ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DUNKL-SZÀSZ-MİRAKYAN OPERATÖRLERİNİN YENİ BİR GENELLEMESİ

Serdal YAZICI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2022

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DUNKL-SZÀSZ-MİRAKYAN OPERATÖRLERİNİN YENİ BİR GENELLEMESİ

Serdal YAZICI

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır:

1. bölümde (giriş), yaklaşım teorisinin tarihi gelişiminden bahsedilmiş ve daha önce yapılan çalışmlar hakkında bilgi verilmiştir.

2. bölümde (temel kavramlar), bu çalışmada elde edilecek teorem ve sonuçlar için kullanılacak matematiksel araçlar hatırlatılmıştır.

3. bölümde, bazı özellikleri sağlayan pozitif sınırsız diziler ve Dunkl-Appell polinomları yardımıyla (Sucu 2020)'de yapılan çalımanın bir modifikasyonu yapılmış ve bu modifikasyonun bazı fonksiyon uzaylarında yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Ayrıca (Yazıcı vd. 2022) kaynağında yapılan çalışma bu tezin 3. bölümünden üretilmiştir.

4. bölümde, ilk önce katlı Dunkl Appell polinomları tanıtılmış ve bu polinomların üreteç fonksiyonu verilmiştir ve sonrasında bu polinomlar yardımıyla yeni bir operatör tanımlanmış ve bu operatörün bazı fonksiyon uzaylarında yaklaşımı incelenmiştir. Daha sonra bu operatörün grafik üzerinde nümerik yaklaşımı incelenmiş ve iki değişkenli tipi tanımlanmıştır.

5. bölümde (tartışma ve sonuç), sonuçlar ve daha sonra yapılabilecek çalışmalar üzerinde durulmuştur.

Haziran 2022, 77 sayfa

Anahtar Kelimeler: Dunkl türev, Appell polinomları, Szász operatörleri, Katlı polinomlar, Ağırlıklı uzaylar.

ABSTRACT

Master Thesis

A NEW GENERALIZATION OF DUNKL-SZÀSZ-MİRAKYAN OPERATORS

Serdal YAZICI

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

This study consists of five chapters:

In chapter 1 (introduction), the historical development of the approximation theory is mentioned and information is given about the previous studies.

In chapter 2 (basic concepts), some mathematical tools to be used for theorems and results to be obtained in this study are reminded.

In chapter 3, a modification of the study done in (Sucu 2020) is made with the help of positive unbounded sequences that provide some properties and Dunkl-Appell polynomials, and some approximation properties of this modification in some function spaces is examined. In addition, the paper in (Yazıcı vd. 2022) was produced from the third part of this thesis.

In chapter 4, Dunkl multiple Appell polynomials are firstly introduced and the generating function of these polynomials is given, and then a new operator is defined including these polynomials and its approximation properties in some function spaces is examined. Then, the numerical approach of this operator on the graph was examined and the bivariate type is defined.

In chapter 5 (discussion and conclusion), focuses on the results and further studies.

June 2022, 77 pages

Key Words: Dunkl derivative, Appell polynomials, Szász operators, Multiple polynomials, Weighted spaces.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimimin her aşamasında kıymetli zamanını ayırarak görüş ve önerileri ile bana destek olan danışman hocam Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL'a, Prof. Dr. Bayram ÇEKİM'e ve desteklerini her zaman hissettiğim ailem ve dostlarıma en içten dileklerimle teşekkür ederim. Ayrıca, eleştiri ve yorumları ile bu teze katkıda bulunan Prof. Dr. Gülen TUNCA BAŞCANBAZ, Doç. Dr. Serhan VARMA, Doç. Dr. Gürhan İÇÖZ'e ve yüksek lisans çalışmam boyunca 2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı ile bana destek olan TÜBİTAK'a teşekkür ederim

Serdal YAZICI
Ankara, Haziran 2022

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}^*$	$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \left\{\frac{1-2k}{2} : k \in \mathbb{N}\right\}$
Γ	Eulerin Gamma fonksiyonu
Γ_λ	(2.3) eşitliği ile verilen Gamma-Lambda fonksiyonu
θ_k	$\theta_k = \frac{1+(-1)^{k-1}}{2}$, $k \in \mathbb{N}_0$
$\exp(x)$	$\exp(x) = e^x$ standart üstel fonksiyon
$\exp_\lambda(x)$	(2.7) eşitliği ile verilen λ genelleştirilmiş üstel fonksiyon
ℓ_p	$\ell_p = \left\{(x_n) \subseteq \mathbb{R} : \sum \lvert x_n\rvert^p < \infty\right\}$
D_λ	(2.8) eşitliği ile tanımlanan Dunkl türev operatörü
$C(A)$	$C(A) = \{g : A \to \mathbb{R} \mid g \text{ sürekli}\}$
$C_B(A)$	$C_B(A) = \{g \in C(A) \mid g \text{ sınırlı}\}$
$C_B^k(A)$	$C_B^k(A) = \left\{g \in C_B(A) \mid g^{(j)} \in C_B(A),\ j = 1, 2, ..., k\right\}$
$Lip_M(\alpha)$	α mertebeli M katsayılı Lipschitz ailesi
$C_\rho(\mathbb{R})$	$C_\rho(\mathbb{R}) = \{g \in B_\rho(\mathbb{R}) \mid g \text{ sürekli}\}$
$B_\rho(\mathbb{R})$	$B_\rho(\mathbb{R}) = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \lvert g(x)\rvert \le M_f \rho(x)\}$
$C_\rho^k(\mathbb{R})$	$C_\rho^k(\mathbb{R}) = \left\{g \in C_\rho^k(\mathbb{R}) \mid \lim\limits_{n\to\infty} \frac{g(x)}{\rho(x)} = k_f\right\}$
$\lVert\psi\rVert_{C_B[0,\infty)}$	$\lVert\psi\rVert = \sup\{\lvert\psi(x)\rvert : x \in [0,\infty)\}$, $\psi \in C_B[0,\infty)$
$\lVert\psi\rVert_{C_B^2[0,\infty)}$	$\lVert\psi\rVert_{C_B^2[0,\infty)} = \lVert\psi\rVert_{C_B[0,\infty)} + \lVert\psi'\rVert_{C_B[0,\infty)} + \lVert\psi''\rVert_{C_B[0,\infty)}$
$\lVert\psi\rVert_\rho$	$\lVert\psi\rVert_\rho = \sup\left\{\frac{\lvert\psi(x)\rvert}{\rho(x)} : x \in [0,\infty)\right\}$, $\psi \in B_\rho(\mathbb{R})$
$\omega(f,\varepsilon)$	f fonksiyonun klasik süreklilik modülü
$\omega_2(f,\varepsilon)$	f fonksiyonun ikinci süreklilik modülü
$K(f,\varepsilon)$	f fonksiyonunun Peetre- K fonksiyoneli
L_{a_m,b_m}^λ	(3.2) eşitliği ile tanımlanan operatörler
T_m^λ	(4.7) eşitliği ile tanımlanan operatörler
e_k	$e_k(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}_0$ şeklindeki fonksiyonlar
$\binom{n}{k}_\lambda$	$\binom{n}{k}_\lambda = \frac{\Gamma_\lambda(n)}{\Gamma_\lambda(k)\Gamma_\lambda(n-k)}$
$\varepsilon_m^\lambda(x)$	$\varepsilon_m^\lambda(x) = \frac{\exp_\lambda(-mx)}{\exp_\lambda(mx)}$
$M_{m,k}^\lambda(x)$	L_{a_m,b_m}^λ operatörlerinin k-nci merkezi momenti
$M_{m,k}^{*\lambda}(x)$	T_m^λ operatörlerinin k-nci merkezi momenti
$\overline{S}$	S kümesinin kapanışı
$\max(x,t)$	x ve t sayısından büyük olanı
$\min(x,t)$	x ve t sayısından küçük olanı

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisi Weierstrass'ın 1885 yılında ileri sürdüğü ve kanıtladığı Weierstrass Yaklaşım Teoremi adında bir teoremden ortaya çıkmıştır (Weierstrass 1885). Bu teorem; kapalı sınırlı bir aralıkta sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsak olacak şekilde bir polinom dizisinin varlığından veya buna denk ifade olarak kompakt bir aralıkta tanımlı tüm polinomların kümesinin aynı aralıkta tanımlanan tüm sürekli fonksiyonların uzayında yoğun olduğundan bahsetmektedir. Biliniyor ki polinomlar ifade edilmesi en kolay fonksiyonlardır ve bu yüzden bu teorem sayesinde kapalı sınırlı aralıkta sürekli olan çok karmaşık bir fonksiyonun karakterini bahsi geçen polinomlar yardımıyla incelenemek mümkündür. Weierstrass Yaklaşım Teoremi'nin ispat metodları varlık ispatları ve yapısal ispatlar olmak üzere iki gruba ayrılır (Soydan 2012a). Varlıksal ispatlarda amaç teoremde bahsi geçen polinomları oluşturmadan bu polinomların varlığını göstermektir. Varlık ispatları teoriktir ve uygulamada daha az rağbet görür. Yapısal ispatlarda amaç kapalı sınırlı bir aralıkta sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsak olacak şekilde bir polinom oluşturmaktır ve en yaygın olarak bilinen yapısal ispatlar Weierstrass-Gauss çekirdeği yardımıyla, yaklaşık özdeşlik (approximate identity) yöntemiyle ve Bernstein polinomları (veya operatörleri) yardımıyla yapılan ispattır (Soydan 2012a). 1912 yılında Bernstein $[0, 1]$ kapalı aralığında Bernstein operatörlerini $\psi \in C[0, 1]$, $x \in [0, 1]$ ve $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$B_m(\psi)(x) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} x^j (1-x)^{n-j} \psi\left(\frac{j}{m}\right) \tag{1.1}$$

ile tanıtmıştır (Bernstein 1912). Tabi ki $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere $u \in [0, 1]$ için $u = (x-a)/(b-a)$ şeklindeki uygun bir dönüşüm yardımıyla bu polinomlar ifade edilmek istenirse $x \in [a, b]$ olacağından bu polinomları keyfi bir $[a, b] \subset \mathbb{R}$ aralığında da tanımlamak mümkündür.

Bernstein polinomlarının uygulama alanı bir çok disiplinde geniş bir yer tutmaktadır. Bernstein polinomları sırasıyla Pierre Étienne Bèzier ve Paul de Casteljau tarafından ünlü bir otomobil üreticileri olan Renault ve Citroën marka otomobillerinin kasalarının tasarımında kullanılmıştır. Bèzier otomobil tasarımında kökenleri

Bernstein operatörlerine dayanan ve Bèzier eğrilerini kullanmıştı. Bèzier eğrilerinin fotoğrafçılıkta ve bilgisayar animasyonlarında bir çok uygulaması vardır.

1950 yılında Szász, üstel fonksiyonun açılımdan faydalanarak Szász operatörlerini $\psi \in C[0,\infty)$, $x \in [0,\infty)$ ve $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$S_m(\psi)(x) = \exp(-mx) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(mx)^j}{j!} \psi\left(\frac{j}{m}\right) \tag{1.2}$$

ile tanımlamıştır (Szász 1950). Szász operatörleri Bernstein operatöründen farklı olarak sonuz bir aralıkta tanımlanmıştır ve bu yüzden sonsuz bir aralıkta tanımlı bazı sürekli fonksiyon uzaylarına ait bir fonksiyonun bu uzaylar üzerindeki normla yaklaşım özelliklerini incelemek mümkün hale gelmiştir. Weierstrass Yaklaşım Teoremi'nin yapısal ispatlarına yardımcı bir araç olarak 1953 yılında Korovkin Teoremi ileri sürülmüştür. Bu teoreme göre; eğer bir lineer pozitif bir operatör dizisi bazı test fonksiyonlarına kapalı sınırlı bir aralıkta düzgün yakınsıyorsa bu taktirde bu operatör dizisi aynı aralıkta tanımlı sürekli fonksiyona düzgün yakınsaktır (Korovkin 1953). Korovkin teoreminin bazı genellemeleri yapılmıştır ve bunlardan biri de ağırlıklı uzaylar için yapılan bir genellemedir. 1974 ve 1976 yılılarında Gadjiev ağırlıklı uzaylarda Korovkin Teoremi' genellemiş ve önemli sonuçlar ortaya çıkarmıştır (Gadjiev 1974, 1976). Ayrıca bu genelleme ile ilişkili olan (Gadjiev 1980) ve (İspir 2001) çalışmaları da Yaklaşım Teorisi'nde önemli yer tutmaktadır.

Bir polinom dizisinin bir fonksiyona bir aralıkta yaklaşım hızı ne kadar iyiyse polinom dizisi o fonksiyonun karakteri hakkında o kadar iyi sonuç verir. Bu yüzden bir fonksiyona daha iyi yaklaşım elde etmek için bazı yeni polinom dizileri (veya operatörleri) inşa edilmektedir. Şimdi bunlar hakkında bilgi verilecektir:

King, x^2 fonksiyonunun Bernstein operatöründeki değerini x^2 olacak şekilde yeniden bir modifikasyon oluşturmuştur. Bu modifikasyonu B_m Bernstein operatör dizisini temsil etmek üzere (f_n), $[0,1]$ aralığını üzerinde tanımlı olan bir fonksiyon dizisi olmak üzere

$$B^{\#}_{m,f_m}(\psi)(x) = B_m(\psi)(f_m(x)), \ m \in \mathbb{N}, \ \psi \in C[0,1], \ x \in [0,1]$$

ile tanımlamıştır (King 2003). Eğer King'in yaptığı bu genellemede $f_m(x) = x$ alınırsa $B^{\#}_{m,f_m}$ operatörü bilinen Bernstein operatörüne dönüşecektir. King'in bu çalışmada elde ettiği en verimli sonuçlardan biri de şudur; $B_m(t^2)\left(f^{\#}_m(x)\right) = x^2$ olacak şekildeki $\left\{f^{\#}_m(x)\right\}$ dizisi için $B^{\#}_{m,f^{\#}_m}$ operatör dizisi $m \to \infty$ için $\psi \in C[0,1]$ fonksiyonuna Bernstein operatörlerinin dizisinden daha iyi yaklaşır (King 2003). Bu genellemeye benzer olarak sırasıyla (Duman ve Özarslan 2007) ve (Duman vd. 2009) çalışmalarında Szász operatörleri x^2 fonksiyonunu koruyacak şekilde ve Szász Kantorovich operatörleri de lineer $ax + b$ fonksiyonlarını koruyacak şekilde genellenmiştir. King tipi genellemenin bir türü de üstel fonksiyonları koruyan tipteki operatör genellemeleridir. (Acar 2017) çalışmasında Szász operatörleri e^{2ax}, $a > 0$ fonksiyonlarını koruyacak şekilde genellenmiştir. King tipi operatör genellemelerin en çarpıcı örneklerinden biri de kuşkusuz belirli şartları sağlayan bir τ fonksiyonun Bernstein operatörleri altındaki değerlerinin de τ fonksiyonu olacağını garanti eden genellemedir. Bu genelleme bileşke fonksiyonun yardımla oluşturulmuştur. τ, $[0,1]$ aralığında belirli şartları sağlayan bir fonksiyon olmak üzere τ fonksiyonunu koruyan Bernstein operatör dizisi; B_m bilinen Bernstein operatör dizisi olmak üzere

$$B^{\#,\tau}_m(\psi)(x) = B_m\left(\psi \circ \tau^{-1}\right)(\tau(x)), \ m \in \mathbb{N}, \ \psi \in C[0,1], \ x \in [0,1]$$

ile tanımlanmıştır (Cárdenas-Morales vd. 2011). Bu operatörde $\tau(x) = x$ alınırsa bilinen Bernstein operatörlerini verecektir. Ayrıca Szász operatörleri için de benzer bir genelleme verilmiştir (Aral vd. 2014).

Bazen üç boyutlu bir cismin şekli hakkında bilgi edinmek istenebilir. Bir cismin her açıdan görüntüsü bir yüzey denklemi olarak ifade edilebilir. Bu yüzey denklemlerin birleşerek oluşturduğu parçalı iki değişkenli fonksiyon o cismin dünyadaki şeklini verecektir. Buna göre bir operatörü de iki değişkenli veya daha fazla değişkenli olarak tanımlamak da kaçınılmazdır. Eğer düzlemde bir D bölgesi üzerinde tanımlı ve sürekli bir iki değişkenli fonksiyona yaklaşacak bir operatör tanımlanmak isteniyorsa bu taktirde operatörü de iki değişkenli olarak tanımlamak gerekir. Kingsley Bernstein operatörlerinin iki değişkenlisini vermiş ve bu operatörlerin yaklaşım özelliklerini incelemiştir (Kingsley 1951) ve benzer bir çalışma da Butzer yapmıştır (Butzer 1953). Ayrıca Volkov, Korovkin teoremini çok boyutlu uzaylar için genelleyerek önemli bir çalışmada bulunmuştur (Volkov 1957).

Yaklaşım Teorisi'nde bir çok operatör genellemesi ve genellemelerle bağlantılı olarak bir çok araç vardır. Ancak bu tezde hepsinden bahsidilmeyecektir. Örneğin Bernstein operatörünün çekirdeği değiştirilerek bir çok çalışma yapılmıştır ve bunlardan bazıları (Gadjiev 2010), (Chen vd. 2017) ve (Cai vd. 2018) kaynaklarında yer almaktadır. Yine kuantum kalkülüs veya post kuantum kalkülüs yardımıyla elde edilen operatör genellemeleri yapılmıştır; (Phillips 1997), (Ostrovska 2006), (Aral 2008), (Gupta 2008), (Mursaleen 2015), (Acar 2016). Ayrıca bir araç olarak istatistik yakınsaklık kavramı ileri sürülmüş ve Korovkin ve Weierstrass Yaklaşım Teoremi bu araca göre yorumlanmıştır (Gadjiev ve Orhan 2002). Buna benzer olarak A-istatistiksel yakınsaklık kavramı da tanıtılmıştır (Duman vd. 2004).

Buraya kadar olan kısımda Yaklaşım Teorisi ile ilgili genel yapılan çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir. Şimdi bu tezde çalışılan özel konuya daha yakın çalışmalar hakkında bilgi verilecektir:

Rosenblum, Euler'in Gamma fonksiyonu yardımıyla yeni bir Gamma fonksiyonu ve yeni bir üstel fonksiyon tanımlamıştır. Bu yeni Gamma fonksiyonu $k \in \mathbb{N}_0$ ve $\lambda \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere

$$\Gamma_\lambda(k) = \begin{cases} \frac{2^{2j+1} j! \Gamma\left(j+\lambda+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} & ; \ k = 2j+1, \ j \in \mathbb{N}_0 \text{ ise} \\ \frac{2^{2j} j! \Gamma\left(j+\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} & ; \ k = 2j, \ j \in \mathbb{N}_0 \text{ ise} \end{cases}$$

ile verilir (Rosenblum 1994). Ayrıca bahsi geçen üstel fonksiyon da $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ve $x \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\exp_\lambda(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{\Gamma_\lambda(j)}$$

ile tanımlanır (Rosenblum 1994). Sucu $\exp_\lambda(x)$ fonksiyonun yukarıdaki açılımı yardımıyla Szász operatörlerinin Dunkl analoğunu;

$$\theta_k = \begin{cases} 1 & ; \ k = 2j+1, \ j \in \mathbb{N}_0 \text{ ise} \\ 0 & ; \ k = 2j, \ j \in \mathbb{N}_0 \text{ ise} \end{cases},$$

$\psi \in C[0,\infty)$, $x \in [0,\infty)$, $m \in \mathbb{N}$ ve $\lambda \geq 0$ olmak üzere

$$S_m^\lambda(\psi)(x) = \frac{1}{\exp_\lambda(mx)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(mx)^j}{\Gamma_\lambda(j)} \psi\left(\frac{j+2\lambda\theta_j}{m}\right) \tag{1.3}$$

ile tanımlamıştır (Sucu 2014). Sucu'nun tanımlamış olduğu bu operatörlerle ile ilgili bir çok çalışma yapılmıştır. Szász operatörlerinin Dunkl analoğunun; kuantum (İçöz ve Çekim 2015), Stancu-Kantorovich (İçöz ve Çekim 2016), bazı test fonksiyonlarını koruyan q-Kantorovich (Mursaleen vd. 2016), Beta (Çekim vd. 2017), q-Kantorovich (Srivastava vd. 2017), modifiye Stancu (Milovanović vd. 2018), Durrmeyer (Wafi ve Rao 2018), Phillips (Nasiruzzaman ve Rao 2018), karma (Deshwal vd. 2018), x^2 fonksiyonunu koruyan kuantum (Mursaleen ve Rahman 2018), post kuantum (Alotaibi vd. 2018), (p,q)-Kantorovich (Nasiruzzaman vd. 2019a), Gamma (Wafi ve Rao 2019), q-Durrmeyer (Rao ve Wafi 2019), q-Phillips (Nasiruzzaman vd. 2019b), iki değişkenli (Nasiruzzaman, 2021) ve nicel (Cai vd. 2021) tipli genellemeleri bunlardan bazılarıdır.

Özel polinomların üreteç fonksiyonundan yararlanarak bir operatör tanımlamak mümkündür. İlk kez özel polinomları içeren genelleme 1964 yılında Laguerre polinomlarından elde edilen bir operatördür (Cheney ve Sharma 1964). Ayrıca, daha sonra Appell polinomlarını (Jakimovski ve Leviatan 1969), Sheffer tipindeki polinomları (İsmail 1974), Charlier polinomlarını (Varma ve Taşdelen 2012), Brenke tipi polinomları (Varma vd. 2012), Boas-Buck tipi polinomları içeren operatör dizileri tanımlanmıştır (Sucu vd. 2012). Bu genelleme türü ile ilgili bazı diğer çalışmalar; (Taşdelen vd. 2012), (Aktaş vd. 2013), (Mursaleen ve Ansari 2015), (Sucu ve Varma 2015), (Kajla ve Agrawal 2015), (Agrawal ve İspir 2016), (Kajla ve Agrawal 2016), (İçöz vd. 2016), (Krech 2016), (Atakut ve Büyükyazıcı 2016a), (Sidharth vd. 2017), (Mursaleen vd. 2017), (Yazıcı ve Çekim 2017) ve (Aktaş vd. 2019) kaynaklarında bulunabilir.

Paul Émile Appell 1880 yılında $P_n(x)$ Appell polinomlarını, $P_0(x) \neq 0$ şeklinde x'den bağımsız bir sabit olmak üzere

$$\frac{d}{dx}P_n(x) = nP_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, ...$$

eşitliğini sağlayan polinomlar olarak tanımlamıştır (Appell 1880). Daha sonra Lee çoklu Appell polinomlarını, $P_{0,0}(x) \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{d}{dx}P_{n_1,n_2}(x) = n_1P_{n_1-1,n_2}(x) + n_2P_{n_1,n_2-1}(x), \quad n_1 + n_2 \geq 1$$

ile vermiştir (Lee 2011). Ayrıca aşağıda seri biçimi ile verilen A fonksiyonu

$$A(t_1,t_2)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}a_{k_1,k_2}\ \frac{t_1^{k_1}t_2^{k_2}}{k_1!k_2!}$$

$t_1^2+t_2^2<r^2$, $r>1$ diskinde analitik ve $A(0,0)=a_{0,0}\neq 0$ olmak üzere, bu çoklu Appell polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$A(t_1,t_2)\exp\left(x\left(t_1+t_2\right)\right)=\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}P_{n_1,n_2}(x)\,\frac{t_1^{n_1}t_2^{n_2}}{n_1!n_2!}$$

eşitliği ile verilir (Lee 2011). Varma bu polinomların yardımıyla çoklu Appell polinomlarını içeren Szász operatörlerini $\psi\in C[0,\infty)$, $x\in[0,\infty)$ ve $m\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$V_m(f)(x)=\frac{1}{A(1,1)\exp(mx)}\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\frac{P_{n_1,n_2}\left(\frac{mx}{2}\right)}{n_1!n_2!}\psi\left(\frac{k}{m}\right)\tag{1.4}$$

ile tanımlamıştır (Varma 2013). Burada A fonksiyonu yukarıdaki operatör tanımlı ve pozitif olacak şekilde seçilmiştir. Bu çalışma ile ilişkili olan (Neer ve Agrawal 2017), (Chauhan vd. 2018), (Deo ve Dhamija 2018), (Ansari vd. 2019), (Gupta vd. 2019), (Braha ve Kadak 2020), (Mishra vd. 2020) ve (Gupta vd. 2021) bazı çalışmalardır.

Cheikh ve Gaied, $P_n^{\lambda}(x)$ Dunkl Appell polinomlarının üreteç fonksiyonunu

$$A^{\lambda}(t)\exp_{\lambda}(xt)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n^{\lambda}(x)}{\Gamma_{\lambda}(n)}t^n$$

eşitliği ile bulmuştur (Cheikh ve Gaied 2007). Burada A^{λ} fonksiyonu $|t|<r, r>1$ diskinde analitik olup $A(0,0)=a_{0,0}\neq 0$ olmak üzere

$$A^{\lambda}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{\Gamma_{\lambda}(k)}t^k$$

eşitliği ile verilmiştir (Cheikh ve Gaied 2007). Dunkl tipi polinomları içeren Gamma Szász tipi operatörler (Taşdelen vd. 2019) kaynağında tanımlanmıştır ve Sucu, Dunkl Appell polinomları içeren Szász operatörlerini $\psi\in C[0,\infty)$, $x\in[0,\infty)$, $\lambda\geq 0$ ve $m\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$H_m^{\lambda}(f)(x)=\frac{1}{A^{\lambda}(1)\exp_{\lambda}(mx)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k^{\lambda}\left(\frac{mx}{2}\right)}{\Gamma_{\lambda}(k)}\psi\left(\frac{k+2\lambda\theta_k}{m}\right)\tag{1.5}$$

şeklinde vermiştir (Sucu 2020). Burada A^{λ} fonksiyonu yukarıdaki operatör tanımlı ve pozitif olacak şekilde seçilmiştir. Ayrıca (Nasiruzzaman ve Aljohani 2020a, 2020b) ve (Çekim vd. 2021) kaynaklarında operatör genellemek için Dunkl tipi polinomlar kullanılmıştır.

Walczak sınırsız artan diziler yardımıyla iki değişkenli Szász operatörlerini yeniden inşa etmiştir (Walczak 2000). Daha sonra aynı yazar 2002 yılında bu çalışmadan yararlanarak Szász operatörlerinin bir genellemesini tanımlamıştır (Walczak 2002). $a_m \geq 1$ ve $b_m \geq 1$ olmak üzere $\lim_{m\to\infty} (a_m/b_m) = 1$ şartını sağlayan (a_m/b_m) dizisi azalmayan olsun. Walczak bahsi geçen yeni operatörü $x \in [0,\infty)$, $\psi \in C[0,\infty)$ ve $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$S_m^{a_m,b_m}(\psi)(x) = \exp(-a_m x) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a_m x)^j}{j!} \psi\left(\frac{j}{b_m}\right) \tag{1.6}$$

ile vermiştir (Walczak 2002). Ayrıca bu konu hakkında yapılan diğer çalışmaların bazıları (İspir ve Atakut, 2002), (Nowak ve Sikorska-Nowak 2009), (İspir 2013), (Gazanfer ve Büyükyazıcı 2014), (Büyükyazıcı vd. 2015), (Agrawal ve İspir 2016), (İspir ve Büyükyazıcı 2016), (Atakut ve Büyükyazıcı 2016b), (İspir 2017), (Sidharth vd. 2017) ve (Atakut vd. 2019) kaynaklarında bulunabilir.

Şimdiye kadar bu bölümde yapılan önceki çalışmalar ile ilgili bilgiler verilmiştir. Bir sonraki bölümde tezde kullanılacak bilindik matematiksel araçlar hakkında bilgi verilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Ön Bilgiler

Bu tezde dizi, seri, yakınsak dizi, yakınsak seri, değişken terimli dizi, noktasal yakınsaklık, düzgün yakınsaklık, sınırlı dizi, süreklilik ve düzgün süreklilik gibi bazı temel kavramlara yer verilmeyecektir. İstenilirse bu kavramları bulmak için Yazıcı'nın tezine (Yazıcı 2019) veya temel analiz kitaplarına bakılabilir. Ayrıca bu bölüm için daha fazla bilgi edinmek gerekirse (Lorentz 1953), (Apostol 1974), (Ditzian ve Totik 1987), (Altomore ve Campiti 1994), (Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995), (Hardy vd.1998), (Anastassiou ve Gal 2000), (Oldham vd. 2008) ve (Gupta ve Agarwal 2014) kaynaklarında belirtilen kitaplara başvurulabilir.

Teorem 2.1 (Hölder Eşitsizliği) (Hardy vd. 1998) $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşullarını sağlayan p ve q pozitif reel sayıları verilsin. Bu durumda her bir $(x_n) \in \ell_p$ ve $(y_n) \in \ell_q$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

şeklinde verilen eşitsizlik sağlanır ve işte bu eşitsizliğe Hölder eşitsizliği denir. Hölder eşitsizliğinin $p = q = 2$ özel durumu için

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde edilen eşitsizliğe Cauchy-Schwartz eşitsizliği denir.

Tanım 2.1 (Cauchy Çarpımı) (Apostol 1974) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ serileri verilsin. Bu iki serinin Cauchy çarpımı

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$

şeklinde tanımlanır.

Uyarı 2.1 Yakınsak iki serinin Cauchy çarpımı yakınsak olmak zorunda değildir. Örneğin, $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\sqrt{m+1}}$ serisi şartlı yakınsak bir seridir ancak

$$\begin{aligned}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\sqrt{m+4}}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\sqrt{m+4}}\right) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\upsilon=0}^{m}\frac{(-1)^{m-\upsilon}}{\sqrt{m-\upsilon+4}}\frac{(-1)^{\upsilon}}{\sqrt{\upsilon+4}} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\sum_{\upsilon=0}^{m}\frac{1}{\sqrt{m-\upsilon+4}\sqrt{\upsilon+4}}\end{aligned}$$

serisinin genel terimi sıfır dizisinden farklıdır. Çünkü

$$\begin{aligned}|c_m| &= \left|(-1)^m\sum_{\upsilon=0}^{m}\frac{1}{\sqrt{m-\upsilon+4}\sqrt{\upsilon+4}}\right| \\ &\geq \sum_{\upsilon=0}^{m}\frac{1}{2(m+4)} = \frac{m+1}{2(m+4)} \to \frac{1}{2} \ \ (m\to\infty)\end{aligned}$$

yazılabilir. O halde Cauchy çarpım serisi yakınsak değildir. Sonuç olarak yakınsak iki serinin Cauchy çarpımı yakınsak bir seri olarak elde edilmemiştir. Aşağıda iki serinin limitlerinin çarpımak ile Cauchy çarpmak arasında bir fark olmadığını katagorize eden teorem verilmiştir.

Teorem 2.2 (Mertens Teoremi) (Apostol 1974) $A, B \in \mathbb{R}$, $R_1 > 0$ ve $R_2 > 0$ olmak üzere

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ mutlak yakınsak bir seri, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$ olsun. Bu taktirde

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}b_k = A.B$$

eşitliği sağlanır.

(ii) $|x| < R_1$ bölgesinde $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$ ve $|x| < R_2$ bölgesinde $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = B$ serisi de mutlak yakınsak olsun. Bu taktirde $|x| < \min\{R_1, R_2\}$ bölgesinde

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}b_k x^n = A.B$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 2.2 (Lineer Uzay) (Soykan 2012b) X boş kümeden farklı bir küme ve $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi olsun. Eğer

$$\begin{aligned} +: \ & X\times X\to X \\ & (x,y)\to +(x,y) = x+y \end{aligned} \quad \text{ve} \quad \begin{aligned} \cdot: \ & \mathbb{R}\times X\to X \\ & (x,y)\to \cdot(x,y) = x\cdot y \end{aligned}$$

ile verilen kurallar her $x, y, z \in X$ ve $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{array}{ll} i. & (x+y)+z = x+(y+z)\,, \\ ii. & \text{Bir } 0^* \in X \text{ vardır ki } x+0^* = x \text{ dir,} \\ iii. & x+(-x) = 0^* \text{ eşitliğini sağlayan } (-x) \in X \text{ vardır,} \\ iv. & x+y = y+x, \\ v. & k_1(x+y) = k_1x + k_1y, \\ vi. & (k_1+k_2)\,x = k_1x + k_2x, \\ vii. & (k_1k_2)\,x = k_1(k_2x)\,, \\ viii. & 1x = x \end{array}$$

özellikleri sağlanıyorsa bu taktirde X kümesine $\mathbb{R}$ cismi üzerinde lineer uzaydır denir.

Tanım 2.3 (Normlu Uzay) (Soykan 2012b) X kümesi $\mathbb{R}$ cismi üzerinde lineer uzay olsun ve

$$\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$$

fonksiyonu verilsin. Eğer her $u, v \in X$ ve $k \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{array}{ll} i. & \|u\| = 0 \;\Leftrightarrow\; u = 0^* \\ ii. & \|ku\| = |k|\,\|u\| \\ iii. & \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \end{array}$$

özellikleri sağlanıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve X uzayına da normlu uzay denir. Ayrıca elemanları fonksiyon olan normlu bir uzaya normlu fonksiyon uzayı denir.

2.2 Lineer Pozitif Operatörler ve Dizileri

Tanım 2.4 (Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995) X ve Y normlu fonksiyon uzayları olsun. Eğer X'den alınan bir fonksiyonu Y uzayındaki bir fonksiyına dönüştüren bir T kuralı varsa bu taktirde T'ye X üzerinde tanımlı bir operatördür denir. Ayrıca bir dizinin ismi görüntü kümesine göre verildiğinden dolayı görüntü kümesi operatörlerden oluşan bir diziye operatör dizisi ve benzer şekilde görüntü kümesi lineer pozitif operatörlerden oluşan bir diziye de lineer pozitif operatörlerin bir dizisi denir.

Tanım 2.5 (Lineer Operatör) (Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995) X ve Y normlu fonksiyon uzayları olmak üzere

$$T : X \to Y$$

şeklindeki T operatörü, $\forall \psi, \varphi \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$T(\alpha\psi + \beta\varphi) = \alpha T(\psi) + \beta T(\varphi)$$

eşitliğini sağlanıyorsa bu taktirde T operatörüne lineer operatör denir. Ayrıca T operatörü pozitif her fonksiyonu pozitif fonksiyona dönüştürüyorsa T'ye pozitif operatör denir. Eğer T hem lineer hem de pozitif ise bu taktirde T'ye lineer pozitif operatör denir.

Lemma 2.1 (Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995) X ve Y normlu fonksiyon uzayları ve $T : X \to Y$ lineer pozitif bir operatör olsun. Bu durumda T monoton azalmayandır ve

$$|T(f)| \leq T(|f|)$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.6 (Merkezi Moment) (Lorentz 1953) (T_n) operatör dizisi verilsin bu operatör dizisinin k'nci merkezi momenti

$$M_{n,k}(x) = T_n\left((t-x)^k ; x\right)$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.3 (Korovkin Teoremi) (Korovkin 1953) (T_n) lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. Buna göre c_n^0, c_n^1 ve c_n^2 ile verilen diziler $[a, b]$ kompakt aralığı üzerinde sıfıra düzgün yakınsak değişken terimli diziler olmak üzere eğer her $x \in [a, b]$ için

$$T_n(e_0)(x) = 1 + c_n^0(x)$$
$$T_n(e_1)(x) = x + c_n^1(x)$$
$$T_n(e_2)(x) = x^2 + c_n^2(x)$$

eşitlikleri sağlanıyorsa bu taktirde (T_n) dizisi $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli olan her fonksiyona düzgün yakınsaktır.

Tanım 2.7 (Ağırlıklı Uzaylar) (Gadjiev 1976) ψ reel eksende sürekli ve monoton artan bir fonksiyon olmak üzere

$$\rho(x) = 1 + \psi^2(x)$$

ile verilen reel eksende tanımlı ρ fonksiyonu verilsin. Buna göre her bir f fonksiyonu için M_f ve k_f sabitleri f'ye bağlı olmak üzere

$$\begin{aligned} B_\rho(\mathbb{R}) &= \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \quad |g(x)| \le M_f \rho(x)\} \\ C_\rho(\mathbb{R}) &= \{g \in B_\rho(\mathbb{R}) | \quad g \text{ sürekli } \} \\ C_\rho^k(\mathbb{R}) &= \left\{g \in C_\rho^k(\mathbb{R}) | \quad \lim_{n\to\infty} \tfrac{g(x)}{\rho(x)} = k_f\right\} \end{aligned}$$

fonksiyon aileleri göz önüne alınırsa $B_\rho(\mathbb{R})$ açık bir şekilde vektör uzayıdır ve bundan dolayı üzerinde bir norm tanımlanabilir. Buna göre

$$\|g\|_\rho = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|g(x)|}{\rho(x)} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|g(x)|}{1+\psi^2(x)}$$

ile verilen norm ile $B_\rho(\mathbb{R})$ normlu uzaydır. Ayrıca $C_\rho(\mathbb{R})$ ve $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayları da $B_\rho(\mathbb{R})$'nin alt vektör uzayları oluklarından dolayı yukarıdaki belirtilen norm kuralı ile normlu uzaylardır. İşte burada ρ'ya ağırlık fonksiyonu ve $B_\rho(\mathbb{R}), C_\rho(\mathbb{R}), C_\rho^k(\mathbb{R})$ uzaylarına da ağırlıklı uzaylar denir. Ayrıca tanım gereği

$$C_\rho^k(\mathbb{R}) \subseteq C_\rho(\mathbb{R}) \subseteq B_\rho(\mathbb{R})$$

olduğu kolaylıkla görülebilir.

Teorem 2.4 (Gadjiev Teoremi) (Gadjiev 1976) ψ reel eksende sürekli ve monoton artan bir fonksiyon olmak üzere

$$\rho(x) = 1 + \psi^2(x)$$

ile verilen reel eksende tanımlı ρ ağırlık fonksiyonu verilsin. Bu durumda

i. $T_n : C_\rho(\mathbb{R}) \to B_\rho(\mathbb{R})$ olacak şekilde en az bir (T_n) lineer pozitif operatör dizisi bulunabilir öyle ki bu operatör dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n(e_k) - e_k\|_\rho = 0, \quad k = 0, 1, 2 \tag{2.1}$$

koşulları sağlanmasına rağmen öyle bir $g^* \in C_\rho(\mathbb{R})$ fonksiyonu bulunabilir ki

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n(g^*) - g^*\|_\rho \ge 1$$

eşitsizliğini sağlar.

ii. $T_n : C_\rho(\mathbb{R}) \to B_\rho(\mathbb{R})$ olacak şekildeki (T_n) lineer pozitif operatör dizisi (2.1) koşullarını sağlıyorsa her $g \in C_\rho^k(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n(g) - g\|_\rho = 0$$

limiti sağlanır.

Teorem 2.5 (Volkov Teoremi) (Volkov 1957) (T_n), iki boyutlu pozitif ve sürekli bir D bölgesi üzerinde tanımlı fonksiyonların ailesi olan $C(D)$ üzerinde tanımlı lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun ve sınırlı bir $B \subseteq D$ kümesi verilsin. Buna göre $a_n(x,y), b_n(x,y), c_n(x,y)$ ve $d_n(x,y)$ ile verilen diziler $\overline{B}$ kompakt kümesi üzerinde sıfıra düzgün yakınsak değişken terimli diziler olmak üzere eğer her $(x,y) \in \overline{B}$ için

$$\begin{aligned}
&T_n(1)(x,y) = 1 + a_n(x,y)\\
&T_n(t)(x,y) = x + b_n(x,y)\\
&T_n(s)(x,y) = y + c_n(x,y)\\
&T_n(t^2+s^2)(x,y) = x^2 + y^2 + d_n(x,y)
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa bu taktirde (T_n) operatör dizisi $\overline{B}$ kümesi üzerinde tanımlı ve sürekli olan her fonksiyona düzgün yakınsaktır.

2.3 Lipschitz Ailesinden Fonksiyonlar

Tanım 2.8 (Gupta ve Agarwal 2014) $J \subseteq \mathbb{R}$ alt aralığında tanımlı g fonksiyonu ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Buna göre her $x, u \in J$ için

$$|g(u) - g(x)| \leq M |u - x|^\alpha$$

eşitsizliğini sağlayan bir $M > 0$ sayısı mevcutsa g fonksiyonuna α mertebeli M katsayılı Lipschitz ailesinden fonksiyon denir ve bu aile $Lip_M(\alpha)$ ile gösterilir.

Tanımdan anlaşılacağı üzere eğer $\alpha > 1$ ise g fonksiyonu sabit fonksiyon olmalıdır. Ayrıca, Lipschitz ailesinden her bir fonksiyonun düzgün sürekli olduğu açıktır.

2.4 Süreklilik Modülü ve Peetre-K Fonksiyoneli

Tanım 2.9 (Ditzian ve Totik 1987) $J \subseteq \mathbb{R}$ keyfi bir alt aralık, $g \in C_B(J)$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Buna göre

$$\omega(g;\varepsilon) := \sup_{|u-x|\leq\varepsilon} \{|g(u) - g(x)| : \ x, u \in J\}$$

ile verilen reel sayısına g fonksiyonun klasik süreklilik modülü denir. Benzer şekilde

$$\omega_2(g;\varepsilon) := \sup_{0<h\leq\varepsilon} \{|g(x+2h) - 2g(x+h) + g(x)| : \ x \in J\}$$

reel sayısına da g fonksiyonun ikinci süreklilik modülü denir.

Lemma 2.2 (Gupta ve Agarwal 2014) $J \subseteq \mathbb{R}$ keyfi bir alt aralık, $g \in C_B(J)$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Buna göre g fonksiyonun klasik süreklilik modülü

i. $\omega(g;\varepsilon) \geq 0,$

ii. $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ ise $\omega(g;\varepsilon_1) \leq \omega(g;\varepsilon_2)$,

iii. $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \omega(g;\varepsilon) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g$ düzgün süreklidir,

iv. $\forall x, u \in J$ için, $|g(u) - g(x)| \leq \left(\frac{|u-x|}{\varepsilon} + 1\right) \omega(g;\varepsilon)$,

özelliklerini sağlar.

Tanım 2.10 (Ditzian ve Totik 1987) Herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $g \in C_B[0,\infty)$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda g fonksiyonun Peetre-K fonksiyoneli

$$K(g;\varepsilon) = \inf_{h \in C_B^2[0,\infty)} \left\{ \|g-h\|_{C_B[0,\infty)} + \varepsilon \|h\|_{C_B^2[0,\infty)} \right\}$$

reel sayısı ile tanımlanır.

Teorem 2.6 (Butzer ve Hubert 1967) Herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $g \in C_B[0,\infty)$ fonksiyonu verilsin. Buna göre Peetre-K fonksiyoneli ve ikinci süreklilik modülü arasında $M > 0$ olmak üzere

$$K(g;\varepsilon) \leq M \left\{ \omega_2\left(g; \sqrt{\varepsilon}\right) + \min(1,\varepsilon) \|g\|_{C_B[0,\infty)} \right\}$$

bağıntısı sağlanır.

2.5 Genelleştirilmiş Üstel Fonksiyon

Bu kesimde öncelikle Gamma fonksiyonu hatırlanacak daha sonra Gamma fonksiyonun bir genellemesi yardımıyla genelleştirilmiş üstel fonksiyon üzerinde durulacaktır.

Euler'in ikinci tür integrali olarak bilinen Gamma fonksiyonu faktöriyel kavramına yeni bir bakış açısı kazandırmıştır. Eğer

$$\int_0^\infty e^{-At}dx = \frac{1}{A}, \qquad A > 0,$$

integralinde her iki tarafın N kez A ya göre türevi alınırsa

$$(-1)^N \int_0^\infty t^N e^{-Ax}dx = (-1)^N \frac{N!}{A^{N+1}}$$

elde edilir ve burada $A = 1$ alınarak gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$N! = \int_0^\infty x^N e^{-t}dt$$

elde edilir. Bu yaklaşımla Gamma fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 2.11 (Oldham vd. 2008) $N > 0$, $N \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\Gamma(0) = 1$ ve

$$\Gamma(N) = (N-1)! = \int_0^\infty t^{N-1}e^{-t}dt \tag{2.2}$$

kuralı ile Gamma fonksiyonu tanımlanır.

Gamma fonksiyonu Gauss limit tanımı veya Weierstrass sonsuz çarpım tanımı ile farklı şekillerde de verilebilir. Ayrıca Gamma fonksiyonun tanımlandığı küme de genişletilebilir ancak bu tezde yukarıdaki tanım kullanılacaktır. Gamma fonksiyonunu Rosenblum $\mathbb{N}_0$ kümesi için aşağıdaki gibi genellemiştir.

Tanım 2.12 (Rosenblum 1994) $k \in \mathbb{N}_0$ ve $\lambda \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere

$$\Gamma_\lambda(k) = \begin{cases} \frac{2^{2j+1}j!\Gamma\left(j+\lambda+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} & ; \quad k = 2j+1, \ j \in \mathbb{N}_0 \text{ ise} \\ \frac{2^{2j}j!\Gamma\left(j+\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} & ; \quad k = 2j, \ j \in \mathbb{N}_0 \text{ ise} \end{cases} \tag{2.3}$$

kuralı ile Gamma-Lambda fonksiyonu tanımlanır. Bu fonksiyonun bazı ilk değerleri $\Gamma_\lambda(0) = 1,\ \Gamma_\lambda(1) = 2\lambda+1,\ \Gamma_\lambda(2) = 2(2\lambda+1),\ \Gamma_\lambda(3) = 2(2\lambda+3)(2\lambda+1),$ $\Gamma_\lambda(4) = 2^3(2\lambda+3)(2\lambda+1)$ ve $\Gamma_\lambda(5) = 2^3(2\lambda+5)(2\lambda+3)(2\lambda+1)$ şeklindedir.

Önerme 2.1 (Rosenblum 1994) Gamma-Lambda fonksiyonu

i. $\lambda = 0$ için $\Gamma_0(k) = k!$,

ii. Her bir $k \in \mathbb{N}_0$ için $\theta_k = \frac{1+(-1)^{k-1}}{2}$ olmak üzere

$$\Gamma_\lambda(k) = (k + 2\lambda\theta_k)\,\Gamma_\lambda(k-1) \tag{2.4}$$

eşitliklerini sağlar.

İspat. i. seçenek tanımdan açıktır.

ii.

$$\Gamma_\lambda(k) = \begin{cases} (2l+1+2\lambda)\,\Gamma_\lambda(2l) & ;\quad k = 2l+1,\ l \in \mathbb{N}_0 \text{ ise} \\ 2l\Gamma_\lambda(2l-1) & ;\quad k = 2l,\ l \in \mathbb{N}_0 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğu gösterilirse istenilen gösterilmiş olur.

Şimdi $k = 2l+1$ şeklinde tek doğal sayı olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} \Gamma_\lambda(2l+1) &= \frac{2^{2l+1}l!\Gamma\left(l+\lambda+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{2^{2l+1}l!\Gamma\left(l+1+\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} \\ &= (2l+1+2\lambda)\,\frac{2^{2l}\Gamma\left(l+\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} \\ &= (2l+1+2\lambda)\,\Gamma_\lambda(2l) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\Gamma_\lambda(2l+1) = (2l+1+2\lambda)\,\Gamma_\lambda(2l) \tag{2.5}$$

sağlanır. Ayrıca (2.5) eşitliğinden yararlanarak $k = 2l+2$ çift doğal sayısı için

$$\begin{aligned} \Gamma_\lambda(2l+2) &= \frac{2^{2l+2}(l+1)!\Gamma\left(l+1+\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} \\ &= (2l+2)(2l+1+2\lambda)\,\frac{2^{2l}l!\Gamma\left(l+\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} \\ &= (2l+2)(2l+1+2\lambda)\,\Gamma_\lambda(2l) \\ &= (2l+2)\,\Gamma_\lambda(2l+1) \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte $l \to l-1$ alınırsa

$$\Gamma_\lambda(2l) = 2l\Gamma_\lambda(2l-1) \tag{2.6}$$

elde edilir. (2.5) ve (2.6) birlikte düşünüldüğünde istenilen gösterilmiş olur. ■

Tanım 2.13 (Rosenblum 1994) $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $x \in \mathbb{C}$ ve Γ_λ Gamma-Lambda fonksiyonu olmak üzere λ genelleştirilmiş üstel fonksiyon

$$\exp_\lambda(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{\Gamma_\lambda(j)} \tag{2.7}$$

ile tanımlanır.

2.6 Dunkl Türev Operatörü

Tanım 2.14 (Dunkl 1989, Rosenblum 1994) ϕ, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar düzleminde tanımlı bir tam fonksiyon ve $\lambda \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere ϕ'nin D_λ Dunkl türev operatörü

$$D_\lambda\phi(w) := \phi'(w) + \lambda\frac{\phi(w) - \phi(-w)}{w}, \quad w \in \mathbb{C} \tag{2.8}$$

ile tanımlanır. Ayrıca buradaki D_λ'nin lineer bir operatör olduğu açıktır.

Önerme 2.2 (Rosenblum 1994) D_λ, Dunkl türev operatörü ve ψ ile φ fonksiyonları da $\mathbb{C}$ kompleks sayılar düzleminde tanımlı tam fonksiyonlar olmak üzere

i. Eğer $\lambda = 0$ ise D_λ Dunkl türev operatörü standart türev operatörüne dönüşür,

ii. Eğer ψ fonksiyonu çift fonksiyon ise bu fonksiyonun Dunkl türevini almak standart türevini almakla eşdeğerdir,

iii. $D_\lambda(w^n) = \frac{\Gamma_\lambda(n)}{\Gamma_\lambda(n-1)}w^{n-1}$, $w \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$,

iv. $D_\lambda(\exp_\lambda(aw)) = a\exp_\lambda(aw)$, $a \in \mathbb{C}$,

v. $D_\lambda^2(\psi(w)) = \psi''(w) + \frac{2\lambda}{w}\psi'(w) - \lambda\frac{\psi(w)-\psi(-w)}{w^2}$,

vi. $D_\lambda(\psi(w)\varphi(w)) = \psi(w)D_\lambda(\varphi(w)) + \varphi(-w)D_\lambda(\psi(w)) + \psi'(w)[\varphi(w) - \varphi(-w)]$

özellikleri sağlanır.

İspat. i. ve ii. özelliklerin sağlandığı açıktır.

iii. Dunkl türevin tanımı kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
D_{\lambda}\left(w^{n}\right) &= nw^{n-1}+\lambda\frac{w^{n}-(-w)^{n}}{w} \\
&= nw^{n-1}+\lambda w^{n-1}\left(1-(-1)^{n}\right) \\
&= \left(n+2\lambda\theta_{n}\right)w^{n-1} \\
&= \frac{\Gamma_{\lambda}(n)}{\Gamma_{\lambda}(n-1)}w^{n-1}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

iv. Bir önceki elde edilen özellik (iii. özellik) ve $\exp_{\lambda}(aw)$ serisinin düzgün yakınsaklığı kullanılarak

$$
\begin{aligned}
D_{\lambda}\left(\exp_{\lambda}(aw)\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{k}D_{\lambda}\left(w^{k}\right)}{\Gamma_{\lambda}(k)} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\Gamma_{\lambda}(k-1)}a^{k}w^{k-1} \\
&= a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{k}w^{k}}{\Gamma_{\lambda}(k)} \\
&= a\exp_{\lambda}(aw)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

v. (2.8) ile verilen tanım dikkate alınarak ψ fonksiyonuna iki kez Dunkl türev operatörü uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
D_{\lambda}^{2}\left(\psi(w)\right) &= D_{\lambda}\left(\psi'(w)+\lambda\frac{\psi(w)-\psi(-w)}{w}\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\psi'(w)+\lambda\frac{\psi(w)-\psi(-w)}{w}\right) \\
&\quad +\lambda\frac{\psi'(w)+\lambda\frac{\psi(w)-\psi(-w)}{w}-\left(\psi'(-w)+\lambda\frac{\psi(-w)-\psi(w)}{-w}\right)}{w} \\
&= \psi''(w)+\lambda\frac{w\left(\psi'(w)+\psi'(-w)\right)-\left(\psi(w)-\psi(-w)\right)}{w^{2}}+\lambda\frac{\psi'(w)-\psi'(-w)}{w} \\
&= \psi''(w)+\frac{2\lambda}{w}\psi'(w)-\lambda\frac{\psi(w)-\psi(-w)}{w^{2}}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

vi. (2.8) ile verilen tanım dikkate alınırsa

$$
\begin{aligned}
& \psi(w) D_\lambda(\varphi(w)) + \varphi(-w) D_\lambda(\psi(w)) + \psi'(w)[\varphi(w) - \varphi(-w)] \\
= \; & \psi(w)\left(\varphi'(w) + \lambda \frac{\varphi(w) - \varphi(-w)}{w}\right) + \varphi(-w)\left(\psi'(w) + \lambda \frac{\psi(w) - \psi(-w)}{w}\right) \\
& + \psi'(w)[\varphi(w) - \varphi(-w)] \\
= \; & \psi'(w)\varphi(w) + \psi(w)\varphi'(w) - \psi'(w)\varphi(-w) + \psi'(w)\varphi(-w) \\
& + \lambda \frac{\psi(w)\varphi(w) - \psi(w)\varphi(-w) + \psi(w)\varphi(-w) - \psi(-w)\varphi(-w)}{w} \\
= \; & [\psi(w)\varphi(w)]' + \lambda \frac{\psi(w)\varphi(w) - \psi(-w)\varphi(-w)}{w} \\
= \; & D_\lambda(\psi(w)\varphi(w))
\end{aligned}
$$

elde edilir. ■

2.7 Appell Polinomları

Bu kesimde bazı Appell polinom aileleri ve bu polinom ailelerinin bazı özellikleri verilecektir.

2.7.1 Klasik Appell Polinomları

Paul Émile Appell, 1880 yılında klasik Appell polinomlarını, $P_0(x) \neq 0$ şeklinde x'den bağımsız bir sabit olmak üzere

$$\frac{d}{dx} P_n(x) = n P_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, ...$$

eşitliğini sağlayan polinomlar olarak tanımlamıştır (Appell 1880).

Teorem 2.7 (Lee 2011) $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ klasik Appell polinomlarının bir dizisi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadelerin hepsi birbirine denktir.

(i) $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ klasik Appell polinomlarının bir dizisidir.

(ii) $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$ ve $A(0) = a_0 \neq 0$ şeklinde verilen A, $D = \{t : |t| < r, r > 1\}$ diskinde analitik olmak üzere Appell fonksiyonlarının doğurucu fonksiyonu

$$A(t) \exp(xt) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \frac{t^n}{n!} \tag{2.9}$$

şeklindedir.

(iii) $a_0 \neq 0$ olmak üzere

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k}\ x^k \tag{2.10}$$

eşitliğini sağlayan x'den bağımsız $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi mevcuttur.

(iv) $a_0 \neq 0$ olmak üzere

$$P_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} \frac{d^k}{dx^k} \right) x^n$$

eşitliğini sağlayan $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi mevcuttur.

(v) $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ polinom dizisi

$$P_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_{n-k}(x)\ y^k, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

eşitliğini sağlar.

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$: $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ klasik Appell polinomlarının bir dizisi olsun. Bu polinomların doğurucu fonksiyonu

$$A(x,t)\exp(xt) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \frac{t^n}{n!} \tag{2.11}$$

formatındadır. Burada A fonksiyonun x'den bağımsız olduğu gösterilirse istenilen gösterilmiş olur. (2.11) eşitliğinde her iki tarafın x'e göre türevi alınırsa $\frac{d}{dx}P_n(x) = nP_{n-1}(x)$, $n = 1, 2, ...$ sağlanacağından $n < 0$ için $P_n(x) = 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial}{\partial x}A(x,t) + tA(x,t)\right]\exp(xt) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} nP_{n-1}(x)\frac{t^n}{n!} \\
&= t\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\frac{t^n}{n!} \\
&= tA(x,t)\exp(xt)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik ancak $\frac{\partial}{\partial x}A(x,t) = 0$ olması ile mümkündür. Dolayısıyla $A(x,t) = A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$ şeklindedir.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: doğurucu fonksiyonunda seri açılımlarından ve Cauchy çarpımından faydalanarak

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\frac{t^n}{n!} &= A(t)\exp(xt) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} t^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\frac{1}{(n-k)!}\frac{x^k}{k!}t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_{n-k}x^k\right]\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ve bu eşitlikten

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_{n-k}x^k$$

sonucuna varılır.

$(iii) \Rightarrow (i)$: (2.10) eşitliğinde her iki tarafın x'e göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}P_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}a_{n-k}x^{k-1} \\
&= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}a_{n-k}x^{k-1} \\
&= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a_{n-1-k}x^k \\
&= nP_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da $P_n(x)$'in Appell polinomu olduğunu gösterir. Böylece ilk üç öncülün birbirine denk olduğu gösterilmiş oldu.

$(iii) \Leftrightarrow (iv)$: $a_0' \neq 0$ olmak üzere

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}$$

eşitliğnden yararlanılırsa

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!}\frac{d^k}{dx^k}\right)x^n &= \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!}k!\binom{n}{k}x^{n-k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}a_k\binom{n}{k}x^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a'_{n-k}x^k \\
&= P_n(x)
\end{aligned}$$

şeklinde istenilen gösterilmiş olur.

$(ii) \Leftrightarrow (v)$: Seri açılımları ve Cauchy çarpımını kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x+y)\frac{t^n}{n!} &= A(t)\exp((x+y)t) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} y^n\frac{t^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} P_{n-k}(x)\frac{t^{n-k}}{(n-k)!}y^k\frac{t^k}{k!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} P_{n-k}(x)\,y^k\right]\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki bu eşitlik incelendiğinde

$$P_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P_{n-k}(x)\,y^k$$

sonucu elde edilir. ■

Uyarı 2.2 Klasik Appell polinomlarının (2.9) ile verilen doğurucu fonksiyonunda:

- $A(t) = 1$ alınırsa $P_n(x)$, x^n polinomlarını,
- $A(t) = \exp(ht^r)$ alınırsa $P_n(x)$ ile gösterilen Appell polinomları, Gould-Hopper polinomlarını (Gould ve Hopper 1962),
- $A(t) = \frac{2t}{\exp(t)+1}$ alınırsa $P_n(x)$, Genocchi polinomlarını (Kim 2007),
- $A(t) = \frac{2}{\exp(t)+1}$ alınırsa $P_n(x)$, Euler polinomlarını (Oldham vd. 2008),
- $A(t) = \frac{t}{\exp(t)-1}$ alınırsa $P_n(x)$, Bernoulli polinomlarını (Oldham vd. 2008),
- $A(t) = \exp(-t^2/2)$ alınırsa $P_n(x)$, Hermite polinomlarını (Oldham vd. 2008)

verecektir.

Uyarı 2.3 Klasik Appell polinomlarının (2.9) ile verilen doğurucu fonksiyonunda seri açılımı yapılır ve daha sonra $t^k/k!$ katsayısının $P_k(x)$ olacağı düşünülürse

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= A(0)\\
P_1(x) &= A(0)x + A'(0)\\
P_2(x) &= A(0)x^2 + 2A'(0)x + A''(0)\\
P_3(x) &= A(0)x^3 + 3A'(0)x^2 + 3A''(0)x + A'''(0)\\
P_4(x) &= A(0)x^4 + 4A'(0)x^3 + 6A''(0)x^2 + 4A'''(0)x + A^{(4)}(0)\\
P_5(x) &= A(0)x^5 + 5A'(0)x^4 + 10A''(0)x^3 + 10A'''(0)x^2 + 5A^{(4)}(0)x + A^{(5)}(0)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca kuvvet serisi açılımından $A^{(k)}(0) = a_k$ olduğu kolaylıkla görülebilir.

2.7.2 Dunkl-Appell Polinomları

D_λ Dunkl türev operatörü olmak üzere $\left\{P_n^\lambda(x)\right\}_{n=0}^\infty$ şeklindeki bir polinom sistemi

$$D_\lambda\left(P_{n+1}^\lambda(x)\right) = \frac{\Gamma_\lambda(n+1)}{\Gamma_\lambda(n)} P_n^\lambda(x), \quad n \geq 0 \tag{2.12}$$

eşitliğini sağlıyorsa bu taktirde $P_n^\lambda(x)$ polinomlarına Dunkl-Appell denir (Cheikh ve Gaied 2007). Dikkat edileceği üzere bu polinomlar $\lambda = 0$ için klasik Appell polinomlarını verir.

Teorem 2.8 (Cheikh ve Gaied 2007) $\left\{P_n^\lambda(x)\right\}_{n=0}^\infty$ Dunkl-Appell polinomlarının bir dizisi olsun. Buna göre aşağıdaki ifadelerin hepsi birbirine denktir.

(i) $\left\{P_n^\lambda(x)\right\}_{n=0}^\infty$ Dunkl-Appell polinomlarının bir dizisidir.

(ii) $P_n^\lambda(x)$ Appell polinomlarının doğurucu fonksiyonu

$$A^\lambda(t)\exp_\lambda(xt) = \sum_{n=0}^\infty \frac{P_n^\lambda(x)}{\Gamma_\lambda(n)} t^n \tag{2.13}$$

dir ve burada A^λ fonksiyonu $D = \{t : |t| < r, r > 1\}$ diskinde analitik olup

$$A^\lambda(t) = \sum_{k=0}^\infty \frac{a_k}{\Gamma_\lambda(k)} t^k \tag{2.14}$$

şeklindedir.

(iii) $a_0 \neq 0$ olmak üzere

$$P_n^\lambda(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_\lambda a_{n-k}\, x^k, \quad n \geq 0 \tag{2.15}$$

eşitliğini sağlayan x'den bağımsız $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi mevcuttur. Burada

$$\binom{n}{k}_{\lambda} = \frac{\Gamma_{\lambda}(n)}{\Gamma_{\lambda}(k)\,\Gamma_{\lambda}(n-k)}$$

ile verilmektedir ve bu notasyona Dunkl binom sabiti denir.

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$: $\left\{P_n^{\lambda}(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ Dunkl-Appell polinomlarının bir dizisi olsun. Bu polinomların doğurucu fonksiyonu

$$A^{\lambda}(x,t)\exp_{\mu}(xt) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n^{\lambda}(x)}{\Gamma_{\lambda}(n)} t^n \tag{2.16}$$

formatındadır. Burada A^{λ} fonksiyonun x'den bağımsız olduğu gösterilirse istenilen gösterilmiş olur. (2.16) eşitliğinde her iki tarafın x'e göre Dunkl türevi alınırsa (2.12) eşitliğini göz önünde bulundurarak $n < 0$ için $P_n^{\lambda}(x) = 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{\lambda}(n)}{\Gamma_{\lambda}(n-1)} \frac{P_{n-1}^{\lambda}(x)}{\Gamma_{\lambda}(n)} t^n &= t\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n^{\lambda}(x)}{\Gamma_{\lambda}(n)} t^n \\
&= tA^{\lambda}(t)\exp_{\lambda}(xt) \\
&= D_{\lambda,x}\left[A^{\lambda}(x,t)\exp_{\lambda}(xt)\right] \\
&= tA^{\lambda}(x,t)\exp_{\lambda}(xt) + D_{\lambda,x}\left(A^{\lambda}(x,t)\right)\exp_{\lambda}(-xt) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x}\left(A^{\lambda}(x,t)\right)\left[\exp_{\lambda}(xt) - \exp_{\lambda}(-xt)\right] \\
&= \left[tA^{\lambda}(t) + \frac{\partial}{\partial x}\left(A^{\lambda}(x,t)\right)\right]\exp_{\lambda}(xt) \\
&\quad + \lambda\frac{A^{\lambda}(x,t) - A^{\lambda}(-x,t)}{x}\exp_{\lambda}(-xt)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A^{\lambda}(x,t)\right) = 0 \text{ ve } A^{\lambda}(x,t) - A^{\lambda}(-x,t) = 0$$

olması şartıyla sağlanabilir ve bu durum A^{λ}'nın x'den bağımsız olmasıyla mümkündür. Yani $A^{\lambda}(x,t) = A^{\lambda}(t)$ şeklinde olup istenen sağlanır.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: doğurucu fonksiyonunda seri açılımları ve Cauchy çarpımını kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{\lambda}(x) \frac{t^n}{\Gamma_\lambda(n)} &= A^{\lambda}(t) \exp_\lambda(xt) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\Gamma_\lambda(n)} t^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma_\lambda(n)} t^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{\Gamma_\lambda(n-k)} \frac{x^k}{\Gamma_\lambda(k)} t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_{\lambda} a_{n-k} x^k \frac{t^n}{\Gamma_\lambda(n)}
\end{aligned}$$

eşitliği saplanır ve bu eşitlikten (2.15) elde edilir.

$(iii) \Rightarrow (i)$: (2.15) eşitliğinde her iki tarafın x'e göre Dunkl türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
D_{\lambda,x}\left[P_n^{\lambda}(x)\right] &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_{\lambda} a_{n-k}\ D_{\lambda,x}\left(x^k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma_\lambda(n)}{\Gamma_\lambda(n-k)\,\Gamma\lambda(k)} \frac{\Gamma_\lambda(k)}{\Gamma_\lambda(k-1)} a_{n-k} x^{k-1} \\
&= \frac{\Gamma_\lambda(n)}{\Gamma_\lambda(n-1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma_\lambda(n-1)}{\Gamma_\lambda(n-k)\,\Gamma_\lambda(k-1)} a_{n-k} x^{k-1} \\
&= \frac{\Gamma_\lambda(n)}{\Gamma_\lambda(n-1)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma_\lambda(n-1)}{\Gamma_\lambda(n-1-k)\,\Gamma_\lambda(k)} a_{n-1-k} x^{k} \\
&= \frac{\Gamma_\lambda(n)}{\Gamma_\lambda(n-1)} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}_{\lambda} a_{n-1-k} x^{k} \\
&= \frac{\Gamma_\lambda(n)}{\Gamma_\lambda(n-1)} P_{n-1}^{\lambda}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da $P_n^{\lambda}(x)$ polinomlarının Dunkl-Appell polinomları olduğunu gösterir ve dolayısıyla üç öncülün birbirine denk olduğu gösterilmiş oldu. ■

2.7.3 Katlı Appell Polinomları

Eğer $\{P_{n_1,n_2}(x)\}_{n_1,n_2=0}^{\infty}$ ile verilen polinom sistemi $P_{0,0}(x) \neq 0$ ve

$$\frac{d}{dx} P_{n_1,n_2}(x) = n_1 P_{n_1-1,n_2}(x) + n_2 P_{n_1,n_2-1}(x), \quad n_1 + n_2 \geq 1 \tag{2.17}$$

eşitliğini sağlıyorsa bu taktirde $P_{n_1,n_2}(x)$ ile gösterilen ve derecesi $n_1 + n_2$ olan polinomlara katlı Appell polinomları denir (Lee 2011).

Teorem 2.9 (Lee 2011) $\{P_{n_1,n_2}(x)\}_{n_1,n_2=0}^{\infty}$ katlı Appell polinomlarının bir dizisi olsun. Buna göre aşağıdaki ifadelerin hepsi birbirine denktir.

(i) $\{P_{n_1,n_2}(x)\}_{n_1,n_2=0}^{\infty}$ katlı Appell polinomlarının bir dizisidir.

(ii) $P_{n_1,n_2}(x)$ katlı Appell polinomlarının doğurucu fonksiyonu

$$A(t_1,t_2)\exp(x(t_1+t_2)) = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} P_{n_1,n_2}(x)\frac{t_1^{n_1}t_2^{n_2}}{n_1!n_2!} \tag{2.18}$$

dir ve burada A fonksiyonu $A(0,0)=a_{0,0}\neq 0$ olmak üzere

$$A(t_1,t_2) = \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} a_{k_1,k_2}\ \frac{t_1^{k_1}t_2^{k_2}}{k_1!k_2!}$$

şeklindedir.

(iii) $a_{0,0}\neq 0$ olmak üzere

$$P_{n_1,n_2}(x) = \sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2}a_{n_1-k_1,n_2-k_2}\ x^{k_1+k_2}, \quad n_1,n_2\geq 0 \tag{2.19}$$

eşitliğini sağlayan x'den bağımsız $\{a_{n_1,n_2}\}_{n_1,n_2=0}^{\infty}$ dizisi mevcuttur.

(iv) $a_{0,0}\neq 0$ ve $n_1,n_2\geq 0$ olmak üzere

$$P_{n_1,n_2}(x) = \sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\left[\binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2}\frac{(n_1+n_2-k_1-k_2)!}{(n_1+n_2)!}a_{k_1,k_2}\ \frac{d^{k_1+k_2}}{dx^{k_1+k_2}}\right]x^{n_1+n_2}$$

eşitliğini sağlayan x'den bağımsız $\{a_{n_1,n_2}\}_{n_1,n_2=0}^{\infty}$ dizisi mevcuttur.

(v) $\{P_{n_1,n_2}(x)\}_{n_1,n_2=0}^{\infty}$ polinom dizisi

$$P_{n_1,n_2}(x+y) = \sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\left[\binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2}P_{n_1-k_1,n_2-k_2}(x)\,y^{k_1+k_2}\right]$$

eşitliğini sağlar.

İspat. $(i)\Rightarrow(ii)$: $\{P_{n_1,n_2}(x)\}_{n_1,n_2=0}^{\infty}$ katlı Appell polinomlarının bir dizisi olsun. Bu polinomların doğurucu fonksiyonu

$$A(x,t_1,t_2)\exp(x(t_1+t_2)) = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} P_{n_1,n_2}(x)\frac{t_1^{n_1}t_2^{n_2}}{n_1!n_2!} \tag{2.20}$$

formatındadır. Burada A fonksiyonun x'den bağımsız olduğu gösterilirse istenilen gösterilmiş olur. (2.20) eşitliğinde her iki tarafın x'e göre türevi alınırsa (2.17) eşitliği sağlanacağından $n_1 < 0$ veya $n_2 < 0$ için $P_{n_1,n_2}(x) = 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\partial}{\partial x} A(x,t_1,t_2) + (t_1+t_2) A(x,t_1,t_2)\right] \exp(x(t_1+t_2)) \\
= & \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} \left[n_1 P_{n_1-1,n_2}(x) + n_2 P_{n_1,n_2-1}(x)\right] \frac{t_1^{n_1} t_2^{n_2}}{n_1! n_2!} \\
= & \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} n_1 P_{n_1-1,n_2}(x) \frac{t_1^{n_1} t_2^{n_2}}{n_1! n_2!} + \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty} n_2 P_{n_1,n_2-1}(x) \frac{t_1^{n_1} t_2^{n_2}}{n_1! n_2!} \\
= & (t_1+t_2) \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} P_{n_1,n_2}(x) \frac{t_1^{n_1} t_2^{n_2}}{n_1! n_2!} \\
= & (t_1+t_2) A(x,t_1,t_2) \exp(x(t_1+t_2))
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ve bu eşitlikten $\frac{\partial}{\partial x} A(x,t_1,t_2) = 0$ olduğu sonucuna varılır. Buna göre A fonksiyonun x'den bağımsız olup $A(x,t_1,t_2) = A(t_1,t_2)$ şeklindedir.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: doğurucu fonksiyonunda seri açılımları ve Cauchy çarpımı kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} P_{n_1,n_2}(x) \frac{t_1^{n_1} t_2^{n_2}}{n_1! n_2!} \\
= & A(t_1,t_2) \exp(x(t_1+t_2)) \\
= & \left(\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} a_{n_1,n_2} \frac{t_1^{n_1} t_2^{n_2}}{n_1! n_2!}\right) \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{t_1^{k_1}}{k_1!} x^{k_1}\right) \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{t_2^{k_2}}{k_2!} x^{k_2}\right) \\
= & \left(\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} a_{n_1,n_2} \frac{t_1^{n_1} t_2^{n_2}}{n_1! n_2!}\right) \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{t_1^{k_1}}{k_1!} x^{k_1}\right) \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{t_2^{k_2}}{k_2!} x^{k_2}\right) \\
= & \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} a_{n_1,n_2} \frac{t_1^{n_1+k_1} t_2^{n_2+k_2}}{n_1! n_2!} \frac{x^{k_1+k_2}}{k_1! k_2!} \\
= & \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\infty} \left(\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} a_{n_1,n_2} \frac{t_2^{n_2+k_2}}{n_2! k_2!} x^{k_2}\right) \frac{t_1^{n_1+k_1}}{n_1! k_1!} x^{k_1} \\
= & \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{n_1} \left(\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{n_2} a_{n_1-k_1,n_2-k_2} \frac{t_2^{n_2}}{(n_2-k_2)! k_2!} x^{k_2}\right) \frac{t_1^{n_1}}{(n_1-k_1)! k_1!} x^{k_1} \\
= & \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2} \binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2} a_{n_1-k_1,n_2-k_2} x^{k_1+k_2}\right) \frac{t_1^{n_1} t_2^{n_2}}{n_1! n_2!}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ve bu eşitlikten (2.19) elde edilir.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: (2.19) eşitliğinde her iki tarafın x'e göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} P_{n_1,n_2}(x) &= \sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2}(k_1+k_2)\, a_{n_1-k_1,n_2-k_2}\ x^{k_1+k_2-1} \\
&= \sum_{k_1=1}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2} n_1\binom{n_1-1}{k_1-1}\binom{n_2}{k_2} a_{n_1-k_1,n_2-k_2} x^{k_1+k_2-1} \\
&\quad + \sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=1}^{n_2} n_2\binom{n_1}{k_1}\binom{n_2-1}{k_2-1} a_{n_1-k_1,n_2-k_2} x^{k_1+k_2-1} \\
&= n_1\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\binom{n_1-1}{k_1}\binom{n_2}{k_2} a_{n_1-1-k_1,n_2-k_2} x^{k_1+k_2} \\
&\quad + n_2\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\binom{n_1}{k_1}\binom{n_2-1}{k_2} a_{n_1-k_1,n_2-1-k_2} x^{k_1+k_2} \\
&= n_1 P_{n_1-1,n_2}(x) + n_2 P_{n_1,n_2-1}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da $P_{n_1,n_2}(x)$ polinomlarının katlı Appell polinomları olduğunu gösterir. Böylece üç öncülün birbirine denk olduğu gösterilmiş olur.

$(iii) \Leftrightarrow (iv)$: $a'_{0,0} \neq 0$ olmak üzere

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}$$

eşitliğnden yararlanarak

$$\begin{aligned}
&\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\left[\tbinom{n_1}{k_1}\tbinom{n_2}{k_2}\tfrac{(n_1+n_2-k_1-k_2)!}{(n_1+n_2)!} a_{k_1,k_2}\ \tfrac{d^{k_1+k_2}}{dx^{k_1+k_2}}\right] x^{n_1+n_2} \\
&= \sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\left[\tbinom{n_1}{k_1}\tbinom{n_2}{k_2}\tfrac{(n_1+n_2-k_1-k_2)!}{(n_1+n_2)!}(k_1+k_2)!\tbinom{n_1+n_2}{k_1+k_2} a_{k_1,k_2}\right] x^{n_1+n_2-k_1-k_2} \\
&= \sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\left[\tbinom{n_1}{k_1}\tbinom{n_2}{k_2} a_{k_1,k_2}\right] x^{n_1-k_1}x^{n_2-k_2} \\
&= \sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\left[\tbinom{n_1}{k_1}\tbinom{n_2}{k_2} a'_{n_1-k_1,n_2-k_2}\right] x^{k_1+k_2} \\
&= P_{n_1,n_2}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$(ii) \Leftrightarrow (v)$:doğurucu fonksiyonunda seri açılımları ve Cauchy çarpımı kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} P_{n_1,n_2}\left(x+y\right)\frac{t_1^{n_1}t_2^{n_2}}{n_1!n_2!} \\
&= A\left(t_1,t_2\right)\exp\left(x\left(t_1+t_2\right)+y\left(t_1+t_2\right)\right) \\
&= A\left(t_1,t_2\right)\exp\left(x\left(t_1+t_2\right)\right)\left(\exp\left(y\left(t_1+t_2\right)\right)\right) \\
&= \left(\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} P_{n_1,n_2}\left(x\right)\frac{t_1^{n_1}t_2^{n_2}}{n_1!n_2!}\right)\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\frac{y^{k_1}t_1^{k_1}}{k_1!}\right)\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{y^{k_2}t_2^{k_2}}{k_2!}\right) \\
&= \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\infty} P_{n_1,n_2}\left(x\right)\frac{t_1^{n_1}t_2^{n_2}}{n_1!n_2!}\frac{y^{k_1}t_1^{k_1}}{k_1!}\frac{y^{k_2}t_{t_2}^{k_2}}{k_2!} \\
&= \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\left[\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_1=0}^{n_2}\binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2}P_{n_1-k_1,n_2-k_2}\left(x\right)\frac{y^{k_1+k_2}}{k_1!k_2!}\right]\frac{t_1^{n_1}t_2^{n_2}}{n_1!n_2!}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte ilk iki toplamın içerisindeki $t_1^{n_1}t_2^{n_2}/n_1!n_2!$ ifadesinin katsayıları karşılaştırıldığında istenilen elde edilir. ■

3. DUNKL-APPELL POLİNOMLARI VE SONSUZ ARTAN DİZİLER YARDIMIYLA ELDE EDİLEN OPERATÖRLER

Bu bölümde bu tezden üretilen (Yazıcı vd. 2022) kaynağındaki elde edilen veriler üzerinde durulacaktır.

3.1 $L^{\lambda}_{a_m,b_m}$ Operatörlerinin İnşası

Tanım 3.1 (Yazıcı vd. 2022) $P^{\lambda}_{j}(x)$, Dunkl-Appell polinomlarını göstersin ve (a_m) ile (b_m)

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{b_m}=0 \text{ ve } \lim_{m\to\infty}\frac{a_m}{b_m}=1 \tag{3.1}$$

şartlarını sağlayan pozitif terimli artan ve sınırsız reel sayı dizileri olsun. Ayrıca, (2.14) eşitliği ile verilen A^{λ} fonksiyonu, $A^{\lambda}(1)\neq 0$ ile $\frac{a_k}{A^{\lambda}(1)}\geq 0$ şartını sağlayan $|t|<r$, $r>1$ bölgesinde analitik fonksiyon, $f\in C[0,\infty)$ ve $|\mu|<1/2$ olmak üzere $L^{\lambda}_{a_m,b_m}$ operatörleri

$$L^{\lambda}_{a_m,b_m}(f;x)=\frac{1}{A^{\lambda}(1)\exp_{\lambda}(a_m x)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{P^{\lambda}_{j}(a_m x)}{\Gamma_{\lambda}(j)}f\left(\frac{j+2\lambda\theta_j}{b_m}\right),\quad x\geq 0,\ m\in\mathbb{N} \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanır.

Uyarı 3.1 Dikkat edileceği üzere $L^{\lambda}_{a_m,b_m}$ operatörleri lineer ve pozitiftir ve ayrıca (3.2) ile verilen eşitlikte $a_m=b_m=m$ olarak alınırsa $L^{\lambda}_{a_m,b_m}$ operatörleri (1.5) eşitliği verilen Sucu tarafından tanımlanan operatörleri verir.

Uyarı 3.2 Eğer (c_m) dizisi

$$\lim_{m\to\infty}c_m=\infty \text{ ve } \lim_{m\to\infty}\frac{c_m}{m}=0$$

şartlarını sağlayan pozitif terimli bir dizi ise $L^{\lambda}_{a_m,b_m}$ operatöründe $a_m=b_m=\frac{m}{c_m}$ olarak alınırsa

$$\lim_{m\to\infty}\tfrac{1}{b_m}=\lim_{m\to\infty}\tfrac{c_m}{m}=0 \quad\text{ve}\quad \lim_{m\to\infty}\tfrac{a_m}{b_m}=\lim_{m\to\infty}\tfrac{\frac{m}{c_m}}{\frac{m}{c_m}}=1$$

yazılabileceğinden (3.1) şartları sağlanacağı için Dunkl Appell polinomlarını içeren Szász operatörlerinin Chlodowsky tipi

$$L_{c_m}^{\#\lambda}(f;x) := L_{\frac{m}{c_m},\frac{m}{c_m}}^{\lambda}(f;x) = \frac{1}{A^{\lambda}(1)\exp_{\lambda}\left(\frac{m}{c_m}x\right)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{P_j^{\lambda}\left(\frac{m}{c_m}x\right)}{\Gamma_{\lambda}(j)}f\left(\frac{j+2\lambda\theta_j}{m}c_m\right)$$

şeklinde tanımlanabilir ve L_{a_m,b_m}^{λ} için elde edilen tüm yaklaşım özellikleri Chlodowsky tipli bu genelleme için de sağlanır.

Lemma 3.1 (Yazıcı vd. 2022) (a_m) pozitif terimli artan ve sınırsız reel sayı dizisi ve $x \geq 0$ olsun. Bu durumda (2.14) eşitliği ile verilen A^{λ} fonksiyonu

$$\begin{aligned}
&i. && \sum_{j=0}^{\infty}\tfrac{P_j^{\lambda}(a_m x)}{\Gamma_{\lambda}(j)} = A^{\lambda}(1)\exp_{\lambda}(a_m x)\\
&ii. && \sum_{j=0}^{\infty}\tfrac{P_{j+1}^{\lambda}(a_m x)}{\Gamma_{\lambda}(j)} = \left[a_m x A^{\lambda}(1) + \left(A^{\lambda}\right)'(1)\right]\exp_{\lambda}(a_m x)\\
& && +\lambda\left[A^{\lambda}(1) - A^{\lambda}(-1)\right]\exp_{\lambda}(-a_m x)\\
&iii. && \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\tfrac{P_{j+1}^{\lambda}(a_m x)}{\Gamma_{\lambda}(j)} = \left[a_m x A^{\lambda}(-1) + \left(A^{\lambda}\right)'(-1)\right]\exp_{\lambda}(-a_m x)\\
& && +\lambda\left[A^{\lambda}(1) - A^{\lambda}(-1)\right]\exp_{\lambda}(a_m x)\\
&iv. && \sum_{j=0}^{\infty}\tfrac{P_{j+2}^{\lambda}(a_m x)}{\Gamma_{\lambda}(j)} = \left[a_m^2 x^2 A^{\lambda}(1) + 2a_m x\left(A^{\lambda}\right)'(1) + \left(A^{\lambda}\right)''(1)\right]\exp_{\lambda}(a_m x)\\
& && +\lambda\left[2\left(A^{\lambda}\right)'(1) - \left[A^{\lambda}(1) - A^{\lambda}(-1)\right]\right]\exp_{\lambda}(-a_m x)
\end{aligned}$$

özelliklerini sağlar.

İspat. i. (2.13) eşitliğinde $t \to 1$ ve $x \to a_m x$ alınarak istenen elde edilir.

ii. (2.8) eşitliği ile verilen D_{λ} operatörü (2.13) eşitliğinin her iki tarafına t değişkenine göre uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{P_{j+1}^{\lambda}(x)}{\Gamma_{\lambda}(n)}t^n\\
&= D_{\lambda,t}\left[A^{\lambda}(t)\exp_{\lambda}(xt)\right]\\
&= xA^{\lambda}(t)\exp_{\lambda}(xt) + \exp_{\mu}(-xt)\,D_{\lambda,x}\left(A^{\lambda}(t)\right)\\
&+ \left(A^{\lambda}\right)'(t)\left[\exp_{\lambda}(xt) - \exp_{\lambda}(-xt)\right]\\
&= xA^{\lambda}(t)\exp_{\lambda}(xt) + \left(A^{\lambda}\right)'(t)\left[\exp_{\lambda}(xt) - \exp_{\lambda}(-xt)\right]\\
&+ \exp_{\lambda}(-xt)\left[\left(A^{\lambda}\right)'(t) + \lambda\tfrac{A^{\lambda}(t)-A^{\lambda}(-t)}{t}\right]\\
&= \left[xA^{\lambda}(t) + \left(A^{\lambda}\right)'(t)\right]\exp_{\lambda}(xt) + \lambda\tfrac{A^{\lambda}(t)-A^{\lambda}(-t)}{t}\exp_{\lambda}(-xt)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

elde edilir. Yukarıdaki (3.3) eşitliğinde $t \to 1$ ve $x \to a_m x$ alınarak istenen elde edilir.

iii. (3.3) eşitliğinde $t \to -1$ ve $x \to a_m x$ alınarak istenen elde edilir.

iv. (2.8) eşitliği ile verilen D_λ operatörü (2.13) eşitliğinin her iki tarafına t değişkenine göre iki kez uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_{j+2}^{\lambda}(x)}{\Gamma_\lambda(n)} t^n \\
&= D_{\lambda,t}^2 \left[A^\lambda(t)\exp_\lambda(xt)\right] \\
&= D_{\lambda,t}\left[\begin{array}{c} xA^\lambda(t)\exp_\lambda(xt) + \exp_\mu(-xt)\, D_{\lambda,t}\left(A^\lambda(t)\right) \\ +\left(A^\lambda\right)'(t)\left[\exp_\lambda(xt) - \exp_\lambda(-xt)\right] \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c} x^2 A^\lambda(t)\exp_\lambda(xt) + x\exp_\lambda(-xt)\, D_{\lambda,t}\left[A^\lambda(t)\right] \\ +x\left(A^\lambda\right)'(t)\left[\exp_\lambda(xt) - \exp_\lambda(-xt)\right] \end{array}\right] \\
&\quad + \left[\begin{array}{c} -x\exp_\mu(-xt)\, D_{\lambda,t}\left(A^\lambda(t)\right) + D_{\lambda,t}^2\left(A^\lambda(t)\right)\exp_\mu(xt) \\ +\left[D_{\lambda,t}\left(A^\lambda(t)\right)\right]'\left[\exp_\lambda(-xt) - \exp_\lambda(xt)\right] \end{array}\right] \\
&\quad + \left[\begin{array}{c} x\left(A^\lambda\right)'(t)\left[\exp_\lambda(xt) + \exp_\lambda(-xt)\right] \\ +D_{\lambda,t}\left[\left(A^\lambda\right)'(t)\right]\left[\exp_\lambda(-xt) - \exp_\lambda(xt)\right] \\ +2\left(A^\lambda\right)''(t)\left[\exp_\lambda(xt) - \exp_\lambda(-xt)\right] \end{array}\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra Önerme 2.2'deki Dunkl türev özelliklerinden faydalanarak yukarıdaki eşitlik devam ettirilirse

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_{j+2}^{\lambda}(x)}{\Gamma_\lambda(n)} t^n \\
&= \left[x^2 A^\lambda(t) + 2x\left(A^\lambda\right)'(t) + D_{\lambda,t}^2\left(A^\lambda(t)\right)\right]\exp_\lambda(xt) \\
&\quad + \left[\begin{array}{c} 2\left(A^\lambda\right)''(t) - \left[D_{\lambda,t}\left(A^\lambda(t)\right)\right]' \\ -D_{\lambda,t}\left[\left(A^\lambda\right)'(t)\right] \end{array}\right]\left[\exp_\lambda(xt) - \exp_\lambda(-xt)\right] \\
&= \left[\begin{array}{c} x^2 A^\lambda(t) + 2x\left(A^\lambda\right)'(t) + \left(A^\lambda\right)''(t) \\ +\frac{2\lambda}{t}\left(A^\lambda\right)'(t) - \lambda\frac{A^\lambda(t)-A^\lambda(-t)}{t^2} \end{array}\right]\exp_\lambda(xt) \\
&\quad + \left[\begin{array}{c} 2\left(A^\lambda\right)''(t) - \left[\left(A^\lambda\right)'(t) + \lambda\frac{A^\lambda(t)-A^\lambda(-t)}{t}\right]' \\ -\left[\left(A^\lambda\right)''(t) + \lambda\frac{\left(A^\lambda\right)'(t)-\left(A^\lambda\right)'(-t)}{t}\right] \end{array}\right]\left[\exp_\lambda(xt) - \exp_\lambda(-xt)\right] \\
&= \left[\begin{array}{c} x^2 A^\lambda(t) + 2x\left(A^\lambda\right)'(t) + \left(A^\lambda\right)''(t) \\ +\frac{2\lambda}{t}\left(A^\lambda\right)'(t) - \lambda\frac{A^\lambda(t)-A^\lambda(-t)}{t^2} \end{array}\right]\exp_\lambda(xt) \\
&\quad -\frac{\lambda}{t^2}\left[2t\left(A^\lambda\right)'(t) - \left[A^\lambda(t) - A^\lambda(-t)\right]\right]\left[\exp_\lambda(xt) - \exp_\lambda(-xt)\right]
\end{aligned}$$

sonucuna varılır. Son olarak yukarıdaki bu eşitlikte $t \to 1$ ve $x \to a_m x$ alınarak

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_{j+2}^{\lambda}\left(a_m x\right)}{\Gamma_{\lambda}\left(n\right)} \\
= &\left[\begin{array}{c} a_m^2 x^2 A^{\lambda}\left(1\right) + 2a_m x \left(A^{\lambda}\right)'\left(1\right) + \left(A^{\lambda}\right)''\left(1\right) \\ +2\lambda \left(A^{\lambda}\right)'\left(1\right) - \lambda\left[A^{\lambda}\left(1\right) - A^{\lambda}\left(-1\right)\right] \end{array}\right] \exp_{\lambda}\left(a_m x\right) \\
&-\lambda\left[2\left(A^{\lambda}\right)'\left(1\right) - \left[A^{\lambda}\left(1\right) - A^{\lambda}\left(-1\right)\right]\right]\left[\exp_{\lambda}\left(a_m x\right) - \exp_{\lambda}\left(-a_m x\right)\right] \\
= &\left[a_m^2 x^2 A^{\lambda}\left(1\right) + 2a_m x\left(A^{\lambda}\right)'\left(1\right) + \left(A^{\lambda}\right)''\left(1\right)\right]\exp_{\lambda}\left(a_m x\right) \\
&+\lambda\left[2\left(A^{\lambda}\right)'\left(1\right) - \left[A^{\lambda}\left(1\right) - A^{\lambda}\left(-1\right)\right]\right]\exp_{\lambda}\left(-a_m x\right)
\end{aligned}
$$

şeklinde istenilen elde edilir. ∎

Lemma 3.2 (Yazıcı vd. 2022) $\xi_m^{\lambda}\left(x\right) := \frac{\exp_{\lambda}(-a_m x)}{\exp_{\lambda}(a_m x)}$ olmak üzere L_{a_m,b_m}^{λ} operatörleri

i. $L_{a_m,b_m}^{\lambda}\left(1;x\right) = 1,$

ii. $L_{a_m,b_m}^{\lambda}\left(t;x\right) = \frac{a_m}{b_m}x + \frac{1}{b_m}\frac{\left(A^{\lambda}\right)'(1)+\lambda\left[A^{\lambda}(1)-A^{\lambda}(-1)\right]\xi_m^{\lambda}(x)}{A^{\lambda}(1)},$

iii. $L_{a_m,b_m}^{\lambda}\left(t^2;x\right) = \left(\frac{a_m}{b_m}\right)^2 x^2 + \frac{a_m}{b_m^2}\frac{2\left(A^{\lambda}\right)'(1)+A^{\lambda}(1)+2\lambda A^{\lambda}(-1)\xi_m^{\lambda}(x)}{A^{\lambda}(1)}x$
$+\frac{1}{b_m^2}\frac{\left(A^{\lambda}\right)''(1)+\left(A^{\lambda}\right)'(1)+2\lambda^2\left[A^{\lambda}(1)-A^{\lambda}(-1)\right]+2\lambda\left[\left(A^{\lambda}\right)'(1)+\left(A^{\lambda}\right)'(-1)\right]\xi_m^{\lambda}(x)}{A^{\lambda}(1)}$

eşitliklerini sağlar.

İspat. i. Lemma 3.1'den durum açıktır.

ii. (2.4)'deki bağıntıdan ve Lemma 3.1'den yararlanarak

$$
\begin{aligned}
L_{a_m,b_m}^{\lambda}\left(t;x\right) &= \frac{1}{A^{\lambda}\left(1\right)\exp_{\lambda}\left(a_m x\right)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{P_j^{\lambda}\left(a_m x\right)}{\Gamma_{\lambda}\left(j\right)}\frac{j+2\lambda\theta_j}{b_m} \\
&= \frac{1}{A^{\lambda}\left(1\right)b_m\exp_{\lambda}\left(a_m x\right)}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{P_j^{\lambda}\left(a_m x\right)}{\Gamma_{\lambda}\left(j-1\right)} \\
&= \frac{1}{A^{\lambda}\left(1\right)b_m\exp_{\lambda}\left(a_m x\right)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{P_{j+1}^{\lambda}\left(a_m x\right)}{\Gamma_{\lambda}\left(j\right)} \\
&= \frac{\left[\begin{array}{c}\left[a_m x A^{\lambda}\left(1\right) + \left(A^{\lambda}\right)'\left(1\right)\right]\exp_{\lambda}\left(a_m x\right) \\ +\lambda\left[A^{\lambda}\left(1\right) - A^{\lambda}\left(-1\right)\right]\exp_{\lambda}\left(-a_m x\right)\end{array}\right]}{A^{\lambda}\left(1\right)b_m\exp_{\lambda}\left(a_m x\right)} \\
&= \frac{a_m}{b_m}x + \frac{1}{b_m}\frac{\left(A^{\lambda}\right)'\left(1\right) + \lambda\left[A^{\lambda}\left(1\right) - A^{\lambda}\left(-1\right)\right]\xi_m^{\lambda}\left(x\right)}{A^{\lambda}\left(1\right)}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

iii. Kolaylıkla görülebilir ki $j = 0, 1, 2, ...$ için $\theta_{j+1} = \theta_j + (-1)^j$ dir. Bu eşitlik ve (2.4) bağıntısı kullanılarak

$$\begin{aligned}
L^{\lambda}_{a_m,b_m}\left(t^2; x\right) &= \frac{1}{A^{\lambda}(1)\exp_{\lambda}(a_m x)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{P_j^{\lambda}(a_m x)}{\Gamma_{\lambda}(j)} \left(\frac{j + 2\lambda\theta_j}{b_m}\right)^2 \\
&= \frac{1}{A^{\lambda}(1)\exp_{\lambda}(a_m x)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{P_j^{\lambda}(a_m x)}{\Gamma_{\lambda}(j-1)} \frac{j + 2\lambda\theta_j}{b_m^2} \\
&= \frac{1}{A^{\lambda}(1)\exp_{\lambda}(a_m x)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{P_{j+1}^{\lambda}(a_m x)}{\Gamma_{\lambda}(j)} \frac{j + 1 + 2\lambda\theta_{j+1}}{b_m^2} \\
&= \frac{1}{A^{\lambda}(1)\exp_{\lambda}(a_m x)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{P_{j+1}^{\lambda}(a_m x)}{\Gamma_{\lambda}(j)} \frac{j + 1 + 2\lambda\left(\theta_j + (-1)^j\right)}{b_m^2} \\
&= \frac{1}{A^{\lambda}(1)\exp_{\lambda}(a_m x)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{P_{j+1}^{\lambda}(a_m x)}{\Gamma_{\lambda}(j)} \left[\frac{j + 2\lambda\theta_j}{b_m^2} + \frac{1}{b_m^2} + \frac{2\lambda(-1)^j}{b_m^2}\right] \\
&= \frac{1}{A^{\lambda}(1)\exp_{\lambda}(a_m x)\, b_m^2} \\
&\quad \times \left\{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{P_{j+2}^{\lambda}(a_m x)}{\Gamma_{\lambda}(j)} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{P_{j+1}^{\lambda}(a_m x)}{\Gamma_{\lambda}(j)} + 2\lambda \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{P_{j+1}^{\lambda}(a_m x)}{\Gamma_{\lambda}(j)}\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra yukarıdaki eşitlikte Lemma 3.1'deki serilerin eşiti yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
L^{\lambda}_{a_m,b_m}\left(t^2; x\right) &= \frac{1}{A^{\lambda}(1)\exp_{\lambda}(a_m x)\, b_m^2} \\
&\quad \times \left\{\begin{array}{c}
\left[a_m^2 x^2 A^{\lambda}(1) + 2a_m x \left(A^{\lambda}\right)'(1) + \left(A^{\lambda}\right)''(1)\right] \exp_{\lambda}(a_m x) \\
+\lambda\left[2\left(A^{\lambda}\right)'(1) - \left[A^{\lambda}(1) - A^{\lambda}(-1)\right]\right] \exp_{\lambda}(-a_m x) \\
+\left[a_m x A^{\lambda}(1) + \left(A^{\lambda}\right)'(1)\right] \exp_{\lambda}(a_m x) \\
+\lambda\left[A^{\lambda}(1) - A^{\lambda}(-1)\right] \exp_{\lambda}(-a_m x) \\
+2\lambda\left[a_m x A^{\lambda}(-1) + \left(A^{\lambda}\right)'(-1)\right] \exp_{\lambda}(-a_m x) \\
+2\lambda^2\left[A^{\lambda}(1) - A^{\lambda}(-1)\right] \exp_{\lambda}(a_m x)
\end{array}\right\} \\
&= \frac{a_m^2}{b_m^2} x^2 + \frac{a_m}{b_m^2} \frac{2\left(A^{\lambda}\right)'(1) + A^{\lambda}(1) + 2\lambda A^{\lambda}(-1)\,\xi_m^{\lambda}(x)}{A^{\lambda}(1)} x \\
&\quad + \frac{1}{b_m^2} \frac{\left(A^{\lambda}\right)''(1) + \left(A^{\lambda}\right)'(1) + 2\lambda^2\left[A^{\lambda}(1) - A^{\lambda}(-1)\right]}{A^{\lambda}(1)} \\
&\quad + \lambda \frac{\xi_m^{\lambda}(x)}{b_m^2} \frac{2\left(A^{\lambda}\right)'(1) + 2\left(A^{\lambda}\right)'(-1)}{A^{\lambda}(1)}
\end{aligned}$$

elde edilir ki istenilen gösterilmiş olur. ■

Uyarı 3.3 $m \to \infty$ olduğunda $\xi_m^\lambda(x) = \frac{\exp_\lambda(-a_m x)}{\exp_\lambda(a_m x)} \to 0$ (Milovanović vd. 2018) olduğuna dikkat edilmelidir. Ayrıca

$$\left|\xi_m^\lambda(x)\right| = \left|\frac{\exp_\lambda(-a_m x)}{\exp_\lambda(a_m x)}\right| = \left|\frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (a_m x)^k}{\Gamma_\lambda(k)}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_m x)^k}{\Gamma_\lambda(k)}}\right| \leq \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k (a_m x)^k}{\Gamma_\lambda(k)}\right|}{\left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_m x)^k}{\Gamma_\lambda(k)}\right|} = 1$$

olduğundan $\left|\xi_m^\lambda(x)\right| \leq 1$ yazılabilir.

Lemma 3.3 (Yazıcı vd. 2022) L_{a_m,b_m}^λ operatörlerinin bazı merkezi moment değerleri

$$\begin{aligned}
&i. && M_{m,0}^\lambda(x) = 1,\\
&ii. && M_{m,1}^\lambda(x) = \left(\tfrac{a_m}{b_m} - 1\right) x + \tfrac{1}{b_m} \tfrac{A^\lambda(1) + \mu\left[A^\lambda(1) - A^\lambda(-1)\right]\xi_m^\mu(x)}{A^\lambda(1)},\\
&iii. && M_{m,2}^\lambda(x) = \left(\tfrac{a_m}{b_m} - 1\right)^2 x^2\\
& && +\tfrac{1}{b_m^2} \tfrac{2[a_m - b_m]\left(A^\lambda\right)'(1) + \left[a_m - 2\mu b_m \xi_m^\mu(x)\right] A^\lambda(1) + 2\mu[a_m + b_m] A^\lambda(-1)\xi_m^\mu(x)}{A^\lambda(1)} x\\
& && +\tfrac{1}{b_m^2} \tfrac{\left(A^\lambda\right)''(1) + \left(A^\lambda\right)'(1) + 2\mu^2\left[A^\lambda(1) - A^\lambda(-1)\right] + 2\mu\left[\left(A^\lambda\right)'(1) + \left(A^\lambda\right)'(-1)\right]\xi_m^\mu(x)}{A^\lambda(1)},
\end{aligned}$$

şeklindedir

İspat. i. Lemma 3.2 kullanılarak

$$M_{m,0}^\mu(x) = L_{a_m,b_m}^\lambda\left((t-x)^0; x\right) = L_{a_m,b_m}^\lambda(1; x) = 1$$

elde edilir.

ii. Lemma 3.2 ve L_{a_m,b_m}^λ operatörlerinin lineerliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
M_{m,1}^\mu(x) &= L_{a_m,b_m}^\lambda\left((t-x)^1; x\right)\\
&= L_{a_m,b_m}^\lambda(t; x) - x L_{a_m,b_m}^\lambda(1; x)\\
&= \frac{a_m}{b_m} x + \frac{1}{b_m} \frac{A^\lambda(1) + \lambda\left[A^\lambda(1) - A^\lambda(-1)\right]\xi_m^\lambda(x)}{A^\lambda(1)} - x\\
&= \frac{a_m}{b_m}(x-1) + \frac{1}{b_m} \frac{A^\lambda(1) + \lambda\left[A^\lambda(1) - A^\lambda(-1)\right]\xi_m^\lambda(x)}{A^\lambda(1)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

iii. Lemma 3.2 ve $L^{\lambda}_{a_m,b_m}$ operatörlerinin lineerliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& M^{\mu}_{m,2}(x) \\
= {} & L^{\lambda}_{a_m,b_m}\left((t-x)^2;x\right) \\
= {} & L^{\lambda}_{a_m,b_m}\left(t^2;x\right) - 2xL^{\lambda}_{a_m,b_m}(t;x) + x^2 L^{\lambda}_{a_m,b_m}(1;x) \\
= {} & L^{\lambda}_{a_m,b_m}\left(t^2;x\right) - 2xL^{\lambda}_{a_m,b_m}(t;x) + x^2 L^{\lambda}_{a_m,b_m}(1;x) \\
= {} & \left(\frac{a_m}{b_m}\right)^2 x^2 + \frac{a_m}{b_m^2}\frac{2\left(A^{\lambda}\right)'(1) + A^{\lambda}(1) + 2\lambda A^{\lambda}(-1)\,\xi^{\lambda}_m(x)}{A^{\lambda}(1)}x \\
& + \frac{1}{b_m^2}\frac{\left[\begin{array}{c}\left(A^{\lambda}\right)''(1) + \left(A^{\lambda}\right)'(1) + 2\lambda^2\left[A^{\lambda}(1) - A^{\lambda}(-1)\right] \\ +2\lambda\left[\left(A^{\lambda}\right)'(1) + \left(A^{\lambda}\right)'(-1)\right]\xi^{\lambda}_m(x)\end{array}\right]}{A^{\lambda}(1)} \\
& -2x\left(\frac{a_m}{b_m}x + \frac{1}{b_m}\frac{\left(A^{\lambda}\right)'(1) + \lambda\left[A^{\lambda}(1) - A^{\lambda}(-1)\right]\xi^{\lambda}_m(x)}{A^{\lambda}(1)}\right) + x^2 \\
= {} & \left(\frac{a_m}{b_m} - 1\right)^2 x^2 + \frac{1}{b_m^2}\frac{\left[\begin{array}{c}2\left[a_m - b_m\right]\left(A^{\lambda}\right)'(1) + \left[a_m - 2\lambda b_m \xi^{\lambda}_m(x)\right]A^{\lambda}(1) \\ +2\lambda\left[a_m + b_m\right]A^{\lambda}(-1)\,\xi^{\lambda}_m(x)\end{array}\right]}{A^{\lambda}(1)}x \\
& + \frac{1}{b_m^2}\frac{\left[\begin{array}{c}\left(A^{\lambda}\right)''(1) + \left(A^{\lambda}\right)'(1) + 2\lambda^2\left[A^{\lambda}(1) - A^{\lambda}(-1)\right] \\ +2\lambda\left[\left(A^{\lambda}\right)'(1) + \left(A^{\lambda}\right)'(-1)\right]\xi^{\lambda}_m(x)\end{array}\right]}{A^{\lambda}(1)}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. ■

3.2 $L^{\lambda}_{a_m,b_m}$ Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri

Teorem 3.1 (Yazıcı vd. 2022) $g \in C_B[0,\infty)$ ve $M^{\lambda}_{m,2}(x)$ ise Lemma 3.3' de hesaplanan ikinci merkezi moment olsun. Bu taktirde

$$\left|L^{\lambda}_{a_m,b_m}(g;x) - g(x)\right| \leq 2\omega\left(g;\sqrt{M^{\lambda}_{m,2}(x)}\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $g \in C_B[0,\infty)$ fonksiyonun klasik süreklilik modülü Lemma 2.2 (iv) den dolayı

$$|g(t) - g(x)| \leq \omega(g;\delta)\left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1\right) \tag{3.4}$$

özelliğini sağlar. $L^{\lambda}_{a_m,b_m}$ lineer pozitif operatör olduğundan Lemma 2.1'den dolayı $L^{\lambda}_{a_m,b_m}$ operatörleri monoton azalmayandır. $L^{\lambda}_{a_m,b_m}$ operaörlerinin lineer pozitif monoton azalmayanlık durumundan, (3.4) eşitsizliğinden ve Lemma 3.2'den dolayı

$$\begin{aligned}
\left|L^{\lambda}_{a_m,b_m}(g;x)-g(x)\right| &= \left|L^{\lambda}_{a_m,b_m}(g;x)-g(x)\,L^{\lambda}_{a_m,b_m}(1;x)\right| \\
&= \left|L^{\lambda}_{a_m,b_m}(g;x)-L^{\lambda}_{a_m,b_m}(g(x);x)\right| \\
&= \left|L^{\lambda}_{a_m,b_m}(g(t)-g(x);x)\right| \\
&\leq L^{\lambda}_{a_m,b_m}(\left|g(t)-g(x)\right|;x) \\
&\leq \omega(g;\delta)\left(L^{\lambda}_{a_m,b_m}(1;x)+\frac{L^{\lambda}_{a_m,b_m}(\left|t-x\right|;x)}{\delta}\right) \\
&\leq \omega(g;\delta)\left(1+\frac{L^{\lambda}_{a_m,b_m}(\left|t-x\right|;x)}{\delta}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$\left|L^{\lambda}_{a_m,b_m}(g;x)-g(x)\right|\leq\omega(g;\delta)\left(1+\frac{L^{\lambda}_{a_m,b_m}(\left|t-x\right|;x)}{\delta}\right) \tag{3.5}$$

eşitsizliği geçerlidir. Diğer bir taraftan

$$\begin{aligned}
L^{\lambda}_{a_m,b_m}(\left|t-x\right|;x) &= \frac{1}{A^{\lambda}(1)\exp_{\lambda}(a_m x)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{P^{\lambda}_{j}(a_m x)}{\Gamma_{\lambda}(j)}\left|\frac{j+2\lambda\theta_j}{b_m}-x\right| \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sqrt{\left(\frac{1}{A^{\lambda}(1)\exp_{\lambda}(a_m x)}\right)^2\left(\frac{P^{\lambda}_{j}(a_m x)}{\Gamma_{\lambda}(j)}\right)^2\left(\frac{j+2\lambda\theta_j}{b_m}-x\right)^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{A^{\lambda}(1)\exp_{\lambda}(a_m x)}\right)\left(\frac{P^{\lambda}_{j}(a_m x)}{\Gamma_{\lambda}(j)}\right)\left(\frac{j+2\lambda\theta_j}{b_m}-x\right)^2} \\
&\quad\times\sqrt{\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{A^{\lambda}(1)\exp_{\lambda}(a_m x)}\right)\left(\frac{P^{\lambda}_{j}(a_m x)}{\Gamma_{\lambda}(j)}\right)} \\
&= \sqrt{L^{\lambda}_{a_m,b_m}\left((t-x)^2;x\right)}\sqrt{L^{\lambda}_{a_m,b_m}(1;x)} \\
&= \sqrt{M^{\lambda}_{m,2}(x)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani,

$$L^{\lambda}_{a_m,b_m}(\left|t-x\right|;x)\leq\sqrt{M^{\lambda}_{m,2}(x)} \tag{3.6}$$

dir. (3.6) ve (3.5) eşitsizliği birlikte düşünüldüğünde

$$\left|L^{\lambda}_{a_m,b_m}(g;x)-g(x)\right|\leq\omega(g;\delta)\left(1+\frac{\sqrt{M^{\mu}_{m,2}(x)}}{\delta}\right) \tag{3.7}$$

eşitsizliği elde edilir. Son olarak (3.7) eşitsizliğinde $\delta=\sqrt{M_{m,2}^{\mu}(x)}$ alınırsa teoremin ispatı tamamlanır. ■

Teorem 3.2 (Yazıcı vd. 2022) $g\in C_B^1[0,\infty)$ ve $M_{m,2}^{\lambda}(x)$, Lemma 3.3' de hesaplanan ikinci merkezi moment olsun. Bu taktirde

$$\left|L_{a_m,b_m}^{\mu}(g;x)-g(x)\right|\leq\sqrt{M_{m,2}^{\mu}(x)}\left\{\left|g'(x)\right|+2\omega\left(g';\sqrt{M_{m,2}^{\mu}(x)}\right)\right\}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $x,t\in[0,\infty)$ için

$$g(t)-g(x)\leq|t-x|\left|g'(x)\right|+\int_x^t\left(g'(s)-g'(x)\right)ds \tag{3.8}$$

eşitsizliği yazılabilir. Lemma 2.2 (iv) den dolayı

$$\begin{aligned}\left|\int_x^t\left(g'(s)-g'(x)\right)ds\right| &\leq \int_{\min(x,t)}^{\max(x,t)}\left|g'(s)-g'(x)\right|ds\\ &\leq \omega(g';\delta)\int_{\min(x,t)}^{\max(x,t)}\left(1+\frac{|s-x|}{\delta}\right)ds\\ &\leq \omega(g';\delta)\left(|t-x|+\frac{(t-x)^2}{\delta}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Yani, $g\in C_B^1[0,\infty)$ için

$$\left|\int_x^t\left(g'(s)-g'(x)\right)ds\right|\leq\omega(g';\delta)\left(|t-x|+\frac{(t-x)^2}{\delta}\right) \tag{3.9}$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer (3.8) eşitlizliğinin her iki tarafına L_{a_m,b_m}^{μ} operatörü uygulanır ve daha sonra her iki tarafın mutlak değeri alınırsa (3.6) ve (3.9)'den dolayı

$$\left|L_{a_m,b_m}^{\lambda}(g;x)-g(x)\right|\leq\sqrt{M_{m,2}^{\lambda}(x)}\left|g'(x)\right|+\omega(g';\delta)\left(\sqrt{M_{m,2}^{\lambda}(x)}+\frac{M_{m,2}^{\lambda}(x)}{\delta}\right)$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitsizlikte $\delta=\sqrt{M_{m,2}^{\lambda}(x)}$ alınırsa ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.3 (Yazıcı vd. 2022) $g\in Lip_M(\alpha)$ olsun. Buna göre $M_{m,2}^{\lambda}(x)$, Lemma 3.3'de hesaplanan merkezi moment olmak üzere

$$\left|L_{a_m,b_m}^{\lambda}(g;x)-g(x)\right|\leq M\ \left(M_{m,2}^{\lambda}(x)\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $g \in Lip_M(\alpha)$ olsun. Bu durumda

$$g(t) - g(x) \leq M|t-x|^{\alpha} \tag{3.10}$$

yazılabilir. $L^{\mu}_{a_m,b_m}$ operatörü (3.10) eşitsizliğinin her iki tarafına uygulanır ve daha sonra her iki tarafın mutlak değeri alınırsa $L^{\mu}_{a_m,b_m}(1;x) = 1$ ve $L^{\mu}_{a_m,b_m}$ operatörlerinin lineer olmasından dolayı

$$\left|L^{\lambda}_{a_m,b_m}(g;x) - g(x)\right| \leq M L^{\lambda}_{a_m,b_m}(|t-x|^{\alpha};x) \tag{3.11}$$

yazılabilir. Diğer taraftan $p = \frac{\alpha}{2}$ ve $q = \frac{2-\alpha}{2}$ için Hölder eşitsizliği kullanılırsa $L^{\mu}_{a_m,b_m}(1;x) = 1$ olmasından dolayı

$$\begin{aligned}
L^{\lambda}_{a_m,b_m}(|t-x|^{\alpha};x) &= \frac{1}{A^{\lambda}(1)\exp_{\lambda}(a_m x)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{P^{\lambda}_j(a_m x)}{\Gamma_{\lambda}(j)} \left|\frac{j+2\lambda\theta_j}{b_m} - x\right|^{\alpha} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{A^{\lambda}(1)\exp_{\lambda}(a_m x)} \frac{P^{\lambda}_j(a_m x)}{\Gamma_{\lambda}(j)} \left(\frac{j+2\lambda\theta_j}{b_m} - x\right)^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} \\
&\quad \times \left(\frac{1}{A^{\lambda}(1)\exp_{\lambda}(a_m x)} \frac{P^{\lambda}_j(a_m x)}{\Gamma_{\lambda}(j)}\right)^{\frac{2-\alpha}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{A^{\lambda}(1)\exp_{\lambda}(a_m x)} \frac{P^{\lambda}_j(a_m x)}{\Gamma_{\lambda}(j)} \left(\frac{j+2\lambda\theta_j}{b_m} - x^2\right)^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} \\
&\quad \times \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{A^{\lambda}(1)\exp_{\lambda}(a_m x)} \frac{P^{\lambda}_j(a_m x)}{\Gamma_{\lambda}(j)}\right)^{\frac{2-\alpha}{2}} \\
&\leq \left(L^{\lambda}_{a_m,b_m}\left((t-x)^2;x\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(L^{\lambda}_{a_m,b_m}(1;x)\right)^{\frac{2-\alpha}{2}} \\
&\leq \left(M^{\lambda}_{m,2}(x)\right)^{\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Yukarıda elde edilen $L^{\lambda}_{a_m,b_m}(|t-x|^{\alpha};x) \leq \left(M^{\lambda}_{m,2}(x)\right)^{\frac{\alpha}{2}}$ eşitsizliği (3.11)'de kullanılırsa istenilen göstreilmiş olur ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.4 (Yazıcı vd. 2022) K, $g \in C_B[0,\infty)$ fonksiyonun Peetre-K fonksiyoneli ve $M^{\lambda}_{m,2}(x)$ ifadesi de Lemma 3.3'de hesaplanan ikinci merkezi moment değeri olmak üzere

$$\left|L^{\lambda}_{a_m,b_m}(g;x) - g(x)\right| \leq 2K\left(g; \sqrt{M^{\lambda}_{m,2}(x)} + \frac{M^{\lambda}_{m,2}(x)}{2}\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. c reel sayısı x ile t arasında olmak üzere $f \in C_B^2[0,\infty)$ fonksiyonun x noktasındaki Taylor formülünden

$$f(t) \leq f(x) + |f'(x)|\,|t-x| + f''(c)\frac{(t-x)^2}{2} \tag{3.12}$$

eşitsizliği yazılabilir. (3.12) eşitsizliğinin her iki tarafına lineer pozitif L_{a_m,b_m}^{λ} operatörleri uygulanırsa (3.6) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
L_{a_m,b_m}^{\lambda}(f;x) - f(x) &\leq |f'(x)|\, L_{a_m,b_m}^{\lambda}(|t-x|\,;x) + \frac{|f''(c)|}{2} L_{a_m,b_m}^{\lambda}\left((t-x)^2;x\right) \\
&\leq |f'(x)| \sqrt{M_{m,2}^{\lambda}(x)} + \frac{|f''(c)|}{2} M_{m,2}^{\lambda}(x) \\
&\leq \|f'\|_{C_B[0,\infty)} \sqrt{M_{m,2}^{\lambda}(x)} + \frac{\|f''\|_{C_B[0,\infty)}}{2} M_{m,2}^{\lambda}(x) \\
&\leq \left[\sqrt{M_{m,2}^{\lambda}(x)} + \frac{M_{m,2}^{\lambda}(x)}{2}\right]\left(\|f'\|_{C_B[0,\infty)} + \|f''\|_{C_B[0,\infty)}\right) \\
&\leq \left[\sqrt{M_{m,2}^{\lambda}(x)} + \frac{M_{m,2}^{\lambda}(x)}{2}\right]\|f\|_{C_B^2[0,\infty)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda bulunan bu eşitlik kullanılarak her bir $g \in C_B[0,\infty)$ için

$$\begin{aligned}
&\left|L_{a_m,b_m}^{\lambda}(g;x) - g(x)\right| \\
&= \left|L_{a_m,b_m}^{\lambda}(g;x) - L_{a_m,b_m}^{\lambda}(f;x) + L_{a_m,b_m}^{\lambda}(f;x) - f(x) + f(x) - g(x)\right| \\
&\leq L_{a_m,b_m}^{\lambda}(|g-f|\,;x) + |g(x)-f(x)| + \left|L_{a_m,b_m}^{\lambda}(f;x) - f(x)\right| \\
&\leq 2\|g-f\|_{C_B[0,\infty)} + 2\|f\|_{C_B^2[0,\infty)}\left[\sqrt{M_{m,2}^{\lambda}(x)} + \tfrac{M_{m,2}^{\lambda}(x)}{2}\right]
\end{aligned}$$

yazılabilir. Yani

$$\left|L_{a_m,b_m}^{\lambda}(g;x) - g(x)\right| \leq 2\|g-f\|_{C_B[0,\infty)} + 2\|f\|_{C_B^2[0,\infty)}\left(\sqrt{M_{m,2}^{\lambda}(x)} + \frac{M_{m,2}^{\lambda}(x)}{2}\right) \tag{3.13}$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer (3.13) eşitsizliğinin her iki tarafının $f \in C_B^2[0,\infty)$ için infimumu alınırsa

$$\left|L_{a_m,b_m}^{\lambda}(g;x) - g(x)\right| \leq 2K\left(g; \sqrt{M_{m,2}^{\lambda}(x)} + \frac{M_{m,2}^{\lambda}(x)}{2}\right).$$

elde edilir ki istenilen gösterilmiş olur. ■

Teorem 3.4'de $\delta_n(x) = \sqrt{M_{m,2}^{\lambda}(x)} + \frac{M_{m,2}^{\lambda}(x)}{2}$ seçilerek Teorem 2.5 dikkate alındığında aşağıdaki teoremin geçerli olduğu sonucuna varılır.

Teorem 3.5 (Yazıcı vd. 2022) $M > 0$, $g \in C_B[0,\infty)$ ve $M_{m,2}^{\lambda}(x)$, Lemma 3.3'de hesaplanan merkezi moment değeri olsun. $\delta_n(x) = \sqrt{M_{m,2}^{\lambda}(x) + \frac{M_{m,2}^{\lambda}(x)}{2}}$ olmak üzere

$$\left|L_{a_m,b_m}^{\lambda}(g;x) - g(x)\right| \leq 2M\left\{\omega_2\left(g, \sqrt{\delta_n(x)}\right) + \min(1, \delta_n(x)) \|g\|_{C_B[0,\infty)}\right\}$$

eşitsizliği sağlanır.

3.3 L_{a_m,b_m}^{λ} Operatörleri ile Ağırlıklı Yaklaşım

Lemma 3.4 (Yazıcı vd. 2022) L_{a_m,b_m}^{λ} operatörleri $\rho(t) = 1 + t^2$ olmak üzere

$$L_{a_n,b_n}^{\mu}(\rho;x) \leq K\rho(x), \ K > 0$$

özelliğini sağlar.

İspat. (a_m) ile (b_m)

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{b_m} = 0 \text{ ve } \lim_{m\to\infty} \frac{a_m}{b_m} = 1$$

limitlerini sağladıkları için $\left(\frac{a_m}{b_m^2}\right)$ ve $\left(\frac{1}{b_m^2}\right)$ dizilerinin de bir limiti olmalıdır. Dolayısıyla limiti olan her dizi sınırlı olacağından en az birer tane M_1, M_2 ve M_3 pozitif reel sayıları vardır öyle ki her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{a_m}{b_m} \leq M_1, \quad \frac{a_m}{b_m^2} \leq M_2 \ \text{ ve } \ \frac{1}{b_m^2} \leq M_3 \tag{3.14}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Ayrıca A^{λ} fonksiyonu $A^{\lambda}(1) \neq 0$ ile $\frac{a_k}{A^{\lambda}(1)} \geq 0$ şartını sağlayan $|x| < r$, $r > 1$ bölgesinde analitik bir fonksiyon ve $\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,\infty)$ için $\left|\xi_m^{\lambda}(x)\right| \leq 1$ olduğundan dolayı en az birer $C_1 > 0$ ve $C_2 > 0$ için

$$\begin{aligned} &\left|\frac{2\left(A^{\lambda}\right)'(1) + A^{\lambda}(1) + 2\lambda A^{\lambda}(-1)\xi_m^{\lambda}(x)}{A^{\lambda}(1)}\right| \leq C_1 \\ &\left|\frac{\left(A^{\lambda}\right)''(1) + \left(A^{\lambda}\right)'(1) + 2\lambda^2\left[A^{\lambda}(1) - A^{\lambda}(-1)\right] + 2\lambda\left[\left(A^{\lambda}\right)'(1) + \left(A^{\lambda}\right)'(-1)\right]\xi_m^{\lambda}(x)}{A^{\lambda}(1)}\right| \leq C_2 \end{aligned} \tag{3.15}$$

yazılabilir. (3.14) ve (3.15) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
& L^{\lambda}_{a_m,b_m}(\rho;x) \\
&= \frac{1}{A^{\lambda}(1)\exp_{\lambda}(a_m x)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{P^{\lambda}_j(a_m x)}{\Gamma_{\lambda}(j)}\left(1+\left(\frac{j+2\lambda\theta_j}{b_m}\right)^2\right) \\
&= L^{\lambda}_{a_m,b_m}(1;x)+L^{\lambda}_{a_m,b_m}(t^2;x) \\
&= 1+\left(\frac{a_m}{b_m}\right)^2 x^2+\frac{a_m}{b_m^2}\frac{2\left(A^{\lambda}\right)'(1)+A^{\lambda}(1)+2\lambda A^{\lambda}(-1)\xi^{\lambda}_m(x)}{A^{\lambda}(1)}x \\
&+\frac{1}{b_m^2}\frac{\left(A^{\lambda}\right)''(1)+\left(A^{\lambda}\right)'(1)+2\mu^2\left[A^{\lambda}(1)-A^{\lambda}(-1)\right]+2\mu\left[\left(A^{\lambda}\right)'(1)+\left(A^{\lambda}\right)'(-1)\right]\xi^{\mu}_m(x)}{A^{\lambda}(1)} \\
&\leq 1+M_1^2x^2+M_2C_1x+M_3C_2 \\
&\leq \left(1+M_1^2+M_3C_2\right)\left(1+x^2\right)+M_2C_1x \\
&\leq \left(1+M_1^2+M_3C_2+M_2C_1\right)\left(1+x^2\right) \\
&\leq K\rho(x),\ K>0
\end{aligned}$$

elde edilir ki istenilen gösterilmiş olur. ■

Teorem 3.6 (Yazıcı vd. 2022) $\rho(t)=1+t^2$ ve $g\in C^k_{\rho}[0,\infty)$ olmak üzere $L^{\lambda}_{a_m,b_m}$ operatörleri

$$\lim_{m\to\infty}\left\|L^{\lambda}_{a_m,b_m}(g;\cdot)-g\right\|_{\rho}=0$$

limitini sağlar.

İspat. Öncelikle $L^{\mu}_{a_n,b_n}:C_{\rho}[0,\infty)\to B_{\rho}[0,\infty)$ şeklinde bir dönüşüm olduğu gösterilmelidir. $g\in C_{\rho}[0,\infty)$ olsun. Bu durumda $\rho(t)=1+t^2$ ve $M_g>0$ olmak üzere $L^{\lambda}_{a_m,b_m}$ operatörlerinin lineer pozitifliğinden ve bir önceki lemmadan

$$L^{\lambda}_{a_m,b_m}(g;x)=L^{\mu}_{a_n,b_n}\left(\frac{g}{\rho}\rho;x\right)\leq\|g\|_{\rho}L^{\lambda}_{a_m,b_m}(\rho;x)\leq\|g\|_{\rho}K\rho(x)\leq M_g\rho(x)$$

elde edilir. O halde yukarıdaki bu eşitsizlikten $L^{\mu}_{a_n,b_n}(g;\cdot)\in B_{\rho}[0,\infty)$ sonucuna varılır. Bu durumda $L^{\mu}_{a_n,b_n}$ operatörü $C_{\rho}[0,\infty)$ uzayından $B_{\rho}[0,\infty)$ uzayına dönüşüm olmalıdır. Şimdi $e_k(t):=t^k$, $k\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L^{\lambda}_{a_m,b_m}(e_k;\cdot)-e_k\right\|_{\rho}=0,\ k=0,1,2. \tag{3.16}$$

limitinin sağlandığı gösterilecektir:

A1. $\left\|L^{\lambda}_{a_m,b_m}(e_0;\cdot)-e_0\right\|_{\rho}=0$ olduğu açıktır.

A2. A^{λ} fonksiyonu $A^{\lambda}(1)\neq 0$ ile $\frac{a_k}{A^{\lambda}(1)}\geq 0$ şartını sağlayan $|x|<r$, $r>1$ bölgesinde analitik bir fonksiyon ve $\forall m\in\mathbb{N},\forall x\in[0,\infty)$ için $\left|\xi^{\lambda}_m(x)\right|\leq 1$ olduğundan dolayı

$$\left|\frac{\left(A^{\lambda}\right)'(1)+\lambda\left[A^{\lambda}(1)-A^{\lambda}(-1)\right]\xi^{\lambda}_m(x)}{A^{\lambda}(1)}\right|\leq C_3,\ C_3>0$$

yazılabilir. Yukarıdaki bu eşitlik yardımıyla

$$\begin{aligned}\left\|L^{\lambda}_{a_m,b_m}(e_1;\cdot)-e_1\right\|_{\rho} &\leq \left|\frac{a_m}{b_m}-1\right|\sup_{x\geq 0}\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{b_m}\sup_{x\geq 0}\frac{\left|\frac{\left(A^{\lambda}\right)'(1)+\lambda\left[A^{\lambda}(1)-A^{\lambda}(-1)\right]\xi^{\lambda}_m(x)}{A^{\lambda}(1)}\right|}{1+x^2}\\ &\leq \frac{1}{2}\left|\frac{a_m}{b_m}-1\right|+\frac{C_3}{b_m}\to 0\end{aligned}$$

elde edilir.

A3. (3.15) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}&\left\|L^{\lambda}_{a_m,b_m}(e_2;\cdot)-e_2\right\|_{\rho}\\ &\leq \left|\left(\frac{a_m}{b_m}\right)^2-1\right|\sup_{x\geq 0}\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{a_m}{b_m^2}\sup_{x\geq 0}\frac{\left|\frac{2\left(A^{\lambda}\right)'(1)+A^{\lambda}(1)+2\lambda A^{\lambda}(-1)\xi^{\lambda}_m(x)}{A^{\lambda}(1)}\right|x}{1+x^2}\\ &\quad+\frac{1}{b_m^2}\sup_{x\geq 0}\frac{\left|\frac{\left(A^{\lambda}\right)''(1)+\left(A^{\lambda}\right)'(1)+2\lambda^2\left[A^{\lambda}(1)-A^{\lambda}(-1)\right]+2\lambda\left[\left(A^{\lambda}\right)'(1)+\left(A^{\lambda}\right)'(-1)\right]\xi^{\lambda}_m(x)}{A^{\lambda}(1)}\right|}{1+x^2}\\ &\leq \left|\left(\frac{a_m}{b_m}\right)^2-1\right|+\frac{C_1}{2}\frac{a_m}{b_m^2}+\frac{C_2}{b_m^2}\to 0\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak A1, A2 ve A3 maddelerinden (3.16) eşitliği sağlanacağından Teorem 2.4 kullanılarak kanıt tamamlanır. ■

4. KATLI DUNKL-APPELL POLİNOMLARI VE BU POLİNOMLAR-DAN ÜRETİLEN OPERATÖRLER

4.1 Katlı Dunkl-Appell Polinomları

Tanım 4.1 D_λ Dunkl türev operatörü olmak üzere $\left\{P_{n_1,n_2}^{\lambda}(x)\right\}_{n_1,n_2=0}^{\infty}$ şeklindeki bir polinom sistemi $n_1, n_2 \geq 0$ için

$$D_{\lambda,x}\left(P_{n_1+1,n_2+1}^{\lambda}(x)\right) = \frac{\Gamma_\lambda(n_1+1)}{\Gamma_\lambda(n_1)} P_{n_1,n_2+1}^{\lambda}(x) + \frac{\Gamma_\lambda(n_2+1)}{\Gamma_\lambda(n_2)} P_{n_1+1,n_2}^{\lambda}(x) \qquad (4.1)$$

eşitliğini sağlıyorsa bu taktirde $P_{n_1,n_2}^{\lambda}(x)$ polinomlarına katlı Dunkl-Appell polinomları denir. Bu polinomlar dikkat edileceği üzere $\lambda = 0$ olması durumunda da katlı Appell polinomlarını verir.

Teorem 4.1 $P_{n_1,n_2}^{\lambda}(x)$ katlı Dunkl-Appell polinomlarının doğurucu fonksiyonu

$$A^{\lambda}(t_1,t_2)\exp_\lambda(x(t_1+t_2)) = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} P_{n_1,n_2}^{\lambda}(x)\frac{t_1^{n_1}t_2^{n_2}}{\Gamma_\lambda(n_1)\Gamma_\lambda(n_2)} \qquad (4.2)$$

dir ve burada A^{λ} fonksiyonu $A^{\lambda}(0,0) = a_{0,0} \neq 0$ olmak üzere

$$A^{\lambda}(t_1,t_2) = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} a_{n_1,n_2}\frac{t_1^{n_1}t_2^{n_2}}{\Gamma_\lambda(n_1)\Gamma_\lambda(n_2)} \qquad (4.3)$$

şeklindedir.

İspat. $\left\{P_{n_1,n_2}^{\lambda}(x)\right\}_{n_1,n_2=0}^{\infty}$ katlı Dunkl-Appell polinomlarının bir dizisi olsun. Bu polinomların doğurucu fonksiyonu

$$A^{\lambda}(x,t_1,t_2)\exp_\lambda(x(t_1+t_2)) = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} P_{n_1,n_2}^{\lambda}(x)\frac{t_1^{n_1}t_2^{n_2}}{\Gamma_\lambda(n_1)\Gamma_\lambda(n_2)} \qquad (4.4)$$

formatındadır. Burada A^{λ} fonksiyonun x'den bağımsız olduğu gösterilirse istenilen gösterilmiş olur. (4.4) eşitliğinde her iki tarafın x'e göre Dunkl türevi alınırsa (4.1) eşitliği sağlanacağından $n_1 < 0$ veya $n_2 < 0$ için $P^{\lambda}_{n_1,n_2}(x) = 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\left[\frac{\Gamma_\lambda(n_1)}{\Gamma_\lambda(n_1-1)}P^{\lambda}_{n_1-1,n_2}(x)+\frac{\Gamma_\lambda(n_2)}{\Gamma_\lambda(n_2-1)}P^{\lambda}_{n_1,n_2-1}(x)\right]\frac{t_1^{n_1}t_2^{n_2}}{\Gamma_\lambda(n_1)\Gamma_\lambda(n_2)} \\
= & \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}P^{\lambda}_{n_1-1,n_2}(x)\frac{t_1^{n_1}t_2^{n_2}}{\Gamma_\lambda(n_1-1)\Gamma_\lambda(n_2)} \\
& +\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}P^{\lambda}_{n_1,n_2-1}(x)\frac{t_1^{n_1}t_2^{n_2}}{\Gamma_\lambda(n_1)\Gamma_\lambda(n_2-1)} \\
= & (t_1+t_2)\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}P^{\lambda}_{n_1,n_2}(x)\frac{t_1^{n_1}t_2^{n_2}}{\Gamma_\lambda(n_1)\Gamma_\lambda(n_2)} \\
= & (t_1+t_2)A^{\lambda}(x,t_1,t_2)\exp_\lambda(x(t_1+t_2)) \\
= & D_{\lambda,x}\left[A^{\lambda}(x,t_1,t_2)\exp_\lambda(x(t_1+t_2))\right] \\
= & (t_1+t_2)A^{\lambda}(x,t_1,t_2)\exp_\lambda(x(t_1+t_2))+D_{\lambda,x}\left(A^{\lambda}(x,t_1,t_2)\right)\exp_\lambda(-x(t_1+t_2)) \\
& +\frac{\partial A^{\lambda}(x,t_1,t_2)}{\partial x}\left[\exp_\lambda(x(t_1+t_2))-\exp_\lambda(-x(t_1+t_2))\right] \\
= & \left[\frac{\partial A^{\lambda}(x,t_1,t_2)}{\partial x}+(t_1+t_2)A^{\lambda}(x,t_1,t_2)\right]\exp_\lambda(x(t_1+t_2)) \\
& +\lambda\frac{A^{\lambda}(x,t_1,t_2)-A^{\lambda}(-x,t_1,t_2)}{x}\exp_\lambda(-x(t_1+t_2))
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ve bu eşitliğin sağlanması

$$\frac{\partial A^{\lambda}(x,t_1,t_2)}{\partial x}=0 \text{ ve } A^{\lambda}(x,t_1,t_2)-A^{\lambda}(-x,t_1,t_2)=0$$

olması ile mümkündür ve bu durum A^{λ} fonksiyonun x'den bağımsız olması ile mümkündür. Yani $A^{\lambda}(x,t_1,t_2)=A^{\lambda}(t_1,t_2)$ olup (4.2) eşitliği elde edilir. ∎

Lemma 4.1 Katlı Dunkl-Appell polinomları

i. $$\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{P^{\lambda}_{k_1,k_2}(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}=A^{\lambda}(1,1)\exp_\lambda(mx)$$

ii. $$\begin{aligned}
& \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{P^{\lambda}_{k_1+1,k_2}(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)} \\
= & \left[\frac{mx}{2}A^{\lambda}(1,1)+A^{\lambda}_{t_1}(1,1)\right]\exp_\lambda(mx) \\
& +\lambda\left[A^{\lambda}(1,1)-A^{\lambda}(-1,1)\right]
\end{aligned}$$

iii. $$\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{P^{\lambda}_{k_1,k_2+1}(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}$$
$$= \left[\frac{mx}{2}A^{\lambda}(1,1)+A^{\lambda}_{t_2}(1,1)\right]\exp_\lambda(mx)$$
$$+\lambda\left[A^{\lambda}(1,1)-A^{\lambda}(1,-1)\right]$$

iv. $$\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}(-1)^{k_1}\frac{P^{\lambda}_{k_1+1,k_2}(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}$$
$$= \left[\frac{mx}{2}A^{\lambda}(-1,1)+A^{\lambda}_{t_1}(-1,1)\right]$$
$$+\lambda\left[A^{\lambda}(1,1)-A^{\lambda}(-1,1)\right]\exp_\lambda(mx)$$

v. $$\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}(-1)^{k_2}\frac{P^{\lambda}_{k_1,k_2+1}(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}$$
$$= \left[\frac{mx}{2}A^{\lambda}(1,-1)+A^{\lambda}_{t_2}(1,-1)\right]$$
$$+\lambda\left[A^{\lambda}(1,1)-A^{\lambda}(1,-1)\right]\exp_\lambda(mx)$$

eşitliklerini sağlar.

İspat. i. (4.2) eşitliğinde $t_1=t_2\to 1$ ve $x\to\frac{mx}{2}$ alınırsa istenilen gösterilmiş olur.

ii. (4.2) eşitliğinde her iki tarafın t_1'e göre Dunkl türevi alınırsa

$$\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}P^{\lambda}_{k_1+1,k_2}(x)\,\frac{t_1^{k_1}t_2^{k_2}}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}$$
$$=\left[xA^{\lambda}(t_1,t_2)+A^{\lambda}_{t_1}(t_1,t_2)\right]\exp_\lambda(x(t_1+t_2)) \tag{4.5}$$
$$+\lambda\frac{A^{\lambda}(t_1,t_2)-A^{\lambda}(-t_1,t_2)}{t_1}\exp_\lambda(-xt_1+xt_2)$$

elde edilir. (4.5) eşitliğinde $t_1=t_2\to 1$ ve $x\to\frac{mx}{2}$ alınırsa istenilen gösterilmiş olur.

iii. (4.2) eşitliğinde her iki tarafın t_2'e göre Dunkl türevi alınırsa

$$\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}P^{\lambda}_{k_1,k_2+1}(x)\,\frac{t_1^{k_1}t_2^{k_2}}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}$$
$$=\left[xA^{\lambda}(t_1,t_2)+A^{\lambda}_{t_2}(t_1,t_2)\right]\exp_\lambda(x(t_1+t_2)) \tag{4.6}$$
$$+\lambda\frac{A^{\lambda}(t_1,t_2)-A^{\lambda}(t_1,-t_2)}{t_2}\exp_\lambda(xt_1-xt_2)$$

elde edilir. (4.6) eşitliğinde $t_1=t_2\to 1$ ve $x\to\frac{mx}{2}$ alınırsa istenilen gösterilmiş olur.

iv. (4.5) eşitliğinde $t_1\to -1$, $t_2\to 1$ ve $x\to\frac{mx}{2}$ alınırsa istenilen gösterilmiş olur.

v. (4.6) eşitliğinde $t_1\to 1$, $t_2\to -1$ ve $x\to\frac{mx}{2}$ alınırsa istenilen gösterilmiş olur. ■

Lemma 4.2 Katlı Dunkl-Appell polinomları

i.
$$\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{P^{\lambda}_{k_1+2,k_2}\left(mx/2\right)}{\Gamma_{\lambda}\left(k_1\right)\Gamma_{\lambda}\left(k_2\right)}$$
$$= \left[\frac{m^2x^2}{4}A^{\lambda}\left(1,1\right)+mxA^{\lambda}_{t_1}\left(1,1\right)+A^{\lambda}_{t_1t_1}\left(1,1\right)\right]\exp_{\lambda}\left(mx\right)$$
$$+\lambda\left[2A^{\lambda}_{t_1}\left(1,1\right)-\left[A^{\lambda}\left(1,1\right)-A^{\lambda}\left(-1,1\right)\right]\right]$$

ii.
$$\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{P^{\lambda}_{k_1,k_2+2}\left(mx/2\right)}{\Gamma_{\lambda}\left(k_1\right)\Gamma_{\lambda}\left(k_2\right)}$$
$$= \left[\frac{m^2x^2}{4}A^{\lambda}\left(1,1\right)+mxA^{\lambda}_{t_2}\left(1,1\right)+A^{\lambda}_{t_2t_2}\left(1,1\right)\right]\exp_{\lambda}\left(mx\right)$$
$$+\lambda\left[2A^{\lambda}_{t_2}\left(1,1\right)-\left[A^{\lambda}\left(1,1\right)-A^{\lambda}\left(1,-1\right)\right]\right]$$

eşitliklerini sağlar.

İspat. i. (4.2) eşitliğinde her iki tarafın t_1'e göre iki kez Dunkl türevi alınırsa Lemma 3.1-(iv)'deki benzer işlemler yoluyla

$$\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}P^{\lambda}_{k_1+2,k_2}\left(x\right)\frac{t_1^{k_1}t_2^{k_2}}{\Gamma_{\lambda}\left(k_1\right)\Gamma_{\lambda}\left(k_2\right)}$$
$$= \left\{\begin{array}{c} x^2A^{\lambda}\left(t_1,t_2\right)+2xA^{\lambda}_{t_1}\left(t_1,t_2\right)+A^{\lambda}_{t_1t_1}\left(t_1,t_2\right) \\ +\frac{2\lambda}{t_1}A^{\lambda}_{t_1}\left(t_1,t_2\right)-\lambda\frac{A^{\lambda}(t_1,t_2)-A^{\lambda}(-t_1,t_2)}{t_1^2}\end{array}\right\}\exp_{\lambda}\left(x\left(t_1+t_2\right)\right)$$
$$-\frac{\lambda}{t_1^2}\left\{2t_1A^{\lambda}_{t_1}\left(t_1,t_2\right)-\left[A^{\lambda}\left(t_1,t_2\right)-A^{\lambda}\left(-t_1,t_2\right)\right]\right\}$$
$$\times\left[\exp_{\lambda}\left(xt_1+xt_2\right)-\exp_{\lambda}\left(-xt_1+xt_2\right)\right]$$

elde edilir. Bulunan bu eşitlikte $t_1=t_2\to 1$ ve $x\to\frac{mx}{2}$ alınırsa

$$\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{P^{\lambda}_{k_1+2,k_2}\left(mx/2\right)}{\Gamma_{\lambda}\left(k_1\right)\Gamma_{\lambda}\left(k_2\right)}$$
$$= \left\{\begin{array}{c}\frac{m^2x^2}{4}A^{\lambda}\left(1,1\right)+2\frac{mx}{2}A^{\lambda}_{t_1}\left(1,1\right)+A^{\lambda}_{t_1t_1}\left(1,1\right) \\ +2\lambda A^{\lambda}_{t_1}\left(1,1\right)-\lambda\left[A^{\lambda}\left(1,1\right)-A^{\lambda}\left(-1,1\right)\right]\end{array}\right\}\exp_{\lambda}\left(mx\right)$$
$$-\lambda\left\{2A^{\lambda}_{t_1}\left(1,1\right)-\left[A^{\lambda}\left(1,1\right)-A^{\lambda}\left(-1,1\right)\right]\right\}\left[\exp_{\lambda}\left(mx\right)-1\right]$$
$$= \left[\frac{m^2x^2}{4}A^{\lambda}\left(1,1\right)+mxA^{\lambda}_{t_1}\left(1,1\right)+A^{\lambda}_{t_1t_1}\left(1,1\right)\right]\exp_{\lambda}\left(mx\right)$$
$$+\lambda\left[2A^{\lambda}_{t_1}\left(1,1\right)-\left[A^{\lambda}\left(1,1\right)-A^{\lambda}\left(-1,1\right)\right]\right]$$

elde edilir.

ii. (4.2) eşitliğinde her iki tarafın t_2'e göre iki kez Dunkl türevi alınırsa Lemma 3.1-(iv)'deki benzer işlemler yoluyla

$$\begin{aligned}
&\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} P^{\lambda}_{k_1,k_2+2}(x)\frac{t_1^{k_1}t_2^{k_2}}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)} \\
&= \left\{\begin{array}{c} x^2A^{\lambda}(t_1,t_2)+2xA^{\lambda}_{t_2}(t_1,t_2)+A^{\lambda}_{t_2t_2}(t_1,t_2) \\ +\frac{2\lambda}{t_2}A^{\lambda}_{t_2}(t_1,t_2)-\lambda\frac{A^{\lambda}(t_1,t_2)-A^{\lambda}(t_1,-t_2)}{t_2^2}\end{array}\right\}\exp_\lambda(x(t_1+t_2)) \\
&-\frac{\lambda}{t_2^2}\left\{2t_2A^{\lambda}_{t_2}(t_1,t_2)-\left[A^{\lambda}(t_1,t_2)-A^{\lambda}(t_1,-t_2)\right]\right\} \\
&\times\left[\exp_\lambda(xt_1+xt_2)-\exp_\lambda(xt_1-xt_2)\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan bu eşitlikte $t_1=t_2\to 1$ ve $x\to\frac{mx}{2}$ alınırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{P^{\lambda}_{k_1,k_2+2}(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)} \\
&= \left\{\begin{array}{c}\frac{m^2x^2}{4}A^{\lambda}(1,1)+2\frac{mx}{2}A^{\lambda}_{t_2}(1,1)+A^{\lambda}_{t_2t_2}(1,1) \\ +2\lambda A^{\lambda}_{t_2}(1,1)-\lambda\left[A^{\lambda}(1,1)-A^{\lambda}(1,-1)\right]\end{array}\right\}\exp_\lambda(mx) \\
&-\lambda\left\{2A^{\lambda}_{t_2}(1,1)-\left[A^{\lambda}(1,1)-A^{\lambda}(1,-1)\right]\right\}\left[\exp_\lambda(mx)-1\right] \\
&= \left[\frac{m^2x^2}{4}A^{\lambda}(1,1)+mxA^{\lambda}_{t_2}(1,1)+A^{\lambda}_{t_2t_2}(1,1)\right]\exp_\lambda(mx) \\
&+\lambda\left[2A^{\lambda}_{t_2}(1,1)-\left[A^{\lambda}(1,1)-A^{\lambda}(1,-1)\right]\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Lemma 4.3 Katlı Dunkl-Appell polinomları

$$\begin{aligned}
&\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{P^{\lambda}_{k_1+1,k_2+1}(nx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)} \\
&= \left[\frac{m^2x^2}{4}A^{\lambda}(1,1)+\frac{mx}{2}\left[A^{\lambda}_{t_1}(1,1)+A^{\lambda}_{t_2}(1,1)\right]+A^{\lambda}_{t_1t_2}(1,1)\right]\exp_\lambda(mx) \\
&+\lambda^2\left[A^{\lambda}(1,1)-A^{\lambda}(1,-1)-A^{\lambda}(-1,1)+A^{\lambda}(-1,-1)\right]\exp_\lambda(-mx) \\
&+\left[\begin{array}{c}\lambda\frac{mx}{2}\left[2A^{\lambda}(1,1)-A^{\lambda}(1,1)-A^{\lambda}(1,1)\right] \\ +\lambda\left[A^{\lambda}_{t_1}(1,1)+A^{\lambda}_{t_2}(1,1)-A^{\lambda}_{t_1}(1,-1)-A^{\lambda}_{t_2}(-1,1)\right]\end{array}\right]
\end{aligned}$$

eşitliğini sağlar.

İspat. i. (4.2) eşitliğinde her iki tarafın önce t_1 ve daha sonra t_2'ye göre iki kez

Dunkl türevi alınırsa Önerme 2.2'deki Dunkl türevin özellikleri yardımıyla

$$\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{P^{\lambda}_{k_1+1,k_2+1}(nx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}$$

$$= D_{\lambda,t_2}\begin{pmatrix} \left[xA^{\lambda}(t_1,t_2)+A^{\lambda}_{t_1}(t_1,t_2)\right]\exp_\lambda(x(t_1+t_2)) \\ +\lambda\frac{A^{\lambda}(t_1,t_2)-A^{\lambda}(-t_1,t_2)}{t_1}\exp_\lambda(-xt_1+xt_2)\end{pmatrix}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \left[x^2A^{\lambda}(t_1,t_2)+xA^{\lambda}_{t_1}(t_1,t_2)\right]\exp_\lambda(x(t_1+t_2)) \\ +D_{\lambda,t_2}\left[xA^{\lambda}(t_1,t_2)+A^{\lambda}_{t_1}(t_1,t_2)\right]\exp_\lambda(xt_1-xt_2) \\ +\left[xA^{\lambda}_{t_2}(t_1,t_2)+A^{\lambda}_{t_1t_2}(t_1,t_2)\right]\left[\exp_\lambda(x(t_1+t_2))-\exp_\lambda(xt_1-xt_2)\right]\end{array}\right\}$$

$$+\left\{\begin{array}{c} \frac{\lambda}{t_1}x\left[A^{\lambda}(t_1,t_2)-A^{\lambda}(-t_1,t_2)\right]\exp_\lambda(-xt_1+xt_2) \\ +\frac{\lambda}{t_1}D_{\lambda,t_2}\left[A^{\lambda}(t_1,t_2)-A^{\lambda}(-t_1,t_2)\right]\exp_\lambda(-xt_1-xt_2) \\ +\frac{\lambda}{t_1}\left[A^{\lambda}_{t_2}(t_1,t_2)-A^{\lambda}_{t_2}(-t_1,t_2)\right]\left[\exp_\lambda(-xt_1+xt_2)-\exp_\lambda(-xt_1-xt_2)\right]\end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \left[x^2A^{\lambda}(t_1,t_2)+xA^{\lambda}_{t_1}(t_1,t_2)\right]\exp_\lambda(x(t_1+t_2)) \\ +x\left[A^{\lambda}_{t_2}(t_1,t_2)+\lambda\frac{A^{\lambda}(t_1,t_2)-A^{\lambda}(t_1,-t_2)}{t_2}\right]\exp_\lambda(xt_1-xt_2) \\ +\left[A^{\lambda}_{t_1t_2}(t_1,t_2)+\lambda\frac{A^{\lambda}_{t_1}(t_1,t_2)-A^{\lambda}_{t_1}(t_1,-t_2)}{t_2}\right]\exp_\lambda(xt_1-xt_2) \\ +\left[xA^{\lambda}_{t_2}(t_1,t_2)+A^{\lambda}_{t_1t_2}(t_1,t_2)\right]\left[\exp_\lambda(x(t_1+t_2))-\exp_\lambda(xt_1-xt_2)\right]\end{array}\right\}$$

$$+\left\{\begin{array}{c} \frac{\lambda}{t_1}x\left[A^{\lambda}(t_1,t_2)-A^{\lambda}(-t_1,t_2)\right]\exp_\lambda(-xt_1+xt_2) \\ +\frac{\lambda}{t_1}\left[A^{\lambda}_{t_2}(t_1,t_2)+\lambda\frac{A^{\lambda}(t_1,t_2)-A^{\lambda}(t_1,-t_2)}{t_2}\right]\exp_\lambda(-xt_1-xt_2) \\ -\frac{\lambda}{t_1}\left[A^{\lambda}_{t_2}(-t_1,t_2)+\lambda\frac{A^{\lambda}(-t_1,t_2)-A^{\lambda}(-t_1,-t_2)}{t_2}\right]\exp_\lambda(-xt_1-xt_2) \\ +\frac{\lambda}{t_1}\left[A^{\lambda}_{t_2}(t_1,t_2)-A^{\lambda}_{t_2}(-t_1,t_2)\right]\left[\exp_\lambda(-xt_1+xt_2)-\exp_\lambda(-xt_1-xt_2)\right]\end{array}\right\}$$

elde edilir. Yukarıdaki bulunan bu eşitlikte $t_1=t_2\to 1$ ve $x\to\frac{mx}{2}$ alınırsa

$$\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{P^{\lambda}_{k_1+1,k_2+1}(nx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \left[\frac{m^2x^2}{4}A^{\lambda}(1,1)+\frac{mx}{2}A^{\lambda}_{t_1}(1,1)\right]\exp_\lambda(mx) \\ +\frac{mx}{2}\left[A^{\lambda}_{t_2}(1,1)+\lambda\left[A^{\lambda}(1,1)-A^{\lambda}(1,-1)\right]\right] \\ +\left[A^{\lambda}_{t_1t_2}(1,1)+\lambda\left[A^{\lambda}_{t_1}(1,1)-A^{\lambda}_{t_1}(1,-1)\right]\right] \\ +\left[\frac{mx}{2}A^{\lambda}_{t_2}(1,1)+A^{\lambda}_{t_1t_2}(1,1)\right]\left[\exp_\lambda(mx)-1\right]\end{array}\right\}$$

$$+\left\{\begin{array}{c} \lambda\frac{mx}{2}\left[A^{\lambda}(1,1)-A^{\lambda}(-1,1)\right] \\ +\lambda\left[A^{\lambda}_{t_2}(1,1)+\lambda\left[A^{\lambda}(1,1)-A^{\lambda}(1,-1)\right]\right]\exp_\lambda(-mx) \\ -\lambda\left[A^{\lambda}_{t_2}(-1,1)+\lambda\left[A^{\lambda}(-1,1)-A^{\lambda}(-1,-1)\right]\right]\exp_\lambda(-mx) \\ +\lambda\left[A^{\lambda}_{t_2}(1,1)-A^{\lambda}_{t_2}(-1,1)\right]\left[1-\exp_\lambda(-mx)\right]\end{array}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{m^2x^2}{4}A^{\lambda}(1,1)+\frac{mx}{2}\left[A^{\lambda}_{t_1}(1,1)+A^{\lambda}_{t_2}(1,1)\right]+A^{\lambda}_{t_1t_2}(1,1)\right]\exp_{\lambda}(mx) \\
&+\lambda^2\left[A^{\lambda}(1,1)-A^{\lambda}(1,-1)-A^{\lambda}(-1,1)+A^{\lambda}(-1,-1)\right]\exp_{\lambda}(-mx) \\
&+\left[\begin{array}{c} \lambda\frac{mx}{2}\left[2A^{\lambda}(1,1)-A^{\lambda}(-1,1)-A^{\lambda}(1,-1)\right] \\ \lambda\left[A^{\lambda}_{t_1}(1,1)+A^{\lambda}_{t_2}(1,1)-A^{\lambda}_{t_1}(1,-1)-A^{\lambda}_{t_2}(-1,1)\right]\end{array}\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. ■

4.2 T^{λ}_{m} Operatörlerinin İnşası

$P^{\lambda}_{k_1,k_2}(x)$, Katlı-Dunkl-Appell polinomlarını göstersin ve (4.3) eşitliği ile verilen A^{λ} fonksiyonu, $A^{\lambda}(1,1)\neq 0$ ile $\frac{a_{k_1,k_2}}{A^{\lambda}(1)}\geq 0$ şartını sağlayan $t_1^2+t_2^2<r^2$, $r>1$ bölgesinde analitik fonksiyon, $f\in C[0,\infty)$, $x\geq 0$, $m\in\mathbb{N}$ ve $\mu>-1/2$ olmak üzere T^{λ}_{m} operatörleri

$$
T^{\lambda}_{m}(f)(x)=\frac{\sum\limits_{k_1=0}^{\infty}\sum\limits_{k_2=0}^{\infty}\frac{P^{\lambda}_{k_1,k_2}(mx/2)}{\Gamma_{\lambda}(k_1)\Gamma_{\lambda}(k_2)}f\left(\frac{k_1+k_2+2\lambda\left(\theta_{k_1}+\theta_{k_2}\right)}{m}\right)}{A^{\lambda}(1,1)\exp_{\lambda}(mx)} \tag{4.7}
$$

ile tanımlanır.

Lemma 4.4 T^{λ}_{m} operatörleri

i. $T^{\lambda}_{m}(1)(x)=1$

ii. $T^{\lambda}_{m}(t)(x)=x+\frac{A^{\lambda}_{t_1}(1,1)+A^{\lambda}_{t_2}(1,1)}{mA^{\lambda}(1,1)}+\frac{\lambda\left[2A^{\lambda}(1,1)-A^{\lambda}(-1,1)-A^{\lambda}(1,-1)\right]}{mA^{\lambda}(1,1)\exp_{\lambda}(mx)}$

iii.

$$
\begin{aligned}
T^{\lambda}_{m}(t^2)(x) &= x^2+\left(1+\frac{2\lambda}{\exp_{\lambda}(mx)}+\frac{2A^{\lambda}_{t_1}(1,1)+2A^{\lambda}_{t_2}(1,1)}{A^{\lambda}(1,1)}\right)\frac{x}{m} \\
&+\frac{A^{\lambda}_{t_1t_1}(1,1)+2A^{\lambda}_{t_1t_2}+A^{\lambda}_{t_2t_2}(1,1)+A^{\lambda}_{t_1}(1,1)+A^{\lambda}_{t_2}(1,1)}{m^2A^{\lambda}(1,1)} \\
&+\frac{2\lambda^2\left[2A^{\lambda}(1,1)-A^{\lambda}(-1,1)-A^{\lambda}(1,-1)\right]}{m^2A^{\lambda}(1,1)} \\
&+\frac{2\lambda^2\left[A^{\lambda}(1,1)-A^{\lambda}(1,-1)-A^{\lambda}(-1,1)+A^{\lambda}(-1,-1)\right]\xi^{\lambda}_{m}(x)}{m^2A^{\lambda}(1,1)} \\
&+\frac{2\lambda\left[2A^{\lambda}_{t_1}(1,1)+2A^{\lambda}_{t_2}(1,1)+A^{\lambda}_{t_1}(-1,1)+A^{\lambda}_{t_2}(1,-1)-A^{\lambda}_{t_1}(1,-1)-A^{\lambda}_{t_2}(-1,1)\right]}{m^2A^{\lambda}(1,1)\exp_{\lambda}(mx)}
\end{aligned}
$$

eşitliklerini sağlar.

İspat. i. Lemma 4.1 kulanılarak açık bir şekilde $T^{\lambda}_{m}(1)(x)=1$ elde edilir.

ii. Lemma 4.1 kullanılarak ve Önerme 2.1 yardımıyla

$$\begin{aligned}
& T_m^\lambda(t)(x) \\
= & \frac{\sum\limits_{k_1=0}^{\infty}\sum\limits_{k_2=0}^{\infty}\frac{P_{k_1,k_2}^\lambda(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}\frac{k_1+k_2+2\lambda\left(\theta_{k_1}+\theta_{k_2}\right)}{m}}{A^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)} \\
= & \frac{\left[\sum\limits_{k_1=1}^{\infty}\sum\limits_{k_2=0}^{\infty}\frac{P_{k_1,k_2}^\lambda(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}\frac{k_1+2\lambda\theta_{k_1}}{m}\right]+\left[\sum\limits_{k_1=0}^{\infty}\sum\limits_{k_2=1}^{\infty}\frac{P_{k_1,k_2}^\lambda(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}\frac{k_2+2\lambda\theta_{k_2}}{m}\right]}{A^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)} \\
= & \frac{\left[\sum\limits_{k_1=1}^{\infty}\sum\limits_{k_2=0}^{\infty}\frac{P_{k_1,k_2}^\lambda(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1-1)\Gamma_\lambda(k_2)}\right]+\left[\sum\limits_{k_1=0}^{\infty}\sum\limits_{k_2=1}^{\infty}\frac{P_{k_1,k_2}^\lambda(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2-1)}\right]}{mA^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)} \\
= & \frac{\left[\sum\limits_{k_1=0}^{\infty}\sum\limits_{k_2=0}^{\infty}\frac{P_{k_1+1,k_2}^\lambda(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}\right]+\left[\sum\limits_{k_1=0}^{\infty}\sum\limits_{k_2=0}^{\infty}\frac{P_{k_1,k_2+1}^\lambda(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}\right]}{mA^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)} \\
= & \frac{\left[\frac{mx}{2}A^\lambda(1,1)+A_{t_1}^\lambda(1,1)\right]\exp_\lambda(mx)+\lambda\left[A^\lambda(1,1)-A^\lambda(-1,1)\right]}{mA^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)} \\
& +\frac{\left[\frac{mx}{2}A^\lambda(1,1)+A_{t_2}^\lambda(1,1)\right]\exp_\lambda(mx)+\lambda\left[A^\lambda(1,1)-A^\lambda(1,-1)\right]}{mA^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)} \\
= & x+\frac{A_{t_1}^\lambda(1,1)+A_{t_2}^\lambda(1,1)}{mA^\lambda(1,1)}+\frac{\lambda\left[2A^\lambda(1,1)-A^\lambda(-1,1)-A^\lambda(1,-1)\right]}{mA^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

ii.

$$\begin{aligned}
T_m^\lambda\left(t^2\right)(x) &= \frac{\sum\limits_{k_1=0}^{\infty}\sum\limits_{k_2=0}^{\infty}\frac{P_{k_1,k_2}^\lambda(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}\frac{\left(k_1+2\lambda\theta_{k_1}\right)^2+2\left(k_1+2\lambda\theta_{k_1}\right)\left(k_2+2\lambda\theta_{k_2}\right)+\left(k_2+2\lambda\theta_{k_2}\right)^2}{m^2}}{A^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)} \\
&= A_1+A_2+A_3
\end{aligned}$$

yazılabilir. Önerme 2.1 ve $k\in\mathbb{N}_0$ için $\theta_{k+1}=\theta_k+(-1)^k$ eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\sum\limits_{k_1=0}^{\infty}\sum\limits_{k_2=0}^{\infty}\frac{P_{k_1,k_2}^\lambda(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}\left(k_1+2\lambda\theta_{k_1}\right)^2}{m^2A^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)} \\
&= \frac{\sum\limits_{k_1=0}^{\infty}\sum\limits_{k_2=0}^{\infty}\frac{P_{k_1+1,k_2}^\lambda(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}\left(k_1+1+2\lambda\theta_{k_1+1}\right)}{m^2A^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{P^{\lambda}_{k_1+1,k_2}(mx/2)\left(\left(k_1+2\lambda\theta_{k_1}\right)+\left(1+2\lambda(-1)^{k_1}\right)\right)}{\Gamma_\lambda(k_1+1)\Gamma_\lambda(k_2)}}{m^2A^{\lambda}\left(1,1\right)\exp_\lambda\left(mx\right)}$$

$$= \frac{\left[\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{P^{\lambda}_{k_1+2,k_2}(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}\right]+\left[\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{P^{\lambda}_{k_1+1,k_2}(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}\right]}{m^2A^{\lambda}\left(1,1\right)\exp_\lambda\left(mx\right)}$$

$$+\frac{2\lambda\left[\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}(-1)^{k_1}\frac{P^{\lambda}_{k_1+1,k_2}(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}\right]}{m^2A^{\lambda}\left(1,1\right)\exp_\lambda\left(mx\right)}$$

elde edilir. Lemma 4.1 ve 4.2'deki ifadeler yukarıda yazılırsa

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\left[\frac{m^2x^2}{4}A^{\lambda}\left(1,1\right)+mxA^{\lambda}_{t_1}\left(1,1\right)+A^{\lambda}_{t_1t_1}\left(1,1\right)\right]\exp_\lambda\left(mx\right)}{m^2A^{\lambda}\left(1,1\right)\exp_\lambda\left(mx\right)} \\
&+\frac{\lambda\left[2A^{\lambda}_{t_1}\left(1,1\right)-\left[A^{\lambda}\left(1,1\right)-A^{\lambda}\left(-1,1\right)\right]\right]}{m^2A^{\lambda}\left(1,1\right)\exp_\lambda\left(mx\right)} \\
&+\frac{\left[\frac{mx}{2}A^{\lambda}\left(1,1\right)+A^{\lambda}_{t_1}\left(1,1\right)\right]\exp_\lambda\left(mx\right)+\lambda\left[A^{\lambda}\left(1,1\right)-A^{\lambda}\left(-1,1\right)\right]}{m^2A^{\lambda}\left(1,1\right)\exp_\lambda\left(mx\right)} \\
&+\frac{2\lambda\left[\frac{mx}{2}A^{\lambda}\left(-1,1\right)+A^{\lambda}_{t_1}\left(-1,1\right)\right]+2\lambda^2\left[A^{\lambda}\left(1,1\right)-A^{\lambda}\left(-1,1\right)\right]\exp_\lambda\left(mx\right)}{m^2A^{\lambda}\left(1,1\right)\exp_\lambda\left(mx\right)} \\
&= \frac{x^2}{4}+\frac{A^{\lambda}_{t_1}\left(1,1\right)+\frac{1}{2}A^{\lambda}\left(1,1\right)}{mA^{\lambda}\left(1,1\right)}x \\
&+\frac{A^{\lambda}_{t_1t_1}\left(1,1\right)+A^{\lambda}_{t_1}\left(1,1\right)+2\lambda^2\left[A^{\lambda}\left(1,1\right)-A^{\lambda}\left(-1,1\right)\right]}{m^2A^{\lambda}\left(1,1\right)} \\
&+\frac{\lambda\left[2A^{\lambda}_{t_1}\left(1,1\right)+2A^{\lambda}_{t_1}\left(-1,1\right)+mxA^{\lambda}\left(-1,1\right)\right]}{m^2A^{\lambda}\left(1,1\right)\exp_\lambda\left(mx\right)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Önerme 2.1 yardımıyla

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{P^{\lambda}_{k_1,k_2}(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}\frac{2\left(k_1+2\lambda\theta_{k_1}\right)\left(k_2+2\lambda\theta_{k_2}\right)}{m^2}}{A^{\lambda}\left(1,1\right)\exp_\lambda\left(mx\right)} \\
&= \frac{2\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{P^{\lambda}_{k_1+1,k_2+1}(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}}{m^2A^{\lambda}\left(1,1\right)\exp_\lambda\left(mx\right)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 4.3'de bulunan ifadeler yukarıdaki eşitlikte yazılırsa

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \frac{2\left[\frac{m^2x^2}{4}A^\lambda(1,1)+\frac{mx}{2}\left[A^\lambda_{t_1}(1,1)+A^\lambda_{t_2}(1,1)\right]+A^\lambda_{t_1t_2}(1,1)\right]\exp_\lambda(mx)}{m^2A^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)}\\
&+\frac{2\lambda^2\left[A^\lambda(1,1)-A^\lambda(1,-1)-A^\lambda(-1,1)+A^\lambda(-1,-1)\right]\exp_\lambda(-mx)}{m^2A^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)}\\
&+2\frac{\begin{bmatrix}\lambda\frac{mx}{2}\left[2A^\lambda(1,1)-A^\lambda(-1,1)-A^\lambda(1,-1)\right]\\ \lambda\left[A^\lambda_{t_1}(1,1)+A^\lambda_{t_2}(1,1)-A^\lambda_{t_1}(1,-1)-A^\lambda_{t_2}(-1,1)\right]\end{bmatrix}}{m^2A^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)}\\
&= \frac{x^2}{2}+\frac{x\left[A^\lambda_{t_1}(1,1)+A^\lambda_{t_2}(1,1)\right]}{mA^\lambda(1,1)}+\frac{2A^\lambda_{t_1t_2}(1,1)}{m^2A^\lambda(1,1)}\\
&+\frac{2\lambda^2\left[A^\lambda(1,1)-A^\lambda(1,-1)-A^\lambda(-1,1)+A^\lambda(-1,-1)\right]\xi^\lambda_m(x)}{m^2A^\lambda(1,1)}\\
&+\frac{\begin{bmatrix}\lambda mx\left[2A^\lambda(1,1)-A^\lambda(-1,1)-A^\lambda(1,-1)\right]\\ 2\lambda\left[A^\lambda_{t_1}(1,1)+A^\lambda_{t_2}(1,1)-A^\lambda_{t_1}(1,-1)-A^\lambda_{t_2}(-1,1)\right]\end{bmatrix}}{m^2A^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Önerme 2.1 ve $k\in\mathbb{N}_0$ için $\theta_{k+1}=\theta_k+(-1)^k$ eşitliği yardımıyla

$$
\begin{aligned}
A_3 &= \frac{\sum\limits_{k_1=0}^{\infty}\sum\limits_{k_2=0}^{\infty}\frac{P^\lambda_{k_1,k_2}(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}\frac{\left(k_2+2\lambda\theta_{k_2}\right)^2}{m^2}}{A^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)}\\
&= \frac{\sum\limits_{k_1=0}^{\infty}\sum\limits_{k_2=0}^{\infty}\frac{P^\lambda_{k_1,k_2+1}(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}\frac{\left(k_2+1+2\lambda\theta_{k_2+1}\right)}{m^2}}{A^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)}\\
&= \frac{\sum\limits_{k_1=0}^{\infty}\sum\limits_{k_2=0}^{\infty}\frac{P^\lambda_{k_1,k_2+1}(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}\frac{\left(k_2+2\lambda\theta_{k_2}\right)+\left(1+2\lambda(-1)^{k_2}\right)}{m^2}}{A^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)}\\
&= \frac{\left[\sum\limits_{k_1=0}^{\infty}\sum\limits_{k_2=0}^{\infty}\frac{P^\lambda_{k_1,k_2+2}(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}\right]+\left[\sum\limits_{k_1=0}^{\infty}\sum\limits_{k_2=0}^{\infty}\frac{P^\lambda_{k_1,k_2+1}(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}\right]}{m^2A^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)}\\
&+\frac{2\lambda\left[\sum\limits_{k_1=0}^{\infty}\sum\limits_{k_2=0}^{\infty}(-1)^{k_2}\frac{P^\lambda_{k_1,k_2+1}(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}\right]}{m^2A^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)}
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir. Lemma 4.1 ve Lemma 4.2'de bulunan ifadeler bu eşitlikte yazılırsa

$$\begin{aligned}
A_3 &= \frac{\left[\frac{m^2x^2}{4}A^{\lambda}(1,1)+mxA^{\lambda}_{t_2}(1,1)+A^{\lambda}_{t_2t_2}(1,1)\right]\exp_{\lambda}(mx)}{m^2A^{\lambda}(1,1)\exp_{\lambda}(mx)} \\
&\quad+\frac{\lambda\left[2A^{\lambda}_{t_2}(1,1)-\left[A^{\lambda}(1,1)-A^{\lambda}(1,-1)\right]\right]}{m^2A^{\lambda}(1,1)\exp_{\lambda}(mx)} \\
&\quad+\frac{\left[\frac{mx}{2}A^{\lambda}(1,1)+A^{\lambda}_{t_2}(1,1)\right]\exp_{\lambda}(mx)+\lambda\left[A^{\lambda}(1,1)-A^{\lambda}(1,-1)\right]}{m^2A^{\lambda}(1,1)\exp_{\lambda}(mx)} \\
&\quad+\frac{2\lambda\left[\frac{mx}{2}A^{\lambda}(1,-1)+A^{\lambda}_{t_2}(1,-1)\right]+2\lambda^2\left[A^{\lambda}(1,1)-A^{\lambda}(1,-1)\right]\exp_{\lambda}(mx)}{m^2A^{\lambda}(1,1)\exp_{\lambda}(mx)} \\
&= \frac{x^2}{4}+\frac{A^{\lambda}_{t_2}(1,1)+\frac{1}{2}A^{\lambda}(1,1)}{mA^{\lambda}(1,1)}x \\
&\quad+\frac{A^{\lambda}_{t_2t_2}(1,1)+A^{\lambda}_{t_2}(1,1)+2\lambda^2\left[A^{\lambda}(1,1)-A^{\lambda}(1,-1)\right]}{m^2A^{\lambda}(1,1)} \\
&\quad+\frac{\lambda\left[2A^{\lambda}_{t_2}(1,1)+2A^{\lambda}_{t_2}(1,-1)+mxA^{\lambda}(1,-1)\right]}{m^2A^{\lambda}(1,1)\exp_{\lambda}(mx)}
\end{aligned}$$

ifadesi bulunur. Buna göre bulunan A_1, A_2 ve A_3 ifadeleri $T^{\lambda}_m(t^2)(x)=A_1+A_2+A_3$ eşitliğinde yazılırsa

$$\begin{aligned}
&T^{\lambda}_m\left(t^2\right)(x) \\
&= \frac{x^2}{4}+\frac{A^{\lambda}_{t_1}(1,1)+\frac{1}{2}A^{\lambda}(1,1)}{mA^{\lambda}(1,1)}x \\
&\quad+\frac{A^{\lambda}_{t_1t_1}(1,1)+A^{\lambda}_{t_1}(1,1)+2\lambda^2\left[A^{\lambda}(1,1)-A^{\lambda}(-1,1)\right]}{m^2A^{\lambda}(1,1)} \\
&\quad+\frac{\lambda\left[2A^{\lambda}_{t_1}(1,1)+2A^{\lambda}_{t_1}(-1,1)+mxA^{\lambda}(-1,1)\right]}{m^2A^{\lambda}(1,1)\exp_{\lambda}(mx)} \\
&\quad+\frac{x^2}{2}+\frac{x\left[A^{\lambda}_{t_1}(1,1)+A^{\lambda}_{t_2}(1,1)\right]}{mA^{\lambda}(1,1)}+\frac{2A^{\lambda}_{t_1t_2}(1,1)}{m^2A^{\lambda}(1,1)} \\
&\quad+\frac{2\lambda^2\left[A^{\lambda}(1,1)-A^{\lambda}(1,-1)-A^{\lambda}(-1,1)+A^{\lambda}(-1,-1)\right]\xi^{\lambda}_m(x)}{m^2A^{\lambda}(1,1)} \\
&\quad+\frac{\begin{bmatrix}\lambda mx\left[2A^{\lambda}(1,1)-A^{\lambda}(-1,1)-A^{\lambda}(1,-1)\right]\\ 2\lambda\left[A^{\lambda}_{t_1}(1,1)+A^{\lambda}_{t_2}(1,1)-A^{\lambda}_{t_1}(1,-1)-A^{\lambda}_{t_2}(-1,1)\right]\end{bmatrix}}{m^2A^{\lambda}(1,1)\exp_{\lambda}(mx)} \\
&\quad+\frac{x^2}{4}+\frac{A^{\lambda}_{t_2}(1,1)+\frac{1}{2}A^{\lambda}(1,1)}{mA^{\lambda}(1,1)}x \\
&\quad+\frac{A^{\lambda}_{t_2t_2}(1,1)+A^{\lambda}_{t_2}(1,1)+2\lambda^2\left[A^{\lambda}(1,1)-A^{\lambda}(1,-1)\right]}{m^2A^{\lambda}(1,1)} \\
&\quad+\frac{\lambda\left[2A^{\lambda}_{t_2}(1,1)+2A^{\lambda}_{t_2}(1,-1)+mxA^{\lambda}(1,-1)\right]}{m^2A^{\lambda}(1,1)\exp_{\lambda}(mx)}
\end{aligned}$$

eşitliği yazzılabilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
T_m^\lambda\left(t^2\right)(x) &= x^2+\left(1+\frac{2\lambda}{\exp_\lambda(mx)}+\frac{2\left[A_{t_1}^\lambda(1,1)+2A_{t_2}^\lambda(1,1)\right]}{A^\lambda(1,1)}\right)\frac{x}{m} \\
&+\frac{A_{t_1t_1}^\lambda(1,1)+2A_{t_1t_2}^\lambda(1,1)+A_{t_2t_2}^\lambda(1,1)+A_{t_1}^\lambda(1,1)+A_{t_2}^\lambda(1,1)}{m^2A^\lambda(1,1)} \\
&+\frac{2\lambda^2\left[2A^\lambda(1,1)-A^\lambda(-1,1)-A^\lambda(1,-1)\right]}{m^2A^\lambda(1,1)} \\
&+\frac{2\lambda^2\left[A^\lambda(1,1)-A^\lambda(1,-1)-A^\lambda(-1,1)+A^\lambda(-1,-1)\right]\xi_m^\lambda(x)}{m^2A^\lambda(1,1)} \\
&+\frac{2\lambda\left[\begin{array}{c}2A_{t_1}^\lambda(1,1)+2A_{t_2}^\lambda(1,1)+A_{t_1}^\lambda(-1,1)\\ +A_{t_2}^\lambda(1,-1)-A_{t_1}^\lambda(1,-1)-A_{t_2}^\lambda(-1,1)\end{array}\right]}{m^2A^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)}
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. ■

Lemma 4.5 T_m^λ operatörleri

i. $M_{m,0}^{*\lambda}(x)=1$

ii. $M_{m,1}^{*\lambda}(x)=\frac{A_{t_1}^\lambda(1,1)+A_{t_2}^\lambda(1,1)}{mA^\lambda(1,1)}+\frac{\lambda\left[2A^\lambda(1,1)-A^\lambda(-1,1)-A^\lambda(1,-1)\right]}{mA^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)}$

iii.

$$\begin{aligned}
M_{m,2}^{*\lambda}(x) &= \left(1-\frac{2\lambda\left[A^\lambda(1,1)-A^\lambda(-1,1)-A^\lambda(1,-1)\right]}{A^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)}\right)\frac{x}{m} \\
&+\frac{A_{t_1t_1}^\lambda(1,1)+2A_{t_1t_2}^\lambda+A_{t_2t_2}^\lambda(1,1)+A_{t_1}^\lambda(1,1)+A_{t_2}^\lambda(1,1)}{m^2A^\lambda(1,1)} \\
&+\frac{2\lambda^2\left[2A^\lambda(1,1)-A^\lambda(-1,1)-A^\lambda(1,-1)\right]}{m^2A^\lambda(1,1)} \\
&+\frac{2\lambda^2\left[A^\lambda(1,1)-A^\lambda(1,-1)-A^\lambda(-1,1)+A^\lambda(-1,-1)\right]\xi_m^\lambda(x)}{m^2A^\lambda(1,1)} \\
&+\frac{2\lambda\left[2A_{t_1}^\lambda(1,1)+2A_{t_2}^\lambda(1,1)+A_{t_1}^\lambda(-1,1)+A_{t_2}^\lambda(1,-1)-A_{t_1}^\lambda(1,-1)-A_{t_2}^\lambda(-1,1)\right]}{m^2A^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)}
\end{aligned}$$

merkezi moment değerlerini sağlar.

İspat. i. $M_{m,0}^{*\lambda}(x)=1$ olduğu açıktır.

ii. T_m^λ operatörlerinin lineerliği ve Lemma 4.4 kullanılarak

$$\begin{aligned}
M_{m,1}^{*\lambda}(x) &= T_m^\lambda(t-x)(x) \\
&= T_m^\lambda(e_1)(x)-xT_m^\lambda(e_0)(x) \\
&= \frac{A_{t_1}^\lambda(1,1)+A_{t_2}^\lambda(1,1)}{mA^\lambda(1,1)}+\frac{\lambda\left[2A^\lambda(1,1)-A^\lambda(-1,1)-A^\lambda(1,-1)\right]}{mA^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

iii. T_m^λ operatörlerinin lineerliği kullanılarak

$$\begin{aligned} M_{m,2}^{*\lambda}(x) &= T_m^\lambda\left((t-x)^2\right)(x) \\ &= T_m^\lambda\left(t^2-2xt+x^2\right)(x) \\ &= T_m^\lambda\left(t^2\right)(x)-2xT_m^\lambda(t)(x)+x^2T_m^\lambda(1)(x) \end{aligned}$$

yazılabilir. Lemma 4.4'de bulunan test değerleri yukarıda yazılırsa istenilen elde edilir. ■

4.3 T_m^λ Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri

Teorem 4.2 $g \in C_B[0,\infty)$ ve $M_{m,2}^{*\lambda}(x)$ ise Lemma 4.5' de hesaplanan ikinci merkezi moment olsun. Bu taktirde

$$\left|T_m^\lambda(g)(x)-g(x)\right| \leq 2\omega\left(g;\sqrt{M_{m,2}^{*\lambda}(x)}\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Lemma 2.2 (iv) den dolayı $g \in C[0,\infty)$ fonksiyonun klasik süreklilik modülü

$$|g(t)-g(x)| \leq \omega(g;\delta)\left(\frac{|t-x|}{\delta}+1\right) \tag{4.8}$$

özelliğini sağlar. T_m^λ lineer pozitif operatör olduğundan Lemma 2.1'den T_m^λ operatörleri monoton azalmayandır. T_m^λ operaörlerinin lineer pozitif monoton azalmayanlık durumundan, (4.8) eşitsizliğinden ve Lemma 4.4'den dolayı

$$\begin{aligned} \left|T_m^\lambda(g)(x)-g(x)\right| &= \left|T_m^\lambda(g(t))(x)-g(x)T_m^\lambda(1)(x)\right| \\ &= \left|T_m^\lambda(g(t))(x)+T_m^\lambda(-g(x))(x)\right| \\ &= \left|T_m^\lambda(g(t)-g(x))(x)\right| \\ &\leq T_m^\lambda(|g(t)-g(x)|)(x) \\ &\leq \omega(g;\delta)\left(T_m^\lambda(1)(x)+\frac{T_m^\lambda(|t-x|)(x)}{\delta}\right) \\ &\leq \omega(g;\delta)\left(1+\frac{T_m^\lambda(|t-x|)(x)}{\delta}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$\left|T_m^\lambda(g)(x)-g(x)\right| \leq \omega(g;\delta)\left(1+\frac{T_m^\lambda(|t-x|)(x)}{\delta}\right) \tag{4.9}$$

eşitsizliği geçerlidir. Diğer bir taraftan Cauchy-Schwartz eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
T_m^\lambda\left(|t-x|\right)(x) &= \frac{\sum\limits_{k_1=0}^{\infty}\sum\limits_{k_2=0}^{\infty}\frac{P_{k_1,k_2}^\lambda(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}\left|\frac{k_1+k_2+2\lambda\left(\theta_{k_1}+\theta_{k_2}\right)}{m}-x\right|}{A^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)} \\
&= \frac{\sum\limits_{k_1=0}^{\infty}\sum\limits_{k_2=0}^{\infty}\sqrt{\left(\frac{P_{k_1,k_2}^\lambda(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}\right)^2\left(\frac{k_1+k_2+2\lambda\left(\theta_{k_1}+\theta_{k_2}\right)}{m}-x\right)^2}}{A^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)} \\
&\leq \sqrt{\frac{\sum\limits_{k_1=0}^{\infty}\sum\limits_{k_2=0}^{\infty}\left(\frac{P_{k_1,k_2}^\lambda(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}\right)\left(\frac{k_1+k_2+2\lambda\left(\theta_{k_1}+\theta_{k_2}\right)}{m}-x\right)^2}{A^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)}} \\
&\quad\times\sqrt{\frac{\sum\limits_{k_1=0}^{\infty}\sum\limits_{k_2=0}^{\infty}\left(\frac{P_{k_1,k_2}^\lambda(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}\right)}{A^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)}} \\
&= \sqrt{T_m^\lambda\left((t-x)^2\right)(x)}\sqrt{T_m^\lambda(1)(x)} \\
&= \sqrt{M_{m,2}^{*\lambda}(x)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani,

$$T_m^\lambda\left(|t-x|\right)(x) \leq \sqrt{M_{m,2}^{*\lambda}(x)} \tag{4.10}$$

dir. (4.10) ve (4.9) eşitsizliği birlikte düşünüldüğünde

$$\left|T_m^\lambda(g)(x)-g(x)\right| \leq \omega(g;\delta)\left(1+\frac{\sqrt{M_{m,2}^{*\lambda}(x)}}{\delta}\right) \tag{4.11}$$

eşitsizliği elde edilir. Son olarak (4.11) eşitsizliğinde $\delta=\sqrt{M_{m,2}^{*\lambda}(x)}$ alınarak teoremin ispatı tamamlanır. ■

Teorem 4.3 $g\in C_B^1[0,\infty)$ ve $M_{m,2}^{*\lambda}(x)$ ise Lemma 4.5' de hesaplanan ikinci merkezi moment olsun. Bu taktirde

$$\left|T_m^\lambda(g)(x)-g(x)\right| \leq \sqrt{M_{m,2}^{*\lambda}(x)}\left\{\left|g'(x)\right|+2\omega\left(g';\delta\right)\right\}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $x,t\in[0,\infty)$ için

$$g(t)-g(x) \leq |t-x|\left|g'(x)\right| + \int\limits_x^t \left(g'(s)-g'(x)\right)ds \tag{4.12}$$

eşitsizliği yazılabilir. Diğer yandan Teorem 3.2'nin ispatı yapılırken $g \in C_B^1[0,\infty)$ için

$$\left|\int_x^t \left(g'(s)-g'(x)\right)ds\right| \leq \omega\left(g';\delta\right)\left(|t-x|+\frac{(t-x)^2}{\delta}\right)$$

şeklinde (3.9) eşitsizliği elde edilmişti. (4.12) eşitsizliğinin her iki tarafına T_m^λ operatörleri uygulanır ve daha sonra mutlak değer alınırsa (3.9) ve (4.10) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}
&\left|T_m^\lambda(g)(x)-g(x)\right| \\
\leq\ & T_m^\lambda\left(|t-x|\right)(x)\left|g'(x)\right|+\omega\left(g';\delta\right)\left(T_m^\lambda\left(|t-x|\right)(x)+\frac{M_{m,2}^{*\lambda}(x)}{\delta}\right) \\
\leq\ & \sqrt{M_{m,2}^{*\lambda}(x)}\left|g'(x)\right|+\omega\left(g';\delta\right)\left(\sqrt{M_{m,2}^{*\lambda}(x)}+\frac{M_{m,2}^{*\lambda}(x)}{\delta}\right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitsizlikte $\delta=\sqrt{M_{m,2}^{*\lambda}(x)}$ alınırsa ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.4 $g \in Lip_M(\alpha)$ olsun. Buna göre $M_{m,2}^{*\lambda}(x)$, Lemma 4.5'de hesaplanan merkezi moment olmak üzere

$$\left|T_m^\lambda(g)(x)-g(x)\right| \leq M\ \left(M_{m,2}^{*\lambda}(x)\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $g \in Lip_M(\alpha)$ olsun. Bu durumda

$$g(t)-g(x) \leq M|t-x|^\alpha \tag{4.13}$$

yazılabilir. T_m^λ operatörü (4.13) eşitsizliğinin her iki tarafına uygulanır ve daha sonra her iki tarafın mutlak değeri alınırsa T_m^λ operatörlerinin lineer olmasından dolayı

$$\left|T_m^\lambda(g)(x)-g(x)\right| \leq MT_m^\lambda\left(|t-x|^\alpha\right)(x) \tag{4.14}$$

yazılabilir. Diğer taraftan $p=\frac{\alpha}{2}$ ve $q=\frac{2-\alpha}{2}$ için Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$T_m^\lambda(1)(x) = 1$ olmasından dolayı

$$\begin{aligned}
& T_m^\lambda\left(|t-x|^\alpha\right)(x) \\
= & \frac{\sum\limits_{k_1=0}^{\infty}\sum\limits_{k_2=0}^{\infty}\frac{P_{k_1,k_2}^\lambda(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}\left|\frac{k_1+k_2+2\lambda\left(\theta_{k_1}+\theta_{k_2}\right)}{m}-x\right|^\alpha}{A^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)} \\
= & \frac{\sum\limits_{k_1=0}^{\infty}\sum\limits_{k_2=0}^{\infty}\left(\frac{P_{k_1,k_2}^\lambda(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}\left(\frac{k_1+k_2+2\lambda\left(\theta_{k_1}+\theta_{k_2}\right)}{m}-x\right)^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{P_{k_1,k_2}^\lambda(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}}{A^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)} \\
\leq & \left(\frac{\sum\limits_{k_1=0}^{\infty}\sum\limits_{k_2=0}^{\infty}\frac{P_{k_1,k_2}^\lambda(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}\left(\frac{k_1+k_2+2\lambda\left(\theta_{k_1}+\theta_{k_2}\right)}{m}-x\right)^2}{A^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \\
& \times\left(\frac{\sum\limits_{k_1=0}^{\infty}\sum\limits_{k_2=0}^{\infty}\left(\frac{P_{k_1,k_2}^\lambda(mx/2)}{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}\right)}{A^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)}\right)^{\frac{2-\alpha}{2}} \\
= & \left[T_m^\lambda\left((t-x)^2\right)(x)\right]^{\frac{\alpha}{2}}\left[T_m^\lambda(1)(x)\right]^{\frac{2-\alpha}{2}} \\
= & \sqrt{M_{m,2}^{*\lambda}(x)}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Yukarıda elde edilen $T_m^\lambda\left(|t-x|^\alpha\right)(x) \leq \left(M_{m,2}^\lambda(x)\right)^{\frac{\alpha}{2}}$ eşitsizliği (4.14)'de kullanılırsa istenilen göstreilmiş olur ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.5 K, $g \in C_B[0,\infty)$ fonksiyonun Peetre-K fonksiyoneli ve $M_{m,2}^{*\lambda}(x)$ de Lemma 4.5'de hesaplanan merkezi moment değerleri olmak üzere

$$\left|T_m^\lambda(g)(x) - g(x)\right| \leq 2K\left(g; \sqrt{M_{m,2}^{*\lambda}(x)} + \frac{M_{m,2}^{*\lambda}(x)}{2}\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. c reel sayısı x ile t arasında olmak üzere $f \in C_B^2[0,\infty)$ fonksiyonun x noktasındaki Taylor formülünden

$$f(t) \leq f(x) + |f'(x)|\,|t-x| + f''(c)\frac{(t-x)^2}{2} \tag{4.15}$$

yazılabilir. (4.15) eşitsizliğinin her iki tarafına lineer pozitif T_m^λ operatörleri uygulanır ve daha sonra mutlak değer alınırsa (4.10) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\left|T_m^\lambda(f)(x)-f(x)\right| &\leq |f'(x)|\,T_m^\lambda(|t-x|)(x)+\frac{|f''(c)|}{2}T_m^\lambda\left((t-x)^2\right)(x)\\
&\leq |f'(x)|\sqrt{M_{m,2}^{*\lambda}(x)}+\frac{|f''(c)|}{2}M_{m,2}^{*\lambda}(x)\\
&\leq \|f'\|_{C_B[0,\infty)}\sqrt{M_{m,2}^{*\lambda}(x)}+\frac{\|f''\|_{C_B[0,\infty)}}{2}M_{m,2}^{*\lambda}(x)\\
&\leq \left[\sqrt{M_{m,2}^{*\lambda}(x)}+\frac{M_{m,2}^{*\lambda}(x)}{2}\right]\left(\|f'\|_{C_B[0,\infty)}+\|f''\|_{C_B[0,\infty)}\right)\\
&\leq \left[\sqrt{M_{m,2}^{*\lambda}(x)}+\frac{M_{m,2}^{*\lambda}(x)}{2}\right]\|f\|_{C_B^2[0,\infty)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda bulunan bu eşitlik kullanılarak her bir $g\in C_B[0,\infty)$ için

$$\begin{aligned}
&\left|T_m^\lambda(g)(x)-g(x)\right|\\
&=\left|T_m^\lambda(g)(x)-T_m^\lambda(f)(x)+T_m^\lambda(f)(x)-f(x)+f(x)-g(x)\right|\\
&\leq T_m^\lambda(|g-f|)(x)+|g(x)-f(x)|+\left|T_m^\lambda(f)(x)-f(x)\right|\\
&\leq 2\|g-f\|_{C_B[0,\infty)}+2\|f\|_{C_B^2[0,\infty)}\left[\sqrt{M_{m,2}^{*\lambda}(x)}+\tfrac{M_{m,2}^{*\lambda}(x)}{2}\right]
\end{aligned}$$

yazılabilir. Yani

$$\begin{aligned}
&\left|T_m^\lambda(g)(x)-g(x)\right|\\
&\leq 2\|g-f\|_{C_B[0,\infty)}+2\|f\|_{C_B^2[0,\infty)}\left[\sqrt{M_{m,2}^{*\lambda}(x)}+\tfrac{M_{m,2}^{*\lambda}(x)}{2}\right]
\end{aligned}\tag{4.16}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca (4.16) eşitsizliğinin her iki tarafının $f\in C_B^2[0,\infty)$ için infimumu alınırsa

$$\left|T_m^\lambda(g)(x)-g(x)\right|\leq 2K\left(g;\sqrt{M_{m,2}^{*\lambda}(x)}+\frac{M_{m,2}^{*\lambda}(x)}{2}\right)$$

elde edilir ki istenilen gösterilmiş olur. ■

Teorem 4.5'de $\delta_n(x)=\sqrt{M_{m,2}^{*\lambda}(x)}+\frac{M_{m,2}^{*\lambda}(x)}{2}$ seçilerek Teorem 2.5 dikkate alındığında aşağıdaki teoremin geçerli olduğu sonucuna varılır.

Teorem 4.6 $M>0$, $g\in C_B[0,\infty)$ ve $M_{m,2}^{*\lambda}(x)$ de Lemma 4.5'de hesaplanan merkezi moment değerleri olsun. $\delta_n(x)=\sqrt{M_{m,2}^{*\lambda}(x)}+\frac{M_{m,2}^{*\lambda}(x)}{2}$ olmak üzere

$$\left|T_m^\lambda(g)(x)-g(x)\right|\leq 2M\left\{\omega_2\left(g,\sqrt{\delta_n(x)}\right)+\min\left(1,\delta_n(x)\right)\|g\|_{C_B[0,\infty)}\right\}$$

eşitsizliği sağlanır.

4.4 T_m^λ Operatörleri ile Ağırlıklı Yaklaşım

Lemma 4.6 T_m^λ operatörleri $\rho(t) = 1 + t^2$ olmak üzere

$$T_m^\lambda(\rho)(x) \leq K\rho(x), \ K > 0$$

özelliğini sağlar.

İspat. A^λ fonksiyonu $A^\lambda(1,1) \neq 0$ ile $\frac{a_{k_1,k_2}}{A^\lambda(1,1)} \geq 0$ şartını sağlayan $t_1^2 + t_2^2 < r^2$, $r > 1$ bölgesinde analitik bir fonksiyon ve $\forall x \in [0,\infty)$ için $\xi_m^\lambda(x)$, $\frac{1}{m^2}$, $\frac{1}{m}$ ve $\frac{1}{\exp_\lambda(mx)}$ sınırlı olduğundan dolayı en az birer $K_1 > 0$ ve $K_2 > 0$ için

$$\begin{aligned}
&\left|\left(1 + \frac{2\lambda}{\exp_\lambda(mx)} + \frac{2A_{t_1}^\lambda(1,1)+2A_{t_2}^\lambda(1,1)}{A^\lambda(1,1)}\right)\frac{1}{m}\right| \leq K_1 \\
&\left|\begin{array}{l}
\frac{A_{t_1t_1}^\lambda(1,1)+2A_{t_1t_2}^\lambda+A_{t_2t_2}^\lambda(1,1)+A_{t_1}^\lambda(1,1)+A_{t_2}^\lambda(1,1)}{m^2A^\lambda(1,1)} \\
+\frac{2\lambda^2\left[2A^\lambda(1,1)-A^\lambda(-1,1)-A^\lambda(1,-1)\right]}{m^2A^\lambda(1,1)} \\
+\frac{2\lambda^2\left[A^\lambda(1,1)-A^\lambda(1,-1)-A^\lambda(-1,1)+A^\lambda(-1,-1)\right]\xi_m^\lambda(x)}{m^2A^\lambda(1,1)} \\
+\frac{2\lambda\left[2A_{t_1}^\lambda(1,1)+2A_{t_2}^\lambda(1,1)+A_{t_1}^\lambda(-1,1)+A_{t_2}^\lambda(1,-1)-A_{t_1}^\lambda(1,-1)-A_{t_2}^\lambda(-1,1)\right]}{m^2A^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)}
\end{array}\right| \leq K_2
\end{aligned} \tag{4.17}$$

yazılabilir. (4.17) eşitsizliği kullanılarak $K = 1 + K_1 + K_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
T_m^\lambda(\rho)(x) &= T_m^\lambda(e_0 + e_2)(x) \\
&= T_m^\lambda(e_0)(x) + T_m^\lambda(e_2)(x) \\
&\leq 1 + x^2 + K_1x + K_2 \\
&\leq 1 + x^2 + K_1(1 + x^2) + K_2(1 + x^2) \\
&= (1 + x^2)(1 + K_1 + K_2) \\
&= K(1 + x^2) \\
&= K\rho(x)
\end{aligned}$$

elde edilir ki istenilen gösterilmiş olur. ■

Teorem 4.7 $\rho(t) = 1 + t^2$ ve $g \in C_\rho^k[0,\infty)$ olmak üzere T_m^λ operatörleri

$$\lim_{m\to\infty} \left\|T_m^\lambda(g) - g\right\|_\rho = 0$$

limitini sağlar.

İspat. Öncelikle $T_m^\lambda : C_\rho[0,\infty) \to B_\rho[0,\infty)$ şeklinde bir dönüşüm olduğu gösterilmelidir. $g \in C_\rho[0,\infty)$ olsun. Bu durumda $\rho(t) = 1 + t^2$ ve $M_g > 0$ olmak üzere

T_m^λ operatörlerinin lineer pozitifliğinden (Lemma 2.1'den L_{a_m,b_m}^λ operatörleri aynı zamanda monoton azalmayandır) Lemma 4.6 yardımıyla

$$T_m^\lambda(g)(x) = T_m^\lambda\left(\frac{g}{\rho}\rho\right)(x) \leq \|g\|_\rho T_m^\lambda(\rho)(x) \leq \|g\|_\rho K\rho(x) \leq M_g\rho(x)$$

elde edilir. O halde yukarıdaki bu eşitsizlikten $T_m^\lambda(g) \in B_\rho[0,\infty)$ sonucuna varılır. Bu durumda $T_m^\lambda(g)$ operatörü $C_\rho[0,\infty)$ uzayından $B_\rho[0,\infty)$ uzayına bir dönüşüm olmalıdır. Şimdi $e_k(t) := t^k$, $k \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T_m^\lambda(e_k) - e_k\right\|_\rho = 0,\ k = 0,1,2. \tag{4.18}$$

limitinin sağlandığı gösterilecektir:

B1. $\left\|T_m^\lambda(e_0) - e_0\right\|_\rho = 0$ olduğu açıktır.

B2. A^λ fonksiyonu $A^\lambda(1,1) \neq 0$ ile $\frac{a_{k_1,k_2}}{A^\lambda(1,1)} \geq 0$ şartını sağlayan $t_1^2 + t_2^2 < r^2$, $r > 1$ bölgesinde analitik bir fonksiyon ve $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,\infty)$ için $\left|\xi_m^\lambda(x)\right| \leq 1$ ve $|1/\exp_\lambda(mx)| \leq 1$ olduğundan dolayı

$$\left|\frac{A_{t_1}^\lambda(1,1) + A_{t_2}^\lambda(1,1)}{A^\lambda(1,1)} + \frac{\lambda\left[2A^\lambda(1,1) - A^\lambda(-1,1) - A^\lambda(1,-1)\right]}{A^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)}\right| \leq C_1,\ C_1 > 0$$

yazılabilir. Yukarıdaki bu eşitlik yardımıyla

$$\begin{aligned}\left\|T_m^\lambda(e_1) - e_1\right\|_\rho &\leq \frac{1}{m}\sup_{x\geq 0}\frac{\left|\frac{A_{t_1}^\lambda(1,1)+A_{t_2}^\lambda(1,1)}{A^\lambda(1,1)} + \frac{\lambda\left[2A^\lambda(1,1)-A^\lambda(-1,1)-A^\lambda(1,-1)\right]}{A^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)}\right|}{1+x^2} \\ &\leq \frac{C_1}{m} \to 0,\ (m\to\infty)\end{aligned}$$

elde edilir.

B3. A^λ fonksiyonu $A^\lambda(1,1) \neq 0$ ile $\frac{a_{k_1,k_2}}{A^\lambda(1,1)} \geq 0$ şartını sağlayan $t_1^2 + t_2^2 < r^2$, $r > 1$ bölgesinde analitik bir fonksiyon ve $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,\infty)$ için $\left|\xi_m^\lambda(x)\right| \leq 1$ ve $|1/\exp_\lambda(mx)| \leq 1$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned}&\left|1 + \frac{2\lambda}{\exp_\lambda(mx)} + \frac{2A_{t_1}^\lambda(1,1)+2A_{t_2}^\lambda(1,1)}{A^\lambda(1,1)}\right| \leq C_2 \\ &\left|\begin{array}{l}\frac{A_{t_1t_1}^\lambda(1,1)+2A_{t_1t_2}^\lambda+A_{t_2t_2}^\lambda(1,1)+A_{t_1}^\lambda(1,1)+A_{t_2}^\lambda(1,1)}{A^\lambda(1,1)} \\ +\frac{2\lambda^2\left[2A^\lambda(1,1)-A^\lambda(-1,1)-A^\lambda(1,-1)\right]}{A^\lambda(1,1)} \\ +\frac{2\lambda^2\left[A^\lambda(1,1)-A^\lambda(1,-1)-A^\lambda(-1,1)+A^\lambda(-1,-1)\right]\xi_m^\lambda(x)}{A^\lambda(1,1)} \\ +\frac{2\lambda\left[2A_{t_1}^\lambda(1,1)+2A_{t_2}^\lambda(1,1)+A_{t_1}^\lambda(-1,1)+A_{t_2}^\lambda(1,-1)-A_{t_1}^\lambda(1,-1)-A_{t_2}^\lambda(-1,1)\right]}{A^\lambda(1,1)\exp_\lambda(mx)}\end{array}\right| \leq C_3\end{aligned} \tag{4.19}$$

yazılabilir. (4.19) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\left\|T_m^\lambda(e_2)-e_2\right\|_\rho &\leq \frac{C_2}{m}\sup_{x\geq 0}\frac{x}{1+x^2}+\frac{C_3}{m^2}\sup_{x\geq 0}\frac{1}{1+x^2}\\ &\leq \frac{C_2}{2m}+\frac{C_3}{m^2}\to 0,\ (m\to\infty)\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak B1, B2 ve B3 maddelerinden (4.18) eşitliği sağlanacağından Teorem 2.4 kullanılarak ispat tamamlanır. ■

4.5 T_m^λ Operatörleri ile Nümerik Yaklaşım

Bu kesimde T_m^λ operatörleri ile bir fonksiyona yaklaşım örneği grafik üzerinde verilecektir.

Örnek 4.1 $f(t)=\sin(t)$ olmak üzere (4.7) eşitliği ile verilen T_n^λ operatörlerinde $A^\lambda(t_1,t_2)=1$ olarak seçilirse

$$P_{k_1,k_2}^\lambda\left(\frac{nx}{2}\right)=\binom{k_1+k_2}{k_2}\left(\frac{nx}{2}\right)^{k_1+k_2}\frac{\Gamma_\lambda(k_1)\Gamma_\lambda(k_2)}{\Gamma_\lambda(k_1+k_2)}$$

olacağından

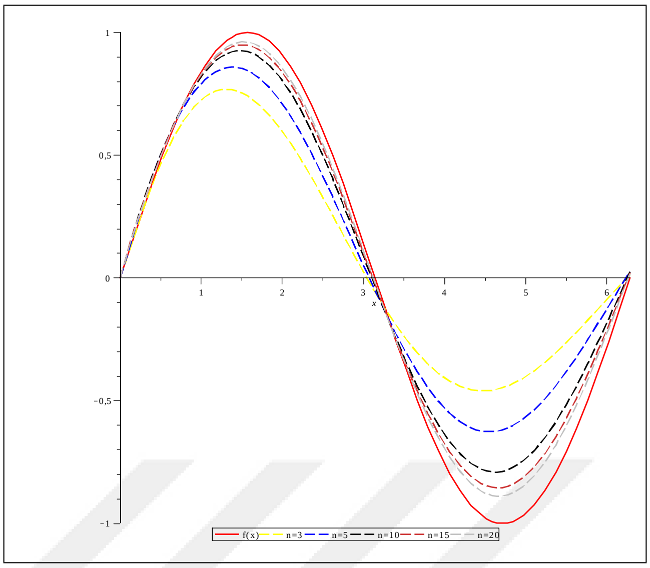
$$T_n^{\lambda,\#}(f)(x)=\frac{\sum\limits_{k_1=0}^{\infty}\sum\limits_{k_2=0}^{\infty}\binom{k_1+k_2}{k_2}\left(\frac{nx}{2}\right)^{k_1+k_2}\frac{1}{\Gamma_\lambda(k_1+k_2)}f\left(\frac{k_1+k_2+2\lambda\left(\theta_{k_1}+\theta_{k_2}\right)}{n}\right)}{\exp_\lambda(nx)}$$

yazılabilir. $T_n^{\lambda,\#}$ operatörleri ile bir f fonksiyonuna yaklaşım hatası

$$\varepsilon_n(x,\lambda,f)=\left|f(x)-T_n^{\lambda,\#}(f)(x)\right|$$

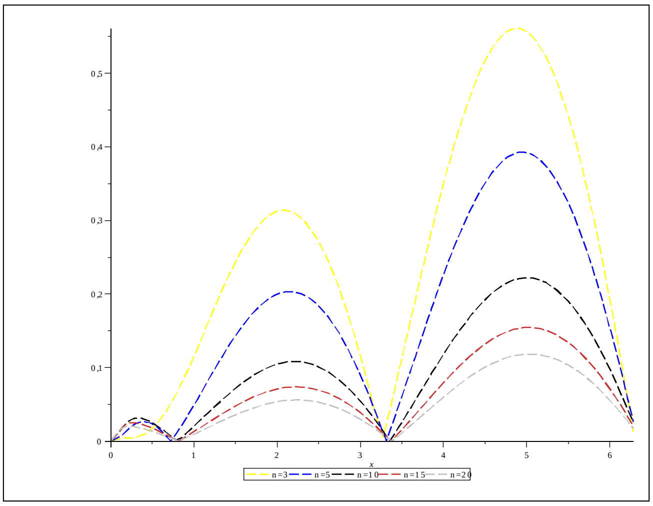
ile verilebilir.

i. $\lambda=5/11$ olmak üzere $[0,2\pi]$ aralığında $\left\{T_n^{\lambda,\#}(f)(x)\right\}$ dizisinin $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşımı $n=3,5,10,15,20$ değerleri için şekil 4.1'de gösterilmiştir. Dikkat edileceği üzere n değerleri büyüdükçe operatörler $f\left(x\right)$ değerine daha yakınlaşıyor.



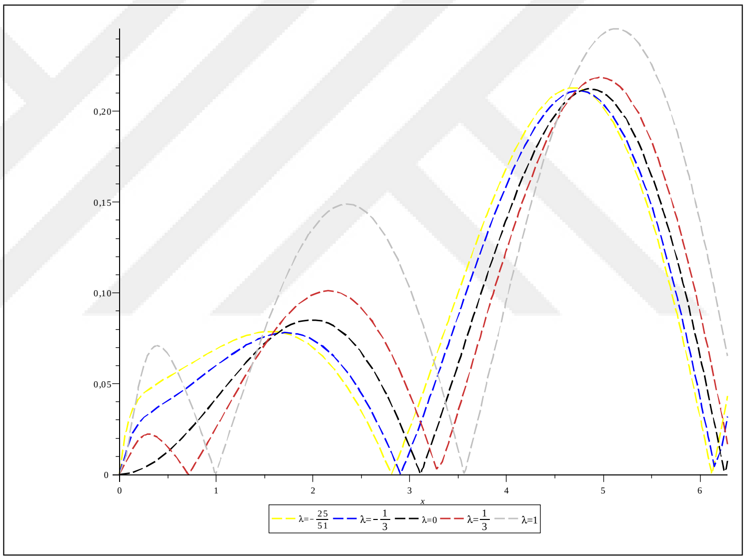
Şekil 4.1 İndirgenmiş T_n^{λ} operatöri ile bazı n değerleri için yaklaşım

Örnek 4.2 ii. $\lambda = 5/11$ olmak üzere $[0, 2\pi]$ aralığında $\left\{T_n^{\lambda,\#}\left(f\right)\left(x\right)\right\}$ dizisinin $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşım hatası $\varepsilon_n(x, \lambda, f)$, $n = 3, 5, 10, 15, 20$ değerleri için şekil 4.2'de gösterilmiştir. Dikkat edileceği üzere n değerleri büyüdükçe hata değerleri sıfıra (yani x eksenine) yaklaşıyor.



Şekil 4.2 İndirgenmiş T_n^{λ} operatöri ile bazı n değerleri için yaklaşım hatası

iii. $n = 10$ olmak üzere $[0, 2\pi]$ aralığında $\left\{T_n^{\lambda,\#}(f)(x)\right\}$ dizisinin $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşımı $\lambda = -\frac{25}{51}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 1$ değerleri için şekil 4.3'de gösterilmiştir. Burada $T_n^{\lambda,\#}(f)(x)$, $\lambda = 0$ için (1.4) ile (Varma 2013) kaynağında verilen operatörlerin $A^{\lambda}(t_1, t_2) = 1$ için indirgemesidir. Dikkat edileceği üzere f fonksiyonuna yaklaşım bazı aralıklarda $\lambda \rightarrow$-$\frac{1}{2}$ değerine yakın değerler için $T_n^{\lambda,\#}(f)$ operatörleri avantajlı iken bazı aralıklarda yeterinde büyük λ değerleri için $T_n^{\lambda,\#}(f)$ operatörleri avantajlı oluyor. Eğer aralığa göre yaklaşım avantajı veren λ değerleri için yeni bir operatör tanımlanırsa fonksiyona en iyi yaklaşan operatör yeni tanımlanan operatör olacaktır. O halde bu düşünceyle yapılan T_n^{λ} genellemesi (1.4) ile (Varma 2013) kaynağında verilen operatörlerden çok daha iyi sonuçlar verir.



Şekil 4.3 İndirgenmiş T_n^{λ} operatöri ile bazı λ değerleri için yaklaşım hatası

4.6 T_m^{λ} Operatörlerinin İki değişkenli Genellemesi

Bu kesimde yüzeylere yaklaşımın grafik üzerinde görülmesi adına T_m^{λ} operatörlerinin iki değişkenli bir modifikasyonu tanımlanacaktır.

Tanım 4.2 $\lambda > -1/2$ reel parametre, $\psi \in C([0, \infty) \times [0, \infty))$, $m \in \mathbb{N}$, $x, y \in [0, \infty)$ ve $B_{k_1,k_2,j_1,j_2}^{\lambda,m}$ aşağıdaki gibi tanımlanmak üzere

$$B_{k_1,k_2,j_1,j_2}^{\lambda,m}(x, y) = \frac{P_{k_1,k_2}^{\lambda}(mx/2)}{\Gamma_{\lambda}(k_1)\Gamma_{\lambda}(k_2)} \frac{P_{j_1,j_2}^{\lambda}(my/2)}{\Gamma_{\lambda}(j_1)\Gamma_{\lambda}(j_2)} \tag{4.20}$$

katlı Dunkl Appell polinomlarının ürettiği iki değişkenli Szász-Mirakyan operatörü

$$U_m^\lambda(\psi)(x,y) = \frac{\sum\limits_{k_1=0}^{\infty}\sum\limits_{k_2=0}^{\infty}\sum\limits_{j_1=0}^{\infty}\sum\limits_{j_2=0}^{\infty} B_{k_1,k_2,j_1,j_2}^{\lambda,m}(x,y)\,\psi\left(\frac{k_1+k_2+2\lambda\left(\theta_{k_1}+\theta_{k_2}\right)}{m}, \frac{j_1+j_2+2\lambda\left(\theta_{j_1}+\theta_{j_2}\right)}{m}\right)}{\left[A^\lambda(1,1)\right]^2 \exp_\lambda(mx)\exp_\lambda(my)} \tag{4.21}$$

ile tanımlanır ve bu tanımda operatörün tanımlı ve pozitif olabilmesi için adına (4.3) ile verilen A^λ analitik fonksiyonu her $j_1, j_2 \in \mathbb{N}_0$ için

$$A^\lambda(1,1) \neq 0 \quad ve \quad \tfrac{a_{j_1,j_2}}{A^\lambda(1,1)} \geq 0$$

özelliğini sağlayacak şekilde seçilmiştir.

İki değişkenli operatörün kuruluşu gereği aşağıdaki Lemma ispatsız olarak verilebilir.

Lemma 4.7 $x, y \in \mathbb{R}$ ve T_m^λ, (4.7) ile verilen operatörleri temsil etsin. Buna göre U_m^λ operatörleri

i. $U_m^\lambda(1)(x,y) = 1,$

ii. $U_m^\lambda(t)(x,y) = T_m^\lambda(t)(x) = x + f_m(x),$

iii. $U_m^\lambda(s)(x,y) = T_m^\lambda(t)(y) = y + f_m(y),$

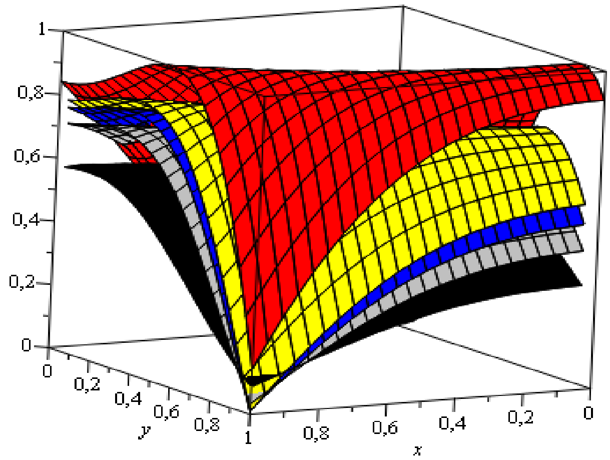
iv. $U_m^\lambda(t^2+s^2)(x,y) = T_m^\lambda(t^2)(x) + T_m^\lambda(t^2)(y) = x^2 + y^2 + h_m(x,y)$

özelliklerini sağlar. Burada $(f_m(x))$ ve $(h_m(x,y))$ dizileri $x, y \in [0,\infty)$ için sıfıra noktasal yakınsayan dizilerdir ve ayrıca dizilerin tanımlı olabileceği keyfi pozitif kompakt bir küme üzerinde bu yakınsama düzgündür.

Yukarıdaki lemma ve Volkov Teoremi birlikte düşünüldüğünde aşağıdaki teorem ispatsız verilebilir.

Teorem 4.8 $D = [0,\infty) \times [0,\infty)$ ve $\psi \in C(D)$ olmak üzere $B \subseteq D$ sınırlı bölgesi verilsin. Buna göre, $\left\{T_m^\lambda(\psi)(x,y)\right\}$ dizisi $\overline{B}$ üzerinde ψ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

Örnek 4.3



Şekil 4.4 İndirgenmiş U_m^λ operatöri ile bazı m değerleri için yaklaşım

(4.21) ile verilen U_m^λ operatörlerinde $A^\lambda(t_1, t_2) = 1$ olsun. Bu durumda (4.20) ile verilen $B_{k_1,k_2,j_1,j_2}^{\lambda,m}(x, y)$

$$B_{k_1,k_2,j_1,j_2}^{\lambda,m}(x, y) = \frac{\binom{k_1+k_2}{k_2}\binom{j_1+j_2}{j_2}\left(\frac{mx}{2}\right)^{k_1+k_2}\left(\frac{my}{2}\right)^{j_1+j_2}}{\Gamma_\lambda(k_1 + k_2)\,\Gamma_\lambda(j_1 + j_2)}$$

şekline indirgenecektir.. Bu durumda $\psi(x, y) = \sin(x^2 + 2y^2)$ ve $\lambda = \frac{1}{3}$ olmak üzere şekil 4.4'de $m = 5, 10, 15, 20$ değerleri için indirgenmiş U_m^λ operatörlerinin nümerik olarak yaklaşımı verilmiştir. Ayrıca bu şekilde $D_1 = [0, 1] \times [0, 1]$ üzerinde kırmızı yüzey ile $\psi(x, y)$, sarı yüzey ile $U_{20}^{\frac{1}{3}}(\psi)(x, y)$, mavi yüzey ile $U_{15}^{\frac{1}{3}}(\psi)(x, y)$, gri yüzey ile $U_{10}^{\frac{1}{3}}(\psi)(x, y)$ ve siyah yüzey ile $U_5^{\frac{1}{3}}(\psi)(x, y)$ temsil edilmektedir. Dikkat edileceği üzere m doğal sayısı büyüdükçe operatörlede kırmızı yüzeyle belirtilen ψ fonksiyonun D_1 bölgesinde belirttiği yüzeye yakınlaşıyor.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde çalışılan konu temeldir ve bu yüzden disiplinler arası bir çalışmada araç olarak kullanılmaya başlıca bir adaydır ve önceki yapılan çalışmalara göre daha iyi sonuçlar vermiştir:

Üçüncü bölümde $L^{\lambda}_{a_m,b_m}$ operatörlerinde $a_m = b_m = m$ olarak alınırsa $L^{\lambda}_{a_m,b_m}$, Sucu tarafından (Sucu 2020) tanımlanan operatörleri vermektedir ve dolayısıyla $L^{\lambda}_{a_m,b_m}$ operatörleri en az bu operatörler kadar iyi olmak zorundadır. Dunkl tipi operatör genellemelerinde sınırsız pozitif diziler yardımıyla operatör genellemesi halen günümüzde yaygın olarak yapılmamaktadır ve bu yüzden araştırmacılar bu tezde yapılan ispat süreçlerinin yardımıyla benzer şekilde kendi operatörlerini tanımlayabilirler.

Dördüncü bölümde, T^{λ}_{m} operatörlerinde $\lambda = 0$ alınırsa T^{λ}_{m}, Varma (Varma 2013) tarafından tanımlanan operatörleri verir. Ayrıca şekil 4.3 dikkatli incelendiğinde bir λ değeri için T^{λ}_{m} operatörü bir aralıkta güzel bir sonuç verirken diğer bir aralıkta kötü sonuçlar vermektedir. Bu durumu düzeltmek için T^{λ}_{m} operatörünün çalışılan aralığın bir parçalanışındaki her bir alt aralıkta fonksiyona yaklaşımının avantantajlı olduğu λ değerleri için parçalı bir şekilde yeni bir operatör tanımlanabilir. Örneğin, bir $f \in C[0,\infty)$ ve $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$ şeklinde ayrık aralıkların bir birleşimi verilsin ve ayrıca $k = 1,2,3$ olmak üzere $\forall x \in I_k$ için $\left|T^{\lambda}_{m}(f)(x) - f(x)\right|$ farkını minimum yapan λ değerleri $\lambda = \lambda_k$ olsun. Buna göre, I aralığında

$$F_m(f)(x) = \begin{cases} T^{\lambda_1}_{m}(f)(x) & ; \quad x \in I_1 \\ T^{\lambda_2}_{m}(f)(x) & ; \quad x \in I_2 \\ T^{\lambda_3}_{m}(f)(x) & ; \quad x \in I_3 \end{cases}$$

ile tanımlanan yeni operatör f fonksiyonuna tüm λ değerleri karşılık gelen T^{λ}_{m} operatörlerinden daha iyi yaklaşır. Dolayısıyla bu tezde (Varma 2013) ile verilen çalışmadan çok daha iyi sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca dördüncü bölümde $\lambda = 0$ özel değerine karşılık (Lee 2011) kaynağındaki polinomları veren yeni bir polinom tanımlanmıştır.

Şimdi yapılan bu tezden faydalanarak yapılabilecek önerilen bazı çalışmalar maddeler halinde verilecektir:

- $L^{\lambda}_{a_m,b_m}$ ve T^{λ}_m operatörlerin temel operatör Kantorovich, Durrmeyer ,Stancu, Phillips, Stancu-Kantorovich, Stancu-Durrmeyer, Gamma ve Beta tipi gibi temel operatör genellemeleri veya bu genellemelerin kuantum kalkülüs ile ilişkili genellemeleri yapılabilir.

- Katlı Dunkl Appell polinomlarının katlı Dunkl Euler, Bernoulli, Hermite, Genocchi ve Gould-Hopper polinomları gibi özel durumları ayrı çalışmalarda detaylı olarak incelenebilir. Hatta bu polinomları içeren bir T^{λ}_m operatörü tanımlanabiliyorsa T^{λ}_m operatörün özel durumlara göre yaklaşımı incelenebilir. Bu tezde genel olarak sonuçlar bulunmuştur ancak özel sonuçlar da uygulamalı matematik için bir o kadar önemlidir.

- Katlı Dunkl Appell polinomlarına ek olarak Dunkl Sheffer ve katlı Dunkl Sheffer polinomları tanımlanabilir ve bu polinomların kuantum ile post kuantum türü tanımlanabilir. Benzer şekilde bahsi geçen polinomları içeren operatörleri yapılabilir.

- $L^{\lambda}_{a_m,b_m}$ ve T^{λ}_m operatörlerin bazı test fonksiyonlarını koruyan türü veya bazı özellikleri sağlayan fonksiyonları koruyan bir türü yapılabilir.

- $L^{\lambda}_{a_m,b_m}$ ve T^{λ}_m operatörlerin istatistiksel yaklaşımı incelenebilir.

- Katlı Dunkl Appell polinomları daha da genellenebilir ve bazı özellikler elde edilebilir.

- Bu tezdekinden farklı olarak bazı normlarla farklı uzaylarda $L^{\lambda}_{a_m,b_m}$ ve T^{λ}_m operatörlerinin yaklaşım özellikleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

Acar, T. 2016. *(p, q)-Generalization of Szász-Mirakyan operators*. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 39(10), 2685-2695.

Acar, T., Aral, A., Gonska, H. 2017. *On Szász-Mirakyan operators preserving e^{2ax}, $a > 0$*. Mediterranean Journal of Mathematics, 14(1), 1-14.

Agrawal, P. N., İspir, N. 2016. *Degree of approximation for bivariate Chlodowsky-Szász-Charlier type operators*. Results in Mathematics, 69(3), 369-385.

Aktaş, R., Çekim, B., Taşdelen, F. 2013. *A Kantorovich-Stancu type generalization of Szász operators including Brenke type polynomials*. Journal of Function Spaces and Applications, 2013.

Aktaş, R., Söylemez, D., Taşdelen, F. 2019. *Stancu type generalization of Szász-Durrmeyer operators involving Brenke-type polynomials*. Filomat, 33(3), 855-868.

Altomore, F., Campiti, M. 1994. *Korovkin type approximation theory and its application*. Walter de Gruyter, 627, Berlin-New York.

Anastassiou, G. A., Gal, S. G. 2000. *Approximation theory: Moduli of continuity and global smoothness preservation*. Birkhäuser-Verlag, 525, Basel.

Ansari, K. J., Mursaleen, M., Rahman, S. 2019. *Approximation by Jakimovski-Leviatan operators of Durrmeyer type involving multiple Appell polynomials*. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas, 113(2), 1007-1024.

Apostol, T. M. 1974, *Mathematical Analysis*, Pearson Education, 483, California.

Appell, P. 1880. *Sur une classe de polynômes*. In Annales scientifiques de l'École normale supérieure, 9, 119-144.

Aral, A. 2008. *A generalization of Szász–Mirakyan operators based on q-integers*. Mathematical and Computer Modelling, 47(9–10), 1052-1062.

Aral, A., Inoan, D., Raşa, I. 2014. *On the generalized Szász–Mirakyan operators*. Results in Mathematics, 65(3-4), 441-452.

Alotaibi, A., Nasiruzzaman, M., Mursaleen, M. 2018. *A Dunkl type generalization of Szász operators via post-quantum calculus*. Journal of Inequalities and Applications, 2018(1), 1-15.

Atakut, Ç., Büyükyazıcı, İ. 2016. *Approximation by Kantorovich-Szász type operators based on Brenke type polynomials*. Numerical Functional Analysis and Optimization, 37(12), 1488-1502.

Atakut, Ç., Büyükyazıcı, İ. 2016. *Approximation by modified integral type Jakimovski-Leviatan operators*. Filomat, 30(1), 29-39.

Atakut, Ç., Karateke, S., Büyükyazıcı, İ. 2019. *On approximation process by certain modified Dunkl generalization of Szász-beta type operators.* Journal of Mathematics and Computer Science, 19, 9-18.

Bernstein, S. N. 1912. *Dèmonstration du thèorème de Weierstrass fondèe sur le calcul de probabilitès.* Communications de la Société Mathematique de Kharkov, 13, 1-2.

Braha, N. L., Kadak, U. 2020. *Approximation properties of the generalized Szasz operators by multiple Appell polynomials via power summability method.* Mathematical Methods in the Applied Sciences, 43(5), 2337-2356.

Butzer, P. L. 1953. *On two-dimensional Bernstein polynomials.* Canadian Journal of Mathematics, 5, 107-113.

Butzer, P. L., Hubert, B. 1967. *Semi-groups of operators and approximation.* Springer Verlag, 318, New York.

Büyükyazıcı, I., Atakut, C., Kırcı Serenbay, S., 2015. *Approximation properties of Baskakov-Balazs type operators for functions of two variables.* Miskolc Mathematical Notes, 16(2), 667-678.

Cai, Q. B., Lian, B. Y., Zhou, G. 2018. *Approximation properties of λ-Bernstein operators.* Journal of Inequalities and Applications, 2018(1), 1-11.

Cai, Q. B., Yazıcı, S, Çekim, B., İçöz, G. 2021. *Quantitave Dunkl analogue of Szász-Mirakyan operators*, Journal of Mathematical Inequalities, 15(2), 861-878.

Cárdenas-Morales, D., Garrancho, P., Raşa, I. 2011. *Bernstein-type operators which preserve polynomials.* Computers & Mathematics with Applications, 62(1), 158-163.

Chauhan, R., Baxhaku, B., Agrawal, P. N. 2018. *Bivariate Szász-type operators based on multiple Appell polynomials.* Advances in Summability and Approximation Theory, 103.

Cheikh, Y., Gaied, M. 2007. *Dunkl-Appell d-orthogonal polynomials.* Integral Transforms and Special Functions, 18(8), 581-597.

Chen, X., Tan, J., Liu, Z., Xie, J. 2017. *Approximation of functions by a new family of generalized Bernstein operators.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 450(1), 244-261

Cheney, E. W., Sharma, A. 1964. *Bernstein power series.* Canadian Journal of Mathematics, 16, 241-252.

Çekim, B., Dinlemez Kantar, Ü., Yüksel, İ. 2017. *Dunkl generalization of Szász Beta-type operators.* Mathematical Methods in the Applied Sciences, 40(18), 7697-7704.

Çekim, B., Aktaş, R., Taşdelen, F. 2021. *A Dunkl-Gamma type operator in terms of generalization of two-variable Hermite polynomials*. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2021, 1-9.

Deo, N., Dhamija, M. 2018. *Charlier-Szász-Durrmeyer type positive linear operators*. Afrika Matematika, 29(1), 223-232.

Deshwal, S., Agrawal, P. N., Araci, S. 2018. *Dunkl analogue of Szász-mirakjan operators of blending type*. Open Mathematics, 16(1), 1344-1356.

Ditzian, Z. and Totik, V. 1987. *Moduli of smoothness*. Springer- Verlag, 225, New York.

Duman, O., Orhan, C. 2004. *Statistical approximation by positive linear operators*. Studia Mathematica, 161(2), 187-197.

Duman, O., Özarslan, M. A. 2007. *Szász-Mirakjan type operators providing a better error estimation*. Applied Mathematics Letters, 20(12), 1184-1188.

Duman, O., Özarslan, M. A., Vecchia, B. D. 2009. *Modified Szász-Mirakjan-Kantorovich operators preserving linear functions*. Turkish Journal of Mathematics, 33, 151-158.

Dunkl, C. F. 1989. Differential-difference operators associated to reflection groups. *Transactions of the American Mathematical Society*, 311(1), 167-183.

Gadjiev, A. D. 1974. *The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets, and theorems analogous to that of PP Korovkin*. (Russian) Doklady Akademii Nauk SSSR, 218,1001-1004.

Gadjiev, A. D. 1976. *Theorems of Korovkin type*. Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR, 20, 995-998.

Gadjiev, A. D. 1980. *Positive linear operators in weighted spaces of functions of several variables*. Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk Seriya Matematicheskaya, 4, 32-37.

Gadjiev, A. D., Orhan, C. 2002. *Some approximation theorems via statistical convergence*. The Rocky Mountain Journal of Mathematics, 32(1), 129-138.

Gadjiev, A.D. Ghorbanalizadeh, A. M., 2010. *Approximation properties of a new type Bernstein–Stancu polynomials of one and two variables*. Applied Mathematics and Computation, 216(3), 890-901.

Gazanfer, A. K., Büyükyazıcı, İ., 2014. *Approximation by Certain Linear Positive Operators of Two Variables*. Abstract and Applied Analysis, 2014, 1-6.

Gould, H. W., Hopper, A. T., 1962. *Operational formulas connected with two generalizations of Hermite polynomials*. Duke mathematical journal, 29(1), 51-63.

Gupta, V. 2008. *Some approximation properties of q-Durrmeyer operators*. Applied Mathematics and Computation, 197(1), 172-178.

Gupta, V. and Agarwal, R. P. 2014. *Convergence estimates in approximation theory*. Springer International Publishing, 361, Delhi.

Gupta, P., Agrawal, P. N. 2019. *Quantitative Voronovskaja and Grüss Voronovskaja-type theorems for operators of Kantorovich type involving multiple Appell polynomials*. Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science, 43(4), 1679-1687.

Gupta, P., Acu, A. M., Agrawal, P. N. 2021. *Jakimovski-Leviatan operators of Kantorovich type involving multiple Appell polynomials*. Georgian Mathematical Journal, 28(1), 73-82.

Hacıyev, A., Hacısalihoğlu, H. H. 1995. *Lineer pozitif operatör dizilerinin yakınsaklığı*. AÜFF Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, 100, Ankara.

Hardy, G., Littlewood, J. E. and Polya, G. 1998. *Inequalties*. Cambridge University Press, 338, Cambridge.

İçöz, G., Çekim, B. 2015. *Dunkl generalization of Szász operators via q-calculus*. Journal of Inequalities and Applications, 2015(1), 1-11.

İçöz, G., Çekim, B. 2016. *Stancu-type generalization of Dunkl analogue of Szász-Kantorovich operators*. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 39(7), 1803-1810.

İçöz, G., Varma, S., Sucu, S. 2016. *Approximation by operators including generalized Appell polynomials*. Filomat, 30(2), 429-440.

Ismail, M. E. H. 1974. *On a generalization of Szász operators*. Mathematica (Cluj), 39, 259-267.

İspir, N. 2001. *On modified Baskakov operators on weighted spaces*. Turkish Journal of Mathematics, 25(3), 355-365.

İspir, N., Atakut, Ç. 2002. *Approximation by modified Szász-Mirakjan operators on weighted spaces*. Proceedings Mathematical Sciences, 112(4), 571-578.

İspir, N. 2013. *Approximation by modified complex Szasz-Mirakjan operators*. Azerbaijan Journal of Mathematics, 3(2), 95-107.

İspir, N., Büyükyazıcı, İ. 2016. *Quantitative estimates for a certain bivariate Chlodowsky-Szász-Kantorovich type operators*. Mathematical Communications, 21(1), 31-44.

İspir, N. 2017. *Quantitative estimates for GBS operators of Chlodowsky-Szász type*. Filomat, 31(5), 1175-1184.

Jakimovski, A., Leviatan D. 1969. *Generalized Szász operators for the approximation in the infinite interval*. Mathematica (Cluj), 11, 97-103.

Kajla, A., Agrawal, P. N. 2015. *Szász-Durrmeyer type operators based on Charlier polynomials*. Applied Mathematics and Computation, 268, 1001-1014.

Kajla, A., Agrawal, P. N. 2016. *Szász-Kantorovich type operators based on Charlier polynomials.* Kyungpook Mathematical Journal, 56(3), 877-897.

Kim, T. 2007. *A note on the-Genocchi numbers and polynomials.* Journal of Inequalities and Applications, 2007, 1-8.

King, J. P. 2003. *Positive linear operators which preserve x^2.* Acta Mathematica Hungarica, 99(3), 203-208.

Kingsley, E. H. 1951. *Bernstein polynomials for functions of two variables of class $C^{(k)}$.* Proceedings of the American Mathematical Society, 2(1), 64-71.

Korovkin, P. P. 1953. *Convergence of positive linear operators in the space of continuous functions.* (Russian) Doklady Akademii Nauk SSSR, 90, 961-964.

Krech, G. 2016. *A note on some positive linear operators associated with the Hermite polynomials.* Carpathian Journal of Mathematics, 71-77.

Lee, D. 2011. *On multiple Appell polynomials.* Proceedings of the American Mathematical Society, 139(6), 2133-2141.

Lorentz, G. G. 1953. *Bernstein polynomials.* University of Toronto Press, 134, Toronto.

Milovanović, G. V., Mursaleen, M., Nasiruzzaman, M. 2018. *Modified Stancu type Dunkl generalization of Szász-Kantorovich operators.* Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas, 112(1), 135-151.

Mishra, V. N., Swarup, C., Gupta, P., Dubey, R. 2020. *Generalization of Szász-Mirakjan-Kantorovich operators using multiple Appell polynomials.* Journal of Inequalities and Applications, 2020(156), 1-11.

Mursaleen, M., Ansari, K. J., Khan, A. 2015. *On (p, q) analogue of Bernstein operators.* Applied Mathematics and Computation, 266, 874-882.

Mursaleen, M., Ansari, K. J. 2015. *On Chlodowsky variant of Szász operators by Brenke type polynomials.* Applied Mathematics and Computation, 271, 991-1003.

Mursaleen, M., Rahman, S., Alotaibi, A. 2016. *Dunkl generalization of q-Szász-Mirakjan Kantorovich operators which preserve some test functions.* Journal of Inequalities and Applications, 2016(1), 1-18.

Mursaleen, M., Ansari, K. J., Nasiruzzaman, M. 2017. *Approximation by q-analogue of Jakimovski-Leviatan operators involving q-Appell polynomials.* Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science, 41(4), 891-900.

Mursaleen, M., Rahman, S. 2018. *Dunkl generalization of q-Szász-Mirakjan operators which preserve x^2.* Filomat, 32(3), 733-747.

Nasiruzzaman, M., Rao, N. 2018. *A generalized Dunkl type modifications of Phillips operators*. Journal of Inequalities and Applications, 2018(1), 1-12.

Nasiruzzaman, M., Mukheimer, A., Mursaleen, M. 2019. *A Dunkl-type generalization of Szász-Kantorovich operators via post-quantum calculus*. Symmetry, 11(2), 232.

Nasiruzzaman, M., Mukheimer, A., Mursaleen, M. 2019. *Approximation results on Dunkl generalization of Phillips operators via q-calculus*. Advances in Difference Equations, 2019(1), 1-14.

Nasiruzzaman, M., Aljohani, A. F. 2020. *Approximation by parametric extension of Szász-Mirakjan-Kantorovich operators involving the Appell polynomials*. Journal of Function Spaces, 2020, Article ID 8863664, 11 pages.

Nasiruzzaman, M., Aljohani, A. F. 2020. *Approximation by Szász-Jakimovski-Leviatan-type operators via aid of Appell polynomials*. Journal of function spaces, 2020, Article ID 9657489, 11 pages.

Nasiruzzaman, M. 2021. *Approximation properties by Szász-Mirakjan operators to bivariate functions via Dunkl analogue*. Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science, 45(1), 259-269.

Neer, T., Agrawal, P. N. 2017. *Quantitative-Voronovskaya and Grüss-Voronovskaya type theorems for Szász-Durrmeyer type operators blended with multiple Appell polynomials*. Journal of inequalities and applications, 2017(1), 1-20.

Nowak, G., Sikorska-Nowak, A. 2009. *Some approximation properties of modified Szasz-Mirakyan-Kantorovich operators*. Revue d'Analyse Numerique et de Theorie de l'Approximation, 38(1), 73-82.

Oldham, K., Myland J., Spanier, J. 2008. *An atlas of functions*. Springer-Verlag, 748, New York.

Ostrovska, S. 2006. *On the Lupaş q-analogue of the Bernstein operator*. The Rocky Mountain Journal of Mathematics, 36(5), 1615-1629.

Phillips, G.M. 1997. *Bernstein polynomials based on the q-integers*. Annals of Numerical Mathematics, 4, 511–518.

Rao, N., Wafi, A., Acu, A. M. 2019. *q-Szász-Durrmeyer type operators based on Dunkl analogue*. Complex Analysis and Operator Theory, 13(3), 915-934.

Rosenblum, M 1994. *Generalized Hermite polynomials and the Bose-like oscillator calculus*, Operator Theory Advances and Applications, 73, 369–396.

Szász, O. 1950. *Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval*. Journal of Research of the National Bureau of Standards, 45, 239-245.

Sidharth, M., Acu, A. M., Agrawal, P. N. 2017. *Chlodowsky-Szasz-Appell-type operators for functions of two variables*. Annals of Functional Analysis, 8(4), 446-459.

Srivastava, H.M., Mursaleen, M., Alotaibi, A.M., Nasiruzzaman, M., Al-Abied, A.A.H. 2017. *Some approximation results involving the q-Szász-Mirakjan-Kantorovich type operators via Dunkl's generalization*. Mathematical methods in the applied sciences, 40(15), 5437-5452.

Soydan, Y. 2012. *Metrik uzaylar ve topolojisi*. Nobel Yayınları, 532,Ankara.

Soydan, Y. 2012. *Fonksiyonel analiz*. Nobel Yayınları, 531, Ankara.

Sucu, S., Içöz, G., Varma, S. 2012. *On some extensions of Szász operators including Boas-Buck type polynomials*. Abstract and Applied Analysis, Article ID 680340, 15 pages.

Sucu, S. 2014. *Dunkl analogue of Szász operators*. Applied Mathematics and Computation, 244, 42-48.

Sucu, S., Varma, S. 2015. *Generalization of Jakimovski- Leviatan type Szász operators*. Applied Mathematics and Computation, 270, 977-983.

Sucu, S. 2020. *Approximation by sequence of operators including Dunkl-Appell polynomials*. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 43(3), 2455-2464.

Taşdelen, F., Aktaş, R., Altın, A. 2012. *A Kantorovich type of Szász operators including Brenke-type polynomials*. In Abstract and Applied Analysis, 2012, Article ID 867203, 13 pages.

Taşdelen, F., Söylemez, D., Aktaş, R. 2019. *Dunkl-Gamma type operators including Appell polynomials*. Complex Analysis and Operator Theory, 13(7), 3359-3371.

Varma, S. and Taşdelen, F. 2012. *Szász type operators involving Charlier polynomials*. Mathematical and Computer Modelling, 56(5–6), 118-122.

Varma, S., Sucu, S., İçöz, G. 2012. *Generalization of Szász operators involving Brenke type polynomials*. Computers & Mathematics with Applications, 64(2), 121-127.

Varma, S. 2013. *On a generalization of Szász operators by multiple Appell polynomials*. Studia Universitatis Babes-Bolyai, Mathematica, 58(3).

Volkov, V.I. 1957. *On the convergence of sequences of linear positive operators in the space of continuous functions of two variables*. (Russian) Doklady Akademii Nauk SSSR, 115, 17-19.

Yazıcı, S., Çekim, B. 2017. *A Kantorovich type generalization of the Szász operators via two variable Hermite polynomials*. Gazi University Journal of Science, 30(4), 432-440.

Yazıcı, S. 2019. *İki değişkenli Hermite polinomlarını içeren Szász operatörlerinin genellemeleri ve yaklaşım özellikleri*. Yüksek lisans tezi. Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, 113, Ankara.

Yazıcı, S., Taşdelen Yeşildal, F., Çekim, B. 2022. *On a generalization of Szász-Mirakyan operators including Dunkl-Appell polynomials.* Turkish Journal of Mathematics, 46(6), 2353-2365.

Wafi, A., Rao, N. 2018. *Szász-Durrmeyer operators based on Dunkl analogue.* Complex Analysis and Operator Theory, 12(7), 1519-1536.

Wafi, A., Rao, N. 2019. *Szász-gamma operators based on Dunkl analogue.* Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science, 43(1), 213-223.

Walczak, Z. 2000. *On certain modified Szász-Mirakyan operators for functions of two variables.* Demonstratio Mathematica, 33(1), 91-100.

Walczak, Z. 2002. *On approximation by modified Szász-Mirakyan operators.* Glasnik matematički, 37(2), 303-319.

Weierstrass, K. 1885. *Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen.* Sitzungsbericte de Akademie zu Berlin, 633-639, 789-805.