frac{1}{3} d_n^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}} = 0$$

dır. O halde

$$\|L_n^*(f; x) - f(x)\|_p \leq \frac{M}{\mu^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{c_n}{\mu} + \frac{1}{3} d_n^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

eşitsizliği L_p metriğinde $L_n^*(f; x)$ operatörlerinin f fonksiyonuna A -istatistiksel yaklaşım hızını verir. O halde L_n^* operatörünün yaklaşım hızı Lipschitz sınıfı fonksiyonları yardımıyla değerlendirilmiş olur.

5.3. Süreklilik Modülü Yardımıyla Yaklaşım Hızı

5.3.1. Tanım

$f(x)$ bir I aralığında tanımlanmış fonksiyon olmak üzere,

$$\omega(f, \delta) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in I \\ |x_1 - x_2| \leq \delta}} |f(x_1) - f(x_2)| \quad (5.8)$$

ifadesine, f fonksiyonunun I aralığında süreklilik modülü denir ve süreklilik modülü aşağıda verilen özelliklere sahiptir [5].

$$a') \omega(f; \delta) \geq 0,$$

$$b') \delta_1 \leq \delta_2 \text{ ise } \omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2),$$

$$c') m \in \mathbb{N} \text{ ise } \omega(f; m\delta) \leq m\omega(f; \delta),$$

$$d') \text{ Her } \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ için } \omega(f; \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(f; \delta),$$

$$e') \text{ Eğer } f \in C[a, b] \text{ ise } \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(f; \delta) = 0,$$

$$f') \omega(f; |x - t|) \geq |f(x) - f(t)|,$$

$$g') |f(x) - f(t)| \leq \left(\frac{|x-t|}{\delta} + 1 \right) \omega(f; \delta).$$

5.3.2. Teorem

$f \in L_p[0, a]$ ($0 < a < \frac{1}{\mu}$) olsun. Eş. 4.1 ile tanımlanan L_n^* operatörü için

$$\|L_n^*(f; x) - f(x)\|_p \leq 2a^{\frac{1}{p}} \omega(f, \sqrt{\lambda_n})$$

eşitsizliği bulunur. Burada

$$\lambda_n = c_n a + \frac{1}{3} d_n^2$$

dir.

İspat

$$|L_n^*(f; x) - f(x)| = \left| \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(v)}(0)x^v}{v! c_{n,v}} \int_v^{v+c_{n,v}} \left(f\left(\frac{\xi}{a_{n,v}}\right) - f(x) \right) d\xi \right|$$

olup üçgen eşitsizliği kullanılırsa,

$$|L_n^*(f; x) - f(x)| \leq \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(v)}(0)x^v}{v! c_{n,v}} \int_v^{v+c_{n,v}} \left| f\left(\frac{\xi}{a_{n,v}}\right) - f(x) \right| d\xi \quad (5.9)$$

yazılır, diğer taraftan süreklilik modülünün

$$|f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t - x|}{\delta} + 1 \right) \omega(f, \delta)$$

özelliğinde $t = \frac{\xi}{a_{n,v}}$ alınıp Eş. 5.9'da kullanıldığı taktirde,

$$\begin{aligned} |L_n^*(f; x) - f(x)| &\leq \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(v)}(0)x^v}{v! c_{n,v}} \int_v^{v+c_{n,v}} \left(\frac{\left| \frac{\xi}{a_{n,v}} - x \right|}{\delta} + 1 \right) \omega(f, \delta) d\xi \\ &= \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(v)}(0)x^v}{v! c_{n,v}} \left(\int_v^{v+c_{n,v}} \frac{\left| \frac{\xi}{a_{n,v}} - x \right|}{\delta} d\xi + c_{n,v} \right) \omega(f, \delta) \\ &= \left(\frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(v)}(0)x^v}{v! c_{n,v}} \frac{1}{\delta} \int_v^{v+c_{n,v}} \left| \frac{\xi}{a_{n,v}} - x \right| d\xi + 1 \right) \omega(f, \delta) \\ &= \left(\frac{1}{\delta} \left[\frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(v)}(0)x^v}{v! c_{n,v}} \int_v^{v+c_{n,v}} \left| \frac{\xi}{a_{n,v}} - x \right| d\xi \right] + 1 \right) \omega(f, \delta) \\ &= \frac{\omega(f, \delta)}{\delta} \left[\sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{\varphi_n^{(v)}(0)x^v}{\varphi_n(x)v!} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\varphi_n^{(v)}(0)x^v}{\varphi_n(x)v!} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{c_{n,v}} \int_v^{v+c_{n,v}} \left| \frac{\xi}{a_{n,v}} - x \right| d\xi \right] \\ &\quad + \omega(f, \delta) \end{aligned}$$

bulunur ve son ifadeye

$$a = \left(\frac{\varphi_n^{(v)}(0)x^v}{\varphi_n(x)v!} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{c_{n,v}} \int_v^{v+c_{n,v}} \left| \frac{\xi}{a_{n,v}} - x \right| d\xi \text{ ve } b = \left(\frac{\varphi_n^{(v)}(0)x^v}{\varphi_n(x)v!} \right)^{\frac{1}{2}}$$

alınarak Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$|L_n^*(f; x) - f(x)| \leq \frac{\omega(f, \delta)}{\delta} \left(\left[\sum_{v=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(v)}(0)x^v}{\varphi_n(x)v!} \left(\frac{1}{c_{n,v}} \int_v^{v+c_{n,v}} \left| \frac{\xi}{a_{n,v}} - x \right| d\xi \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{v=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(v)}(0)x^v}{\varphi_n(x)v!} \right]^{\frac{1}{2}} \right) + \omega(f, \delta)$$

elde edilir, ayrıca

$$\left(\sum_{v=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(v)}(0)x^v}{\varphi_n(x)v!} \right)^{\frac{1}{2}} = 1$$

olduğundan gerekli düzenlemeler yapılsa son eşitsizlik

$$|L_n^*(f; x) - f(x)| \leq \left[\frac{1}{\delta} \left(\sum_{v=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(v)}(0)x^v}{\varphi_n(x)v!} \left(\frac{1}{c_{n,v}} \int_v^{v+c_{n,v}} \left| \frac{\xi}{a_{n,v}} - x \right| d\xi \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \omega(f, \delta)$$

şekline dönüşür ve buradan Jensen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} |L_n^*(f; x) - f(x)| &\leq \left[\frac{1}{\delta} \left(\sum_{v=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(v)}(0)x^v}{\varphi_n(x)v!} \frac{1}{c_{n,v}} \int_v^{v+c_{n,v}} \left(\frac{\xi}{a_{n,v}} - x \right)^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \omega(f, \delta) \\ &= \left[\frac{1}{\delta} (L_n^*((t-x)^2; x))^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \omega(f, \delta) \end{aligned}$$

yazılır, son eşitsizlikte $x \in [0, a]$ için Lemma 4.1.2 ve Lemma 4.1.3'den

$$L_n^*((t-x)^2; x) \leq c_n a + \frac{1}{3} d_n^2$$

olduğu kullanılırsa

$$|L_n^*(f; x) - f(x)| \leq \left[\frac{1}{\delta} \left(c_n a + \frac{1}{3} d_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \omega(f, \delta)$$

olur ve $\delta = \left(c_n a + \frac{1}{3} d_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ alınıp $L_p[0, a]$ da integral normu alınır

$$\|L_n^*(f; x) - f(x)\|_p \leq 2a^{\frac{1}{p}} \omega(f, \sqrt{\lambda_n})$$

elde edilir ki ispat tamamlanır. Burada $st_A - \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ ve $st_A - \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ koşulları dikkate alınır

$$st_A - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(c_n a + \frac{1}{3} d_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

olduğu görülür. Bu ise süreklilik modülünün (e') ile verilen özelliğinden

$$st_A - \lim_{n \rightarrow \infty} \omega(f, \sqrt{\lambda_n}) = 0$$

olduğunu garantiler. Bu durumda Teorem 5.3.2'i, L_p uzayında $L_n^*(f; x)$ operatörlerinin f fonksiyonuna A -istatistiksel yaklaşım hızını verir.

5.4. Lipschitz Tipi Maksimal Fonksiyonlar Yardımıyla Yaklaşım Hızı

α mertebeli Lipschitz tipi maksimal fonksiyonlar Lenze tarafından

$$\tilde{\omega}_\alpha = \sup_{t \neq x, t \in [0, a]} \frac{|f(t) - f(x)|}{|t - x|^\alpha}, \quad x \in [0, a], \alpha \in (0, 1]$$

olarak tanımlanmıştır [32]. Şimdi Eş. 4.1 de tanımlanan L_n^* operatörlerinin yaklaşım hızı Lipschitz tipi maksimal fonksiyonlar yardımıyla verilecektir.

5.4.1 Teorem

f Lipschitz tipi maksimal fonksiyon ve $x \in [0, a]$ ($0 < a < \frac{1}{\mu}$) olmak üzere $L_n^*(f; x)$ operatörleri için

$$\|L_n^*(f; x) - f(x)\|_p \leq a^{\frac{1}{p}} (\lambda_n)^{\frac{\alpha}{2}} \tilde{\omega}_\alpha(f, x)$$

sağlanır. Burada

$$\lambda_n = c_n a + \frac{1}{3} d_n^2$$

dir.

İspat

İspatta Agratininin tekniği kullanılacaktır [12].

$$\begin{aligned} |L_n^*(f; x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(v)}(0)x^v}{v! c_{n,v}} \int_v^{v+c_{n,v}} \left(f(x) - f\left(\frac{\xi}{a_{n,v}}\right) \right) d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(v)}(0)x^v}{v! c_{n,v}} \int_v^{v+c_{n,v}} \left| f(x) - f\left(\frac{\xi}{a_{n,v}}\right) \right| d\xi \end{aligned}$$

dir. $\tilde{\omega}_\alpha(f, x)$ nın tanımından

$$\left| f(x) - f\left(\frac{\xi}{a_{n,v}}\right) \right| \leq \tilde{\omega}_\alpha(f, x) \left| x - \frac{\xi}{a_{n,v}} \right|^\alpha$$

yazılabilir ve bu özellik son eşitsizlikte kullanılırsa

$$|L_n^*(f; x) - f(x)| \leq \tilde{\omega}_\alpha(f, x) \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(v)}(0)x^v}{v! c_{n,v}} \int_v^{v+c_{n,v}} \left| x - \frac{\xi}{a_{n,v}} \right|^\alpha d\xi$$

bulunur, burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p = \frac{2}{\alpha}$ ve $q = \frac{2}{2-\alpha}$ seçilip Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$|L_n^*(f; x) - f(x)| \leq \tilde{\omega}_\alpha(f, x) \left(\frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(v)}(0)x^v}{v! c_{n,v}} \int_v^{v+c_{n,v}} \left(x - \frac{\xi}{a_{n,v}} \right)^2 d\xi \right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(v)}(0)x^v}{v! c_{n,v}} \int_v^{v+c_{n,v}} d\xi \right)^{\frac{2-\alpha}{2}}$$

elde edilir ve

$$\frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(v)}(0)x^v}{v! c_{n,v}} \int_v^{v+c_{n,v}} d\xi = 1$$

olduğundan son eşitsizlik için

$$\begin{aligned} |L_n^*(f; x) - f(x)| &\leq \tilde{\omega}_\alpha(f, x) \left(\frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(v)}(0)x^v}{v! c_{n,v}} \int_v^{v+c_{n,v}} \left(x - \frac{\xi}{a_{n,v}} \right)^2 d\xi \right)^{\frac{\alpha}{2}} \\ &= \tilde{\omega}_\alpha(f, x) (L_n^*((t-x)^2; x))^{\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

yazılır, ayrıca Lemma 4.1.2 ve Lemma 4.1.3 gereğince $x \in [0, a]$ için

$$L_n^*((t-x)^2; x) \leq c_n a + \frac{1}{3} d_n^2$$

olması nedeniyle

$$|L_n^*(f; x) - f(x)| \leq \tilde{\omega}_\alpha(f, x) \left(c_n a + \frac{1}{3} d_n^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

elde edilir ve son olarak eşitsizliğe $L_p[0, a]$ da integral normu alınır

$$\|L_n^*(f; x) - f(x)\|_p \leq a^{\frac{1}{p}} \left(c_n a + \frac{1}{3} d_n^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}} \tilde{\omega}_\alpha(f, x)$$

olur ki ispat tamamlanır.

Diğer taraftan

$$st_A - \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0 \text{ ve } st_A - \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$$

olduğundan

$$st_A - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(c_n a + \frac{1}{3} d_n^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}} = 0$$

bulunacaktır. O halde Teorem 5.4.1 $L_n^*(f; x)$ operatörler dizisinin L_p uzayında $f(x)$ e A -istatistiksel yakınsaklığını verir.

$$\|L_n^*(f; x) - f(x)\|_p \leq a^{\frac{1}{p}} \left(c_n a + \frac{1}{3} d_n^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}} \tilde{\omega}_\alpha(f, x)$$

eşitsizliği ise $L_n^*(f; x)$ operatörlerinin f fonksiyonuna L_p uzayındaki A -istatistiksel yaklaşım hızını verir. Bu hızın değerlendirilmesinde, hızlı bir yakınsama elde etmede (λ_n) dizilerinin seçimi oldukça önemlidir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu bölümde çalışmamızda elde ettiğimiz bazı sonuçlardan söz edilecektir.

Bu çalışmada Agratini operatörleri ve bazı genelleşmelerinin yaklaşım özellikleri incelendi. Agratini operatörlerinin ve bazı genelleşmelerinin yaklaşım özellikleri ile ilgili daha önce yapılan bazı çalışmalara değinildi.

Doğru tarafından [15] de tanımlanan, Agratini operatörleri gibi iyi bilinen birçok operatörü de içeren

$$L_n(f; x) = \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{a_{n,v}}\right) \varphi_n^{(v)}(0) \frac{x^v}{v!}$$

lineer pozitif operatörünün Kantorovich tipli bir integral genelleşmesi tanımlandı. Tanımlanan bu operatörlere dair L_p uzaylarında yaklaşım özellikleri verildi. L_p uzaylarında Korovkin tipi A-istatistiksel yaklaşım özellikleri incelendi. Ayrıca Voronovskaja tipli bir teorem de verildi.

Tanımlanan bu operatörlerin L_p uzaylarındaki yaklaşım hızları, süreklilik modülü, Petree K-fonksiyoneli, Lipschitz sınıfı fonksiyonları ve Lipschitz tipi maksimal fonksiyonları yardımıyla, A-istaistiksel yakınsaklık kullanılarak verildi.

Tanımladığımız $L_n^*(f; x)$ lineer pozitif operatörü iyi bilinen birçok operatörün bir Kantorovich tipli genelleşmesidir. Bu nedenle bu çalışmada elde edilen sonuçlar, lineer pozitif operatörlerin Kantorovich tipli genelleşmesinin geniş yelpazesinde geçerlidir. Diğer taraftan çalışmamızın A-istatistiksel yakınsaklık kullanılarak yapılması, tezin önemini artırmaktadır. Ayrıca literatürdeki çalışmaların birçoğu sürekli fonksiyonlar uzayında yapılmış olup, ölçülebilir fonksiyonların sürekli fonksiyonların oldukça geniş bir genellemesi olması nedeniyle çalışmamızın L_p uzaylarında yapılması tezin önemini daha da artırmaktadır.

Yaklaşım teorisi, keyfi bir fonksiyona kendisinden daha basit, kullanışlı ve kolay sonuçlar elde edilebilen yapılar yardımıyla yaklaşmayı amaç edinir. Genelde fonksiyonları

yaklaştıran bu yapılar lineer pozitif operatörlerin yardımıyla tanımlanabildiğinden lineer pozitif operatörler uzun süredir yaklaşım teorisinde önemli bir yer tutar. O yüzden bu tez, çalışmış olduğumuz konularla ilgilenenlere motive edici bir destek olup; kaynak olabileceğİ düşüncesiyle de önem taşımaktadır. Yaptığımız çalışmanın konuyla ilgilenenlere farklı bir bakış açısı sunacağı ümidini taşıyoruz. Bizim de bu yönde konu ile alakalı çalışmalarımız devam etmektedir.

KAYNAKLAR

1. Weierstrass, K. (1885). Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veränderlichen. *Sitzungsberichte der Akademie zu Berlin*, 633-639, 789-805.
2. Bernstein, S. N. (1912). Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. *Communications de la Société Mathématique de Kharkow*, 13(2), 1-2.
3. Hacısalıhoğlu, H. ve Hacıyev, A. (1995). *Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı*. No:31. Ankara: Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Döner Sermaye Yayınları, 1-44.
4. Szász, O. (1950). Generalization Of S. Bernstein's Polynomials To The Infinite Interval. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 45, 239-245.
5. Altomare, F. and Campiti, M. (1994). *Korovkin-type Approximation Theory and its Applications*. Berlin: Water de Gryter, 218-373.
6. Bohman, H. (1951). On Approximation Of Continuous and Analytic Functions. *Arkiv för Matematik*, 2(3), 43-56.
7. Korovkin, P. P. (1953). On Convergence Of Linear Positive Operators In The Space Of Continuous Functions. *Doklady Akademii Nauk*, 90, 961-964.
8. Derriennic, M. M. (1981). Sur l'approximation de fonctions intégrable su $[0,1]$ par des polynomes de Bernstein modifiers. *Journal of Approximation Theory*, 31, 325-343.
9. Durrmeyer, J. L. (1967). *Une formule d'inversion de la transformée de Laplace: Applications à la theorie des moments*, Thèse de 3e cycle, Faculté des Sciences de l'Université de Paris.
10. Kantorovich, L. V. (1930). Sur Certains Developpements Suivant les Polynomes de la Forme de S. Bernstein. *I, II Comptes Rendus de l'Academie des Sciences de l'URSSR*, 563-568, 595-600.
11. Doğru, O. (1998). Approximation Order and Asymptotic Approximation for Generalized Meyer-König and Zeller Operators. *Mathematica Balkanica*, 12(3-4), 359-368.
12. Agratini, O. (2001). Korovkin Type Error Estimates for Meyer-König and Zellers Operators. *Mathematical Inequalities and Applications*, 4(1), 119-126.
13. Doğru, O., Duman, O. and Orhan, C. (2003). Statistical Approximation By Generalized Meyer-König and Zeller Operators. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 40, 359-371.
14. Gadjiev, A. D. and Orhan, C. (2002). Some Approximation Theorems Via Statistical Convergence. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 32, 129-138.

15. Doğru, O. (2008). Approximation Properties Of A Generalization Of Positive Linear Operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 342, 161-170.
16. Gadjev, A.D. (1974). The Convergence Problem of A Sequence of Positive Linear Operators on Unbounded Sets And Theorems Analogous To That of P. P. Korovkin. *Soviet Mathematics Doklady Akademii Nauk*, 15(5), 1433-1436.
17. Korovkin, P.P. (1960). *Linear Operators and Approximation Theory*. Delhi: Hindustan Publishing Corporation (India), 222.
18. Lorentz, G. G. (1986). *Approximation of Functions*. (2nd. Edition). Rhode Island: American Mathematical Society Chelsea Publusing, 8-10.
19. Mitrinović, D. S. (1970). *Analytic Inequalities*. New York:Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 49-58.
20. Hardy, G. H., Littlewood, J. E. and Polya, G. (1952). *Inequalities*, Cambridge: University Press, UK, 324.
21. Dzyadik, V. K. (1966). On The Approximation Of Functions By Linear Positive Operators and Singular Integrals. *Matematicheskii Sbornik*, 70, 508-517.
22. Royden, H. L. (1968). *Real Analysis*. (Second Edition). New York: The MacMilan Company 71-73.
23. Meyer-König, W. and Zeller, K. (1960). Bernsteinsche potenzreihen. *Studia Mathematica*, 19, 89-94.
24. Lupaş, A. and Müller, M. W. (1970). Approximation Properties of The M_n - Operators. *Aequationes Mathematicae*, 5, 19-37.
25. Cheney, E. W. and Sharma, A. (1964). Bernstein Power Series. *Canadian Journal of Mathematics*, 16, 241-253.
26. Khan, M. K. (1989). On The Rate Of Convergence Of Bernstein Power Series For Functions Of Bounded Variation. *Journal of Approximation. Theory*, 57(1), 90-103.
27. Doğru, O. and Özalp, N. (2001). Approximation By Kantorovich Type Generalization Of Meyer-König and Zeller Operators. *Glasnik Mathematicki*, 36(56), 311-318.
28. Müller, M. W. (1978). L_p Approximation By The Method of Integral Type Meyer-König and Zeller Operators. *Studia Mathematica*, 63, 81-88.
29. Totik, V. (1983). Approximation By Meyer-König and Zeller Type Operators. *Mathematische Zeitschrift*, 182, 425-446.
30. Jihua, X. and Luoqing, L. (1991). Converse Theorems On Approximation By Integral Type Meyer-König and Zeller Operators. *Progress in Approximation Theory Academic Press (Boston)*, 899-911.

31. Bleimann, G., Butzer, P. L. and Hahn, L. (1980). A Bernstein-type Operator Approximating Continuous Functions On The Semi Axis. *Indagationes Mathematicae* , 42(3), 255-262.
32. Lenze, B. (1990). Bernstein-Baskakov-Kantorovich Operators and Lipschitz-Type Maximal Functions. *Approximation Theory (Kecskemét) , Hungary, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, 58, 469-496.
33. Canatan, R. and Doğru, O. (2012). Statistical Approximation Properties Of A Generalization Of Positive Linear Operators. *European Journal Of Pure And Applied Mathematics*, 5(1), 75-87.
34. Gal, S. G. and Anastassiou, G. A. (2000). *Approximation Theory: Moduli of Continuity and Global Smoothness Preservation*. New york: Birkhäuser, 80-466.
35. Fast, H. (1951). Sur La Convergence Statistique. *Colloquium Mathematicae*, 2, 241-244.
36. Salat, T. (1980). On Statistically Convergent Sequences of Real Numbers. *Mathematica Slovaca*, 30(2), 139-150.
37. Fridy, J. A. (1985). On Statistical Convergence. *Analysis*, 5, 301-313.
38. Connor, J. (1988). The Statistical and Strong p-Cesaro Convergence of Sequences. *Analysis*, 8, 47-63.
39. Niven, I., Zuckerman, H. S. and Montgomery, H. (1980). *An Introduction to the Theory of Numbers. (5th Edition)*. 10-24.
40. Hardy, G. H. (1949). *Divergent Series*. London: Oxford Univ. Press, 396.
41. Erkuş, E. and Duman, O. (2006). A Korovkin Type Approximation Theorem in Statistical Sense. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 43(3), 285-294.
42. Freedman, A. R. and Sember, J. J. (1981). Densities and Summability. *Pacific Journal of Mathematics*, 95, 293-305.
43. Fridy, J. A. and Miller, H. I. (1991). A Matrix Characterization Of Statistical Convergence. *Analysis* 11, 59-66.
44. Kolk, E. (1993). Matrix Summability Of Statistically Convergent Sequences. *Analysis*, 13, 77-83.
45. Miller, H. I. (1995). A Measure Theoretical Subsequence Characterization Of Statistical Convergence. *Transactions of the American Mathematical Society*, 347, 1811-1819.
46. Fridy, J. A. and Orhan, C. (1997). Statistical Limit Superior and Limit Inferior. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 125, 3625-3631.

47. Duman, O., Khan, M. K., and Orhan, C. (2003). A-Statistical Convergence Of Approximating Operators. *Mathematical Inequalities and Applications*, 6(4), 689-699.
48. Doğru, O. (2007). *Necessary Conditions To Obtain Voronovskaja Type Asymptotic Formlae Via Statistical Limit*. Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Applied Mathematics, Cairo, Egypt, December (29-31), 128-131.
49. Chen, W., Ditzian, Z. and Ivanov, K. (1993). Strong Converse İnequality for the Bernstein-Durrmeyer Operator. *Journal Approximation Theory*, 75, 25-43.
50. Chen, W. And Ditzian, Z. (1994). Strong Converse İnequality for Kantorovich Polynomials. *Consructive Approximation*, 10, 95-106.
51. Ditzian, Z. (1996). A K -functional and The Rate of Convergence of Some Linear Polynomial Operators. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 124 (6), 1773-1781.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : GÜLSÜN, Aslıhan
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 12.11.1984, Yerköy
 Medeni hali : Evli
 Telefon : 0 543 953 08 16
 e-mail : aslhncskn@gmail.com



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Doktora	Gazi Üniversitesi / Matematik Bölümü	Devam ediyor
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik Bölümü	2011
Lisans	Gazi Üniversitesi Kırşehir F.E.F./Matematik	2009
Lise	Yozgat Anadolu Lisesi	2002

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2011-2013	Gazi Üniversitesi Ostim M.Y.O.	Öğretim Görevlisi(Y.Z.)
2013-2013	Gazi Üniversitesi Teknoloji Fakültesi	Öğretim Görevlisi(Y.Z.)
2013-2014	Özel Anka Anakent A.S.M.L.	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

-

Hobiler

Yürüyüş, Müzik



GAZİ GELECEKTİR..