GAZİ ÜNİVERSİTESİ

1926

İKİ DEĞİŞKENLİ BRENKE POLİNOMLARI TABANLI
SZÁSZ-KANTOROVİCH OPERATÖRLERİ

Selin BEGEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2021

Selin BEGEN tarafından hazırlanan "İKİ DEĞİŞKENLİ BRENKE POLİNOMLARI TABANLI SZÁSZ-KANTOROVİCH OPERATÖRLERİ" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. H. GÜL İNCE İLARSLAN

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Başkan: Prof. Dr. Ali OLGUN

Matematik Ana Bilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Üye: Doç. Dr. Gürhan İÇÖZ

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Tez Savunma Tarihi: 08/01/2021

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

....

Prof. Dr. Cevriye GENCER

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Selin BEGEN

....

İKİ DEĞİŞKENLİ BRENKE POLİNOMLARI TABANLI SZÁSZ-KANTOROVİCH OPERATÖRLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Selin BEGEN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2021

ÖZET

Bu tez 5 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde analiz ve yaklaşımlar teorisindeki bazı temel tanımlar ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde Brenke tip polinomlar tabanlı Szász-Kantorovich operatörlerinin yaklaşım dereceleri, süreklilik modülü, Voronovskaja tip teorem ve Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla incelenmiştir. Dördüncü bölümde Brenke tip polinomları tabanlı Szász-Kantorovich operatörlerinin iki değişkenli bir genelleş tirilmesi tanımlanmıştır. Tam süreklilik, kısmi süreklilik modülü, Lipschitz sınıfından fonksiyonlar ve Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla bu operatörlerin yaklaşım hızı hesaplanmıştır. Ayrıca bu operatörlerin ağırlıklı uzaylarda yaklaşımı incelenmiştir. Son olarak, iki değişkenli Brenke tip polinomları tabanlı Szász-Kantorovich operatörlerinin genelleştirilmiş Boolean toplamları tanımlanmıştır. Bu operatörlerin Bögel sü rekli fonksiyonlar uzayında karma süreklilik modülü ve karma Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım hızı hesaplanmıştır. Beşinci bölüm sonuç kısmına ayrılmıştır.

Bilim Kodu	: 20404
Anahtar Kelimeler	: Brenke Polinomları, Szász-Kantorovich Operatörleri, Ağırlıklı Uzaylar, Lipschitz sınıfından fonksiyonlar, GBS Operatörleri
Sayfa Adedi	: 58
Danışman	: Prof. Dr. H. GÜL İNCE İLARSLAN

SZÁSZ-KANTOROVICH OPERATORS TYPE BASED ON BIVARIATE BRENKE TYPE POLYNOMIALS
(M. Sc. Thesis)

Selin BEGEN

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
JANUARY 2021

ABSTRACT

This thesis contains 5 chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, some basic definitions and theorems in analysis and approximation theory are given. In the third chapter, the rate of convergence of Szâsz-Kantorovich operators based on Brenke type polynomials is studied with the help of the modulus of continuity, Voronovskaja type theorem and Peetre's-K functional. In the fourth chapter, the bivariate generalization of Szâsz-Kantorovich operators based on Brenke type polynomials is defined and the degree of approximation of these operators is given in terms of the total and partial modulus of continuity, Lipschitz class and Peetre's-K functional. Further the approach of these operators in weighted spaces has been studied. Finally, the associated generalized Boolean sum operators of Szâsz-Kantorovich operators based on Brenke type polynomials is defined and the degree of approximation in the Bögel continuous functions space is estimated by means of the mixed modulus of smoothness and Lipschitz class. The fifth chapter is devoted to the conclusion.

Science Code	: 20404
Key Words	: Brenke polynomials, Szász-Kantorovich Operators, Lipschitz Type Class Functions, Weighted Spaces, GBS Operators
Page Number	: 58
Supervisor	: Prof. Dr. H. GÜL İNCE İLARSLAN

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında ilgi ve desteği ile beni yönlendiren, bilgi ve birikimlerinden yararlanma fırsatı veren değerli hocam Prof. Dr. Hatice Gül İNCE İLARSLAN'a, maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, daima yanımda olan sevgili aileme ve yakın arkadaşlarıma saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{C\,[0,\infty)}$	$[0,\infty)$ aralığındaki sürekli fonksiyonların uzayı
$\boldsymbol{C_B\,[0,\infty)}$	$[0,\infty)$ aralığındaki sürekli sınırlı fonksiyonların uzayı
$\boldsymbol{C_b\,[0,\infty)}$	$[0,\infty)$ üzerinde B-sürekli fonksiyonlar uzayı
$\boldsymbol{K\,(f;\delta)}$	f fonksiyonun Peetre$-K$ fonksiyoneli
$\boldsymbol{Lip_N(\zeta_1,\zeta_2)}$	Lipschitz sınıfı fonksiyonları
$\boldsymbol{L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n}(f;x)}$	Tek değişkenli Szász-Kantorovich operatörü
$\boldsymbol{L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(f;x,y)}$	İki değişkenli Szász-Kantorovich operatörü
$\boldsymbol{U_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(f;x,y)}$	İki değişkenli Szász-Kantorovich tip GBS operatörü
$\boldsymbol{S_n(f;x)}$	Szász operatörü
$\boldsymbol{\omega_{mixed}(f;\delta_1,\delta_2)}$	f fonksiyonunun Bögel(karma) süreklilik modülü
$\boldsymbol{w\,(f;\delta)}$	f fonksiyonun süreklilik modülü
$\boldsymbol{w_2\,(f;\delta)}$	f fonksiyonun 2.süreklilik modülü
$\boldsymbol{\Omega\,(f;\delta)}$	f fonksiyonun ağırlıklı süreklilik modülü

1. GİRİŞ

Weierstrass 1885 yılında $[a, b]$ aralığında sürekli her f fonksiyonuna bir polinomla yaklaşabileceğini ifade etmiştir [36]. Weierstrass'ın bu ifadesi yaklaşım teorisinin temelini oluşturmuştur.

Son zamanlarda çeşitli polinom türleri üzerine önemli çalışmalar yapılmıştır. Üzerinde çalışılan bu polinom türlerinden biride Appell polinomlarıdır. Appell polinomları olarak bilinen ve aşağıdaki diferansiyel denklemi sağlayan n.dereceden polinomlar Appell tarafından [5] de tanımlandı.

$$DP_n(x) = nP_{n-1}(x),\ D \equiv \frac{d}{dx}$$

Diğer yandan yaklaşım teorisinde önemli rol oynayan lineer pozitif operatörlerden en iyi bilineni aşağıdaki şekilde tanımlanan Szász-Mirakjan operatörleridir [32].

$$S_n(f;x) = e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}f(\frac{k}{n}), x \geqslant 0, n \in \mathbb{N}, \tag{1.1}$$

Birçok araştırmacının, bu operatörlerin genelleştirmeleri üzerine çalışmaları bulunmaktadır, ([6], [11], [16]).

Jakimovski ve Leviatan [24] de

$$J(f;x) = \frac{e^{nx}}{g(1)}\sum_{k=0}^{\infty}p_k(nx)f(\frac{k}{n}),\ x \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

şeklinde tanımladıkları Favard-Szász operatörlerinin yaklaşım özelliklerini incelediler, burada $g(z)$, $|z| < R$, $(R > 1)$ bölgesinde analitik bir fonksiyon ve $p_k(nx)$ fonksiyonları ise

$$g(t)e^{tx} = \sum_{k=0}^{\infty}p_k(x)t^k, \tag{1.3}$$

eşitliğini sağlayan Apell fonksiyonlarının doğrucu fonksiyonlarıdır.

Son yıllarda birçok araştırmacı bazı özel polinomları içeren Szász operatörlerinin genelleştirmelerini tanımlayarak yaklaşım özelliklerini incelediler ([2]- [22]- [25]- [28]- [30]- [33]- [34]).

Varma ve arkadaşları,

$$A(t).B(xt) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x)t^k \tag{1.4}$$

koşulunu sağlayan doğrucu fonksiyonlara sahip Brenke tip polinomlar yardımıyla Szász operatörlerinin bir genelleştirmesini [34] de verdiler. Burada

$$p_k(x) = \sum_{r=0}^{k} a_{k-r} b_r x^r \qquad k = 0, 1, ... \tag{1.5}$$

Brenke polinomları olup $A(t)$ ve $B(t)$

$$A(t) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r t^r,\ a_0 \neq 0, \qquad B(t) = \sum_{r=0}^{\infty} b_r t^r,\ b_0 \neq 0 \tag{1.6}$$

eşitliklerini sağlayan analitik fonksiyonlardır.

[34] de

$i)$ $A(1) \neq 0,\ \frac{a_{k-r}.b_r}{A(1)} \geq 0$, $0 \leq r \leq k,\ k = 0, 1, 2, ...,$

$ii)$ $B : [0, \infty) \to (0, \infty)$,

$iii)$ Eş. (1.6) de verilen seriler $|t| < R$, $(R > 1)$, için yakınsaktır,

$$iv)\ \lim_{u\to\infty} \frac{B^{(k)}(u)}{B(u)} = 1, \text{için } k = 1, 2, 3, 4 \tag{1.7}$$

varsayımları altında Brenke tip polinomları içeren Szász operatörleri

$$T_n(f; x) = \frac{1}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) f(\frac{k}{n}),\ x \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N}. \tag{1.8}$$

şeklinde tanımlandı.

Daha sonra [33] de Taşdelen ve arkadaşları Eş. (1.7) varsayımları altında Eş (1.8) operatörlerinin Kantorovich tip genelleştirmelerini, $f \in C[0,\infty)$, $x \in [0,\infty)$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlandılar:

$$K_n(f;x) = \frac{n}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \tag{1.9}$$

Bu operatörlerin yaklaşım derecelerini, süreklilik modülü ve Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla incelediler.

Daha sonra [30] de Öksüzer ve arkadaşları olasılık teorisinin bazı sonuçları aracılığıyla bu operatörlerin sınırlı fonksiyonlara yakınsama hızını verdiler.

Mursaleen ve Ansari ise [28] da Brenke tip polinomlar yardımıyla Szász operatörlerinin Chlodowsky tipli bir genellemesini tanımladılar ve diğer klasik yaklaşım sonuçlarının yanı sıra ağırlıklı uzaylarda yaklaşımını incelediler.

Daha sonra [7] de Atakut ve Büyükyazıcı, Eş. (1.9) ile verilen Szász-Kantorovich tip operatörlerinin

$$L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n}(f;x) = \frac{\beta_n}{A(1)B(\alpha_n x)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\alpha_n x) \int_{\frac{k}{\beta_n}}^{\frac{k+1}{\beta_n}} f(t)dt \tag{1.10}$$

şeklinde bir genellemesini vererek, yaklaşım özelliklerini incelediler. Burada $x \geq 0$, $f \in C[0,\infty)$ ve $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ pozitif artan diziler olup aşağıdaki koşulları sağlar:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\beta_n} = 0, \qquad \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1 + O(\frac{1}{\beta_n}) , \qquad (n \to \infty). \tag{1.11}$$

Diğer yandan [35] da Walczak iki değişkenli Szász-Mirakjan operatörlerini tanımlayarak ağırlıklı uzaylarda yaklaşımı inceledi. Son zamanlarda birçok yazar tarafından, Szász-Mirakjan operatörlerinin iki boyutlu uzaylarda bazı genelleştirmeleri incelenmiştir ([1], [20], [31]).

Bu tezde, öncelikle tek değişkenli Brenke polinomları tabanlı Szász-Kantorovich operatörlerinin temel yaklaşım özellikleri verilecektir. Daha sonra Brenke tip polinomları tabanlı Szász-Kantorovich operatörlerinin iki değişkenli bir genelleştirmesi tanımlanacaktır. Bu operatörler için tam süreklilik modülü, kısmi süreklilik modülü, Lipschitz sınıfından fonksiyonlar ve Peetre K-fonksiyoneli yardımıyla yaklaşım derecesi verilecektir. Ayrıca bu operatörlerin ağırlıklı uzaylarda yaklaşımı incelenerek, Bögel sürekli fonksiyonlar uzayında yaklaşım özellikleri verilecektir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Tanım ve Teoremler

Bu bölümde çalışmamız boyunca kullanacağımız lineer pozitif operatörler dizisinin yaklaşım özellikleri ile ilgili bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.1.1. Tanım

X ve Y iki fonksiyon uzayı olsun. X'ten alınan herhangi bir f fonksiyonunu Y'de bir g fonksiyonuna karşılık getiren L dönüşümüne operatör denir.

$f \in X$, $g \in Y$ ve x , g'nin tanım kümesine ait olmak üzere

$$L(f;x) = g(x)$$

veya daha açık biçimde; t , f nin tanım kümesine ait olmak üzere

$$L(f(t);x) = g(x)$$

şeklinde ifade edilir [21].

2.1.2. Tanım

X lineer bir uzay ve $L : X \to Y$ bir operatör olsun. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\forall f_1,\ f_2 \in X$ için

$$L(\alpha f_1 + \beta f_2; x) = \alpha L(f_1; x) + \beta L(f_2; x)$$

koşulu sağlanıyorsa L operatörüne lineer operatör denir [21].

2.1.3. Tanım

L lineer operatör ve $f \in X$ olsun. Eğer $f \geq 0$ iken $L(f;x) \geq 0$ gerçekleniyorsa L operatörüne lineer pozitif operatör denir [21].

2.1.4. Lemma

L lineer pozitif bir operatör olsun. Her f , $g \in X$ için $f \leq g$ ise

$$L(f;x) \leq L(g;x)$$

dir [21].

Bu özelliğe L lineer pozitif operatörünün monotonluk özelliği denir.

2.1.5. Lemma

L lineer pozitif bir operatör olmak üzere her $f \in X$ için

$$|L(f;x)| \leq L(|f|\,;x)$$

dir [21].

2.1.6. Tanım

Her $n \in \mathbb{N}$ için $L_n(f;x)$ bir operatör ise bu durumda bir operatör dizisi (L_n) ile gösterilir.

2.1.7. Tanım

$I \subset \mathbb{R}$ herhangi bir alt aralık olsun. I üzerinde sürekli tüm fonksiyonların sınıfı $C(I)$ ile gösterilir. Özel olarak $I = [a,b]$ kapalı ve sınırlı aralığı alınırsa, $C\,[a,b]$ ile $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli tüm fonksiyonların sınıfı gösterilecektir. $C\,[a,b]$

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

normu ile bir lineer normlu uzaydır [29].

2.1.8. Tanım

$f, f_1, f_2, ... \in C\,[a,b]$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C[a,b]} = \lim_{n\to\infty} \max_{a\le x\le b} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

ise (f_n) fonksiyonlar dizisi $C\,[a,b]$ uzayında f fonksiyonuna yakınsaktır denir ve $f_n \rightrightarrows f$ şeklinde gösterilir [26].

Fonksiyon dizilerinin düzgün yakınsaklığı $C\,[a,b]$ üzerindeki yakınsaklığa denktir.

2.1.9 Teorem (Korovkin Teorem)

Her $n \in \mathbb{N}$ için $L_n : C\,[a,b] \to C\,[a,b]$ şeklinde tanımlı (L_n) lineer pozitif operatörler dizisi verilsin. Her bir $k = 0, 1, 2$ için $e_k(x) = x^k$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(e_k) - e_k\|_{C[a,b]} = 0 \ , \ k = 0, 1, 2$$

koşulları sağlanıyorsa, bu durumda $[a,b]$ aralığında sürekli ve tüm reel eksende sınırlı olan her $f \in C\,[a,b]$ fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f) - f\|_{C[a,b]} = 0$$

gerçeklenir ([21], [3], [27]).

2.1.10. Tanım

$I \subset \mathbb{R}$ herhangi bir aralık olsun. $\delta \in [0,\infty)$ ve $f \in C(I)$ olmak üzere

$$\omega(f;\delta) = \sup\{|f(x_2) - f(x_1)| : |x_2 - x_1| \le \delta, x_1, x_2 \in I\}$$

şeklinde tanımlanan $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonuna f fonksiyonunun süreklilik modülü denir.

Süreklilik modülü aşağıda verilen özelliklere sahiptir:

i) $\omega(f;\delta) \geq 0$,

ii) $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(f;\delta_1) \leq \omega(f;\delta_2)$,

iii) $m \in \mathbb{N}$ için $\omega(f;m\delta) \leq m\omega(f;\delta)$,

iv) $\lambda \in \mathbb{R}^+$için $\omega(f;\lambda\delta) \leq (1+\lambda)\omega(f;\delta)$,

v) f, I üzerinde düzgün sürekli $\iff \lim\limits_{\delta^+ \to 0} \omega(f;\delta) = 0$,

vi) $|f(t) - f(x)| \leq \omega(f;|t-x|)$,

vii) $|f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1\right)\omega(f;\delta)$.

2.1.11. Tanım

$f \in C_B[0,\infty)$ ve $\delta > 0$ olmak üzere

$$K(f;\delta) = \inf_{g \in C_B^2[0,\infty)} \left\{ \|f-g\|_{C_B[0,\infty)} + \delta \|g\|_{C_B^2[0,\infty)} \right\}$$

ifadesine Peetre K-fonsiyoneli denir.

Burada

$$C_B[0,\infty) = \{f \in C[0,\infty) : \ f, \ \ [0,\infty) \ \text{ da sınırlı}\}$$

ve

$C_B^2[0,\infty) = \left\{g : g, g^{'}, g^{''} \in C_B[0,\infty)\right\}$ olup $C_B[0,\infty)$ ve $C_B^2[0,\infty)$ üzerindeki normlar sırasıyla

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,\infty)} |f(x)| \text{ ve } \|g\|_{C_B^2} = \|g\|_\infty + \|g^{'}\|_\infty + \|g^{''}\|_\infty$$

dir [19].

2.1.12. Tanım

$f \in C_B\,[0,\infty)$ ve $\delta > 0$ olmak üzere f fonksiyonun ikinci süreklilik modülü

$$\omega_2(f;\delta) = \sup_{0\leq h\leq x, x+2h\in[a,b]} |f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)|$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca

$$K(f;\delta) \leq A\omega_2(f;\delta)$$

olacak şekilde bir $A > 0$ vardır [15].

3. BRENKE TİP POLİNOMLARI TABANLI SZÁSZ-KANTOROVİCH OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

3.1. Brenke tip Polinomları Tabanlı Szász-Kantorovich Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri

Bu bölümde öncelikle Atakut ve Büyükyazıcı tarafından Eş. (1.10) ile verilen Brenke polinomları tabanlı Szász-Kantorovich tip operatörlerinin yaklaşım özellikleri incelenecektir.

3.1.1. Lemma

$\forall x \in [0, \infty)$ için

$i) L_n^{\alpha_n,\beta_n}(1; x) = 1$

$ii) L_n^{\alpha_n,\beta_n}(t; x) = \dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\dfrac{B'(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)}x + \dfrac{1}{\beta_n}\dfrac{2A'(1)+1}{2A(1)}$

$iii) L_n^{\alpha_n,\beta_n}(t^2; x) = \dfrac{\alpha_n^2}{\beta_n^2}\dfrac{B''(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)}x^2 + \dfrac{2\alpha_n}{\beta_n^2}\dfrac{A'(1)+A(1)}{A(1)}\dfrac{B'(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)}x$

$+\dfrac{1}{3\beta_n^2}\dfrac{3A''(1)+6A'(1)+A(1)}{A(1)}$

$iv) L_n^{\alpha_n,\beta_n}(t^3; x, y) = \dfrac{\alpha_n^3}{\beta_n^3}\dfrac{B'''(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)}x^3 + \dfrac{3\alpha_n^2}{\beta_n^3}\dfrac{2A'(1)+3A(1)}{A(1)}\dfrac{B''(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)}x^2$

$+\dfrac{\alpha_n}{2\beta_n^3}\dfrac{6A''(1)+18A'(1)+7A(1)}{A(1)}\dfrac{B'(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)}x + \dfrac{1}{4\beta_n^3}\dfrac{4A'''(1)+16A''(1)+12A'(1)+A(1)}{A(1)}$

$v) L_n^{\alpha_n,\beta_n}(t^4; x) = \dfrac{\alpha_n^4}{\beta_n^4}\dfrac{B^{(4)}(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)}x^4 + \dfrac{4\alpha_n^3}{\beta_n^4}\dfrac{A'(1)+2A(1)}{A(1)}\dfrac{B'''(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)}x^3$

$+\dfrac{3\alpha_n^2}{2\beta_n^4}\dfrac{2A''(1)+8A'(1)+5A(1)}{A(1)}\dfrac{B''(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)}x^2$

$$+\frac{\alpha_n}{\beta_n^4}\frac{4A'''(1)+24A''(1)+30A'(1)+6A(1)}{A(1)}\frac{B'(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)}x$$

$$+\frac{1}{\beta_n^4}\frac{5A^{(4)}(1)+40A'''(1)+75A''(1)+30A'(1)+A(1)}{A(1)}$$

3.1.2. Teorem

$f \in C_E\left[0,\infty\right)$ olsun. Bu durumda $[0,\infty)$ un kompakt alt kümeleri üzerinde

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n^{\alpha_n,\beta_n}(f)-f\right\|_{C_E[0,\infty)}=0$$

gerçeklenir. Burada

$E=\left\{f:|f|\leq ae^{bx}, a\in\mathbb{R}^+, b\in\mathbb{R}\right\}$ ve $C_E\left[0,\infty\right)=C\left[0,\infty\right)\cap E$

dır.

İspat

Lemma 3.1.1, Eş. (1.7) koşulları ve Korovkin Teoreminden ispat elde edilir.

3.1.3. Lemma

$\forall x\in[0,\infty)$ için aşağıdaki eşitlikler gerçeklenir:

$$i)L_n^{\alpha_n,\beta_n}(t-x;x)=\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\frac{B'(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)}-1\right)x+\frac{1}{\beta_n}\frac{2A'(1)+1}{2A(1)}$$

$$ii)L_n^{\alpha_n,\beta_n}((t-x)^2;x)=\left(\frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2}\frac{B''(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)}-\frac{2\alpha_n}{\beta_n}\frac{B'(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)}+1\right)x^2$$

$$+\left(\frac{2\alpha_n}{\beta_n^2}\frac{A'(1)+A(1)}{A(1)}\frac{B'(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)}-\frac{1}{\beta_n}\frac{2A'(1)+1}{A(1)}\right)x+\frac{1}{3\beta_n^2}\frac{3A''(1)+6A'(1)+A(1)}{A(1)}$$

$$iii)L_n^{\alpha_n,\beta_n}((t-x)^4;x)=O\left(\frac{1}{\beta_n}\right)\sum_{i=0}^{4}x^i$$

3.1.4. Teorem

$f \in C_E\,[0,\infty)$ olsun. Bu durumda

$$\left|L_n^{\alpha_n,\beta_n}(f;x)-f(x)\right| \leq 2w\left(f;\sqrt{\delta_n(x)}\right)$$

eşitliği sağlanır. Burada

$$\delta=(\delta_n(x))$$

ve

$$\delta_n(x)=\sqrt{L_n^{\alpha_n,\beta_n}((t-x)^2;x)}$$

dir.

İspat

Lemma 3.1.1 ve $L_n^{\alpha_n,\beta_n}$ operatörünün lineer pozitifliğinden

$$\left|L_n^{\alpha_n,\beta_n}(f;x)-f(x)\right| \leq L_n^{\alpha_n,\beta_n}\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)$$

olur.

Diğer yandan süreklilik modülünün (vii) özelliğinden ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\left|L_n^{\alpha_n,\beta_n}(f;x)-f(x)\right|$$

$$\leq \frac{\beta_n}{A(1)B(\alpha_n x)}\sum_{k=0}^{\infty}p_k(\alpha_n x)\int\limits_{\frac{k}{\beta_n}}^{\frac{k+1}{\beta_n}}\left|f(t)-f\left(x\right)\right|dt$$

$$\leq \frac{\beta_n}{A(1)B(\alpha_n x)}\sum_{k=0}^{\infty}p_k(\alpha_n x)\int\limits_{\frac{k}{\beta_n}}^{\frac{k+1}{\beta_n}}\left(\frac{|t-x|}{\delta}+1\right)dt w(f;\delta)$$

$$w(f;\delta)\left\{1+\frac{1}{\delta}\frac{\beta_n}{A(1)B(\alpha_n x)}\sum_{k=0}^{\infty}p_k(\alpha_n x)\int_{\frac{k}{\beta_n}}^{\frac{k+1}{\beta_n}}|t-x|\,dt\right\}$$

$$\leq w(f;\delta)\left(1+\delta^{-1}\left(L_n^{\alpha_n,\beta_n}\left((t-x)^2;x\right)\right)^{1/2}\right)$$

elde edilir.

Burada

$$\delta=(\delta_n(x)),\ \delta_n(x)=\sqrt{L_n^{\alpha_n,\beta_n}((t-x)^2;x)}$$

seçilirse

$$\left|L_n^{\alpha_n,\beta_n}(f;x)-f(x)\right|\leq 2w\left(f;\sqrt{\delta_n(x)}\right)$$

bulunur.

Şimdi $L_n^{\alpha_n,\beta_n}$ için Voronovskaja tip teoremi aşağıda verelim.

3.1.5. Teorem

$f\in C_E^2[0,\infty)$ ve $\forall x\in[0,a]$ için

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n\left[L_n^{\alpha_n,\beta_n}(f;x)-f(x)\right]=\frac{2A'(1)+1}{2A(1)}f'(x)+\frac{1}{2}\frac{2A'(1)-1}{A(1)}xf''(x)$$

gerçeklenir, burada $C_E^2[0,\infty)=\{f: f,f',f''\in C_E[0,\infty)\}$ dir.

İspat

$x\geq 0$ olsun. Taylor formülünden

$$f(t)-f(x)=(t-x)f'(x)+\frac{1}{2}(t-x)^2f''(x)+h(t,x)(t-x)^2 \tag{3.1}$$

yazabiliriz, öyleki $h(t,x)\in C_E[0,\infty)$ için $\lim_{t\to x}h(t,x)=0$ dır. Eş. (3.1) eşitliğinin her iki tarafına $L_n^{\alpha_n,\beta_n}$ operatörü uygulanıp α_n ile çarpılırsa

$$\alpha_n \left[L_n^{\alpha_n,\beta_n}(f;x) - f(x)\right]$$

$$= \alpha_n f^{\shortmid}(x) L_n^{\alpha_n,\beta_n}\left((t-x);x\right) + \alpha_n \tfrac{1}{2} f^{\shortmid\shortmid}(x) L_n^{\alpha_n,\beta_n}\left((t-x)^2;x\right)$$

$$+\alpha_n L_n^{\alpha_n,\beta_n}\left(h(t,x)(t-x)^2;x\right)$$

Eş. (1.7), Eş. (1.11) ve Lemma 3.1.3 den

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n L_n^{\alpha_n,\beta_n}\left((t-x);x\right) = \frac{2A^{\shortmid}(1)+1}{2A(1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n L_n^{\alpha_n,\beta_n}\left((t-x)^2;x\right) = \frac{2A(1)-1}{A(1)}x$$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n L_n^{\alpha_n,\beta_n}\left((t-x)^4;x\right) = 3x^2$$

dir. Diğer yandan Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\alpha_n L_n^{\alpha_n,\beta_n}\left(h(t,x)(t-x)^2;x\right)$$

$$\leq \sqrt{L_n^{\alpha_n,\beta_n}\left(h^2(t,x);x\right)}\sqrt{\alpha_n^2 L_n^{\alpha_n,\beta_n}\left((t-x)^4;x\right)}$$

yazabiliriz. Ayrıca $h^2(t,x) \in C_E[0,\infty)$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} L_n^{\alpha_n,\beta_n}\left(h^2(t,x)\right) = h^2(x,x) = 0$$

olur. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n L_n^{\alpha_n,\beta_n}\left(h(t,x)(t-x)^2;x\right) = 0$$

bulunur.

O halde

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n \left[L_n^{\alpha_n,\beta_n}(f;x) - f(x)\right] = \frac{2A^{\shortmid}(1)+1}{2A(1)} f^{\shortmid}(x) + \frac{1}{2}\frac{2A^{\shortmid}(1)-1}{A(1)} x f^{\shortmid\shortmid}(x)$$

elde edilir.

3.1.6. Teorem

$f \in C_B\,[0,\infty)$ olsun. Bu durumda her $g \in C_B^2\,[0,\infty)$ için

$$\left|L_n^{\alpha_n,\beta_n}(f;x) - f(x)\right|$$

$$\leq 4K\left(f; P_n^{\alpha_n,\beta_n}(x)\right) + w\left(f; \sqrt{(a_n(x)-x)^2}\right)$$

$$\leq H_1\left\{w_2\left(f; \sqrt{P_n^{\alpha_n,\beta_n}(x)}\right) + \min\left(1, P_n^{\alpha_n,\beta_n}(x)\right)\|f\|_\infty\right\}$$

$$+w\left(f; \sqrt{(a_n(x)-x)^2}\right)$$

dir, burada $H_1 > 0$ bir sabit ve $P_n^{\alpha_n,\beta_n}(x) = \delta_n(x)^2 + (a_n(x)-x)^2$ ve $a_n(x) = \dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\dfrac{B^{\shortmid}(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)}x + \dfrac{1}{\beta_n}\dfrac{2A^{\shortmid}(1)+1}{2A(1)}$ olup $\delta_n(x)$ de Teorem 3.1.4 de tanımlandığı gibidir.

İspat

$f \in C_B\,[0,\infty)$ olmak üzere $\overline{L_n^{\alpha_n,\beta_n}}(f;x)$ yardımcı operatörünü aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$\overline{L_n^{\alpha_n,\beta_n}}(f;x) = L_n^{\alpha_n,\beta_n}(f;x) + f(x) - f\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\frac{B^{\shortmid}(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)}x + \frac{1}{\beta_n}\frac{2A^{\shortmid}(1)+1}{2A(1)}\right) \tag{3.2}$$

Lemma 3.1.3 den

$$\overline{L_n^{\alpha_n,\beta_n}}(1;x) = 1,\ \overline{L_n^{\alpha_n,\beta_n}}(t;x) = x \text{ ve } \overline{L_n^{\alpha_n,\beta_n}}((t-x);x) = 0$$

olur.

$g \in C_B^2\,[0,\infty)$ ve $x \in [0,\infty)$ için Taylor formülünden,

$$g(t) - g(x) = (t-x)g^{\shortmid}(x) + \int_x^t (t-u)g^{\shortmid\shortmid}(u)du$$

yazılır. $\overline{L_n^{\alpha_n,\beta_n}}$ operatörü yukarıdaki eşitliğin her iki yanına uygulanırsa;

$$\overline{L_n^{\alpha_n,\beta_n}}\,((g;x) - g(x))$$

$$= g^{\shortmid}(x)\overline{L_n^{\alpha_n,\beta_n}}\,((t-x);x) + \overline{L_n^{\alpha_n,\beta_n}}\left(\int_x^t (t-u)g^{\shortmid\shortmid}(u)du;x\right)$$

$$= L_n^{\alpha_n,\beta_n}\left(\int_x^t (t-u)\,g^{\shortmid\shortmid}(u);x\right) - \int_x^{a_n(x)} (a_n(x)-u)\,g^{\shortmid\shortmid}(u)du$$

elde edilir.

Buradan

$$\left|\overline{L_n^{\alpha_n,\beta_n}}\,(g;x) - g(x)\right|$$

$$\leq L_n^{\alpha_n,\beta_n}\left(\left|\int_x^t |t-u|\,|g^{\shortmid\shortmid}(u)|\,du\right|;x\right)$$

$$+\left|\int_x^{\frac{\alpha_n}{\beta_n}\frac{B^{\shortmid}(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)}x+\frac{1}{\beta_n}\frac{2A^{\shortmid}(1)+1}{2A(1)}} |a_n(x)-u|\,|g^{\shortmid\shortmid}(u)|\,du\right|$$

$$\leq \|g^{\shortmid\shortmid}\|_\infty \left(L_n^{\alpha_n,\beta_n}\left((t-x)^2;x\right) + (a_n(x)-x)^2\right)$$

$$\leq \|g^{\shortmid\shortmid}\|_\infty \left(\delta_n(x)^2 + (a_n(x)-x)^2\right)$$

olup $P_n^{\alpha_n,\beta_n}(x) = \delta_n(x)^2 + (a_n(x)-x)^2$ seçilir ve $\|g\|_{C_B^2[0,\infty)} = \|g\|_\infty + \|g^{\shortmid}\|_\infty + \|g^{\shortmid\shortmid}\|_\infty$ eşitliği dikkate alınırsa

$$\left|\overline{L_n^{\alpha_n,\beta_n}}\,((g(t);x) - g(x))\right| \leq \|g\|_{C_B^2[0,\infty)}\,P_n^{\alpha_n,\beta_n}(x)$$

bulunur.

Diğer yandan $\overline{L_n^{\alpha_n,\beta_n}}$ operatörünün tanımdan ve Lemma 3.1.1 den

$$\left|\overline{L_n^{\alpha_n,\beta_n}}(f;x)\right|$$

$$= \left|L_n^{\alpha_n,\beta_n}(f;x) + f(x) - f(a_n(x))\right|$$

$$\leq \left|L_n^{\alpha_n,\beta_n}(f;x)\right| + |f(x)| + |f(a_n(x))|$$

$$\leq 3\|f\|_\infty \tag{3.3}$$

olur. Böylece $f \in C_B[0,\infty)$ ve $g \in C_B^2[0,\infty)$ için Eş. (3.2) ve Eş. (3.3) den

$$\left|L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n}(f;x) - f(x)\right|$$

$$\leq \left|\overline{L_n^{\alpha_n,\beta_n}}(f;x) - f(x) + f(a_n(x)) - f(x)\right|$$

$$\leq \left|\overline{L_n^{\alpha_n,\beta_n}}((f-g);x\right| + \left|\overline{L_n^{\alpha_n,\beta_n}}(g;x) - g(x)\right| + |f(x) - g(x)|$$

$$+ |f(x) - f(a_n(x))|$$

$$\leq 4\|f-g\|_\infty + \|g\|_{C_B^2(I)} P_n^{\alpha_n,\beta_n}(x) + w\left(\sqrt{(a_n(x)-x)^2}\right)$$

bulunur. Bu eşitsizliğin $g \in C_B^2[0,\infty)$ üzerinden her iki yanının infimumu alınırsa Peetre K-fonksiyoneli'nin tanımından

$$\left|L_n^{\alpha_n,\beta_n}(f;x) - f(x)\right|$$

$$\leq 4\inf_{g\in C_B^2(I)}\left\{\|f-g\| + \|g\|_{C_B^2(I)} P_n^{\alpha_n,\beta_n}(x)\right\}$$

$$+ w\left(f;\sqrt{(a_n(x)-x)^2}\right)$$

$$= 4K\left(f;P_n^{\alpha_n,\beta_n}(x)\right) + w\left(f;\sqrt{(a_n(x)-x)^2}\right)$$

$$\leq H_1 \left\{ w_2\left(f;\sqrt{P_n^{\alpha_n,\beta_n}(x)}\right) + \min\left(1, P_n^{\alpha_n,\beta_n}(x)\right)\|f\|_\infty \right\}$$

$$+w\left(f;\sqrt{\left(a_n(x)-x\right)^2}\right)$$

elde edilir.

4. İKİ DEĞİŞKENLİ BRENKE TİP POLİNOMLARI TABANLI SZÁSZ -KANTOROVİCH OPERATÖRLERİ

4.1. İki Değişkenli Brenke Tip Polinomları Tabanlı Szász-Kantorovich Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri

Bu bölümde, Brenke tip polinomları tabanlı Szász-Kantorovich operatörlerinin iki değişkenli bir genelleştirmesi tanımlanarak, bu operatörler için tam süreklilik modülü, kısmi süreklilik modülü, Lipschitz sınıfından fonksiyonlar ve Peetre K-fonksiyoneli yardımıyla yaklaşım derecesi hesaplanmıştır.

4.1.1. Tanım

$n, m \in \mathbb{N}$, $(x, y) \in I^2 = [0, \infty) \times [0, \infty)$ ve $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_m\}$ ve $\{\eta_m\}$ aşağıda verilen koşulları sağlayan pozitif artan diziler olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\beta_n} = 0, \qquad \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1 + O(\frac{1}{\beta_n}) \tag{4.1}$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{\eta_m} = 0, \qquad \frac{\gamma_m}{\eta_m} = 1 + O(\frac{1}{\eta_m})$$

Bu durumda

$${}_xL_n^{\alpha_n,\beta_n}(f; x, y) = \frac{\beta_n}{A(1)B(\alpha_n x)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\alpha_n x) \int_{\frac{k}{\beta_n}}^{\frac{k+1}{\beta_n}} f(t, y)dt,$$

$${}_yL_m^{\gamma_m,\eta_m}(f; x, y) = \frac{\eta_m}{A(1)B(\gamma_m y)} \sum_{j=0}^{\infty} p_j(\gamma_m y) \int_{\frac{j}{\eta_m}}^{\frac{j+1}{\eta_m}} f(x, s)ds$$

olmak üzere $L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(f; x, y)$ operatörü ${}_xL_n^{\alpha_n,\beta_n}(f; x, y)$ ve ${}_yL_m^{\gamma_m,\eta_m}(f; x, y)$ operatörlerinin

$$L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m} ={}_x L_n^{\alpha_n,\beta_n} \times_y L_m^{\gamma_m,\eta_m}$$

şeklinde bir tensörel çarpımıdır. Buna göre

$$L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(f;x,y)=\frac{\beta_n}{A(1)B(\alpha_n x)}\frac{\eta_m}{A(1)B(\gamma_m y)}$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p_k(\alpha_n x)p_j(\gamma_m y)\int\limits_{\frac{k}{\beta_n}}^{\frac{k+1}{\beta_n}}\int\limits_{\frac{j}{\eta_m}}^{\frac{j+1}{\eta_m}}f(t,s)dsdt \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlanan operatöre iki değişkenli Brenke polinomları tabanlı Szász-Kantorovich operatörü denir. Burada $p_k(\alpha_n x)$ ve $p_j(\gamma_m y)$, Eş. (1.5) eşitliği ile verilen Brenke taban polinomlarıdır.

4.1.2. Lemma

$(x,y)\in I^2$

$i)L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(1;x,y)=1$

$$ii)L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(t;x,y)=\frac{\alpha_n}{\beta_n}\frac{B'(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)}x+\frac{1}{\beta_n}\frac{2A'(1)+1}{2A(1)}$$

$$iii)L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(s;x,y)=\frac{\gamma_m}{\eta_m}\frac{B'(\gamma_m y)}{B(\gamma_m y)}y+\frac{1}{\eta_m}\frac{2A'(1)+1}{2A(1)}$$

$$iv)L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(t^2;x,y)=\frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2}\frac{B''(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)}x^2+\frac{2\alpha_n}{\beta_n^2}\frac{A'(1)+A(1)}{A(1)}\frac{B'(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)}x$$

$$+\frac{1}{3\beta_n^2}\frac{3A''(1)+6A'(1)+A(1)}{A(1)}$$

$$v)L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(s^2;x,y)=\frac{\gamma_m^2}{\eta_m^2}\frac{B''(\gamma_m y)}{B(\gamma_m y)}y^2+\frac{2\gamma_m}{\eta_m^2}\frac{A'(1)+A(1)}{A(1)}\frac{B'(\gamma_m y)}{B(\gamma_m y)}y$$

$$+\frac{1}{3\eta_m^2}\frac{3A''(1)+6A'(1)+A(1)}{A(1)}$$

$$vi)L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(t^3;x,y)=\frac{\alpha_n^3}{\beta_n^3}\frac{B'''(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)}x^3+\frac{3\alpha_n^2}{\beta_n^3}\frac{2A'(1)+3A(1)}{A(1)}\frac{B''(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)}x^2$$

$$+\frac{\alpha_n}{2\beta_n^3}\frac{6A''(1)+18A'(1)+7A(1)}{A(1)}\frac{B'(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)}x+\frac{1}{4\beta_n^3}\frac{4A'''(1)+16A''(1)+12A'(1)+A(1)}{A(1)}$$

$$vii)L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(s^3;x,y)=\frac{\gamma_m^3}{\eta_m^3}\frac{B'''(\gamma_m y)}{B(\gamma_m y)}y^3+\frac{3\gamma_m^2}{\eta_m^3}\frac{2A'(1)+3A(1)}{A(1)}\frac{B''(\gamma_m y)}{B(\gamma_m y)}y^2$$

$$+\frac{\gamma_m}{2\eta_m^3}\frac{6A''(1)+18A'(1)+7A(1)}{A(1)}\frac{B'(\gamma_m y)}{B(\gamma_m y)}y+\frac{1}{4\eta_m^3}\frac{4A'''(1)+16A''(1)+12A'(1)+A(1)}{A(1)}$$

$$viii)L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(t^4;x,y)=\frac{\alpha_n^4}{\beta_n^4}\frac{B^{(4)}(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)}x^4+\frac{4\alpha_n^3}{\beta_n^4}\frac{A'(1)+2A(1)}{A(1)}\frac{B'''(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)}x^3$$

$$+\frac{3\alpha_n^2}{2\beta_n^4}\frac{2A''(1)+8A'(1)+5A(1)}{A(1)}\frac{B''(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)}x^2$$

$$+\frac{\alpha_n}{\beta_n^4}\frac{4A'''(1)+24A''(1)+30A'(1)+6A(1)}{A(1)}\frac{B'(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)}x$$

$$+\frac{1}{\beta_n^4}\frac{5A^{(4)}(1)+40A'''(1)+75A''(1)+30A'(1)+A(1)}{A(1)}$$

$$ix)L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(s^4;x,y)=\frac{\gamma_m^4}{\eta_m^4}\frac{B^{(4)}(\gamma_m y)}{B(\gamma_m y)}y^4+\frac{4\gamma_m^3}{\eta_m^4}\frac{A'(1)+2A(1)}{A(1)}\frac{B'''(\gamma_m y)}{B(\gamma_m y)}y^3$$

$$+\frac{3\gamma_m^2}{2\eta_m^4}\frac{2A''(1)+8A'(1)+5A(1)}{A(1)}\frac{B''(\gamma_m y)}{B(\gamma_m y)}y^2$$

$$+\frac{\gamma_m}{\gamma_m^4}\frac{4A'''(1)+24A''(1)+30A'(1)+6A(1)}{A(1)}\frac{B'(\gamma_m y)}{B(\gamma_m y)}y$$

$$+\frac{1}{\eta_n^4}\frac{5A^{(4)}(1)+40A'''(1)+75A''(1)+30A'(1)+A(1)}{A(1)}$$

İspat

İki değişkenli bir operatör için doğrucu fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$A(t)B(xt)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k(x)t^k \tag{4.3}$$

$$A(s)B(ys) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(y)s^j \tag{4.4}$$

$i)$ Eş. (4.3) de $t = 1$ ve x yerine $\alpha_n x$ alırsak

$$A(1)B(\alpha_n x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\alpha_n x) \tag{4.5}$$

ve benzer şekilde Eş. (4.4) de $s = 1$ ve y yerine $\gamma_m y$ alırsak

$$A(1)B(\gamma_m) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(\gamma_m y) \tag{4.6}$$

elde ederiz.

$$L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(1; x, y)$$

$$= \frac{\beta_n}{A(1)B(\alpha_n x)} \frac{\eta_m}{A(1)B(\gamma_m y)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_k(\alpha_n x) p_j(\gamma_m y) \int_{\frac{k}{\beta_n}}^{\frac{k+1}{\beta_n}} \int_{\frac{j}{\eta_m}}^{\frac{j+1}{\eta_m}} dsdt$$

$$= \frac{\beta_n}{A(1)B(\alpha_n x)} \frac{\eta_m}{A(1)B(\gamma_m y)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_k(\alpha_n x) p_j(\gamma_m y) \int_{\frac{k}{\beta_n}}^{\frac{k+1}{\beta_n}} \left(\frac{j+1}{\eta_m} - \frac{j}{\eta_m} \right) dt$$

$$= \frac{\beta_n}{A(1)B(\alpha_n x)} \frac{\eta_m}{A(1)B(\gamma_m y)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_k(\alpha_n x) p_j(\gamma_m y) \frac{1}{\eta_m} \frac{1}{\beta_n}$$

bulunur. Böylece Eş. (4.5) ve Eş. (4.6) eşitliklerinden

$$L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(1; x, y)$$

$$= \frac{\beta_n}{A(1)B(\alpha_n x)} \frac{\eta_m}{A(1)B(\gamma_m y)} \frac{1}{\eta_m} \frac{1}{\beta_n} A(1)B(\alpha_n x) A(1)B(\gamma_m y)$$

$$L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(1; x, y) = 1$$

elde edilir.

$ii)$ Eş. (4.3) ifadesinin t ye göre türevinden

$$A^{'}(t)B(xt) + xA(t)B^{'}(xt) = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k(x)t^{k-1} \tag{4.7}$$

olur. Eş. (4.7) eşitliğinde $t = 1$ ve x yerine $\alpha_n x$ alınırsa

$$A^{'}(1)B(\alpha_n x) + \alpha_n x A(1)B^{'}(\alpha_n x) = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k(\alpha_n x) \tag{4.8}$$

bulunur.

$$L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(t; x, y)$$

$$= \frac{\beta_n}{A(1)B(\alpha_n x)} \frac{\eta_m}{A(1)B(\gamma_m y)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_k(\alpha_n x)p_j(\gamma_m y) \int_{\frac{k}{\beta_n}}^{\frac{k+1}{\beta_n}} \int_{\frac{j}{\eta_m}}^{\frac{j+1}{\eta_m}} tdsdt$$

$$= \frac{\beta_n}{A(1)B(\alpha_n x)} \frac{\eta_m}{A(1)B(\gamma_m y)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_k(\alpha_n x)p_j(\gamma_m y) \int_{\frac{k}{\beta_n}}^{\frac{k+1}{\beta_n}} t\frac{1}{\eta_m}dt$$

$$= \frac{\beta_n}{A(1)B(\alpha_n x)} \frac{\eta_m}{A(1)B(\gamma_m y)}$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_k(\alpha_n x)p_j(\gamma_m y) \frac{1}{2\eta_m} \left[\frac{(k+1)^2}{\beta_n^2} - \frac{k^2}{\beta_n^2} \right]$$

$$= \frac{\beta_n}{A(1)B(\alpha_n x)} \frac{\eta_m}{A(1)B(\gamma_m y)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_k(\alpha_n x)p_j(\gamma_m y) \frac{1}{2\eta_m} \frac{2k+1}{\beta_n^2}$$

$$= \frac{\beta_n}{A(1)B(\alpha_n x)} \frac{\eta_m}{A(1)B(\gamma_m y)} \frac{1}{2\eta_m \beta_n^2}$$

$$\times \left[2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} kp_k(\alpha_n x)p_j(\gamma_m y) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_k(\alpha_n x)p_j(\gamma_m y) \right]$$

olup Eş. (4.5), Eş. (4.6) ve Eş. (4.8) den

$$L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(t; x, y) = \frac{\alpha_n}{\beta_n} \frac{B^{'}(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)} x + \frac{1}{\beta_n} \frac{2A^{'}(1) + 1}{2A(1)}$$

elde edilir.

iii) Eş. (4.4) ifadesinin s ye göre türevi;

$$A^{'}(s)B(ys)+yA(s)B^{'}(ys)=\sum_{j=0}^{\infty}jp_j(y)s^{j-1} \tag{4.9}$$

dir. Eş. (4.9) eşitliğinde $s=1$ ve y yerine $\gamma_m y$ yazıldığında;

$$A^{'}(1)B(\gamma_m y)+\gamma_m yA(1)B^{'}(\gamma_m y)=\sum_{j=0}^{\infty}jp_j(y) \tag{4.10}$$

olur.

$$L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(s;x,y)$$

$$=\frac{\beta_n}{A(1)B(\alpha_n x)}\frac{\eta_m}{A(1)B(\gamma_m y)}$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p_k(\alpha_n x)p_j(\gamma_m y)\int_{\frac{k}{\beta_n}}^{\frac{k+1}{\beta_n}}\int_{\frac{j}{\eta_m}}^{\frac{j+1}{\eta_m}}sdsdt$$

$$=\frac{\beta_n}{A(1)B(\alpha_n x)}\frac{\eta_m}{A(1)B(\gamma_m y)}$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p_k(\alpha_n x)p_j(\gamma_m y)\int_{\frac{k}{\beta_n}}^{\frac{k+1}{\beta_n}}\frac{2j+1}{2\eta_m^2}dt$$

$$=\frac{\beta_n}{A(1)B(\alpha_n x)}\frac{\eta_m}{A(1)B(\gamma_m y)}$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p_k(\alpha_n x)p_j(\gamma_m y)\frac{2j+1}{2\eta_m^2\beta_n}$$

$$=\frac{\beta_n}{A(1)B(\alpha_n x)}\frac{\eta_m}{A(1)B(\gamma_m y)}\frac{1}{2\eta_m^2\beta_n}$$

$$\times\left[2\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}jp_k(\alpha_n x)p_j(\gamma_m y)+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p_k(\alpha_n x)p_j(\gamma_m y)\right]$$

olup Eş. (4.5), Eş. (4.6) ve Eş. (4.10) den

$$L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(s;x,y) = \frac{\gamma_m}{\eta_m}\frac{B'(\gamma_m y)}{B(\gamma_m y)}y + \frac{1}{\eta_m}\frac{2A'(1)+1}{2A(1)}$$

elde edilir.

$iv)$ Eş. (4.7) ifadesinin t ye göre türevi;

$$A''(t)B(xt) + 2xA'(t)B'(xt) + x^2A'(t)B''(xt) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)p_k(x)t^{k-2} \tag{4.11}$$

dir. Eş. (4.11) eşitliğinde $t = 1$ ve x yerine $\alpha_n x$ yazıldığında;

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k(x) \\
&= A''(1)B(\alpha_n x) + 2\alpha_n x A'(1)B'(\alpha_n x) + \alpha_n^2 x^2 A'(1)B''(\alpha_n x) \\
&+A'(1)B(\alpha_n x) + A(1)\alpha_n x B'(\alpha_n x)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

olur.

$$\begin{aligned}
&L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(t^2;x,y) \\
&= \frac{\beta_n}{A(1)B(\alpha_n x)}\frac{\eta_m}{A(1)B(\gamma_m y)} \\
&\times \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} p_k(\alpha_n x)p_j(\gamma_m y) \int_{\frac{k}{\beta_n}}^{\frac{k+1}{\beta_n}} \int_{\frac{j}{\eta_m}}^{\frac{j+1}{\eta_m}} t^2 ds dt \\
&= \frac{\beta_n}{A(1)B(\alpha_n x)}\frac{\eta_m}{A(1)B(\gamma_m y)} \\
&\times \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} p_k(\alpha_n x)p_j(\gamma_m y) \int_{\frac{k}{\beta_n}}^{\frac{k+1}{\beta_n}} t^2 \frac{j}{\eta_m} dt
\end{aligned}$$

$$= \frac{\beta_n}{A(1)B(\alpha_n x)} \frac{\eta_m}{A(1)B(\gamma_m y)}$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_k(\alpha_n x) p_j(\gamma_m y) \frac{j}{3\eta_m \beta_n^3} \left[3k^2 + 3k + 1\right]$$

olup Eş. (4.5), Eş. (4.6), Eş. (4.8) ve Eş. (4.12) den

$$L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(t^2; x, y)$$

$$= \frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2} \frac{B''(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)} x^2 + \frac{2\alpha_n}{\beta_n^2} \frac{A'(1) + A(1)}{A(1)} \frac{B'(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)} x$$

$$+ \frac{1}{3\beta_n^2} \frac{3A''(1) + 6A'(1) + A(1)}{A(1)}$$

elde edilir.

v) Eş. (4.9) ifadesinin s ye göre türevi;

$$A''(s)B(ys) + 2yA'(s)B'(ys) + y^2 A'(s)B''(ys) = \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1)p_j(y)s^{j-2} \tag{4.13}$$

dir. Eş. (4.13) eşitliğinde $s = 1$ ve y yerine $\gamma_m y$ yazıldığında;

$$\sum_{j=0}^{\infty} j^2 p_j(y)$$

$$= A''(1)B(\gamma_m y) + 2\gamma_m y A'(1)B'(\gamma_m y) + \gamma_m^2 y^2 A'(1)B''(\gamma_m y)$$

$$+ A'(1)B(\gamma_m y) + A(1)\gamma_m y B'(\gamma_m y) \tag{4.14}$$

olur.

$$L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(s^2; x, y)$$

$$= \frac{\beta_n}{A(1)B(\alpha_n x)} \frac{\eta_m}{A(1)B(\gamma_m y)}$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_k(\alpha_n x) p_j(\gamma_m y) \int\limits_{\frac{k}{\beta_n}}^{\frac{k+1}{\beta_n}} \int\limits_{\frac{j}{\eta_m}}^{\frac{j+1}{\eta_m}} s^2 ds dt$$

$$= \frac{\beta_n}{A(1)B(\alpha_n x)} \frac{\eta_m}{A(1)B(\gamma_m y)} \frac{1}{3\eta_m^3}$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_k(\alpha_n x) p_j(\gamma_m y) \int\limits_{\frac{k}{\beta_n}}^{\frac{k+1}{\beta_n}} \left(3j^2 + 3j + 1\right) dt$$

$$= \frac{\beta_n}{A(1)B(\alpha_n x)} \frac{\eta_m}{A(1)B(\gamma_m y)}$$

$$\times \frac{1}{3\eta_m^3 \beta_n} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_k(\alpha_n x) p_j(\gamma_m y) \left(3j^2 + 3j + 1\right)$$

olup Eş. (4.5), Eş. (4.6), Eş. (4.10) ve Eş. (4.14) den

$$L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(s^2; x, y) = \frac{\gamma_m^2}{\eta_m^2} \frac{B''(\gamma_m y)}{B(\gamma_m y)} y^2 + \frac{2\gamma_m}{\eta_m^2} \frac{A'(1) + A(1)}{A(1)} \frac{B'(\gamma_m y)}{B(\gamma_m y)} y$$

$$+ \frac{1}{3\eta_m^2} \frac{3A''(1) + 6A'(1) + A(1)}{A(1)}$$

elde edilir.

4.1.3. Lemma

$(x, y) \in I^{\,2}$

$$i) L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}((t - x); x, y) = \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n} \frac{B'(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)} - 1\right) x + \frac{1}{\beta_n} \frac{2A'(1) + 1}{2A(1)}$$

$$ii) L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}((s - y); x, y) = \left(\frac{\gamma_m}{\eta_m} \frac{B'(\gamma_m y)}{B(\gamma_m y)} - 1\right) y + \frac{1}{\eta_m} \frac{2A'(1) + 1}{2A(1)}$$

$$iii) L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}((t - x)^2; x, y) = \left(\frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2} \frac{B''(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)} - \frac{2\alpha_n}{\beta_n} \frac{B'(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)} + 1\right) x^2$$

$$+ \left(\frac{2\alpha_n}{\beta_n^2} \frac{A'(1) + A(1)}{A(1)} \frac{B'(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)} - \frac{1}{\beta_n} \frac{2A'(1) + 1}{A(1)}\right) x$$

$$+\frac{1}{3\beta_n^2}\frac{3A''(1)+6A'(1)+A(1)}{A(1)}$$

$$iv) L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}((s-y)^2;x,y) = \left(\frac{\gamma_m^2}{\eta_m^2}\frac{B''(\gamma_m y)}{B(\gamma_m y)} - \frac{2\gamma_m}{\eta_m}\frac{B'(\gamma_m y)}{B(\gamma_m y)} + 1\right)y^2$$

$$+\left(\frac{2\gamma_m}{\eta_m^2}\frac{A'(1)+A(1)}{A(1)}\frac{B'(\gamma_m y)}{B(\gamma_m y)} - \frac{1}{\eta_m}\frac{2A'(1)+1}{A(1)}\right)y$$

$$+\frac{1}{3\eta_m^2}\frac{3A''(1)+6A'(1)+A(1)}{A(1)}$$

dir.

İspat

$i)$ $L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}$ operatörünün lineerlik özelliğinden

$$L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}((t-x);x,y) = L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(t;x,y) - xL_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(1;x,y)$$

Lemma 4.1.2 (i) ve (ii) den

$$L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}((t-x);x,y) = \frac{\alpha_n}{\beta_n}\frac{B'(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)}x + \frac{1}{\beta_n}\frac{2A'(1)+1}{2A(1)} - x$$

$$= \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\frac{B'(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)} - 1\right)x + \frac{1}{\beta_n}\frac{2A'(1)+1}{2A(1)}$$

olarak bulunur.

$ii)$ (i) dekine benzer şekilde elde edilir.

$$iii) L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}((t-x)^2;x,y)$$

$$= L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(t^2;x,y) - 2xL_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(t;x,y) + x^2L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(1;x,y)$$

olup Lemma 4.1.2, (i), (ii) ve (iv) den ispat elde edilir.

$iv)$ (iii) dekine benzer şekilde elde edilir.

4.1.4. Tanım

$f \in C_B(I^2) = \{f : f : I^2 \to \mathbb{R}$ sınırlı ve sürekli$\}$ ve $\delta > 0$ olsun. İki değişkenli fonksiyonlar için tam süreklilik modülü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\omega(f;\delta) = \sup_{\substack{(t,s),(x,y)\in I^2 \\ \phi(t,s,x,y)\leq\delta}} |f(t,s) - f(x,y)|$$

burada

$$\phi(t,s,x,y) = \sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2}$$

dir.

x ve y değişkenlerine göre kısmi süreklilik modülleri ise

$$\omega_1(f;\delta) = \sup\left\{|f(x_1,y) - f(x_2,y)| : y \in [0,\infty) \text{ ve } |x_1 - x_2| \leq \delta\right\}$$

$$\omega_2(f;\delta) = \sup\left\{|f(x,y_1) - f(x,y_2)| : x \in [0,\infty) \text{ ve } |y_1 - y_2| \leq \delta\right\}$$

şeklinde tanımlanır [4].

Tam süreklilik modülü ve kısmi süreklilik modülü, süreklilik modülü ile aynı özelliklere sahiptir.

4.1.5. Teorem

$f \in C_B(I^2) \cap F$ ve $(x,y) \in I^2$ için

$$\left|L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(f;x,y) - f(x,y)\right| \leq 2w\left(f;\delta_{n,m}\left(x,y\right)\right)$$

olur. Burada

$\delta=(\delta_{n,m}(x,y))$, $(\delta_{n,m}(x,y))=\{\delta_n^2(x)+\delta_m^2(y)\}^{1/2}$, $\delta_n(x)=\left(L_n^{\alpha_n,\beta_n}((t-x)^2;x)\right)^{1/2}$ ve $\delta_m(y)=(L_m^{\gamma_m,\eta_m}((s-y)^2;y))^{1/2}$

dir. Ayrıca

$$F=\left\{f:|f(x,y)|\leq Me^{\lambda(x+y)},M>0,\lambda\in\mathbb{R}\right\}.$$

İspat

$L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}$ operatörünün lineer pozitifliğinden ve tam süreklilik modülünün tanımından

$$\left|L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(f;x,y)-f(x,y)\right|$$

$$\leq L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(|f(t,s)-f(x,y)|;x,y)$$

$$\leq L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}\left(\omega\left(f;\phi\left(t,s,x,y\right)\right);x,y\right)$$

$$\leq\omega\left(f;\delta\right)\left\{1+\frac{1}{\delta}\left[L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}\left(\phi\left(t,s,x,y\right);x,y\right)\right]\right\}$$

dir. Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve Lemma 4.1.3 den

$$\left|L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(f;x,y)-f(x,y)\right|$$

$$\leq\omega\left(f;\delta\right)\left\{1+\frac{1}{\delta}\left[L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}\left(\phi^2\left(t,s,x,y\right);x,y\right)\right]^{1/2}\right\}$$

$$=\omega\left(f;\delta\right)\left\{1+\frac{1}{\delta}\left[L_n^{\alpha_n,\beta_n}\left(\left(t-x\right)^2;x\right)+L_m^{\gamma_m,\eta_m}\left(\left(s-y\right)^2;y\right)\right]^{1/2}\right\}$$

elde edilir. $\delta_n(x)$ ve $\delta_m(y)$ hipotezde verildiği gibi seçilir ve

$$\delta=\left(\delta_{n,m}\left(x,y\right)\right),\ \delta_{n,m}\left(x,y\right)=\left\{\delta_n^2\left(x\right)+\delta_m^2\left(y\right)\right\}^{1/2}$$

alınırsa

$$\left|L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(f;x,y)-f(x,y)\right|\leq 2w\left(f;\delta_{n,m}\left(x,y\right)\right)$$

bulunur.

4.1.6. Teorem

$f\in C_B(I^2)\cap F$ için

$$\left|L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(f;x,y)-f(x,y)\right|\leq 2(\omega_1(f;\delta_n(x))+\omega_2(f;\delta_m(y)))$$

Burada $\delta_1=(\delta_n(x))$, $\delta_2=(\delta_m(y))$, Teorem 4.1.5 de tanımlandığı gibidir.

İspat

$L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}$ operatörünün lineer pozitifliğinden ve kısmi süreklilik modülünün tanımından

$$\left|L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(f;x,y)-f(x,y)\right|$$

$$\leq L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(\left|f(t,s)-f(x,y)\right|;x,y)$$

$$\leq L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(\left|f(t,s)-f(x,s)\right|;x,y)+L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(\left|f(x,s)-f(x,y)\right|;x,y)$$

$$\leq L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(\omega_1(f;|t-x|);x,y)+L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(\omega_2(f;|s-y|);x,y)$$

$$\leq \omega_1(f;\delta_1)\left[1+\tfrac{1}{\delta_1}L_n^{\alpha_n,\beta_n}(\left|t-x\right|;x)\right]+\omega_2(f;\delta_2)\left[1+\tfrac{1}{\delta_2}L_m^{\gamma_m,\eta_m}(\left|s-y\right|;y)\right]$$

olur. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\left|L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(f;x,y)-f(x,y)\right|$$

$$\leq \omega_1(f;\delta_1)\left[1+\tfrac{1}{\delta_1}\left(L_n^{\alpha_n,\beta_n}((t-x)^2;x)\right)^{1/2}\right]$$

$$+\omega_2(f;\delta_2)\left[1+\tfrac{1}{\delta_2}\left(L_m^{\gamma_m,\eta_m}((s-y)^2;y)\right)^{1/2}\right]$$

bulunur. δ_1 ve δ_2 Teorem 4.1.5 de verildiği gibi seçilirse ispat tamamlanır.

4.1.7. Tanım

$(\zeta_1, \zeta_2) \in (0,1]$ ve $f \in C(I^2)$ olsun. Eğer

$$|f(t,s) - f(x,y)| \leq N\,|t-x|^{\zeta_1}\,|s-y|^{\zeta_2}$$

koşulu sağlanacak şekilde bir $N > 0$ sabiti varsa f fonksiyonu Lipschitz sınıfındandır denir ve $f \in Lip_N(\zeta_1, \zeta_2)$ ile gösterilir.

4.1.8. Teorem

$f \in Lip_N(\zeta_1, \zeta_2)$ ise

$$\left|L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(f;x,y) - f(x,y)\right| \leq N\delta_n^{\zeta_1}(x)\delta_m^{\zeta_2}(y)$$

dir, burada $\delta_n(x)$ ve $\delta_m(y)$ Teorem 4.1.5 de tanımlandığı gibidir.

İspat

$f \in Lip_N(\zeta_1, \zeta_2)$ için

$$\left|L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(f;x,y) - f(x,y)\right|$$

$$\leq L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(|f(t,s) - f(x,y)|\,;x,y)$$

$$\leq L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(N\,|t-x|^{\zeta_1}\,|s-y|^{\zeta_2}\,;x,y)$$

$$= NL_n^{\alpha_n,\beta_n}(|t-x|^{\zeta_1}\,;x)L_m^{\gamma_m,\eta_m}(|s-y|^{\zeta_2}\,;y).$$

olur.

$p_1 = \frac{2}{\zeta_1}, q_1 = \frac{2}{2-\zeta_1}$ ve $p_2 = \frac{2}{\zeta_2}, q_2 = \frac{2}{2-\zeta_2}$ için Hölder eşitsizliği ve Lemma 4.1.3 den

$$\left|L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(f;x,y)-f(x,y)\right|$$

$$\leq N\left(L_n^{\alpha_n,\beta_n}\left((t-x)^2;x\right)\right)^{\frac{\zeta_1}{2}}\left(L_n^{\alpha_n,\beta_n}(1;x)\right)^{\frac{2-\zeta_1}{2}}\left(L_m^{\gamma_m,\eta_m}((s-y)^2;y)\right)^{\frac{\zeta_2}{2}}\left(L_m^{\gamma_m,\eta_m}(1;y)\right)^{\frac{2-\zeta_2}{2}}$$

$$=N\delta_n^{\zeta_1}(x)\delta_m^{\zeta_2}(y)$$

elde edilir.

4.1.9. Tanım

$f^{(p,q)}$, x ve y değişkenlerine göre f fonksiyonunun (p,q). mertebeden kısmi türevlerini göstermek üzere

$$C_B^2(I^2)=\left\{f\in C_B(I^2):f^{(p,q)}\in C_B(I^2),1\leq p,q\leq 2\right\}$$

uzayı

$$\|f\|_{C_B^2(I^2)}=\|f\|_{C_B(I^2)}+\sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial^i f}{\partial x^i}\right\|_{C_B(I^2)}+\sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial^i f}{\partial y^i}\right\|_{C_B(I^2)}$$

normu ile bir normlu uzaydır. $f\in C_B(I^2)$ fonksiyonunun Peetre's K-fonksiyoneli

$$K(f;\delta)=\inf_{g\in C_B^2(I^2)}\left\{\|f-g\|_{C_B(I^2)}+\delta\|g\|_{C_B^2(I^2)},\ \delta>0\right\}$$

şeklinde tanımlanır ve $\delta>0$ için

$$K(f;\delta)\leq H\left\{\omega_2(f;\sqrt{\delta})+\min(1,\delta)\|f\|_{C_B(I^2))}\right\} \tag{4.15}$$

dir [14]. Burada H, δ ve f den bağımsız pozitif bir sabit olup $\omega_2(f;\delta)$ ise

$$w_2(f;\delta)=\sup_{\sqrt{t^2+s^2}\leq\delta}\left\|\sum_{j=0}^{2}(-1)^{2-j}\begin{pmatrix}2\\ j\end{pmatrix}f\left(x+jt,y+js\right)\right\|_{c_B(I^2)}$$

şeklinde tanımlanan ikinci süreklilik modülüdür [15].

Şimdi, Peetre's K-fonksiyoneli yardımıyla $L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(f;x,y)$ operatörünün yakınsama oranını verelim.

4.1.10. Teorem

$f \in C_B(I^2)$ için

$$\left|L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(f;x,y) - f(x,y)\right|$$

$$\leq H\left\{\omega_2(f;\sqrt{A_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(f;x,y)})\right.$$

$$\left.+\min(1, A_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(x,y))\,\|f\|_{C_B^2(I)}\right\}$$

$$+\omega\left(f;\sqrt{(a_n\,(x)-x)^2-(b_m\,(y)-y)^2}\right)$$

dir, burada $A_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(x,y) = (\delta_n(x))^2 + (\delta_m(y))^2 + (a_n(x)-x)^2 + (b_m(y)-y)^2$, $a_n(x) = \dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\dfrac{B^{\shortmid}(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)}x + \dfrac{1}{\beta_n}\dfrac{2A^{\shortmid}(1)+1}{2A(1)}$, $b_m(y) = \dfrac{\gamma_m}{\eta_m}\dfrac{B^{\shortmid}(\gamma_m y)}{B(\gamma_m y)}y + \dfrac{1}{\eta_m}\dfrac{2A^{\shortmid}(1)+1}{2A(1)}$ olup $\delta_n(x)$ ve $\delta_m(y)$ Teorem 4.1.5 de tanımlandığı gibidir.

İspat

Öncelikle yardımcı operatörümüzü tanımlayalım.

$$\overline{L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}}(f;x,y) = L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(f;x,y) + f(x,y) - f(a_n(x), b_m(y)).$$

Lemma 4.1.2 den

$$\overline{L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}}(1;x,y) = 1,$$

$$\overline{L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}}((t-x);x,y) = 0,$$

$$\overline{L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}}((s-y);x,y) = 0$$

dir.

$g \in C_B^2(I^2)$ ve $(t,s) \in I^2$ için Taylor formülünden

$$g(t,s) - g(x,y)$$

$$= \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}(t-x) + \int\limits_x^t (t-u)\frac{\partial^2 g(u,y)}{\partial u^2}du$$

$$+\tfrac{\partial g(x,y)}{\partial y}(s-y) + \int\limits_y^s (s-v)\frac{\partial^2 g(x,v)}{\partial v^2}dv.$$

olur.

Bu eşitliğin her iki tarafına $\overline{L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}}$ operatörünü uygulayalım:

$$\overline{L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}}(g;x,y) - g(x,y)$$

$$= \overline{L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}}(\int\limits_x^t (t-u)\tfrac{\partial^2 g(u,y)}{\partial u^2}du \ ;x,y)$$

$$+\overline{L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}}(\int\limits_y^s (s-v)\tfrac{\partial^2 g(x,v)}{\partial v^2}dv \ ;x,y)$$

$$= L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(\int\limits_x^t (t-u)\tfrac{\partial^2 g(u,y)}{\partial u^2}du \ ;x,y)$$

$$- \int\limits_x^{a_n(x)} (a_n(x)-u)\ \tfrac{\partial^2 g(u,y)}{\partial u^2}du$$

$$+L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(\int\limits_y^s (s-v)\tfrac{\partial^2 g(x,v)}{\partial v^2}dv \ ;x,y)$$

$$- \int\limits_y^{b_m(y)} (b_m(y)-v)\ \tfrac{\partial^2 g(x,v)}{\partial v^2}dv.$$

Böylece

$$\left|\overline{L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}}(g;x,y) - g(x,y)\right|$$

$$\leq L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}\left(\left|\int_x^t |t-u|\left|\frac{\partial^2 g(u,y)}{\partial u^2}\right| du\right|;x,y\right)$$

$$+\left|\int_x^{a_n(x)} |a_n(x)-u|\left|\frac{\partial^2 g(u,y)}{\partial u^2}\right| du\right|$$

$$+L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}\left(\left|\int_y^s |s-v|\left|\frac{\partial^2 g(v,x)}{\partial v^2}\right| dv\right|;x,y\right)$$

$$+\left|\int_y^{b_m(y)} |b_m(y)-v|\left|\frac{\partial^2 g(v,x)}{\partial v^2}\right| dv\right|$$

$$\leq \left\{\delta_n^2(x)+(a_n(x)-x)^2\right\}\|g\|_{C_B^2(I^2)}$$

$$+\left\{\delta_m^2(y)+(b_m(y)-y)^2\right\}\|g\|_{C_B^2(I^2)}.$$

elde edilir.

$$A_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(x,y)=\delta_n^2(x)+\delta_m^2(y)+(a_n(x)-x)^2+(b_m(y)-y)^2$$

seçilirse

$$\left|\overline{L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}}(g;x,y)-g(x,y)\right|\leq A_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(x,y)\|g\|_{C_B^2(I^2)}. \tag{4.16}$$

bulunur. Diğer yandan

$$\left|\overline{L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}}(f;x,y)\right|$$

$$\leq \left|L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(f;x,y)\right|+|f(x,y)|+|f(a_n(x),b_m(y))|$$

$$\leq 3\|f\|_{C_B(I^2)}. \tag{4.17}$$

olur. Eş. (4.16), Eş. (4.17) ve tam süreklilik modülünün tanımından

$$\left|L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(f;x,y)-f(x,y)\right|$$

$$\leq \left|\overline{L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}}(f-g;x,y)\right| + |f(x,y)-g(x,y)|$$

$$+\left|\overline{L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}}(g;x,y)-g(x,y)\right| + |f(a_n(x),b_m(y))-f(x,y)|$$

$$\leq 4\left\|f-g\right\|_{C_B(I^2)} + A_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(x,y)\left\|g\right\|_{C_B^2(I^2)}$$

$$+\omega\left(f;\sqrt{\left(a_n\left(x\right)-x\right)^2-\left(b_m\left(y\right)-y\right)^2}\right)$$

elde edilir.

Eşitliğin her iki yanının $g \in C_B^2(I^2)$ üzerinden infimumu alınırsa, Peetre K fonksiyonelinin tanımından ve Eş. (4.15) den

$$\left|L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(f;x,y)-f(x,y)\right|$$

$$\leq 4\inf_{g\in C_B^2(I^2)}\left\{\left\|f-g\right\|_{C_B(I^2)} + A_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(x,y)\left\|g\right\|_{C_B^2(I^2)}\right\}$$

$$+\omega\left(f;\sqrt{\left(a_n\left(x\right)-x\right)^2-\left(b_m\left(y\right)-y\right)^2}\right)$$

$$=4K\left(f;A_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(x,y)\right)$$

$$+\omega\left(f;\sqrt{\left(a_n\left(x\right)-x\right)^2-\left(b_m\left(y\right)-y\right)^2}\right)$$

$$\leq H\left\{\omega_2\left(f;\sqrt{A_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(x,y)}+\min\left(1,A_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(x,y)\right)\right)\left\|f\right\|_{C_B(I^2)}\right\}$$

$$+\omega\left(f;\sqrt{\left(a_n\left(x\right)-x\right)^2-\left(b_m\left(y\right)-y\right)^2}\right)$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

4.2. İki Değişkenli Brenke Polinomları Tabanlı Szász-Kantorovich Operatörlerin Ağırlıklı Uzaylarda Yaklaşımı

Bu kısımda $L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}$ operatörlerinin düzgün yakınsaklığı $I^2 \subset \mathbb{R}^2$ de incelenecektir. Bunu incelemek için Gadjiev tarafından [17] ve [18] de verilen ağırlıklı Korovkin tip teoremlere ihtiyaç vardır. Bu yüzden öncelikle gerekli olan tanımları ve teoremleri aşağıda verelim.

4.2.1. Tanım

$(x,y) \in I^2$ için $\rho(x,y) \geq 1$ ve $\lim\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} \rho(x,y) = \infty$ olacak şekilde I^2 üzerinde sürekli ρ fonksiyonuna bir ağırlık fonksiyonu denir.

Her $(x,y) \in I^2$ için

$$|f(x,y)| \leq M_f \rho(x,y)$$

koşulunu sağlayan tüm f fonksiyonlarının sınıfı $B_\rho(I^2)$ ile gösterilecektir. Burada M_f, f fonksiyonuna bağlı pozitif bir sabittir.

$C_\rho(I^2)$ ise, $B_\rho(I^2)$ ya ait I^2 üzerinde sürekli f fonksiyonlarının sınıfıdır. $B_\rho(I^2)$ ve $C_\rho(I^2)$

$$\|f\|_\rho = \sup_{(x,y)\in I^2} \frac{|f(x,,y)|}{\rho(x,y)}$$

normu ile birer normlu uzaylardır.

Ayrıca

$$C_\rho^*(I^2) = \left\{ f \in C_\rho(I^2) : \lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} \frac{f(x,y)}{\rho(x,y)} = k_f < \infty \right\}$$

ise

$$C_\rho^*(I^2) \subset C_\rho(I^2) \subset B_\rho(I^2)$$

olur.

4.2.2. Lemma

Bir $\{T_{n,m}\}$ operatör dizisinin $C_\rho(I^2)$ ağırlıklı uzayından $B_\rho(I^2)$ ağırlıklı uzayına dönüşüm yapması için gerek ve yeter koşul

$$\|T_{n,m}(\rho;x,y)\|_\rho \leq M_1$$

olacak şekilde bir $M_1 > 0$ sabitinin bulunmasıdır [17, 18].

4.2.3. Teorem

$\{T_{n,m}\}$, $C_\rho(I^2)$ uzayından $B_\rho(I^2)$ uzayına dönüşüm yapan lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. Ayrıca ρ_1 ,

$$\lim_{\sqrt{x^2,y^2}\to\infty} \frac{\rho(x,y)}{\rho_1(x,y)} = 0 \tag{4.18}$$

koşulunu sağlayan bir ağırlık fonksiyonu olsun. Eğer $\{T_{n,m}\}$ lineer pozitif operatör dizisi

$$\lim_{n,m\to\infty} \|T_{n,m}(e_{00}) - 1\|_\rho = 0$$

$$\lim_{n,m\to\infty} \|T_{n,m}(e_{10}) - e_{10}\|_\rho = 0$$

$$\lim_{n,m\to\infty} \|T_{n,m}(e_{01}) - e_{01}\|_\rho = 0$$

$$\lim_{n,m\to\infty} \|T_{n,m}(e_{20}+e_{02}) - (e_{20}+e_{02})\|_\rho = 0$$

koşullarını sağlarsa bu durumda her $f \in C_\rho(I^2)$ için

$$\lim_{n,m\to\infty} \|T_{n,m}f - f\|_{\rho_1} = 0$$

gerçeklenir. Burada $e_{ij} = x^i y^j$, $i,j = 0,1,2$ dir [15, 17].

Şimdi amacımıza ulaşmak için

$$T_{n,m}(f;x,y)=\begin{cases} L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(f;x,y) & , \quad (x,y)\in I_{a_n d_m}, \\ f(x,y) & , \quad (x,y)\notin I_{a_n d_m}, \end{cases} \tag{4.19}$$

şeklinde tanımlanan $\{T_{n,m}\}$ lineer pozitif operatör dizisini ele alalım, burada

$$I_{a_n d_m}=\left\{(x,y):0\leq x\leq a_n, 0\leq y\leq d_m \text{ ve } \lim_{n\to\infty} a_n=\infty, \lim_{m\to\infty} b_m=\infty\right\}$$

dir.

4.2.4. Teorem

$\rho(x,y)=1+x^2+y^2$ ve $\rho_1(x,y)$, Eş. (4.18) koşulunu sağlayan ağırlıklı fonksiyonlar olsunlar.

Bu durumda her $f\in C_\rho(I^2)$ için

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|T_{n,m}f-f\right\|_{\rho_1}=0$$

dır.

İspat

Öncelikle Lemma 4.2.2 yardımıyla $T_{n,m}$ operatörlerinin $C_\rho(I^2)$ dan $B_\rho(I^2)$ ya dönüşüm yapan operatörler olduğu gösterilmelidir. Eş. (1.7) ve Eş. (4.1) koşullarından

$$\left\|T_{n,m}(\rho)\right\|_\rho$$

$$\leq 1+\frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2}\sup_{(x,y)\in I_{a_n,d_m}}\frac{B''(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)}+\frac{2\alpha_n}{\beta_n^2}\frac{A'(1)+A(1)}{A(1)}\sup_{(x,y)\in I_{a_n,d_m}}\frac{B'(\alpha_n x)}{B(\alpha_n x)}$$

$$+\frac{1}{3\beta_n^2}\frac{3A''(1)+6A'(1)+A(1)}{A(1)}$$

$$+\frac{\gamma_m^2}{\eta_m^2}\sup_{(x,y)\in I_{a_n,d_m}}\frac{B''(\gamma_m y)}{B(\gamma_m y)}+\frac{2\gamma_m}{\eta_m^2}\frac{A'(1)+A(1)}{A(1)}\sup_{(x,y)\in I_{a_n,d_m}}\frac{B'(\gamma_m y)}{B(\gamma_m y)}$$

$$+\frac{1}{3\eta_m^2}\frac{3A''(1)+6A'(1)+A(1)}{A(1)}$$

$$<1+K$$

olacak şekilde bir $K>0$ sabiti vardır. Bu da $T_{n,m}$ operatörünün $C_\rho(I^2)$ dan $B_\rho(I^2)$ ye giden bir dönüşüm olduğunu gösterir.

Sınırsız aralıklarda her zaman $\delta\to 0$ iken $w(f;\delta)\to 0$ olamaz. Bu durumda sınırsız aralıklarda yaklaşımın derecesini incelemek için ağırlıklı süreklilik modülünden yararlanılır.

4.2.5. Tanım

$f\in C_\rho^*(I^2)$ için $\Omega(f;\delta_1,\delta_2)$ ağırlıklı süreklilik modülü

$$\Omega(f;\delta_1,\delta_2)=\sup_{(x,y)\in I^2}\ \sup_{|h_1|<\delta_1,|h_2|<\delta_2}\frac{|f(x+h_1,y+h_2)-f(x,y)|}{\rho(x,y)\rho(h_1,h_2)}$$

şeklinde tanımlanır ve aşağıdaki özellikleri sağlar:

$i)$ $\lim\limits_{(\delta_1,\delta_2)\to(0,0)}\Omega(f;\delta_1,\delta_2)=0$

$ii)$ $|f(t,s)-f(x,y)|\leq 8(1+x^2+y^2)g(t;x)g(s;y)\Omega(f;\delta_n,\delta_m)$ (4.20)

burada $g(t;x)=\left(1+\frac{|t-x|}{\delta_n}\right)\left(1+(t-x)^2\right)$ ve $g(s;y)=\left(1+\frac{|s-y|}{\delta_m}\right)\left(1+(s-y)^2\right)$ dir [23].

Şimdi $L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}$ operatörünün yaklaşım oranını ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla hesaplayalım.

4.2.6. Teorem

$f \in C_\rho^*(I^2)$ olsun. Bu durumda yeterince büyük m, n ler için

$$\left\| L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(f;x,y) - f(x,y) \right\|_{\rho^3} \leq H_2 \Omega(f;\delta_1,\delta_2)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada H_2, n , m lerden bağımsız pozitif bir sabit ve $\delta_1 = (\delta_n)$, $\delta_2 = (\delta_m)$ olmak üzere $\delta_n = \frac{1}{\beta_n}$, $\delta_m = \frac{1}{\eta_m}$ dir.

İspat

Eş. (4.20) eşitsizliğinden

$$\left| L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(f;x,y) - f(x,y) \right|$$

$$\leq 8 \frac{\beta_n}{A(1)B(\alpha_n x)} \frac{\eta_m}{A(1)B(\gamma_m y)} \Omega(f;\delta_n,\delta_m)(1 + x^2 + y^2)$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(\alpha_n x) \int_{\frac{k}{\beta_n}}^{\frac{k+1}{\beta_n}} g(t,x)dt \sum_{j=0}^{\infty} p_{m,j}(\gamma_m y) \int_{\frac{j}{\eta_m}}^{\frac{j+1}{\eta_m}} g(s,y)ds \tag{4.21}$$

elde edilir. Diğer yandan

$$g(t,x) \leq 2\left(1+\delta_n^2\right)\left(1+\delta_n^{-4}(t-x)^4\right)$$

$$g(s,y) \leq 2\left(1+\delta_m^2\right)\left(1+\delta_m^{-4}(s-y)^4\right)$$

eşitsizlikleri Eş. (4.21) de dikkate alınırsa, her $(x,y) \in I_{a_n,d_m}$ ve $(t,s) \in I^2$ için

$$\left| L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(f;x,y) - f(x,y) \right| \leq 8(1 + x^2 + y^2)\Omega(f;\delta_n,\delta_m)$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_n^4} L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}\left((t-x)^4;x,y\right) \right\} \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_m^4} L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}\left((s-y)^4;x,y\right) \right\} \tag{4.22}$$

olur. Böylece Eş. (4.1) ve Lemma 3.1.3 den

$$L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}((t-x)^4;x,y)=O(\frac{1}{\beta_n})\sum_{i=0}^{4}x^i$$

$$L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}((s-y)^4;x,y)=O(\frac{1}{\eta_m})\sum_{i=0}^{4}y^i$$

olup Eş. (4.22) de yerlerine yazılırsa

$$\left|L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(f;x,y)-f(x,y)\right|$$

$$\leq 8(1+x^2+y^2)\Omega(f;\delta_n,\delta_m)$$

$$\times\left\{1+\tfrac{1}{\delta_n^4}O(\frac{1}{\beta_n})\sum_{i=0}^{4}x^i\right\}\left\{1+\frac{1}{\delta_m^4}O(\frac{1}{\eta_m})\sum_{i=0}^{4}y^i\right\}$$

bulunur ve $\delta_n=\dfrac{1}{\beta_n}$, $\delta_m=\dfrac{1}{\eta_m}$ seçilirse

$$\frac{\left|L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(f;x,y)-f(x,y)\right|}{(1+x^2+y^2)^3}\leq H_2\Omega(f;\delta_n,\delta_m)$$

elde edilir.

4.3. GBS Operatörleri ile Yaklaşımın Derecesi

Bu kısımda, sürekli fonksiyonların uzayından daha geniş olan Bögel sürekli (B-sürekli) fonksiyonlar uzayında çalışacağız. Bögel sürekli fonksiyon tanımı Bögel tarafından [12] ve [13] de verildi. Bögel sürekli fonksiyonlara genelleştirilmiş Boolean Toplam operatörleri (GBS operatörleri) ile yaklaşım ilk defa 1990 yılında Badea ve Cottin tarafından tanımlandı, [10]. Badea ve arkadaşları, [9] ve [10] de GBS operatörlerini kullanarak B-sürekli fonksiyonlar için bir Korovkin-tip teorem verdiler.

4.3.1. Tanım

X ve Y reel aralıklar olmak üzere $A=X\times Y$ olsun. $f:A\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun karma farkı (x_0,y_0), $(x,y)\in A$ için

$$\Delta f\left[(x,y);(x_0,y_0)\right]=f(x,y)-f(x_0,y)-f(x,y_0)+f(x_0,y_0)$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer herhangi bir $(x_0,y_0)\in A$ noktası için

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\Delta f\left[(x,y);(x_0,y_0)\right]=0$$

ise $f:A\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $(x_0,y_0)\in A$ noktasında Bögel süreklidir (B-süreklidir) denir. A üzerindeki bütün B-sürekli fonksiyonların sınıfı $C_b(A)$ ile gösterilir.

Eğer her (x,y) , $(t,s)\in A$ için $\left|\Delta f\left[(x,y);(x_0,y_0)\right]\right|\leq M$ olacak biçimde bir $M>0$ sabiti varsa f fonksiyonuna A üzerinde Bögel sınırlıdır (B-sınırlıdır) denir. A üzerinde B-sınırlı tüm fonksiyonların sınıfı $B_b(A)$ ile gösterilir. Kompakt kümeler üzerinde her B-sürekli fonksiyon B-sınırlıdır. Ayrıca

$C(A)\subset C_b(A)$ ve $B(A)\subset B_b(A)$

dır.

4.3.2. Tanım

$L:C_b(A)\to B_b(A)$ bir lineer pozitif operatör olsun. Bu durumda L den elde edilen GBS operatörü her $f\in C_b(A)$ ve $(x,y)\in A$ için

$$UL(f;x,y)=L[f(t,y)+f(x,s)-f(t,s);(x,y)] \tag{4.23}$$

şeklinde tanımlanır.

4.3.3. Tanım

Eş. (4.2) ile verilen $L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}$ operatörü ile elde edilen $U_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}$ operatörü her $f\in C_b(I^2)$, $(x,y)\in I^2$ için

$$U_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(f;x,y)=\frac{\beta_n}{A(1)B(\alpha_n x)}\frac{\eta_m}{A(1)B(\gamma_m y)}$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\int\limits_{\frac{k}{\beta_n}}^{\frac{k+1}{\beta_n}}\int\limits_{\frac{j}{\eta_m}}^{\frac{j+1}{\eta_m}}[f(t,y)+f(x,s)-f(t,s)]d_s d_t \tag{4.24}$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre

$$U_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}={}_x L_n^{\alpha_n,\beta_n}+{}_y L_m^{\gamma_m,\eta_m}-L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m} \tag{4.25}$$

yazılabilir.

4.3.4. Lemma

$U_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}:C_b(I^2)\to C_b(I^2)$ operatörü lineer ve pozitiftir.

Gerçekten ${}_xL_n^{\alpha_n,\beta_n}$, ${}_yL_m^{\gamma_m,\eta_m}$ ve $L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}$ operatörleri lineer ve pozitif oldugundan $U_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}$ operatörü lineer ve pozitiftir.

Eş.(4.25), Lemma 4.1.3 ve Lemma 4.1.2 den aşağıdaki lemmaları verebiliriz.

4.3.5. Lemma

$i)$ $U_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(1;x,y)=1$

$ii)$ $U_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(t;x,y)=x$

$iii)$ $U_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(s;x,y)=y$

$iv)$ $U_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(t^2;x,y)=x^2$

$v)$ $U_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(s^2;x,y)=y^2$

4.3.6. Lemma

$i)$ $U_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}((t-x)\,;x,y)=0$

$ii)$ $U_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}((s-y)\,;x,y)=0$

4.3.7. Tanım

$f\in B_b(A)$ olsun. Bu durumda her $\delta_1,\delta_2\in[0,\infty)\times[0,\infty)$ ve $(x,y),(t,s)\in A$ için

$$\omega_{mixed}:[0,\infty)\times[0,\infty)\rightarrow[0,\infty)$$

$$\omega_{mixed}(f;\delta_1,\delta_2)=\sup\left\{\left|\Delta f\left[(t,s),(x,y)\right]\right|:|x-t|<\delta_1,|y-s|<\delta_2\right\}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona karma süreklilik modülü denir.

Karma süreklilik modülü, klasik süreklilik modülü ile aynı özelliklere sahiptir. Buna göre

1) Bir reel değerli f fonksiyonunun düzgün B-sürekli olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{\delta_1,\delta_2\rightarrow 0}\omega_{mixed}(f;\delta_1,\delta_2)=0$$

2) $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$ için

$$\omega_{mixed}(f;\lambda_1\delta_1,\lambda_2\delta_2)\leq\left(1+]\lambda_1[\right)\left(1+]\lambda_2[\right)\omega_{mixed}(f;\delta_1,\delta_2)$$

dir , burada $]\lambda[$,λ nın tam değeridir, [8].

4.3.8. Teorem

$\forall f\in C_b(I^2)$ ve $(x,y)\in I^2$ için

$$\left|U_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(f;x,y)-f(x,y)\right|\leq 4\omega_{mixed}(f;\delta_n,\delta_m)$$

dir. Burada δ_n ve δ_m Teorem 4.1.5 de tanımlandığı gibidir.

İspat

Karma süreklilik modülünün özelliğinden

$$|\Delta f \ \ [(t,s);(x,y)]| \leq \omega_{mixed}(f;|t-x|,|s-y|)$$

$$\leq (1+\frac{1}{\delta_1}|t-x|)(1+\frac{1}{\delta_2}|s-y|)\omega_{mixed}(f;\delta_1,\delta_2), \tag{4.26}$$

Karma fark fonksiyonunun tanımından ve $U_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(1;x,y)=1$ eşitliğinden (x,y), $(t,s)\in I^2$, δ_1, $\delta_2>0$ için

$$U_{n,m}(f;x,y)=f(x,y)-L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(\Delta f[(t,s);(x,y)];x,y) \tag{4.27}$$

yazabiliriz. Eş. (4.27) de, Eş. (4.26), Lemma 4.1.3 ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa

$$|U_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)| \leq L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(|\Delta f[(t,s);(x,y)]|;x,y)$$

$$\leq \left(L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(1;x,y)+\delta_1^{-1}\sqrt{L_n^{\alpha_n,\beta_n}((t-x)^2;x)}\right.$$

$$+\delta_2^{-1}\sqrt{L_m^{\gamma_m,\eta_m}((s-y)^2;y)}+\delta_1^{-1}\delta_2^{-1}\sqrt{L_n^{\alpha_n,\beta_n}((t-x)^2;x)}$$

$$\left.\times\sqrt{L_m^{\gamma_m,\eta_m}((s-y)^2;y)}\right)\omega_{mixed}(f;\delta_1,\delta_2)$$

elde edilir. Burada $\delta_1=\delta_n(x)$ ve $\delta_2=\delta_m(y)$ Teorem 4.1.5 deki gibi alınırsa ispat tamamlanır.

4.3.9. Tanım

$f\in C_b(I^2)$ ve $\zeta_1,\zeta_2\in(0,1]$ olmak üzere Lipschitz sınıfından fonksiyonlar

$Lip_M(\zeta_1,\zeta_2) = \{f \in C_b(I^2) : |\Delta f\,[(t,s)\,;(x,y)]|$

$\leq M\,|t-x|^{\zeta_1}\,|s-y|^{\zeta_2}$ olacak biçimde bir $M>0$ vardır$\Big\}$

şeklinde tanımlanır.

4.3.10. Teorem

$f \in Lip_M(\zeta_1,\zeta_2)$ olsun. Bu durumda

$$\left|U_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(f;x,y)-f(x,y)\right| \leq M\delta_n^{\zeta_1}(x)\delta_m^{\zeta_2}(y)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada δ_n ve δ_m Teorem 4.1.5 de tanımlandığı gibidir.

İspat

$f \in Lip_M(\zeta_1,\zeta_2)$ olsun. Bu durumda Eş. (4.27) den

$$\left|U_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(f;x,y)-f(x,y)\right|$$

$$\leq L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}\,|\Delta f\,[(s,t)\,;(x,y)]|$$

$$\leq ML_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(|t-x|^{\zeta_1}\,|s-y|^{\zeta_2}\,;x,y)$$

$$= ML_n^{\alpha_n,\beta_n}(|t-x|^{\zeta_1}\,;x)L_m^{\gamma_m,\eta_m}(|t-y|^{\zeta_2}\,;y)$$

olur. $p_1=\frac{2}{\zeta_1}, q_1=\frac{2}{2-\zeta_1}$ ve $p_2=\frac{2}{\zeta_2}, q_2=\frac{2}{2-\zeta_2}$ için Hölder eşitsizliği ve Lemma 4.1.3 ten

$$\left|U_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(f;x,y)-f(x,y)\right|$$

$$\leq M\left((L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}\,(t-x)^2\,;x,y)\right)^{\frac{\zeta_1}{2}}\left(L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(1;x,y)\right)^{\frac{2-\zeta_1}{2}}$$

$$\times(L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(s-y)^2;x,y)^{\frac{\zeta_2}{2}}\left(L_{n,m}^{\alpha_n,\beta_n,\gamma_m,\eta_m}(1;x,y)\right)^{\frac{2-\zeta_2}{2}}$$

$$= M\delta_n^{\zeta_1}(x)\delta_m^{\zeta_2}(y)$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

5. SONUÇ

Bu tezde tek değişkenli Brenke tip polinomları tabanlı Szász-Kantorovich operatörlerinin bir genellemesi tanımlandı. Bu operatörler için tam süreklilik, Voronoskajatip teorem ve Peetre K-fonksiyoneli yardımıyla yaklaşım derecesi hesaplandı. Daha sonra Brenke tip polinomları tabanlı Szász-Kantorovich operatörlerinin iki değişkenli bir genellemesi tanımlandı. Bu operatörler için tam süreklilik modülü, kısmi süreklilik modülü, Lipschitz sınıfından fonksiyonlar ve Peetre K-fonksiyoneli yardımıyla yaklaşım derecesi hesaplandı. Ayrıca bu operatörlerin ağırlıklı uzaylarda yaklaşımı incelendi. Son olarak iki değişkenli Brenke tip polinomları tabanlı Szász-Kantorovich operatörlerinin genelleştirilmiş Boolean toplamları tanımlanarak Bögel sürekli fonksiyonlar uzayında karma süreklilik modülü ve karma Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla yakınsaklık oranı bulundu.

Tezden elde edilen sonuçlar “Degree Of Approximation For Bivariate Szâsz-Kantorovich Type Based On Brenke Type Polynomials” başlıklı bir çalışma olarak ” Honam Mathematical Journal, vol.42,No.2, pp.251-268, June 2020” dergisinde yayınlandı.

Bu tez çalışması bu alanda yapılacak olan diğer çalışmalara katkı sağlayacaktır.

KAYNAKLAR

1. Agrawal, P.N., Ispir, N. (2016). Degree of approximation for bivariate Chlodowsky-Szâsz-Charlier type operators. *Results Mathematics*, vol.69, No.3, 369-385.

2. Agrawal, P.N., Baxhaku, B. and Chauhan, R. (2017). The approximation of bivariate Chlodowsky-Szâsz-Kantorovich-Charlier-type operators. *Journal Inequalities Applications*, 195(1).

3. Altomare, F. and Campiti, M. (1994). Korovkin-type Approximation Theory and its Applications. *Walter de Gruyter*, Berlin, 218-373.

4. Anastassiou, G. A. and Gal, S. (2000). *Approximation Theory: Moduli of Continuity and Global Smoothness Preservation.* Boston: Birkhäuser

5. Appel, P.E. (1880). Sur une classe de polynômes. *Annales scientifiques de I'Ecole Normale Supêrieure*, 2(9), 119-144.

6. Aral, A., Ulusoy, G. and Deniz, E. (2018). A new construction of Szâsz-Mirakjan operators. *Numerical Algorithms*, vol.77, 2, 313-326.

7. Atakut, Ç. and Büyükyazıcı, I. (2016). Approximation by Kantorovich-Szâsz type operators based on Brenke type polynomials. *Numerıcal Functıonal Analysıs Optımızatıon*, vol.37, No.12, 1488-1502.

8. Badea, I.(1973). Modulul de continuitate în sens Bögel şi unele aplicatii în approximarea printr-un operator Bernstein. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai, Series Mathematics-Mechanics*, 18(2), 69-78.

9. Badea, C. , Badea, I. , Cottin, C. and Gonska, H. H. (1988). Notes on the degree of approximation of B-continuous and B-differentiable functions. *Journal Of Approximation Theory Applications*, No.4, 95-108.

10. Badea, C. and Cottin, C. (1990). Korovkin-type theorems for Generalised Boolean Sum operators. *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai Approximation Theory*, Kecskemt (Hungary), No.58, 51-67.

11. Bede, B., Coroianu, L. and Gal, S.G. (2011). Approximation by Max-Product Favard Szász-Mirakjan. *Demonstratio Mathematica*, No.1, vol.44, 105-122.

12. Bögel, K. (1934). Mehrdimensionale Differentiation von Funtionen mehrerer Veranderlicher, *Journal Reine Angew. Mathematic* 170, 197–217.

13. Bögel, K. (1935). Über die mehrdimensionale differentiation, integration und beschrankte variation, *Journal Reine Angew. Mathematic* 173, 5-30.

14. Butzer, P. L., Berens, H. (1967). *Semi-groups of operators and approximation,*

Springer, New York.

15. Ditzian, Z. and Totik, V. (1987). *Moduli of Smoothness*, Springer Series for Computational Mathematics, vol.9, Springer-Verlag, New York.

16. Finta, Z., Govil, N.K. and Gupta, V. (2017). Some results on modified Szász-Mirakjan operators. *Journal of Mathematics Analysıs and Applications*, Vol.327, No.2, 1284-1296.

17. Gadjiev, A. (1980). Positive linear operators in weighted spaces of functions of several variables. *Izvestiya Akademii Nauk Azerbaidzhan Koi SSR,Ser. Fiz.-Teh. Mat. Nauk.*, 1, 32-37 (Russian).

18. Gadjiev, A. and Hacısalihoglu, H. (1995). *Convergence of the sequences of linear positive operators*, Ankara Üniversitesi.

19. Gal, S.G. and Anastassiou, G.A. (2000). *Approximation Theory: Moduli of Continuity and Global Smoothness Preservation*, Boston: Birkhäuser, 80-466.

20. Gazanfer, A.K., Büyükyazıcı, I. (2014). Approximation by certain linear positive operators of two variables. *Abstract and Applied Analysıs*, 1-6.

21. Hacısalihoğlu, H., Hacıyev, A. (1995). *Lineer Pozitif Operatör DizilerininYakınsaklığı*, Ankara: A.Ü. Fen Fakültesi Yayınları.

22. Ismail, M.E.H. (1974). On a generalization of Szâsz operators. Mathematica(Cluj), vol.39, No.2, 259-267.

23. Ispir, N. (2001). On modified Baskakov operators on weighted spaces. *Turkish Journal of Mathematics*, 26(3), 355-365.

24. Jakimovski, A. and Leviatan, D. (1969). Generalized Szâsz operators for the approximation in the infinite interval. *Mathematica-Revue D'analyse Numerique et de Theorie de Approximation*, vol.11, No.34, 97-103.

25. Kajla, A. and Agrawal, P.N. (2015). Approximation properties of Szász type operators based on Charlier polynomials. *Turkish Journal of Mathematics*, vol.39, 990-100.

26. Korovkin, P.P. (1953). On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N.S.)*, 90, 961-964.

27. Korovkin, P.P. (1960). *Linear Operators and Approximation Theory.* Hindustan Publishing Corporation (India).

28. Mursaleen, M. and Ansari, K.J. (2015). On Chlodowsky variant of Szâsz operators by Brenke type polynomials. *Applied Mathematics Computation*, vol.271, 991-100.

29. Musayev, B. ve Alp, M. (2000). *Fonksiyonel Analiz.* Balcı Yayınları, 27-83.

30. Öksüzer, Ö., Karslı, H. and Taşdelen, F. (2016). Approximation by a Kantorovich variant of Szâsz operators based on Brenke-type polynomials. *Mediterranean Journal of Mathematics*, vol.13, No.5, 3327-3340.

31. Sidharth, M., Acu, A.M. and Agrawal, P.N. (2017). Chlodowsky-Szâsz-Appell type operators for functions of two variables. *Annals Functional Analysis*, vol.8, No.4, 446-459.

32. Szász, O. (1950). Generalization of S.Bernstein's infinite interval. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, vol.45, 239-245.

33. Taşdelen, F., Aktaş, R. and Altın, A. (2012). A Kantorovich type of Szâsz operators including Brenke-type polynomials. *Abstract and Applied Analysis*, 1-13.

34. Varma, S., Sucu, S. and Içöz G. (2012). Generalization of Szâsz operators involving Brenke type polynomials. *Computers & Mathematics with Applications*, vol.64, No.2, 121-127.

35. Walczak, Z. (2000). On certain modified Szâsz-Mirakjan operators for functions of two variables. *Demonstratio Mathematica*, vol.33, No.1, 91-100.

36. Weierstrass, K. (1885). Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veranderlichen Sitzungsberichteder. *Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 633-639,789-805.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	:	BEGEN, Selin
Uyruğu	:	T.C.
Doğum tarihi ve yeri:		1991, Ankara
Medeni hali	:	Bekar
Telefon	:	05544687277
e-mail	:	selinbegen1991@gmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik Böl.	Devam ediyor.
Lisans	İnönü Üniversitesi/Matematik Böl.	2014
Lise	Etlik Anadolu Lisesi Fen Bilimleri	2009

Yabancı Dil

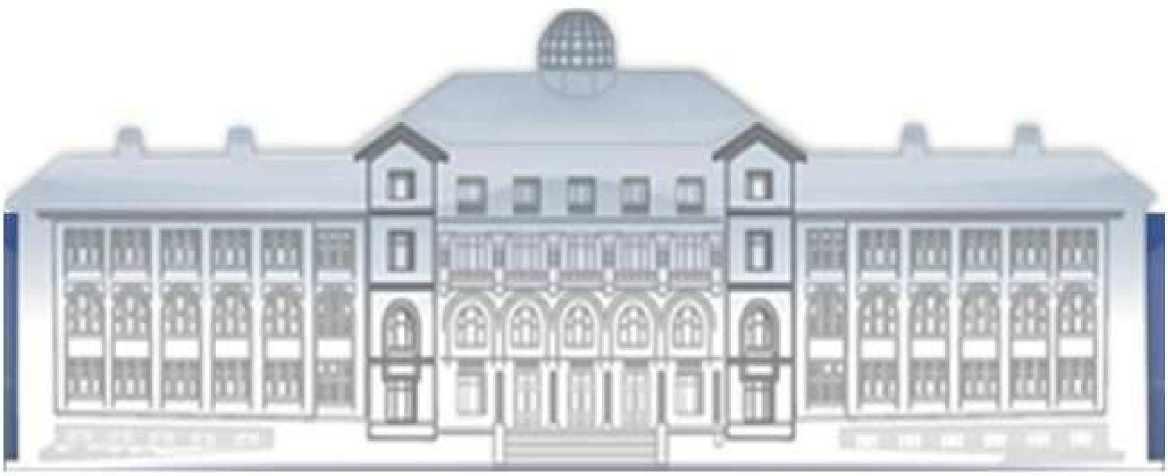
İngilizce

Yayınlar

S. Begen ve H. Gül. İnce İlarslan (2020). Degree of Approximation for Bivariate Szâsz-Kantorovich type on Brenke type polynomials. *Honam Mathematical Journal.* 42 , No. 2, 251-268

Hobiler

Kitap okumak, Spor yapmak, Resim çizmek



GAZİ GELECEKTİR...