

**ÖZEL TİP İKİNCİ DERECE DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN  
POLİNOM ÇÖZÜMLERİ**

**Ebubekir DOĞU**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
FİZİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**EYLÜL 2011  
ANKARA**

Ebubekir DOĞU tarafından hazırlanan “ÖZEL TİP İKİNCİ DERECE DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN POLİNOM ÇÖZÜMLERİ” adlı bu tezin Yüksek Lisans olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Hakan ÇİFTÇİ .....  
Tez Danışmanı, FİZİK Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile FİZİK Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Süleyman ÖZÇELİK .....  
Fizik Anabilim Dalı , Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Hakan ÇİFTÇİ .....  
Fizik Anabilim Dalı , Gazi Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Engin ATEŞER .....  
Fizik Anabilim Dalı , Aksaray Üniversitesi

Tarih: 25/10/2011

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU .....  
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Ebubekir DOĞU

**ÖZEL TİP İKİNCİ DERECE DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN  
POLİNOM ÇÖZÜMLERİ  
(Yüksek Lisans Tezi)**

**Ebubekir DOĞU**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**Eylül 2011**

**ÖZET**

**Asimptotik iterasyon metodu kullanılarak ikinci derece diferansiyel denklemler için özel tip polinom çözümleri elde edilmiştir.**

**Bilim Kodu : 202.1.149**  
**Anahtar Kelimeler : Özdeğer problemi, asimptotik iterasyon metodu**  
**Sayfa Adedi : 59**  
**Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Hakan ÇİFTÇİ**

**SPECIAL TYPE SECOND DEGREE OF DIFFERENTIAL EQUATION  
POLYNOMIAL SOLUTIONS**

**(M.Sc. Thesis)**

**Ebubekir DOĞU**

**GAZİ UNIVERSITY  
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY  
September 2011**

**ABSTRACT**

**The asymptotic iteration method has been used for polynomial solutions of the second order linear differentiation equations.**

|                     |                                                           |
|---------------------|-----------------------------------------------------------|
| <b>Science Code</b> | <b>: 202.1.149</b>                                        |
| <b>Key Words</b>    | <b>: Eigenvalue question, asymptotic iteration method</b> |
| <b>Page Number</b>  | <b>: 59</b>                                               |
| <b>Adviser</b>      | <b>: Assoc. Prof. Dr. Hakan ÇİFTÇİ</b>                    |

## TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın hazırlanmasındaki her safhada yardım ve katkılarını eksik etmeyen, verdiği bilgiler doğrultusunda her konuda bilgi beceri ve tecrübesiyle beni yönlendiren değerli tez hocam Doç. Dr. Hakan ÇİFTÇİ' ye çok teşekkür ederim.

Hayatım boyunca maddi ve manevi desteğini eksik etmeyen Canım Annem ve ablalarım Özlem DOĞU ve Dilek DOĞU' ya en içten teşekkürlerimi sunarım.

## İÇİNDEKİLER

|                                                                                        | Sayfa |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| ÖZET .....                                                                             | iv    |
| ABSTRACT .....                                                                         | v     |
| TEŞEKKÜR.....                                                                          | vi    |
| İÇİNDEKİLER.....                                                                       | vii   |
| ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....                                                              | ix    |
| ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....                                                                | x     |
| SİMGELER VE KISALTMALAR.....                                                           | xi    |
| 1. GİRİŞ.....                                                                          | 1     |
| 2. YAKLAŞIM YÖNTEMLERİ.....                                                            | 5     |
| 2.1. Heun Metodu.....                                                                  | 5     |
| 2.2. WKB(Wentzel,Kramers.Brillouin) Metodu.....                                        | 8     |
| 2.3. Hill Determinant Metodu.....                                                      | 11    |
| 2.4. Riccati - Pade Metodu.....                                                        | 12    |
| 2.5. Kaydırılmış $1/N$ Açılım Metodu.....                                              | 15    |
| 3. ASİMPTOTİK İTERASYON METODU.....                                                    | 24    |
| 3.1. Asimptotik İterasyon Metodu ile Lineer Denklem Sistemi.....                       | 28    |
| 3.2.Pertürbasyon Teorisi İçin Asimptotik İterasyon Metodu.....                         | 31    |
| 3.2.1. Asimptotik iterasyon metodunun<br>pertürbasyon teorisine uygulanması.....       | 31    |
| 3.2.2. Dalga fonksiyonlarının hesabı.....                                              | 33    |
| 4. İKİNCİ MERTEBEDEN, LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN<br>POLİNOM TİPLİ ÇÖZÜMLERİ..... | 35    |
| 4.1. $a_2 = 0$ Durumu.....                                                             | 36    |

|                               | <b>Sayfa</b> |
|-------------------------------|--------------|
| 4.2. $a_2 \neq 0$ Durumu..... | 51           |
| 5. SONUÇ VE TARTIŞMALAR.....  | 53           |
| KAYNAKLAR.....                | 56           |
| ÖZGEÇMİŞ.....                 | 59           |



## ÇİZELGELERİN LİSTESİ

| <b>Çizelge</b>                                                            | <b>Sayfa</b> |
|---------------------------------------------------------------------------|--------------|
| Çizelge 4.1. $a_2 = 0$ ve $m = 2$ için hesaplanan $y(x)$ polinomları..... | 37           |
| Çizelge 4.2. $a_2 = 0$ ve $m = 3$ için hesaplanan $y(x)$ polinomları..... | 38           |
| Çizelge 4.3. $a_2 \neq 0$ ve $m = 2$ için hesaplanan $w$ polinomları..... | 50           |
| Çizelge 4.4. $a_2 \neq 0$ ve $m = 3$ için hesaplanan $w$ polinomları..... | 50           |

## ŞEKİLLERİN LİSTESİ

| Şekil                                        | Sayfa |
|----------------------------------------------|-------|
| Şekil 2.1. WKB Metodu Potansiyel Kuyusu..... | 9     |

## SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda verilmiştir.

| Simgeler     | Açıklama                                                                     |
|--------------|------------------------------------------------------------------------------|
| $E$          | Enerji                                                                       |
| $H$          | Hamiltoniyen                                                                 |
| $\hbar$      | İndirgenmiş Planck Sabiti,<br>$6,6260693 \times 10^{-34} / 2\pi \text{ J.s}$ |
| $\lambda$    | Pertürbasyon Açılım Parametresi                                              |
| $\psi$       | Dalga fonksiyonu                                                             |
| $V$          | Potansiyel                                                                   |
| $n$          | Baş kuantum sayısı                                                           |
| $h$          | Planck sabiti                                                                |
| $V_{eff}(r)$ | Etkin potansiyel                                                             |
| $E_n$        | Enerji özdeğerleri                                                           |
| $N$          | Boyut sayısı                                                                 |
| Kısaltmalar  | Açıklama                                                                     |
| AIM          | Asimptotik İterasyon Metodu                                                  |
| WKB          | Wentzel Kramers ve Brillouin                                                 |

## 1. GİRİŞ

Kuantum fiziği, çağdaş bilimin en önemli buluşlarından biri (belki de en önemlisi) olarak kabul edilir. Newton fiziğinin aksine, kuantum düşüncesi, bir değil, bir çok bilim adamının ortak katkısıyla şekillenmiştir ve hala da gelişimini sürdürmektedir. Büyük fizikçi Einstein, genel ve özel görelilik kuramlarını ortaya attığında, bu günkü kuantum fiziğinin de temellerini attığını muhtemelen bilinmiyordu. O, çağdaşları ve ardından gelen bir çok önemli bilimci, çok önemli katkılarla, kuantum fiziğini bu gün bilinen aksiyonlarına ulaştırdılar. Kurucuların önemlilerinden bazıları; Einstein, Dirac, Schrödinger, Pauli ve Heisenberg'dir. Bu bilimcilerin bir kısmı (özellikle Schrödinger ve Einstein) kuantum fiziğinin sonuçlarını kabullenemediler. Kuantum kuramında, her mikroskobik parçacık, bir dalga denklemi (Schrödinger dalga denklemi) ile tanımlanır.

Schrödinger denklemi bir kuantum sistemi hakkında bilgi veren diferansiyel denklemdir. Bu denklem kısaca, parçacığın bulunabileceği tüm olasılıkların bir kümesini içerir ve parçacığın o an ve haldeki "kuantum durumunu" verir. Normalde, makroskobik sistemleri oluşturan tüm bileşenler (parçacıklar) kendilerine has ve sürekli değişen farklı dalga işlevlerine sahiptirler. Tek tek parçacıklar düzeyinde, bu dalga işlevinden dolayı kuantum etkileri geçerliiyken, makroskobik düzeyde, sistemleri oluşturan parçacıkların dalga işlevleri, "istatistiksel" olarak klasik mekaniğe uyumlu sonuçlar verirler.

Schrödinger denklemin çözümündeki amaç incelenen sistemin dalga fonksiyonlarını ve enerji özdeğerlerini bulmak ve hesaplamaktır. Kuantum mekaniği için problemlerin çözümlenmesinde kullanılan yöntemlerde yapılan temel işlem, bunların özdeğer eşitliklerine uygun matematiksel kalıpları bulup gerekli dönüşümleri yaparak çözüme varmak şeklindedir [1]. Fiziksel koşulların tam olarak belirlenebildiği problemlerde kullanılabilen bu yapı özel bir diferansiyel denklemden hareket edilerek özel bir Schrödinger denklemini vermektedir [1-3].

Diferansiyel denklemlerin genel çözümlerinde bazı bilinmeyen katsayılar ortaya çıkar. Bu bilinmeyen katsayıları bulmak için diferansiyel denklemle birlikte bazı özel şartlar verilerek diferansiyel denklemin belirli şartları sağlayan çözümlerinin bulunması sağlanır. Verilen şartlar yalnız bir noktaya ait özel şartlar ise başlangıç şartları, iki veya daha fazla noktayı kapsayan şartlar ise sınır şartları olarak adlandırılırlar [4]. Bazen diferansiyel denklemlerin genel çözümlerinde ortaya çıkan integrasyon sabitlerini belirlemek için diferansiyel denklemle birlikte verilen başlangıç şartlarını kullanırız ve başlangıç şartlarına uyan bir çözüm elde ederiz.

Matematiksel fizik problemleri çoğu zaman katsayıları değişkenlerine bağlı olan Adi Diferensiyel Denklemler veya Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemler yardımıyla ifade edilmektedir. Bu tipteki denklemlerin özelliği araştırma yapılan bölgede veya bölgenin sınır çizgisinin üzerinde katsayıların tekil olmasıdır. Yani bölgenin bazı noktalarında katsayıların sıfır olması veya belirsizlik halinde bulunmasıdır. Böyle tipteki denklemlere dönüşen fiziksel problemlerin analitik çözümlerini bulmak çok zor olduğu gibi bazı durumlarda çözüme ulaşmakta mümkün değildir. Problemin zorluğu, denklemin çözümünün sonsuz seri şeklinde aranmasından kaynaklanmaktadır. Böyle durumlarda ise karşımıza yeni bir problem çıkmaktadır [5].

Bu da denklemin tüm özel durumları için sonsuz serinin yakınsaklığının ispatlanması ve özdeğer fonksiyonlarının ortogonalliğinin gösterilmesidir. Ayrıca matematiksel fizik probleminin çözümünün kararlılığını ispatlamak ve korumakta gerekir. Bu cins fiziksel problemlere uyan denklemler Bessel, Legendre, Hermit ve Schrödinger denklemleridir. Bu tipteki denklemlere fiziksel problemlerin çözümlerinde sıkça rastlanmaktadır. Örneğin bu uygulama klasik mekanik problemlerinde başlamış, elektromanyetik teori, kuantum mekaniği, kuantum fiziğinde kullanılmıştır.

Bu zorlukları aşmak için bilimde birçok önemli özel fonksiyonlar sınıfı oluşturulmuştur.

Bunlardan en çok kullanılan silindirik fonksiyonlar (Bessel, Hankel, Neuman fonksiyonları) , küresel fonksiyonlar (Legendre polinomları) ve özel polinomların (Hermit polinomları) oluşturduğu sınıflardır [6-8].

Bu tür denklemlerin yardımıyla ve özel fonksiyonların kullanılması ile çeşitli fiziksel olaylarda yaklaşık çözümler bulmakta ve problemlere açıklık getirebilmektedir.

Bizim çalıştığımız fiziksel problem ikinci dereceden homojen lineer diferansiyel denklem matematiksel fizikteki pek çok alanda karşılaşılmaktadır. Bu tip diferansiyel denklemleri çözmek için pek çok farklı yöntem vardır. Bu yöntemlerden bazıları 2. bölümde anlatılmıştır. 3. bölümde ise denklem çözümünde kullanılan AIM anlatılmaktadır. 4. bölümde ise bulunan polinomlar çizelgeler halinde gösterilerek problem çözümüne gidilecektir çözüm esnasında  $a_2 = 0$  ,  $a_2 \neq 0$  durumları için ayrı ayrı inceleme yapılmıştır.

AIM aşağıdaki formda verilen ikinci dereceden homojen lineer diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan bir metottur.

$$y'' = \lambda_0 y' + s_0 y \quad (1.1)$$

Burada  $y''$  ,  $y'$  ve  $y$  nin katsayıları sırasıyla ikinci, birinci ve sıfıncı dereceden türevler olup  $y''$  nin katsayısı daima farklı reel köklere sahiptir. Farklı iki reel köke sahip olan diferansiyel denklem içinde sadece üç tane düzgün aykırı noktaya sahip olan denklemler belirli değişken değiştirmelerden sonra Gauss hipergeometrik denkleminin bulunduğu görülmüştür:

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0 \quad (1.2)$$

Gauss hipergeometrik denklem olarak bilinen denklemde  $\alpha, \beta, \gamma$  lar parametrelerdir. Denklemi 0,1 ve  $\infty$  olmak üzere üç tane düzgün aykırı noktaya sahiptir.

Çalışmadaki tüm nümerik hesaplamalarda bilgisayar programı kullanılmıştır.

## 2. YAKLAŞIM YÖNTEMLERİ

Bu kısımda schrödinger denkleminin çözümünde kullanılan metotlar hakkında bilgi verildi. Bu metotlar karşımıza çıkan diferansiyel denklemlerin çözümlerini incelemek açısından önemlidir. Bu sistemlerin enerji özdeğerleri ve özfonksiyonları Schrödinger dalga denkleminin çözümüyle belirlenir. Bu metotlardan en önemlileri;

- Heun metodu
- WKB (Wentzel, Kramers, Brillouin) Metodu
- Hill Determinant Metodu
- Riccati-Pade Metodu
- Kaydırılmış 1/N Açılım Metodu

şeklindedir.

### 2.1. Heun Metodu

Başlangıç değer problemi için tek adım metodu

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h) \quad (2.1)$$

olarak tanımlanır.

Burada  $\Phi(x_n, y_n, h)$  fonksiyonu yaklaşımı belirleyen fonksiyondur ve bu fonksiyonun farklı seçimleri ile farklı yaklaşımlar elde edilir.

Euler metodu için  $\Phi(x_n, y_n, h) = f(x_n, y_n)$  olduğunu biliyoruz.  $x_n$  noktasındaki gerçek değer de  $y(x_n) = y_n$  olursa [9-10]. Euler metodu adım uzunluğu  $h$  alınarak uygulandığında:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (2.2)$$

olur.



Burada  $y(x_n) = y_n$  olduğundan:

$$y_{n+1} = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) \quad (2.3)$$

Ayrıca  $y'(x) = f(x, y(x))$  olduğundan son denklem:

$$y_{n+1} = y(x_n) + hy'(x_n) \quad (2.4)$$

olur.

Burada  $y(x)$  gerçek çözümün  $x_n$  noktasında Taylor seri açılımı yapılırsa:

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y^{(3)}(x_n) + \dots \quad (2.5)$$

denklemini elde edilir.

$\Phi(x_n, y_n, h)$  fonksiyonu olarak Eş. 2.5'deki Taylor açılımın ilk üç terimini almak yeterli olacaktır.

Yani  $\Phi(x_n, y_n, h)$  fonksiyonu:

$$\Phi(x_n, y_n, h) = y'(x) + \frac{h}{2}y''(x) \quad (2.6)$$

şeklinde seçilirse ve buradan:

$$y'(x) = f(x, y)$$

$$y''(x) = f_x(x, y) + f_y(x, y)y'(x) = f_x(x, y) + f_y(x, y)f(x, y) \quad (2.7)$$

Kısmi türevleri Eş. 2.6'de yerlerine yazdığımızda:

$$\Phi(x, y, h) = f(x, y) + \frac{h}{2}(f_x(x, y) + f_y(x, y)f) \quad (2.8)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x, y, h) = y_n + h\left(f(x, y) + \frac{h}{2}(f_x(x, y) + f_y(x, y)f)\right) \quad (2.9)$$

şeklinde bir sonuç elde edilir.

Bu seçimle oluşturulmuş bir metodun Taylor açılımı, gerçek çözümün Taylor açılımı ile üç terimde uyuşmaktadır. Bu yolla daha da yüksek mertebeden yaklaşımlar elde edileceği açıktır. Ancak bu tür yaklaşımlar her  $y_n \rightarrow y_{n+1}$  adımında sadece  $f$  değil, aynı zamanda  $f_x, f_y, \dots$  gibi kısmi türevlerde gerek olacaktır.

Yüksek mertebeden yaklaşımlarda nasıl yapıldığına bakarsak:

$$\Phi(x, y, h) = b_1 f(x, y) + b_2 f(x + c_2 h, y + a_{21} h f(x, y)) \quad (2.10)$$

Burada  $b_1, b_2, c_2, a_{21}$  değerleri sabittir Eş. 2.10'deki  $\Phi(x, y, h)$  fonksiyonu ile oluşturulan yaklaşım  $x_n$  noktasında Taylor açılımı yapılırsa:

$$y_{n+1} = y(x_n) + (b_1 + b_2)hf(x_n, y_n) + b_2 \frac{h^2}{2!} [c_2 f_x(x_n, y_n) + a_{21} f_y(x_n, y_n)f(x_n, y_n)] \quad (2.11)$$

denklemini elde ederiz.

Bu denklem Eş. 2.5'deki gerçek çözümün Taylor açılımı ile karşılaştırılırsa, ilk üç terimin uyuşması için, yani metodun 2'inci mertebeden olması için belirteceğimiz şartları sağlaması gerekmektedir.

$$b_1 + b_2 = 1$$

$$b_2 + c_2 = 12$$

$$b_2 + a_{21} = 12$$

Bu denklem sistemi 4 bilinmeyenli, 3 denkleme sahiptir. Dolayısıyla bir bilinmeyen keyfidir. Bu denklem sisteminin bir çözümü

$$b_1 = \frac{1}{2} \quad b_2 = \frac{1}{2} \quad c_2 = 1 \quad a_{21} = 1$$

şeklindedir. Burada Eş. 2.10'deki ifade yukarıdaki değerlerle:

$$\Phi(x, y, h) = \frac{1}{2} [f(x, y) + f(x + hf(x, y))] \quad (2.12)$$

sonucunu verir.

Bu metot 2'inci mertebededir. Yani ilk üç terimde uyuşma vardır. Bu metoda Heun metodu denilmektedir [11-12].

## 2.2. WKB (Wentzel, Kramers, Brillouin) Metodu

Kuantum mekaniğinde bazı problemler için kesin analitik çözüm bulunamadığı için gerekli şartlar sağlandığında, olay klasik mekanik sınırlarına indirilerek yaklaşık çözümlere gideriz.

WKB metodu, kuantum mekaniği problemlerini çözmek için klasik ifadelere düzeltmeler getiren enerji değerlerini hesaplamak için yarı klasik bir yaklaşımdır.

WKB metodunun uygulanabilirlik şartı;

$$\left| \frac{m\hbar}{p^3} \frac{dV(x)}{dx} \right| \ll 1 \text{ yada } \frac{1}{2} \left| \lambda(x) \frac{dV(x)}{dx} \right| \ll \frac{|P(x)|^2}{2m} \quad (2.13)$$

şeklinde ifade ederiz. Bu eşitlikten WKB yaklaşımı için; parçacığın yavaş değişen bir potansiyele ya da büyük bir momentuma sahip olması gerekir [13].

Bundan dolayı  $\Psi(x)$ 'in formu serbest parçacık çözümüne benzer.

Yani dalga fonksiyonu:

$$\psi(x) = A e^{\frac{i}{\hbar} S(x)} \quad (2.14)$$

şeklinde alırsak.

Zamandan bağımsız Schrödinger denkleminde dalga fonksiyonu yerine yazılırsa

$$-i\hbar S''(x) + S'(x)^2 = P^2(x) \quad (2.15)$$

ifadesi elde edilir.  $S(x)$  fonksiyonu

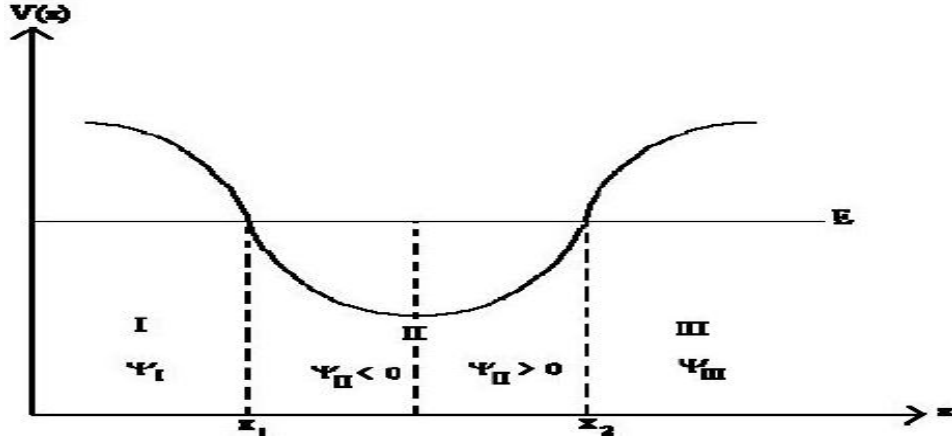
$$S(x) = S_0(x) + \hbar S_1(x) + \frac{\hbar^2}{2} S_2(x) + \dots \quad (2.16)$$

Eş. 2.16'de verildiği gibi  $\hbar$ 'ın kuvvetleri cinsinden seriye açıldığında dalga fonksiyonu:

$$\psi(x) \cong \frac{A}{k^{1/2}} e^{i \int k(x) dx} + \frac{B}{k^{1/2}} e^{-i \int k(x) dx} \quad (2.17)$$

formuna dönüşür.

Burada  $k(x) = \sqrt{\frac{2m[E-V(x)]}{\hbar^2}}$  olarak verilir.



Şekil 2.1. Potansiyel Kuyusu

Şekil 2.1’de gösterilen bir boyutlu sonsuz potansiyel kuyusu içinde  $m$  kütleli bir parçacığın hareketini ele alalım. Parçacığın enerjisi  $E$  ve klasik dönüm noktaları  $x_1$  ve  $x_2$  olsun. II. bölgede  $V(x) < E$ ’dir ve parçacık  $x_1 - x_2$  aralığında salınım hareketi yapar. Fakat I. ve III. bölgelerde  $V(x) > E$  olduğu için parçacığın kinetik enerjisi negatif olur. Bu olay klasik fiziğe ters düşer ve bu bölgelerde parçacık yasaktır. Bu yüzden, olaya kuantum mekaniksel olarak yaklaşılır. Yine de parçacığın I. ve III. bölgelerde bulunma olasılığı II. bölgede bulunma olasılığından çok daha düşüktür.

Bu yüzden WKB yaklaşımı yarı klasik bir yöntemdir.

Keyfi  $n$  değerleri için:

$$\int_{x_1}^{x_2} P(x) dx = \pi \hbar \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (2.18)$$

koşulu WKB metodunun enerji değerlerini hesaplamak için kullanılan kuantumlanma koşuludur [13-14].

### 2.3. Hill Determinant Metodu

Hill determinant metodu, verilen bir potansiyel için dalga fonksiyonunu önceden belirleme temeline dayanır. Dalga fonksiyonunu genel olarak  $\Phi(r) = \emptyset(r)\exp[f(r)]$  şeklinde seçilir.

Burada  $\emptyset(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n$  şeklinde bir seri olarak ele alınır [15-16].  $f(r)$  fonksiyonu verilen bir potansiyel için belirlenerek  $\emptyset(r)$  dalga fonksiyonu, radyal Schrödinger denkleminde kullanılır.

Böylece  $A_n$  katsayılarına bağlı:

$$\dots + b_n A_{n+1} + a_n A_n + c_n A_{n-1} + d_n A_{n-2} + \dots = 0, n \geq 0 \quad (2.19)$$

şeklinde bir tekrarlama bağıntısı elde edilir.

Buradaki,  $a_n, b_n, c_n, d_n, \dots$  değerleri  $f(r)$  fonksiyonunun ve ele alınan potansiyelin katsayıları ile enerji değerine bağlıdır.

Tekrarlama bağıntısının katsayılarından:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ c_1 & a_1 & b_1 & 0 & \dots & \dots \\ d_2 & c_2 & a_2 & b_2 & \dots & \dots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & & & 0 & d_{N-1} & c_{N-1} & a_{N-1} \end{vmatrix}$$

determinantı (Hill determinantı) yazılabilir.

Hill determinantının  $\det D_n = 0$  özdeğer şartı kullanılarak, sistemin özdeğerleri elde edilir [15-17].

## 2.4. Riccati - Pade Metodu

Pade metodu, rölativistik olmayan Schrödinger denkleminde enerji özdeğerlerini yaklaşık olarak hesaplamak için geliştirilmiştir. Bu metot, Riccati denkleminin çözümü olan dalga fonksiyonunun logaritmik türevi için bir rasyonel fonksiyon yaklaştırması temeline dayanır [18-20]. Bir boyutta parite-invaryant potansiyeller ( $V(x) = V(-x)$ ) için zamandan bağımsız Schrödinger denklemi:

$$\psi(x)'' = [V(x) - E]\psi(x), \quad (2.20)$$

olarak alınır.

Dalga fonksiyonu  $\Phi(x) = x^{-s}\psi(x)$  şeklinde tanımlanabilir. Burada,  $s=0$  ve  $s=1$ , çift ve tek durumlara karşılık gelir.

$\Phi(x) \neq 0$  için dalga fonksiyonunun logaritmik türevi:

$$f(x) \equiv \frac{[-\Phi(x)]}{\Phi(x)} \quad (2.21)$$

şeklinde elde edilir ve Eş. 2.20' in bütün öz durumlarında geçerlidir.

Eş. 2.20 ve Eş. 2.21 kullanılarak:

$$f''(x) - [f(x)]^2 + \frac{2s}{x}f(x) = e - V(x) \quad (2.22)$$

Riccati denklemi elde edilir ve Eş. 2.21' deki logaritmik türev  $x = 0$ 'da Taylor serisine açılarak elde edilen ifade:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j x^{2j+1} \quad (2.23)$$

Eğer  $V(x)$  potansiyeli:

$$V(x) = \sum_{j=1}^K v_j x^{2j}, v_K > 0 \quad (2.24)$$

şeklinde ise ve Eş. 2.23 ile Eş.2.24 ifadeleri Eş. 2.22' de kullanılırsa  $f_j$  katsayıları:

$$f_j = (2j + 2s + 1)^{-1} \left[ \sum_{i=0}^{j-1} f_j f_{j-i-1} + E \delta_{j0} - \sum_{i=1}^K v_j \delta_{ij} \right] \quad (2.25)$$

elde edilir [21].

$f(x)$  logaritmik türevine Eş. 2.24' deki rasyonel fonksiyonu:

$$g(x) = \frac{A(x)}{B(x)} \quad (2.26)$$

yaklaşdırılabilir.

Burada:

$$A(x) = \sum_{j=0}^M a_j x^{2j+1}, B(x) = \sum_{j=0}^N b_j x^{2j}, b_0 = 1 \quad (2.27)$$

şeklinde ifade edilir.

$W$  sistemin yaklaşık enerji özdeğeri olmak üzere:

$$g(x) = \sum_{j=0}^{M+N+1} f_j(W) x^{2j+1} + O(x^{2(M+N+5)}) \quad (2.28)$$

olur.



Ayrıca,

$$\sum_{i=0}^j b_j f_{j-1} = a_j, j = 0, 1, 2, \dots, M \quad (2.29.a)$$

$$\sum b_j f_{j-1} = 0, j = 0, 1, 2, \dots, M + N + 1 \quad (2.29.b)$$

şeklinde verilir.

Burada eğer  $i > N$  ise  $b_i = 0$  'dır.

Elde edilen bu denklem sisteminden:

$$H_D^d = \begin{vmatrix} f_{d+1} & f_{d+2} & f_{d+3} \cdots & f_{d+D} \\ f_{d+2} & f_{d+3} & f_{d+4} \cdots & f_{d+D+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{d+D} & f_{d+D+1} & f_{d+D+2} \cdots & f_{d+2D-1} \end{vmatrix} \quad (2.30)$$

determinantı bulunur.

Burada  $d = M - N \geq 0$  ve  $D = N + 1$  'dir.  $H_D^d$  determinantının köklerinden enerji değerleri elde edilebilir. Bu metot, merkezi kuvvet problemlerine de uygulanabilir.

Bu durumda dalga fonksiyonu  $\Phi(r) = r^{-l}\psi(r)$  alınır ve  $f(r) \equiv \frac{(\Phi(r))'}{\Phi(r)}$  değeri üç boyutta radyal Schrödinger denkleminde kullanılırsa:

$$f'(r) = f^2(r) - \frac{2(l+1)}{r} f(r) + E - V(r) \quad (2.31)$$

Riccati denklemi elde edilir [20].

Burada  $V(r) = \sum_{j=1}^{\infty} v_j r^j$  ve  $f(r) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j r^j$  dir.

$f_0 = -\frac{V_{-1}}{(l+1)}$  olmak üzere  $f_j$  değerleri:

$$f_{j+1} = (2l + j + 3)^{-1} [\sum_{i=0}^j f_i f_{j-i} + E \delta_{j0} - V_j], j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.32)$$

ifadesinden bulunabilir. Bu durumda da yaklaşık enerji değerleri, Eş. 2.30 ile verilen  $H_D^d$  determinantının kökleri ile belirlenebilir.

## 2.5. Kaydırılmış 1/N Açılım Metodu

Keyfi bir küresel simetrik  $V(r)$  potansiyeli için kaydırılmış  $1/N$  açılım yöntemini açıklayacağız [22-23].  $N$  boyutlu uzayda radyal Schrödinger denklemi:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{(k-1)(k-3)}{8mr^2} \hbar^2 + V(r) \right] \psi(r) = E \psi(r) \quad (2.33)$$

olsun.

Burada:

$$k = N + 2l \quad (2.34)$$

şeklinde gösterilir. Kaydırılmış değişkenler cinsinden:

$$\bar{k} = k - a \Rightarrow k = \bar{k} + a \quad (2.45)$$

olur.

Buna göre:

$$\begin{aligned}(k-1)(k-3) &= (\bar{k}+a-1)(\bar{k}+a-3) \\ &= \bar{k}^2 \left(1 - \frac{(1-a)}{\bar{k}}\right) \left(1 - \frac{(3-a)}{\bar{k}}\right)\end{aligned}\quad (2.36)$$

bulunur.

$V(r)$  potansiyelinin büyük  $\bar{k}$  limiti uygun bir biçimde tanımlanmadıkça  $\frac{1}{\bar{k}}$  serisinden yararlı sonuçlar bulunamayacaktır. Açısal momentum engel terimi, büyük  $\bar{k}$ 'larda  $\bar{k}^2$  şeklinde olacağından, potansiyel de bu şekilde olacaktır.

Bu sıfırcı basamak klasik sonucunda,  $\bar{k}$ 'nın büyük değerlerinde  $\bar{k}$  ile değişmeyen etkin bir potansiyel verir.

Buradan denklem:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(r)}{dr^2} + \bar{k}^2 \left[ \frac{\hbar^2 \left[1 - \frac{(1-a)}{\bar{k}}\right] \left[1 - \frac{(3-a)}{\bar{k}}\right]}{8mr^2} + \frac{V(r)}{Q} \right] \psi(r) = E\psi(r) \quad (2.37)$$

ile verilir.

Burada  $Q$  ayarlanabilir bir potansiyel sabitidir. Şimdi Eş. 2.37'i  $\frac{1}{\bar{k}}$  açılım parametreleri cinsinden sistematik olarak çözersek.  $E$  enerjisine etkin potansiyelden gelen katkı,

$$V_{eff}(r) = -\frac{\hbar^2}{8mr^2} + \frac{V(r)}{Q} \quad (2.38)$$

ile ifade edilir.  $V_{eff}(r)$  bir minimuma sahip olduğundan  $V(r)$  değeri iyi şekilde belirlenir. Buna bağlı olarak bağlı durumlar da belirlenir. Burada  $r_0$  minimuma yerleşmiş olsun.

Bu durumdan,

$$\frac{dV_{eff}(r)}{dr} = -\frac{\hbar^2}{4m} \frac{1}{r^3} + \frac{dV(r)}{dr} \frac{1}{Q} = 0 \quad (2.39)$$

olur.

Böylece  $r = r_0$  'da,

$$\frac{\hbar^2}{4mr_0^3} = \frac{dV(r)}{dr} \frac{1}{Q} = \frac{V'(r_0)}{Q} \quad (2.40)$$

şeklinde yazılır.

Önce  $r_0$  minimum değeri belirlenir, sonra Eş. 2.40 Q'yu verir [26]. Eş.2.39'nin her iki tarafı  $\bar{k}^2$  ile çarpılıp , $r = r_0$  'da düzenlendiğinde:

$$\bar{k}^2 V_{eff} = \bar{k}^2 \frac{\hbar^2}{8mr_0^2} + \bar{k}^2 \frac{V(r_0)}{Q} = \bar{k}^2 \frac{1}{r_0^2} \left[ \frac{\hbar^2}{8m} + \frac{r_0^2 V(r_0)}{Q} \right] \quad (2.41)$$

ile verilir.

burada  $r = r_0$  'da koordinat ekseninden kayma,

$$x = \frac{\bar{k}^{\frac{1}{2}}}{r_0} (r - r_0) \quad (2.42)$$

ile tanımlanır.

Eş.2.42’da  $r_0$  yalnız bırakılırsa,

$$r_0 = \frac{r}{\left(1 + \frac{x}{\frac{1}{k^2}}\right)} \quad (2.43)$$

elde edilir.

Yine Eş.2.43’den faydalanarak  $r$  değeri elde edilir.

$$r = r_0 \left(1 + \frac{x}{\frac{1}{k^2}}\right) \quad (2.44)$$

Eş.2.37’de yerine konulduğunda,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(r)}{dr^2} + \bar{k}^2 \left\{ \frac{\left[1 - \frac{(1-a)}{k}\right] \left[1 - \frac{(3-a)}{k}\right] \hbar^2}{8mr_0^2 \left(1 + \frac{x}{\frac{1}{k^2}}\right)} + \frac{V(r)}{Q} \right\} \psi(r) = E\psi(r) \quad (2.45)$$

bulunur.

Eş.2.45’deki bazı terimleri daha sonra kullanmak üzere bulmaya çalışırsak.

$$x = \frac{\frac{1}{k^2}}{r_0} (r - r_0) \text{ Eşitliğinden } r \text{’ye göre türevi alınırsa,}$$

$$\frac{dx}{dr} = \frac{\frac{1}{k^2}}{r_0} \text{ veya } \frac{dr}{dx} = \frac{r_0}{\frac{1}{k^2}} \quad (2.46)$$

$$\left(\frac{dr}{dx}\right)^2 = \frac{r_0^2}{k^2} \quad (2.47)$$

olur.

Burada binom serisini

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{x}{\bar{k}^2}\right)^2} = 1 - 2\left(\frac{x}{\bar{k}^2}\right) + 3\left(\frac{x}{\bar{k}^2}\right)^2 + \dots \quad (2.48)$$

Taylor serisini kullanacak olursak:

$$\bar{k}^2 V(r)|_{r=r_0} = \bar{k}^2 \left\{ V(r_0) + V'(r_0)(r - r_0) + V''(r_0) \frac{(r-r_0)^2}{2!} + V'''(r_0) \frac{(r-r_0)^3}{3!} + \dots \right\} \quad (2.49)$$

elde ederiz.

Eş. 2.42'dan:

$$r - r_0 = \frac{x r_0}{\bar{k}^2} \quad (2.50)$$

olur bu ifadeyi Eş.2.49'den yerine koyduğumuzda:

$$\bar{k}^2 V(r) = \bar{k}^2 \left\{ V(r_0) + V'(r_0) \frac{x r_0}{\bar{k}^2} + V''(r_0) \frac{x^2 r_0^2}{2\bar{k}} + V'''(r_0) \frac{x^3 r_0^3}{\bar{k}^2} \right\} \quad (2.51)$$

bulunur.

Eş. 2.40'den

$$V'(r_0) = \frac{\hbar^2 Q}{4m r_0^3} \quad (2.52)$$

olur.

Eş. 2.45’de bulunan değerler yerine konulduktan sonra gerekli düzenlemelerden sonra her iki tarafı  $\frac{r_0^2}{k}$  ile çarpıldığında:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{\hbar^2}{8m} \bar{k} \left\{ 1 + \frac{3x^2}{k} - \frac{4x^3}{\bar{k}^2} + \dots \right\} \psi(x) \\
& + \frac{(1-a)(3-a)}{8m\bar{k}} \hbar^2 \left\{ 1 - \frac{2x}{\bar{k}^2} + \frac{3x^2}{k} - \dots \right\} \psi(x) - \frac{\hbar^2}{4m} \left\{ 1 - \frac{2x}{\bar{k}^2} + \frac{3x^2}{k} + \dots \right\} \psi(x) \\
& + \frac{\bar{k}r_0^2}{Q} \left\{ V(r_0) + V''(r_0) \frac{x^2 r_0^2}{2k} + V'''(r_0) \frac{r_0^3 x^3}{6\bar{k}^2} + \dots \right\} \psi(x) = E \frac{r_0^2}{k} \psi(x)
\end{aligned} \tag{2.53}$$

şeklinde yazılır.

Şimdi Eş.2.53’den parametrelere karşı gelen eşitlikler yazılarak, denklem kısaltarak çözmeye çalışırsak:

$$w^2 = \left[ \frac{3\hbar^2}{4m^2} + \frac{r_0^4 V''(r_0)}{mQ} \right] = \frac{\hbar^2}{4m^2} \left[ 3 + \frac{4mr_0^4}{\hbar^2 Q} V''(r_0) \right] \tag{2.54}$$

Eş. 2.40’den

$$\frac{4mr_0^3}{\hbar^2 Q} = \frac{1}{V'(r_0)} \tag{2.55}$$

olur ve bu değeri yukarıdaki denklemde yerine koyduğumuzda:

$$w = \frac{\hbar}{2m} \left[ 3 + r_0 \frac{V''(r_0)}{V'(r_0)} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.56}$$

elde edilir.

Burada:

$$g = \frac{1}{\bar{k}}, \quad \lambda = \frac{Er_0^2}{\bar{k}} \quad (2.57)$$

ile gösterilir.

$r_0$  ve  $Q$  terimleri cinsinden  $\psi_0$  özfonksiyonları ve  $E_n$  enerji özdeğerleri için kaydırılmış  $1/N$  açılımı ifadesine bir açıklık getirir. Enerjiye katkı  $\bar{k}^2 V_{eff}(r_0)$  Eş. 2.41 ile verilir.

Daha sonraki katkı  $\bar{k}$  basamağındadır ve

$$\frac{\bar{k}}{r_0^2} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega - \frac{(2-a)\hbar^2}{4m} \right]$$

şeklinde yazılır.  $a$  kayması bu katkıyı sıfır yapacak şekilde seçilir.

Böylece:

$$\left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega = \frac{(2-a)\hbar^2}{4m} \quad \text{'dan,}$$

$$a = 2 - 2(2n + 1)m\omega/\hbar \quad (2.58)$$

elde edilir.

Burada,

$$\bar{k} = \sqrt{Q} \quad (2.59)$$

ile tanımlanır.



Eş 2.58'den  $w'y_1$ ,

$$w = \frac{\hbar(2-a)}{2(2n+1)m} \quad (2.60)$$

şeklinde yazarsak. Eş. 2.60, Eş. 2.56 ile eşitlendiğinden:

$$(2-a) = (2n+1) \left\{ 3 + \frac{r_0 V''(r_0)}{V'(r_0)} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.61)$$

buluruz.

$k = N + 2l$  ,  $\bar{k} = k - a$  tanımlarından,

$$a = N + 2l - \bar{k} \quad (2.62)$$

olur.

Bu değer Eş. 2.61'de yerine konulduğunda:

$$(2n+1) \left[ 3 + \frac{V''(r_0)r_0}{V'(r_0)} \right]^{\frac{1}{2}} + N2l - 2 = \bar{k} \quad (2.63)$$

ile ifade edilir.

$\bar{k}^2 = Q$  tanımı

$$\bar{k} = \left[ \frac{4mr_0^3 V'(r_0)}{\hbar^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.64)$$

bulunur.

Eş. 2.64, Eş. 2.63'de yerine konulursa:

$$(2n + 1) \left[ 3 + \frac{V''(r_0)r_0}{V'(r_0)} \right]^{\frac{1}{2}} + N2l - 2 = \left[ \frac{4mr_0^3 V'(r_0)}{\hbar^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.65)$$

elde edilir. Bu denklem ile  $r_0$  belirlenir.

Eş.2.40'dan yola çıkarak özdeğerler ve özfonksiyonlar hesaplanır. Burada  $r_0$ ,  $n$  radyal kuantum sayısına bağlıdır.

Enerjinin serisine açılımından tüm toplamalar  $N$  için en azından  $n$  gibi davranan terimler içerdiğinden,  $n$  büyüdüğü zaman  $E_n$  enerji için beklenenden daha olumsuz sonuçlar elde edilir.

Bu durumda toplamın katkısı azalmayabilir. Bununla beraber, fiziksel olarak ilgilendiğimiz potansiyel sınıfları için sonuçlar verir.  $\frac{1}{k}$  açılımı, dalga fonksiyonu için yavaşça  $r < 0$  bölgesine uzanır.  $\frac{1}{k}$  basamağında verilen her bir potansiyel bir büyüklüğe sahiptir, fakat  $r = 0$  sonsuz bir engel olur [22-24].

### 3. ASİMPTOTİK İTERASYON METODU

İkinci dereceden lineer homojen diferansiyel denklemleri matematiksel fiziğin birçok uygulamasında karşımıza çıkmaktadır. Sınır değerleri verilen bu tip diferansiyel denklemleri çözmek için birçok farklı metot kullanılmaktadır.

Bu bölümde, Asimtotik İterasyon Metodu (A.I.M) olarak adlandırılan bir metot aşağıda verilen, ikinci dereceden lineer homojen diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılmıştır. Bu kısımda asimptotik iterasyon metodunun(AIM) yapısı, bu metodun Dirac denklemine uygulanışı ve pertürbasyon teorisine uygulanışı üzerinde durulmuştur.

AIM’da ikinci dereceden lineer homojen diferansiyel denklemin formu:

$$y'' = \lambda_0(x)y' + s_0(x)y \quad (3.1)$$

şeklindedir [25-26].

$\lambda_0(x)$  ve  $s_0(x)$  türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere Eş. 3.1’in  $x$ ’e göre birinci dereceden türevi alınır:

$$y''' = \lambda_1(x)y' + s_1(x)y \quad (3.2)$$

elde edilir. Burada  $\lambda_1 = \lambda_0' + s_0 + \lambda_0^2$  ve  $s_1 = s_0' + s_0\lambda_0$  şeklindedir.

Eş.3.1’in ikinci dereceden türevi alınır:

$$y'''' = \lambda_2(x)y' + s_2(x)y \quad (3.3)$$

ifadesi bulunur.

Burada:

$$\lambda_2 = \lambda_1' + s_1 + \lambda_0 \lambda_1 \text{ ve } s_2 = s_1' + s_0 \lambda_1 \text{ şeklindedir.}$$

Böylece  $(n+1)$ 'inci ve  $(n+2)$ 'inci türevleri  $n = 1, 2, \dots$  olmak üzere:

$$y^{(n+1)} = \lambda_{n-1}(x)y' + s_{n-1}(x)y \quad (3.4)$$

ve

$$y^{(n+2)} = \lambda_n(x)y' + s_n(x)y \quad (3.5)$$

olur. Buradan da:

$$\lambda_n = \lambda_{n-1}' + s_{n-1} + \lambda_0 \lambda_{n-1}$$

$$s_n = s_{n-1}' + s_0 \lambda_{n-1} \quad (3.6)$$

şeklinde iterasyon formülleri elde edilir [26-27].  $(n+1)$ 'inci ve  $(n+2)$ 'inci türevleri oranlandığında:

$$\frac{d}{dx} \ln(y^{n+1}) = \frac{y^{(n+2)}}{y^{(n+1)}} = \frac{\lambda_n \left( y' + \frac{s_n}{\lambda_n} y \right)}{\lambda_{n-1} \left( y' + \frac{s_{n-1}}{\lambda_{n-1}} y \right)} \quad (3.7)$$

bulunur.

Yeterince büyük  $n$  değeri için:

$$\frac{s_n}{\lambda_n} = \frac{s_{n-1}}{\lambda_{n-1}} \equiv \alpha \quad (3.8)$$

şartı sağlanıyor ise, Eş. 3.7'den :

$$\frac{d}{dx} \ln(y^{n+1}) = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \quad (3.9)$$

ifadesi elde edilir.

Bu denklemin çözümü:

$$y^{n+1}(x) = C_1 \exp\left(\int^x \frac{\lambda_n(t)}{\lambda_{n-1}(t)} dt\right) = C_1 \lambda_{n-1} \exp\left(\int^x (\alpha + \lambda_0) dt\right) \quad (3.10)$$

şeklindedir [26]. Burada  $C_1$  integrasyon sabitidir ve Eş. 3.6 kullanılarak  $\alpha$  tanımlanır. Eş. 3.10'da Eş. 3.4 kullanılarak:

$$y' + \alpha y = C_1 \exp\left(\int^x (\alpha + \lambda_0) dt\right) \quad (3.11)$$

şeklinde birinci dereceden lineer homojen olmayan diferansiyel denklem elde edilir.

Buna göre Eş. 3.1'in genel çözümü:

$$y(x) = \exp\left(-\int^x \alpha dt\right) \left[ C_2 + C_1 \int^x \exp\left(\int^t (\lambda_0(\tau) + 2\alpha(\tau) d\tau)\right) dt \right] \quad (3.12)$$

şeklinde elde edilir.

Böylece aşağıdaki teoremi yazabiliriz:

**Teorem:**  $\lambda_0$  ve  $s_0$  türevlenebilir fonksiyon olmak üzere:

$$y'' = \lambda_0(x)y' + s_0(x)y$$

$n > 0$  iken denklemin çözülebilirlik şartı:

$$\frac{s_n}{\lambda_n} = \frac{s_{n-1}}{\lambda_{n-1}} \equiv \alpha \quad (3.13)$$

şeklindedir.

Burada  $k = 1, 2, \dots$  iken:

$$\lambda_k = \lambda'_{k-1} + s_{k-1} + \lambda_0 \lambda_{k-1} \text{ ve } s_k = s'_{k-1} + s_0 \lambda_{k-1} \quad (3.14)$$

şeklinde iterasyon formülü elde edilir.

Buradan:

$$\delta(x) = s_n(x)\lambda_{n+1}(x) - s_{n+1}(x)\lambda_n(x) = 0 \quad (3.15)$$

elde edilir.

$\delta(x)$  fonksiyonunun sınır değer problemlerinde çok önemli rolü vardır.  $\delta(x, E)$  enerjiye bağlı olduğundan  $\delta(x, E) = 0$  değeri bilinmeyen enerji özdeğerlerini verir [25-27].

### 3.1. Asimptotik İterasyon Metodu ile Lineer Denklem Sistemleri

Birinci dereceden lineer diferansiyel denklem çifti:

$$\phi_1' = \lambda_0(x)\phi_1 + s_0(x)\phi_2 \quad (3.16)$$

$$\phi_2' = \omega_0(x)\phi_1 + p_0(x)\phi_2 \quad (3.17)$$

şeklindedir [28].

Burada  $\lambda_0(x)$ ,  $s_0(x)$ ,  $\omega_0(x)$  ve  $p_0(x)$   $x$ 'e göre türevlenebilir fonksiyonlardır. Eğer Eş. 3.16 ve Eş. 3.17'nin  $x$ 'e göre türevi alınırsa:

$$\phi_1'' = \lambda_1(x)\phi_1 + s_1(x)\phi_2 \quad (3.18)$$

$$\phi_2'' = \omega_1(x)\phi_1 + p_1(x)\phi_2 \quad (3.19)$$

bulunur. Buradan:

$$\lambda_1 = \lambda_0' + \lambda_0^2 + s_0\omega_0$$

$$s_1 = s_0' + \lambda_0 s_0 + s_0 p_0$$

$$\omega_1 = \omega_0' + \lambda_0 \omega_0 + p_0 \omega_0$$

$$p_1 = p_0' + p_0^2 + s_0 \omega_0$$

şeklindedir.

Benzer şekilde  $n = 1, 2, \dots$ , olmak üzere  $(n + 2)$ 'inci dereceden türevi hesaplanırsa:

$$\phi_1^{n+2} = \lambda_{n+1}(x)\phi_1 + s_{n+1}(x)\phi_2 \quad (3.20)$$

$$\phi_2^{n+2} = \omega_{n+1}(x)\phi_1 + p_{n+1}(x)\phi_2 \quad (3.21)$$

bulunur. Burada:

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n' + \lambda_n \lambda_0 + s_n \omega_0$$

$$s_{n+1} = s_n' + \lambda_n s_n + s_n p_0$$

$$\omega_{n+1} = \omega_n' + \lambda_0 \omega_n + p_n \omega_0$$

$$p_{n+1} = p_n p_0 + \omega_n s_0 + p_0'$$

şeklindedir. Buradan  $\phi_1$ 'in  $(n+2)$ 'inci ve  $(n+1)$ 'inci türevlerinin birbirine oranı:

$$\frac{d}{dx} \ln(\phi_1^{(n+1)}) = \frac{\phi_1^{(n+2)}}{\phi_1^{(n+1)}} = \frac{\lambda_{n+1}[\phi_1 + (s_{n+1}/\lambda_{n+1})\phi_2]}{\lambda_n[\phi_1 + (s_n/\lambda_n)\phi_2]} \quad (3.22)$$

denklemini verir. Aynı şekilde  $\phi_2$ 'ye bağlı bir sonuçta elde edilebilir. Bununla birlikte Eş. 3.16 ve Eş. 3.17'nin çözümünü bu sistem verir. Bunun için Asimptotik olarak bakılmalıdır. Metot için  $n$  yeterince büyük iken:

$$\frac{s_{n+1}}{\lambda_{n+1}} = \frac{s_n}{\lambda_n} = \alpha \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.23)$$

ifadesi Eş. 3.22'de kullanılarak  $(d/dx) \ln(\phi_1^{n+1}) = \lambda_{n+1}/\lambda_n$  ifadesi elde edilir.



Bu ifade ile:

$$\phi_1^{(n+1)}(x) = C_1 \exp\left(\int^x \frac{\lambda_{n+1}(t)}{\lambda_n(t)} dt\right) = C_1 \lambda_n \exp\left(\int^x (\alpha \omega_0 + \lambda_0) dt\right) \quad (3.24)$$

elde edilir.

Burada  $C_1$  integrasyon sabitidir. Bir sonraki aşamada:

$$\phi_1^{(n+1)} = \lambda_n(x) \phi_1 + s_n(x) \phi_2$$

ile Eş. 3.24 karşılaştırılarak:

$$\phi_1 + \alpha(x) \phi_2 = C_1 \exp\left(\int^x (\alpha \omega_0 + \lambda_0) dt\right) \quad (3.25)$$

bulunur. Eş. 3.17 ile Eş. 3.25 kullanılarak:

$$\phi_2(x) = \exp\left(\int^x (p_0 - \omega_0 \alpha) dt\right) \left\{ C_2 + C_1 \int^x \left[ \omega_0 \exp\left(\int^t (\lambda_0 - p_0 + 2\omega_0 \alpha) dt\right) dt \right] \right\} \quad (3.26)$$

şeklinde  $\phi_2(x)$  için genel bir çözüm elde edilir. Aynı şekilde  $\phi_1(x)$  içinde genel bir çözüm Eş. 3.26 kullanılarak bulunur.

Bu yöntemi Dirac denkleminde uygulanmasını incelenirse.

$\hbar = c = 1$  olmak üzere  $d$  boyutta Dirac denklemi:

$$i \frac{d\psi}{dt} = H\psi, \quad H = \sum_{j=1}^d \alpha_j p_j + \beta[m + U(r)] + V(r) \quad (3.27)$$

şeklindedir.

Burada;  $m$  taneciğin kütlesi,  $V(r)$  küresel simetrik vektörel potansiyel,  $U(r)$  küresel simetrik skaler potansiyel ve  $\{\alpha_j\}$  ile  $\beta$  komütatif olmayan Dirac matrisleridir. Açışal kısımların ayrılmasından sonra birinci dereceden lineer diferansiyel denklem çifti:

$$\frac{dG}{dr} = -\frac{k_d}{r} G + [E + m - V(r) + U(r)]F \quad (3.28)$$

$$\frac{dF}{dr} = -[E - m - V(r) - U(r)]G + \frac{k_d}{r} F \quad (3.29)$$

şeklinde elde edilir [28]. Bunlar  $k_d = \tau[j + (d - 2)/2]$  ve  $\tau = \pm 1$  olmak üzere  $d$  boyutta radyal Dirac denklemi elde edilir. Verilen bir  $V(r)$  ve  $U(r)$  potansiyel sınıfı için, AIM'in lineer denklem sistemleri için geliştirilen ve yukarıda açıklanan versiyonu kullanılarak Dirac denkleminin enerji öz değerleri belirlenebilir.

Zira Eş.3.28 ve 3.29 birinci derece lineer denklem sistemi oluştururlar.

### 3.2. Pertürbasyon Teorisi İçin Asimptotik İterasyon Metodu

#### 3.2.1. Asimtotik iterasyon metodunun pertürbasyon teorisine uygulanması

Schrödinger özdeğer problemleri için tanımlanmış bir pertürbasyon açılımının katsayılarının AIM ile de hesaplanabileceğini göstermektedir. Schrödinger denkleminin potansiyeli aşağıdaki gibi iki kısımda verilsin;

$$V(x) = V_1(x) + \lambda V_2(x) \quad (3.30)$$

Burada  $V_1(x)$  tam olarak çözülebilen,  $V_2(x)$  de pertürbasyon terimidir.  $\lambda$  ise pertürbasyon açılımının parametresidir.

Özdeğerler aşağıdaki gibi pertürbasyon serisi şeklinde yazılsın:

$$E = E^{(0)} + \lambda E^{(1)} + \lambda^2 E^{(2)} + \lambda^3 E^{(3)} + \dots \quad (3.31)$$

Amacımız burada  $E^{(j)}$   $j = 0,1,2 \dots$  katsayılarını hesaplamaktır.

Verilen potansiyeller için Schrödinger denklemi :

$$\left( -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) + \lambda V_2(x) \right) \psi(x) = E\psi(x) \quad (3.32)$$

şeklindedir [29-30].

$\psi(x) = y_0(x)f(x)$  gibi uygun dönüşümler yapılarak ikinci dereceden lineer homojen diferansiyel denklemler elde edilebilir [31].

Böyle bir diferansiyel denklem için  $f(x)$  çarpanı ile birlikte böyle bir değişken değiştirme sonucu ile elde edilen ikinci dereceden lineer homojen diferansiyel denkleminin genel formu:

$$f''(x) = \lambda_0(x, \lambda)f'(x) + s_0(x, \lambda)f(x) \quad (3.33)$$

şeklinde olur.

Eğer  $E$  öz değeri yukarıdaki gibi bir pertürbasyon serisi formunda verilirse  $\lambda_0(x, \lambda)$  ve  $s_0(x, \lambda)$  fonksiyonları tabi ki direk olarak  $E^{(j)}$  ye bağlı olacaktır.

Bu şartlar altında Asimtotik İterasyon Metodu, lineer homojen diferansiyel denkleminin uygulanarak  $\lambda_n(x, \lambda)$  ve  $s_n(x, \lambda)$  fonksiyonları hesaplanırsa,  $\delta$  fonksiyonunu aşağıdaki gibi kurulabilir.

$$\delta(x, \lambda) = s_n(x, \lambda)\lambda_{n+1}(x, \lambda) - s_{n+1}(x, \lambda)\lambda_n(x, \lambda) = 0 \quad (3.34)$$

$\delta(x, \lambda)$  fonksiyonu  $\lambda = 0$  civarında aşağıdaki seriye açılırsa:

$$\delta(x, \lambda) = \delta(x, 0) + \frac{\lambda}{1!} \frac{d\delta(x, \lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} + \frac{\lambda^2}{2!} \frac{d^2\delta(x, \lambda)}{d\lambda^2} \Big|_{\lambda=0} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \delta^{(k)}(x) \quad (3.35)$$

$$\delta^{(j)}(x) = \frac{1}{j!} \frac{d^j \delta(x, \lambda)}{d\lambda^j} \Big|_{\lambda=0} = 0 \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.36)$$

denklemleri elde edilir.

Bu denklemlerden açıkça görülmektedir ki  $\delta^{(0)}(x) = 0$ ,  $E^{(0)}$  değerini,  $\delta^{(1)}(x) = 0$   $E^{(1)}$  değerini elde etmek için kullanılır. Bu  $E^{(1)}$  değeri enerjideki birinci düzeltme terimidir. Bu özellik enerji açılım katsayılarının bulunmasında kullanılır.

### 3.2.2. Dalga fonksiyonlarının hesabı

Asimptotik iterasyon metodundan bildiğimiz Eş.3.8'den :

$$\frac{s_n}{\lambda_n} = \frac{s_{n-1}}{\lambda_{n-1}} \equiv \alpha$$

İfadesinin kuantumlanma koşulu aşağıdaki gibidir (Eş. 3.15) :

$$\delta(x) = S_n(x)\lambda_{n+1}(x) - S_{n+1}(x)\lambda_n(x) = 0$$

Sınır değer problemlerinin çözümünde önemlidir [29].

$$\delta(x, \lambda) = S_n(x, \lambda)\lambda_{n+1}(x, \lambda) - S_{n+1}(x, \lambda)\lambda_n(x, \lambda) = 0 \quad (3.37)$$

Şartı sağlandığı zaman ikinci dereceden lineer homojen diferansiyel denklemlerin çözümleri denklem Eş. 3.15'de kullanarak elde edilebilir.

Eğer Eş. 3.15 denkleminin ilk kısmı yeniden yazılırsa:

$$f(x) = C_2 \exp\left(-\int^x \alpha(t, \lambda) dt\right) \quad (3.38)$$

denklemini elde edilir.

$\alpha(x, \lambda) = \frac{S_k(x, \lambda)}{\lambda_k(x, \lambda)}$  alınarak, yine  $\lambda = 0$  civarında seri açılırsa:

$$\begin{aligned} \alpha(x, \lambda) &= \alpha^{(0)}(x) + \lambda \alpha^{(1)}(x) + \lambda^2 \alpha^{(2)}(x) + \lambda^3 \alpha^{(3)}(x) + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \alpha^{(k)}(x) \end{aligned} \quad (3.40)$$

elde edilir.

Burada:

$$\alpha^{(j)} = \frac{1}{j!} \left( \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} \left( \frac{S_k(x, \lambda)}{\lambda_k(x, \lambda)} \right) \right)_{\lambda=0} = \frac{1}{j!} \left( \frac{\partial^j \alpha(x, \lambda)}{\partial \lambda^j} \right)_{\lambda=0} \quad (3.41)$$

$$f(x) = C_2 f^{(0)}(x) f^{(1)}(x) f^{(2)}(x) f^{(3)}(x) \dots = C_2 \prod_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(x) \quad (3.42)$$

şeklinde yazılabilir.

Burada:

$$f^{(k)}(x) = \exp\left(-\lambda^k \int^x \left(\alpha^{(k)}(t)\right) dt\right) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.43)$$

şeklindedir [29-31].

Böylece AIM pertürbasyon problemleri uygulanması kullanarak dalga fonksiyonunun bir pertürbetif çözümleme elde edilmiş olur.

#### 4. İKİNCİ MERTEBEDEN, LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN POLİNOM TIPLI ÇÖZÜMLERİ

Bu çalışmada amacımız aşağıda genel form ile verilen ikinci mertebeden lineer ve homojen diferansiyel denklemi, Asimptotik İterasyon Metodu (A.I.M) ile çözmektir .

$$y'' = \lambda_0(x)y' + s_0(x)y \quad (4.1)$$

Eş. 4.1'de  $\lambda_0(x)$  ,  $s_0(x)$  ,  $f(x)$  ve  $c$  fonksiyonları sırası ile:

$$\lambda_0(x) = \frac{a_0 f(x)}{a_2 + a_1 x^2 + c x f(x)} \quad (4.2)$$

$$s_0(x) = \frac{w}{a_2 + a_1 x^2 + c x f(x)} \quad (4.3)$$

$$f(x) = x^m, m = 2, 3 \dots \text{ve } c = \frac{a_0}{n+1} \quad (4.4)$$

şeklindedir [32].

Fonksiyonlar Eş. 4.1'de yerine konulursa:

$$y'' = \frac{a_0 x^m}{a_2 + a_1 x^2 + \frac{a_0}{n+1} x^{m+1}} y' + \frac{w}{a_2 + a_1 x^2 + \frac{a_0}{n+1} x^{m+1}} y \quad (4.5)$$

elde edilir.

Eş. 4.5'de  $m \geq 2$  ,  $a_2 = 0$  ,  $a_2 \neq 0$  durumlar için bilgisayar programı kullanılarak polinomlar hesaplanacaktır. Fakat polinomlar hesaplanmadan önce  $a_2 = 0$  ,  $a_2 \neq 0$  durumlar için gerekli olan her  $n$  değerine karşılık gelen  $w$  değerleri elde edilecektir.

#### 4.1. $a_2 = 0$ Durumu:

$$y'' = \frac{ax^{l-2}}{b+\frac{ax^{l-1}}{m+n}} y' + \frac{m(m+1)b}{x^2\left(b+\frac{ax^{l-1}}{m+n}\right)} y, \quad l = 2, 3, \dots \quad (4.6)$$

Şeklinde bir diferansiyel denklem için çözüm incelenirse [25].

$a$  ve  $b$  ile  $m$  ve  $n$  değerleri negatif olmayan tamsayılar için yukarıdaki denklemin genel çözümü;

$$y_n^m = x^{\frac{m+1}{l-1}} {}_2F_1\left(-\frac{n}{l-1}, \frac{m+1}{l-1}; \frac{2m+1}{l-1}; -\frac{ax^{l-1}}{b(n+m)}\right), \quad m = 1, 2, 3, \dots, n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.7)$$

şeklindedir.

Polinom çözümler için  $n = v(l-1)$ ,  $v = 0, 1, 2, \dots$  dir [25].

Eş 4.7.'de  ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)$  Gauss hipergeometrik fonksiyonları göstermektedir ve

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+k-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+k+1)} \frac{x^k}{k!} \quad (4.8)$$

şeklinde tanımlanır.

Eş 4.6'da ( $l = 2$ ) için:

$$y'' = \frac{a}{b+\frac{ax}{m+n}} y' + \frac{m(m+1)b}{x^2\left(b+\frac{ax}{m+n}\right)} y \quad (4.9)$$

Eş. 4.9'da gerekli değişken değiştirmeler yapılarak çözümün en genel formu Gauss hipergeometrik fonksiyonu ile örtüştüğü görülmüştür.

Bulunan çözümümüz:

$$y_n^m = x^{m+1} {}_2F_1\left(-n, m+1; 2(m+1); -\frac{ax}{b(m+n)}\right), m = 1, 2, 3, \dots, n = 0, 1, 2, \dots$$

(4.10)

şeklindedir [32].

Burada  $y_n^m$ ,  $x$ 'e bağlı  $n$ . dereceden polinomdur.

Burada Eş. 4.6 için yapılan işlemler Eş. 4.5'de uygulanarak çözümü ayrıntılı bir şekilde gösterilecektir.

Eş. 4.5 için  $a_2 = 0$  durumunda:

$$y'' = \frac{a_0 x^m}{a_1 x^2 + \frac{a_0}{n+1} x^{m+1}} y' + \frac{w}{a_1 x^2 + \frac{a_0}{n+1} x^{m+1}} y'' \quad (4.11)$$

elde edilir.

Burada  $m \geq 2$  ve  $n = 0, 1, 2, \dots$  değerlerine karşılık gelen  $w$  değerleri bilgisayar programı ile hesaplanmış ve aşağıdaki tablolarda gösterilmiştir.

Bulunan  $w$  değerleri genel bir formda ifade edilirse:

$$w = (n+1)(n+2)a_1$$

şeklindedir ve tablolardaki verilerle uyushmaktadır.



$w$  ve  $n = 0, 1, 2, \dots$  değerlerine karşılık gelen  $y(x)$  polinomları:

Çizelge 4.1.  $m = 2$  için hesaplanan  $y(x)$  polinomları

| $n$ | $w$                                               | $y(x)$                                                                                                                                                                                                               |
|-----|---------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 0   | $2a_1$                                            | $x^2$                                                                                                                                                                                                                |
| 1   | $2a_1$<br>$6a_1$                                  | $x^2(a_0x + 4a_1)$<br>$x^3$                                                                                                                                                                                          |
| 2   | $2a_1$<br>$6a_1$<br>$12a_1$                       | $x^2(a_0^2x^2 + 10a_0a_1x + 30a_1^2)$<br>$x^3(a_0x + 6a_1)$<br>$x^4$                                                                                                                                                 |
| 3   | $2a_1$<br>$6a_1$<br>$12a_1$<br>$20a_1$            | $x^2(a_0^3x^3 + 18a_0^2a_1x^2 + 120a_0a_1^2x + 320a_1^3)$<br>$x^3(a_0^2x^2 + 14a_0a_1x + 56a_1^2)$<br>$x^4(a_0x + 8a_1)$<br>$x^5$                                                                                    |
| 4   | $2a_1$<br>$6a_1$<br>$12a_1$<br>$20a_1$<br>$30a_1$ | $x^2(a_0^4x^4 + 28a_0^3a_1x^3 + 315a_0^2a_1^2x^2 + 1750a_0a_1^3x + 4375a_1^4)$<br>$x^3(a_0^3x^3 + 24a_0^2a_1x^2 + 210a_0a_1^2x + 700a_1^3)$<br>$x^4(a_0^2x^2 + 18a_0a_1x + 90a_1^2)$<br>$x^5(a_0x + 10a_1)$<br>$x^6$ |

$m = 2$ 'de yapılan işlemleri  $m = 3$ 'de uygulandığı zaman elde edilen polinomlar:

Çizelge 4.2.  $m = 3$  için hesaplanan  $y(x)$  polinomları

| $n$ | $w$                           | $y(x)$                                                                        |
|-----|-------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| 0   | $2a_1$                        | $x^2$                                                                         |
| 1   | $6a_1$                        | $x^3$                                                                         |
| 2   | $2a_1$<br>$12a_1$             | $x^2(2a_0x^2 + 15a_1)$<br>$x^4$                                               |
| 3   | $6a_1$<br>$20a_1$             | $x^3(3a_0x^2 + 28a_1)$<br>$x^5$                                               |
| 4   | $2a_1$<br>$12a_1$<br>$30a_1$  | $x^2(8a_0^2x^4 + 140a_0a_1x^2 + 875a_1^2)$<br>$x^4(4a_0x^2 + 45a_1)$<br>$x^6$ |
| 5   | $6a_1$<br>$20a_1$<br>$242a_1$ | $x^3(5a_0^2x^4 + 108a_0a_1x^2 + 756a_1^2)$<br>$x^5(5a_0x^2 + 66a_1)$<br>$x^7$ |

elde edilir.

Bundan sonraki kısımda keyfi  $m \geq 2$  değeriinde polinomların genel çözümlerinin tartışacağız.

Bunun için Eş. 4.11 düzenleme yapılırsa:

$$y'' = \frac{a_0 x^{m-2}}{a_1 + c x^{m-1}} y' + \frac{w}{(a_1 + c x^{m-1}) x^2} y \quad (4.12)$$

elde edilir.

$n = 0$  için;

$$y_0 = x^2$$

$$y_1 = x^3$$

$$y_2 = x^4$$

$$y_3 = x^5$$

Genel ifadesi:

$$y_n = x^{n+2} \quad (4.13)$$

elde edilir.

$n = 1$  için:

$$y_1 = x^2(a_0 x + 4a_1)$$

$$y_2 = x^3(a_0 x + 6a_1)$$

$$y_3 = x^4(a_0 x + 8a_1)$$

$$y_4 = x^5(a_0 x + 10a_1)$$

Genel ifadesi;

$$y_n = x^{n+1}(a_0x + 2(n+1)a_1) \quad (4.14)$$

şeklinde yazılır.

$n = 2$  için;

$$\begin{aligned} y_2 &= x^2(a_0^2x^2 + 10a_0a_1x + 30a_1^2) \\ y_3 &= x^3(a_0^2x^2 + 14a_0a_1x + 56a_1^2) \\ y_4 &= x^4(a_0^2x^2 + 18a_0a_1x + 90a_1^2) \\ y_5 &= x^5(a_0^2x^2 + 22a_0a_1x + 132a_1^2) \end{aligned}$$

Genel ifadesi;

$$y_n = x^n(a_0^2x^2 + 2(2n+3)a_0a_1x + (2n+3)(2n+4)a_1^2) \quad (4.15)$$

şeklindedir.

$n = 3$  için;

$$\begin{aligned} y_3 &= x^2(a_0^3x^3 + 18a_0^2a_1x^2 + 120a_0a_1^2x + 320a_1^3) \\ y_4 &= x^3(a_0^3x^3 + 24a_0^2a_1x^2 + 210a_0a_1^2x + 700a_1^3) \\ y_5 &= x^4(a_0^3x^3 + 30a_0^2a_1x^2 + 324a_0a_1^2x + 1296a_1^3) \\ y_6 &= x^5(a_0^3x^3 + 36a_0^2a_1x^2 + 462a_0a_1^2x + 2156a_1^3) \end{aligned}$$

Genel ifadesi;

$$y_n = x^{n-1} \left( a_0^3x^3 + 3(2n+4)a_0^2a_1x^2 + 3(2n+3)(2n+6)a_0a_1^2x + (2n+3)(2n+6)^2a_1^3 \right) \quad (4.16)$$

Son olarak  $n = 4$  için elde edilen polinomları incelersek:

$$\begin{aligned} y_4 &= x^2(a_0^4x^4 + 28a_0^3a_1x^3 + 315a_0^2a_1^2x^2 + 1750a_0a_1^3x + 4375a_1^4) \\ y_5 &= x^3(5a_0^4x^4 + 180a_0^3a_1x^3 + 2592a_0^2a_1^2x^2 + 18144a_0a_1^3x + 54432a_1^4) \\ y_6 &= x^4(a_0^4x^4 + 44a_0^3a_1x^3 + 770a_0^2a_1^2x^2 + 6468a_0a_1^3x + 22638a_1^4) \\ y_7 &= x^5(7a_0^4x^4 + 364a_0^3a_1x^3 + 7488a_0^2a_1^2x^2 + 73216a_0a_1^3x + 292864a_1^4) \end{aligned}$$

Elde edilen polinomların katsayılarında farklılıklar görülmektedir. Bu farklılıklar nedeniyle genel bir ifade yazmak zorlaşmaktadır. Bu durumu ortadan kaldırmak için polinomları bulundukları  $n$  değeri ile tek tek çarpılırsa:

$$\begin{aligned} y_4 &= x^2(4a_0^4x^4 + 112a_0^3a_1x^3 + 1260a_0^2a_1^2x^2 + 7000a_0a_1^3x + 17500a_1^4) \\ y_5 &= x^3(5a_0^4x^4 + 180a_0^3a_1x^3 + 2592a_0^2a_1^2x^2 + 18144a_0a_1^3x + 54432a_1^4) \\ y_6 &= x^4(6a_0^4x^4 + 264a_0^3a_1x^3 + 4620a_0^2a_1^2x^2 + 38808a_0a_1^3x + 135828a_1^4) \\ y_7 &= x^5(7a_0^4x^4 + 364a_0^3a_1x^3 + 7488a_0^2a_1^2x^2 + 73216a_0a_1^3x + 292864a_1^4) \end{aligned}$$

polinomları elde edilir. Bulunan polinomların genel ifadesi:

$$\begin{aligned} y_n &= \\ x^{n-2} &\left( (n+3)a_0^4x^4 + 4(n+3)(2n+5)a_0^3a_1x^3 + 3(2n+4)(2n+5)(2n+8)a_0^2a_1^2x^2 \right. \\ &\left. + 4(n+4)(2n+3)(2n+5)a_0a_1^3x + 2(n+4)^2(2n+3)(2n+5)(2n+8)a_1^4 \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

şeklindedir.

Bu işlemi daha sistematik bir hale getirmek için diferansiyel denklemde bazı dönüşümler yapmamız gerekir.

Eş. 4.12 deki denkleminde değişken değiştirme yapılırsa:

$$z = a_1 + cx^{m-1} \Rightarrow x = \left(\frac{1}{c}(z - a_1)\right)^{\frac{1}{m-1}} \quad (4.18)$$

Buradan:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = c(m-1)x^{m-2} \frac{dy}{dz} = c^{\frac{1}{m-1}}(m-1)(z - a_1)^{\frac{m-2}{m-1}} \frac{dy}{dz} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dz} \left( c^{\frac{1}{m-1}}(m-1)(z - a_1)^{\frac{m-2}{m-1}} \frac{dy}{dz} \right) \frac{dz}{dx} \\ &= c^{\frac{1}{m-1}}(m-1) \left[ \frac{m-2}{m-1} (z - a_1)^{\frac{m-2}{m-1}-1} \frac{dy}{dz} + (z - a_1)^{\frac{m-2}{m-1}} \frac{d^2y}{dz^2} \right] \\ &\quad \left( (c^{\frac{1}{m-1}}(m-1)(z - a_1)^{\frac{m-2}{m-1}}) \right) \\ &= c^{\frac{2}{m-1}}(m-1) \left[ (m-2)(z - a_1)^{\frac{m-2}{m-1}} \frac{dy}{dz} + (m-1)(z - a_1)^{\frac{2m-4}{m-1}} \frac{d^2y}{dz^2} \right] \\ &= c^{\frac{2}{m-1}}(m-1)(m-2)(z - a_1)^{\frac{m-3}{m-1}} \frac{dy}{dz} + c^{\frac{2}{m-1}}(m-1)^2(z - a_1)^{\frac{2m-4}{m-1}} \frac{d^2y}{dz^2} \\ &= c^{\frac{2}{m-1}}(m-1)^2(z - a_1)^{\frac{2m-4}{m-1}} \frac{d^2y}{dz^2} + c^{\frac{2}{m-1}}(m-1)(m-2)(z - a_1)^{\frac{m-3}{m-1}} \frac{dy}{dz} \quad (4.20) \end{aligned}$$

elde edilir.

Eş. 4.18, Eş. 4.19, Eş. 4.20 denklemlerini Eş. 4.12’de yerine konulursa:

$$\begin{aligned}
& c^{\frac{2}{m-1}}(m-1)^2(z-a_1)^{\frac{2m-4}{m-1}} \frac{d^2y}{dz^2} + c^{\frac{2}{m-1}}(m-1)(m-2)(z-a_1)^{\frac{m-3}{m-1}} \frac{dy}{dz} \\
&= \frac{a_0 c^{-\frac{m-2}{m-1}}(z-a_1)^{\frac{m-2}{m-1}}}{z} \left( c^{\frac{1}{m-1}}(m-1)(z-a_1)^{\frac{m-2}{m-1}} \frac{dy}{dz} \right) + \frac{c^{\frac{2}{m-1}} w}{z(z-a_1)^{\frac{m-1}{2}}} y
\end{aligned} \quad (4.21)$$

elde edilir.

Eş. 4.21’de düzenleme yapılırsa:

$$\begin{aligned}
& c^{\frac{2}{m-1}}(m-1)^2(z-a_1)^{\frac{2m-4}{m-1}} \frac{d^2y}{dz^2} + c^{\frac{2}{m-1}}(m-1)(m-2)(z-a_1)^{\frac{m-3}{m-1}} \frac{dy}{dz} \\
&= \frac{a_0 c^{-\frac{m-3}{m-1}}(m-1)(z-a_1)^{\frac{2m-4}{m-1}}}{z} \frac{dy}{dz} + \frac{c^{\frac{2}{m-1}} w}{z(z-a_1)^{\frac{m-1}{2}}} y
\end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \left[ \frac{a_0}{c(m-1)z} - \frac{(m-2)}{(m-1)(z-a_1)} \right] \frac{dy}{dz} + \frac{w}{(m-1)^2 z(z-a_1)^2} y \quad (4.23)$$

elde edilir.

Burada Eş. 4.23’da  $a_0 = c(n+1)$  olarak kullanılırsa:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \left[ \frac{(n+1)}{(m-1)z} - \frac{(m-2)}{(m-1)(z-a_1)} \right] \frac{dy}{dz} + \frac{w}{(m-1)^2 z(z-a_1)^2} y, \quad m = 2, 3, \dots \quad (4.24)$$

elde edilir.

Eş. 4.24’de  $m = 2$  alınırsa:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{(n+1)}{z} \frac{dy}{dz} + \frac{w}{z(z-a_1)^2} y \quad (4.25)$$

Eş. 4.24'de  $m = 3$  alınırsa:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{(n+1)}{z} - \frac{1}{(z-a_1)} \right] \frac{dy}{dz} + \frac{w}{4z(z-a_1)^2} y \quad (4.26)$$

elde edilir.

Eş. 4.23 için çözüm önerimiz:

$$y = (z - a_1)^{\frac{n+1}{m-1}} f_n^k(z) \quad (4.27)$$

şeklindedir. Eş. 4.27'den:

$$y'(z) = \frac{n+1}{m-1} (z - a_1)^{\frac{n+1}{m-1}-1} f(z) + (z - a_1)^{\frac{n+1}{m-1}} f'(z) \quad (4.28)$$

$$\frac{y'(z)}{y(z)} = \frac{n+1}{(m-1)(z-a_1)} + \frac{f'(z)}{f(z)} \quad (4.29)$$

$$\frac{y''(z)}{y(z)} - \left( \frac{y'(z)}{y(z)} \right)^2 = \frac{n+1}{(m-1)(z-a_1)^2} + \frac{f''(z)}{f(z)} - \left( \frac{f'(z)}{f(z)} \right)^2 \quad (4.30)$$

elde edilir.



Eş. 4.30 ve Eş. 4.24'den:

$$\left[ \left[ \frac{(1+n)}{(m-1)z} - \frac{(m-2)}{(m-1)(z-a_1)} \right] \left( \frac{(n+1)}{(m-1)(z-a_1)} + \frac{f'(z)}{f(z)} \right) + \frac{w}{(m-1)^2 z(z-a_1)^2} \right] - \left( \frac{n+1}{(m-1)(z-a_1)} + \frac{f'(z)}{f(z)} \right)^2 = \frac{n+1}{(m-1)(z-a_1)^2} + \frac{f''(z)}{f(z)} - \left( \frac{f'(z)}{f(z)} \right)^2 \quad (4.31)$$

$$\left[ \frac{(1+n)}{(m-1)z} + \frac{(m-2)}{(m-1)(z-a_1)} \right] \frac{n+1}{(m-1)(z-a_1)} + \left[ \frac{(1+n)}{(m-1)z} - \frac{(m-2)}{(m-1)(z-a_1)} \right] \frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{w}{(m-1)^2 z(z-a_1)^2} - \frac{(n+1)^2}{(m-1)^2 (z-a_1)^2} - \frac{2(n+1)}{(m-1)(z-a_1)} \frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{n+1}{(m-1)(z-a_1)^2} + \frac{f''(z)}{f(z)} \quad (4.32)$$

elde edilir.

Eş. 4.32 düzenlenirse:

$$\frac{f''(z)}{f(z)} = \left[ \frac{(1+n)}{(m-1)z} - \frac{(m-2)}{(m-1)(z-a_1)} - \frac{2(n+1)}{(m-1)(z-a_1)} \right] \frac{f'(z)}{f(z)} + \left[ \frac{(1+n)}{(m-1)z} - \frac{(m-2)}{(m-1)(z-a_1)} \right] \frac{n+1}{(m-1)(z-a_1)} + \frac{w}{(m-1)^2 z(z-a_1)^2} - \frac{(n+1)^2}{(m-1)^2 (z-a_1)^2} + \frac{n+1}{(m-1)(z-a_1)^2} \quad (4.33)$$

ve

$$\frac{f''(z)}{f(z)} = \left[ \frac{(1+n)}{(m-1)z} - \frac{(m-2)+2(n+1)}{(m-1)(z-a_1)} \right] \frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{(1+n)(n+1)}{(m-1)^2 z(z-a_1)} - \frac{(m-2)(n+1)}{(m-1)^2 (z-a_1)^2} + \frac{w}{(m-1)^2 z(z-a_1)^2} - \frac{[(n+1)^2 - (m-1)(n+1)]}{(m-1)^2 (z-a_1)^2} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{f''(z)}{f(z)} &= \left[ \frac{(1+n)}{(m-1)z} - \frac{(m-2)+2(n+1)}{(m-1)(z-a_1)} \right] \frac{f'(z)}{f(z)} \\ &+ \frac{(1+n)(n+1)(z-a_1) - (m-2)(n+1)z + w - [(n+1)^2 - (m-1)(n+1)]z}{(m-1)^2 z (z-a_1)^2} \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{f''(z)}{f(z)} &= \left[ \frac{(1+n)}{(m-1)z} - \frac{(m-2)+2(n+1)}{(m-1)(z-a_1)} \right] \frac{f'(z)}{f(z)} + \\ &\frac{(n+1)(z-a_1) + n(n+1)z - n(n+1)a_1 - (m-2)(n+1)z + w - [(n+1)^2 - (m-1)(n+1)]z}{(m-1)^2 z (z-a_1)^2} \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{f''(z)}{f(z)} &= \left[ \frac{(1+n)}{(m-1)z} - \frac{(m-2)+2(n+1)}{(m-1)(z-a_1)} \right] \frac{f'(z)}{f(z)} + \\ &\frac{(n+1)(z-a_1) - n(n+1)a_1 + w + [n(n+1) - (m-2)(n+1) - (n+1)(n-m+2)]z}{(m-1)^2 z (z-a_1)^2} \end{aligned} \quad (4.37)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{f''(z)}{f(z)} &= \left[ \frac{(1+n)}{(m-1)z} - \frac{(m-2)+2(n+1)}{(m-1)(z-a_1)} \right] \frac{f'(z)}{f(z)} \\ &+ \frac{(n+1)(z-a_1) - n(n+1)a_1 + w + [n(n+1) - (n+1)[m-2+n-m+2]]z}{(m-1)^2 z (z-a_1)^2} \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\frac{f''(z)}{f(z)} = \left[ \frac{(1+n)}{(m-1)z} - \frac{(m-2)+2(n+1)}{(m-1)(z-a_1)} \right] \frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{(n+1)(z-a_1) - n(n+1)a_1 + w}{(m-1)^2 z (z-a_1)^2} \quad (4.39)$$

$$f''(z) = \left[ \frac{(1-n-m)z - (1+n)a_1}{(m-1)z(z-a_1)} \right] f'(z) + \frac{(n+1)}{(m-1)^2 z (z-a_1)} f(z) \quad (4.40)$$

elde edilir.

Eş. 4.40 daha farklı bir formda:

$$z(z-a_1)f''(z) = \left[ \frac{(1-n-m)}{(m-1)} z - \frac{(1+n)}{(m-1)} a_1 \right] f'(z) + \frac{(n+1)}{(m-1)^2} f(z) \quad (4.41)$$

yazılabilir.

Burada aşağıdaki gibi değişken değiştirme yapılırsa:

$$z - a_1 = -a_1 \xi \Rightarrow z = a_1(1 - \xi) \quad (4.42)$$

$$\frac{df}{dz} = \frac{df}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = -\frac{1}{a_1} \frac{df}{d\xi} \quad (4.43)$$

ve

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = \frac{1}{a_1^2} \frac{d^2 \xi}{d\xi^2} \quad (4.44)$$

elde edilir.

Eş. 4.42, Eş. 4.43 ve Eş. 4.44 ifadeleri Eş. 4.41'de yerine yazılırsa:

$$\begin{aligned} \xi(1 - \xi) \frac{d^2 f}{d\xi^2} &= \left[ \frac{(1-n-m)}{(m-1)} (1 - \xi) - \frac{(1+n)}{(m-1)} \right] f'(\xi) - \frac{(n+1)}{(m-1)^2} f(\xi) \\ \xi(1 - \xi) \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \left[ \frac{(2n+m)}{(m-1)} - \frac{(-1+n+m)}{(m-1)} \xi \right] f'(\xi) - \frac{-(n+1)}{(m-1)^2} f(\xi) &= 0 \end{aligned} \quad (4.45)$$

elde edilir.

Eş. 4.45'de  $m = 2$  değeri yazılarak düzenlenirse:

$$\xi(1 - \xi) \frac{d^2 f}{d\xi^2} + [2(n+1) - (-1+n+2)\xi] f'(\xi) - (-(n+1)) f(\xi) = 0 \quad (4.46)$$

ifadesi elde edilir.

Elde edilen Eş. 4.46'de Gauss Hipergeometrik denklemi ile karşılaştırılarak parametreleri arasındaki bağlantıdan çözümü elde etmemiz kolaylaşmaktadır bunun için Gauss hipergeometrik denklemine bakılırsa:

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0 \quad (4.47)$$

şeklindedir.

Eş. 4.47 ile Eş. 4.46 denklemleri farklı parametrelere sahip aynı denklemler olmakla beraber parametrelerindeki farklılıklar kendi aralarında karşılaştırılarak değerleri elde edilir.

Eş. 4.47 ile Eş. 4.46 denklemleri için:

$$\alpha\beta = \frac{-k(n+1)}{(m-1)^2} \quad (4.48)$$

ve

$$\alpha + \beta + 1 = \frac{(-k+n+m)}{(m-1)} \quad (4.49)$$

$$\alpha = \frac{-k(n+1)}{(m-1)^2\beta} \quad (4.50)$$

Eş. 4.50, Eş. 4.49'de yerine yazılırsa:

$$\frac{-k(n+1)}{(m-1)^2\beta} + \beta + 1 = \frac{(-k+n+m)}{(m-1)} \quad (4.51)$$

$$\frac{-k(n+1)}{(m-1)^2} + \beta^2 + \beta = \frac{(-k+n+m)}{(m-1)}\beta \quad (4.52)$$

$$\beta^2 + \frac{k-n-1}{(m-1)}\beta - \frac{k(n+1)}{(m-1)^2} = 0 \quad (4.53)$$

elde edilir. Eş. 4.53 ikinci dereceden denklemin kökleri:

$$\beta_{\pm} = \frac{n+1-k \pm \sqrt{(n+1-k)^2 + 4k(n+1)}}{2(m-1)} = \frac{n+1-k \pm \sqrt{(n+1+k)^2}}{2(m-1)} \quad (4.54)$$

elde edilir.

$$\beta_+ = \frac{n+1}{m-1} \Rightarrow \alpha = -\frac{k}{m-1} \quad (4.55)$$

ve

$$\beta_- = -\frac{k}{m-1} \Rightarrow \alpha = \frac{n+1}{m-1} \quad (4.56)$$

Hipergeometrik fonksiyon:

$$F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = {}_2F_1(\alpha, \beta; ; \gamma; z) \quad (4.57)$$

şeklinde tanımlanır

$$f(\xi) = {}_2F_1\left(-\frac{k}{m-1}, \frac{n+1}{m-1}; \frac{2n+1}{m-1}; \xi\right), \quad m = 2, 3, \dots \quad (4.58)$$

$$y_n^m = x^{\frac{l+1}{m-1}} {}_2F_1\left(-\frac{k}{m-1}, \frac{n+1}{m-1}; \frac{2n+1}{m-1}; \frac{ax^{l-1}}{b(m+n)}\right) \quad (4.59)$$

$$y_n^m = x^{l+1} {}_2F_1\left(-k, n+1; 2n+1; -\frac{ax}{b(m+n)}\right), \quad m = 1, 2, 3, \dots, n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.60)$$

elde edilir.

Bu sonuç denklemimizin en genel çözümünü vermekle birlikte Gauss hipergeometrik denklemle örtüşmüştür.

#### 4.2. $a_2 \neq 0$ Durumu:

Bu durumu incelerken Eş. 4.11'da  $a_2 \neq 0$  olarak alınır.  $a_2 = 0$  durumunda yapıldığı gibi her  $n$  değerine karşılık gelen  $w$  değerleri bilgisayar programı kullanılarak hesaplanacaktır. Eş. 4.11 denkleminde kolaylık olması için  $a_2 = 1$  olarak alınabilir.  $a_2 \neq 0$  için  $m = 2$  ve  $m = 3$  durumları için bulunan  $w$  değerleri:

$m = 2$  için:

Çizelge 4.3.  $a_2 \neq 0$  ve  $m = 2$  için hesaplanan  $w$  polinomları

|         |                                                                       |
|---------|-----------------------------------------------------------------------|
| $n = 0$ | $w - 2a_1 = 0$                                                        |
| $n = 1$ | $w(w^2 - 8a_1w + 12a_1^2) = 0$                                        |
| $n = 2$ | $w^4 - 20a_1w^3 + 108a_1^2w^2 - (216a_2 + 144a_1^3)w + 864a_1a_2 = 0$ |

$m = 3$  için:

Çizelge 4.4.  $a_2 \neq 0$  ve  $m = 3$  için hesaplanan  $w$  polinomları

|         |                                                        |
|---------|--------------------------------------------------------|
| $n = 0$ | $w - 2a_1 = 0$                                         |
| $n = 1$ | $w^2 - 6a_1w + 12a_2 = 0$                              |
| $n = 2$ | $w^2 - 4a_1w + 48a_2 + 24a_1^2 = 0$                    |
| $n = 3$ | $w^3 - 26a_1w^2 + 144a_2w - 120a_1^2w + 480a_1a_2 = 0$ |

Çizelgelerden görüldüğü gibi  $n = 4$ 'den sonra  $w$  değerleri bulunmamaktadır.

Hesaplamaların yarıda kalmasının nedeni olarak bilgisayar sistemindeki yetersizliklerden kaynaklanmıştır. Bundan dolayı daha fazla işlem yapılamamıştır.

## 5. SONUÇ VE TARTIŞMALAR

Bu çalışmada İkinci dereceden diferansiyel denklemlerin özel tip polinom çözümleri çeşitli metotlar kullanılarak araştırıldı. Bu metotlardan birisi Asimtotik İterasyon Metodu (AIM)'dur. AIM ikinci dereceden homojen lineer diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan bir metottur.

Eş. 4.1'de  $y''$ ,  $y'$  ve  $y$  nin katsayıları sırasıyla ikinci, birinci ve sıfıncı dereceden türevlerdir. Burada  $\lambda_0 \neq 0$ ,  $s_0$  ve  $\lambda_0$  türevlenebilir fonksiyonlardır. Eş. 4.5  $a_2 \neq 0$  ve  $a_2 = 0$  durumları için ayrı ayrı incelenmiştir.  $a_2 = 0$  durumunda Eş. 4.5'de gerekli dönüşümler yapılarak Eş. 4.46 elde edilmiş. Bu eşitliğin literatür incelemesi yapılması sonucunda Eş. 4.47'deki Gauss hipergeometrik denklemiyle aynı olduğu görülmüştür. Eş. 4.46 ve Eş. 4.47 parametreleri arasında bağıntı çözülerek Eş. 4.60'daki en genel çözümü elde edilmiştir.  $a_2 = 0$  durumundaki incelemede çözümlerin bulunabileceği fakat sistem yetersizliklerinden dolayı bu durumun verilerinin rapor edilerek gösterilmiş daha fazla bir işlem yapılamamıştır.

Polinom tipli çözümleri olan ikinci mertebe lineer diferansiyel denklemler bulmak, tam çözülebilir potansiyeller üretmek açısından önemli olabileceği görülmüştür.

Kabul edelimki Eş. 4.1'de:

$$y = e^{\int \frac{\lambda_0(x)}{2} dx} f(x)$$

dönüşümü yapılır ve diferansiyel denklemde yerine yazılırsa:

$$f'' = \left( s_0 + \frac{\lambda_0''}{4} - \frac{\lambda_0'}{2} \right) f$$

elde edilir.



Bu ifadede:

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + s_0 + \frac{\lambda_0''}{4} - \frac{\lambda_0'}{2}\right)f(x) = 0$$

şeklinde yeniden yazılır ve  $\frac{\hbar^2}{2m} = 1$  için  $\left(-\frac{d^2}{dx^2} + V(x) - E\right)\Psi(x) = 0$

Schrödinger denklemi ile kıyaslanırsa:

$$V(x) - E = s_0 + \frac{\lambda_0''}{4} - \frac{\lambda_0'}{2}$$

sonucu bulunur.

Bu tür polinom çözümlerini veren  $\lambda_0$  ve  $s_0$  'nın bulunması halinde tam çözülebilir  $V(x)$  potansiyelin verilmesini sağlar.

$V(x)$  potansiyelinin üretilmesi Eş. 4.2, Eş. 4.3 ve Eş. 4.4 fonksiyonlarının değerlerinin uygun seçilmesine bağlıdır.

Örneğin:

25. Referansta  $\lambda_0 = \frac{a_0 x^{n+1}}{1-bx^{n+2}}$  ve  $s_0 = \frac{w}{1-bx^{n+2}}$  değerleri Eş. 4.1 (25. Referans için) yerine yazılırsa:

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m(m+1)}{x^2} + a^2 x^{2N+2}\right)y(x) = Ex^N y(x)$$

$$f'' = 2\left(ax^{N+1} - \frac{m+1}{x}\right)f' - wx^N f$$

denklemi elde edilir.

Bu denklemde  $N = -1$  ve  $m = l + (d - 3)/2$  değerleri için:

$$E_{nm} = \frac{-z^2 e^4}{4(n + m + 1)^2}$$

elde edilir.

Bu ifade bize Coulomb potansiyelini vermektedir.

$N = 0$  seçildiği durumda ise:

$$E_{nm} = a(4n + 2m + 3)$$

elde edilir.

Bu ifade ise Harmonik osilatörün potansiyel ifadesini vermektedir.

Başka bir örnek verirse Eş. 4.2 ve Eş. 4.3 de:

$f(x) = x, a_2 = 1, a_1 = 0, c = -1$  alınır ise 25. Referansdaki Eş. 5.7 için  $\alpha = -1$  için özel hali elde edilir.

Buradan ise:

$$V(x) = \frac{\beta(\beta+1)}{\sin^2(x)}$$

elde edilir.

Bu ifade bize Pörschl-Teller potansiyelini vermektedir.

## KAYNAKLAR

1. Morse, P. M., Feshbach, H., “Method of Theoretical Physics”, **McGraw-Hill**, New York, (1953).
2. Rainville., “Intermediate Differential Equations”, **Chelsea Publishing Company**, (1972).
3. Dibekçi, D., “Schrödinger denklemini tamamiyle çözülebilir kılan potansiyel Sınıfları”, Doktora Tezi, **Yıldız Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**, İstanbul, (1983).
4. Landau, L. D., Lipschitz, E. M., “Kuantum Mekanigi”, **Moskova:Pergamon Press**, (1963).
5. Kartal, Ş., “İkinci ve dördüncü dereceden Sturm – Liouville tipinde iki noktalı sınır değer probleminin özdeğerlerinin varvasyonel iterasyon ve homotopi pertürbasyon yöntemleriyle hesaplanması”, Yüksek Lisans Tezi, **Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**, Niğde, (2009).
6. Andrews, G. E., Askey, R., Ray, R., ” Special Function”, **Cambridge University Press**, (1999).
7. Andrews, L. C., “Special Functions of Mathematics”, **Oxford University Press**, (1995).
8. Arfken, G., “Mathematical Methods for Physicisth”, **Academic Press**, New York, (1970).
9. Fatunla, S. O., “Numerical methods for initial value problems in ordinary differential equations”, **Academic Press**, London, (1988).
10. Butcher, J. C., “The numerical analysis of ordinary differential w questions. Runge – Kutta and general linear methods”, **Eng. John Wiley & Sons**, (1987).
11. Hairer, E., Norsett, S. P., Wanner, G., “Solving ordinary differential equations 1”, **Berlin Heidelberg: Springer – Verlag**, (1987).
12. Bulirsch, R., Stoer, J., “Introduction to numerical analysis”, **Berlin Heidelberg:Springer – Verlag**, (2000).
13. Gottfrien, K., Yan, T. M., “Quantum Mechanics: Fundamandal Second Edition”, **Bıçaklar Kitabevi**, Ankara, 216-218 (2004).

14. Krieger, J. B., Lewis, M. L., Rosenzweig, C., "Use of the WKB Method for Obtaining Energy Eigenvalues", *The Journal of Chemical Physics*, 47(8):2942-2944 (1967).
15. Hautot, A., "On The Hill – determinant method", *Physical Review D*, 33(2):437- 443 (1985).
16. Chaudhuri, R. N., Mondal, M., "Eigenvalues of anharmonic oscillators and the perturbed Coulomb problem in N-dimensional space", *Physica Review A*, 52(3):1850-1854 (1995).
17. Biswas, S. N., Data, K., Saxena, R. P., Srivastava, P. K., Varma, V. S., "The Hill Determinant: An Application to the Anharmonic Oscillator", *Physical Review D*, 3(12):3617-3619 (1971).
18. Fernandez, F. M., Ma, Q., Tipping, R. H., "Tight upper and lower bounds for energy eigenvalues of the Schrödinger equation", *Physical Review A*, 39(4):1605-1609 (1989).
19. Fernandez, F. M., Frydman, G. I., Castro, E. A., "Tight bounds to the Schrödinger equation eigenvalues", *J. Phys. A:Math. Gen.*, 22: 641-645 (1989).
20. Fernandez, F. M., Guardiola, R., "The Riccati-Pade method for coupled-channel equations", *J. Phys. A:Math. Gen.*, 30:5825–5833 (1997).
21. Baker, G. A., "Essentials of Pade Approximants", *Academic Press*, New York, San Francisco, London, 5–9 (1975).
22. Tang, A. Z., Chan, F. T., "Shifted  $1/N$  expansion for the Hulthen Potential", *Physical Review A*, 35(2):911–914 (1986).
23. Roychoudhury, R., Varshini, T. P., "Rotating oscillator-shifted  $1/N$  expansion and supersymmetric considerations", *Physical Review A*, 37(7):2309–2313 (1988).
24. Imbo, T., Papnamenta, A., Sukhatme, U., "Energy eigenstates of spherically symmetric potentials using the shifted  $1/N$  expansion", *Physical Review D*, 29(8): 1669-1672 (1983).
25. Ciftci, H., Hall, R. L., Saad, N., "Construction of exact solutions to eigenvalue problems by the asymptotic iteration method", *Journal of Physics A:Mathematical and General*, 38:1147–1155 (2005).
26. Ciftci, H., Hall, R. L., Saad, N., "Asymptotic iteration method for eigenvalue problems," *Journal of Physics A:Mathematical and General*, 36:11807 11809 (2003).

27. Fernandez, F. M., “On an method for eigenvalue problems”, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 37:6173–6180 (2004).
28. Ciftci, H., Hall, R. L., Saad, N., “Iterative solutions to the dirac equation”, *Physical Review A*, 72(022101): 1-3 (2005).
29. Ciftci, H., Hall, R. L., Saad, N., “Perturbation theory in a framework of iteration methods”, *Physical Letters A*, 340:388–396 (2005).
30. Amore, P., Fernandez, F. M., “Comment on an application of the asymptotic iteration method to a perturbed Coulomb model”, *Journal of Physics A:Mathematical and General*, 39:10491–10497 (2006).
31. Ciftci, H., Ateser, E., “Study of a bounded oscillator problem in one dimension”, *Physica Scripta*, 76: 517– 520 (2007).
32. Çiftci H., Richard L. H., Saad N. and Dogu E., “On polynomial solutions of a second- order linear differential equation and some applications”, *J. Phys. A:Math. Theor.*, 43-415206 (2010).

## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : DOĞU, Ebubekir  
 Uyuğu : T.C.  
 Doğum tarihi ve yeri : 21.12.1983 Ankara  
 Medeni hali : Bekar  
 Telefon : 0 (539) 274 72 24  
 e-mail : [ebudogu@hotmail.com](mailto:ebudogu@hotmail.com)

### Eğitim

| Derece        | Eğitim Birimi                      | Mezuniyet tarihi |
|---------------|------------------------------------|------------------|
| Yüksek lisans | Gazi Üniversitesi /Fizik Bölümü    | 2011             |
| Lisans        | Niğde Üniversitesi/ Fizik Bölümü   | 2007             |
| Lise          | Akyurt Ç. P. Lisesi /Fen Bilimleri | 2001             |

### Yabancı Dil

İngilizce

### Yayınları

1. Çiftci H., Richard L. H., Saad N. and Dogu E., “On polynomial solutions of a second- order linear differential equation and some applications”, J. Phys. A:Math. Theor., 43-415206 (2010).