

BENJAMİN-BONA-MAHONY DENKLEMİ ÜZERİNE

Yasin BAŞER

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ŞUBAT 2010
ANKARA**

Yasin BAŞER tarafından hazırlanan BENJAMİN-BONA-MAHONY DENKLEMİ ÜZERİNE adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Meryem KAYA

.....

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

.....

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Meryem KAYA

.....

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Ülkü DİNLEMEZ

.....

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Tarih: 26.01.2010

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Yasin BAŞER

BENJAMİN-BONA-MAHONY DENKLEMİ ÜZERİNE**(Yüksek Lisans Tezi)****Yasin BAŞER****GAZİ ÜNİVERSİTESİ****FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****Şubat 2010****ÖZET**

Bu tezde Benjamin-Bona-Mahony denkleminin çözümünün varlık ve tekliği aynı zamanda $H^1_{per}(\Omega)$ ve $H^2_{per}(\Omega)$ 'da çözümlerinin uzun zaman davranışı üzerinde yapılmış çalışmalar incelenmiştir [13,22,24]. Giriş bölümünde Benjamin-Bona-Mahony denklemi hakkında yapılmış bazı çalışmalar verilecektir. İkinci bölümde bu çalışmaya temel oluşturacak tanım ve teoremler hakkında bilgi verilecektir. Üçüncü bölümde ise Feado-Galerkin yöntemi kullanılarak Benjamin-Bona-Mahony (BBM) denklemi için tanımlanan problemin çözümünün varlık ve tekliği gösterilmiştir [13]. Dördüncü bölümde $H^1_{per}(\Omega)$ 'da zayıf yerel olmayan çekicisinin varlığı gösterilmiştir [24]. Tezin sonunda $H^2_{per}(\Omega)$ 'da zayıf yerel olmayan çekicisinin varlığı gösterilmiş olup enerji eşitsizliği ile zayıf yerel olmayan çekicinin güçlü yerel olmayan çekici olduğu gösterilmiştir [22].

Bilim Kodu : 204.1.138**Anahtar kelimeler: Zayıf yerel olmayan çekici, Yutan Küme, Zayıf Süreklilik****Sayfa adedi :49****Tez yöneticisi :Yrd. Doç. Dr. Meryem Kaya**

ON BENJAMIN-BONA-MAHONY EQUATION

(M.Sc. Thesis)

Yasin BAŞER

GAZI UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

February 2010

ABSTRACT

In this thesis, the existence and uniqueness of the solution of the Benjamin-Bona-Mahony equation and also a long time behavior of the solution of this equation, which is known, has been studied at $H_{per}^1(\Omega)$ and $H_{per}^2(\Omega)$ [13,22,24]. In the introduction part some studies about the Benjamin-Bona-Mahony equation will be given. In the second part, the basis of definitions and theorems of this study will be given. In the third part by using Feado-Galerkin method, the existence and uniqueness of solutions of the problem for Benjamin-Bona-Mahony equation has been shown [13]. In the fourth part the existence of weak global attractor has been shown at $H_{per}^1(\Omega)$ [24]. At the end of the thesis the existence of weak global attractor is shown at $H_{per}^2(\Omega)$. And also the weak global attractor has been shown to be strong global attractor by energy inequality [22] .

Science Code	: 204.1.138
Key Words	: Weak global attractor, absorbing set, weak continuous.
Page Number	: 49
Adviser	: Asist. Prof. Dr. Meryem KAYA.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla bu tezi oluşturmamda yardımcı olan, beni yönlendiren değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr Meryem KAYA'a ve çalışmalarım sırasında desteklerini esirgemeyen aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
1.GİRİŞ.....	1
2.BAZI TEMEL KAVRAMLAR VE ÖN BİLGİLER.....	4
3. ÇÖZÜMÜN VARLIK VE TEKLİĞİ.....	14
3.1 Çözüm İçin Bazı Değerlendirmeler.....	16
4. BENJAMİN-BONA-MAHONY DENKLEMİ İÇİN YUTAN KÜME VE YEREL OLMAYAN ÇEKİCİSİNİN VARLIĞI.....	22
4.1 Yerel Olmayan Çekicinin Varlığı.....	29
5. BENJAMİN-BONA-MAHONY DENKLEMİ İÇİN $H^2_{per}(\Omega)$ ’da YUTAN KÜME VE YEREL OLMAYAN ÇEKİCİSİNİN VARLIĞI	37
KAYNAKLAR.....	47
ÖZGEÇMİŞ.....	49

1.GİRİŞ

Bu tezde

$$u_t - u_{xxt} - \nu u_{xx} + f(u)_x = g(x), \quad (1.1)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \quad (1.2)$$

$$u(x+L, t) = u(x, t) \quad (x, t) \in \Omega \times R^+ \quad (1.3)$$

başlangıç ve sınır değerli Benjamin-Bona-Mahony (BBM) denklemi alınmıştır. Burada $\nu > 0$, $f: R \rightarrow R$ sürekli fonksiyon, $g(x) \in L^2(\Omega)$, $\Omega \subset R$ 'de sınırlı bir aralıktır. $f(u) = u + \frac{1}{2}u^2$ özel durumunda BBM denklemi birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir [13, 22, 24]. Bona ve Dougalis [5]

$$u_t + u_x + uu_x - \nu u_{xx} - \alpha^2 u_{xxt} = 0 \quad (x, t) \in [0, 1] \times R^+$$

$$u(0, t) = h(t), \quad u(1, t) = g(t), \quad 0 \leq t$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

burada $\alpha > 0$ ve $\nu \geq 0$ ve

$$u(0, 0) = f(0) = h(0) \text{ ve } u(1, 0) = f(1) = g(0)$$

başlangıç ve sınır değerli problemi üzerine çalışmıştır. Albert [2]

$$u_t + u_x + u^p u_x + u_{xxx} = 0 \quad (x \in R, t > 0)$$

$$u(x, 0) = \theta(x) \quad (x \in R)$$

problemi üzerinde çalışmıştır. Benjamin-Bona-Mahony denkleminin çözümlerinin varlık ve tekliği birçok bilim adamı tarafından incelenmiştir [3,5,6]. Medeiros ve Miranda [13] $\nu = 0$ durumunda Galerkin metodunu kullanarak

$$u_t + (f(u))_x - u_{xxt} = g(x, t)$$

denklemini için verilen Cauchy probleminin zayıf çözümlerinin varlık ve tekliğini çalışmışlardır. Burada $u = u(x, t)$, $x \in (0, 1)$ ve $t \geq 0$ dır. $f(s) \in C^1(R)$ ve $g(x, t) \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ dır. İki ve daha yüksek boyutlu uzaylarda bazı denklemler için çözümlerinin uzun zaman davranışları pek çok yazar tarafından incelenmiştir. Wang [23] tarafından

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \Delta u - \lambda u - f(u) + g$$

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

$$f(u)u \geq 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(u) \geq -C,$$

$$|f'(u)| \leq C(1 + |u|^r),$$

$n \leq 2$ için $r \geq 0$ ve $n \geq 3$ için $r \leq \min(\frac{4}{n}, \frac{2}{n-2})$ olmak üzere reaction-diffusion denkleminin $L^2(R^n)$ de yerel olmayan çekicisinin varlığı gösterilmiştir. Çelebi, Kalantarov ve Polat [7]

$$u_t - \alpha \Delta u_t - b \Delta u + \nabla \cdot \vec{F}(u) = h(x)$$

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

$$u(x + L_i e_i, t) = u(x, t), \quad u_{x_i}(x + L_i e_i, t) = u_{x_i}(x, t)$$

genelleştirilmiş Benjamin Bona Mahony denklemini için başlangıç ve sınır değer probleminin yerel olmayan çekicisinin varlığını göstermişlerdir. Stanislavova, Stefanov and Wang [18]

$$u_t - \Delta u_t - \nu \Delta u + \operatorname{div}(f(u)) = g$$

Benjamin-Bona-Mahony denkleminin R^3 de, çözümlerin asimptotik davranışını incelemiş ve R^3 de Genelleştirilmiş Benjamin-Bona-Mahony denklemini için

çekicinin varlığını göstermiştir. Burada ν pozitif sabit, $g \in L^2(R^3)$ ve $f(u) = u + \frac{1}{2}u^2$ dir. Bu çalışmada ise Ω , $\mathbb{R}$ nin bir alt aralığı olmak üzere Medeiros ve Miranda tarafından [13] de verilen makale esas alınarak Eş.1.1-Eş.1.3 problemlerinin varlık ve tekliği incelendi. Daha sonra Wang ve Yang [24], Wang [22] tarafından verilen Eş.1.1-Eş.1.3 problemi için sırasıyla $H_{per}^1(\Omega)$ ve $H_{per}^2(\Omega)$ da yerel olmayan çekicilerinin varlığı üzerine elde edilen sonuçları incelenmiştir.

2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR VE ÖN BİLGİLER

2.1 Tanım

$p \geq 1$ reel sayı olmak üzere $\Omega \subset R^n$ üzerinde

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty, \quad x \in \Omega$$

koşulunu sağlayan ölçülebilir u fonksiyonlarının uzayına $L^p(\Omega)$ uzayı denir. $L^p(\Omega)$ üzerindeki norm,

$$\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

biçiminde tanımlanır [1].

2.2 Tanım

X bir Banach uzayı olmak üzere $(X')' = X$ eşitliği sağlanıyorsa X Banach uzayına refleksif uzay denir [9].

2.3 Tanım

X bir Banach uzayı olmak üzere X Banach uzayının sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa bu uzaya ayrılabilir uzay denir [9].

2.4 Tanım

$\Omega \subset R^n$ de hemen hemen her yerde sınırlı ölçülebilir fonksiyonlar uzayına $L_{\infty}(\Omega)$ uzayı denir. $L_{\infty}(\Omega)$ üzerindeki norm,

$$\|u\|_{L_{\infty}(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|$$

biçiminde tanımlanır [8].

2.5 Tanım

$\Omega \subset R^n$ olmak üzere

$u : \Omega \rightarrow X$

sürekli fonksiyonların uzayı $C(\Omega : X)$ ile gösterilir [9].

2.6 Tanım

k doğal sayı ve $\Omega \subset R^n$ olmak üzere k 'inci mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonların uzayı $C^k(\Omega)$ ile gösterilir. $C^k(\Omega)$ üzerindeki norm,

$$\|u\|_{C^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)| \text{ biçiminde tanımlanır.}$$

2.7 Tanım

$\Omega \subset R^n$ de kompakt desteğe sahip her mertebeden türevlenebilir fonksiyonların uzayına test fonksiyonlarının uzayı denir ve $C_0^\infty(\Omega)$ veya $D(\Omega)$ ile gösterilir [8].

2.8 Tanım

$\Omega \subset R^n$ ve X normlu uzay olmak üzere $u : \Omega \rightarrow X$ fonksiyonun sıfırdan farklı değerler aldığı K alt cümlesini göz önüne alalım. $\overline{K}$ (K kümesinin kapanışı) Ω nın kapalı ve sınırlı alt cümlesi ise bu küme u fonksiyonunun kompakt desteği olarak adlandırılır; yani $\overline{K} = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0, x \in \Omega\}}$ dır [8].

2.9 Tanım

X Banach uzayı, $1 \leq p < \infty$ ve $-\infty \leq a < b \leq \infty$ olacak şekilde a ile b genişletilmiş reel sayılar olmak üzere $[a, b]$ den X 'e tanımlanmış

$$\int_a^b \|f(t)\|_X^p dt < \infty$$

koşulunu sağlayan ölçülebilir fonksiyonlarının uzayı $L^p(a, b; X)$ ile gösterilir. Bu uzayın üzerindeki norm

$$\|f\|_{L^p(a, b; X)} = \left(\int_a^b \|f(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

biçiminde gösterilir ve Banach uzayıdır [21].

2.10 Tanım

X Banach uzayı olmak üzere $[a, b]$ den X 'e tanımlanan hemen hemen her yerde sınırlı ölçülebilir fonksiyonların uzayı $L^\infty(a, b; X)$ dir. $L^\infty(a, b; X)$ uzayı üzerindeki norm, $\|u\|_{L^\infty(a, b; X)} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in [a, b]} \|f(t)\|_X$

biçiminde gösterilir ve bu uzay bu norma göre Banach uzayıdır [21].

2.11 Tanım

$C_0^\infty(\Omega)$, $(D(\Omega))$ üzerinde tanımlı sürekli, lineer fonksiyonele genelleştirilmiş fonksiyon denir. Genelleştirilmiş fonksiyonların uzayını $C_0^\infty(\Omega)'$ ile gösterilir [8].

2.12 Tanım

Her bir α_i $1 \leq i \leq n$ negatif olmayan tamsayı olmak üzere $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ şeklindeki vektör çoklu indis olarak adlandırılır. u , $\Omega \subset R^n$ bölgesinde çok değişkenli fonksiyon olmak üzere u fonksiyonunun $|\alpha|$ 'yıncı kısmi türevi

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

ile tanımlanır. Burada $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ dir. k negatif olmayan bir tamsayı ise k . mertebeden bütün kısmi türevlerin mertebeleri $D^k u(x) = \{D^\alpha u(x) : |\alpha| = k\}$ ile verilir [9].

2.13 Tanım

$u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve α çoklu indis olsun. $\forall \phi \in C^\infty_0(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} u(x) D^\alpha \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(x) \phi(x) dx$$

eşitliği sağlanıyorsa $D^\alpha u = v$ fonksiyonuna u 'nun α . zayıf türevi denir burada $\Omega \subset R^n$ dir [9].

2.14 Tanım

$\Omega \subset R^n$, m negatif olmayan tamsayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. α çoklu indis, $|\alpha| \leq k$ olmak üzere $u : \Omega \rightarrow R$ fonksiyonunu ve m . mertebeye kadar bütün genelleşmiş türevleri L^p uzayına ait olan fonksiyonların uzayına Sobolev uzayı denir. Yani

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L_p(\Omega) : |\alpha| \leq k, D^\alpha u \in L_p(\Omega)\}$$

biçiminde tanımlanır. $W^{m,p}(\Omega)$ uzayı üzerindeki norm

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & (1 \leq p < \infty) \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \text{ess sup}_{\Omega} |D^\alpha u| & (p = \infty) \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer $p=2$ ise $H^k(\Omega) \equiv W^{k,2}(\Omega)$, ($k=1,2,\dots$) dir. Burada $H^k(\Omega)$ uzayı Hilbert uzayıdır [9].

2.15 Tanım (Banach uzayları üzerinde lineer operatör)

X ve Y Banach uzayları olsun. Eğer her $x, y \in X$, $\lambda, \mu \in R$ için

$$i) A(\lambda x + \mu y) = \lambda A(x) + \mu A(y)$$

sağlanıyorsa $A : X \rightarrow Y$ operatörü lineerdir denir [9].

ii) Eğer

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|_Y : \|u\|_X \leq 1\} < \infty$$

ise $A : X \rightarrow Y$ lineer operatörü sınırlıdır denir [9].

2.16 Tanım

X bir normlu uzay olmak üzere

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\| = 0$$

ise $\{u_k\} \subset X$ dizisi $u \in X$ 'e yakınsaktır denir ve $u_k \rightarrow u$ biçiminde gösterilir [9].

2.17 Tanım

X normlu uzayı üzerinde tanımlı sınırlı, lineer fonksiyonellerin uzayına X 'in dual uzayı denir ve X' ile gösterilir [9].

2.18 Tanım

X bir reel Banach uzayı olmak üzere eğer $k \rightarrow \infty$ için

$$\langle x^*, x_k \rangle \rightarrow \langle x^*, x \rangle \quad \forall x^* \in X'$$

sağlanıyorsa $\{x_k\} \subset X$ dizisi $x \in X$ 'e zayıf olarak yakınsaktır denir ve $x_k \xrightarrow{w} x$ biçiminde gösterilir. Aynı zamanda zayıf yakınsak dizi sınırlıdır [9].

2.19 Tanım

X bir reel Banach uzayı olmak üzere $\forall u \in X$ için $n \rightarrow \infty$ iken

$\langle f_n, u \rangle \rightarrow \langle f, u \rangle$ sağlanıyorsa $\{f_n\} \subset X'$ fonksiyoneller dizisi $f \in X'$ ya zayıf yıldız olarak yakınsamaktadır ve $f_n \xrightarrow{w^*} f$ ile gösterilir [19].

2.1 Teorem (Banach-Alaoglu)

X ayrılabilir lineer normlu uzay ve $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset X^*$ olsun. Eğer $\forall n$ için $\|f_n\| \leq M$ ise bu durumda öyle bir $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$ alt dizisi vardır ki ve $f_0 \in E^*$ olmak üzere $f_{n_k} \xrightarrow{w^*} f_0$ olur [9].

2.2 Teorem

X lineer normlu uzay, $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ olsun. Bu durumda $x_n \xrightarrow{w} x_0$ ise $\|x_0\|_E \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X$ eşitsizliği sağlanır [9].

2.1 Lemma

V ve H , $V \subset H \subset V'$ koşulunu sağlayan Hilbert uzayları olsunlar. Burada V', V nin duali ve V, H da H da V' de yoğundur. Eğer $u \in L_2(0, T; V)$ ve $u_t \in L_2(0, T; V')$ ise o zaman u hemen hemen her yerde $[0, T]$ den H ya sürekli bir fonksiyona eşittir ve $\frac{d}{dt}(u, u) = \frac{d}{dt} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 = 2 \langle u', u \rangle$ eşitliği $(0, T)$ de genelleştirilmiş manada sağlanır [17].

Agmon Eşitsizlikleri:

$\Omega \subset R^n$ de C^n sınıfından bir bölge olmak üzere

$$\|u\|_{L_\infty} \leq \begin{cases} c \|u\|_{H^{\frac{n}{2}-1}(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^{\frac{n}{2}+1}(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, & Du \in H^{\frac{n+1}{2}}(\Omega), n\text{ çift} \\ c \|u\|_{H^{\frac{n-1}{2}}(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^{\frac{n+1}{2}}(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, & Du \in H^{\frac{n+1}{2}}(\Omega), n\text{ tek} \end{cases}$$

eşitsizliğine Agmon eşitsizliği denir. Burada c, Ω bölgesinde sabittir [20].

2.2 Lemma

$1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $a, b > 0, \varepsilon > 0$ olmak üzere

$$ab \leq \varepsilon a^p + c(\varepsilon) b^q$$

eşitsizliğine Young Eşitsizliği denir. Burada

$$c(\varepsilon) \equiv \frac{(\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}}}{q}$$

dır [20].

2.3 Lemma

$1 \leq p, q \leq \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere her $u \in L_p(\Omega), v \in L_q(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} |uv| dx \leq \|u\|_{L_p} \|v\|_{L_q}$$

eşitsizliğine Hölder Eşitsizliği denir [20].

2.2 Teorem (Gronwall-Reid-Bellman eşitsizliği)

c negatif olmayan sabit u, v $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ aralığında tanımlı negatif olmayan sürekli fonksiyonlar olmak üzere,

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^t u(s)v(s)ds, \quad t \in [t_0, t_0 + \alpha]$$

eşitsizliğinden

$$u(t) \leq c \exp \left[\int_{t_0}^t v(s) ds \right], \quad t \in [t_0, t_0 + \alpha]$$

Gronwall eşitsizliği elde edilir [12].

2.20 Tanım

X ve Y Banach uzayları, $X \subset Y$ olsun. Eğer

$$1) \|x\|_Y \leq c \|x\|_X, \quad c \text{ sabit } (x \in X) \text{ ve}$$

2) X ' deki her bir sınırlı dizi Y ' de prekompakttır.

koşulları sağlanıyorsa X, Y ye kompakt olarak gömülmüştür denir ve $X \subset\subset Y$ ile gösterilir [9].

2.3 Teorem

Ω, R^n nin sınırlı açık bir alt cümlesi $1 \leq p < n$ için $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ olsun. Bu durumda $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ için $\|u\|_{L_p} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)}$ eşitsizliği sağlanır. Burada $C = C(\Omega, p)$ 'dır [11].

2.4 Teorem

$\Omega \subset R^n$ nin sınırlı, açık bir alt cümlesi ve $C^1(\Omega)$ sınıfından bir bölge olsun. Bu durumda aşağıdaki kompakt gömülmeler vardır.

$$(1) \ p < n \text{ ise } W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L_q(\Omega), \quad 1 \leq q < p^*,$$

$$(2) \ p = n \text{ ise } W^{1,n}(\Omega) \rightarrow L_q(\Omega), \quad 1 \leq q < \infty,$$

$$(3) \ p > n \text{ ise } W^{1,p}(\Omega) \rightarrow C(\overline{\Omega}).$$

burada $p^* = \frac{np}{n-p}$ dır [11].

2.21 Tanım

H bir Banach uzayı, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ H üzerinde tanımlı operatörlerin bir ailesi olmak üzere

i) $S(0)=I$

ii) $S(t+s)=S(t)S(s), \quad \forall t, s \geq 0$

koşulları sağlanıyorsa $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ ailesine yarı grup denir [20].

2.22 Tanım

X bir Banach uzayı, $S(t) : X \rightarrow X$ bir yarı grup olmak üzere $B \subset X$ kümesi $\forall t \geq 0$ için

$$S(t)B = B$$

eşitliği sağlanıyorsa B kümesine değişmez küme denir [20].

2.23 Tanım

$B \subset X$ kümesi için w limit kümesi

$$w(B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)B}$$

şeklinde tanımlarız. Burada kapanış X uzayındaki zayıf topolojiye göre alınmıştır [10].

2.5 Teorem

Ω, C^1 sınıfında sınırlı bir bölge olsun. Bu durumda $H^1(\Omega), L^2(\Omega)$ 'ya kompakt olarak gömülmüştür [9].

2.24 Tanım

$B \subset R^n$ herhangi bir sınırlı küme olsun $\forall t \geq t_1(B)$ için $S(t)B \subset B_0$ olacak şekilde $t_1 = t_1(B) > 0$ varsa $B_0 \subset R^n$ kümesine $S(t)$ yarı grubu için yutan küme denir [9].

2.25 Tanım

A kümesi X de sınırlı ve zayıf kapalı ve $\forall t \geq 0$ için $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ için değişmez küme ise yani $\forall t \geq 0$ için $S(t)A = A$ ise ve X deki her sınırlı kümeyi çekiyorsa yani $B \subset X$ sınırlı kümesi için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d^w(S(t)B, A) = 0$$

oluyorsa A ya zayıf yerel olmayan çekici denir. Burada

$$d^w(X, Y) = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} d^w(x, y)$$

dir [10]. Şimdi Eş.1.1-Eş.1.3 probleminin çözümünün varlık ve tekliği aşağıdaki bölümde incelenecektir.

3. ÇÖZÜMÜN VARLIK VE TEKLİĞİ

Bu bölümde BBM denklemi için tanımlanan başlangıç sınır değer problemi gözönüne alınacak bu problemin zayıf çözümlerinin varlık ve tekliği ispatlanacaktır. Teoremin ispatında Feado-Galerkin metodu kullanılacaktır. Problem periyodik sınır şartları altında düşünülerek bölümün sonunda ise ele alınan problemin çözümlerinin sürekliliği incelenecektir. Bu kısımda incelenen sonuçlar $\nu = 0$ için [13] dadır. B.B.M denklemi:

$$u_t - u_{xxt} - \nu u_{xx} + f(u)_x = g(x), \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \quad (3.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \quad (3.2)$$

$$u, \Omega \text{ periyodik} \quad (3.3)$$

başlangıç ve sınır koşulu altında incelenecektir. Burada $\Omega = (0, L)$ dir. $\nu > 0$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ düzgün fonksiyon ve $g(x) \in L^2_{per}(\Omega)$ 'dır. Varlık teoremini vermeden önce teoremin ispatında kullanılacağından aşağıdaki lemmalar verilecektir.

3.1 Lemma

Eğer $u \in H^1(\Omega)$ ise

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |u(x)| \leq c \|u\|^{\frac{1}{2}} (\|u\| + \|u_x\|)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde u 'dan bağımsız $c > 0$ sabiti vardır [13].

3.2 Lemma

$f \in C^k(\Omega)$, $k \geq 1$ ve $f(0) = 0$ olsun. Eğer $u \in L_\infty(0, T; H^k(\Omega))$ ise o zaman

$f(u(x, t)) \in L_\infty(0, T; H^k(0, 1))$ ve

$$\|f(u(t))\|_{H^1(\Omega)} \leq M \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\|f(u)\|_{H^k(\Omega)} \leq C_k (1 + \|u\|_{H^{k-1}}^{k-1}) \|u\|_{H^k}$$

eşitsizlikleri elde edilir [13].

Eğer $k \geq 2$ ise M ve C_k sabitlerdir.

Şimdide Eş.3.1-Eş.3.3 ile verilen başlangıç sınır değerli BBM denkleminin zayıf çözümlerini tanımlayalım.

3.1 Tanım

$\forall v \in H_{per}^1(\Omega)$ için

$$(u_t, v) + (u_{xt}, v_x) + v(u_x, v_x) + (f(u)_x, v) = (g, v) \quad (3.4)$$

eşitliğini sağlayan, $u \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$, $u_t \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$

olmak üzere u fonksiyonuna Eş.3.1-Eş.3.3 denkleminin zayıf çözümü denir.

3.1 Teorem

$T > 0$ reel sayı, $g(x) \in L_{per}^2(\Omega)$ ve $u_0(x) \in H_{per}^1(\Omega)$ olsun. O zaman (3.1)-(3.3) denkleminin,

$$u(x, t) \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$$

koşullarını sağlayan bir tek $u(x, t)$ çözümü vardır. Burada $\theta = \Omega \times [0, T]$, $T > 0$ dır [13]

İspat:

Teoremin ispatı üç adımda yapılacaktır. İlk olarak problemin yaklaşık çözümü oluşturulmuştur. Daha sonra problemin çözümü olan fonksiyon için bazı ön değerlendirmeler elde edilmiştir. Son olarakta problemin varyasyonel formunda limite geçilebileceği gösterilmiştir. Şimdi problemin yaklaşık çözümlerini oluşturalım. $H_{per}^1(\Omega)$ uzayı ayrılabilir uzay olduğundan bir bazı vardır.

$w_j \in H_{per}^1(\Omega)$ olacak şekilde $\{w_j\}_{j \in N}$ dizisini seçelim. Her bir $m \in N$ için $w_1, w_2, \dots, w_m$ lineer bağımsız ve w_j lerin lineer kombinasyonlarından oluşan uzay $H_{per}^1(\Omega)$ da yoğundur. Bu sonlu elemanlar tarafından gerilen alt uzayın elemanları $\sum_{i=1}^m g_{im}(t)w_i(x)$ biçimindedir. Eş.3.1 yaklaşım dizisini

$$u^m = u^m(x, t) = \sum_{i=1}^m g_{im}(t)w_i(x) \quad (3.5)$$

formunda oluşturalım. Eş.3.4 varyasyonel formunda v yerine w_j , $1 \leq j \leq n$ u yerine u^m yazılırsa

$$(u_t^m, w_j) + (u_{xt}^m, w_{jx}) + v(u_x^m, w_{jx}) + (f(u_m)_x, w_j) = (g, w_j) \quad j=1, 2, \dots, m \quad (3.6)$$

eşitliği elde edilir. Eş.3.6 $u^m(0) = u_{0m}$ koşuluyla birlikte düşünüldüğünde

$$g'_{im}(t) + v \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} g_{im}(t) + b_{ij} (f(u_m)_x, w_j) = \sum_{j=1}^m \gamma_{ij} (g, w_j) \quad (3.7)$$

$$g_{im}(0) = (u_{0m}, w_j)$$

$g_{im}(t)$ bilinmeyenlerine göre diferensiyel denklem sistemi elde edilir. Burada α_{ij} , b_{ij} , γ_{ij} reel sabitlerdir. Picard teoreminden bu sistemin $[0, t_0]$ aralığında bir tek çözümü vardır. Daha sonra elde edilecek olan değerlendirmeler gözönüne alındığında çözüm $[0, T]$ aralığına genişletilebilir olduğu görülür. Şimdi ispatın ikinci adımında çözüm için bazı değerlendirmeler elde edilecektir.

3.1 Çözüm İçin Bazı Değerlendirmeler

Eş.3.6 $g_{jm}(t)$ ile çarpılarak $j = 1$ ' den $j = m$ 'ye toplam alınırsa

$$(u_t^m, u^m) + (u_{xt}^m, u_x^m) + \nu(u_x^m, u_x^m) + (f(u^m)_x, u^m) = (g, u^m) \quad (3.8)$$

elde edilir.

$$F(s) = \int_0^s f(\tau) d\tau \quad (3.9)$$

eşitliği gözönüne alınır ve eşitliğin sağ tarafına Cauchy-Schwarz ve Young eşitsizliği uygulanarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{d}{dt} \left(\|u^m\|^2 + \|u_x^m\|^2 \right) + 2\nu \|u_x^m\|^2 \leq \|g\|^2 + \|u^m\|^2 \quad (3.10)$$

eşitsizliği elde edilir; yani

$$\frac{d}{dt} \left(\|u^m\|^2 + \|u_x^m\|^2 \right) \leq \|g\|^2 + \|u^m\|^2 - 2\nu \|u_x^m\|^2 \quad (3.11)$$

eşitsizliğinde $\nu > 0$ olduğundan Eş.3.11

$$\frac{d}{dt} (\|u^m\|_{H^1}^2) - (\|u^m\|_{H^1}^2) \leq \|g\|^2 \quad (3.12)$$

biçiminde yazılır. Eş.3.12'e Gronwall eşitsizliği uygulanırsa, $\forall t \in [0, t_0]$ için

$$\|u_m\|_{H^1}^2 \leq \|u_{0m}\|^2 e^t + \|g\|^2 e^t$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte Bessel eşitsizliği gözönüne alınırsa

$$\|u_m\|_{H^1}^2 \leq \|u_{0m}\|^2 e^t + \|g\|^2 e^t \leq \|u_0\|^2 e^t + \|g\|^2 e^t \quad \forall t \in [0, t_0] \quad (3.13)$$

bulunur. Bu durumda aşağıdaki değerlendirmeler elde edilir. $\forall t \in [0, T]$ için

$$\|u^m(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_1(T) \quad (3.14)$$

böylece Eş.3.14 den

$$u^m \in L_\infty(0, T : H^1(\Omega)) \quad (3.15)$$

bulunur. Eş.3.14, Eş.3.15 ve Banach Alaoglu teoreminden $\{u^m\}$ nin $L^\infty(0, T : H^1(\Omega))$ da yakınsak olacak şekilde $\{u^{m_k}\}$ alt dizisi vardır. Ancak genelliği bozmadan $\{u^{m_k}\}$ yerine $\{u^m\}$ alınır. Böylece $L^\infty(0, T : H^1(\Omega))$ da u^m , u ya zayıf yıldız olarak yakınsar. Daha sonra $\{u_t^m\}$ için değerlendirmeler elde etmek için Eş.3.6 $g'_{jm}(t)$ ile çarpılarak $j = 1$ den $j = m$ ye toplam alınırsa

$$(u_t^m, u_t^m) + (u_{xt}^m, u_{xt}^m) + \nu(u_x^m, u_{xt}^m) + (f(u^m)_x, u_t^m) = (g, u_t^m) \quad (3.16)$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafına Young ve Cauchy Schwarz eşitsizliği uygulanır gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\|u_t^m\|^2 + \|u_{xt}^m\|^2 \leq \frac{\varepsilon_1}{2k_1} \|g\|^2 + \frac{\varepsilon_2}{2k_1} \|f(u^m)_x\|^2 \quad (3.17)$$

yazılır. Lemma 3.2 ve $g \in L^2_{per}(\Omega)$ dan dolayı Eş.3.17 $\forall t \in [0, T]$ için

$$\|u_t^m\|_{H^1}^2 \leq C \quad (3.18)$$

elde edilir. Böylece Eş.3.18'den

$$\{u_t^m\} \in L^\infty(0, T : H^1(\Omega)) \quad (3.19)$$

sonucu çıkar. Banach–Alaoglu teoremine göre $L^\infty(0, T : H^1(\Omega))$ da

$$u_t^{m_k} \xrightarrow{*} u_t \quad (3.20)$$

olacak şekilde $\{u_t^{m_k}\} \subset \{u_t^m\}$ alt dizisi vardır. Ancak genelliği bozmadan $\{u_t^{m_k}\}$ yerine $\{u_t^m\}$ alınabilir. Eş.3.15 ve Eş.3.19'dan $\phi = (0, T) \times \Omega$ olmak üzere $\{u^m\} \subset H^1(\phi)$ 'da sınırlıdır. $\{u^m\}$ 'nin $H^1(\phi)$ 'da sınırlı olması ve Rellich imbedding teoreminden dolayı $L^2(\phi)$ 'da $u^m \rightarrow u$ elde edilir. Bununla birlikte $u^{m_k} \subset u^m$ alt dizisi ϕ da u 'ya h.h.h.y yakınsamaktadır. Son basamakta da problemin varyasyonel formunda limite geçilebileceği gösterilecektir. İlk olarak lineer olmayan terim ile başlayalım. Eş.3.14 ve Lemma 3.2 dikkate alındığında

$$\|f(u^m)\|_{H^1(\Omega)} < C, \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.21)$$

elde edilir. Böylece $L_\infty(0, T : L_2(\Omega))$ da

$$f(u^m)_x \xrightarrow{w^*} \chi \quad (3.22)$$

olur. Eş.3.21 ve f fonksiyonunun R 'de sürekli olduğu gözönüne alındığında

$$f(u^m), \phi \text{ 'da hemen hemen her yerde } f(u) \text{ ya yakınsamaktadır.} \quad (3.23)$$

Eş.3.14, Lemma 3.1 ve Lemma 3.2'den

$$\|f(u^m)\|_{L^2(\phi)} < C, \quad \forall m \text{ ve } \forall t \in [0, T] \quad (3.24)$$

elde edilir. Eş.3.22 ve Eş.3.23 den $L^2(\phi)$ 'da

$$f(u^m) \xrightarrow{w^*} f(u) \quad (3.25)$$

dır. Burada ki yakınsama ϕ 'da genelleştirilmiş manada düşünüldüğünde

$$f(u^m)_x \text{ 'in } f(u)_x \text{ 'e } \phi \text{ 'da genelleştirilmiş manada yakınsadığı elde edilir.} \quad (3.26)$$

Eş.3.22 ve Eş.3.26'dan $\chi = f(u)_x$ olur ve $L_\infty(0, T : L_2(\Omega))$ da zayıf yıldız manada yakınsar ve

$$f(u^m)_x \xrightarrow{w^*} f(u)_x \quad (3.27)$$

biçiminde gösterilir. Böylece Eş.3.6, Eş.3.15, Eş.3.20 ve Eş.3.26 gözönüne alındığında $L^\infty(0, T)$ da sırasıyla

$$(u_t^m, w_j) \xrightarrow{w^*} (u_t, w_j)$$

$$(u_{xt}^m, w_{jx}) \xrightarrow{w^*} (u_{xt}, w_{jx})$$

$$(u_x^m, w_{jx}) \xrightarrow{w^*} (u_x, w_{jx})$$

elde edilir. Eş.3.6'da $m \rightarrow \infty$ için limit alındığında, yukarıdaki sonuçlardan

$$(u_t, w_j) + (u_{xt}, w_{jx}) + \nu(u_x, w_{jx}) + (f(u)_x, w_j) = (g, w_j) \quad (3.28)$$

eşitliği elde edilir. Eş.3.28 $\forall j$ için geçerli olduğundan lineerlikten her $v \in H_{per}^1(\Omega)$

$$(u_t, v) + (u_{xt}, v_x) + \nu(u_x, v_x) + (f(u)_x, v) = (g, v)$$

eşitliği yazılır. Şimdi u 'nun başlangıç koşulunu sağladığını gösterelim.

$L^\infty(0, T : H^1(\Omega))$ 'da $\{u_m\}$ dizisi u 'ya zayıf yıldız yakınsak olduğundan $\forall v \in L^1(0, T : L^2(\Omega))$ için

$$\int_0^T (u^m, v) dt \rightarrow \int_0^T (u, v) dt \quad (3.29)$$

olur. Diğer yandan $\{u_t^m\}$ dizisi u 'ya $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ 'da zayıf yıldız yakınsak olduğundan

$$L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \text{ da } u_t^m \xrightarrow{*} u_t$$

dolayı; $\forall v \in L_1(0, T; L_2(\Omega))$ için

$$\int_0^T (u_t^m, v) dt \rightarrow \int_0^T (u_t, v) dt \quad (3.30)$$

yazılır. Burada $w \in L^2(\Omega)$, $\theta \in C^1(0, T)$ ve $\theta(0) = 1$ $\theta(T) = 0$ olmak üzere $v(x, t) = \theta(t)w(x)$ biçiminde yazılsın. Eğer Eş.3.29'da $v = \theta'w$, Eş.3.30'da $v = \theta w$ alınır gerekli düzenlemeler yapılırsa $L^2(\Omega)$ 'de $u^m(0) \rightarrow u(0)$ elde edilir. Böylece u çözümünün başlangıç koşulunu sağladığı gösterilmiş olur. Kabul edelim ki u, v fonksiyonları Eş.3.1-Eş.3.3 denkleminin iki farklı çözümü olsun o zaman $w = u - v$ olmak üzere w ,

$$w_t - w_{xxt} - \nu w_{xx} + f(u_x) - f(v)_x = 0 \quad (3.31)$$

$$w(0) = 0, \quad w_x(0) = 0$$

başlangıç koşullu denklemin bir çözümüdür. Eş.3.31 w ile L^2 de iç çarpımı alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_x\|^2 + \nu \|w_x\|^2 + (f(u)_x - f(v)_x, w) = 0$$

bulunur. Buradan da $w = u - v = 0$ elde edilir. Dolayısıyla tek bir çözümü olduğu sonucu çıkar.

4. BENJAMİN-BONA-MAHONY DENKLEMİ İÇİN YUTAN KÜME VE YEREL OLMAYAN ÇEKİCİNİN VARLIĞI

Bu bölümde $H^1(\Omega)$ 'da zayıf yerel olmayan çekicinin varlığı gösterilmiştir. Daha sonra Ball'un yöntemi ile zayıf yerel olmayan çekicinin aynı zamanda güçlü yerel olmayan çekici olduğu gösterilmiştir. Teorem 3.2'den Eş.3.1-Eş.3.3 probleminin çözümünün var ve tek olmasından $S(t)$ yarı grubu tanımlanabilir. Bu kısım [13] ve [24] makalelerinin incelenmesiyle oluşturulmuştur.

4.1 Teorem

$g(x) \in L^2_{per}(\Omega)$ ve $u_0 \in H^1(\Omega)$ olsun. Bu durumda $S(t) : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ dinamik sistemi $\forall t > 0$ için zayıf süreklidir [24].

İspat:

Her $t_1 > 0$ sabiti için $S(t_1)$ nin $H^1(\Omega)$ dan $H^1(\Omega)$ ya zayıf sürekli olduğunu gösterelim. Bunun için

$$u_{0k} \xrightarrow{w} w_0 \quad (4.1)$$

olacak şekilde $H^1(\Omega)$ da bir $\{u_{0k}\}$ dizisi seçelim. $H^1(\Omega)$ 'da $S(t_1)u_{0k} \xrightarrow{w} S(t_1)w_0$ olduğu gösterilecektir. $T > t_1$ seçelim ve $u_k(t) = S(t)u_{0k}$, $w(t) = S(t)w_0$ ile gösterilsin. Zayıf yakınsak her dizi sınırlı olduğundan Eş.4.1'den

$$\|u_{0k}\|_{H^1(\Omega)} \leq R \quad (4.2)$$

olur, burada R , k dan bağımsız sabittir. $u_k(t)$, Eş.3.1 sağlasın bu durumda

$$u_{kt}(t) - u_{kxt}(t) - \nu u_{kxx} + (f(u))_x = g(x) \quad (4.3)$$

eşitliği yazılır. Eş.4.3 H' da u_k ile iç çarpımı alınırsa

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_k\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{kx}\|^2 + \nu \|u_{kx}\|^2 + \int_{\Omega} (f(u_k))_x u_k dx = (g, u_k) \quad (4.4)$$

bulunur.

$$F(s) = \int_0^s f(\tau) d\tau \quad (4.5)$$

olsun. Bu durumda

$$\int_{\Omega} (f(u_k))_x u_k dx = - \int_{\Omega} f(u_k) u_{kx} dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} F(u_k) dx = 0 \quad (4.6)$$

elde edilir. Eş.4.3'de Eş.4.6 gözönüne alınırsa

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_k\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{kx}\|^2 + \nu \|u_{kx}\|^2 = (g, u_k) \quad (4.7)$$

olur. Eş.4.7 sağ tarafına Cauchy-Schwarz ve Young eşitsizliği uygulanır gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{d}{dt} (\|u_k\|^2 + \|u_{kx}\|^2) + 2\nu \|u_{kx}\|^2 \leq \|g\|^2 + \|u_k\|^2 \quad (4.8)$$

elde edilir. Eş.4.8'e Gronwall lemmasının uygulanması ile

$$\|u_k(t)\|^2 + \|u_{kx}\|^2 \leq e^{2\nu t} (\|u_k(0)\|^2 + \|u_{kx}(0)\|^2) + \|g\|^2 e^t$$

$$\leq (R^2 + \|g\|^2) e^{2\nu t}$$

elde edilir. Buradan

$$\|u_k(t)\|_{H^1}^2 \leq C \quad \forall 0 \leq t \leq T \quad (4.9)$$

olur. Burada C, T ye bağılı bir sabittir. Şimdi Eş.4.3 u_{kt} ile $L_2(\Omega)$ da iç çarpımını alırsak

$$\|u_{kt}\|^2 + \|u_{kxt}\|^2 = -\nu(u_{kx}, u_{kxt}) + (f(u_k), u_{kxt}) + (g, u_{kt})$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafına Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\|u_{kt}\|^2 + \|u_{kxt}\|^2 \leq \nu \|u_{kx}\| \|u_{kxt}\| + \|f(u_k)\| \|u_{kxt}\| + \|g\| \|u_{kt}\| \quad (4.10)$$

bulunur.

$$\|u\|_{L_\infty} \leq C \|u\|^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

Agmon eşitsizliği, Lemma 3.2 ve Eş.4.9'dan

$$\|f(u_k(t))\|_\infty \leq C \quad \forall 0 \leq t \leq T \quad (4.11)$$

elde edilir. Daha sonra Eş.4.9 ve Eş.4.11, Eş.4.10'da birlikte düşünülürse

$$\|u_{kt}\|^2 + \|u_{kxt}\|^2 \leq C \|u_{kt}\| + C \|u_{kxt}\|$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafına Young eşitsizliği uygulanırsa

$$\|u_{kt}\|^2 + \|u_{kxt}\|^2 \leq \frac{1}{2}\|u_{kt}\|^2 + \frac{1}{2}\|u_{kxt}\|^2 + C$$

yazılır, bu eşitsizlikten

$$\|u_{kt}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq 2C \quad \forall \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.12)$$

elde edilir. Eş.4.9 ve Eş.4.12'den

$$H^1(\Omega) \text{ 'da} \quad u_k(t_1) \xrightarrow{w} \theta \quad (4.13)$$

$$L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \text{ 'da} \quad u_k(t) \xrightarrow{w^*} u(t) \quad (4.14)$$

$$L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \text{ 'da} \quad u_{kt}(t) \xrightarrow{w^*} u_t \quad (4.15)$$

olacak şekilde u_k dizisinin bir alt dizi vardır bu alt diziyi genelliği bozmadan u_k ile gösterebiliriz. Burada $\theta \in H^1(\Omega)$, $u(t) \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ dır. Eş.4.14, Eş.4.15 ve kompaktlık teoreminden [21]

$$u_k(t) \rightarrow u(t) \quad L^2(0, T; H) \quad (4.16)$$

elde edilir. $\forall v \in H_{per}^1(\Omega)$, $\forall \psi(t) \in C_0^\infty(0, T)$ için Eş.4.3 $\psi(t)v$ ile çarpıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \int_0^T (u_{kt}, \psi(t)v) dt + \int_0^T (u_{kxt}, \psi(t)v_x) dt + \nu \int_0^T (u_{kx}, \psi(t)v_x) dt - \int_0^T (f(u_k), \psi(t)v_x) dt \\ = \int_0^T (g, \psi(t)v) dt \end{aligned} \quad (4.17)$$

elde edilir. Burada lineer olmayan terim gözönüne alınarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T (f(u_k), \psi(t)v_x) dt - \int_0^T (f(u), \psi(t)v_x) dt \right| = \\ & \left| \int_0^T (f(u_k) - f(u), \psi(t)v_x) dt \right| \leq \int_0^T |(f(u_k) - f(u))| |\psi(t)v_x| dt \leq \\ & \|f'(\xi)\|_\infty \int_0^T \|u_k - u\| \|\psi(t)v_x\| dt \leq C \|\psi(t)v_x\|_{L_2(0,T;H)} \|u_k - u\|_{L_2(0,T;H)} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Eş.4.16 göz önüne alınır

$$\left| \int_0^T (f(u_k), \psi(t)v_x) dt - \int_0^T (f(u), \psi(t)v_x) dt \right| \rightarrow 0$$

olur. Eş.4.14, Eş.4.15, Eş.4.16 dikkate alınarak $k \rightarrow \infty$ için Eş.4.17 de limit alınır

$$\begin{aligned} & \int_0^T (u_t, v) \psi(t) dt + \int_0^T (u_{xt}, v_x) \psi(t) dt + v \int_0^T (u_x, v_x) \psi(t) dt - \int_0^T (f(u), v_x) \psi = \\ & = \int_0^T (g, v) \psi(t) dt \end{aligned} \tag{4.18}$$

bulunur. Böylece

$$u_t - u_{xxt} - v u_{xx} + f(u)_x = g(x) \tag{4.19}$$

eşitliğinin genelleştirilmiş manada sağlanır. Yani u , Eş.3.1 sağlar. Şimdi $u(0) = w_0$ eşitliğinin genelleştirilmiş manada sağlandığını gösterelim. $\forall v \in H_{per}^1(\Omega)$,

$\forall \psi(t) \in C^\infty[0, T]$, $\psi(T) = 0$, $\psi(0) = 1$ için Eş.4.3 ele alarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (u_k, v) \psi'(t) dt + \int_0^T (u_{kxt}, v_x) \psi(t) dt + \nu \int_0^T (u_{kx}, v_x) \psi(t) dt \\ & - \int_0^T (f(u_k), v_x) \psi(t) dt = (u_k(0), v) + \int_0^T (g, v) \psi(t) dt \end{aligned} \quad (4.20)$$

elde edilir. $H^1(\Omega)$ da $u_{0k} \xrightarrow{w} w_0$ ele alarak Eş.4.20'de $k \rightarrow \infty$ için limit alındığında

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (u, v) \psi'(t) dt + \int_0^T (u_{xt}, v_x) \psi(t) dt + \nu \int_0^T (u_x, v_x) \psi(t) dt + \int_0^T (f(u), v_x) \psi(t) dt - \\ & \int_0^T (f(u), v_x) \psi(t) dt = (w_0, v) + \int_0^T (g, v) \psi(t) dt \end{aligned} \quad (4.21)$$

yazılır. Diğer yandan Eş.4.19 $\nu \psi(t)$ ile çarpılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (u, v) \psi'(t) dt + \int_0^T (u_{xt}, v_x) \psi(t) dt + \nu \int_0^T (u_x, v_x) \psi(t) dt + \int_0^T (f(u), v_x) \psi(t) dt \\ & - \int_0^T (f(u), v_x) \psi(t) dt = (u(0), v) + \int_0^T (g, v) \psi(t) dt \end{aligned} \quad (4.22)$$

elde edilir. Eş.4.21 ve Eş.4.22 birlikte düşünüldüğünde

$$(u(0), v) = (w_0, v) \quad \forall v \in H_{per}^1(\Omega)$$

bulunur. Buradan ise

$$u(0) = w_0 \quad (4.23)$$

sonucu yazılır. Böylece Eş.4.19 ve Eş.4.23'den

$$u(t) = S(t)w_0 = w(t) \quad (4.24)$$

olur. $\forall v \in H_{per}^1(\Omega)$, $\forall \psi(t) \in C^\infty[0, t_1]$ $\psi(0) = 0$, $\psi(t_1) = 1$ olmak üzere

Eş.4.18 ve Eş.4.20 eşitlikleri tekrar ele alınırsa Eş.4.18'den

$$\begin{aligned} & - \int_0^{t_1} (u, v) \psi'(t) dt + \int_0^{t_1} (u_{xt}, v_x) \psi(t) dt + \nu \int_0^{t_1} (u_x, v_x) dt \\ & - \int_0^{t_1} (f(u), v_x) \psi(t) dt = (u(t_1), v) + \int_0^{t_1} (g, v) \psi(t) dt \end{aligned}$$

Eş.4.20'den

$$\begin{aligned} & - \int_0^{t_1} (u_k, v) \psi'(t) dt + \int_0^{t_1} (u_{kxt}, v_x) dt + \nu \int_0^{t_1} (u_{kx}, v_x) dt \\ & - \int_0^{t_1} (f(u_k), v_x) \psi(t) dt = (u_k(t_1), v) + \int_0^{t_1} (g, v) \psi(t) dt \end{aligned}$$

$k \rightarrow \infty$ için limit alındığında Eş.4.13'den

$$(u(t_1), v) = (\theta, v) \quad \forall v \in H_{per}^1(\Omega) \quad (4.25)$$

elde edilir. Eş.4.24 ve Eş.4.25 den

$$u(t_1) = \theta = S(t_1)w_0$$

eşitliği yazılır. Böylece Eş.4.13'den $H^1(\Omega)$ da

$S(t_1)u_{0k} \xrightarrow{w} S(t_1)w_0$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

4.1 Yerel Olmayan Çekicinin Varlığı

Bu bölümde Eş.3.1-Eş.3.3 problemi için yerel olmayan çekicinin varlığını göstereceğiz. Bunun için gerekli Lemma ve Teoremleri vermeden önce Eş.3.1-Eş.3.3 probleminin H da yutan kümeye sahip olmadığını gösterelim. Öncelikle Eş.3.1 eşitliği $\forall t > 0$ için Ω bölgesi üzerinde integrallenir ve Eş.3.3 koşulu uygulanırsa $\forall t > 0$ için u 'nun ortalaması

$$g(x) \in L_{per}^2(\Omega) \text{ ve } \int_{\Omega} g(x)dx = 0 \text{ olmak üzere}$$

$$\theta(u(t)) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x,t)dx = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u_0(x)dx = \theta(u_0) \quad (4.26)$$

bulunur. Bu durum bize Eş.3.1-Eş.3.3 probleminin H uzayının tamamında bir yutan kümeye sahip olmadığını gösteriyor. Dolayısıyla yutan kümenin varlığını göstermek için $H_{\alpha} = \{u \in H : |\theta(u)| \leq \alpha\}$ yı tanımlayalım. Böylece Eş.4.26 H_{α} 'nın Eş.3.1-Eş.3.3 sistemi tarafından üretilen $S(t)$ yarıgrubu altında değişmez olduğunu gösteriyor. Şimdi H_{α} da yutan kümenin varlığını göstereceğiz.

4.1 Lemma

Kabul edelim ki

$$g(x) \in L_{per}^2(\Omega), \int_{\Omega} g(x)dx = 0 \quad (4.27)$$

ve $u_0 \in H_{per}^1(\Omega) \cap H_{\alpha}$ olsun. Bu durumda Eş.3.1-Eş.3.3 denkleminin herhangi bir $u(t)$ çözümü için $\|u(t)\|_{H^1} \leq K \quad \forall t \geq t_1$

eşitsizliği sağlanır. $\forall u_0 \in H$ için $\theta(u) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x)dx$ olmak üzere

$$\bar{u} = u - \theta(u) \quad (4.28)$$

dır. Burada K sabiti $(\nu, f, g, \Omega, \alpha)$ değişkenlerine bağlı bir sabit, $\|u_0\| \leq R$ olduğunda t_1 ise $(\nu, f, g, \Omega, \alpha)$ ve R 'ye bağlıdır [24].

İspat:

Eş.4.28'den

$$u = \bar{u} + \theta(u)$$

olduğu dikkate alınırsa, Eş.4.26'dan

$$u = \bar{u} + \theta(u_0) \quad (4.29)$$

yazılır. Eş.4.29, Eş.3.1'de yazılırsa

$$\bar{u}_t - \bar{u}_{xxt} - \nu \bar{u}_{xx} + f(u)_x = g(x) \quad (4.30)$$

olur. Eş.4.30 H da $\bar{u}$ ile iç çarpımını alırsak

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\bar{u}\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\bar{u}_x\|^2 + \nu \|\bar{u}_{xx}\|^2 + \int_{\Omega} (f(u))_x \bar{u} dx = (g, \bar{u}) \quad (4.31)$$

elde edilir.

$$F(s) = \int_0^s f(\tau) d\tau$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (f(u))_x \bar{u} dx &= - \int_{\Omega} f(u) \bar{u}_x dx = - \int_{\Omega} f(u) u_x dx \\ &= - \int_{\Omega} (F(u))_x dx = -F(u(L)) + F(u(0)) = 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

bulunur. Eğer

$$\int_{\Omega} v(x) dx = 0 \text{ ise}$$

$$\|v\| \leq c_1 \|v_x\| \quad (4.33)$$

Poincare eşitsizliği sağlanır. Eş.4.26 ile

$$\int_{\Omega} \bar{u}(x, t) dx = \int_{\Omega} (u(x, t) - \theta(u)) dx$$

$$= \int_{\Omega} u(x, t) dx - \int_{\Omega} u(x, t) dx = 0 \quad (4.34)$$

elde edilir. O zaman Eş.4.33 ve Eş.4.34'den

$$\|\bar{u}(t)\| \leq C_1 \|\bar{u}_x(t)\| \quad \forall t \geq 0 \text{ için} \quad (4.35)$$

elde edilir. Young eşitsizliği ve Eş.4.35'den Eş.4.31 sağ tarafını ele alırsak

$$|(g, \bar{u})| \leq \|g\| \|\bar{u}\| \leq C_1 \|g\| \|\bar{u}_x\| \leq \frac{1}{4} \nu \|\bar{u}_x\|^2 + C_2 \quad (4.36)$$

bulunur. Burada C ve C_i ($i=1,2,\dots$), $(\nu, f, g, \Omega, \alpha)$ ya bağlı sabitlerdir. Eş.4.31, Eş.4.32 ve Eş.4.36'dan

$$\frac{d}{dt} (\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{u}_x\|^2) + \frac{3}{2} \nu \|\bar{u}_x\|^2 \leq 2C_2 \quad (4.37)$$

eşitsizliği yazılır. Eşitsizliğin sol tarafına Poincare eşitsizliği uygulanır gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{d}{dt}(\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{u}_x\|^2) + C_3(\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{u}_x\|^2) \leq 2C_2$$

eşitsizliği $\forall t \geq 0$ için elde edilir. Burada $C_3 = \min\left\{\frac{\nu}{2}, \nu C_2^{-1}\right\}$ dir. Gronwall teoreminin uygulanması ile

$$\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{u}_x\|^2 \leq (\|\bar{u}(0)\|^2 + \|\bar{u}_x(0)\|^2)e^{-C_3 t} + \frac{2C_2}{C_3}$$

yazılır. Eş.4.35 Poincare eşitsizliğinden

$$\|\bar{u}(t)\|^2 + \|\bar{u}_x(t)\|^2 \leq (1 + C_1^2)\|\bar{u}_x(0)\|^2 e^{-C_3 t} + \frac{2C_2}{C_3}$$

elde edilir. Eş.4.29 uygulanması ile

$$\begin{aligned} \|\bar{u}(t)\|^2 + \|\bar{u}_x(t)\|^2 &\leq (1 + C_1^2)\|\bar{u}_x(0)\|^2 e^{-C_3 t} + \frac{2C_2}{C_3} \\ &\leq (1 + C_1^2)R^2 e^{-C_3 t} + \frac{2C_2}{C_3} \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $\forall t \geq t_*$ için

$$\|\bar{u}(t)\|^2 + \|\bar{u}_x(t)\|^2 \leq \frac{4C_2}{C_3} \tag{4.38}$$

elde edilir. Burada $t_* = \frac{1}{C_3} \ln\left(\frac{C_3(1 + C_1^2)R^2}{2C_2}\right)$ dir. Sonuç olarak Eş.4.29 ve $u_0 \in H_\alpha$

olduğundan

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2 &= \|\bar{u}(t)\|^2 + \|\theta(u)\|^2 = \|\bar{u}(t)\|^2 + |\theta(u)|^2 |\Omega| \\ &\leq \|\bar{u}(t)\|^2 + \alpha^2 |\Omega| \end{aligned} \tag{4.39}$$

eşitsizliği yazılır. Eş.4.38 ve Eş.4.39 gözönüne alındığında

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{H^1}^2 &= \|u(t)\|^2 + \|u_x(t)\|^2 \leq \|\bar{u}(t)\|^2 + \|\bar{u}_x(t)\|^2 + \alpha^2 |\Omega| \\ &\leq \frac{4C_2}{C_3} + \alpha^2 |\Omega|\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Böylece Lemma 4.1 ispatlanmış olur. Buradan

$$B = \{u \in H^1(\Omega) : \|u\|_{H^1} \leq K\}$$

yuvarı $H^1(\Omega) \cap H_\alpha$ da $S(t)$ yarıgrubu için bir yutan küme olduğu sonucu çıkar.

Kabul edelimki

$$\mathcal{A} = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)B} \quad (4.40)$$

olsun. Buradaki kapanış H^1 deki zayıf topolojiye göre alınmıştır. Teorem 4.1'den $\mathcal{A}$, $S(t)$ yarıgrubu için zayıf yerel olmayan çekicidir. Buradan aşağıdaki teorem ifade edilir.

4.2 Teorem

Kabul edelim ki $g(x) \in L_{per}^2(\Omega)$ ve $\int g(x)dx = 0$ olsun. Bu durumda Eş.4.40 ile tanımlanan $\mathcal{A}$ aşağıdaki aksiyomları sağlar.

i) $\mathcal{A}$ sınırlı ve $H^1(\Omega) \cap H_\alpha$ da zayıf olarak kapalıdır.

ii) $\forall t \geq 0$ için $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ dır

iii) $H^1(\Omega)$ 'daki her sınırlı X kümesi için $t \rightarrow \infty$ iken H^1 deki zayıf topolojiye göre $S(t)X$, $\mathcal{A}$ 'ya yakınsaktır. Yani,

$$dist(S(t)X, \mathcal{A}) = 0 \quad t \rightarrow \infty$$

dır.

İspat:

Bu teorem Teorem 4.1 ve [10]'daki teknikler kullanılarak çıkarılabilir. Burada Ball [24] tarafından geliştirilen teknik ile $\mathcal{A}$ 'nın aslında $H^1(\Omega)$ 'da yerel olmayan güçlü çekici olduğu gösterilmiştir.

4.3 Teorem

Teorem 4.2'de oluşturulan zayıf yerel olmayan çekici $H^1(\Omega)$ 'da güçlü yerel olmayan çekicidir [24].

İspat:

$w \in \mathcal{A}$ olması için gerek ve yeter şart $\{w_k^0\}_{k \in N}$ ve $\{t_k\}_{k \in N}$ iki dizi olmak üzere $S(t_k)w_k^0$, $H^1(\Omega)$ 'da w ye zayıf olarak yakınsamasıdır. Burada B , $H^1(\Omega)$ 'da sınırlı yutan küme olmak üzere $\{w_k^0\} \in B$ ve $t_k \rightarrow \infty$. Eğer $S(t_k)w_k^0$ dizisi $H^1(\Omega)$ 'da w 'ye güçlü yakınsak olmak üzere $w \in \mathcal{A}$ olduğunu gösterebilirsek teorem ispatlanmış olacaktır. $T > 0$ sabit ve Lemma 4.1'den ile $S(t_k - T)w_k^0$ dizisinin $H^1(\Omega)$ 'da sınırlı olduğu açıktır. Bu durumda bir alt dizisi mevcuttur. Ancak genelliği bozmadan alt dizi yerine dizinin kendisi alınabilir. Sonuç olarak $H^1(\Omega)$ 'da

$$S(t_k - T)w_k^0 \xrightarrow{w} v \quad (4.41)$$

dır. $w_k(t) = S(t)S(t_k - T)w_k^0 = S(t + t_k - T)w_k^0$ denilirse Eş.4.41 ve Teorem 4.1 den $w_k(t) \xrightarrow{w} S(t)v$, $H^1(\Omega)$ 'da ve $w = S(t)v$ dir. Eğer $u(t)$ Eş.3.1-Eş.3.3 probleminin bir çözümü ise o zaman Eş.3.1'in u ile H 'da iç çarpımını alırsak

$$\frac{d}{dt}(\|u\|^2 + \|u_x\|^2) + 2\nu\|u_x\|^2 + 2\int_{\Omega} (f(u))_x u dx = 2(g, u) \quad (4.42)$$

bulunur. Eş.4.32 ile benzer olarak

$$2 \int_{\Omega} (f(u))_x u dx = -2 \int_{\Omega} f(u) u_x dx = 0 \quad (4.43)$$

elde edilir. Eş.4.42 ve Eş.4.43'den

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{H^1}^2 + 2\nu \|u\|_{H^1}^2 = 2\nu \|u\|^2 + 2(g, u) \quad (4.44)$$

sonucu çıkar. Eş.4.44'den

$$\|u(t)\|_{H^1}^2 = e^{-2\nu t} \|u(0)\|_{H^1}^2 + \int_0^t e^{2\nu(\tau-t)} K(u(\tau)) d\tau \quad (4.45)$$

elde edilir. Burada

$K(u) = 2\nu \|u\|^2 + 2(g, u)$ dur. $H^1(\Omega) \subset H$ gömülmesi kompakt olduğundan dolayı $K(u)$ $H^1(\Omega)$ 'da zayıf süreklidir. Eş.4.45'de u yerine $w_k(t) = S(t)S(t_k - T)w_k^0$ 'yı ele alırsak

$$\|w_k(t)\|_{H^1}^2 = e^{-2\nu t} \|S(t_k - T)w_k^0\|_{H^1}^2 + \int_0^t e^{2\nu(\tau-t)} K(w_k(\tau)) d\tau \quad (4.46)$$

sonucu çıkar. Eş.4.46'da t yerine T alınır ve Lebesgue yakınsaklık teoreminden $S(t_k - T)w_k^0$ 'nın $H^1(\Omega)$ 'da sınırlı olmasında dikkate alınırsa

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|S(t_k)w_k^0\|_{H^1}^2 \leq C e^{-2\nu T} + \int_0^T e^{2\nu(\tau-T)} K(S(\tau)v) d\tau \quad (4.47)$$

elde edilir. Eş.4.45'e $w = S(T)v$ nin uygulanması ile

$$\|w\|_{H^1}^2 = e^{-2\nu T} \|v\|_{H^1}^2 + \int_0^T e^{2\nu(\tau-T)} K(S(\tau)v) d\tau \quad (4.48)$$

bulunur. Eş.4.47 ve Eş.4.48'den

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|S(t_k)w_k^0\|_{H^1}^2 \leq C e^{-2\nu T} + \|w\|_{H^1}^2 - e^{-2\nu T} \|w\|_{H^1}^2$$

elde edilir. $T \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|S(t_k)w_k^0\|_{H^1}^2 \leq \|w\|_{H^1}^2 \quad (4.49)$$

yazılır. $S(t_k)w_k^0$ nin $H^1(\Omega)$ 'da w 'ya zayıf yakınsadığından dolayı

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|S(t_k)w_k^0\|_{H^1}^2 \geq \|w\|_{H^1}^2 \quad (4.50)$$

elde edilir. Böylece Eş.4.49 ve Eş.4.50'den

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|S(t_k)w_k^0\|_{H^1}^2 = \|w\|_{H^1}^2$$

elde edilir. Bu sonuç zayıf yakınsaklık ile birlikte düşünüldüğünde kuvvetli yakınsaklık elde edilir. Böylece Teorem ispatlanmış oldu.

5. BENJAMİN-BONA-MAHONY DENKLEMİ İÇİN $H_{per}^2(\Omega)$ ’da YUTAN KÜME VE YEREL OLMAYAN ÇEKİCİNİN VARLIĞI

Bu bölümde B.B.M denklemi için $H_{per}^2(\Omega)$ da zayıf yerel olmayan çekicinin varlığı gösterilmiştir. Daha sonra Ball’un tekniği ile zayıf yerel olmayan çekicinin aynı zamanda güçlü yerel olmayan çekici olduğu gösterilmiştir.

5.1 Teorem

$u_0 \in H_{per}^k(\Omega)$, $k = 1, 2$ için Eş.3.1-Eş.3.3 denkleminin R^+ da tanımlanmış ve aşağıdaki koşulları sağlayan tek bir $u(t)$ çözümü vardır [22].

$$u(t) \in L^\infty(0, T; H_{per}^k(\Omega)), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0, T; H_{per}^k(\Omega)), \quad \forall T > 0$$

Bu teoremin ispatı 3. bölümde Teorem 3.2 ile benzer olduğundan yapılmamıştır. Bu teoremden Eş.3.1-Eş.3.3 sisteminin $S(t) : H_{per}^k(\Omega) \rightarrow H_{per}^k(\Omega), k = 1, 2$ sürekli yarıgrup oluşturduğunu göstermektedir [10].

5.1 Önerme

$S(t) : H_{per}^2(\Omega) \rightarrow H_{per}^2(\Omega)$ dinamik sistemi zayıf süreklidir [22]. Burada bilindiği gibi $H = L_{per}^2(\Omega)$ üzerindeki iç çarpımı $(\cdot, \cdot)$ ile normu ise $\| \cdot \|$ biçiminde gösterilecektir. $H^2(\Omega)$ uzayında yutan kümenin varlığı için 4. bölümde belirtilen zorluğu kaldırmak için tanımlandığı gibi burada da aynı düşünceyle H_α uzayını

$$H_\alpha = \{u \in H : |\theta(u)| \leq \alpha\}$$

gözönüne alacağız. Şimdi $S(t)$ yarı grubunun $H_{per}^2(\Omega)$ uzayında yutan kümeye sahip olduğunu göstereceğiz. Eş.4.26'dan H_α , $S(t)$ yarı grubu altında değişmez kümedir.

5.1 Lemma

$\theta(u) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) dx$, $u_0 \in H_{per}^1(\Omega) \cap H_\alpha$ ve $\|u_0\|_{H^1} \leq R$ olsun. Bu durumda $\forall t \geq t_1$ için $\|u(t)\|_{H^1} \leq E_1$ eşitsizliği sağlanır. Burada E_1 sadece (ν, g, Ω, α) değişkenlerine bağlı t_1 ise sadece (ν, g, Ω, α) ve R ye bağlıdır [22].

İspat:

$\forall u \in H$ için

$$\bar{u} = u - \theta(u) \quad (5.1)$$

olduğundan

$$u(t) = \bar{u}(t) + \theta(u(t)) = \bar{u}(t) + \theta(u_0) \quad (5.2)$$

olur. Eş.5.2, Eş.3.1'de yazarsak

$$\bar{u}_t - \bar{u}_{xxt} - \nu \bar{u}_{xx} + (f(u))_x = g(x) \quad (5.3)$$

bulunur. Eş.5.3 H da $\bar{u}$ ile iç çarpımını alırsak

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\bar{u}\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\bar{u}_x\|^2 + \nu \|\bar{u}_x\|^2 + \int_{\Omega} (f(u))_x = (g, \bar{u}) \quad (5.4)$$

elde edilir.

$$F(s) = \int_0^s f(\tau) d\tau$$

olmak üzere aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (f(u))_x \bar{u} dx &= - \int_{\Omega} f(u) \bar{u}_x dx = - \int_{\Omega} f(u) u_x dx \\ &= - \int_{\Omega} (F(u))_x dx = -F(u(L)) + F(u(0)) = 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

elde ederiz. Eğer

$$\int_{\Omega} v(x) dx = 0 \text{ ise } \|v\| \leq C_1 \|v_x\| \quad (5.6)$$

Poincare eşitsizliği sağlanır.

$$\int_{\Omega} \bar{u}(x, t) dx = \int_{\Omega} (u(x, t) - \theta(u)) dx = \int_{\Omega} u(x, t) dx - \int_{\Omega} u(x, t) dx = 0 \quad (5.7)$$

olduğundan Eş.5.6 ve Eş.5.7'den

$$\forall t \geq 0 \text{ için } \|\bar{u}(t)\| \leq C_1 \|\bar{u}_x(t)\| \quad (5.8)$$

elde edilir. Böylece

$$|(g, \bar{u})| \leq \|g\| \|\bar{u}\| \leq C_1 \|g\| \|\bar{u}_x\| \leq \frac{1}{4} \nu \|\bar{u}_x\|^2 + C_2 \quad (5.9)$$

yazılır. Eş.5.4, Eş.5.5 ve Eş.5.9'dan

$$\frac{d}{dt}(\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{u}_x\|^2) + \frac{3}{2}\nu\|\bar{u}_x\|^2 \leq 2C_2 \quad (5.10)$$

$$\frac{3}{2}\nu\|\bar{u}_x\|^2 = \frac{1}{2}\nu\|\bar{u}_x\|^2 + \nu\|\bar{u}_x\|^2 \geq \frac{1}{2}\nu\|\bar{u}_x\|^2 + \nu C_1^{-2}\|\bar{u}\|^2 \geq C_3(\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{u}_x\|^2) \quad (5.11)$$

eşitsizliğielde edilir. burada $C_3 = \min\left\{\left(\frac{1}{2}\right)\nu, \nu C_1^{-2}\right\}$ olup, bununla birlikte Eş.5.10 ve Eş.5.11'den

$$\forall t \geq 0 \text{ için } \frac{d}{dt}(\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{u}_x\|^2) + C_3(\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{u}_x\|^2) \leq 2C_2 \quad (5.12)$$

elde edilir. Gronwall Eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \|\bar{u}(t)\|^2 + \|\bar{u}_x(t)\|^2 &\leq (\|\bar{u}(0)\|^2 + \|\bar{u}_x(0)\|^2)e^{-C_3 t} + \frac{2C_2}{C_3} \leq (1 + C_1^2)\|\bar{u}_x(0)\|^2 e^{-C_3 t} + \frac{2C_2}{C_3} \\ &\leq (1 + C_1^2)\|u_x(0)\|^2 e^{-C_3 t} + \frac{2C_2}{C_3} \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} &\leq (1 + C_1^2)R^2 e^{-C_3 t} + \frac{2C_2}{C_3}, \quad \forall t \geq 0 \\ &\leq \frac{4C_2}{C_3}, \quad \forall t \geq t_*, \quad t_* = \left(\frac{1}{C_3}\right)\ln(C_3(1 + C_1^2)R^2 / 2C_2) \end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitsizlikle birlikte

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2 &= \|\bar{u}(t)\|^2 + \|\theta(u)\|^2 = \|\bar{u}(t)\|^2 + |\theta(u)|^2 |\Omega| \\ &\leq \|\bar{u}(t)\| + \alpha^2 |\Omega| \end{aligned} \quad (5.14)$$

olduğundan

$$\|u(t)\|_{H^1}^2 = \|u(t)\|^2 + \|u_x(t)\|^2 \leq \|\bar{u}(t)\|^2 + \|\bar{u}_x(t)\|^2 + \alpha^2 |\Omega| \leq \frac{4C_2}{C_3} + \alpha^2 |\Omega|$$

sonucu elde edilir. Agmon eşitsizliğinden

$$\|u\|_{\infty} \leq C_1 \|u\|^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^1}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in H_{per}^1(\Omega) \quad (5.15)$$

olduğundan Lemma 5.1'den

$$\forall t \geq t_*, \quad \|u(t)\|_{\infty} \leq C, \quad (5.16)$$

elde edilir. Şimdi aşağıdaki Lemmayı verelim.

5.2 Lemma

$u_0 \in H_{per}^2(\Omega) \cap H_{\alpha}$, (5.1) ve $\|u_0\|_{H^2} \leq R$ olsun. Bu durumda $\forall t \geq t_2$

$$\|u(t)\|_{H^2} \leq E_2, \quad \forall t \geq t_2$$

olur. Burada E_2 $(\nu, f, g, \Omega, \alpha)$ değişkenlerine, t_2 ise $(\nu, f, g, \Omega, \alpha)$ değişkenlerine ve R ye bağlıdır [22].

İspat :

Eş.3.1 H da u_{xx} ile iç çarpımı alınır Ω bölgesi üzerinden integre edilirse

$$\frac{d}{dt} (\|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2) + 2\nu \|u_{xx}\|^2 = 2 \int_{\Omega} f'(u) u_x u_{xx} dx - 2(g, u_{xx}) \quad (5.17)$$

yazılır. Eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk terim ve ikinci terimlere bilinen eşitsizliklerin kullanılmasıyla

$$\left| 2 \int_{\Omega} f'(u) u_x u_{xx} dx \right| \leq 2 \|f'(u)\|_{\infty} \|u_x\| \|u_{xx}\| \leq C_1 \|u_{xx}\| \leq \frac{1}{2} \nu \|u_{xx}\|^2 + \frac{C_1^2}{2\nu} \quad (5.18)$$

$$|-2(g, u_{xx})| \leq 2 \|g\| \|u_{xx}\| \leq \frac{1}{2} \nu \|u_{xx}\|^2 + \frac{2}{\nu} \|g\|^2 \quad (5.19)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece Eş.5.18-Eş.5.19'dan

$$\frac{d}{dt} (\|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2) + \nu \|u_{xx}\|^2 \leq C_2 \quad (5.20)$$

elde edilir. Eş.5.20'den

$$\frac{d}{dt} (\|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2) + \nu (\|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2) \leq \nu \|u_x\|^2 + C_2 \leq C_3, \quad \forall t \geq t_* \quad (5.21)$$

sonucu çıkar. Daha sonra Eş.5.21 ele aldığımızda $\forall T > 0$ için

$$\frac{d}{dt} (\|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2) + \nu (\|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2) \leq C_4, \quad \forall 0 \leq t \leq T \quad (5.22)$$

sonucu elde edilir. $\|u_0\|_{H^2} \leq R$ olduğundan C_4 , R ve T 'ye bağlıdır. Gronwall eşitsizliğinden ve Eş.5.22'den

$$\begin{aligned} \|u_x(t)\|^2 + \|u_{xx}(t)\|^2 &\leq (\|u_x(0)\|^2 + \|u_{xx}(0)\|^2) e^{-\nu t} + \frac{C_4}{\nu} \\ &\leq R^2 e^{-\nu t} + \frac{C_4}{\nu} \leq C_5, \quad \forall 0 \leq t \leq T, \quad T > 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

yazılır. Eş.5.21'e tekrar Gronwall eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{aligned}
\|u_x(t)\|^2 + \|u_{xx}(t)\|^2 &\leq (\|u_x(t_*)\|^2 + \|u_{xx}(t_*)\|^2)e^{-\nu(t-t_*)} + \frac{C_3}{\nu} \\
&\leq C_5 e^{-\nu(t-t_*)} + \frac{C_3}{\nu}, \quad \forall t \geq t_* \\
&\leq \frac{2C_3}{\nu}, \quad \forall t \geq t'_*
\end{aligned} \tag{5.24}$$

burada $t'_* = \max\left\{t_*, t_* + \left(\frac{1}{\nu}\right) \ln(\nu C_5(R) / C_3)\right\}$ dir. Böylece

$$B = \{u \in H_{per}^2(\Omega) : \|u\|_{H^2} \leq E_2\}$$

elde edilir. Burada E_2 Lemma 5.2 de belirtilen sabittir. Böylece B kümesi $H_{per}^2(\Omega)$ da $S(t)$ yarıgrubu için yutan kümedir. Şimdi $\mathcal{A} = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)B}$ olsun. Burada ki kapanış H_{per}^2 da zayıf topolojiye göre alınmıştır. Önerme 5.1'den Teorem 5.2 kolaylıkla yazabilir.

5.2 Teorem

$\mathcal{A}$ kümesi $H_{per}^2(\Omega)$ da zayıf yerel olmayan çekicidir.

i) $\mathcal{A}$ sınırlı ve $H_{per}^2(\Omega)$ da zayıf kapalıdır.

ii) $\forall t \in R$ için $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$

iii) $H_{per}^2(\Omega)$ da her bir sınırlı X kümesi için $t \rightarrow \infty$ iken

$$d^w(S(t)X, \mathcal{A}) = \sup_{x \in X} \inf_{y \in \mathcal{A}} d^w(S(t)x, y) \rightarrow 0 \text{ dir [22].}$$

5.3 Teorem

Teorem 5.1’de oluşturulan $\mathcal{A}$ zayıf yerel olmayan çekici $H_{per}^2(\Omega)$ ’da güçlü yerel olmayan çekicidir [22].

İspat:

Bir w noktasının $\mathcal{A}$ ’ya ait olması için $\{w_k^0\}_{k \in \mathbb{N}} \subset B$ ve $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}, t_k \rightarrow \infty$ iken, dizileri için $S(t_k)w_k^0$ ’nın w ya $H_{per}^2(\Omega)$ ’da zayıf olarak yakınsaması gereklidir. Eğer $S(t_k)w_k^0$ dizisinin $H_{per}^2(\Omega)$ ’da w ’ye güçlü olarak yakınsadığını gösterebilirsek ispat tamamlanır. $T > 0$ sabit olmak üzere $S(t_k - T)w_k^0$ dizisi $H_{per}^2(\Omega)$ ’da sınırlı olduğundan $S(t_k - T)w_k^0$ dizisinin bir alt dizisi ve $v \in H_{per}^2(\Omega)$ vardır. Ancak genelliği bozmadan alt dizi yerine dizinin kendisini alabiliriz. $H_{per}^2(\Omega)$ ’da

$$S(t_k - T)w_k^0 \xrightarrow{w} v \quad (5.25)$$

olur. $w_k(t) = S(t)S(t_k - T)w_k^0 = S(t_k + t - T)w_k^0$ denilirse Eş.5.25 ve Önerme 5.1’den $H_{per}^2(\Omega)$ ’da $w_k(t) \xrightarrow{w} S(t)v$ elde edilir. Eş.3.1-Eş.3.3 probleminin herhangi bir çözümü Eş.5.17 sağladığından Eş.5.17 $w_k(t)$ cinsinden yazılırsa

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial x} w_k(t) \right\|^2 + \left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_k(t) \right\|^2 &= e^{-2\nu t} (\|(S(t_k - T)w_k^0)_x\|^2 + \|(S(t_k - T)w_k^0)_{xx}\|^2) + \\ &\int_0^t e^{2\nu(\tau-t)} K(S(t_k + \tau - T)w_k^0) d\tau \end{aligned} \quad (5.26)$$

elde edilir. Burada

$$K(u) = 2\nu \|u_x\|^2 + 2(f'(u)u_x, u_{xx}) - 2(g, u_{xx})$$

dır. Eş.5.26'da $t = T$ alınırsa Lebesgue yakınsaklık teoreminden

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} (\|(S(t_k)w_k^0)_x\|^2 + \|(S(t_k)w_k^0)_{xx}\|^2) \leq Ce^{-2\nu T} + \int_0^T e^{2\nu(\tau-T)} K(S(\tau)v) d\tau \quad (5.27)$$

sonucu çıkar. Eş.5.26'ya benzer olarak $w = S(T)v$ yi uyguladığımızda

$$\|w_x\|^2 + \|w_{xx}\|^2 = e^{-2\nu T} (\|v_x\|^2 + \|v_{xx}\|^2) + \int_0^T e^{2\nu(\tau-T)} K(S(\tau)v) d\tau \quad (5.28)$$

Eş.5.27 ve Eş.5.28'den

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} (\|(S(t_k)w_k^0)_x\|^2 + \|(S(t_k)w_k^0)_{xx}\|^2) \leq Ce^{-2\nu T} + \|w_x\|^2 + \|w_{xx}\|^2$$

elde edilir. $T \rightarrow \infty$ için limit aldığımızda

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} (\|(S(t_k)w_k^0)_x\|^2 + \|(S(t_k)w_k^0)_{xx}\|^2) \leq \|w_x\|^2 + \|w_{xx}\|^2 \quad (5.29)$$

$H_{per}^2(\Omega)$ da $S(t_k)w_k^0 \xrightarrow{w} w$ olduğundan Sobolev gömülme teoreminden H 'da

$S(t_k)w_k^0 \rightarrow w$ olur. Eş.5.29'dan

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|S(t_k)w_k^0\|_{H^2}^2 \leq \|w\|_{H^2}^2 \quad (5.30)$$

elde edilir. Diğer yönden $S(t_k)w_k^0 \xrightarrow{w} w$ olduğundan

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|S(t_k)w_k^0\|_{H^2}^2 \geq \|w\|_{H^2}^2 \quad (5.31)$$

sonucu çıkar. Eş.5.30 ve Eş.5.31'den

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|S(t_k)w_k^0\|_{H^2}^2 = \|w\|_{H^2}^2$$

sonucu çıkar. Böylece $\mathcal{A}$ zayıf yerel olmayan çekici $H_{per}^2(\Omega)$ 'da güçlü yerel olmayan çekicidir. Böylece Teorem ispatlanmış olur.

KAYNAKLAR

1. Adams A. R., “Sobolev space, 65”, *Academic Pres*, London, 1-247 (1975).
2. Albert J., “On the decay of solutions of the generalized Benjamin-Bona-Mahony equation”, *J. Math. Anal. Applic*, 141: 527-537 (1989).
3. Amick C.J, Bona J.L and Schonbek M.E, “Decay of solutions some nonlinear wave equations”, *J. Diff. Eqns*, 81: 1-49 (1989).
4. Benjamin T.B, Bona J.L and Mahony J.J, “Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems”, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 272: 47-48(1972).
5. Bona J.L and Dougalis V.A, An initial and boundary value problem for a model equation for propagation of long waves , *J. Math. Anal. Appl.*, 75: 503-522(1980).
6. Bona J.L and Smith R ,”The initial value problem for the Korteweg-deVries equation” , *Phil. Trans. R. Soc.*, 278: 555-604 (1975).
7. Çelebi A. O., Kalantarov V. K., ve Polat M., “Attractors for the generalized Benjamin-Bona-Mahony Equation” , *J. Differential Equations*, 157(2): 439-451 (1999).
8. Dayanand Reddy B., “Functional Analysis and Boundary-value Problems: an Introductory Treatment, 30”, *Longman Scientific & Technical*, Virginia University, 23-241 (1986).
9. Evans L. C., “Partial Differential Equations”, *Graduate Studies in Mathematics*, United States of America, 400-650 (1994).
10. Ghidaglia J. M., “Finite Dimensional Behavior For Weakly Damped Driven Schrödinger Equations” *Ann. Inst. Henri Poincare*, 5(4), 365-405 (1988).
11. Kesevan S., “Topics in Functional Analysis And Applications”, *John Willey & Sons*, India, 1-267 (1989).
12. Mohana Rao M. R., “Ordinary Differential Equations, 90”, *Indian Institute of Tecnology*, Kanpur, 38-42(1987).
13. Mederios L.A and Miranda M.M, “Weak Solutions for a Nonlinear Dispersive Equation” *Journal of Mathematical Analysis and Appl.*, 59: 432-441 (1977).
14. Musayev B. and Alp M., “Fonksiyonel Analiz” *Balcı Yayınları*, Kütahya, 23-268 (2000).
15. Robinson J.C., “Infinite-Dimensional Dynamical Systems An Introduction to

- Dissipative Parabolic PDEs and Theory of Global Attractors'', **Cambridge University Pres**, 1-453 (2001).
16. Sell G.R. and You Y., ''Dynamics of Evolutionary Equations'', **Springer-Verlag**, 593-626 (2002).
 17. Strauss W.A., ''The Energy Method in Nonlinear Partial Differential Equations'' **Notas de Mathematica** , 47, (1969).
 18. Stanislavova M., Stefanov A. and Wang B., Asymptotic Smoothing and ''Attractors for the Generalized Benjamin-Bona-Mahony Equation on R^3 '' , **J. Differential Equations**, 219: 451-483 (2005).
 19. Suhibi, E. S., ''Fonksiyonel Analiz, 38'', **İTÜ vakfi Yayınları**, İstanbul, 1-638 (2001).
 20. Temam R., ''Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, 68'', **Springer-Verlag**, New York, 53-482 (1988).
 21. Temam R., ''Navier Stokes Equations'', **Elsevier Science Publishers B.V**, Amsterdam, 248-2611(1984).
 22. Wang B., ''Strong Attractors for he Benjamin-Bona-Mahony Equation'' **Applied Mathematics**, 10(2): 23-28 (1996).
 23. Wang B., Attractors for reaction-diffusion in bounded domains, **Physica D**, 128: 41-52 (1999).
 24. Wang B. and Yang W., ''Finite-Dimensional Behavior for The Benjamin- Bona-Mahony Equation'' **J. Phys. A. Mathematics** , 30: 4877-4885 (1996).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : BAŞER, Yasin
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 20.06.1985 Ankara
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0 554 616 05 84
e-mail : taylor1950@gmail.com.

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Niğde Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2007
Lise	Mustafa Kemal Lisesi	2002

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Kitap okumak, tenis, futbol.