

**BİR TÜRBÜLANSLI AKIŞ MODELİNİN
ZAYIF ÇÖZÜMLERİNİN
VARLIĞI VE TEKLİĞİ ÜZERİNE**

İbrahim ŞAHİNER

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**NİSAN 2008
ANKARA**

İbrahim ŞAHİNER tarafından hazırlanan BİR TÜRBÜLANSLI AKIŞ
MODELİNİN ZAYIF ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI VE TEKLİĞİ ÜZERİNE adlı
bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Meryem KAYA

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek
Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Abdullah ALTIN

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Meryem KAYA

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Ogün DOĞRU

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Nuri ÖZALP

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Tarih: 18/04/2008

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini
onamıştır.

Prof. Dr. Nermin ERTAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

İbrahim ŞAHİNER

**BİR TÜRBÜLANSLI AKIŞ MODELİNİN
ZAYIF ÇÖZÜMLERİNİN
VARLIĞI VE TEKLİĞİ ÜZERİNE
(Yüksek Lisans Tezi)**

İbrahim ŞAHİNER

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Nisan 2008**

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Tezin giriş bölümünde, türbülans hakkında kısaca bilgi verilip, bazı LES modelleri tanıtılacaktır. İkinci bölümde ise kullanılan notasyonlar ve temel kavramlar üzerinde durulacaktır. Tezin üçüncü bölümünde, Navier-Stokes ve ortalama Navier-Stokes denklemleri hakkında bilgi verilecektir. Dördüncü bölümde ise Smagorinsky modeli ile ilgili olarak literatürde bilinen bazı sonuçlar çıkarılarak, Smagorinsky modelinin zayıf çözümlerinin varlığı ve teklığı üzerine bilinen sonuçlar verilecektir.

Bilim Kodu : 204.1.138
Anahtar Kelimeler : Galerkin metodu, LES modelleri, Smagorinsky modeli
Sayfa Adedi : 42
Tez Yöneticisi : Yrd.Doç.Dr. Meryem Kaya

**ON THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF WEAK SOLUTIONS OF
THE MODEL OF A TURBULENCE FLOW
(M.Sc. Thesis)**

İbrahim ŞAHİNER

**GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
April 2008**

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters. In the introduction part of the first section, information about the turbulent will be given briefly that some of the LES models will be introduced. In the second part, notations and basic terms will be introduced. In the third part, information about the Navier-Stokes equations, on the average Navier- Stokes equations will be given. In the fourth part, some known results in the literature about the existence and uniqueness of weak solutions of the Smagorinsky LES model are studied.

Science Code : 204.1.138

Key Words : Galerkin method, Large Eddy simulations, Smagorinsky model

Page Number: 42

Adviser : Assist.Prof.Dr. Meryem Kaya

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli katkılarıyla bu tezi oluşturmamda yardımcı olan, beni yönlendiren değerli hocam, Sayın Yrd.Doç.Dr. Meryem KAYA'ya ayrıca, çalışmalarım sırasında desteklerini esirgemeyen aileme, eşim Canan ve kızım Emine Berra'ya teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
1. GİRİŞ	1
2. NOTASYON VE TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Notasyonlar.....	3
2.2. Bazı Fonksiyon Uzayları.....	4
2.3. Bazı Temel Tanımlar.....	6
2.4. Bazı Önemli Eşitsizlikler.....	8
3. NAVIER–STOKES VE ORTALAMALI NAVIER–STOKES DENKLEMLERİ	10
4. SMAGORINSKY MODELİNİN ZAYIF ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI VE TEKLİĞİ ÜZERİNE.....	13
4.1. Galerkin Metodu.....	21
KAYNAKLAR.....	40
ÖZGEÇMİŞ.....	42

1. GİRİŞ

Türbülanslı akışlarla, günlük hayatımızda pek çok olayda karşılaşırız. Örneğin, bacadan çıkan dumanı gözlemlediğimizde, bu bir türbülanslı akıştır. Irmaklardaki, kanallardaki ve okyanuslardaki su hareketlerinin de birer türbülanslı akış olduğu gözlemlenir. Türbülanslı akışların pek çok diğer örnekleriyle nükleer, çevre, kimya mühendisliklerinde, okyanus biliminde, astrofizikte karşılaşılır.

Araba dizayn etmede oluşturulan rüzgar kanallarındaki akışlar, araba ve uçakların arkalarında bıraktıkları hava akışları, türbülanslı akışlara örnek teşkil eder. Doğada yönü ve hızı birdenbire değişebilen yüksek hızlı kasırga da türbülanslı akışa bir başka örnektir. Türbülanslı akışlar, pek çok farklı ölçeklerde girdapları içerir. Kasırga örneği düşünüldüğünde, çok büyük ölçekte girdapların yanı sıra, çok küçük ölçekte girdaplar da vardır.

Türbülanslı akışların direk simülasyonu bilgisayarlar tarafından hesaplama yapmanın mümkün olduğu da bir yoldur. Fakat oldukça masraflı bir yoldur. Bu nedenle bu akışlara yaklaşmanın bir başka yolu da LES ile mümkündür. LES; Büyük girdap simülasyonunda temel fikir, hızı $\bar{u}$ ile göstereceğimiz bir uzaysal ortalama ve bu ortalamadan sapma u' olmak üzere, iki parçaya ayırmaktır. Burada, $\bar{u}$ konvolüsyon yardımıyla tanımlanır. Türbülanslı akışlarda, $\bar{u}$ hızın ortalama değerini göstermek üzere, u' nü de ortalama değerden sapma(fluctuation) olarak gösterirsek,

$u = \bar{u} + u'$ olarak yazılır. Böylece,

$$\overline{uu} = \overline{(\bar{u} + u')(\bar{u} + u')} = \overline{\bar{u}\bar{u}} + \overline{\bar{u}u'} + \overline{u'\bar{u}} + \overline{u'u'}$$

şeklinde lineer olmayan terimlere ayrılır. Buradaki terimler, çözümlenmiş terim, çapraz terim ve türbülanslı salımlar olarak adlandırılır. Her bir terim bir takım fiziksel ve deneysel gerçekler göz önüne alınarak modellenir. Bu yaklaşımla pek çok bilim adamı tarafından, pek çok model üretilmiştir.

LES modelleri, Reynolds stress tensörü olarak adlandırılan $R = \overline{u u} - \bar{u} \bar{u}$ nin deneysel ve fiziksel gerçekler göz önüne alınarak modellenmesiyle oluşturulur. Reynolds, 1895’de Navier–Stokes denklemleri gibi bir türbülanslı akış için,

$$\bar{u}_t - \bar{u} \cdot \nabla \bar{u} + \nabla p - \nu \Delta \bar{u} + \nabla (V_T \nabla \bar{u}) = f$$

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0$$

denklemlerini önermiştir [20]. Smagorinsky ise V_T katsayısının $\nu + \nu_s \|\nabla u\|_F$ biçiminde olacağını belirtmiştir. Böylece elde edilen Smagorinsky modelinin oluşturduğu sistem için matematiksel olarak Navier–Stokes denklemlerinden daha iyi sonuçlar elde edilmiştir. Smagorinsky modelinin çözümünün üç boyutlu uzayda da varlık ve teklik çözümlerinin regülerliği elde edilmiştir [15]. Bu sonuçlar için daha fazla bilgi Mohammadi (2004) kaynağında mevcuttur.

Pek çok bilim adamı $\overline{uu}$ terimi için, en iyi yaklaşımı vererek çeşitli modeller oluşturmuşlardır. Taylor LES modeli de benzer şekilde,

$$w_t + w \cdot \nabla w + \nabla \cdot (\nu + \nu_s \|\nabla w\|_F^{2\mu} \nabla w) + \nabla \cdot \left(\frac{\lambda^2}{2\gamma} (\nabla w \nabla w^T) \right) + \nabla r = f$$

$$\nabla \cdot w = 0$$

biçiminde verilmiştir. Ladyzhenskaya’ nın Smagorinsky modeli için [12,13]’de vermiş olduğu varlık ve teklik ispatını, Coletti (1998)’de Taylor LES modeli için genişletmiştir. Benzer şekilde, Rasyonel-LES model Galdi ve Layton tarafından Padé yaklaşımı kullanılarak,

$$w_t - \nabla \cdot (\nu + \nu_s \|\nabla w\|_F) \nabla w + (w \cdot \nabla) w + \nabla r + \nabla \cdot \left(\frac{\delta^2}{2\gamma} \left(I - \frac{\delta^2}{4\gamma} \nabla \right)^{-1} (\nabla w \nabla w^T) \right) = f$$

$$\nabla \cdot w = 0$$

biçiminde önerilmiş, bu modelin çözümlerinin varlığı ve tekliği üzerine sonuçlar Traian Iliescu tarafından verilmiştir [9].

Bu kısımda bahsedilen konularla ilgili daha detaylı bilgi için [4,9,10,14-17,19,21] kaynaklarına bakılabilir.

2. NOTASYON VE BAZI TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Notasyonlar

2.1.1 Tanım

Eğer $A = (a_{ij})_{i,j=1}^d$ ve $B = (b_{ij})_{i,j=1}^d$ $d \times d$ tipinde matrisler ise bu durumda,

$$A : B = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{ij} b_{ij} \quad \text{ve,}$$

$$\|A\|_F = |A| = (A : A)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{biçiminde tanımlanır.}$$

2.1.2 Tanım(Çoklu indis)

Her bir α_i bileşeni pozitif tam sayı olan $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ biçimindeki bir vektör çoklu indis olarak tanımlanır. Burada,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \text{ dir.}$$

$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u \quad \text{dır.}$$

2.1.3 Tanım

Eğer $m > 1$ ve $u : \Omega \rightarrow \Re^m$ $u = (u^1, \dots, u^m)$

$D^\alpha u = (D^\alpha u^1, \dots, D^\alpha u^m)$ biçiminde tanımlanır. Bu durumda,

$$D^k u = \{D^\alpha u : |\alpha| = k\}$$

$$|D^k u| = \left(\sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^2 \right)^{1/2} \text{ dir.}$$

Özel olarak $k = 1$ alınırsa ;

$$Du = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u^1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u^m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u^m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

biçimindedir. Burada $Du = \nabla u$ biçiminde de gösterilir.

2.1.5 Tanım

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ olmak üzere, matrisin diverjansı

$$\nabla \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{12}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial a_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{22}}{\partial x_2} \end{pmatrix} \text{ şeklindedir.}$$

2.2. Bazı Fonksiyon Uzayları

2.2.1 $C^k(\Omega)$ Uzayı

k doğal sayı olmak üzere k 'ıncı mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonların uzayı $C^k(\Omega)$ ile gösterilir. Yani,

$C^k(\Omega) : \{u : \Omega \rightarrow \mathfrak{R} : u \text{ } k \text{ ' yıncı mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyon} \}$ dır.

2.2.2 $C^\infty(\Omega)$ Uzayı

$k = \infty$ ise, $C^\infty(\Omega)$ ile, her mertebeden türevlere sahip fonksiyonların uzayı,

$C^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathfrak{R} : u \text{ her mertebeden türevlenebilir} \}$ biçiminde tanımlanır.

2.2.3 $C_0^\infty(\Omega)$ Uzayı

Ω 'da kompakt desteğe sahip, her mertebeden türevlenebilir fonksiyonların uzayı $C_0^\infty(\Omega)$ ile tanımlanır.

2.2.4 L^p Uzayı

$p \geq 1$ için ,

$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx$ integrali sonlu ise; $\mathfrak{R}^n$ nin bir Ω alt cümlesi üzerinde tanımlı $u : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$

ölçülebilir fonksiyonların uzayına $L_p(\Omega)$ uzayı denir.

2.2.5 $L_\infty(\Omega)$ Uzayı

$p \rightarrow \infty$ için Ω üzerinde hemen hemen her yerde (h.h.h.) sınırlı, ölçülebilir fonksiyonlar uzayı $L_\infty(\Omega)$ ile gösterilecektir. Yani kısaca

$L_\infty(\Omega) = \{u : |u(x)| \leq k ; \Omega' \text{ da h.h.h.} \}$ biçiminde ifade edilir.

2.2.6 $L^p(0, T; X)$ Uzayı

X bir Banach uzayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun $L^p(0, T; X)$ ile

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \begin{cases} \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} & , 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}_{t \in (0, T)} \|u(t)\|_X & , p = \infty \end{cases}$$

sonlu olacak şekilde;

$u : t \in (0, T) \rightarrow u(t) \in X$ ölçülebilir fonksiyonların uzayıdır.

2.2.7 Sobolev Uzayı

$\mathfrak{R}^n$ 'nin bir açık cümlesi Ω olsun. Bu küme üzerinde skaler değerli fonksiyonları $u = u(x_1, \dots, x_n)$ $x \in \Omega$ şeklinde gösterelim. m pozitif bir tam sayı olmak üzere, $D^r u$, $0 \leq |r| \leq m$ zayıf türevleri $L_p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ uzayında olan fonksiyonların uzayına Sobolev uzayı denir. Sobolev uzayı üzerinde

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ bir normdur. Böylece,}$$

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u : D^r u \in L_p(\Omega), 0 \leq |r| \leq m\}, \quad 1 \leq p \leq \infty \text{ dır.}$$

2.3. Bazı Temel Tanımlar

2.3.1 Tanım

X lineer uzay olmak üzere,

- i) Her $u, v \in X$ için, $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$
 - ii) Her $u \in X$, $\lambda \in \mathfrak{R}$ için, $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$
 - iii) $\|u\| = 0$ eşitliğinin sağlaması için gerek ve yeter koşul $u = 0$ dır
- özellikleri sağlayan $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümüne norm denir.

2.3.2 Tanım

Eğer $\lim_{k \rightarrow \infty} \|w_k - w\| = 0$ ise,

$\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \subset V$ alt dizisi, $w \in V$ 'de yakınsaktır denir ve

$w_k \rightarrow w$ şeklinde yazılır.

2.3.3 Tanım

- i) $u^* : X \rightarrow \mathfrak{R}$ sınırlı lineer operatörü, X üzerinde sınırlı lineer fonksiyonel olarak adlandırılır.
- ii) X üzerindeki sınırlı lineer fonksiyonellerin uzayına X 'in dual uzayı denir ve X^* şeklinde gösterilir.

2.3.4 Tanım

Eğer her sınırlı lineer $u^* \in X^*$ fonksiyoneli için

$$\langle u^*, u_k \rangle \rightarrow \langle u^*, u \rangle \text{ ise,}$$

$\{u_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ dizisi u ' ya zayıf yakınsaktır denir ve $u_k \rightharpoonup u$ şeklinde gösterilir.

2.3.5 Tanım

Eğer X uzayının sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa, X uzayına ayrılabilir bir uzaydır denir.

2.3.6 Tanım

U ve V normlu uzaylar ve $A : U \rightarrow V$ bir lineer operatör olsun. Eğer, her $u \in U$ için, $\|A u\|_V \leq K \|u\|_U$ olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı varsa A operatörü sınırlıdır denir.

2.4. Bazı Önemli Eşitsizlikler

2.4.1 Young Eşitsizliği

$1 < p, q < \infty$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. O zaman

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (a, b > 0)$$

2.4.2 Hölder Eşitsizliği

$1 \leq p, q \leq \infty$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda

$u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$ ise,

$$\int_{\Omega} |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)} \text{ dir.}$$

2.4.3 Cauchy – Schwarz Eşitsizliği

$$|xy| \leq |x| |y| \quad (x, y \in \mathfrak{R}^n)$$

2.4.4 Gronwall Lemması

$T \in \mathfrak{R}^+ \cup \infty$, $f, g \in L^\infty(0, T)$, $h \in L^1(0, T)$ ve $h(t) \geq 0$ için, $h(t) \geq 0$ olsun. Bu durumda, $h(t) \geq 0$ için,

$$f(t) \leq g(t) + \int_0^t \exp\left(\int_s^t h(\tau) d\tau\right) h(s) g(s) ds \quad \text{eşitsizliği,}$$

$f(t) \leq g(t) + \int_0^t h(s) f(s) ds$ eşitsizliğini sağlar. Eğer, $g \in W^{1,1}(0, T)$ ise,

$$f(t) \leq \exp\left(\int_0^t h(\tau) d\tau\right) \left(g(0) + \int_0^t \exp\left(-\int_0^s h(\tau) d\tau\right) g'(s) ds\right) \text{ eşitsizliği sağlanır.}$$

Bu bölümde verilen eşitsizlikler, bazı temel tanımlar ve notasyonların detayları için [1,6,10,22,23] kaynaklarına bakılabilir.

3. NAVIER - STOKES VE ORTALAMALI NAVIER - STOKES DENKLEMLERİ

Akışkanlar mekaniğinin temel denklemleri kütle, momentum ve enerjinin korunumu kanunlarından çıkarılır [16].

R^3 ün Ω bölgesinde sıkıştırılmaz akışları düşünelim. Bu akışların hareketlerini belirleyen Navier-Stokes denklemleri,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla p = f \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (3.2)$$

biçiminde verilir. Burada t zaman, $x = (x_1, x_2, x_3)$ Ω 'nın bir noktasını, $u = u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$ akış hızını, $p = p(x, t)$ basıncı ve ν pozitif sabit viskozite katsayısını verir. Ayrıca ;

$$u \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad j = 1, 2, 3 \quad \text{konvektif terim,}$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad \text{Laplace operatörü,}$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \quad \text{gradient ve}$$

$$\text{div} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{diverjans operatörünü, } f \text{ ise dış kuvveti göstermektedir.}$$

Eş. 3.1 momentumun korunumu (Newton kuralı), Eş. 3.2 kütle korunumundan (sıkıştırılmazlık koşulu) çıkarılır ve süreklilik denklemi olarak da bilinir [16]. Bu denklemlerden iyi tanımlı bir Cauchy problemi elde etmek için başlangıç ve sınır koşulları ile birlikte düşünülmelidir. Genelde başlangıç koşulu olarak başlangıç zamanında bölgenin her noktasında hızın değeri verilir. Sınır koşulları probleme göre değişir. Bu problemlerin Poiseuille ya da Couette'nin akışları gibi basit durumlar dışında analitik çözümleri yoktur. Navier-Stokes denklemleri için, tanımlanan

problemin çözümünün varlık ve tekliği iki boyutlu durumda ispatlanmış, üç boyutlu uzayda ancak küçük Reynold başlangıç sayıları için Kiselev ve Ladyzhenskaya tarafından ispatlanmıştır [11]. Bundan dolayı, bu denklemleri çözmek için pek çok nümerik yöntemler araştırılmıştır. Analitik çözümlerde olduğu gibi, Reynold sayısının büyük olduğu (bu akışlar türbülanslı akışlar olarak adlandırılır) durumlarda da çözümler kararlı değildir.

Doğada ve endüstride meydana gelen pek çok olayı anlamak için, türbülanslı akışların simülasyonu gerekmektedir. LES (large eddy simulation), büyük girdap simülasyonu, çok popüler bir yaklaşımdır. LES’de temel düşünce, akışkanı belirleyen hız, basınç, dış kuvvet gibi büyüklüklerin büyük girdaplı ve kalanı da küçük girdaplı olmak üzere ikiye ayrılması şeklindedir. İdeal yaklaşım direk olarak Navier–Stokes denklemlerinin diskretizasyonu kullanılarak Galerkin’in sonlu eleman yaklaşımı gibi yöntemlerle hesaplamalar yapmaktır. Bu yaklaşım direk nümerik simülasyon olarak adlandırılır. Ancak günümüz bilgisayarlarında Reynold sayısının sınırlı değerleri için hesaplama yapılabilir.

Daha önce bahsettiğimiz gibi, türbülanslı akışları modellemede diğer bir yol büyük girdap simülasyonudur. Büyük girdap simülasyonunda esas amaç yeni bir sistem elde etmek için, konvolüsyon operatörü kullanarak Navier-Stokes denklemlerinin yeniden düzenlenmesi şeklindedir. Büyük girdap simülasyonunda, büyük akış yapıları ortalama hız, basınç yardımıyla tanımlanır. Büyük ölçekli akışları tanımlamak için Navier – Stokes denklemlerinin uygun bir filter fonksiyonu ile konvolüsyonu alınır. Bunun için genelde kullanılan Gaussian filter,

$$g_{\delta}(x) = \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\delta^3} e^{\frac{-\gamma|x|^2}{\delta^2}}, \quad |x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$\gamma > 0$, $\delta > 0$ (ortalama yarıçapı gösterir) göz önüne alınsın. Herhangi $u(x,t)$ fonksiyonu için ortalama operatörü konvolüsyon yardımıyla,

$\bar{u}(x,t) = (g_\delta * u)(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} g_\delta(x-x')u(x',t)dx'$ biçiminde tanımlansın. Böylece

Navier-Stokes denkleminde konvolüsyon uygulanırsa ve bu denklem yeniden düzenlenirse,

$$\bar{u}_t + \nabla \cdot (\bar{u} \bar{u}) - \nu \Delta \bar{u} + \nabla \bar{p} = \bar{f} - \nabla \cdot R(u) \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0$$

biçiminde yeniden yazılır. Burada $R(u) = \overline{uu} - \bar{u}\bar{u}$ ile tanımlı Reynolds stress tensörüdür. Eş. 3.3'e karşılık gelen LES modeli $R(u)$ yerine $\tilde{R}(\bar{u})$ modeli yazılarak oluşturulur. Burada $R(u) \neq \tilde{R}(\bar{u})$ dir. Ancak $R(u)$ yerine $\tilde{R}(\bar{u})$ modeli yazıldığında elde edilen sistem $\bar{u}$ için en iyi yaklaşımı verir. Navier-Stokes denklemlerinden direk olarak $(\bar{u}, \bar{p})$ 'ye bağlı denklemler çıkarmak mümkün değildir. Navier-Stokes denklemlerinde nonlinear terim modellenerek, $\bar{u}$ ve $\bar{p}$ 'ye en iyi yaklaşımlar olduğu düşünülerek $\bar{u} = w$, $\bar{p} = q$ seçilerek (w, q) 'lere karşılık gelen LES modelleri olarak adlandırılan denklem sistemlerinin çözümlerinin matematiksel analizi pek çok bilim adamı tarafından çalışılmıştır. $(\bar{u}, \bar{p})$ 'ye bu yaklaşım (w, q) ile gösterilirse yukarıdaki sistemden ,

$$w_t + \nabla \cdot (ww) - \nu \Delta w + \nabla \cdot \tilde{R}(w) + \nabla q = \bar{f} \quad (3.4)$$

$$\nabla \cdot w = 0$$

sistemine ulaşılır. Bu bölümde verilen bilgiler için detaylı olarak [2,4,9,10,12,24] kaynaklarına bakılabilir.

4. SMAGORİNSKY MODELİNİN ZAYIF ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI VE TEKLİĞİ ÜZERİNE

Bu kısımda, Ladyzhenskaya'nın makalesi izlenerek, Volker John (2004) kaynağının, 5.1 kısmında verilen Smagorinsky modelinin zayıf çözümlerinin varlığı ve tekliği çalışılmıştır [10]. Bu modelle ilgili olarak Ladyzhenskaya ilk olarak [12,13] de,

$$w_t + (w \cdot \nabla) w - \nabla \cdot (v + v_s \|\nabla w\|_F^{2\mu}) + \nabla r = f \quad (0, T] \times \Omega$$

$$\nabla \cdot w = 0 \quad [0, T] \times \Omega$$

$$w(0, \cdot) = w_0 \quad \Omega$$

$$w|_{\partial\Omega} = 0$$

probleminin çözümlerinin $\mu \geq \frac{1}{5}$ için varlığı ve $\mu \geq \frac{1}{2}$ için tekliğini ispatlamıştır.

Onun bu sonucu ise $\mu \geq \frac{1}{10}$ için Du ve Gunzburger (1991) tarafından, genişletilmiştir [5].

Şimdi, Smagorinsky modeline karşılık gelen denklem sistemini, aşağıda verilen başlangıç ve sınır koşulları ile birlikte düşünelim.

$$\begin{aligned} w_t - \nabla \cdot ((v + v_s \|\nabla w\|_F) \nabla w) + (w \cdot \nabla) w + \nabla r &= f & (0, T] \times \Omega \\ \nabla \cdot w &= 0 & [0, T] \times \Omega \\ w &= 0 & [0, T] \times \partial\Omega \\ w(0, \cdot) &= w_0 & \Omega \\ \int_{\Omega} r dx &= 0 & (0, T] \end{aligned} \quad (4.1)$$

Burada, $v_s > 0$, $f \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$ ve $T < \infty$ dir.

$$W_{0,div}^{1,3}(\Omega) = \{v \in W^{1,3}(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0, \nabla \cdot v = 0 \quad \Omega' da\} \quad (4.2)$$

Banach uzayındaki norm, $W_0^{1,3}(\Omega)$ uzayındaki norm ile donatılmış olsun.

$$V = H^1(0, T, L^2(\Omega)) \cap L^3(0, T, W_{0,div}^{1,3}(\Omega)) \quad (4.3)$$

uzayında norm, $\|v\|_V = \|\nabla v\|_{L^3(0,T,L^3(\Omega))} + \|v_t\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}$ şeklinde tanımlansın.

Eş. 4.1'in zayıf formülü,

$v \in V$ olmak üzere, $w(0, x) = w_0 \in W_{0,div}^{1,3}(\Omega)$ ve $\forall v \in V$ için,

$$\int_0^T ((w_t + (w \cdot \nabla)w, v) + (v + v_s \|\nabla w\|_F) \nabla w, \nabla v) dt = \int_0^T (f, v) dt \quad (4.4)$$

biçiminde verilsin. Bu eşitliği sağlayan $w \in V$ fonksiyonu, Smagorinsky modelinin zayıf çözümü olarak adlandırılır. Eş. 4.4 ile verilen eşitliği sağlayan $w \in V$ fonksiyonunun varlığı Galerkin metodu ile gösterilecektir. Bunun için V uzayının bir sonlu boyutlu alt uzayı V^n 'de $\{w^n\}$ dizisini oluşturacağız. Daha sonra w^n 'in sağladığı Eş. 4.4'de limite geçilebileceği gösterilecektir. Çözümlerin varlığını ve tekliğini göstermeden önce varlık ve teklik ispatında kullanacağımız aşağıdaki lemmaları ifade ve ispat edeceğiz.

4.1 Lemma [10]

Kabul edelim ki (w, r) , Eş. 4.1 probleminin yeterince düzgün çözümü olsun. Bu durumda bu çözüm,

$$\|w(T, x)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|w_0(x)\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \|f(t, x)\|_{L^2(\Omega)} dt \quad t > 0 \quad (4.5)$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat [10]

Eş. 4.1 w test fonksiyonu ile çarpılıp daha sonra integre edilirse,

$$(w_t, w) + ((v + v_s \|\nabla w\|_F) \nabla w, \nabla w) + b(w, w, w) + (\nabla r, w) = (f, w)$$

eşitliği elde edilir. Burada her bir terim ayrı ayrı göz önüne alınsın, iç çarpımın simetrik olduğu ve

$$(w_t, w) = \left(\frac{\partial w}{\partial t}, w\right) = \frac{d}{dt}(w, w) - \left(w, \frac{\partial w}{\partial t}\right) \quad \text{eşitliği dikkate alınır,}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}, w\right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(w, w) \quad \text{dır.}$$

Ayrıca,

$$(\nabla r, w) = \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \partial_i r w_i dx = \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \partial_i (r w_i) dx - \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} r \partial_i w_i dx$$

olduğundan, divergence teoremi ve $\nabla \cdot w = 0$ kullanılarak sınır koşulları dikkate alınır,

$$(\nabla r, w) = \int_{\partial\Omega} r w_i n_i ds - \int_{\Omega} r \nabla \cdot w dx = 0$$

bulunur. Üçüncü terim,

$((w \cdot \nabla) w, w) = b(w, w, w)$ şeklinde ifade edilebilen üç yere göre de lineer formdur.

$$\begin{aligned} b(w, w, w) &= ((w \cdot \nabla) w, w) = \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} w_i (\partial_i w_j) w_j dx = \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} w_i \partial_i \left(\frac{w_j^2}{2}\right) dx \\ &= \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \partial_i \left(w_i \frac{w_j^2}{2}\right) dx - \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \left(\frac{w_j^2}{2}\right) \partial_i w_i dx \end{aligned}$$

eşitliğinde tekrar divergence teoremi, sınır koşulu ve $\nabla \cdot w = 0$ olduğu kullanılarak,

$$= \int_{\partial\Omega} w_i \left(\frac{w_j^2}{2}\right) n_i ds - \int_{\Omega} \frac{w_j^2}{2} \nabla \cdot w dx$$

$b(w, w, w) = 0$ elde edilir. Kalan terim de göz önüne alınır

$$(\nabla \cdot (v + v_s \|\nabla w\|_F) \nabla w, w) = v (\nabla \cdot \nabla w, w) + v_s (\|\nabla w\|_F \nabla w, \nabla w)$$

$$= -v (\nabla w, \nabla w) - v_s (\|\nabla w\|_F \nabla w, \nabla w)$$

$$= -((v + v_s \|\nabla w\|_F) \nabla w, \nabla w) \quad \text{bulunur. Böylece her bir terim için elde edilen}$$

eşitlikler göz önüne alınır,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (w, w) + ((v + v_s \|\nabla w\|_F) \nabla w, \nabla w) = (f, w) \quad (4.6)$$

bulunur.

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 + ((v + v_s \|\nabla w\|_F) \nabla w, \nabla w) = (f, w)$$

burada ikinci terim negatif olmadığından ihmal edersek,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (f, w)$$

elde edilir. Zincir kuralı ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak,

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} \frac{d}{dt} \|w\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{bulunur. Gerekli sadeleştirmeden sonra, bu}$$

eşitlik 0'dan T 'ye integre edilirse,

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq \int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 dt$$

$$\|w(T, x)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|w(0, x)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \quad \text{bulunur. } T > 0 \text{ için,}$$

$$\|w(T, x)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|w(0, x)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \quad \text{elde edilir.}$$

4.2 Lemma [10]

Kabul edelim ki (w, r) , Eş. 4.1'in yeterince düzgün çözümü olsun. Bu durumda bu çözüm, $T > 0$ için,

$$\begin{aligned} & \|w(T, x)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_0^T ((v + v_s \|\nabla w\|_F) \nabla w, \nabla w) dt \\ & \leq 2 \|w_0(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 3 \left(\int_0^T \|f(t, x)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^2 = C_1(T) \end{aligned} \tag{4.7}$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat [10]

Eş. 4.6'daki formülü göz önüne alalım.

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (w, w) + ((v + v_s \|\nabla w\|_F) \nabla w, \nabla w) = (f, w)$$

Bu eşitliği 0'dan T 'ye integre edelim.

$$\int_0^T \frac{d}{dt} (w, w) dt + 2 \int_0^T ((v + v_s \|\nabla w\|_F) \nabla w, \nabla w) dt = 2 \int_0^T (f, w) dt$$

buradan,

$$\|w(T, x)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_0^T ((v + v_s \|\nabla w\|_F) \nabla w, \nabla w) dt = \|w_0(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \left(\int_0^T (f, w) dt \right) \quad (4.8)$$

elde edilir. Cauchy –Schwarz eşitsizliği bu eşitliğin sağ tarafında kullanılırsa,

$$\int_0^T (f, w) dt = \int_0^T \int_{\Omega} f(t, x) w(t, x) dx dt \leq \int_0^T \|f(t, x)\|_{L^2(\Omega)} \|w(t, x)\|_{L^2(\Omega)} dt$$

yazılır. Böylece Eş. 4.5’den,

$$\int_0^T (f, w) dt \leq \int_0^T \|f(t, x)\|_{L^2(\Omega)} \left(\|w(0, x)\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \|f(t, x)\|_{L^2(\Omega)} dt \right) dt$$

bulunur. Bu eşitlik düzenlenirse,

$$\int_0^T (f, w) dt \leq \|w(0, x)\|_{L^2(\Omega)} \int_0^T \|f(t, x)\|_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T \|f(t, x)\|_{L^2(\Omega)} \left(\int_0^T \|f(t, x)\|_{L^2(\Omega)} dt \right) dt$$

ve birinci terime Young eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} & \leq \frac{1}{2} \|w(0, x)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\left(\int_0^T \|f(t, x)\|_{L^2(\Omega)} dt \right)^2}{2} + \left(\int_0^T \|f(t, x)\|_{L^2(\Omega)} dt \right)^2 \\ & = \frac{1}{2} \|w_0(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{3}{2} \left(\int_0^T \|f(t, x)\|_{L^2(\Omega)} dt \right)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen bu ifadeyi, Eş.4.8’de yerine yazarsak;

$$\begin{aligned} & \|w(T, x)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_0^T ((v + v_s \|\nabla w\|_F) \nabla w, \nabla w) dt \leq \|w_0(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + 2 \left(\frac{1}{2} \|w_0(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{3}{2} \left(\int_0^T \|f(t, x)\|_{L^2(\Omega)} dt \right)^2 \right) \end{aligned}$$

bulunur. Gerekli düzenlemelerden sonra

$$\begin{aligned} & \|w(T, x)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_0^T ((v + v_s \|\nabla w\|_F) \nabla w, \nabla w) dt \\ & \leq 2 \|w_0(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 3 \left(\int_0^T \|f(t, x)\|_{L^2(\Omega)} dt \right)^2 = C_1(T) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

4.3 Lemma [10]

Kabul edelim ki bir önceki lemmadaki varsayımlar sağlansın. Bu durumda,

$$\|\nabla w(T, x)\|_{L^3(\Omega)}^3 + \frac{3}{2v_s} \int_0^T \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq C_2(T) \quad (4.9)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat [10]

Eş. 4.9' u ispatlamak için Eş.4.1 ile w_t fonksiyonunu ile çarparak Ω üzerinden integral alalım.

$$(w_t, w_t) + ((v + v_s \|\nabla w\|_F) \nabla w, \nabla w_t) + ((w \cdot \nabla) w, w_t) + (\nabla r, w_t) = (f, w_t)$$

bu eşitsizliği 0'dan T 'ye integre edelim.

$$\int_0^T \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + v \frac{d}{dt} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 + (v_s \|\nabla w\|_F) \nabla w, \nabla w_t + ((w \cdot \nabla) w, w_t) + (\nabla r, w_t) = (f, w_t)$$

elde edilir. Burada, $(\nabla r, w_t) = 0$ dır.

Ayrıca, $(\|\nabla w\|_F \nabla w, \nabla w_t)$ terimini yeniden düzenlersek,

$$(\|\nabla w\|_F \nabla w, \nabla w_t) = \int_{\Omega} \|\nabla w\|_F \nabla w : \nabla w_t \, dx = \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \|\nabla w\|_F^3 \, dx$$

biçiminde düzenlenir ve yukarıdaki eşitlikte yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{v}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{v_s}{3} \int_0^T \left(\int_{\Omega} \frac{d}{dt} (\|\nabla w\|_F^3) dx \right) dt \\ & + \int_0^T b(w, w, w_t) dt = \int_0^T (f, w_t) dt \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{2} \|\nabla w(T, x)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\nu}{2} \|\nabla w_0(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \frac{\nu_s}{3} \int_{\Omega} \|\nabla w(T, x)\|_F^3 dx - \frac{\nu_s}{3} \int_{\Omega} \|\nabla w_0(x)\|_F^3 dx + \int_0^T b(w, w, w_t) dt = \int_0^T (f, w_t) dt \end{aligned} \quad (4.10)$$

eşitliği elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} & \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} (\nu \nabla w(T, x), \nabla w(T, x)) + \frac{\nu_s}{3} \int_{\Omega} \|\nabla w(T, x)\|_F^3 dx \\ & = \frac{1}{2} (\nu \nabla w_0, \nabla w_0) + \frac{\nu_s}{3} \int_0^T \|\nabla w_0(x)\|_F^3 dx - \int_0^T b(w, w, w_t) dt + \int_0^T (f, w_t) dt \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\int_{\Omega} (w^T w)(\nabla w : \nabla w) = \int_{\Omega} w^2 (\nabla w)^2 dx \text{ terimi için, Hölder eşitsizliği uygulanırsa;}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (w^T w)(\nabla w : \nabla w) &= \int_{\Omega} w^2 (\nabla w)^2 dx \leq \left(\int_{\Omega} |w|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} \\ &= \|w^2\|_{L^3(\Omega)} \|(\nabla w)^2\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} \text{ bulunur. Yeniden bu eşitliğin ikinci tarafı düzenlenirse,} \end{aligned}$$

$$= \left(\int_{\Omega} |w|^3 dx \right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^3 dx \right)^{\frac{2}{3}} = \left[\left(\int_{\Omega} |w|^6 dx \right)^{\frac{1}{6}} \right]^2 \left[\left(\int_{\Omega} |\nabla w|^3 dx \right)^{\frac{1}{3}} \right]^2 = \|w\|_{L^6(\Omega)}^2 \cdot \|\nabla w\|_{L^3(\Omega)}^2 \text{ yazılır.}$$

$W^{1,2}(\Omega) \rightarrow L^6(\Omega)$ Sobolev gömmesine göre; $\|w\|_{L^6(\Omega)} \leq c \|\nabla w\|_{L^3(\Omega)}$ yazabiliriz.

$$\text{Buradan, } \int_{\Omega} (w^T w)(\nabla w : \nabla w) dt \leq c \|\nabla w\|_{L^3(\Omega)}^2 \|\nabla w\|_{L^3(\Omega)}^2 = c \|\nabla w\|_{L^3(\Omega)}^4 \quad (4.11)$$

elde edilir. Daha sonra,

$$\int_0^T b(w, w, w_t) dt = \int_0^T \int_{\Omega} (w \cdot \nabla) w w_t dx dt$$

ifadesine Young eşitsizliği uygulanırsa,

$$\leq \int_0^T \int_{\Omega} \left[\frac{w_t^2}{4} + (w \cdot \nabla w)^2 \right] dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{w_t}{4} + (w^T w)(\nabla w : \nabla w) dx dt$$

elde edilir. Eş. 4.11 göz önüne alınırsa,

$$\leq \frac{1}{4} \int_0^T \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + c \int_0^T \|\nabla w\|_{L^3(\Omega)}^4 dt$$

yazılır. Daha sonra, $\int_0^T (f, w_t)$ terimi için Young eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^T \int_{\Omega} (f^2 + \frac{w_t^2}{4}) dx dt \quad \text{yazılır. Böylece,} \\ &\int_0^T (\|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + v \|\nabla w(T, x)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2v_s}{3} \|\nabla w(T, x)\|_{L^3(\Omega)}^3) dt \\ &\leq v \|\nabla w_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2v_s}{3} \|\nabla w_0\|_{L^3(\Omega)}^3 + 2 \int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + 2c \int_0^T \|\nabla w\|_{L^3(\Omega)}^4 dt \end{aligned} \quad (4.12)$$

elde edilir. Bu eşitsizliği $\frac{3}{2v_s}$ ile çarparsak,

$$\|\nabla w(T, x)\|_{L^3(\Omega)}^3 \leq \frac{3v}{2v_s} \|\nabla w_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla w_0\|_{L^3(\Omega)}^3 + \frac{3}{v_s} \int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{3c}{v_s} \int_0^T \|\nabla w\|_{L^3(\Omega)}^4 dt$$

bulunur. Yukarıdaki eşitsizliğe Gronwall lemması uygulanırsa,

$$\|\nabla w(T, x)\|_{L^3(\Omega)}^3 \leq (\frac{3v}{2v_s} \|\nabla w_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla w_0\|_{L^3(\Omega)}^3 + \frac{3}{v_s} \int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 dt) \exp \frac{3c}{v_s} \int_0^T \|\nabla w\|_{L^3(\Omega)}^4 dt$$

elde edilir. Diğer taraftan $\sum_{i=1}^n a_i \leq (\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{p}})^p$ $a_i \geq 0$, $p \geq 1$ eşitsizliği göz önüne

alınarak üstel terim için aşağıdaki değerlendirme elde edilir.

$$\int_0^T \|\nabla w\|_{L^3(\Omega)} dt = \int_0^T (\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d \left| \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right|^3)^{\frac{1}{3}} dt \leq \int_0^T (\int_{\Omega} (\left| \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right|)^2)^{\frac{3}{2}} dx)^{\frac{1}{3}} dt$$

Ayrıca,

$$\int_{\Omega} \|\nabla w\|_F (\nabla w : \nabla w) = \int_{\Omega} (\nabla w : \nabla w)^{\frac{1}{2}} (\nabla w : \nabla w) dt = \int_{\Omega} (\nabla w : \nabla w)^{\frac{3}{2}} dx = \int_{\Omega} (\sum_{i,j=1}^d \left| \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right|^2)^{\frac{3}{2}} dx$$

dır. Son iki eşitlikten,

$$\int_0^T \|\nabla w\|_{L^3(\Omega)} dt \leq \int_0^T (1. (\int_{\Omega} \|\nabla w\|_F (\nabla w : \nabla w) dx)^{\frac{1}{3}}) dt$$

elde edilir. Burada Hölder eşitsizliği uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|\nabla w\|_{L^3(\Omega)} dt &\leq \left(\int_0^T 1^{\frac{3}{2}} dt \right)^{\frac{2}{3}} \left\{ \int_0^T \left(\int_{\Omega} \|\nabla w\|_F (\nabla w : \nabla w) dx \right)^{\frac{1}{3}} dt \right\}^{\frac{1}{3}} \\
&\leq T^{\frac{2}{3}} \left\{ \int_0^T \int_{\Omega} \|\nabla w\|_F (\nabla w : \nabla w) dt \right\}^{\frac{1}{3}} \text{ elde edilir. Eş. 4.7'de ilk terim ihmal edilirse,} \\
2 \int_0^T v(\nabla w, \nabla w) + 2 \int_0^T v_s (\|\nabla w\|_F \nabla w, \nabla w) dt &\leq C_1(T) \text{ yazılır. Buradan,} \\
2v \int_0^T \|\nabla w\|^2 + 2v_s \int_0^T (\|\nabla w\|_F \nabla w, \nabla w) dt &\leq C_1(T) \text{ pozitif olan birinci terim ihmal edilirse} \\
\int_0^T (\|\nabla w\|_F \nabla w, \nabla w) dt &\leq \frac{C_1(T)}{2v_s} \text{ bulunur. Bu son eşitsizlikten Eş. 4.12 kullanılırsa,} \\
\int_0^T \|\nabla w\|_{L^3(\Omega)} dt &\leq T^{\frac{2}{3}} \left(\frac{C_1(T)}{2v_s} \right)^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla 2. tarafa $C_3(T)$ denirse,

$$\|\nabla w(T, x)\|_{L^3(\Omega)}^3 \leq C_3(T) \text{ yazılır. Böylece Eş. 4.12}$$

$$\frac{3}{2v_s} \int_0^T \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla w(T, x)\|_{L^3(\Omega)}^3 \leq C_3(T) \text{ biçiminde bulunur.}$$

4.1. Galerkin Metodu

Burada öncelikle Eş.4.1'in zayıf formu olan Eş.4.4'ü sağlayacak şekilde bir $\{w^n\}$ dizisi oluşturulacak, daha sonra Eş. 4.4'de limite geçilebileceği gösterilecektir.

$$V = H^1(0, T, L^2(\Omega)) \cap L^3(0, T, W_{0,div}^{1,3}(\Omega))$$

$$W_{0,div}^{1,3}(\Omega) = \{v \in W^{1,3}(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0, \operatorname{div} v = 0 \text{ } \Omega \text{ da}\} \text{ dır. Şimdi } w^n = \sum_{i=1}^n g_{in} v^i \quad (4.13)$$

leri V 'de oluşturalım. Burada $\{v^i\} \subset W_{0,div}^{1,3}$ dir. w^n leri Eş.4.4'de yazalım. Ayrıca v yerine v^j alalım. Böylece denkleminin varyasyonel formunu alalım.

$$(w_t^n, v^j) + (v + v_s \|\nabla w^n\| \nabla w^n, \nabla v^j) + b(w^n, w^n, v^j) = (f, v^j) \quad j = 1, \dots, n \quad (4.14)$$

elde edilir. $(w_t^n, v^j) = g'_{jn}$ bulunur. Ayrıca,

$$b(w^n, w^n, v^j) = (w^n \cdot \nabla) w^n, v^j = \sum_{i,l=1}^n g_{in} g_{ln} \alpha_{ilj}$$

elde edilir. Burada $\alpha_{ilj} = (v^i \cdot \nabla v^l, v^j) = \int_{\Omega} v^i \cdot \nabla v^l v^j dx$ dir.

4.4 Lemma [10]

$$(w_i^n, v^j) + (v + v_s \|\nabla w^n\| \nabla w^n, \nabla v^j) + b(w^n, w^n, v^j) = (f, v^j) \quad j = 1, \dots, n$$

sistemi $\forall T > 0$ için, bir tek çözüme sahiptir. Ayrıca, Eş. 4.5 , Eş. 4.7, Eş. 4.9 ifadeleri w^n içinde geçerlidir.

İspat [10]

Eş.4.14 sistemi $\forall T > 0$ $g_{jn}; 1 \leq j \leq n$ bilinmeyenlerine göre bir sistem verir. Bu sistem, $g'_{jn} = F(g_{jn})$ biçiminde olup, eşitliğin sağ tarafı g_{jn} ' lere göre ya 1. yada 2.dereceden terimler bulundurur. Lipschitz koşulunu sağlar. F ve $\frac{\partial F}{\partial g_{jn}}$ ifadeleri

sürekli fonksiyonlardır. Şimdi, $\max_{[0,T]} \sum_{j=1}^n g_{jn}^2(t)$ ifadesi için bazı ön değerlendirmeler

elde edeceğiz. $\{v^j(x)\}$ ' ler Ω 'da ortonormal olduğu göz önüne alınarak gerekli

düzenlemeler yapılırsa, $\max_{[0,T]} \sum_{j=1}^n g_{jn}^2(t) = \max_{[0,T]} \|w^n(t, x)\|_{L^2(\Omega)}^2$ eşitliğinden $|g_{jn}| \leq c$ elde

edilir. Böylece, $g'_{jn} = F(g_{jn}) \quad j = 1, \dots, n$ sistemi, $g_{jn}(0) = (w_0, v^j)$ başlangıç

koşulları ile birlikte Picard- Lindelöf teoreminden tek çözüme sahiptir. Şimdi, Eş.

4.14'de v_j ' leri g_{jn} 'ler ile çarparak bu eşitlikler toplanırsa,

$$\left(\frac{\partial w^n}{\partial t}, \sum_{j=1}^n g_{jn} v^j\right) + (v + v_s \|\nabla w^n\| \nabla w^n, \sum_{j=1}^n g_{jn} \nabla v^j) + (w^n \nabla) w^n, \sum_{j=1}^n g_{jn} v^j = (f, \sum_{j=1}^n g_{jn} v^j)$$

bulunur. Yani,

$$\left(\frac{\partial w^n}{\partial t}, w^n\right) + (v + v_s \|\nabla w^n\| \nabla w^n, w^n) + ((w^n \nabla) w^n, w^n) = (f, w^n) \quad (4.16)$$

elde edilir. w^n Eş. 4.14'ün çözümü olarak tanımlandığından, buradan lemma 4.1 ve 4.2 uygulanabilir. Böylece,

$$\|w^n(T, x)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|w^n(0, x)\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \|f(t', x)\|_{L^2(\Omega)} dt' \quad 0 \leq t \leq T$$

eşitsizliği yazılabilir. Benzer şekilde,

$$\|w^n(t, x)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_0^t (v + v_s \|\nabla w^n\| \nabla w^n, \nabla w^n) dt \leq C_1(T) \quad (4.17)$$

yazılır. Aynı yöntemle lemma 4.3' deki gibi

$$\|\nabla w^n(T, x)\|_{L^3(\Omega)}^3 + \frac{3}{2v_s} \int_0^T \|w_t^n\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq C_2(T) \quad (4.18)$$

elde edilir. Şimdi aşağıdaki lemmadan Eş. 4.4'ün bir w çözümüne yakınsak olacak şekilde bir $\{w^n\}$ alt dizisi oluşturacağız.

4.5 Lemma [10]

$\{w^n\}$ 'nin bir alt dizisi,

- i) V 'de w 'ye zayıf olarak yakınsak,
- ii) $L^2(0, T, L^2(\Omega))$ 'da w 'ye güçlü olarak yakınsak,
- iii) $L^q(0, T, L^q(\Omega))$ 'da $q < 4$ için w 'ye güçlü yakınsak,
- iv) $L^2(0, T, L^2(\Omega))$ 'da $\{w_t^n\}$ alt dizisi w_t 'ye zayıf yakınsak,
- v) $L^3(0, T, L^3(\Omega))$ 'da $i = 1, \dots, d$ için $\frac{\partial w_j^n}{\partial x_i}$, $\frac{\partial w_j}{\partial x_i}$ 'ye zayıf olarak yakınsak,

olacak şekilde $w \in V$ vardır.

İspat [10]

İspatta bütün yakınsaklıklar aynı $w \in V$ için geçerlidir.

i) $\{w^n\}$ 'nin bir alt dizisi $w \in V$ 'ye zayıf olarak yakınsar. Burada

$$V = H^1(0, T, L^2(\Omega)) \cap L^3(0, T, W_{0,div}^{1,3}(\Omega))$$

$$\|v\|_V = \|\nabla v\|_{L^3(0,T,L^3(\Omega))} + \|v_t\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} \quad \text{dır.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} w^n v \, dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} w v \, dx dt \quad (4.19)$$

$\forall v \in V^*$ (V nin duali V^* olmak üzere) olduğunu göstermeliyiz.

V 'deki norma göre $\{w^n\}$ 'nin düzgün sınırlılığı Eş. 4.18'den kolayca elde edilir.

$$\text{Yani, } \|w^n(T, x)\|_{L^3(\Omega)}^3 + \frac{3}{2\nu_s} \int_0^T \|w_t^n\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq C_2(T) \text{ ifadesinde ikinci terim ihmal edilir}$$

ve 0'dan T 'ye integre edilirse,

$$\left(\int_0^T \|w^n(t, x)\|_{L^3(\Omega)}^3 dt \right)^{\frac{1}{3}} \leq \left(\int_0^T C_2(T) dt \right)^{\frac{1}{3}} = C_2(T) T^{\frac{1}{3}}$$

$$\|w^n(t, x)\|_{L^3(0,T,L^3(\Omega))} \leq C_3(T) \text{ bulunur.}$$

Böylece Eş. 4.18'den ilk terim ihmal edilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\|w^n\|_V = \|\nabla w^n(t, x)\|_{L^3(0,T,L^3(\Omega))} + \|w_t^n\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} \leq C_4(T)$$

elde edilir. Buradan $\{w^n\}$, V 'de düzgün sınırlıdır. Bir yansılmalı uzayda her sınırlı dizi yakınsak bir alt diziye sahiptir [22]. $L^2(0, T, L^2(\Omega))$ uzayı yansılalıdır [1].

Böylece $\{w^n\}$, V 'de bir $w \in V$ 'ye zayıf yakınsaktır.

ii) $\{w^n\}$ 'nin bir alt dizisinin $L^2(0, T, L^2(\Omega))$ 'dan w 'ya güçlü yakınsak olduğunu göstereceğiz. $V \subset L^2(0, T, L^2(\Omega)) \subset V^*$ olduğundan ve $L^2(0, T, L^2(\Omega))$ uzayının duali yine $L^2(0, T, L^2(\Omega))$ olduğuna göre Eş.4.19'den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} w^n v dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} w v dx dt, \quad \forall v \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$$

elde edilir. Böylece, $\{w^n\} \subset L^2(0, T, L^2(\Omega))$ de w 'ya zayıf yakınsaktır. Eş.4.18'den

$$\|\nabla w^n(T, x)\|_{L^3(\Omega)}^3 \leq C_2(T) \text{ olduğundan } \{w^n\} \subset W_{0,div}^{1,3}(\Omega) \text{ uzayında } \forall t \geq 0 \text{ için}$$

düzgün olarak sınırlıdır. Diğer taraftan $W_0^{1,3}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ kompakt gömülmesini göz

önüne alırsak $\{w^n\}$, $\{w^n\} \rightarrow \tilde{w}$ ya $L^2(\Omega)$ da güçlü yakınsaktır. $\forall t \geq 0$ için,

$$\|w^n - \tilde{w}\| \rightarrow 0 \text{ olduğundan } \{w^n\}, \tilde{w} \in L^2(0, T, L^2(\Omega)) \text{ için de güçlü olarak yakınsaktır.}$$

Dolayısıyla güçlü yakınsak ise aynı zamanda $\tilde{w}$ 'ya zayıf yakınsaktır.

$$\int_0^T \int_{\Omega} w^n v dx dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{w} v dx dt. \text{ Buna göre } \{w^n\}'\text{in } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \text{ da } w' \text{ ya zayıf}$$

yakınsak olduğunu belirtmiştik. Dolayısıyla limitin tekliğinden $\tilde{w} = w$ biçiminde

elde edilir. Böylece $\{w^n\}$, w 'ya $L^2(0, T, L^2(\Omega))$ da güçlü olarak yakınsaktır. Yani,

$$\{w^n\} \rightarrow w \text{ dır.}$$

iii) $q < 4$ için $L^q(0, T, L^q(\Omega))$ da $\{w^n\}$ 'in w 'ya güçlü yakınsak olduğunu

göstereceğiz. Bunun için $\{w^n\}$ in $L^4(0, T, L^4(\Omega))$ da düzgün olarak sınırlı olduğunu

$$\text{gösterelim. } \|w^n\|_{L^4(\Omega)}^4 = \int_{\Omega} (w^n)^4 dx = \int_{\Omega} (w^n)^3 (w^n) dx \text{ Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden,}$$

$$\|w^n\|_{L^4(\Omega)}^4 \leq \left(\int_{\Omega} (w^n)^6 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} (w^n)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \text{ yazılır. } H^1(\Omega) \rightarrow L^6(\Omega) \text{ gömülmesi kullanılırsa,}$$

$$\|w^n\|_{L^4(\Omega)}^4 \leq c \left(\int_{\Omega} (\nabla w^n)^2 dx \right)^{\frac{3}{2}} \left(\int_{\Omega} (w^n)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \text{ bulunur. Böylece, } \|w^n\|_{L^4(\Omega)}^4 \leq c \|\nabla w^n\|_{L^2(\Omega)}^3 \|w^n\|_{L^4(\Omega)} \text{ elde}$$

edilir. 0'dan T 'ye integral alınır ve Eş. 4.17, Eş. 4.18 kullanılırsa,

$$\int_0^T \|w^n\|_{L^4(\Omega)}^4 \leq \left(\int_0^T \|w^n\|_{L^2(\Omega)}^3 \|w^n\|_{L^4(\Omega)} dt \right) \leq \int_0^T C_2(T) [C_1(T)]^{\frac{1}{2}} dt$$

$\int_0^T \|w^n\|_{L^4(0,T,L^4(\Omega))}^4 \leq C_5(T)$ elde edilir. Şimdi $w^n \rightarrow w$, $q=4-\varepsilon$, $\varepsilon>0$ olmak üzere,

$L^q(0,T,L^q(\Omega))$ da güçlü yakınsak olduğunu göstermek için Hölder eşitsizliğini kullanalım,

$$\begin{aligned} \|w^n - w\|_{L^q(0,T,L^q(\Omega))}^q &= \int_0^T \int_{\Omega} |w - w^n|^{2-\varepsilon} |w - w^n| |w - w^n| dx dt \\ &\leq \| (w - w^n)^{2-\varepsilon} \|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} \|w - w^n\|_{L^4(0,T,L^4(\Omega))} \|w - w^n\|_{L^4(0,T,L^4(\Omega))} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada üçgen eşitsizliğinden ve $\{w^n\}$ 'nin $L^4(0,T,L^4(\Omega))$ da düzgün sınırlı olduğundan son iki terim sınırlıdır. Hölder eşitsizliğinin ardışık olarak uygulanması ile $2-\varepsilon_0 \leq 1$ olacak şekilde $\| (w - w^n)^{2-\varepsilon_0} \|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}$ değerlendirmesi elde edilir. Eğer $2-\varepsilon_0 = 1$ ise, lemma (ii)' den sonuç elde edilir. Eğer $2-\varepsilon < 1$ ise, bu durumda ,

$\| (w - w^n)^{2-\varepsilon} \|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} \leq \|w - w^n\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}$ bulunur. Tekrar (ii) uygulanırsa sonuca ulaşılır[1].

iv) $\{w_t^n\}$ dizisinin w_t ye $L^2(0,T,L^2(\Omega))$ 'da zayıf olarak yakınsak olduğunu göstereceğiz. Bunun için $C_0^\infty(0,T,L^2(\Omega))$ ' nın $L^2(0,T,L^2(\Omega))$ 'da yoğun olduğunu kullanacağız [1]. Böylece $\forall \phi \in C_0^\infty(0,T,L^2(\Omega))$ için $\{w^n\}$ 'nin w 'ya $L^2(0,T,L^2(\Omega))$ 'da güçlü yakınsak olduğu kullanılırsa, zayıf türev tanımı göz önünde bulundurularak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} w_t^n \phi dt dx = \lim_{n \rightarrow \infty} - \int_0^T \int_{\Omega} w^n \phi_t dx dt = \lim_{n \rightarrow \infty} - \int_0^T \int_{\Omega} w \phi_t dx dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} w_t \phi dx dt$$

elde edilir.

v) $\left\{ \frac{\partial w_j^n}{\partial x_i} \right\}$ $i, j = 1, \dots, d$ dizisinin $\frac{\partial w_j}{\partial x_i}$, ye $L^3(0,T,L^3(\Omega))$ da zayıf yakınsak

olduğunu gösterelim. Yani , $\forall \phi \in L^{\frac{3}{2}}(0,T,L^{\frac{3}{2}}(\Omega))$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial w_j^n}{\partial x_i} \phi \, dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \phi \, dx dt$$

eşitliğini sağladığını göstermeliyiz. $C_0(0, T, C_0^1(\Omega))$, $L^{\frac{3}{2}}(0, T, L^{\frac{3}{2}}(\Omega))$ 'de yoğunudur [1]. $\forall \phi \in C_0(0, T, C_0^1(\Omega))$ olsun. Kısmi integrasyon kullanılırsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial w_j^n}{\partial x_i} \phi \, dx dt = - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} w_j^n \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, dx dt \quad \text{dır.}$$

(ii)'den $L^2(0, T, L^2(\Omega))$ 'de $\{w^n\} \rightarrow w$ güçlü yakınsak olduğunu göstermiştik.

Buradan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial w_j^n}{\partial x_i} \phi \, dx dt = - \int_0^T \int_{\Omega} w_j \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \phi \, dx dt$$

olarak bulunur. Ayrıca yoğunluktan sonuca ulaşılır. Böylece Lemmanın ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi mutlak olarak sürekli fonksiyonların uzayını oluşturup, P^n ile göstereceğiz ve $\phi \in P^n$ için Eş. 4.14'ün sağlandığını göstereceğiz. $\beta_l(t) \in H^1(0, T)$, $t \in [0, T]$ mutlak

sürekli fonksiyonlar olmak üzere, $P^n = \{v : v = \sum_{l=1}^n \beta_l(t) v^l(x)\}$ olsun.

$\beta_l(t) : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$ Eğer $\forall \varepsilon > 0$ bir $\delta > 0$ varsa, (a_k, b_k) ortak noktaları olmayan sonlu aralıklar için $k = 1, \dots, n$ olmak üzere, $(a_k, b_k) \subset (a, b)$ için, $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$

olmak üzere, $\sum_{k=1}^n |\beta_l(b_k) - \beta_l(a_k)| < \varepsilon$ sağlanıyorsa, β_l mutlak olarak süreklidir.

Bir $\phi \in P^n$ fonksiyonunu seçelim. ϕ için,

$$(w_t^n, \phi) + (v + v_s \| \nabla w^n \| \nabla w^n, \nabla \phi) + b(w^n, w^n, \phi) = (f, \phi) \quad (4.20)$$

eşitliğinin sağlandığı görülebilir. Şimdi aşağıdaki iki terim için limite geçilebileceğini gösterelim.

4.6 Lemma [10]

$\varphi \in P^n$ olmak üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (w_t^n, \varphi) dt = \int_0^T (w_t, \varphi) dt \quad (4.21)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (b(w^n, w^n, \varphi)) dt = \int_0^T b(w, w, \varphi) dt \quad (4.22)$$

İspat [10]

Lemmadaki ilk eşitlik $\{w_t^n\}$ 'nin $\{w_t\}$ 'ye $L^2(0, T, L^2(\Omega))$ 'da yakınsak olmasından kolayca elde edilir. Şimdi Eş. 4.22'yi ispatlayalım. $\varphi \in P^n$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} \int_0^T (b(w^n, w^n, \varphi)) dt &= \sum_{i,j=1}^d \int_0^T \int_{\Omega} w_i^n \frac{\partial w_j^n}{\partial x_i} \varphi_j dx dt \quad \text{dır. Diğer yandan,} \\ \int_{\Omega} w_i^n \frac{\partial w_j^n}{\partial x_i} \varphi_j dx dt &= \int_0^T \int_{\Omega} w_i^n \frac{\partial w_j^n}{\partial x_i} \varphi_j dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} w_i \frac{\partial w_j^n}{\partial x_i} \varphi_j dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} w_i \frac{\partial w_j^n}{\partial x_i} \varphi_j dx dt \end{aligned}$$

yazılır. Ayrıca, $\frac{\partial w_j^n}{\partial x_i}, \frac{\partial w_j}{\partial x_i}$ 'ye $L^3(0, T, L^3(\Omega))$ 'de zayıf yakınsak olduğundan ve

$w_i \varphi_j \in L^{\frac{3}{2}}(0, T, L^{\frac{3}{2}}(\Omega))$ olduğundan, üçüncü terim için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} w_i \frac{\partial w_j^n}{\partial x_i} \varphi_j dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} w_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \varphi_j dx dt$$

yazabiliriz. Kalan terim için yani;

$$\int_0^T \int_{\Omega} (w_i^n - w_i) \frac{\partial w_j^n}{\partial x_i} \varphi_j dx dt$$

terimi için Hölder eşitsizliğini uygularsak,

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} (w_i^n - w_i) \frac{\partial w_j^n}{\partial x_i} \varphi_j dx dt \right| \leq \| (w_i^n - w_i) \varphi_j \|_{L^{\frac{3}{2}}(0,T,L^{\frac{3}{2}}(\Omega))} \left\| \frac{\partial w_j^n}{\partial x_i} \right\|_{L^3(0,T,L^3(\Omega))}$$

bulunur. Cauchy – Schwarz eşitsizliği uygulanırsa,

$$\| (w_i^n - w_i) \varphi_j \|_{L^{\frac{3}{2}}(0,T,L^{\frac{3}{2}}(\Omega))} \leq \| w_i^n - w_i \|_{L^3(0,T,L^3(\Omega))}^{\frac{3}{2}} \| \varphi_j \|_{L^3(0,T,L^3(\Omega))}^{\frac{3}{2}}$$

elde edilir. Lemma (4.5) (iii)’den $\{ w_i^n \}$ ’nin $\{ w_i \}$ ’ye $L^3(0,T,L^3(\Omega))$ ’de güçlü yakınsak olduğu kullanılırsa, $\| (w_i^n - w) \varphi_j \|_{L^3(0,T,L^3(\Omega))} \rightarrow 0$ dır. Burada ,

$$\| \varphi_j \|_{L^3(0,T,L^3(\Omega))}^{\frac{3}{2}} \text{ bir sabit ve } \left\| \frac{\partial w_j^n}{\partial x_i} \right\|_{L^3(0,T,L^3(\Omega))} \text{ ifadesinin düzgün sınırlı olduğu göz}$$

$$\text{önünde bulundurulmalıdır. Böylece, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_0^T \int_{\Omega} (w_i^n - w_i) \frac{\partial w_j^n}{\partial x_i} \varphi_j dx dt \right| = 0$$

elde edilir. Yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} w_i^n \frac{\partial w_j^n}{\partial x_i} \varphi_j dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} w_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \varphi_j dx dt \text{ bulunur.}$$

4.7 Lemma [10]

Eş. 4.20’de limite geçilirse ,

$$\int_0^T ((w_t, \varphi) + (v + v_s \| \nabla w \| \nabla w, \nabla \varphi) + b(w, w, \varphi)) dt = \int_0^T (f, \varphi) dt \quad (4.23)$$

elde edilir. Burada $v + v_s \| \nabla w \| \nabla w \in L^{\frac{3}{2}}(0,T,L^{\frac{3}{2}}(\Omega))$ dir.

İspat [10]

Eşitlikteki ilk ve üçüncü terim için limite geçilebileceğini lemma (4.6)’ da gösterdik.

Eğer $\nabla \varphi \in L^3(0,T,L^3(\Omega))$ ise, $(v + v_s \| \nabla w^n \|_F) \nabla w^n$ teriminin $L^{\frac{3}{2}}(0,T,L^{\frac{3}{2}}(\Omega))$ ’de düzgün sınırlı olduğu gösterilirse, bu durumda,

$B = (v + v_s \|\nabla w\|_F) \nabla w$ operatörüne zayıf yakınsak bir alt dizi vardır. Şimdi düzgün sınırlı olduğunu gösterelim.

$$\left\| (v + v_s \|\nabla w^n\|_F) \nabla w^n \right\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^{\frac{3}{2}} = v^{\frac{3}{2}} \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla w^n|^{\frac{3}{2}} dxdt + v_s^{\frac{3}{2}} \int_0^T \int_{\Omega} \|\nabla w^n\|_F^{\frac{3}{2}} |\nabla w^n|^{\frac{3}{2}} dxdt \quad (4.24)$$

elde edilir. İlk terime Young eşitsizliği uygulanırsa,

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left| \frac{\partial w_i^n}{\partial w_j} \right|^{\frac{3}{2}} \cdot 1 \, dxdt \leq \frac{3}{4} \int_0^T \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial w_i^n}{\partial x_j} \right|^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{4}{3}} dxdt + \frac{1}{4} \int_0^T \int_{\Omega} dxdt \leq \frac{3}{4} \left\| \frac{\partial w_i^n}{\partial x_j} \right\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}$$

bulunur. Ayrıca 2. terim göz önüne alınır,

$$\int_0^T \int_{\Omega} \|\nabla w^n\|_F^{\frac{3}{2}} \left| \frac{\partial w_i^n}{\partial x_j} \right|^{\frac{3}{2}} dxdt = \int_0^T \int_{\Omega} \|\nabla w^n\|_F \left(\sum_{k,l=1}^t \left| \frac{\partial w_k^n}{\partial x_l} \right|^2 \right)^{\frac{1}{4}} \left| \frac{\partial w_i^n}{\partial x_j} \right|^{\frac{3}{2}} dxdt \text{ yazılır.}$$

Burada, $\|\nabla w^n\|_F = \|\nabla w^n\|_F^{\frac{1}{4}} \|\nabla w^n\|_F^{\frac{3}{4}}$ yazılırsa ve yine Young eşitsizliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \|\nabla w^n\|_F^{\frac{1}{4}} \left(\sum_{k,l=1}^t \left| \frac{\partial w_k^n}{\partial x_l} \right|^2 \right)^{\frac{1}{4}} \left| \frac{\partial w_i^n}{\partial x_j} \right|^{\frac{3}{2}} \|\nabla w^n\|_F^{\frac{3}{4}} dxdt \\ & \leq \frac{1}{4} \int_0^T \int_{\Omega} \|\nabla w^n\|_F (\nabla w^n, \nabla w^n) + \frac{3}{4} \int_0^T \int_{\Omega} \left| \frac{\partial w_i^n}{\partial x_j} \right|^2 \|\nabla w^n\|_F dxdt \end{aligned}$$

her iki terimde Eş.4.17 göre sınırlıdır.

4.8 Lemma [10]

Eş. 4.23 $\varphi \in V$ için geçerlidir. İspat için Ladyzhenskaya (1969) kaynağına bakılabilir [12].

Smagorinsky modelinin çözümlerinin varlık ispatı için, Minty (1962) ve Browder (1965)'in monoton operatörler için vermiş olduğu teorem'i kullanılmıştır [18,3]. Burada nonlinear operatörün monoton olduğu gösterilecek. A ,

$$A : L^3(\Omega) \rightarrow L^{\frac{3}{2}}(\Omega) \text{ operatörü}$$

$$A(\nabla w^n) = (v + v_s \|\nabla w^n\|_F) \nabla w^n \quad (4.25)$$

şeklinde tanımlansın. Bu operatörün monotonluğu için aşağıdaki lemma verilecektir.

4.9 Lemma [10]

Aşağıdaki lemmalar ve teoremler kaynaklarda da orijinal olarak verilmiştir [12,13].

$w', w'' \in W^{1,3}(\Omega)$ olsun. A operatörü, Eş. 4.25'deki gibi verilsin

$$\int_{\Omega} (A(\nabla w') - A(w'')) : (\nabla w' - \nabla w'') dx \geq \nu \|\nabla w' - \nabla w''\|_{L^2(A\Omega)}^2 \quad (4.26)$$

eşitsizliği sağlanır. Özel olarak ,

$$\int_{\Omega} (\|\nabla w'\|(\nabla w') - \|\nabla w''\|(\nabla w'')) : (\nabla w' - \nabla w'') dx \geq 0$$

sağlanır. Böylece yukarıda belirtilen A operatörü $L^3(\Omega)$ 'dan $L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ 'ya monoton operatördür.

İspat [10]

A operatörünün monoton olduğunu göstereceğiz. Bunun için aşağıdaki lemmayı kullanacağız. A operatörünün monoton olması için, gerek ve yeter koşul

$$f(\tau) = \int_0^{\tau} \frac{d}{d\tau} A(\tau \nabla w' + (1-\tau)\nabla w'') : \nabla(w' - w'') dx \text{ olmak üzere,}$$

$\forall w', w'' \in W^{1,3}(\Omega)$ için, $f : [0,1] \rightarrow \Re$ fonksiyonun monoton artan olduğu gösterilmelidir [24]. Burada, $C^1(\overline{\Omega}) = W^{1,3}(\Omega)$ yoğun olduğundan, $\forall w', w'' \in C^1(\overline{\Omega})$ için $f(\tau)$ 'nin monoton artan olduğu gösterilirse, $w', w'' \in W^{1,3}(\Omega)$ için de $f(\tau)$ nin monoton olduğu gösterilmiş olur. $w^\tau, w^\tau = \tau w' + (1-\tau)w''$ biçiminde tanımlansın. $f(\tau)$ 'nin tanımı göz önüne alındığından,

$$(A(\nabla w') - A(\nabla w'')) : (\nabla w' - \nabla w'') = \sum_{i,j=1}^d \left(\int_0^{\tau} \frac{d}{d\tau} A_{ij}(\nabla w^\tau) d\tau \right) \left(\frac{\partial w'_i}{\partial x_j} - \frac{\partial w''_i}{\partial x_j} \right) \text{ yazılır. Burada}$$

gerekli hesaplamaları yapalım. $w', w'' \in C^1(\overline{\Omega})$ ve $w^\tau = \tau w' + (1-\tau)w''$ olsun.

f 'nin yukarıdaki tanımı göz önüne alınırsa,

$$(A(\nabla w') - A(\nabla w'')) : (\nabla w' - \nabla w'') = \sum_{i,j=1}^d \left(\int_0^1 \frac{d}{d\tau} A_{ij}(\nabla w^\tau) d\tau \right) \left(\frac{\partial w'_i}{\partial x_j} - \frac{\partial w''_i}{\partial x_j} \right) \quad \text{buradan}$$

$$\frac{d}{d\tau} A_{ij}(\nabla w^\tau) = \frac{d}{d\tau} [(v + v_s \|\nabla w^\tau\|_F)(\nabla w^\tau)]$$

$$= v_s \frac{d}{d\tau} \|\nabla w^\tau\|_F (\nabla w^\tau) + (v + v_s \|\nabla w^\tau\|_F) \frac{d}{d\tau} (\nabla w^\tau)$$

$$= v_s \frac{d}{d\tau} \|\nabla w^\tau\|_F \left(\tau \frac{\partial w'_i}{\partial x_j} + (1-\tau) \frac{\partial w''_i}{\partial x_j} \right) + (v + v_s \|\nabla w^\tau\|_F) \left(\frac{\partial w'_i}{\partial x_j} - \frac{\partial w''_i}{\partial x_j} \right)$$

elde edilir. Ayrıca burada, $\frac{d}{d\tau} \|\nabla w^\tau\|_F$ hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \|\nabla w^\tau\|_F &= \frac{d}{d\tau} \left(\sum_{k,l=1}^d \left(\tau \frac{\partial w'_k}{\partial x_l} + (1-\tau) \frac{\partial w''_k}{\partial x_l} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k,l=1}^d \left(\tau \frac{\partial w'_k}{\partial x_l} + (1-\tau) \frac{\partial w''_k}{\partial x_l} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k,l=1}^d 2 \left(\tau \frac{\partial w'_k}{\partial x_l} + (1-\tau) \frac{\partial w''_k}{\partial x_l} \right) \cdot \left(\frac{\partial w'_k}{\partial x_l} - \frac{\partial w''_k}{\partial x_l} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\|\nabla w^\tau\|_F} \cdot \sum_{k,l=1}^d \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\tau \frac{\partial w'_k}{\partial x_l} + (1-\tau) \frac{\partial w''_k}{\partial x_l} \right) \cdot \left(\frac{\partial w'_k}{\partial x_l} - \frac{\partial w''_k}{\partial x_l} \right) \\ &= \frac{1}{\|\nabla w^\tau\|_F} \cdot \sum_{k,l=1}^d \frac{\partial w_k^\tau}{\partial x_l} \left(\frac{\partial w'_k}{\partial x_l} - \frac{\partial w''_k}{\partial x_l} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece yukarıdaki eşitlikte ifadeler yazılırsa,

$$\begin{aligned} (A(\nabla w') - A(\nabla w'')) : (\nabla w' - \nabla w'') &= \int_0^1 \sum_{i,j,k,l=1}^d (v + v_s \|\nabla w^\tau\|_F) \left(\frac{\partial w'_i}{\partial x_j} - \frac{\partial w''_i}{\partial x_l} \right) \left(\frac{\partial w'_i}{\partial x_j} - \frac{\partial w''_i}{\partial x_j} \right) d\tau \\ &+ \int_0^1 v_s \frac{1}{\|\nabla w^\tau\|_F} \sum_{i,j,k,l=1}^d \frac{\partial w_k^\tau}{\partial x_l} \frac{\partial w_i^\tau}{\partial x_j} \left(\frac{\partial w'_k}{\partial x_l} - \frac{\partial w''_k}{\partial x_l} \right) \left(\frac{\partial w'_i}{\partial x_j} - \frac{\partial w''_i}{\partial x_j} \right) d\tau \quad \text{bu eşitlikteki ilk terim} \\ &\int_0^1 \sum_{i,j,k,l=1}^d (v + v_s \|\nabla w^\tau\|_F) \left(\frac{\partial w'_i}{\partial x_j} - \frac{\partial w''_i}{\partial x_l} \right) \left(\frac{\partial w'_i}{\partial x_j} - \frac{\partial w''_i}{\partial x_j} \right) d\tau \geq v \sum_{i,j=1}^d \left(\frac{\partial w'_i}{\partial x_j} - \frac{\partial w''_i}{\partial x_j} \right)^2 \int_0^1 d\tau \\ &= v (\nabla w' - \nabla w'') : (\nabla w' - \nabla w'') \end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlar. İkinci terim ise pozitifdir. Burada Ω üzerinden bu eşitsizliğin integrali alınır,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} r(w', w'') dx &= \int_{\Omega} A(\nabla w') - A(\nabla w'') : (\nabla w' - \nabla w'') \\ &\geq \int_0^1 v_s \|\nabla w^\tau\|_F^{-1} \left(\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial w_i^\tau}{\partial x_j} \left(\frac{\partial w_i'}{\partial x_j} - \frac{\partial w_i''}{\partial x_j} \right) \right)^2 + \int_{\Omega} v |\nabla w' - \nabla w''|^2 dx \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim ihmal edilirse,

$$\int_{\Omega} A(\nabla w') - A(\nabla w'') : (\nabla w' - \nabla w'') \geq v \int_{\Omega} |\nabla w' - \nabla w''|^2 dx \text{ elde edilir. Böylece,}$$

$$\int_{\Omega} A(\nabla w') - A(\nabla w'') : (\nabla w' - \nabla w'') \geq v \|\nabla w' - \nabla w''\|_{L^2(\Omega)}^2$$

yazılır. Bu eşitsizlikte A operatörünün tanımı dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} (A(\nabla w') - A(\nabla w'')) : (\nabla w' - \nabla w'') dx \\ &= \int_{\Omega} (v + v_s \|\nabla w'\|_F) \nabla w' - \int_{\Omega} (v + v_s \|\nabla w''\|_F) \nabla w'' : (\nabla w' - \nabla w'') dx \\ &= v \int_{\Omega} (\nabla w' - \nabla w'') : (\nabla w' - \nabla w'') dx + \int_{\Omega} (\|\nabla w'\|_F \nabla w' - \|\nabla w''\|_F \nabla w'') : (\nabla w' - \nabla w'') dx \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı Eş. 4.26 ile birlikte düşünülürse

$$v \|\nabla w' - \nabla w''\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} (\|\nabla w'\|_F \nabla w' - \|\nabla w''\|_F \nabla w'') : (\nabla w' - \nabla w'') dx \geq v \|\nabla w' - \nabla w''\|_{L^2(\Omega)}^2$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten

$$\int_{\Omega} (\|\nabla w'\|_F \nabla w' - \|\nabla w''\|_F \nabla w'') : (\nabla w' - \nabla w'') dx \geq 0$$

yazılır. Diğer yandan $C^1(\overline{\Omega})$ nin $W^{1,3}(\Omega)$ da yoğun olduğu dikkate alınırsa $w', w'' \in W^{1,3}(\Omega)$ içinde yukarıdaki eşitsizliklerin geçerli olduğu görülür.

4.10 Lemma [10]

$\tilde{\varphi} \in V$ olsun, bu durumda,

$$-\int_0^T \int_{\Omega} (w_t + (w \cdot \nabla) w - f)(w - \tilde{\varphi}) + A(\nabla \varphi) : (\nabla w - \nabla \tilde{\varphi}) dx dt \geq 0 \quad \text{dır.} \quad (4.27)$$

İspat [10]

Keyfi bir n için $\tilde{\varphi} \in P^n$ olsun. $w^n \in P^n$ ve $\tilde{\varphi} \in P^n$ olduğundan Eş. 4.20'de φ 'nin yerine $w^n - \tilde{\varphi}$ yazılırsa,

$$\int_0^T \int_{\Omega} (A(\nabla w^n) : \nabla(w^n - \tilde{\varphi})) dx dt = \int_0^T (f - w_t^n - (w^n \cdot \nabla)w^n, w^n - \tilde{\varphi}) dt \quad \text{dır.} \quad \text{Ayrıca } A$$

operatörü monoton olduğundan,

$$\int_0^T (A(\tilde{\varphi}) : \nabla(w^n - \tilde{\varphi})) \leq \int_0^T ((f - w_t^n - w^n \cdot \nabla)w^n, w^n - \tilde{\varphi}) dt \quad \text{elde edilir. Böylece,}$$

$$-\left\{ \int_0^T \int_{\Omega} (w_t^n + (w^n \cdot \nabla)w^n - f)(w^n - \tilde{\varphi}) dt + A(\nabla \tilde{\varphi}) : (\nabla w^n - \nabla \tilde{\varphi}) dx dt \right\} \geq 0$$

bulunur. Bu eşitsizlikten, $n \rightarrow \infty$ için limit alalım. Bunun için her bir terimi ayrı ayrı düşünelim.

$$\int_0^T (f, w^n - \tilde{\varphi}) dt = \int_0^T (f, w^n - w) dt + \int_0^T (f, w - \tilde{\varphi}) dt$$

eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terim için Cauchy – Schwarz eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left| \int_0^T (f, w^n - w) dt \right| \leq \|f\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} \|w^n - w\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}$$

elde edilir. Ayrıca lemma (4.5) (ii)'den $\{w^n\} \rightarrow w$ ya $L^2(0,T,L^2(\Omega))$ da güçlü yakınsak olduğu göz önüne alınırsa, bu terim sıfıra gider. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (f, w^n - \tilde{\varphi}) dt = \int_0^T (f, w - \tilde{\varphi}) dt$$

yazılır. Şimdi lineer olmayan terimi düşünelim.

$$\int_0^T \int_{\Omega} (w^n \cdot \nabla)w^n \cdot w^n dx dt = \sum_{k,l=1}^d \int_0^T \int_{\Omega} w_k^n \frac{\partial w_l^n}{\partial x_k} w_l^n dx dt$$

eşitliğinde her bir bileşen için, Lemma (4.5) (v)'den $\{\frac{\partial w_l^n}{\partial x_k}\} \rightharpoonup \frac{\partial w_l}{\partial x_k}$, ye

$L^3(0, T, L^3(\Omega))$ ' da zayıf yakınsak olduğu dikkate alınır ve bu eşitlik yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} w_k^n \frac{\partial w_l^n}{\partial x_k} w_l^n dx dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} w_k \frac{\partial w_l^n}{\partial x_k} w_l dx dt + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial w_l^n}{\partial x_k} (w_k^n w_l^n - w_k w_l) dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} w_k \frac{\partial w_l}{\partial x_k} w_l dx dt + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial w_l^n}{\partial x_k} (w_k^n w_l^n - w_k w_l) dx dt \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan bu eşitliğin sağ taraftaki ikinci terim için Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial w_l^n}{\partial x_k} (w_k^n w_l^n - w_k w_l) dx dt \right| \leq \left(\int_0^T \int_{\Omega} \left\| \frac{\partial w_l^n}{\partial x_k} \right\|_{L^3(\Omega)}^3 \right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_0^T \int_{\Omega} \left\| w_k^n w_l^n - w_k w_l \right\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}}$$

elde edilir. Şimdi sağ taraftaki ikinci terim için,

$$\left\| w_k^n w_l^n - w_k w_l \right\|_{L^{\frac{3}{2}}(0, T, L^2(\Omega))}^{\frac{3}{2}} = \left\| w_k^n w_l^n - w_k w_l^n + w_k w_l^n - w_k w_l \right\|_{L^{\frac{3}{2}}(0, T, L^2(\Omega))}^{\frac{3}{2}}$$

üçgen eşitsizliği uygulanırsa,

$$\leq \left\| (w_k^n - w_k) w_l^n \right\|_{L^{\frac{3}{2}}(0, T, L^2(\Omega))}^{\frac{3}{2}} + \left\| (w_l^n - w_l) w_k \right\|_{L^{\frac{3}{2}}(0, T, L^2(\Omega))}^{\frac{3}{2}}$$

elde edilir. Sağ taraftaki birinci terim göz önüne alınır,

$$\begin{aligned} \left\| (w_k^n - w_k) w_l^n \right\|_{L^{\frac{3}{2}}(0, T, L^2(\Omega))}^{\frac{3}{2}} &= \left(\int_0^T \int_{\Omega} ((w_k^n - w_k) w_k^n)^{\frac{3}{2}} dx dt \right)^{\frac{2}{3}} \\ &= \left(\int_0^T \int_{\Omega} (w_k^n - w_k)^{\frac{3}{2}} (w_k^n)^{\frac{3}{2}} dx dt \right)^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

yazılır. Cauchy–Schwarz eşitsizliğini uygularsak,

$$\begin{aligned} \left\| (w_k^n - w_k) w_l^n \right\|_{L^{\frac{3}{2}}(0, T, L^2(\Omega))}^{\frac{3}{2}} &\leq \left(\int_0^T \left\{ \left(\int_{\Omega} [(w_k^n - w_k)^{\frac{3}{2}}]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} [(w_k^n)^{\frac{3}{2}}]^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx \right\} dt \right)^{\frac{2}{3}} \\ &\leq \left\{ \int_0^T \left(\int_{\Omega} (w_k^n - w_k)^3 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\Omega} [(w_k^n)^3]^{\frac{1}{2}} dt \right)^{\frac{2}{3}} \right\} \end{aligned}$$

Cauchy–Schwarz eşitsizliği uygulanırsa,

$$\leq \left\{ \left[\int_0^T \left(\int_{\Omega} (w_k^n - w_k)^3 dx \right)^{\frac{1}{2}} dx \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^T \left[\left(\int_{\Omega} (w_k^n)^3 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \right]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{2}{3}}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\left\{ \int_0^T \left\| w_k^n - w_k \right\|_{L^3(\Omega)}^3 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} \left\{ \left(\int_0^T \left\| w_k^n \right\|_{L^3(\Omega)}^3 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} \} \\
&= \left\| w_k^n - w_k \right\|_{L^3(0,T,L^3(\Omega))} \left\| w_k^n \right\|_{L^3(0,T,L^3(\Omega))} \text{ bulunur. Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa} \\
&\left\| w_k^n w_l^n - w_k w_l \right\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^{\frac{3}{2}} \\
&\leq \left\| w_k^n - w_k \right\|_{L^3(0,T,L^3(\Omega))} \left\| w_l^n \right\|_{L^3(0,T,L^3(\Omega))} + \left\| w_l^n - w_l \right\|_{L^3(0,T,L^3(\Omega))} \left\| w_l^k \right\|_{L^3(0,T,L^3(\Omega))}
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, lemma (4.5) (iii)'den $\{w_k^n\} \rightarrow w_k$ 'ya $L^3(0,T,L^3(\Omega))$ 'de güçlü

yakınsak olduğundan, $w_k^n w_l^n \rightarrow w_k w_l$ 'ya $L^{\frac{3}{2}}(0,T,L^{\frac{3}{2}}(\Omega))$ 'da güçlü olarak yakınsaktır. Böylece ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} w_k^n \frac{\partial w_l^n}{\partial x_k} w_l^n dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} w_k \frac{\partial w_l}{\partial x_k} w_l dx dt \quad \text{eşitliği elde edilir. Diğer taraftan}$$

Lemma (4.7)' de $A(\nabla \tilde{\varphi}) \in L^{\frac{3}{2}}(0,T,L^{\frac{3}{2}}(\Omega))$ olduğunu göstermiştik, Lemma (4.5)

(v)'den $\nabla w^n \rightarrow \nabla w$ olduğu da göz önünde bulundurulursa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} A(\nabla \tilde{\varphi}) : (\nabla w^n - \nabla w) dx dt = 0 \text{ elde edilir. Diğer yandan,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} w_t^n w^n dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} w_t^n (w^n - w) + \int_0^T \int_{\Omega} w_t^n w dx dt$$

yazılır. Bu eşitlikte, lemma (4.5) (ii) ve (iv)'den $L^2(0,T,L^2(\Omega))$ 'da $w^n \rightarrow w$ ya güçlü yakınsak ve $w_t^n \rightharpoonup w_t$ zayıf yakınsak olduğu göz önüne alınırsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} w_t^n w^n dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} w_t w dx dt$$

elde edilir. Böylece $\tilde{\varphi} \in P^n$ için, Eş.4.27 elde edilmiştir. Keyfi n 'ler için doğru olduğundan , $\tilde{\varphi} \in P$ içinde geçerlidir. Ayrıca, Ladyhenskaya (1967)'den $\tilde{\varphi} \in V$ içinde bu eşitlik geçerlidir [13].

4.11 Lemma [10]

$\forall \varphi \in V$ için ,

$$\int_0^T \int_{\Omega} B : \nabla \varphi \, dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} A(\nabla w) : \nabla \varphi \, dx dt \quad \text{eşitliği sağlanır.}$$

İspat [10]

Eş. 4.23 $\forall \varphi \in V$ için geçerli olduğundan $\varphi = w - \tilde{\varphi}$ seçebiliriz. Eş. 4.23'de $\varphi = w - \tilde{\varphi}$ yazılırsa,

$$\int_0^T [(w_t, w - \tilde{\varphi}) + (B, \nabla(w - \tilde{\varphi})) + (w \cdot \nabla)w, \nabla(w - \tilde{\varphi})] dt - \int_0^T (f, w - \tilde{\varphi}) dt = 0$$

elde edilir. Bu eşitlikle Eş. 4.27'yi toplarsak,

$$\int_0^T \int_{\Omega} (-A(\nabla \tilde{\varphi}) + B) : \nabla(w - \tilde{\varphi}) \geq 0$$

Bu eşitsizlikte, $\tilde{\varphi}$ yerine $\tilde{\varphi} = w - \varepsilon \varphi$ yazalım. Burada $\varepsilon > 0$, keyfi $\varphi \in V$ için,

$$\varepsilon \int_0^T \int_{\Omega} (B - A(\nabla w - \varepsilon \nabla \varphi)) : \nabla \varphi \, dx dt \geq 0$$

bu eşitsizliği, $\varepsilon > 0$ ile bölelim ve $\varepsilon \rightarrow 0$ için de bu eşitsizlik geçerlidir. Bu durumda,

$$\int_0^T \int_{\Omega} [B - A(\nabla w) : \nabla \varphi \, dx dt \geq 0$$

dır. Ayrıca $\varphi \in V$ ise $-\varphi \in V$ dir. Dolayısıyla $-\varphi$ içinde bu eşitsizlik sağlanır. Bu

iki eşitsizlikten $\forall \varphi \in V$ için, $\int_0^T \int_{\Omega} (B - A \nabla w) : \nabla \varphi \, dx dt = 0$ elde edilir.

4.1 Teorem [12]

$f \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$ ve $w_0 \in W_{0,div}^{1,3}(\Omega)$ olsun. Bu durumda Eş. 4.1 probleminin en az bir zayıf çözüme sahiptir.

Eş. 4.1 probleminin zayıf çözümlerinin tekliğini de aşağıdaki teorem ile ifade ederiz.

4.2 Teorem [12]

$f \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$ ve $w_0 \in W_{0,div}^{1,3}(\Omega)$ olsun.

Bu durumda V ' de Eş. 4.1 probleminin bir tek zayıf çözümü vardır.

İspat [12]

Kabul edelim ki Eş. 4.4' ün w' ve w'' gibi iki zayıf çözümü olsun $w' - w'' = \tilde{w}$ ile gösterelim. Böylece, $\tilde{w} \in V$ $\tilde{w}(0, x) = 0$ dir. Eş. 4.4'de w' ve w'' için yazarak, taraf tarafa çıkarılıp v yerine $\tilde{w}$ yazılırsa

$$0 = \int_0^T \left[\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\tilde{w}, \tilde{w}) + ((A(\nabla w') - A(\nabla w'')), \nabla w' - \nabla w'') + b(w', w', \tilde{w}) - b(w'', w'', \tilde{w}) \right] dt$$

eşitliğini yazarız. Bu eşitlikte en son iki terim düşünülürse,

$$b(w', w', \tilde{w}) - b(w'', w'', \tilde{w}) = (w' \cdot \nabla w' - w'' \cdot \nabla w'' + w'' \cdot \nabla w' - w' \cdot \nabla w'', \tilde{w})$$

$= ((w' - w'') \cdot \nabla w', w' - w'') + ((w'' \cdot \nabla (w' - w'')), w' - w'')$ yazılır. Böylece,

$$b(w', w', \tilde{w}) - b(w'', w'', \tilde{w}) = b(\tilde{w}, w', \tilde{w}) + b(w'', \tilde{w}, \tilde{w}) \text{ elde edilir. Bu eşitlikte}$$

$$b(w'', \tilde{w}, \tilde{w}) = 0 \text{ olduğu göz önünde tutularak}$$

$$0 = \int_0^T \left[\frac{d}{dt} (\tilde{w}, \tilde{w}) + 2 (A(\nabla w') - A(\nabla w'')), \nabla w' - \nabla w'' \right] + 2 b(\tilde{w}, w', \tilde{w}) dt$$

eşitliği elde edilir. A, monoton olduğundan,

$$0 \geq \int_0^T \left[\frac{d}{dt} (\tilde{w}, \tilde{w}) + 2 v \|\nabla w' - \nabla w''\|_{L^2}^2 + 2 b(\tilde{w}, w', \tilde{w}) \right] dt \text{ dir.}$$

Bu eşitsizlikten,

$$\int_0^T \left[\frac{d}{dt} \|\tilde{w}\|_{L^2}^2 + 2 v \|\nabla \tilde{w}\|_{L^2}^2 \right] dt \leq 2 \int_0^T |b(\tilde{w}, w', \tilde{w})| dt$$

yazılır. Bu son eşitliğin iki tarafında Hölder eşitsizliği ve $H^1 \rightarrow L^6$ Sobolev gömülmesi dikkate alınır ve Young eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^T \left[\frac{d}{dt} \|\tilde{w}\|_{L^2}^2 + 2\nu \|\nabla \tilde{w}\|_{L^2}^2 \right] dt &\leq c \int_0^T \|\tilde{w}\|_{L^2}^2 \|\nabla w'\|_{L^3} \|\nabla \tilde{w}\|_{L^2} dt \\ &\leq \int_0^T \left[2\nu \|\nabla \tilde{w}\|_{L^2}^2 + \frac{c^2}{4\nu} \|\tilde{w}\|_{L^2}^2 \|\nabla \tilde{w}\|_{L^3}^2 \right] dt \end{aligned}$$

yazılır. Gerekli düzenlemelerden sonra bu eşitsizlikten

$$\|\tilde{w}(T, x)\|_{L^2}^2 \leq c \int_0^T \|\tilde{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla w'\|_{L^3(\Omega)}^2 dt$$

elde edilir. Gronwall lemması uygulanırsa, $\forall T$ için, $\|\tilde{w}(T, x)\|_{L^2}^2 \leq 0$ dır.

Buradan, $\sup_{0 \leq t \leq T} \|\tilde{w}(T, x)\|_{L^2}^2 \leq 0$ elde edilir. Böylece $\forall T$ için, $\|\tilde{w}(T, x)\|_{L^\infty(0, T, L^2(\Omega))}^2 \leq 0$

dır. Yani, $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$ da $w' = w''$ yazılır. Ayrıca 1- boyutlu uzayda Sobolev gömme teoreminden, $H^1(0, T, L^2(\Omega)) \subset L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$ olduğundan,

$H^1(0, T, L^2(\Omega))$ uzayında çözümün tekliği elde edilir. Diğer taraftan Young eşitsizliğinin diğer bir uygulaması ile yukarıdaki eşitsizlikten,

$$\int_0^T \left\{ \frac{d}{dt} \|\tilde{w}\|_{L^2}^2 + 2\nu \|\nabla \tilde{w}\|_{L^2}^2 \right\} dt \leq \int_0^T \left\{ \nu \|\nabla \tilde{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{c^2}{4\nu} \|\tilde{w}\|_{L^2}^2 \|\nabla w'\|_{L^3}^2 \right\} dt$$

yazılır. Bu eşitsizlikten,

$$\|\tilde{w}(T, x)\| + \nu \int_0^T \|\nabla \tilde{w}\|_{L^2}^2 dt \leq \int_0^T \frac{c^2}{4\nu} \|\tilde{w}\|_{L^2}^2 \|\nabla w'\|_{L^3(\Omega)}^2 dt$$

elde edilir. $\forall t$ için, $\|\tilde{w}(t, x)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0$ olduğu göz önüne alınır, $\int_0^T \|\nabla \tilde{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq 0$

bulunur. Buradan $\forall T$ için, $\int_0^T \|\nabla \tilde{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt = 0$ olur.

Böylece $L^2(0, T, W_{0, div}^{1,3}(\Omega))$ uzayında $w' = w''$ dir. Diğer yandan, T sonlu ve

$L^3(0, T, W_{0, div}^{1,3}(\Omega)) \subset L^2(0, T, W_{0, div}^{1,3}(\Omega))$ olduğundan, $L^3(0, T, W_{0, div}^{1,3}(\Omega))$ uzayında da $w' = w''$ dir.

Sonuç olarak, V uzayında $w' = w''$ dir. Yani Eş. 4.1 probleminin çözümü taktır.

KAYNAKLAR

1. Adams, R.A., "Sobolev Spaces", *Academic Press*, New York, 1-268 (1975).
2. Berselli, L.C., Iliescu, T., Layton, W.J., "Mathematics of Large Eddy Simulation of Turbulent Flows", *Springer – Verlag*, New York, 3-22, 29-102, (2006).
3. Browder, F.E., "Existence and Uniqueness Theorems for Solutions of Nonlinear Boundary Value Problems", *Proc. Sympos. Appl. Math.*, 17:24-49 (1965).
4. Colletti, P., "Analytical and numerical results for $k-\varepsilon$ and Large Eddy Simulation turbulence models", Ph.D. Thesis, *Universita Delgi Studi Di Trento*, 1-31,49-79 (1998).
5. Du, Q., Gunzburger, M.D., "Analysis of Ladyzhenskaya Model for Incompressible Viscous Flow", *J.Math.Anal.Appl.*, 155:21-45(1991).
6. Evans, L.C., "Partial Differential Equations", *AMS*, 613-650 (2000).
7. Galdi, G.P., "Lectures in Mathematical Fluid Dynamics", Ed; G.P., Galdi, J.G. Heywood and R. Rannacher, *Birkhauser Verlag*, Boston- Berlin, 17-21(2000).
8. Guermond, J.L., Oden, J.T., Prudhomme, S., "Mathematical Perspectives on Large Eddy Simulation Models for Turbulent Flows", *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 194-248 (2004).
9. Iliescu, T., "Large Eddy Simulation for Turbulent Flows", Ph.D. Thesis, *University of Pittsburgh Faculty of Arts and Sciences*, Pittsburgh, 1-90 (2000).
10. John, V., "Large Eddy Simulation of Turbulent Incompressible Flows. Analitical and Numerical Results for a Class of LES Models", *Springer-Verlag*, New York, 1-261(2004).
11. Kiselev, A.A., Ladyzhenskaya, O.A., "On the Existence and Uniqueness of the Solution of the Nonstationary Problem for a Viscous Incompressible Fluid", *Izv.Akad.Nauk SSSR ser. Mat.*, 21:655-680 (1957).
12. Ladyzhenskaya, O.A., "The Matematical Theory of Viscous Incompressible Flow 2nd ed.", *Gordon and Breach*, New York, 173-179 (1969).
13. Ladyzhenskaya, O.A., "New Equations for The Description of Motion of Viscous Incompressible Fluids and Solvability in the Large of Boundary Value Problems for Them", *Proc.Steklov Inst.Math.*, 102:95-118 (1967).

14. Lesieur, M., "Turbulence in Fluids, volume 40 of Fluid Mechanics and its Applications", 3rd ed., *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht, 1-38, 419-452, (1997).
15. Lions, J.L., " Quelques Methodes de Resolution des Problemes aux Limites Nonlineaires ", *Dunod, Gauthier-Villars*, Paris, 1-554 (1968).
16. Marsden, J.E., Chorin, A., "A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics", 2nd ed., *Springer-Verlag*, New York, 1-32 (1990).
17. Mohammadi, B., Pironneau, O., "Analysis of the K- Epsilon Turbulence Model", *John Wiley and Sons*, New York, 7-41 (1994).
18. Minty, G., "Monotone (nonlinear) Operators in Hilbert Space", *Duke Math. J.*, 29:341-346 (1962).
19. Pope Stephen, B., "Turbulent Flows", *Cambridge University Press*, New York, 3-22, 558-592 (2000).
20. Reynolds, O., "On the Dynamic Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion", *Philos. Trans. R. Soc. London. Ser.*, 186: 123-164 (1895).
21. Sagaut, P., "Large Eddy Simulation for Incompressible Flows", 2nd ed., *Springer-Verlag*, New York, 1-108 (2002).
22. Şuhubi, E.S., "Fonksiyonel Analiz", *İTÜ Vakfı Yayınları*, İstanbul, 366-414 (2001).
23. Temam, R., "Navier-Stokes Equations Theory and Numerical Analysis", Revised ed., *North-Holland Publishing Company-Amsterdam*, New York, 1-13, 157-173, 247-264, 278-318 (1997).
24. Zeidler, E., "Nonlinear functional analysis and its Applications, II/B: Nonlinear monotone operators", *Springer – Verlag*, New York, 54-57, 277-282, (1990).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ŞAHİNER, İbrahim
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 01.01.1976 Niğde
Medeni hali : Evli
e-mail : i_sahiner@hotmail.com

Eğitim Derecesi

Eğitim Birimi

Mezuniyet Tarihi

Lisans	Muğla Üniversitesi / Fen Edebiyat
Lise	Niğde Lisesi

1999

1992

İş Deneyimi

Yıl

Yer

Görev

1999-2008

Milli Eğitim Bakanlığı
İskitler Anadolu Meslek Lisesi

Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce