KANAT ETRAFINDA SIKIŞTIRILABİLİR AKIŞIN SAYISAL OLARAK İNCELENMESİ

Halil IŞIK

DOKTORA TEZİ
MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2010
ANKARA

Halil IŞIK tarafından hazırlanan "KANAT ETRAFINDA SIKIŞTIRILABİLİR AKIŞIN SAYISAL OLARAK İNCELENMESİ" adlı bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof.Dr. Nuri YÜCEL
Tez Danışmanı, Makina Mühendisliği

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Makina Mühendisliği Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof.Dr. Haşmet TÜRKOĞLU
Makina Mühendisliği, Gazi Üniversitesi
Prof.Dr. Nuri YÜCEL
Makina Mühendisliği, Gazi Üniversitesi
Prof.Dr. Ünver KAYNAK
Makina Mühendisliği, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Prof.Dr. Şenol BAŞKAYA
Makina Mühendisliği, Gazi Üniversitesi
Yrd.Doç.Dr. Murat Kadri AKTAŞ
Makina Mühendisliği, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

29/01/ 2010

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Doktora derecesini onamıştır.

Prof.Dr. Bilal TOKLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Halil IŞIK

KANAT ETRAFINDA SIKIŞTIRILABİLİR AKIŞIN SAYISAL OLARAK İNCELENMESİ
(Doktora Tezi)

Halil IŞIK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ocak 2010

ÖZET

Kanat etrafındaki akışın sayısal olarak çözümü, hava araçları ve turbo makina parçalarının aerodinamik tasarımlarında çok önemli bir yer tutmaktadır. Bu tez çalışmasında iki boyutlu, zamandan bağımsız ve sürtünmeli akış, ses altı hızlarda incelenmiştir. Çalışmalarda akışkan hareketlerini tanımlayan denklemler olarak kabul edilen Navier-Stokes denklemleri, koordinat dönüşümü yapılarak çözümlenmiştir. Gerçek hayatta akış problemlerinin çoğu türbülanslı akışlardır. Türbülans etkileri standart k-ε modeli kullanılarak dikkate alınmıştır. Sayısal çözümlerin doğruluğunu test etmek için literatürden elde edilen çözümlerden faydalanılmıştır. Bunun için öncelikle düz plaka üzerinden laminer ve türbülanslı akış çözülerek sonuçlar doğrulanmıştır. Daha sonra nozul, dikdörtgen şekilli yüzeyler ve NACA 0012 kanat üzerinden akış sayısal olarak incelenmiştir.

Bilim Kodu : 625.04.03
Anahtar Kelimeler : Navier-Stokes Denklemleri, k-ε Türbülans Modeli, Sonlu Hacim Metodu, CFD
Sayfa Adedi : 171
Tez Yöneticisi : Prof.Dr.Nuri YÜCEL

NUMERICAL SIMULATION OF COMPRESSIBLE FLOW AROUND AN AIRFOIL

(Ph.D. Thesis)

Halil IŞIK

GAZİ UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

January 2010

ABSTRACT

Numerical simulation of flow around an airfoil is important in the design of aircrafts and turbomachinery components. In this thesis, two-dimensional, steady and viscous flow is studied for subsonic velocities. Navier-Stokes equations are solved by transforming all the equations into the curvilinear coordinates. In the real life, most of the flow problems are turbulent. The effects of turbulence are accounted for by using the standard k-ε turbulence model. To confirm the numerical results, comparisons with the data available in the literature are made. First of all, laminar and turbulent flow over a plate is solved and the code is confirmed. Then flow through a nozul, flow over rectangle shaped surfaces and flow over a NACA 0012 airfoil is studied numerically.

Science Code : 625.04.03
Key Words : Navier-Stokes Equations, k-ε Turbulence Model, Finite Volume Method, CFD

Page Number : 171
Adviser : Prof.Dr. Nuri YÜCEL

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, kıymetli tecrübelerinden faydalandığım Prof. Dr. Nuri YÜCEL, Prof. Dr. Haşmet TÜRKOĞLU ve Prof. Dr. Ünver KAYNAK hocalarıma teşekkürü, ayrıca çalışmalarım esnasında maddi/manevi desteğini eksik etmeyen, bana moral ve cesaret veren eşime sonsuz sevgilerimi sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

Sayfa

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

Şekil **Sayfa**

Şekil **Sayfa**

Şekil **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
P	Yoğunluk
u	X- yönündeki hız bileşeni
v	Y- yönündeki hız bileşeni
P	Basınç
T	Sıcaklık
T_w	Duvar sıcaklığı
h	Enthalpi
σ_t	Türbülanslı Prandtl sayısı
c	Veter uzunluğu
k	Türbülans kinetik enerjisi
ε	Türbülans kinetik enerjisi yutulma miktarı
$C_{1\varepsilon}$, $C_{2\varepsilon}$, C_μ	Türbülans katsayıları
A	Hücum açısı
μ	Viskozite
υ	Kinematik viskozite
μ_t	Türbülans viskozitesi
C_p	Isıl katsayı
R	İdeal gaz sabiti
Re	Reynolds sayısı
Re_t	Türbülans Reynolds sayısı
τ_w	Duvar kayma gerilmesi
F_s	Duvar kuvveti
y_p	Duvara en yakın mesafe
U_τ	Duvar kayma gerilme hızı

K	Cappa sayısı, 0.41
A	Yüzey alanı
ΔV	Hücre hacmi
q_w	Duvar ısı akısı
δ	Sınır tabaka kalınlığı
x, y	Kartezyen koordinat eksenleri
ξ, η	Eğrisel koordinat eksenleri
J	Jacobian
x_ξ, y_ξ, x_η, y_η, ξ_x, ξ_y, η_x, η_y	Metrik değerler
φ	Herhangi değişken
Γ	Difüzyon katsayısı
S	Kaynak terimi
L	Karakteristik uzunluk
H	Yükseklik
M	Mach sayısı
Pr	Prandtl sayısı
Nu	Nusselt sayısı
C_f	Yüzey sürtünme katsayısı

Kısaltmalar	**Açıklama**
CFD	Bilgisayar Destekli Akışkanlar Dinamiği

1.GİRİŞ

Akış problemlerinin çözümüne yönelik çalışmalar özellikkle son 25 yıldır büyük bir hızla devam etmektedir. Ölçüm tekniklerinin geliştirilmesiyle deneysel çalışmalar büyük bir ilerleme kaydetmiştir. Bu çalışmalar doğrultusunda analitik çalışmalar da hız kazanmıştır. Akış problemlerinin sayısal olarak çözülmesiyle ilgili alanda ise ilk çalışmalar 1950'li yıllara dayanmasına rağmen, çalışmalar bu dönemde önemli ölçüde elektronik hesaplayıcıların gelişimine bağlı olarak daha yavaş ilerlemiştir. Son yıllarda özellikle bilgisayar kapasitelerinin ve hızlarının artmasıyla geliştirilen metotların fayda ve mahzurlarının görülmesi imkanı doğmuştur. Bununla birlikte sayısal çözümleme konularında çok yeni ve ileri çözüm metotları geliştirilmeye başlanmıştır. Günümüzde sayısal çözüm alanındaki çalışmalar artan bir ivmeyle devam etmektedir.

Analitik çalışmaların faydaları, deneysel veya sayısal çözüm metotlarının doğrulanmasına yardımcı olmalarıdır. Deneysel çalışmalar ise gerçek veya gerçeğe yakın sonuçların görülmesine yardımcı olması nedeniyle önemlidir. Fiziksel anlamda akış problemlerinin davranışları deneysel çalışmalar sonucunda görülme imkanı bulmuştur. Bu faydalarının yanında deneysel çalışmaların bazı mahzurları da bulunmaktadır. Laboratuvar çalışmalarında gerçek ya da istenen sınır şartlarını oluşturmak çoğu zaman zordur. Özellikle türbülanslı akışlarda bu zorluk daha çok yaşanmaktadır. Bazen farklı akışlar için deney düzeneğinin kalibrasyonu veya kompleks akışlarda doğru ölçümün zorluğu küçümsenmeyecek boyutlardadır. Deneysel çalışmaların en büyük dezavantajı, deneysel düzeneklerin kurulması ve deney cihazlarının maliyetlerinin yüksek olmasıdır.

Sayısal hesaplamaların en büyük avantajı, diğer metotlara göre çok daha ucuz ve hızlı olmalarıdır. Analitik ve deneysel çalışmalardaki sınırlamaların çoğu yoktur ve her türlü karışık akış probleminin çözümüne imkan sağlanmaktadır. Hatta deneysel olarak yapılmasının imkansız olduğu yüksek sıcaklık veya basınç değerlerinde çözüm elde etmek mümkündür. Deneysel çalışmalarda karşılaşılan çeşitli parametrelerdeki kalibrasyon sorunları yoktur. Sayısal çözümleme maliyetleri ise bilgisayar kapasitelerinin gelişmesiyle birlikte sürekli düşmektedir. Fakat sayısal çözümlemelerin de bazı dezavantajları vardır. Özellikle türbülanslı akış problemlerinde, sayısal çözümlemelerden elde edilen sonuçların doğruluğu, geliştirilen çözüm metoduna ve bilgisayarların kapasitesine bağlı olarak değişmektedir. Türbülanslı akışların çözümü için genellikle yüksek sayıda çözüm ağına ihtiyaç olmaktadır. Elde edilen sonuçların hassasiyeti kullanılan yöntem ve ağ miktarı ile değişkenlik göstermektedir. Akış problemlerinin çözümünde sayısal metotların hiçbiri tek başına yeterli değildir. Elde edilen sonuçların mutlaka analitik ve deneysel sonuçlarla desteklenmesi gereklidir.

Sayısal çözümlemelerde sonlu hacim ve sonlu farklar metotları akış problemlerinin çözümünde genel çözüm yöntemleridir. Bir akışkan, hareketi boyunca çoğu zaman katı yüzeylerle temas halindedir. Katı yüzeyler de düz ve eğrisel yüzeyler olarak ikiye ayrılmaktadırlar. Bu nedenle yüzey üzerinden akış problemlerinin çözümünde kullanılacak koordinat sistemi önemlidir. Günümüzde eğik veya eğrisel yüzeye sahip karmaşık yüzeyler üzerinden akışlar için, yüzeye uyumlu eğrisel koordinat sisteminin kullanılması daha yaygın hale gelmiştir.

Eğrisel koordinat sisteminde momentum denklemlerinde yer alan değişkenler için iki alternatif bulunmaktadır. Bunlardan ilki kartezyen hız bileşenleri, diğeri kartezyen olmayan hız bileşenleridir. Hareket denklemleri olarak tanımlanan Navier-Stokes (N-S) denklemlerinde, basit oluşu nedeniyle kartezyen hız bileşenleri tercih edilmelerine karşın, kartezyen olmayan hız bileşenlerinin kullanıldığı eğrisel koordinatlarda tam konservatif N-S denklemlerinin kullanılması hızla yaygınlaşmaktadır. Bu metot ilk olarak Karki (1986) tarafından doktora tez çalışmasında geliştirilmiştir. Kullanılan yöntem temel olarak, kartezyen hız bileşenlerinin kullanıldığı denklemlerde bazı değişiklikler yapılarak, kartezyen olmayan hız bileşenlerinin kullanıldığı denklemler haline dönüştürülmesi esasına dayanmaktadır. Kullanılan yöntem daha sonra birçok araştırmacı için temel teşkil etmiştir [Xu ve Zhang, 2000].

Grid dağılımının oluşturulması sayısal çözümlemelerde diğer önemli bir unsurdur. Grid dağılımı, kaydırılmış ve kaydırılmamış grid olarak ikiye ayrılmaktadır. Kaydırılmış grid dağılımında ortogonal koordinatlarda fiziksel olarak anlamsız basınç dalgalanmaları engellenebilmektedir. Fakat ortogonal olmayan koordinatlarda, hız bileşenleri koordinat çizgileri ile aynı doğrultuda olmadıklarından, uygun hız bileşenleri kullanılmadığı takdirde bu yöntem yeterli sonuç vermemektedir. Kaydırılmamış grid dağılımının kullanımı basit ve kolay oluşları nedeniyle daha yaygın kullanılmaktadır. Bu tür grid dağılımında fiziksel olarak anlamsız basınç dalgalanmalarının engelenmesi maksadıyla Rhie ve Chow (1983), daha basit kullanımı olan yeni bir yöntem geliştirmiştir [Xu ve Zhang, 2000].

Sürtünmeli veya sürtünmesiz akış problemleri için geliştirilen sayısal çözüm metotları sıkıştırılamaz ve sıkıştırılabilir akışlar için olmak üzere sınıflandırılmaktadırlar. Sıkıştırılamaz akışlar için geliştirilen metotlar genellikle basıncı ana bağımlı değişken olarak almakta ve fiziksel olarak anlamsız basınç dalgalanmaları engellemek için kaydırılmış grid dağılımını kullanmaktadırlar. Sıkıştırılabilir akışlarda ise yoğunluk ana bağımlı değişken olarak alınmakta, basınç daha sonra hal denkleminden elde edilmektedir. Bu yöntemlerin çoğu, tüm değişkenlerin aynı konumda bulunduğu kaydırılmamış grid dağılımını kullanmaktadırlar. Yoğunluğun değişken olarak kullanıldığı bu metotlar, sıkıştırılamaz veya Mach sayısının düşük olduğu akışlarda kullanılamaz. Bunun nedeni, yoğunluk değişimlerinin çok küçük olması ve basınç-yoğunluk bağımlılığının (coupling) zayıflamasıdır. Basıncı ana değişken olarak kullanan metotlarda basıncın Mach sayısı değişiminden etkilenmemesi nedeniyle söz konusu zorluk yaşanmamaktadır. Bu nedenle sayısal çözüm yönteminde, basıncın ana değişken olarak kullanılması daha geniş Mach sayısında kullanım imkanı vermektedir [Karki ve Patankar, 1989].

Akım tipleri laminer ve türbülanslı olarak ikiye ayrılırlar. Mühendislik uygulamalarında, akışkan hareketinin en karmaşık türü olarak türbülanslı akışlar bilinir. Tüm türbülanslı akışların bir karakteristiği, düzensizlik ve rasgeleliktir. Bu durum, türbülans modellerine belirleyici bakışı imkansız yapar, bunun yerine istatistiksel metotlara dayanılır.

Türbülans modellemenin en önemli sorunu hangi modelin hangi akış tipleri için uygun olduğu veya genel bir türbülans modelinin tüm akışlarda yeterince tatminkar sonuçlar verip veremeyeceğidir. Türbülans modelinin genel bir model olması için sadece özel bir problem için uygun olması yeterli değildir. Türbülanslı akış genellikle yüksek Reynolds sayılarında meydana gelir. Türbülans çoğu zaman, genel olarak yüksek Reynolds sayılarında laminer akışın stabilitesinin bozulması esasına dayandırılır. Bozuk stabilite, hareket denklemlerindeki viskoz ve lineer olmayan atalet terimlerinin etkileşmesiyle ilgilidir.

Birçok mühendislik tasarımında kanat üzerinden akışa rastlamak mümkündür. Bunlardan bazıları, uçak, helikopter rotorları, kompresörler, türbinler ve fanlar olarak sıralanabilir. Çok çeşitli kanat geometrisi olmakla birlikte, kanat kesitinin geometrisi genel tasarım kriterlerini belirleyen en önemli unsurdur.

Bir akış probleminin çözülebilmesi için öncelikle akış denklemleri olan Navier-Stokes denklemlerinin çözülmesi gerekmektedir. Bu denklemlerin sürtünmesiz şekline Euler denklemleri denilir. Geçmişte yapılan çalışmalarda, yüzey üzerinden akış problemleri sürtünmesiz akış kabulü yapılarak, Euler denklemleri çözülmesi esasına dayandırılmıştır. Daha sonra sonuçlar sürtünmenin etkisini dikkate alacak şekilde ampirik bağıntılarla modifiye edilmiştir. Sürtünmeli akışlar söz konusu olduğunda sınır tabaka oluşumu söz konusu olmakta ve bu noktada yüzey üzerinde oluşturulması gereken grid dağılımı çok büyük önem arz etmektedir. Grid dağılımının doğru oluşturulması elde edilecek değerlerin doğruluk derecelerini artıran en önemli parametrelerdendir. Çünkü basit geometrilerde grid dağılımını oluşturmak kolay olmasına rağmen kanat gibi karışık geometrilerde bu çok zorlaşmaktadır. Geçmiş çalışmalarda daha çok basit geometriler üzerinde çalışılmıştır. Problemin türbülanslı oluşu çözümü zorlayan en önemli etkenlerdendir. Gerçek hayatta akış problemlerinin çoğu türbülanslı akışlardır. Türbülanslı akışların çözümüne yönelik birçok araştırma yapılmaktadır. Fakat türbülansla ilgili henüz tüm problemlere uygulanabilen genel bir model elde edilebilmiş değildir. Yaygın olarak kullanılan birkaç model ön plana çıkmıştır. Bunlardan bir tanesi de bu çalışmada kullanılan k-ε türbülans modelidir.

Bu çalışmada, sıkıştırılabilir akış için, süreklilik, momentum ve enerji denklemleri, standart k-ε türbülans modeli denklemleri ile birlikte çözülmüştür. Eğri yüzey üzerinden akış problemlerinin çözümü için koordinat transformasyonu yapılarak, denklemlerin kartezyen koordinatlardaki ifadeleri, eğrisel koordinat sistemine transform edilmiştir. Eğrisel koordinatlardaki denklemler kontrol hacmi yaklaşımı kullanılarak ayrıklaştırılmıştır. Tez çalışması sırasında geliştirilen bilgisayar programı kullanılarak, iç ve dış akışlar için, çeşitli geometri ve sınır şartlarındaki problemler için çözüm yapılmış, sonuçlar literatürdeki deneysel ve sayısal benzer çalışmaların sonuçları ile karşılaştırılıp, yorumlanmıştır. Eğrisel yüzeyler üzerinden akış analizi için, H-tipi ve C-tipi ağ oluşumu oluşturmak için de ayrı bir kod yazılmıştır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Literatürde, gerek düz gerekse eğrisel yüzeyler üzerinden, sıkıştırılamaz ve sıkıştırılabilir akış problemlerinin analizi ile ilgili birçok deneysel ve sayısal çalışma bulunmaktadır. Son yıllarda, bilgisayar kapasitelerinin artması ve ticari Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği (HAD) kodlarının geliştirilmiş olması nedeniyle konu ile ilgili birçok sayısal çalışma yapılmıştır. Ayrıca teknolojinin gelişmine bağlı olarak deney düzeneklerinin hassasiyetlerinin artması ve yeni geliştirimiş alet ve cihazlar kullanılarak konu ile ilgili birçok deneysel çalışma da göze çarpmaktadır.

Launder ve Spalding [1974], günümüzde standart k-ε modeli olarak bilinen ve birçok akış probleminin çözümünde kullanılan türbülans modelini geliştirmişlerdir. Bu tez çalışmasında da Launder ve Spalding [1974], tarafında geliştirilen standart k-ε türbülans modeli kullanılmıştır.

Sıkıştırılabilir ve sıkıştırılamaz viskoz akışlar için bütün hızları kapsayacak (ses altı-sesüstü) şekilde SIMPLER algoritması kullanılarak sayısal bir metot Karki [1986], Karki ve Patankar [1989] tarafından geliştirilmiştir. Geliştirilen bu metotda kartezyen koordinatlardaki hızlar yerine, eğrisel koordinatlar doğrultusundaki hız bileşenleri kullanılmıştır. Geliştirilen metod kullanırak yapılan sayısal simülasyon sonuçları literatürdeki deneysel ve sayısal sonuçlarla karşılaştırılarak metodun geçerliliği kanıtlanmıştır. Lai ve Yang [1997], silindirik koordinatlarda standart k-ε modeli ve 3 değişik düşük Reynolds sayılı k-ε türbülans modelleri ve duvar fonksiyonlarını kullanarak içinde halka bulunan boru içinden akışı incelemişlerdir. Çözüm hem gelişen hem de tam gelişmiş akımlar için elde edilmiştir. Gelişmekte olan akış bölgesinde, türbülansa geçişin engellenmesi (turbulunce suppression) düşük Reynolds sayılı türbülans modellerinin sonuçlarının deneysel sonuçlarla daha uyumlu şekilde tahmin edildiği görülmüştür.

Ni [1982], zamana bağlı 2 boyutlu Euler denklemlerini Ni tümseği (Ni Bump) üzerinden akış için çözmüştür. Yapılan çalışmada, multigrid tekniği ile ikinci dereceden hassas sonlu hacmi metodu birleştirilerek yeni bir hızlı ve açık (explicit) metod geliştirilmiştir. Yapmış olduğum tez çalışması sırasında, Ni tümseği kullanılarak ses altı, transonik ve ses üstü hızlar için simülasyonlar yapılmış ve sonuçlar tez içinde verilmiştir. Kararlı akım şartlarında Euler denklemlerinin transonic akışların çözümü için yeni ve efektif bir metod Atkins ve Hassan [1983] tarafından geliştirilmiştir. Jameson ve Mavriplis [1985] iki boyutlu Euler denklemlerini sonlu hacim metodunu kullanarak çözmüşlerdir. Çözümlemede 0^o ve 1.25^o hücum açılarında 0.8 Mach sayısında NACA 0012 kanat üzerinden transonic akışı incelemişlerdir. Elde edilen sonuçların deneysel ve sayısal çözümlerle örtüştüğü tespit edilmiştir.

Literatürde koordinat transformasyonu yapılarak, kanat ve çeşitli geometriler üzerinden dış laminer akışlarla ilgili birçok çalışma bulunmaktadır. Sıkıştırılabilir konservatif formdaki Navier-Stokes denklemlerinin sayısal çözümü için implicit sonlu farklar yöntemi Beam ve Warming [1978] tarafından geliştirilmiştir. Geliştirilen metod sadece kartezyen koordinat sistemindeki akış problemlerinin çözümü ile sınırlı oldu belitilmiştir. Metot, Couette akış, düz plaka üzerinde ses üstü akışlar için uygulanmış olup, yöntemin şok sınır tabaka etkileşimini doğru olarak tahmin ettiği gösterilmiştir. Pulliam ve Steger [1980], koordinat transformasyonu yaparak sıkıştırılabilir ve laminer 3 boyutlu akışlar için implicit sonlu fark metodu ile transonik sürtünmesiz ve sürtünmeli akış denklemlerini çözmüşlerdir. MacCormack [1982], yüksek Reynolds sayılı laminer akışları incelemiştir. Literatürde kendi adı ile bilinen MacCormack implicit sonlu fark metodunu geliştirmiştir. Düz bir plaka üzerinde ses üstü (Mach=2) ve yüksek laminer (Re=296,000) akışta plaka üzerinde oluşan şok dalgalarının etkisiyle sınır tabakada bir ayrılma sonra tekrar birleşme görüldüğünü tesbit edilmiş ve bu ayrılma-birleşme bölgesinin içinde girdaplar oluştuğu görülmüştür. Lawrence ve ark. [1984,1989], 2 boyutlu “Parabolized Navier-Stokes” denklemlerine implicit MacCormack metodunun uygulamasını incelemişlerdir. Koordinat transformasyonu yapıp denklemleri boyutsuzlandırarak, düz plaka ve 15^o eğimli köşe üzerinden hipersonik akış üzerinde çalışmışlardır. Sonuçlar, literatürdeki sayısal ve deneysel çalışma sonuçları ile karşılaştırılmış ve uyumlu olduğu görülmüştür. Sıkıştırılamaz ve laminer kararlı akışlar için ortogonal olmayan kaydırılmamış ağ kullanılarak yeni bir sayısal yaklaşım Xu ve Zhang [2000] tarafından geliştirilmiştir. Eğrisel koordinatlarda momentum denklemlerinin çözümünde bağımlı değişken olarak karşıdeğişken (contravariant) hızları kullanmışlardır. Davis ve ark. [1984] sıkıştırılabilir viskoz akışların çözümü için zaman ilerlemeli kontrol hacmi ve multiple-grid tekniği kullanarak farklı bir metot geliştirmiştir. Geliştirilen yöntem süpersonik difüzörde ve kıvrımlı daralan bir boru içinde akış için çözülmüş ve deneysel sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Sürtünmeli ve sürtünmesiz transonik akışların NACA 0012 kanat üzerinden 0^o ve 1.25^o hücum açılarında akışını incelemek için implicit bir yöntem Venkatakrishnan [1989] tarafından geliştirilmiş ve kullanılmıştır. Chima ve Johnson [1985] multigrid algoritması kullanılarak Euler ve Navier-Stokes denklemlerinin çözümü için bir metod geliştirilmiştir. Geliştirilen yöntem ses altı transonik ve ses üstü sürtünmesiz akışlar ile ses altı hızlarda viskoz akış problemlerinin çözümünde başarılı bir şekilde kullanılmıştır. NACA 0012 ve RAE 2822 tipi iki farklı kanat üzerinde farklı Mach sayısı, hücum açısı ve Reynold sayılarında kartezyen ağ kullanılarak Navier-Stokes denklemleri sonlu hacim yöntemi kullanılarak Frymier ve ark. [1988] tarafından çözülmüştür. Yukarıda bahsedilen çalışmalar laminer akış problemleri için yapılmış çalışmalardır, bu tez çalışmasında ise sadece laminer akış ile ilgili değil ayrıca türbülanslı akış problemleri için de çözümler yapılmıştır.

Swanson ve Radespiel [1991], Navier-Stokes denklemlerini hücre merkezli (cell centered) ve hücre kenarlı (cell vertex) sonlu hacim multigrid yöntemi ile çözmüştür. Her iki yöntem kanat üzerinde transonik akış problemi için denenmiş, ve her iki yöntemin de yakınsadığı ve iyi sonuç verdiği görülmüştür. Liu ve Jameson [1992] türbülanslı ve sıkıştırılabilir 3 boyutlu akışı sonlu hacim metodunu kullanarak çözümlemişlerdir. Türbülans modeli olarak Baldwin-Lomax metodunu kullanmışlardır. İlk olarak 0^o hücum açısı, 0.5 Mach sayısı ve 5000 Reynolds sayısında NACA 0012 kanat üzerinden laminer akış çözülmüş, sürtünme ve sürükleme katsayıları elde edilmiştir. Bulgular literatürdeki sonuçlara çok yakın çıkmıştır. Daha sonra düz plaka üzerinden 0.3 Mach ve 35000 Reynolds sayısında laminer akış çözülerek hız ve sürtünme katsayıları elde edilmiştir. Bu akış düşük Mach sayısında sıkıştırılabilir kabul edilerek Blasius denklemlerinden elde edilen sonuçlarla kıyaslanmıştır. Aynı plaka üzerinden türbülanslı akış denemesi ise $6x10^6$ Reynolds sayısında gerçekleştirilmiş, bulgular Prandtl'ın 1/5 kanunu ile kıyaslanmıştır. Her iki laminer ve türbülanslı akış sonuçlarının analitik denklemlerden elde edilenlerle uyumlu olduğunu tespit etmişlerdir. Liu ve Jameson [1992] yapmış oldukları çalışma, bu tezde yapılan çalışmanın benzeri bir çalışma olup temel farklılık kullanılan türbülans modellerinin farklılığıdır. Ayrıca seçilen parametreler de birbirinden farklıdır.

Ahmed ve ark. [1998], standart k-ε modeli ile SIMPLE metodu ve duvar fonksiyonlarını kullanarak, sıkıştırılamaz, zamandan bağımsız, türbülanslı ve sistemde ısı transferinin olmadığı bir durum için, 2 boyutlu akış denklemlerini sayısal olarak çözerek NACA 0012 kanadı üzerindeki akışı incelemişlerdir. Çalışmada yüksek hücum açılarında ayrılma noktası bulunmaya çalışılmış, hücum açısının ve soliditenin (c/s, veter boyunun, kanat izdüşüm alanına oranı) akışa etkileri incelenmiştir. Ayrıca basınç, taşıma ve sürükleme katsayıları hesaplanarak literatürdeki sonuçlarla kıyaslanmıştır. Soliditenin artmasıyla ayrılmanın gerçekleştiği hücum açısının arttığı sonucuna varmıştır. Ayrıca basınç, taşıma ve sürükleme katsayılarının önemli ölçüde hücum açısı ve soliditeden etkilendiğini tespit etmiştir.

Mittal [1998] çalışmasında zamana bağlı sürtünmeli akışlar için bir yöntem geliştirmiştir. NACA 0012 kanadı üzerinden çeşitli hızlarda akışlar çözümlenmiştir. İlk olarak 0^0 hücum açısında 0.5 Mach ve 5000 Reynolds sayısında laminer akış çözülerek basınç, entropi ve Mach sayısı dağılımları hesaplanmıştır. Sonuçların literatürdekilerle örtüştüğü görülmüştür. Daha sonra 0^0 hücum açısında, 0.85 Mach sayısında sırasıyla 500, 2000 ve 10000 Reynolds sayılarında transonic akış incelenmiş, basınç ve sürtünme katsayıları literatürdekilerle kıyaslanmıştır. Son olarak 0.85 Mach sayısında ve bu defa 10^0 hücum açısında akışı çözümlemiştir. Sürükleme ve taşıma katsayısı grafiklerinden akışın belli zaman sonra zamandan bağımsız hale dönüştüğü şeklinde ilginç bir sonuç tespit edilmiştir.

Matesanz ve ark. [1998], k-ε türbülans modelini kullanarak zamana bağlı Reynolds ortalamalı Navier-Stokes denklemlerini süpersonik akışları sonlu elemanlar metodunu kullanarak çözmek için bir bilgisayar programı geliştirmişlerdir. Doğrulama için düz plaka üzerinden akış sonuçları deneysel sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Metot uçak gövdesi üzerinde yüksek hızlı (Mach<5) akış simülasyonu için de kullanılmıştır. Barakos ve Dirikakis [1999], zamana bağlı, implicit, sıkıştırılabilir, laminer ve türbülanslı akışları, farklı Mach sayılarında salınım hareketi yapan NACA 0012 kanadı ve hareketli yüzeyler üzerinde incelemişlerdir. Sonuçların değişik türbülans modellerinde önemli ölçüde farklılıklar gösterdiği görülmüştür. Dolayısıyla türbülans modelinin doğru seçimi çözümün doğruluğunda belirleyici rol üstlenmektedir.

Murthy ve ark. [2000] kararsız sıkıştırılabilir Navier-Stokes denklemlerini sürtünmesiz akış için üçüncü derece Roe metodu ile sürtünmeli akışlar için ise ikinci derece sonlu fark metodu ile çözümlemiştir. Akış denklemleri eğrisel koordinatlarda implicit sonlu hacim metod ile O-tipi ağ yapısı kullanılarak NACA 0012 kanat üzerinden akış için çözülmüştür. Çözüm metodunun, girdabın oluşum, gelişme ve ayrılma karakteristiklerini doğru olarak tahmin ettiğini belirlemişlerdir. Duvar fonksiyonları yaklaşımının RANS denklemlerinde geçerliliğini göstermek için sayısal bir çalışma Goncalves ve Houdeville [2001] tarafından 4 farklı türbülans modeli baz alınarak yapılmıştır. Düz plaka üzerinde ve OALT25 tipi kanat üzerinde basınç ve sürtünme katsayıları hesaplanarak deneysel sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

Shan ve ark. [2004] 2 boyutlu direk nümerik simülasyon yöntemini kullanarak, eğrisel koordinat sisteminde 0.2 Mach sayısı ve 10^5 Reynolds sayısında NACA 0012 kanadı üzerinden, türbülanslı olmayan ve sıkıştırılabilir Navier-Stokes denklemlerini çözerek akışta ayrılma ve türbülansa geçişi incelemişlerdir. Çözümde C-tipi eliptik grid dağılımını kullanmıştır. Kelvin–Helmholtz kararsızlığının kanat üzerinden ayrılmaya sebep olduğu sonucuna varmışlardır.

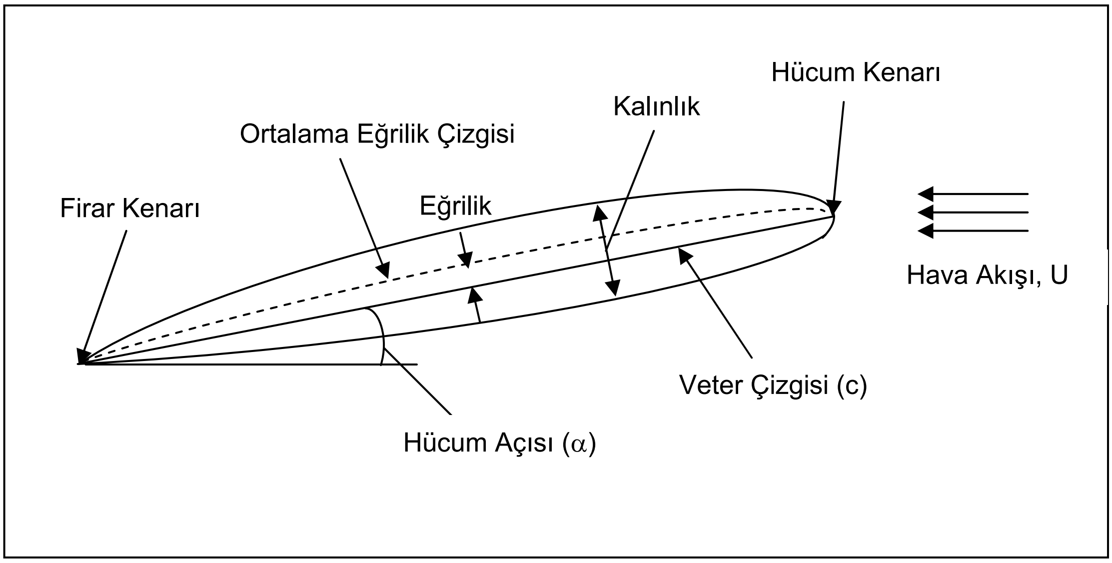
Sun ve ark. [2004] spektral hacim metodunu kullanarak Navier-Stokes denklemlerini çözmüşlerdir. Denklemlerin ayrıklaştırılmasında sükli olmayan Galerkin metodunu kullanmışlardır. Çeşitli viskoz ve laminer akış problemlerini çözerek analitik ve sayısal çözümlerle kıyaslamışlardır. İlk olarak 0.3 Mach ve 10000 Reynolds sayısında düz plaka üzerinden akış çözülmüştür. Plakaya dikey doğrultuda hız değişimi ve plaka boyunca sürtünme katsayısı hesaplanmıştır. Daha sonra 0 hücum açısı, 0.5 Mach sayısı ve 5000 Reynolds sayısında NACA 0012 kanat üzerinden akış için veter boyunca basınç ve sürtünme katsayıları hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçların analitik ve sayısal çözümlerle uyumluluk gösterdiğini tespit etmişlerdir.

Du ve Wu [2004], düşük Reynolds sayılı k-ε modelini kullanılarak RAE 2822 ve NACA 4412 kanatları ile transonik difüzer üzerindeki akışı incelemişlerdir. Çözüm esnasında akış denklemlerinin konveksiyon-difüzyon kısmı sayısal, diğer kaynak kısmı ise analitik yöntemle çözülerek sayısal/analitik karışık çözüm metodu kullanılmıştır. Yang [2004], zamana bağlı Favre ortalamalı Navier-Stokes denklemlerini düşük Reynolds sayılı k-ε modeli ile çözerek hareketli kanatlar üzerinden akışı incelemiştir. NACA 0012 kanadı üzerinden türbülanslı akış çözülerek deneysel kıyaslamalar yapılmıştır.

3. MATEMATİKSEL FORMULASYON

3.1. Problemin Tanımı

Tez çalışmasında, kanat üzerinden sıkıştırılabilir bir akışın çözümü için sayısal bir çözüm yönteminin oluşturulması amaçlanmaktadır. Çalışmada kullanılan tipik bir kanat kesidi Şekil 3.1'de verilmiştir.



Şekil 3.1 Tipik bir kanat geometrisi

Şekil 3.1 üzerinde de görüldüğü üzere kanat kesidi bir takım değişkenler ile tanımlanmaktadır. Bu temel değişkenler kanadın temel karalteristiğini belirlemektedir. Ortalama eğrilik çizgisi kanadın alt ve üst kenarlarına eşit mesafedeki (eğriye dik olmak koşuluyla) noktaların oluşturduğu eğridir. Kanadın en ön ucuna hücum kenarı, en uç arka noktasına da firar kenarı denmektedir. Hücum kenarı ile firar kenarını birleştiren doğruya veter çizgisi adı verilmektedir. Veter çizgisi ile ortalama eğrilik çizgisi arasındaki vetere dik maksimum mesafeye ise eğrilik denmektedir. NACA (National Advisory Commitee for Aeronautics) kanat profilleri literatürde en çok kullanılan kanat tipleridir. Bu tez çalışmasında da bu tip kanat üzerinden akış incelenmiştir. NACA kanat kesitleri dört, beş veya altı rakamdan oluşacak şekilde tanımlanmışlardır. Örneğin dört rakamlı NACA 0012 kanat kesitinde ilk rakam maksimum eğrilik değerini veter uzunluğunun (c) yüzdesi olarak vermektedir. İkinci rakam maksimum eğriliğin oluştuğu noktanın hücum kenarına olan mesafesinin veter uzunluğuna oranının on katı olan değer olarak ifade eder. Son iki rakam ise maksimum kalınlık değerinin veter uzunluğuna oranını yüzdesel olarak ifade eder. Seçilen kanat kesidi için bu değer 0.12 c'dir.

Şekil 3.1'de görülen kanat üzerine gelen hava, kanadın hücum kenarına çarptıktan sonra üst ve alt yüzeylerden firar kenarına ulaşarak kanadı terk etmektedir. Kanadın veter çizgisi ile havanın geliş yönü arasındaki açıya hücum açısı denmektedir. Hücum açısının artması ile kanadın alt ve üst yüzeylerinde basınç farkı oluşmakta ve taşıma katsayısı doğrusal olarak artmaktadır. Fakat hücum açısının belli bir değere ulaşmasının ardından, akışkan kanadın üst yüzeyinden ayrılmaya başlar. Bunun sonucunda, "pertdövite" veya "stall" olarak adlandırılan olay meydana gelir ve taşıma katsayısında, dolayısıyla kaldırma kuvvetinde ani düşüş, yani ani taşıma kaybı oluşur.

Bir kanadın genel karakteristik özelliğini üç temel değişken belirlemektedir. Bunlar, taşıma katsayısı (C_L), Sürükleme katsayısı (C_D) ve moment katsayısı (C_M)'dır.

Bu tez çalışmasında geliştirilen yazılım sırasında yapılan bazı kabuller aşağıda verilmiştir.

1. Akış iki boyutlu ve eğrisel koordinatlarda çözülmektedir..
2. Akış sürtünmelidir.
3. Akış türbülanslıdır.
4. Akış sıkıştırılabilirdir.
5. Akışkan olarak ideal gaz kabul edilen hava kullanılmaktadır.
6. Yer çekiminin etkisi ihmal edilmektedir.

3.2. Genel Denklemler

Bir problemin tanımlanması ve sınır şartlarının ortaya konulmasından sonra sayısal olarak çözülmesi için, öncelikle ihtiyaç duyulan diferansiyel denklemlerin ifade edilmesi gerekir. İkinci adım olarak diferansiyel denklemler, kullanılan grid sisteminde ayrıklaştırılmalıdır. Son adım olarak ise ayrıklaştırılan denklemlerin uygun yöntemlerle çözümünü içermektedir.

Tez çalımasında kullanılan süreklilik, momentum, enerji ve türbülans denklemleri kartezyen koordinatlarda aşağıdaki şekilde verilmiştir.

3.2.1. Süreklilik denklemi

Süreklilik denklemi akışkanın hareketi esnasında kütlesinin korunumunu ifade etmektedir. Kartezyen iki boyutlu koordinatlarda kararsız akış için aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\rho \vec{V}) = 0 \qquad (3.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0 \qquad (3.2)$$

Burada,

ρ : Yoğunluk

u : Yatay (x) yöndeki hız bileşeni

v : Dikey (y) yöndeki hız bileşeni

Akışkan hareketi sıkıştırılamaz olarak kabul edilirse, Eş. 3.1 aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = 0 \qquad (3.3)$$

3.2.2. Momentum denklemleri

Genel momentum denkleminin yatay (x) ve dikey (y) yöndeki bileşenleri aşağıdaki gibidir.

x- yönündeki momentum denklemi

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u v)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial y}\right)+S \qquad (3.4)$$

$$S=-\frac{\partial P}{\partial x}+S_x^{'t}$$

$$S_x^{'t}=\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\vec{\nabla}.\vec{V}+\rho k\right)$$

y-yönündeki momentum denklemi

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u v)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v v)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial v}{\partial y}\right)+S \qquad (3.5)$$

$$S=-\frac{\partial P}{\partial y}+S_y^{'t} \qquad (3.6)$$

$$S_y^{'t}=\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_t)\vec{\nabla}.\vec{V}+\rho k\right) \qquad (3.7)$$

Burada,

$$\vec{\nabla}.\vec{V}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (3.8)$$

$$\mu_{eff}=\mu+\mu_t \qquad (3.9)$$

$$\mu_t=C_\mu\rho\frac{k}{\varepsilon} \qquad (3.10)$$

Yukarıda, S kaynak terimi, S_x^t x-yönündeki ve S_y^t y-yönündeki türbülans kaynak terimleri, μ_t türbülans viskozitesi, μ_{eff} ise efektif viskozitedir. Momentum denklemlerinde yer alan $\vec{\nabla}.\vec{V}$ vektörel çarpım değeri sıkıştırılamayan akışlar için sıfır alınır.

3.2.3. Enerji denklemi

Sıcaklık dağılımını elde etmek için enerji denkleminin çözülmesi gerekmektedir. Enerji denklemi aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u h)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v h)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}}\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}}\frac{\partial h}{\partial y}\right)+\frac{\partial P}{\partial t} \tag{3.11}$$

Burada h toplam enthalpi değeri olup aşağıdaki gibidir.

$$h=C_P T+\frac{1}{2}\left(u^2+v^2\right)+k \tag{3.12}$$

3.2.4. Hal denklemi

Sıkıştırılabilir akışlarda yoğunluk değişken olması nedeniyle, basınç ve sıcaklık değerleri kullanılarak ideal gaz hal denkleminden bulunabilir.

$$P=\rho RT \tag{3.13}$$

$$R=\frac{\overline{R}}{M} \tag{3.14}$$

$$\overline{R}=8.314\ kNm/kmolK$$

Yukarıdaki denklemlerde P mutlak basınç, $\overline{R}$ evrensel gaz sabiti, M gazın molekül ağırlığı ve T mutlak sıcaklıktır.

3.2.5. Türbülans denklemleri

Günümüzde daha gelişmiş başka türbülans modelleri bulunmasına rağmen Launder ve Spalding (1974) tarafından geliştirilen standart $k-\varepsilon$ türbülans modeli birçok probleme kolay uyum sağlaması ve daha az bilgisayar kapasitesi gerektirmesi nedeniyle birçok araştırmacı tarafından kullanılmaktadır. Bu modelde akışın tam türbülanslı olduğu, duvar yakınında türbülans stress üretim miktarı ile türbülans kinetik enerjisi yutulma miktarının eşit olduğu yerel bir denge durumu kabul edilmiştir. Bu kabul yerel türbülans sayısı olan $\mathrm{Re}_t = k^2/\upsilon\varepsilon$ türbülanslı Reynolds sayısının büyük olduğu varsayımına dayanmaktadır. Bu nedenle standart $k-\varepsilon$ türbülans modeli bazen yüksek Reynolds sayılı türbülans modeli olarak da adlandırılmaktadır. Re_t değerinin 150'den büyük olduğu durumlar genelde yüksek Reynolds sayısı olarak kabul edilmektedir.

Reynolds sayısının düşük olduğu akış durumlarında moleküler viskozitenin etkisi büyür. Ortalama harekete katkısının yanında moleküler viskozite, üretim, yutulma ve türbülans transportu süreçlerini de doğrudan etkiler.

En sıkça rastlanan düşük Reynolds sayılı türbülans, bir cidar yada duvar üzerinde meydana gelen sınır tabaka akışlarıdır. Kaymayan (no-slip) akış sınır koşulunda, duvarın üzerinde çok ince sonlu bir akış bölgesi meydana gelir. Bu bölgede kaymayan sınır koşulundan dolayı, türbülans büyüklüklerin tümü yok olur. Bu bölgede yutulma oranı, ε sonlu bir değerde kalırken kinetik enerji, k sıfır olur ve bu nedenle Re_t duvara yaklaştıkça sıfıra doğru gitme eğilimi gösterir. Sonuç olarak, moleküler viskozite duvara yakın türbülanslı akışlarda baskın bir rol oynar.

Bu tez çalışmasında standart $k-\varepsilon$ türbülans modeli kullanılmıştır. Standart $k-\varepsilon$ türbülans denklemleri aşağıdaki şekilde verilmektedir.

Türbülans kinetik enerjisi (*k*) için taşınım denklemi,

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uk)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho vk)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(\mu+\mu_t)}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{(\mu+\mu_t)}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial y}\right)+S_k \qquad (3.15)$$

Türbülans kinetik enerjisi yutulma miktarı (ε) için taşınım denklemi,

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u\varepsilon)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v\varepsilon)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(\mu+\mu_t)}{\sigma_k}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{(\mu+\mu_t)}{\sigma_k}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right)+S_\varepsilon \qquad (3.16)$$

Burada kaynak terimleri S_k ve S_ε şu şekilde elde edilmektedir.

$$S_k = G-\frac{2}{3}\left((\mu+\mu_t)\vec{\nabla}.\vec{V}+\rho k\right)\vec{\nabla}.\vec{V}-\rho\varepsilon \qquad (3.17)$$

$$S_\varepsilon=\frac{\varepsilon}{k}\left(C_1G-C_2\rho\varepsilon\right) \qquad (3.18)$$

$$G=\mu_t\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+2\mu_t\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] \qquad (3.19)$$

Bu denklemlerde kullanılan türbülans viskozitesi ve türbülans sabitleri aşağıda verilmiştir.

$$\mu_t=\rho C_\mu\frac{k^2}{\varepsilon} \qquad (3.20)$$

$$C_\mu=0.09 \quad C_{1\varepsilon}=1.44 \quad C_{2\varepsilon}=1.92 \quad \sigma_k=1.0 \quad \sigma_\varepsilon=1.3 \qquad (3.21)$$

Standart *k-ε* modellerinde moleküler viskozitenin etkili olduğu bu duvara yakın bölgedeki (viskoz alt sınır tabaka) çözümler için *duvar fonksiyonları* kullanılmaktadır. Duvar fonksiyonu yaklaşımı, sınırlardan uzaktaki akışkandaki noktaların yüzey sınır koşullarıyla ilişkilendirilmesi ve bu suretle viskozitenin doğrudan etkisinin modellenmesi probleminden kaçınılması olarak ifade edilebilir. Bu çözüm prosedürünün geçerliliği, viskoz etkilerin önemsiz olduğu, Reynolds sayısının yeterince büyük olduğu veya genel duvar fonksiyonlarının çok iyi tanımlandığı akış durumlarıyla sınırlıdır. Bunların dışında pratikte duvar fonksiyonu yaklaşımının geçerli olmadığı çok sayıda durumla karşılaşılabilmektedir. Bunlar, düşük Reynolds sayısında ve geçiş bölgesindeki türbülanslı sınır tabaka akışları, zaman bağımlı ve ayrılan akış durumları, kendi ekseni etrafında dönen bir yüzey üzerindeki akış ve bir yüzey üzerinde ısı ve kütle transferinin olduğu durumlar şeklinde sıralanabilir.

Standart k-ε modeli yüksek Reynolds sayılı türbülans modellerinde geçerlidir. Duvardaki sınır tabaka içerisinde duvara en yakın bölgede çok ince bir sınır tabakası vardır. Burada türbülanstan laminere geçiş söz konusudur. Çünkü kaymama (no-slip*)* koşulu nedeniyle burada Reynolds sayısı aniden düşmektedir. Dolayısıyla yüksek Reynolds sayılı k-ε modeli burada geçersiz olmaktadır. Bu bölgede duvar fonksiyonları tanımlanmıştır. Bu yaklaşımda duvara en yakın nokta tam türbülanslı bölge içindedir.

Türbülanslı akışlarda duvar sınır şartının uygulanması aşağıda verilen y^+ değerinin hesaplanmasıyla başlamaktadır.

$$y^+ = \left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)^{1/2} \frac{y_P}{\upsilon_l} \qquad 30 < y^+ < 500 \qquad (3.22)$$

Burada,

y_p : Duvara en yakın p grid noktasının duvara olan dik uzaklığı

τ_w : Duvardaki kayma gerilmesi

Eğer $y^+ \leq 11.63$ ise duvar yakınındaki akış laminer kabul edilmektedir. Bu durumda $y^+ = u^+$ alınır ve k ile ε değerleri interpolasyon yapılarak hesaplanır.

Eğer y^+>11.63 ise akış türbülanslıdır ve duvar fonksiyonu yaklaşımı kullanılmalıdır. Bunun için aşağıdaki değerler hesaplanmalıdır.

$$u^+ = \frac{U}{U_\tau} = \frac{1}{\kappa}\ln(E.y^+) \tag{3.23}$$

$$U_\tau = \left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)^{1/2} \tag{3.24}$$

Burada,

E : Duvar pürüzlülüğüne bağlı bir sabit olup pürüzsüz bir yüzeyde 9.8'dir.

K : Von Karman sabitidir ve yaklaşık 0.41 değerindedir.

U_τ : Sürtünme hızıdır.

Duvar fonksiyonu için şu kabuller yapılmıştır [Versteeg ve Malalasekera, 1999].

1.Hız duvara paralel ve sadece duvara dik yönde değişir.
2.Akış doğrultusunda basınç gradyanları yoktur.
3.Duvarda kimyasal reaksiyon yoktur.
4.Yüksek Reynolds sayılı Akış söz konusudur.

Duvar yakınında standart k-ε modeli için kullanılan diğer ifadeler şöyledir.

Duvara teğet momentum ifadesi;

Duvar kayma gerilmesi $$\tau_w = \rho C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} \frac{u_P}{u^+} \tag{3.25}$$

Duvar kuvveti $$F_s = -\left(\rho C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} \frac{u_P}{u^+}\right) A_{Hücre} \tag{3.26}$$

Duvara dik momentum ifadesi;

Normal hız=0

Türbülans kinetik enerji ifadesi;

Birim hacim için net k-kaynağı $$F_s = \left(\tau_w u_P - \rho C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} \frac{u_P}{u^+} \right) \frac{\Delta V}{y_P} \tag{3.27}$$

Yutulma hızı ifadesi;

$$\varepsilon_P = \frac{C_\mu^{3/4} k_P^{1/2} \dfrac{u_P}{u^+}}{\kappa . y_P} \tag{3.28}$$

Sıcaklık veya enerji ifadesi;

Duvar ısı akısı, $$q_w = -\rho C_P C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} \frac{T_P - T_w}{T^+} \tag{3.29}$$

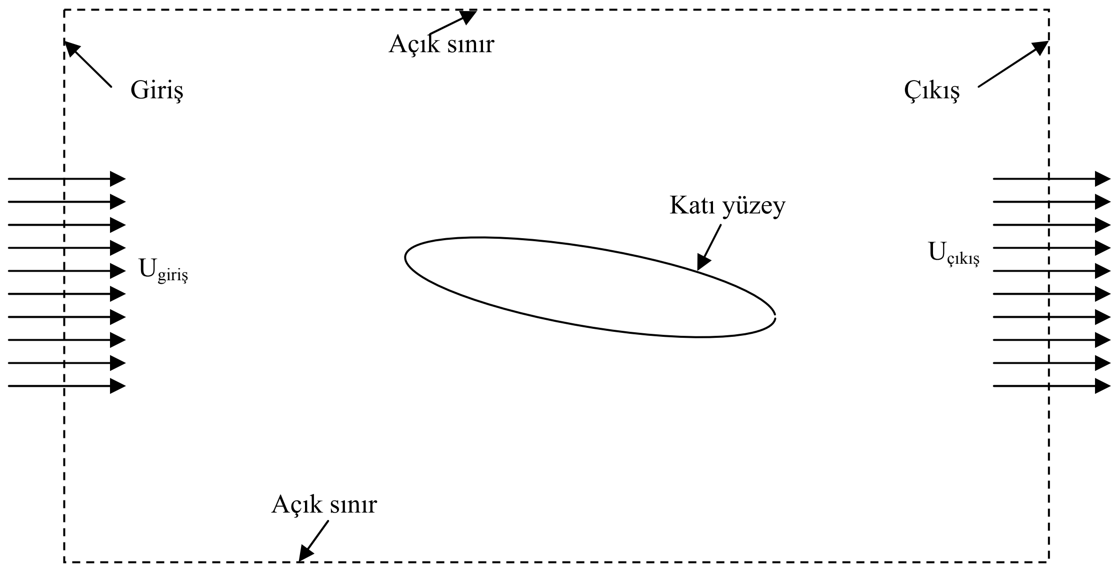
$$T^+ = \sigma_{T,t} \left(u^+ + P \left(\frac{\sigma_{T,l}}{\sigma_{T,t}} \right) \right) \tag{3.30}$$

$$P\left(\frac{\sigma_{T,l}}{\sigma_{T,t}} \right) = 9.24 \left(\left(\frac{\sigma_{T,l}}{\sigma_{T,t}} \right)^{0.75} - 1 \right) \left(1 + 0.28 \exp \left(-0.007 \left(\frac{\sigma_{T,l}}{\sigma_{T,t}} \right) \right) \right) \tag{3.31}$$

3.2.6. İlk şart ve sınır şartları

Bir akış probleminin çözümü için öncelikle problemin doğru tanımlanması gerekir. Bir problemin doğru tanımlanması için ise mutlaka sınır şartlarının doğru belirlenmesi gerekir. Sınır şarları akışın karakteristiğini temsil eden en önemli parametrelerdir. Problemin tanımlanması için ilk olarak başlangıç şartları belirlenmelidir. Daha sonra belirlenmesi gereken diğer sınır şartları

Şekil 3.2'de bir kontrol hacmi içinde yer alan tipik bir katı yüzey üzerinden akışı temsilen gösterilmiştir. Görüldüğü üzere bunlar kontrol hacminin giriş ve çıkış sınırları, açık veya uzak sınırlar ve katı yüzey üzeridir.



Şekil 3.2 Tipik bir katı yüzey üzerinden akış

Daha önce verilen denklemlerin çözümü için aşağıdaki başlangıç ve sınır şartları kullanılmıştır.

Başlangıç sınır şartı (t=0 anında) olarak hız ve türbülans değerleri sıfır alınmaktadır.

Girişte yoğunluk, hızlar ve sıcaklık değerleri verilmekte, türbülans değerleri ise hesaplanmaktadır. Sınır şartları aşağıdaki gibidir.

$$\rho_{giriş} = \rho$$
$$u_{giriş} = u$$
$$v_{giriş} = 0$$
$$T_{giriş} = T$$
$$k_{giriş}=4.5*10^{-3}*u_{giriş}^{2}$$
$$\varepsilon_{giriş}=k_{giriş}^{1.5}*0.1643/(0.09*H)$$

Burada,

$u_{giriş}$: Giriş hızı
H : Giriş yüksekliği

Çıkışta akış tam gelişmiş kabul edilerek, kontrol hacmine dik yöndeki değişken gradyanları aşağıda gösterildiği şekilde sıfır alınmıştır.

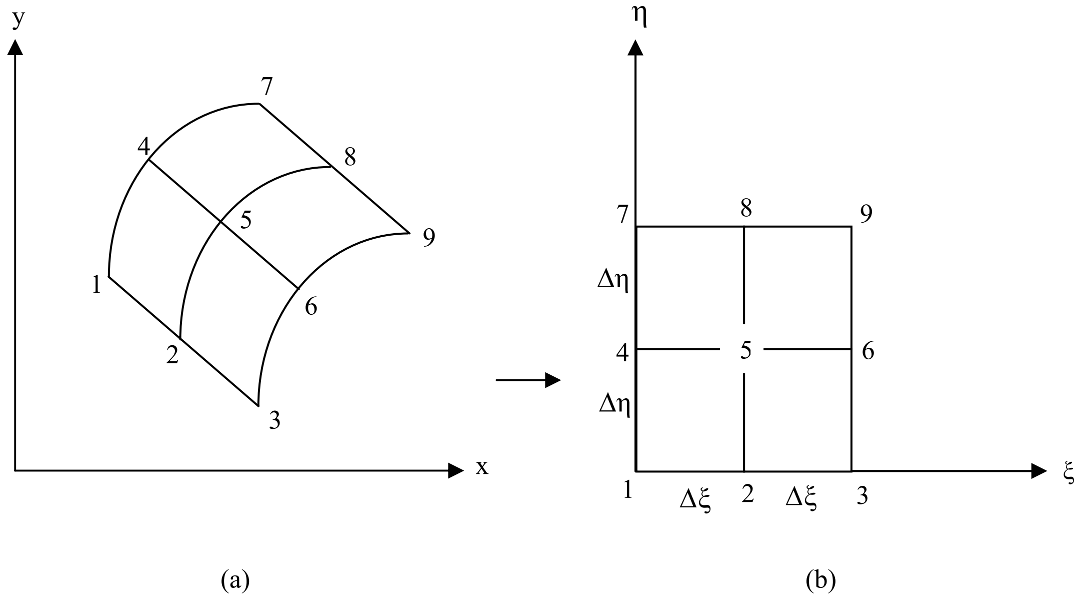
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0 \qquad v = 0$$

Açık sınır şartı (problem domainindeki alt ve üst yüzey) olarak girişteki şartlar geçerli kabul edilmiştir.

Yüzey sınır şartı olarak katı yüzey üzerinde hızlar ve türbülans değerleri sıfır alınmıştır. Sıcaklık değeri ise sabit kabul edilmiştir. Katı yüzeyin pürüzsüz olduğu varsayılmıştır.

4. SAYISAL ÇÖZÜM YÖNTEMİ

4.1. Koordinat Transformasyonu



Şekil 4.1 Kartezyen koordinat sistemindeki eğrisel ağ sisteminin eğrisel koordinat sistemindeki eşit aralıklı ağ sistemine dönüştürülmesi (a) Gerçek koordinat, (b) Transform edilen koordinat

Gerçek koordinat, problemin çözümünü kolaylaştırmak için transform edilmektedir. Transformasyon yapılırken (x,y) kartezyen koordinat sistemi, (ξ,η) eğrisel koordinat sistemine dönüştürülmektedir. (ξ,η) eğrisel koordinat sisteminde ξ ve η doğrultularında, kullanılan grid sayısına göre değişen eşit aralıklı grid dağılımı oluşmaktadır.

Transformasyon denklemleri aşağıda verilmiştir.

$$(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$$

$$\tau = t$$

$$\xi = \xi(t,x,y) \tag{4.1}$$

$$\eta = \eta(t,x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \xi_t \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_t \frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$dt = d\tau$$

$$dx = x_\tau \, d\tau + x_\xi \, d\xi + x_\eta \, d\eta$$

$$dy = y_\tau \, d\tau + y_\xi \, d\xi + y_\eta \, d\eta \tag{4.3}$$

$$\begin{bmatrix} dt \\ dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_\tau & x_\xi & x_\eta \\ y_\tau & y_\xi & y_\eta \end{bmatrix}$$

$$d\tau = dt$$

$$d\xi = \xi_t\, dt + \xi_x\, dx + \xi_y\, dy \tag{4.4}$$

$$d\eta = \eta_t\, dt + \eta_x\, dx + \eta_y\, dy$$

$$\begin{bmatrix} d\tau \\ d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \xi_t & \xi_x & \xi_y \\ \eta_t & \eta_x & \eta_y \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{B} = \mathrm{A}^{-1} \tag{4.5}$$

$$\mathrm{J} = \frac{1}{x_\xi\, y_\eta - y_\xi\, x_\eta}$$

$$\xi_x = \mathrm{J}\, y_\eta$$

$$\xi_y = -\mathrm{J}\, x_\eta$$

$$\eta_x = -\mathrm{J}\, y_\xi$$

$$\eta_y = \mathrm{J}\, x_\xi \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} \xi_t &= -(x_\tau\, \xi_x + y_\tau\, \xi_y) \\ &= \mathrm{J}\,(y_\tau\, x_\eta - x_\tau\, y_\eta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_t &= -(x_\tau\, \eta_x + y_\tau\, \eta_y) \\ &= \mathrm{J}\,(x_\tau\, y_\xi - y_\tau\, x_\xi) \end{aligned}$$

Yukarıdaki ifadelerde J jacobian faktörü, $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y, \xi_t, \eta_t$ değerleri ise metrik olarak adlandırılmaktadır. Metrik değerleri aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

Örneğin Şekil 4.1 ‘de geometri x ve y yönlerinde 3 er noktadan oluşmaktadır. Yani 2 şer bölüme ayrılmıştır. Grid dağılımı oluşturulduğunda tüm noktaların x ve y koordinatları elde edilecektir.

Örnek olarak 5 numaralı nokta için Metrik değerleri hesaplanacak olursa;
IX = x yönündeki nokta sayısı = 3
IY = y yönündeki nokta sayısı = 3

$$\Delta\xi = 1.0 \quad \text{ve} \quad \Delta\eta = 1.0 \tag{4.7}$$

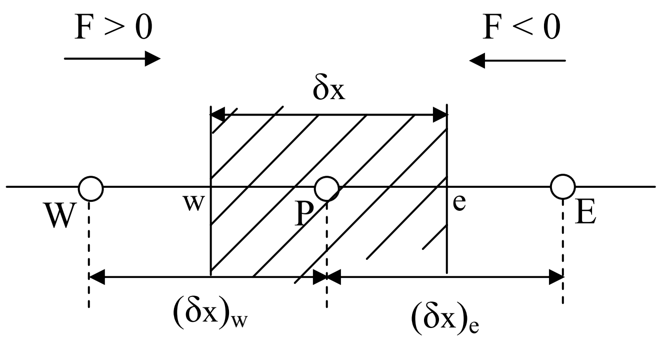
$$\begin{aligned}
(x_\xi)_5 &= \frac{dx}{d\xi} = \frac{x_6 - x_4}{2\Delta\xi} \\
(x_\eta)_5 &= \frac{dx}{d\eta} = \frac{x_8 - x_2}{2\Delta\eta} \\
(y_\xi)_5 &= \frac{dx}{d\xi} = \frac{y_6 - y_4}{2\Delta\xi} \\
(y_\eta)_5 &= \frac{dx}{d\eta} = \frac{y_8 - y_2}{2\Delta\eta}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$J_5 = \frac{1}{(x_\xi)_5 (y_\eta)_5 - (y_\xi)_5 (x_\eta)_5}$$

$$\begin{aligned}
(\xi_x)_5 &= \frac{d\xi}{dx} = J_5\,(y_\eta)_5 \\
(\eta_x)_5 &= \frac{dx}{d\eta} = -J_5\,(y_\xi)_5 \\
(\xi_y)_5 &= \frac{dx}{d\xi} = -J_5 (x_\eta)_5 \\
(\eta_y)_5 &= \frac{dx}{d\eta} = J_5 (x_\xi)_5
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Hesaplanan metrik değerleri ayrıklaştırma işlemi yapılmış ana denklemlerde kullanılacaktır.

4.2. Upwind Metodu



Şekil 4.2 Tek boyutlu tipik bir kontrol hacmi

Upwind metodunda prensip olarak değişken φ 'nin kontrol hacmi yüzeyindeki değeri, o yüzeye akışın geldiği taraftaki grid noktasındaki değere eşit alınır.

$$
\begin{aligned}
&F_e \rangle 0 \quad \text{ise} \quad \varphi_e = \varphi_P \\
&F_e \langle 0 \quad \text{ise} \quad \varphi_e = \varphi_E \\
&F_w \rangle 0 \quad \text{ise} \quad \varphi_w = \varphi_W \\
&F_w \langle 0 \quad \text{ise} \quad \varphi_w = \varphi_P
\end{aligned}
\qquad (4.10)
$$

$$\|A, B\| = \text{AMAX}|A, B| = A \text{ ve } B \text{ den büyük olan}$$

Ana denkleme uygulanırsa,

$$
\begin{aligned}
&F_e \; u_{I+1,J} = u_{i,J} \, \|F_e, 0\| - u_{i+1,J} \, \|-F_e, 0\| \\
&F_w \; u_{I,J} = u_{i-1,J} \, \|F_w, 0\| - u_{i,J} \, \|-F_w, 0\| \\
&F_n \; u_{i,j} = u_{i,J} \, \|F_n, 0\| - u_{i,J+1} \, \|-F_n, 0\| \\
&F_s \; u_{i,j-1} = u_{i,J-1} \, \|F_s, 0\| - u_{i,J} \, \|-F_s, 0\|
\end{aligned}
\qquad (4.11)
$$

4.3. Genel Taşınım Denklemi

İki boyutlu kartezyen koordinatlarda genel bir φ değişkeni için zamana bağlı taşınım denklemi aşağıdaki şekilde yazılacak olursa,

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u\varphi)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v\varphi)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+S \qquad (4.12)$$

Γ : φ değişkeni için difüzyon katsayısı

S : Kaynak terimi

Çizelge 4.1 Genel taşınım denklemindeki değerler

Denklem	φ	Γ	S
Süreklilik	1	0	0
X-Momentum	u	$\mu+\mu_t$	$-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\vec{\nabla}.\vec{V}+\rho k\right)$
Y-Momentum	v	$\mu+\mu_t$	$-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_t)\vec{\nabla}.\vec{V}+\rho k\right)$
Türbülans Kinetik Enerji	k	$\frac{(\mu+\mu_t)}{\sigma_k}$	$\mu_t\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+2\mu_t\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]-\frac{2}{3}\left((\mu+\mu_t)\vec{\nabla}.\vec{V}+\rho k\right)\vec{\nabla}.\vec{V}-\rho\varepsilon$
Türbülans Kinetik Enerji Yutulması	ε	$\frac{(\mu+\mu_t)}{\sigma_\varepsilon}$	$\frac{\varepsilon}{k}\left\{C_{1\varepsilon}\left[\mu_t\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+2\mu_t\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\right]-C_{2\varepsilon}\rho\varepsilon\right\}$
Enerji	h	$\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}}$	$\frac{\partial P}{\partial t}$

Çizelge 4.1 (Devam)

Ara Değerler	
Toplam Enthalpi	$h = C_P T + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + k$
Türbülans viskozitesi	$C_\mu \rho \frac{k}{\varepsilon}$
$\nabla . \vec{V}$	$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$
k-ε Türbülans Sabitleri	C_1=1.44 C_2=1.92 C_μ=0.09 σ_k=1.0 σ_ε=1.3

4.4. Süreklilik Denkleminin Ayrıklaştırılması

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial (\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial (\rho v)}{\partial y}=0 \tag{4.13}$$

Yukarıdaki denkleme koordinat transformasyonu yapılırsa,

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau}+\xi_t\frac{\partial \rho}{\partial \xi}+\eta_t\frac{\partial \rho}{\partial \eta}\right)+\left(\xi_x\frac{\partial (\rho u)}{\partial \xi}+\eta_x\frac{\partial (\rho u)}{\partial \eta}\right)+\left(\xi_y\frac{\partial (\rho v)}{\partial \xi}+\eta_y\frac{\partial (\rho v)}{\partial \eta}\right)=0 \tag{4.14}$$

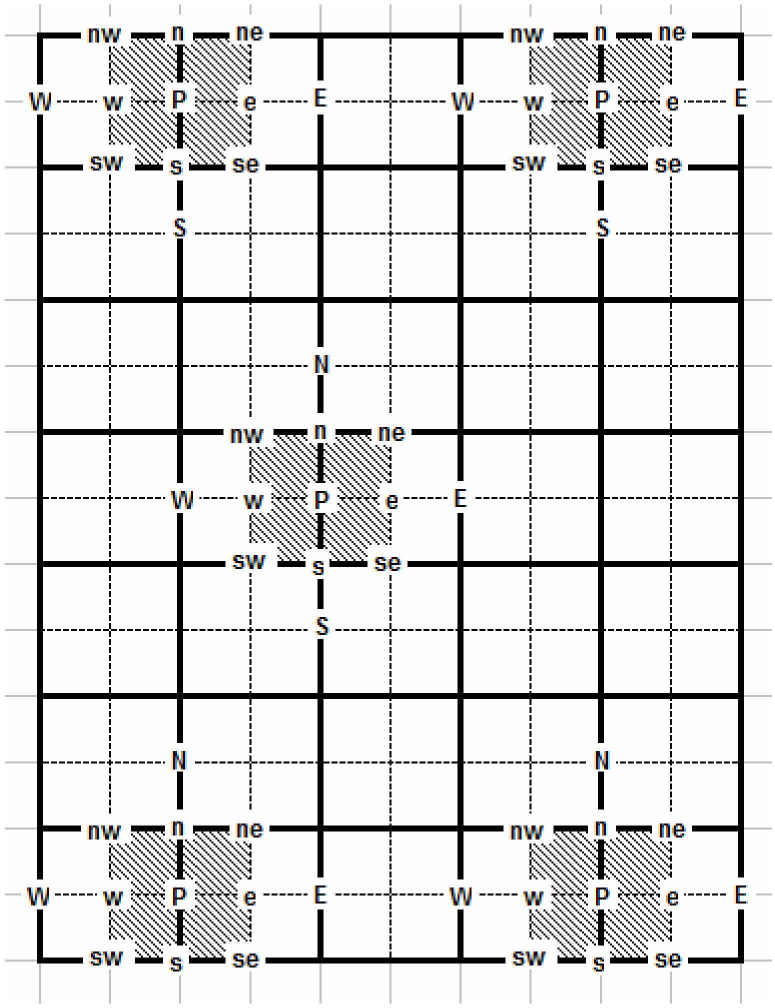
Eşitliğin her iki tarafı integre edilip düzenlenir ve upwind metodu kullanılırsa,

$$\frac{(\rho_P-\rho_P^{0})\Delta\eta_{sn}\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau}+\xi_{t_P}(\rho_e-\rho_w)\Delta\eta_{sn}+\eta_{t_P}(\rho_n-\rho_s)\Delta\xi_{we}+\xi_{x_P}(\rho_e u_e-\rho_w u_w)\Delta\eta_{sn}$$
$$+\eta_{x_P}(\rho_n u_n-\rho_s u_s)\Delta\xi_{we}+\xi_{y_P}(\rho_e v_e-\rho_w v_w)\Delta\eta_{sn}+\eta_{y_P}(\rho_n v_n-\rho_s v_s)\Delta\xi_{we}=0$$

$$\frac{(\rho_P-\rho_P^{0})\Delta\eta_{sn}\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau}+\rho_e(\xi_{t_P}+\xi_{x_P}u_e+\xi_{y_P}v_e).\Delta\eta_{sn}-\rho_w(\xi_{t_P}+\xi_{x_P}u_w+\xi_{y_P}v_w).\Delta\eta_{sn}$$
$$+\rho_n(\eta_{t_P}+\eta_{x_P}u_n+\eta_{y_P}v_n).\Delta\xi_{we}-\rho_s(\eta_{t_P}+\eta_{x_P}u_s+\eta_{y_P}v_s).\Delta\xi_{we}=0 \tag{4.15}$$

4.5. X – Yönündeki Momentum Denkleminin Ayrıklaştırılması

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u v)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\vec{\nabla}.\vec{V}+\rho k\right)-\frac{\partial P}{\partial x} \tag{4.16}$$



Şekil 4.3 X-momentum grid dağılımı

Koordinat transformasyonu sonucunda,

$$a_P u_P = a_E u_E + a_W u_W + a_N u_N + a_S u_S + b$$

$$a_P = \left(\begin{array}{l} \frac{\rho_P \Delta\eta_{sn} \Delta\xi_{we}}{\Delta\tau} + \frac{\xi x_p \Delta\eta sn(\mu+\mu_t)e\xi x_e}{\Delta\xi_{PE}} + \frac{\xi x_p \Delta\eta sn(\mu+\mu_t)w\xi x_w}{\Delta\xi_{WP}} \\ + \frac{\eta x_p \Delta\xi we(\mu+\mu_t)n\eta x_n}{\Delta\eta_{PN}} + \frac{\eta x_p \Delta\xi we(\mu+\mu_t)s\eta x_s}{\Delta\eta_{SP}} \\ + \frac{\xi y_p \Delta\eta sn(\mu+\mu_t)e\xi y_e}{\Delta\xi_{PE}} + \frac{\xi y_p \Delta\eta sn(\mu+\mu_t)w\xi y_w}{\Delta\xi_{WP}} \\ + \frac{\eta y_p \Delta\xi we(\mu+\mu_t)n\eta y_n}{\Delta\eta_{PN}} + \frac{\eta y_p \Delta\xi we(\mu+\mu_t)s\eta y_s}{\Delta\eta_{PN}} \\ + \|F_e,0\| + \|-F_w,0\| + \|F_n,0\| + \|-F_s,0\| \end{array} \right) \tag{4.17}$$

$$a_E = \left(\frac{\xi x_p \Delta\eta sn(\mu+\mu_t)e\xi x_e}{\Delta\xi_{PE}} + \frac{\xi y_p \Delta\eta sn(\mu+\mu_t)e\xi y_e}{\Delta\xi_{PE}} + \|-F_e,0\| \right)$$

$$a_W = \left(\frac{\xi x_p \Delta\eta sn(\mu+\mu_t)w\xi x_w}{\Delta\xi_{WP}} + \frac{\xi y_p \Delta\eta sn(\mu+\mu_t)w\xi y_w}{\Delta\xi_{WP}} + \|F_w,0\| \right) \tag{4.18}$$

$$a_N = \left(\frac{\eta x_p \Delta\xi we(\mu+\mu_t)n\eta x_n}{\Delta\eta_{PN}} + \frac{\eta y_p \Delta\xi we(\mu+\mu_t)n\eta y_n}{\Delta\eta_{PN}} + \|-F_n,0\| \right)$$

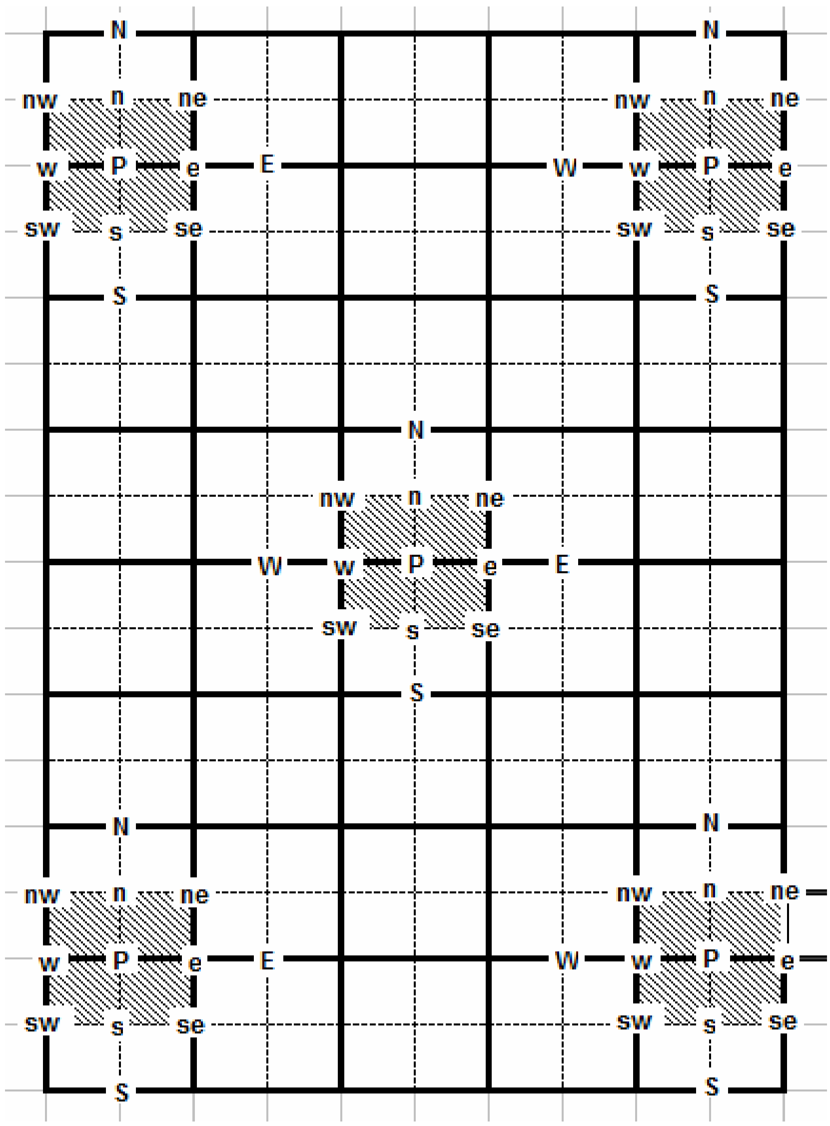
$$a_S = \left(\frac{\eta x_p \Delta\xi we(\mu+\mu_t)s\eta x_s}{\Delta\eta_{SP}} + \frac{\eta y_p \Delta\xi we(\mu+\mu_t)s\eta y_s}{\Delta\eta_{SP}} + \|F_s,0\| \right)$$

$$
b=\left(\begin{array}{l}
\xi_{x_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{x_e}\left(\frac{u_{ne}-u_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\eta_{x_w}\left(\frac{u_{nw}-u_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\Delta_{sn}+\eta_{x_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{x_n}\left(\frac{u_{ne}-u_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\xi_{x_s}\left(\frac{u_{se}-u_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}\\
+\xi_{y_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{y_e}\left(\frac{u_{ne}-u_{se}}{\Delta\eta_{ne,se}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\eta_{y_w}\left(\frac{u_{nw}-u_{sw}}{\Delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\Delta_{sn}+\eta_{y_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{y_n}\left(\frac{u_{ne}-u_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\xi_{y_s}\left(\frac{u_{se}-u_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\Delta_{we}\\
+\xi_{x_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}\left(\frac{u_E-u_P}{\Delta\xi_{PE}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}\left(\frac{u_P-u_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\Delta_{sn}+\xi_{x_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{x_e}\left(\frac{u_{ne}-u_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\eta_{x_w}\left(\frac{u_{nw}-u_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\Delta_{sn}\\
+\eta_{x_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{x_n}\left(\frac{u_{ne}-u_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\xi_{x_s}\left(\frac{u_{se}-u_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}+\eta_{x_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}\left(\frac{u_N-u_P}{\Delta\eta_{PN}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}\left(\frac{u_P-u_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}\\
+\xi_{y_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}\left(\frac{v_E-v_P}{\Delta\xi_{PE}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}\left(\frac{v_P-v_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\Delta_{sn}+\xi_{y_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{x_e}\left(\frac{v_{ne}-v_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\eta_{x_w}\left(\frac{v_{nw}-v_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\Delta_{sn}\\
+\eta_{y_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{x_n}\left(\frac{v_{ne}-v_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\xi_{x_s}\left(\frac{v_{se}-v_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}+\eta_{y_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}\left(\frac{v_N-v_P}{\Delta\eta_{PN}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}\left(\frac{v_P-v_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}\\
-\frac{2}{3}\xi_{x_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}\left(\frac{u_E-u_P}{\Delta\xi_{PE}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}\left(\frac{u_P-u_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\Delta_{sn}-\frac{2}{3}\xi_{x_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{x_e}\left(\frac{u_{ne}-u_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\eta_{x_w}\left(\frac{u_{nw}-u_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\Delta_{sn}\\
-\frac{2}{3}\eta_{x_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{x_n}\left(\frac{u_{ne}-u_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\xi_{x_s}\left(\frac{u_{se}-u_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}-\frac{2}{3}\eta_{x_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}\left(\frac{u_N-u_P}{\Delta\eta_{PN}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}\left(\frac{u_P-u_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}\\
-\frac{2}{3}\xi_{x_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}\left(\frac{v_E-v_P}{\Delta\xi_{PE}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}\left(\frac{v_P-v_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\Delta_{sn}-\frac{2}{3}\xi_{x_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{y_e}\left(\frac{v_{ne}-v_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\eta_{y_w}\left(\frac{v_{nw}-v_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\Delta_{sn}\\
-\frac{2}{3}\eta_{x_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{y_n}\left(\frac{v_{ne}-v_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\xi_{y_s}\left(\frac{v_{se}-v_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}-\frac{2}{3}\eta_{x_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}\left(\frac{v_N-v_P}{\Delta\eta_{PN}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}\left(\frac{v_P-v_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}\\
-\frac{2}{3}\xi_{x_P}(\rho_e k_e-\rho_w k_w)\Delta\Delta_{sn}-\frac{2}{3}\eta_{x_P}(\rho_n k_n-\rho_s k_s)\Delta\Delta_{we}+\frac{\overset{0}{\rho_P}\,\overset{0}{u_P}\,\Delta\eta_{sn}\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau}-\xi_{x_P}(P_e-P_w)\Delta\eta_{sn}-\eta_{x_P}(P_n-P_s)\Delta\xi_{we}
\end{array}\right)
\tag{4.19}
$$

Detaylı ayrıklaştırma işlemi EK-1'dedir.

4.6. Y – Yönündeki Momentum Denkleminin Ayrıklaştırılması

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u v)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v v)}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_t)\vec{\nabla}.\vec{V}+\rho k\right) \tag{4.20}$$



Şekil 4.4 Y-momentum grid dağılımı

Koordinat transformasyonu sonucunda,

$$a_P v_P = a_E v_E + a_W v_W + a_N v_N + a_S v_S + b$$

$$a_P = \left(\begin{array}{l} \dfrac{\rho_P \Delta\eta_{sn} \Delta\xi_{we}}{\Delta\tau} + \dfrac{\xi_{x_p} \Delta\eta_{sn} (\mu + \mu_t)_e \xi_{x_e}}{\Delta\xi_{PE}} + \dfrac{\xi_{x_p} \Delta\eta_{sn} (\mu + \mu_t)_w \xi_{x_w}}{\Delta\xi_{WP}} \\ + \dfrac{\eta_{x_p} \Delta\xi_{we} (\mu + \mu_t)_n \eta_{x_n}}{\Delta\eta_{PN}} + \dfrac{\eta_{x_p} \Delta\xi_{we} (\mu + \mu_t)_s \eta_{x_s}}{\Delta\eta_{SP}} \\ + \dfrac{\xi_{y_p} \Delta\eta_{sn} (\mu + \mu_t)_e \xi_{y_e}}{\Delta\xi_{PE}} + \dfrac{\xi_{y_p} \Delta\eta_{sn} (\mu + \mu_t)_w \xi_{y_w}}{\Delta\xi_{WP}} \\ + \dfrac{\eta_{y_p} \Delta\xi_{we} (\mu + \mu_t)_n \eta_{y_n}}{\Delta\eta_{PN}} + \dfrac{\eta_{y_p} \Delta\xi_{we} (\mu + \mu_t)_s \eta_{y_s}}{\Delta\eta_{PN}} \\ + \| F_e, 0 \| + \| - F_w, 0 \| + \| F_n, 0 \| + \| - F_s, 0 \| \end{array} \right).$$

$$a_E = \left(\frac{\xi_{x_p} \Delta\eta_{sn} (\mu + \mu_t)_e \xi_{x_e}}{\Delta\xi_{PE}} + \frac{\xi_{y_p} \Delta\eta_{sn} (\mu + \mu_t)_e \xi_{y_e}}{\Delta\xi_{PE}} + \| - F_e, 0 \| \right)$$

$$a_W = \left(\frac{\xi_{x_p} \Delta\eta_{sn} (\mu + \mu_t)_w \xi_{x_w}}{\Delta\xi_{WP}} + \frac{\xi_{y_p} \Delta\eta_{sn} (\mu + \mu_t)_w \xi_{y_w}}{\Delta\xi_{WP}} + \| F_w, 0 \| \right)$$

$$a_N = \left(\frac{\eta_{x_p} \Delta\xi_{we} (\mu + \mu_t)_n \eta_{x_n}}{\Delta\eta_{PN}} + \frac{\eta_{y_p} \Delta\xi_{we} (\mu + \mu_t)_n \eta_{y_n}}{\Delta\eta_{PN}} + \| - F_n, 0 \| \right)$$

$$a_S = \left(\frac{\eta_{x_p} \Delta\xi_{we} (\mu + \mu_t)_s \eta_{x_s}}{\Delta\eta_{SP}} + \frac{\eta_{y_p} \Delta\xi_{we} (\mu + \mu_t)_s \eta_{y_s}}{\Delta\eta_{SP}} + \| F_s, 0 \| \right)$$

(4.21)

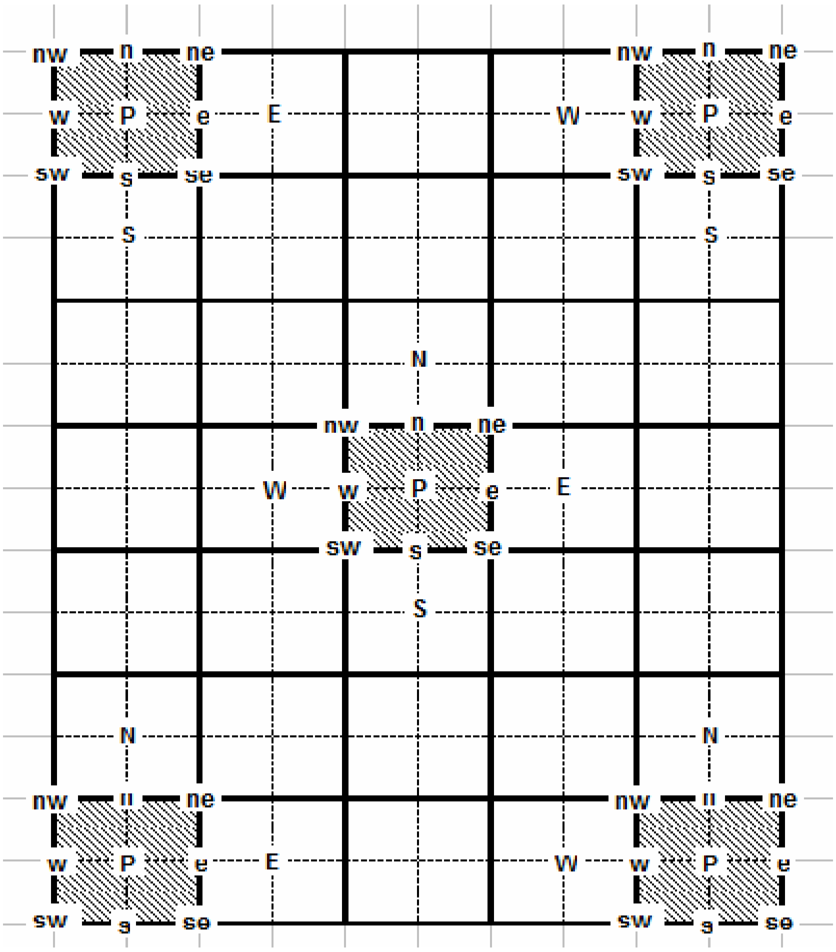
$$
b = \left(
\begin{array}{l}
\xi_{x_p} \cdot \left[(\mu + \mu_t)_e \eta_{x_e} \left(\dfrac{v_{ne} - v_{se}}{\delta\eta_{ne,se}} \right) - (\mu + \mu_t)_w \eta_{x_w} \left(\dfrac{v_{nw} - v_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}} \right) \right] .\Delta\Delta_{sn} + \eta_{x_p} \cdot \left[(\mu + \mu_t)_n \xi_{x_n} \left(\dfrac{v_{ne} - v_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}} \right) - (\mu + \mu_t)_s \xi_{x_s} \left(\dfrac{v_{se} - v_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}} \right) \right] .\Delta\xi_{we} \\
+ \xi_{y_p} \cdot \left[(\mu + \mu_t)_e \eta_{y_e} \left(\dfrac{v_{ne} - v_{se}}{\Delta\eta_{ne,se}} \right) - (\mu + \mu_t)_w \eta_{y_w} \left(\dfrac{v_{nw} - v_{sw}}{\Delta\eta_{nw,sw}} \right) \right] .\Delta\Delta_{sn} + \eta_{y_p} \cdot \left[(\mu + \mu_t)_n \xi_{y_n} \left(\dfrac{v_{ne} - v_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}} \right) - (\mu + \mu_t)_s \xi_{y_s} \left(\dfrac{v_{se} - v_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}} \right) \right] .\Delta\Delta_{we} \\
+ \xi_{x_p} \cdot \left[(\mu + \mu_t)_e \xi_{y_e} \left(\dfrac{u_E - u_P}{\Delta\xi_{PE}} \right) - (\mu + \mu_t)_w \xi_{y_w} \left(\dfrac{u_P - u_W}{\Delta\xi_{WP}} \right) \right] .\Delta\Delta_{sn} + \xi_{x_p} \cdot \left[(\mu + \mu_t)_e \eta_{y_e} \left(\dfrac{u_{ne} - u_{se}}{\delta\eta_{ne,se}} \right) - (\mu + \mu_t)_w \eta_{y_w} \left(\dfrac{u_{nw} - u_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}} \right) \right] .\Delta\Delta_{sn} \\
+ \eta_{x_p} \cdot \left[(\mu + \mu_t)_n \xi_{y_n} \left(\dfrac{u_{ne} - u_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}} \right) - (\mu + \mu_t)_s \xi_{y_s} \left(\dfrac{u_{se} - u_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}} \right) \right] .\Delta\xi_{we} + \eta_{x_p} \cdot \left[(\mu + \mu_t)_n \eta_{y_n} \left(\dfrac{u_N - u_P}{\Delta\eta_{PN}} \right) - (\mu + \mu_t)_s \eta_{y_s} \left(\dfrac{u_P - u_S}{\Delta\eta_{SP}} \right) \right] .\Delta\xi_{we} \\
+ \xi_{y_p} \cdot \left[(\mu + \mu_t)_e \xi_{y_e} \left(\dfrac{v_E - v_P}{\Delta\xi_{PE}} \right) - (\mu + \mu_t)_w \xi_{y_w} \left(\dfrac{v_P - v_W}{\Delta\xi_{WP}} \right) \right] .\Delta\Delta_{sn} + \xi_{y_p} \cdot \left[(\mu + \mu_t)_e \eta_{y_e} \left(\dfrac{v_{ne} - v_{se}}{\delta\eta_{ne,se}} \right) - (\mu + \mu_t)_w \eta_{y_w} \left(\dfrac{v_{nw} - v_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}} \right) \right] .\Delta\Delta_{sn} \\
+ \eta_{y_p} \cdot \left[(\mu + \mu_t)_n \xi_{y_n} \left(\dfrac{v_{ne} - v_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}} \right) - (\mu + \mu_t)_s \xi_{y_s} \left(\dfrac{v_{se} - v_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}} \right) \right] .\Delta\xi_{we} + \eta_{y_p} \cdot \left[(\mu + \mu_t)_n \eta_{y_n} \left(\dfrac{v_N - v_P}{\Delta\eta_{PN}} \right) - (\mu + \mu_t)_s \eta_{y_s} \left(\dfrac{v_P - v_S}{\Delta\eta_{SP}} \right) \right] .\Delta\xi_{we} \\
- \dfrac{2}{3} \xi_{y_p} \cdot \left[(\mu + \mu_t)_e \xi_{x_e} \left(\dfrac{u_E - u_P}{\Delta\xi_{PE}} \right) - (\mu + \mu_t)_w \xi_{x_w} \left(\dfrac{u_P - u_W}{\Delta\xi_{WP}} \right) \right] .\Delta\Delta_{sn} - \dfrac{2}{3} \xi_{y_p} \cdot \left[(\mu + \mu_t)_e \eta_{x_e} \left(\dfrac{u_{ne} - u_{se}}{\delta\eta_{ne,se}} \right) - (\mu + \mu_t)_w \eta_{x_w} \left(\dfrac{u_{nw} - u_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}} \right) \right] .\Delta\Delta_{sn} \\
- \dfrac{2}{3} \eta_{y_p} \cdot \left[(\mu + \mu_t)_n \xi_{x_n} \left(\dfrac{u_{ne} - u_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}} \right) - (\mu + \mu_t)_s \xi_{x_s} \left(\dfrac{u_{se} - u_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}} \right) \right] .\Delta\xi_{we} - \dfrac{2}{3} \eta_{y_p} \cdot \left[(\mu + \mu_t)_n \eta_{x_n} \left(\dfrac{u_N - u_P}{\Delta\eta_{PN}} \right) - (\mu + \mu_t)_s \eta_{x_s} \left(\dfrac{u_P - u_S}{\Delta\eta_{SP}} \right) \right] .\Delta\xi_{we} \\
- \dfrac{2}{3} \xi_{y_p} \cdot \left[(\mu + \mu_t)_e \xi_{y_e} \left(\dfrac{v_E - v_P}{\Delta\xi_{PE}} \right) - (\mu + \mu_t)_w \xi_{y_w} \left(\dfrac{v_P - v_W}{\Delta\xi_{WP}} \right) \right] .\Delta\Delta_{sn} - \dfrac{2}{3} \xi_{y_p} \cdot \left[(\mu + \mu_t)_e \eta_{y_e} \left(\dfrac{v_{ne} - v_{se}}{\delta\eta_{ne,se}} \right) - (\mu + \mu_t)_w \eta_{y_w} \left(\dfrac{v_{nw} - v_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}} \right) \right] .\Delta\Delta_{sn} \\
- \dfrac{2}{3} \eta_{y_p} \cdot \left[(\mu + \mu_t)_n \xi_{y_n} \left(\dfrac{v_{ne} - v_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}} \right) - (\mu + \mu_t)_s \xi_{y_s} \left(\dfrac{v_{se} - v_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}} \right) \right] .\Delta\xi_{we} - \dfrac{2}{3} \eta_{y_p} \cdot \left[(\mu + \mu_t)_n \eta_{y_n} \left(\dfrac{v_N - v_P}{\Delta\eta_{PN}} \right) - (\mu + \mu_t)_s \eta_{y_s} \left(\dfrac{v_P - v_S}{\Delta\eta_{SP}} \right) \right] .\Delta\xi_{we} \\
- \dfrac{2}{3} \xi_{y_P} (\rho_e k_e - \rho_w k_w) \Delta\Delta_{sn} - \dfrac{2}{3} \eta_{y_P} (\rho_n k_n - \rho_s k_s) \Delta\Delta_{we} + \dfrac{\rho_P^{0} v_P^{0} \Delta\eta_{sn} \Delta\xi_{we}}{\Delta\tau} - \xi_{y_P} (P_e - P_w) \Delta\eta_{sn} - \eta_{y_P} (P_n - P_s) \Delta\xi_{we}
\end{array}
\right)
\tag{4.22}
$$

Detaylı ayrıklaştırma işlemi EK-2'dedir.

4.7 Türbülans Kinetik Enerjisi (k) Denkleminin Ayrıklaştırılması

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u k)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v k)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(\mu+\mu_t)}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{(\mu+\mu_t)}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial y}\right)+\mu_t\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$
$$+2\mu_t\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]-\frac{2}{3}\left((\mu+\mu_t)\vec{\nabla}.\vec{V}+\rho k\right)\vec{\nabla}.\vec{V}-\rho\varepsilon$$

(4.23)



Şekil 4.5 Skaler grid dağılımı

Koordinat transformasyonu sonucunda,

$$a_P\,k_P = a_E\,k_E + a_W\,k_W + a_N\,k_N + a_S\,k_S + b$$

$$a_P = \left(\begin{array}{l} \dfrac{\rho_P \Delta\eta_{sn}\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau} + \dfrac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e \xi_{x_e}}{\sigma_k.\Delta\xi_{PE}} + \dfrac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w \xi_{x_w}}{\sigma_k.\Delta\xi_{WP}} \\ + \dfrac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n \eta_{x_n}}{\sigma_k.\Delta\eta_{PN}} + \dfrac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s \eta_{x_s}}{\sigma_k.\Delta\eta_{SP}} \\ + \dfrac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e \xi_{y_e}}{\sigma_k.\Delta\xi_{PE}} + \dfrac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w \xi_{y_w}}{\sigma_k.\Delta\xi_{WP}} \\ + \dfrac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n \eta_{y_n}}{\sigma_k.\Delta\eta_{PN}} + \dfrac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s \eta_{y_s}}{\sigma_k.\Delta\eta_{PN}} \\ + \|F_e,0\| + \|-F_w,0\| + \|F_n,0\| + \|-F_s,0\| \end{array} \right)$$

$$a_E = \left(\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e \xi_{x_e}}{\sigma_k.\Delta\xi_{PE}} + \frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e \xi_{y_e}}{\sigma_k.\Delta\xi_{PE}} + \|-F_e,0\| \right)$$

$$a_W = \left(\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w \xi_{x_w}}{\sigma_k.\Delta\xi_{WP}} + \frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w \xi_{y_w}}{\sigma_k.\Delta\xi_{WP}} + \|F_w,0\| \right)$$

$$a_N = \left(\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n \eta_{x_n}}{\sigma_k.\Delta\eta_{PN}} + \frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n \eta_{y_n}}{\sigma_k.\Delta\eta_{PN}} + \|-F_n,0\| \right)$$

$$a_S = \left(\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s \eta_{x_s}}{\sigma_k.\Delta\eta_{SP}} + \frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s \eta_{y_s}}{\sigma_k.\Delta\eta_{SP}} + \|F_s,0\| \right)$$

(4.24)

$$
b=\left(\begin{array}{l}
\xi_{x_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_e\,\eta_{x_e}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{ne}-k_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_w\,\eta_{x_w}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{nw}-k_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}\\
+\eta_{x_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n\,\xi_{x_n}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{ne}-k_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_s\,\xi_{x_s}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{se}-k_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}\\
+\xi_{y_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_e\,\eta_{y_e}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{ne}-k_{se}}{\Delta\eta_{ne,se}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_w\,\eta_{y_w}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{nw}-k_{sw}}{\Delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}\\
+\eta_{y_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n\,\xi_{y_n}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{ne}-k_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_s\,\xi_{y_s}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{se}-k_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}\\
\mu_{t_P}\left[\xi_{y_P}\frac{u_e-u_w}{\delta\xi}+\eta_{y_P}\frac{u_n-u_s}{\delta\eta}+\xi_{x_P}\frac{v_e-v_w}{\delta\xi}+\eta_{x_P}\frac{v_n-v_s}{\delta\eta}\right]^2.\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}\\
+2\mu_{t_P}\left[\left(\xi_{x_P}\frac{u_e-u_w}{\delta\xi}+\eta_{x_P}\frac{u_n-u_s}{\delta\eta}\right)^2\left(\xi_{y_P}\frac{v_e-v_w}{\delta\xi}+\eta_{y_P}\frac{v_n-v_s}{\delta\eta}\right)^2\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}\\
-\frac{2}{3}\left[(\mu+\mu_t)_P\left(\xi_{x_P}\frac{u_e-u_w}{\delta\xi}+\eta_{x_P}\frac{u_n-u_s}{\delta\eta}+\xi_{y_P}\frac{v_e-v_w}{\delta\xi}+\eta_{y_P}\frac{v_n-v_s}{\delta\eta}\right)+\rho_P\,k_P\right]\\
.\left(\xi_{x_P}\frac{u_e-u_w}{\delta\xi}+\eta_{x_P}\frac{u_n-u_s}{\delta\eta}+\xi_{y_P}\frac{v_e-v_w}{\delta\xi}+\eta_{y_P}\frac{v_n-v_s}{\delta\eta}\right)\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}-\rho_P\;\varepsilon_P\;\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}\\
\frac{\rho_P{}^0 k_P{}^0\Delta\eta_{sn}\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau}
\end{array}\right)
$$

(4.25)

Detaylı ayrıklaştırma işlemi EK-3'tedir.

4.8 Türbülans Kinetik Enerjisi Yutulma Miktarı (ε) İçin Taşınım Denkleminin Ayrıklaştırılması

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u\varepsilon)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v\varepsilon)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(\mu+\mu_t)}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{(\mu+\mu_t)}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\right)$$
$$+\frac{\varepsilon}{k}\left\{C_{1\varepsilon}\left[\mu_t\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+2\,\mu_t\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\right]-C_{2\varepsilon}\,\rho\,\varepsilon\right\}$$

(4.26)

Koordinat transformasyonu sonucunda,

$$a_P\,\varepsilon_P=a_E\,\varepsilon_E+a_W\,\varepsilon_W+a_N\,\varepsilon_N+a_S\,\varepsilon_S+b$$

$$a_P=\left(\begin{array}{l}\dfrac{\rho_P\Delta\eta_{sn}\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau}+\dfrac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{PE}}+\dfrac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{WP}}\\+\dfrac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{PN}}+\dfrac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{SP}}\\+\dfrac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{PE}}+\dfrac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{WP}}\\+\dfrac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{PN}}+\dfrac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{PN}}\\+\|F_e,0\|+\|-F_w,0\|+\|F_n,0\|+\|-F_s,0\|\end{array}\right)$$

$$a_E=\left(\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{PE}}+\frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{PE}}+\|-F_e,0\|\right)$$

$$a_W=\left(\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{WP}}+\frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{WP}}+\|F_w,0\|\right)$$

$$a_N=\left(\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{PN}}+\frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{PN}}+\|-F_n,0\|\right)$$

$$a_S=\left(\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{SP}}+\frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{SP}}+\|F_s,0\|\right)$$

(4.27)

$$
\mathrm{b}=\left(\begin{array}{l}
\xi_{x_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_e\eta_{x_e}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{ne}-\varepsilon_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_w\eta_{x_w}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{nw}-\varepsilon_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}\\
+\eta_{x_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n\xi_{x_n}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{k_{ne}-k_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_s\xi_{x_s}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{se}-\varepsilon_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}\\
+\xi_{y_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_e\eta_{y_e}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{ne}-\varepsilon_{se}}{\Delta\eta_{ne,se}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_w\eta_{y_w}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{nw}-\varepsilon_{sw}}{\Delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}\\
+\eta_{y_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n\xi_{y_n}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{k_{ne}-k_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_s\xi_{y_s}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{se}-\varepsilon_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}\\
\mu_{t_P}\frac{\varepsilon_P}{k_P}C_{1\varepsilon}\left[\xi_{y_P}\frac{u_e-u_w}{\delta\xi}+\eta_{y_P}\frac{u_n-u_s}{\delta\eta}+\xi_{x_P}\frac{v_e-v_w}{\delta\xi}+\eta_{x_P}\frac{v_n-v_s}{\delta\eta}\right]^2.\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}\\
+2\mu_{t_P}\frac{\varepsilon_P}{k_P}C_{1\varepsilon}\left[\left(\xi_{x_P}\frac{u_e-u_w}{\delta\xi}+\eta_{x_P}\frac{u_n-u_s}{\delta\eta}\right)^2\left(\xi_{y_P}\frac{v_e-v_w}{\delta\xi}+\eta_{y_P}\frac{v_n-v_s}{\delta\eta}\right)^2\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}\\
-\left\{\frac{\varepsilon_P}{k_P}C_{2\varepsilon}\rho_P\ \varepsilon_P\right\}\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}\\
+\frac{\rho_P{}^0\varepsilon_P{}^0\Delta\eta_{sn}\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau}
\end{array}\right)
\tag{4.28}
$$

Detaylı ayrıklaştırma işlemi EK-4'tedir.

4.9 Enerji denkleminin ayrıklaştırılması

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u h)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v h)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}}\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}}\frac{\partial h}{\partial y}\right)+\frac{\partial P}{\partial t} \tag{4.29}$$

Koordinat transformasyonu sonucunda,

$$a_P h_P = a_E h_E + a_W h_W + a_N h_N + a_S h_S + b$$

$$a_P=\left(\begin{array}{l}\dfrac{\rho_P \Delta\eta_{sn}\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau}+\dfrac{\xi_{x_P}\Delta\eta_{sn}(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_e\xi_{x_e}}{\Delta\xi_{PE}}+\dfrac{\xi_{x_P}\Delta\eta_{sn}(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_w\xi_{x_w}}{\Delta\xi_{WP}}+\dfrac{\eta_{x_P}\Delta\xi_{we}(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_n\eta_{x_n}}{\Delta\eta_{PN}}+\dfrac{\eta_{x_P}\Delta\xi_{we}(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_s\eta_{x_s}}{\Delta\eta_{SP}}\\ +\dfrac{\xi_{y_P}\Delta\eta_{sn}(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_e\xi_{y_e}}{\Delta\xi_{PE}}+\dfrac{\xi_{y_P}\Delta\eta_{sn}(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_w\xi_{y_w}}{\Delta\xi_{WP}}+\dfrac{\eta_{y_P}\Delta\xi_{we}(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_n\eta_{y_n}}{\Delta\eta_{PN}}+\dfrac{\eta_{y_P}\Delta\xi_{we}(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_s\eta_{y_s}}{\Delta\eta_{PN}}\\ +\|F_e,0\|+\|-F_w,0\|+\|F_n,0\|+\|-F_s,0\|\end{array}\right).$$

$$a_E=\left(\dfrac{\xi_{x_P}\Delta\eta_{sn}(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_e\xi_{x_e}}{\Delta\xi_{PE}}+\dfrac{\xi_{y_P}\Delta\eta_{sn}(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_e\xi_{y_e}}{\Delta\xi_{PE}}+\|-F_e,0\|\right)$$

$$a_W=\left(\dfrac{\xi_{x_P}\Delta\eta_{sn}(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_w\xi_{x_w}}{\Delta\xi_{WP}}+\dfrac{\xi_{y_P}\Delta\eta_{sn}(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_w\xi_{y_w}}{\Delta\xi_{WP}}+\|F_w,0\|\right)$$

$$a_N=\left(\dfrac{\eta_{x_P}\Delta\xi_{we}(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_n\eta_{x_n}}{\Delta\eta_{PN}}+\dfrac{\eta_{y_P}\Delta\xi_{we}(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_n\eta_{y_n}}{\Delta\eta_{PN}}+\|-F_n,0\|\right)$$

$$a_S=\left(\dfrac{\eta_{x_P}\Delta\xi_{we}(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_s\eta_{x_s}}{\Delta\eta_{SP}}+\dfrac{\eta_{y_P}\Delta\xi_{we}(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_s\eta_{y_s}}{\Delta\eta_{SP}}+\|F_s,0\|\right)$$

$$b=\frac{(P_P-P_P{}^0)\Delta\Delta_{sn}.\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau}+\xi_{t_P}(P_e-P_w)\Delta\Delta_{sn}+\eta_{t_P}(P_n-P_s)\Delta\xi_{we}+\frac{\rho_P{}^0 h_P{}^0\Delta\eta_{sn}\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau} \tag{4.30}$$

Detaylı ayrıklaştırma işlemi EK-5'te sunulmuştur.

5. PROGRAM YAZILIMI İÇİN ÇÖZÜM ALGORİTMASI

1. Programda kullanılacak tüm değişkenlere ilk verilerin girilmesi.
2. Akışın inceleneceği geometri üzerinde grid dağılımının oluşturulması sonrası, grid içindeki tüm noktaların x ve y koordinatlarının programa girilmesi.
3. x ve y yönündeki hızlar (u,v), sıcaklık (T), basınç (P), yoğunluk (ρ), türbülans kinetik enerjisi yutulma miktarı (ε), türbülans kinetik enerjisi (k), laminer (μ) ve türbülans (μ_t) viskozite referans değerlerinin (ilk değerler) girilmesi.
4. Hesaplama öncesi iterasyon limitlerinin girilmesi.
5. Sınır şartlarının girilmesi (x ve y yönündeki hızlar, sıcaklık, basınç ve türbülans (ε,k) değerleri)
(SİMPLE Metodu kullanılarak aşağıdaki işlemler yapılmaktadır.)
6. Hız (u,v) hücreleri kullanılarak; sınırlarda (grid etrafında) ve iç kısımlarda, $a_P\ \varphi_P = a_W\ \varphi_W + a_E\ \varphi_E + a_S\ \varphi_S + a_N\ \varphi_N + b$ denkleminde bulunan "a" katsayılarının hesaplanması.
(Katsayılar hesaplanırken daha önce ayrıklaştırma işlemi yapılan ana denklemlerde grid dağılımı içinde duvar var veya yok durumuna göre duvar fonksiyonları kullanılmaktadır.)
7. Gauss-Seidel Metodu ile, hesaplanan "a" katsayıları kullanılarak φ değişkenlerinin (u,v) hesaplanması.
8. Hız düzeltme denklemleri cebirsel hale getirilen süreklilik denklemine koyulup cebirsel basınç düzeltme denklemi, $a_P\ P_P = a_W\ P_W + a_E\ P_E + a_S\ P_S + a_N\ P_N + b$ oluşturuluyor.
9. Cebirsel basınç düzeltme denkleminde bulunan "a" katsayıları ile "b" katsayısı hesaplanmaktadır.
10. Cebirsel basınç düzeltme denkleminden düzeltilmiş basınç değerlerinin hesaplanması.
11. Düzeltilmiş basınç değerleri ile ilk bulunan (madde 7) hız değerlerinin, hız düzeltme denklemlerine konularak yeni düzeltilmiş hız değerlerinin hesaplanması.

12. Eğer madde 9' da bulunan "*b*" katsayısı sıfıra eşitse iterasyon sona ermekte ve bulunan hız ve basınç değerleri doğru kabul edilir ve bu değerler kullanılarak diğer değişkenlerin (sıcaklık ve türbülans (ε,k) değerleri) hesaplanmasına geçilir. Yok hayır "*b*" katsayısı sıfıra eşitlenmezse iterasyona devam edilir. Yani, yeni bulunan basınç değeri kullanılarak madde 6'dan itibaren işlemler tekrar edilir. Böylece tekrar yeni hız ve basınç değerleri hesaplanır. Ta ki madde 9' da bulunan "*b*" katsayısı sıfıra eşitlenene kadar. "*b*" katsayısının sıfıra eşitlenmesi süreklilik denkleminin sağlandığı anlamına gelmektedir.

13. Süreklilik denklemi sağlandığı ve doğru hız ve basınç denklemleri bulunduktan sonra, ayrıklaştırılmış türbülans ve enerji denklemlerinin $a_P\,\varphi_P = a_W\,\varphi_W + a_E\,\varphi_E + a_S\,\varphi_S + a_N\,\varphi_N + b$ şekline getirilerek hız hesaplamalarında olduğu gibi önce "*a*" ve "*b*" katsayılarının hesaplanması, daha sonra da değişkenlerin kendilerinin (sıcaklık ve türbülans (ε,k) değerleri) bulunması.

14. Hesaplanan tüm değişkenler yeni bir dosya oluşturularak yazdırılması.

6. SONUÇLAR

Bu bölümde geliştirilen programın doğrulanması amaçlanmaktadır. Geliştirilen programın doğrulanması, o programın güvenirliğini de ortaya koyması bakımından, yapılan bilimsel çalışmalarda önemli bir yer teşkil etmektedir. Doğrulama çalışmalarında seçilecek örnekler de bir o kadar önemlidir. Bu düşünce doğrultusunda tezde literatürde çok kullanılan, analitik ve deneysel sonuçları bulunan farklı örnekler seçilmiştir. Bunlar laminer ve türbülanslı akışlar olmak üzere, sürtünmeli ve sürtünmesiz içten/dıştan akışlardır. Ayrıca seçilen örneklerin bir kısmı ses altı (subsonik), transonik ve ses üstü (süpersonik) akışlardır. Görüldüğü üzere doğrulama çalışmaları için seçilen örnek akış tipleri geniş bir hız dağılımını içermekle beraber çok çeşitliliğe sahiptir.

Bu tez çalışmasında yukarıda belirtilen açıklamalar doğrultusunda Çizelge 6.1'de verilen akış örnekleri ile geliştirilen program doğrulanmaya çalışılmıştır.

Çizelge 6.1. Doğrulama çalışmalarında seçilen akış örnekleri

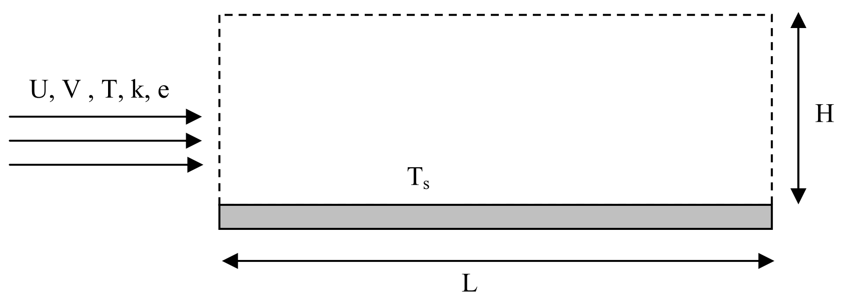
Test Örneği	Akış Tipi
1	Düz plaka üzerinden laminer akış
2	Düz plaka üzerinden türbülanslı akış
3	Paralel iki plaka arasındaki türbülanslı akış
4	Tabanında tümsek (bump) bulunan bir kanal içindeki sürtünmesiz akış (ses altı, transonik ve ses üstü hızlarda)
5	Süpersonic nozul içindeki sürtünmeli akış
6	NACA 0012 kanat üzerindeki sürtünmeli ve sürtünmesiz akış

Geliştirilen program iki boyutlu kararlı akım şartlarındaki akışları çözmekte ve k-ε trürbülans modelini içermektedir. Hesaplamalı akışkanlar dinamiği çok geniş bir alanı kapsamakta olup, çok farklı çözüm modellerini bünyesinde bulundurmaktadır. Farklı çözüm modelleri kullanılarak aynı akış probleminde farklı sonuçlar alınabilmektedir. Deneysel ve analitik sonuçlarla iyi derecede uyumluluk gösteren sayısal modeller günümüzde kabul görmüştür. Sonuç olarak, hesaplamalı akışkanlar dinamiği ile elde edilen sonuçlar mutlaka bir miktar hata içermekte olup, bu bazı akış tipleri için nispeten küçük olmasına karşın çok daha büyük hata oranlarına ulaşabilmektedir. Dolayısıyla sayısal çözümleme çalışmaları, daha doğru sonuşları elde edebilmek için günümüzde olabildiğince büyük bir hızla devam etmektedir.

Aşağıda sırasıyla Çizelge 6.1'de verilen örnek akış tipileri çözümlenmeye çalışılmaktadır.

6.1 Düz plaka üzerinden laminer akış

Geliştirilen program başlangıç olarak, Şekil 6.1'de görülen düz plaka üzerinden tipik bir laminer akış örneği ile doğrulanmaya çalışılmaktadır. Seçilen akış tipi, kartezyen koordinatlarda rahatlıkla çözülebilen, analitik çözümleri bulunan basit bir örnek akış tipidir. Literatürde, geliştirilen programların büyük bölümünün seçtiği bir akıştır. Bu tip akışlar genelde sabit basınçta akışlar olarak bilinir.



Şekil 6.1. Düz plaka üzerinden tipik bir akış gösterimi

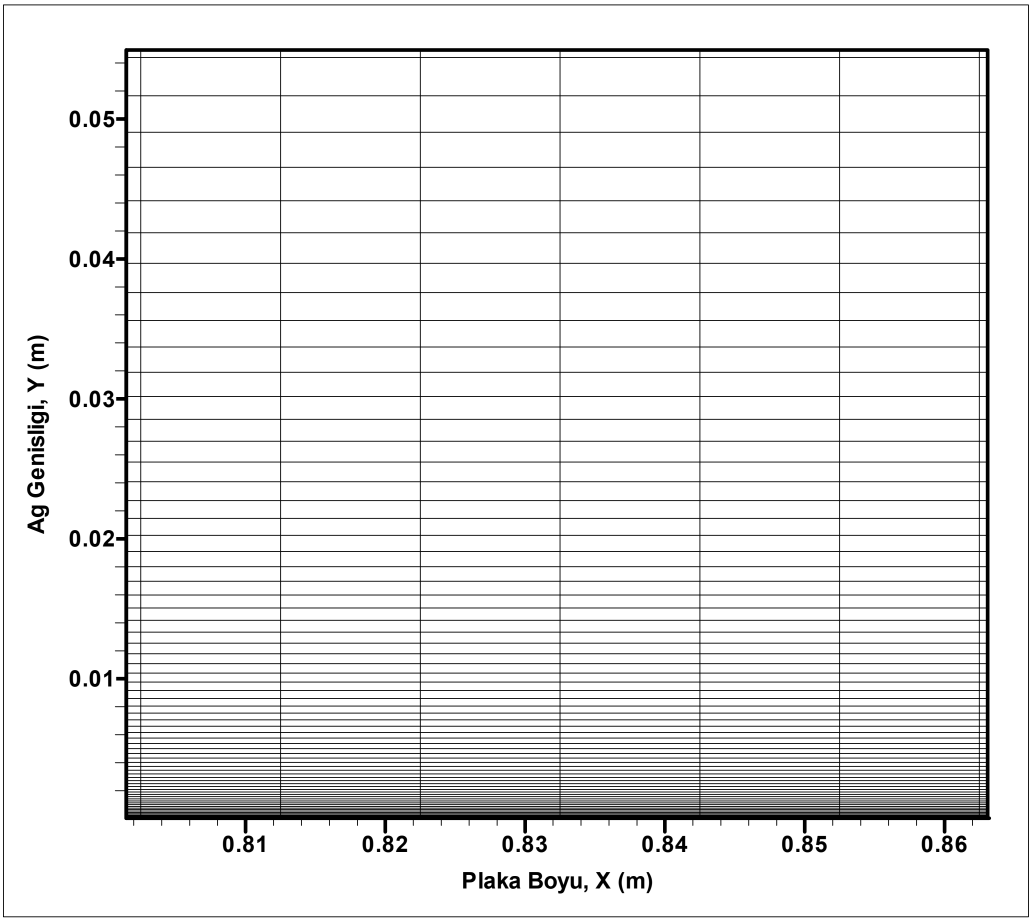
Akış şartları Çizelge 6.2'de verilmiştir. Akış hızı olarak, düz plaka üzerinden akışta kritik sayı olan $5x10^5$ [Incropera ve De Witt, 1990] değerinin çok altında bulunan 38000 Reynolds sayısı seçilmiştir. Akışkanın sıcaklığı 300 K olmakla beraber plakanın yüzey sıcaklığının 500 K değerinde sabit kaldığı varsayılmıştır.

Çizelge 6.2 Laminer akış şartları

GRİD SAYISI	201 x 101
L	1,0
H	0,2
Re	38000
T	300 K
Ts	500 K

Ağ dağılımı olarak 201x101 nokta kullanılmıştır. Ağ dağılımı içinde 20321 nokta ve 20000 kontrol hacmi bulunmaktadır. Plaka yüzeyine doğru ağ yapısı sıkıştırılarak çözümün hassasiyeti arttırılmıştır. Yaklaşık 35-40 civarında nokta sınır tabakasının içinde kalacak şekilde sıklaştırma gerçekleştirilmiştir. Düz plaka üzerinde oluşturulan sıklaştırılmış ağ yapısı Şekil 6.2'de gösterilmiştir.

Bilindiği üzere katı bir yüzey üzerinden akışta, yüzeyde sürtünmenin de etkisiyle akışkana karşı bir direnç oluşur. Oluşan sürtünme kuvvetlerinin etkisiyle akışkanın yüzeye doğru yaklaştıkça yavaşladığı görülür. Sürtünme kuvvetlerinin etkisiyle yüzey üzerinde sınır tabaka olarak adlandırılan bir tabaka oluşur. Sınır tabakası akışkanın temasa geçtiği plakanın ön yüzeyinden itibaren kalınlaşmaya başlar ve plaka sonuna kadar kalınlaşmaya devam eder. Sınır tabakası dışında sürtünme kuvvetlerinin etkisi ihmal edilebilecek düzeydedir. Reynolds sayısı arttıkça sınır tabakasının kalınlığı azalarak daha ince bir görünüme bürünür ve plaka yakınında daha düşük eğimli bir hız profili oluşması beklenir. Ayrıca akışkanın viskozitesinin düşmesi de aynı etkiyi yaparak sınır tabakasının kalınlığının azalmasına neden olur.



Şekil 6.2. Düz plaka üzerinden laminer akış için ağ yapısı

Bu örnekte plaka önünde akışın uniform olduğu kabul edilmiştir. Program ile yapılan çözümleme sonunda laminer akım için elde edilen hız profili Şekil 6.3'te verilmiştir. Hız profilinden görüldüğü üzere akış hızı plakaya doğru yaklaştıkça azalmakta ve beklendiği üzere sıfırlanmaktadır. Ayrıca hız profilinin düzgün eğrisel bir şekil aldığı görülmektedir.

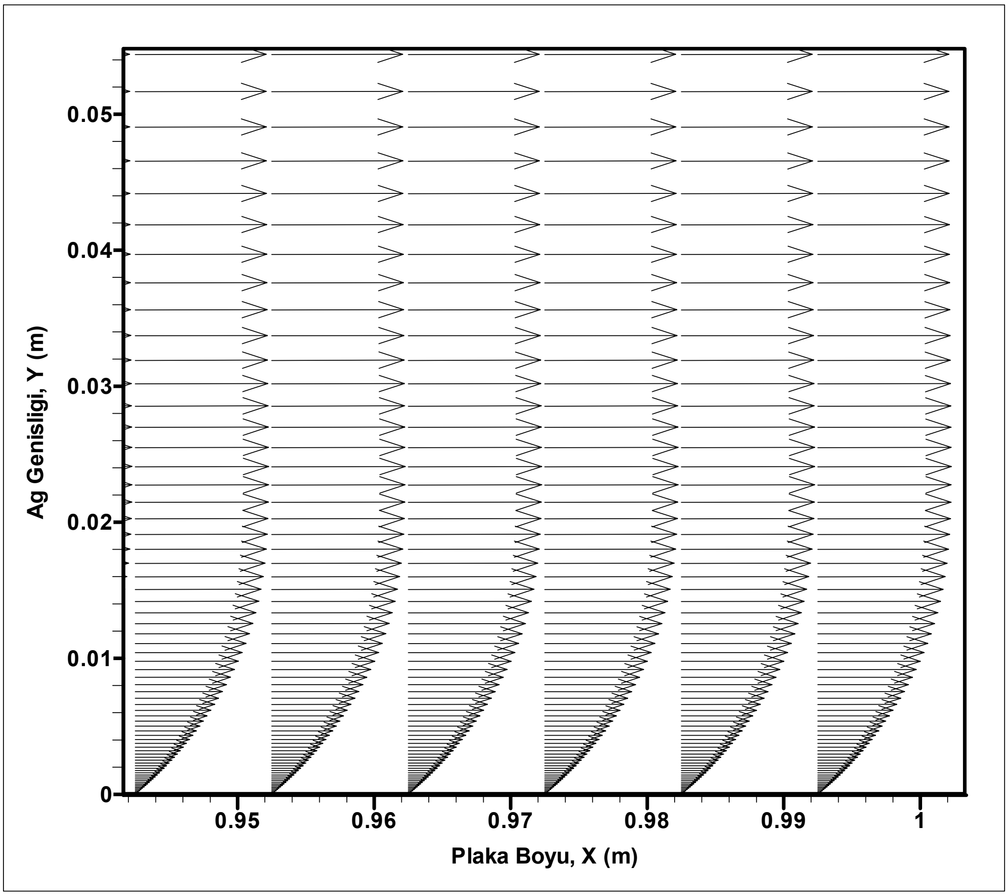
Düz plaka üzerinden akışlarda sınır tabakasının hesaplanması doğrulama çalışmalarında en çok kullanılan yöntemlerdendir. Sınır tabakası kalınlığı aşağıda verilen Blasius denkleminden [Schlichting, 1987] hesaplanabilmektedir.

$$\delta = \frac{5x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \qquad (6.1)$$

Burada, x plaka boyunca olan mesafe, Re_x ise x mesafesindeki Reynolds sayısıdır. Seçilen örnekteki laminer akış için denklem 6.1'den sınır tabakası kalınlığı hesaplanacak olursa,

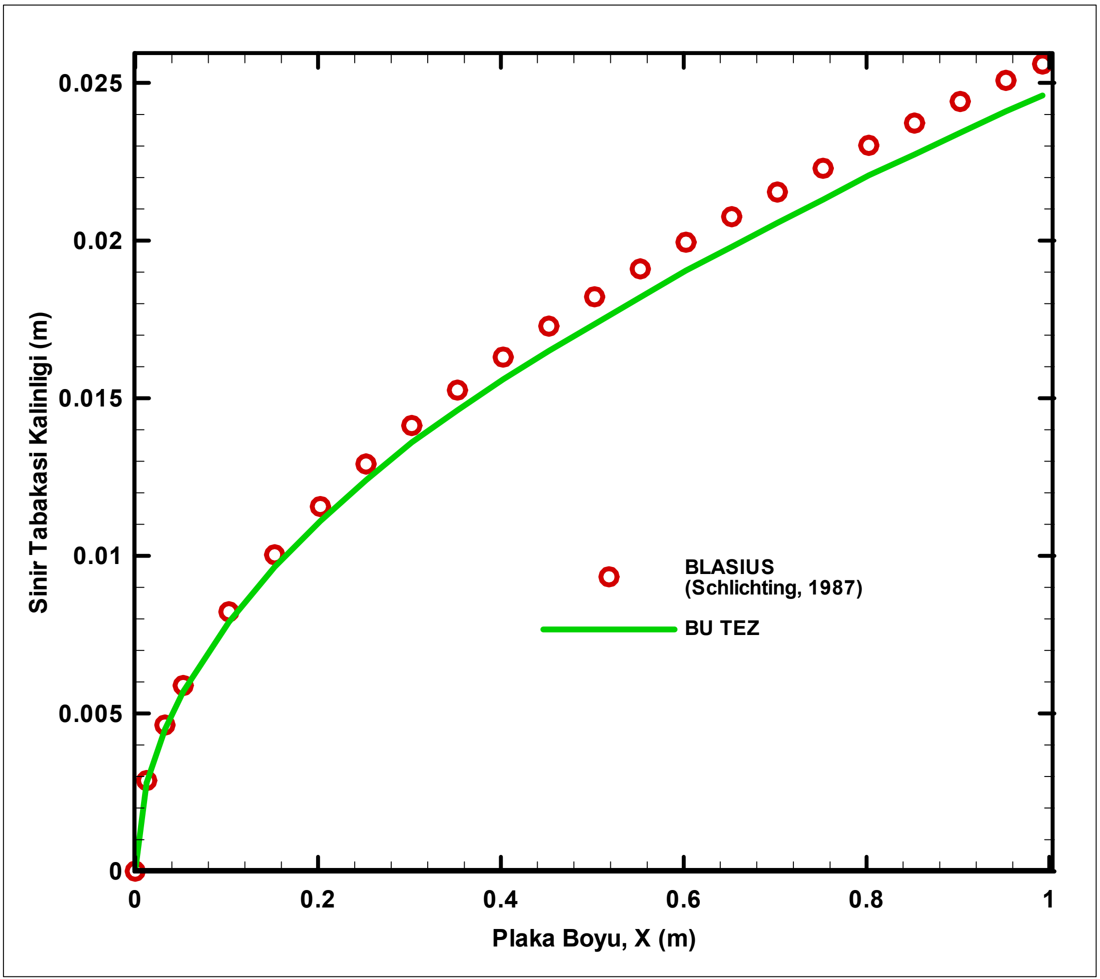
$$\delta = \frac{5x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} = \frac{5x1{,}0}{\sqrt{38000}} \cong 0.0256 \text{ m}$$

Hesaplama sonucunda sınır tabakasının analitik plarak hesabından yaklaşık 0.0256 değeri elde edilmiştir. Denklem 6.1'de verilen ifade U/U_o oranının 0.99 değerine ulaştığındaki sınır tabaka kalınlığıdır. Verilen örneğin çözümünden elde edilen sayısal sonuçlardan ise yatay hız (U) değerinin değişiminin 0.0245 m'de durduğu görülmüştür. Elde edilen sonucun analitik çözüm ile çok büyük bir uyumluluk gösterdiği görülmüştür.



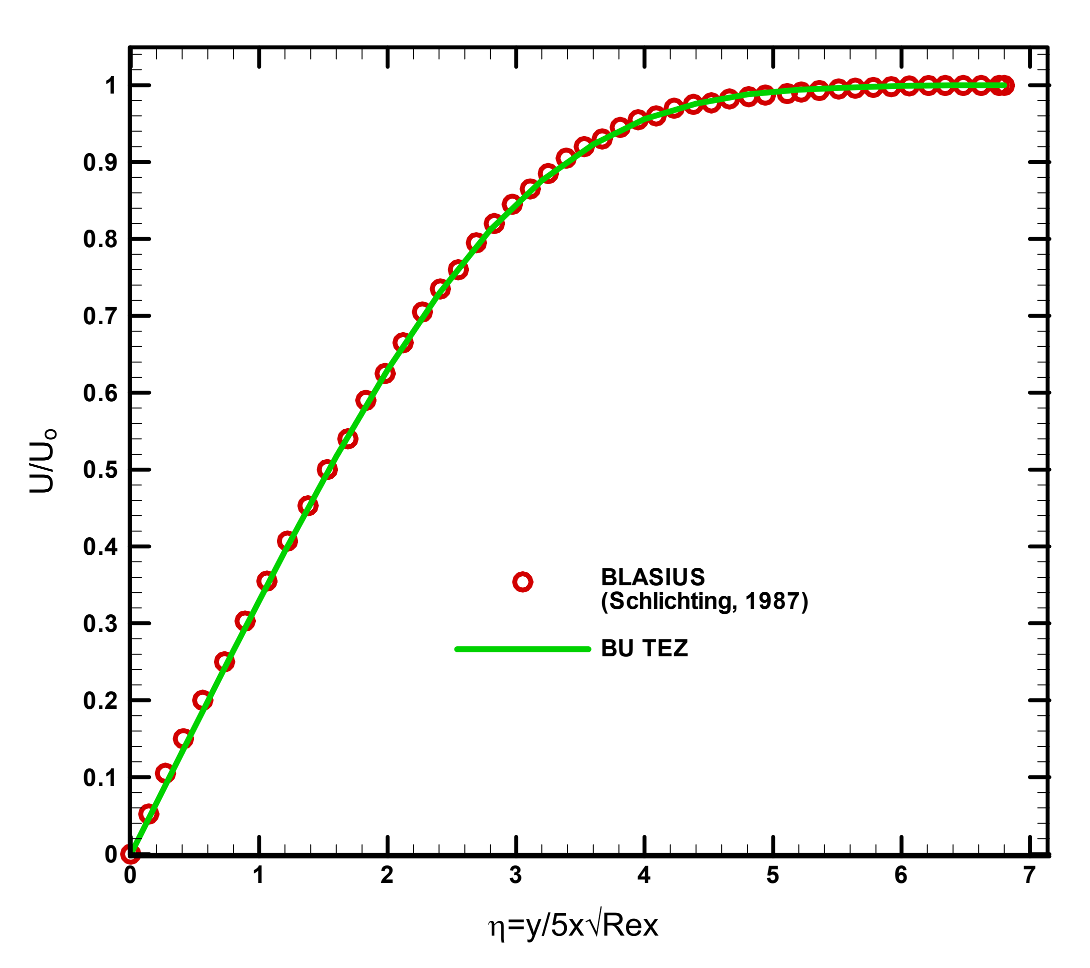
Şekil 6.3. Düz plaka üzerinden laminer akışta oluşan hız profili

Hız profilininin sabitleştiğini Şekil 6.3'ten görsel olarak ta görmek mümkündür. Ayrıca verilen analitik denklem ile plaka boyunca olan sınır tabakası kalınlığının karşılaştırması Şekil 6.4'te görülmektedir. Verilen grafikten de görüleceği üzere sonuçlar birbirine çok yakın çıkmıştır.



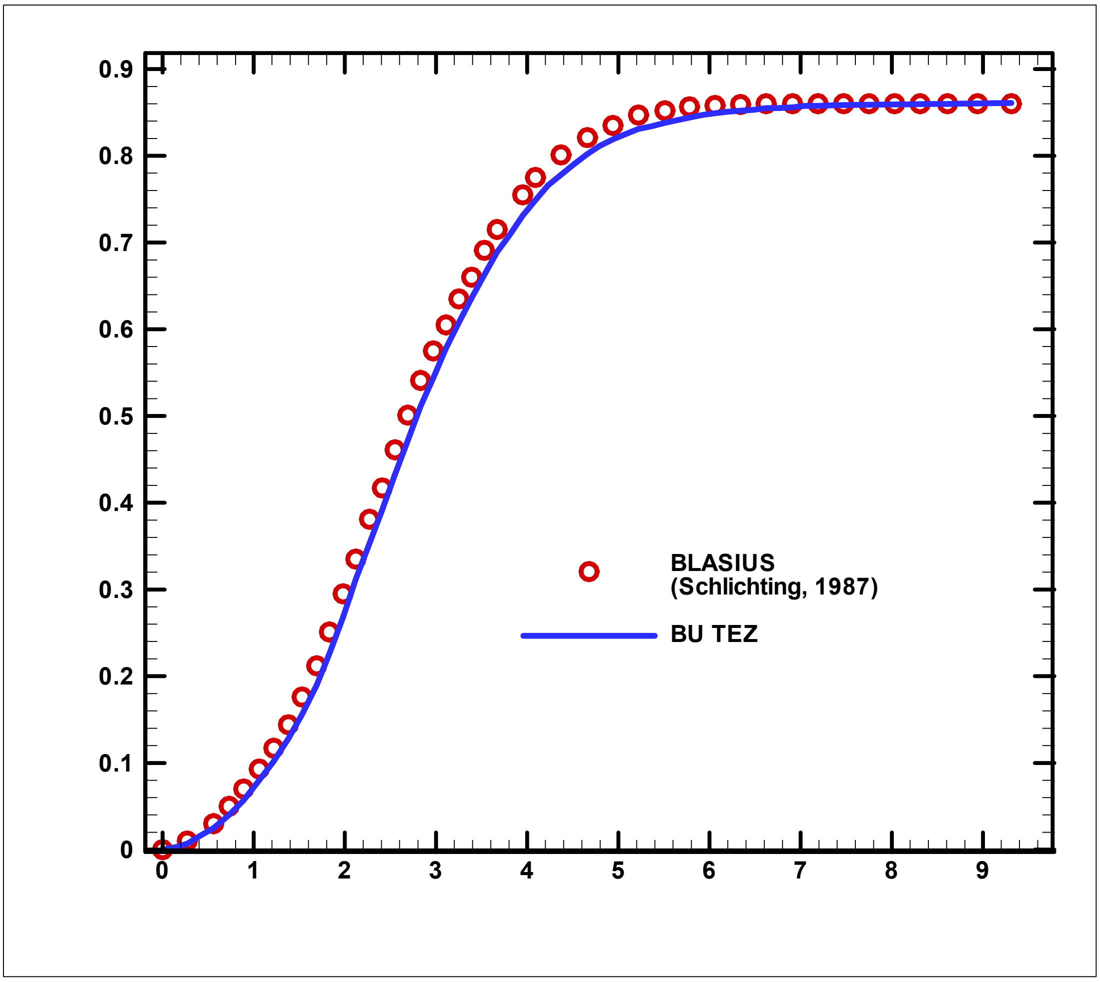
Şekil 6.4. Laminer akışta plaka üzerinde oluşan sınır tabakası kalınlığının analitik çözüm ile karşılaştırması

Sayısal sonucun doğrulanması için yapılan bir sonraki karşılaştırma ise yatay (U) ve dikey (V) hız bileşenlerindeki değişimlerin Blasius'un benzerlik parametresi olan $\eta = \frac{y}{x}\sqrt{\mathrm{Re}_x}$ ile karşılaştırılmalarıdır. Bu karşılaştırma literatürde en çok kullanılan karşılaştırma şeklidir. Yatay hız bileşeni için U/U_o oranının değişiminin benzerlik parametresi ile karşılaştırması Şekil 6.5'te verilmiştir. Sayısal sonuç ile benzerlik parametresinin üstüste çakışarak tam bir uyumluluk gösterdiği görülmüştür.



Şekil 6.5. Düz plaka üzerinden laminer akışta x=0.8 m’de yatay hız bileşeninin analitik çözüm ile karşılaştırması

Daha sonra dikey hız (V) bileşenindeki değişimi görmek için $\frac{V}{U_o}\sqrt{\mathrm{Re}_x}$ değerinin benzerlik parametresi η ile değişimi hesaplanmıştır. Hesaplama sonucunun analitik denklemlerle olan karşılaştırması Şekil 6.6’da verilmiştir. Elde edilen grafiğe bakıldığında dikey hız bileşeninin değişiminde yatay hız bileşeninden farklı olarak küçük bir miktar sapma görülmüştür. Özellikle plaka ortasına doğru bu sapma artmış ve plaka sonuna ulaşıldığında tekrar analitik sonuç ile sayısal çözümlemeden elde edilen sonuçlar örtüşmüştür.

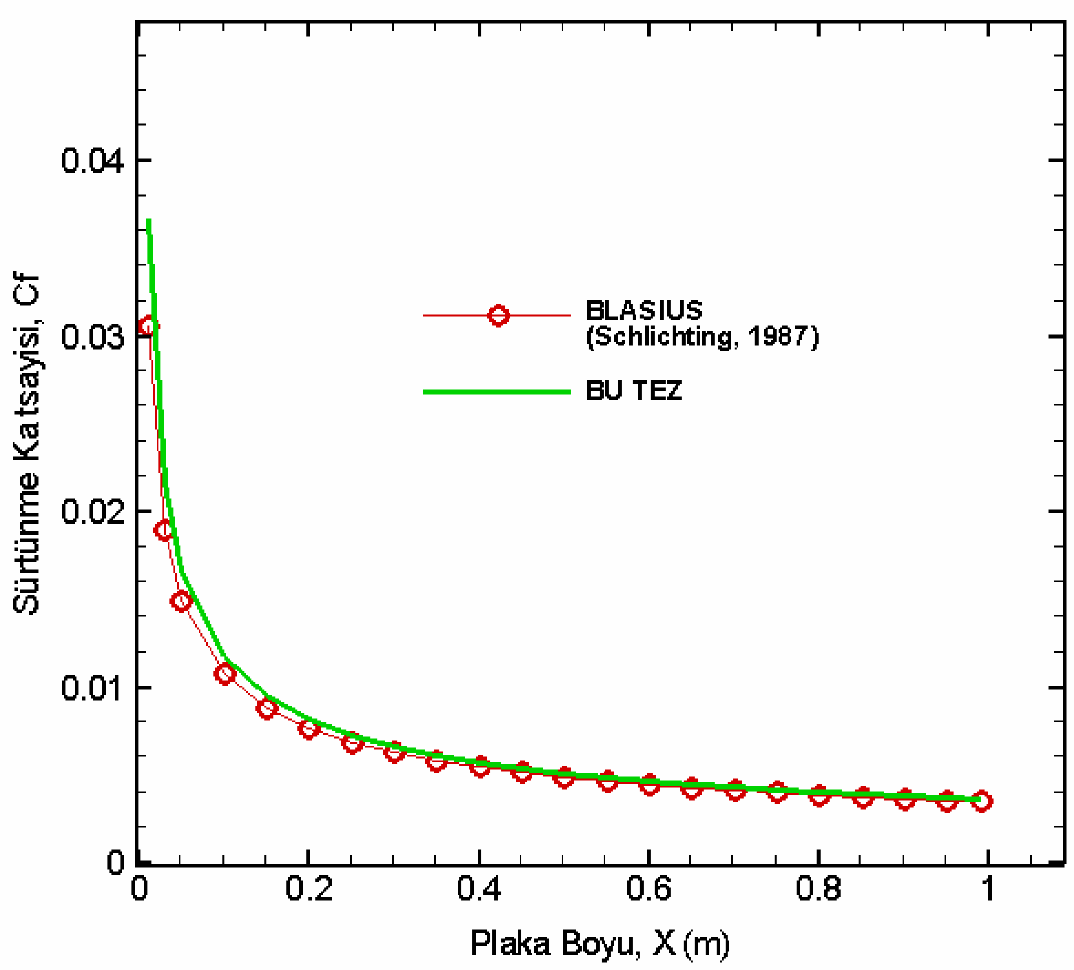


Şekil 6.6. Düz plaka üzerinden laminer akışta x=0.8 m'de dikey hız bileşeninin analitik çözüm ile karşılaştırması

Son olarak plaka üzerinde oluşan sürtünmenin ifadesi olan sürtünme katsayısının karşılaştırması verilecektir. Sürtünme katsayısının analitik ifadesi olan laminer akış için Blasius denklemi [Schlichting, 1987] aşağıda verilmiştir.

$$C_f = 0.664 \mathrm{Re}^{-1/2} \tag{6.2}$$

Burada sürtünme katsayısının Re sayısı ile değiştiği görülmektedir. Analitik sonuçlarla sayısal çözümlemeden elde edilen sonuçların karşılaştırması Şekil 6.7'de verilmiştir. Sonuçlar değerlendirilecek olursa, plakanın başlangıç kısmında bir miktar küçük sapma görülmesine rağmen plakanın ilerleyen kısmında sonuçların tam örtüştüğü görülmektedir.



Şekil 6.7. Laminer akışta plaka üzerindeki sürtünme katsayısının analitik çözüm ile karşılaştırması

Yukarıda elde edilen sonuçlar genel olarak değerlendirildiğinde, geliştirilen programdan elde edilen sayısal sonuçların analitik sonuçlar ile olan karşılaştırmalarından da görüleceği üzere, program başarılı bir performans sergilemiştir. Sonuç olarak, programın laminer akış için doğrulandığı söylenebilir.

6.2 Düz Plaka Üzerinden Türbülanslı Akış

Geliştirilen programın laminer akış şartlarında doğrulanmasından sonra Çizelge 6.3'te akış şartları verilen türbülanslı akış örneği çözümlenmiştir. Çözüm $3x10^6$ Reynolds sayısında gerçekleştirilmiştir. Plakanın yüzey sıcaklığının laminer akışta olduğu gibi 500 K değerinde sabit tutulduğu ve akışkanın giriş sıcaklığı 300 K olduğu kabul edilmiştir. Bu şekilde, yüzey sıcaklığı akışkan sıcaklığından büyük seçilerek yüzeyden akışkana ısı transferinin olması sağlanmıştır.

Çizelge 6.3 Türbülanslı Akış Şartları

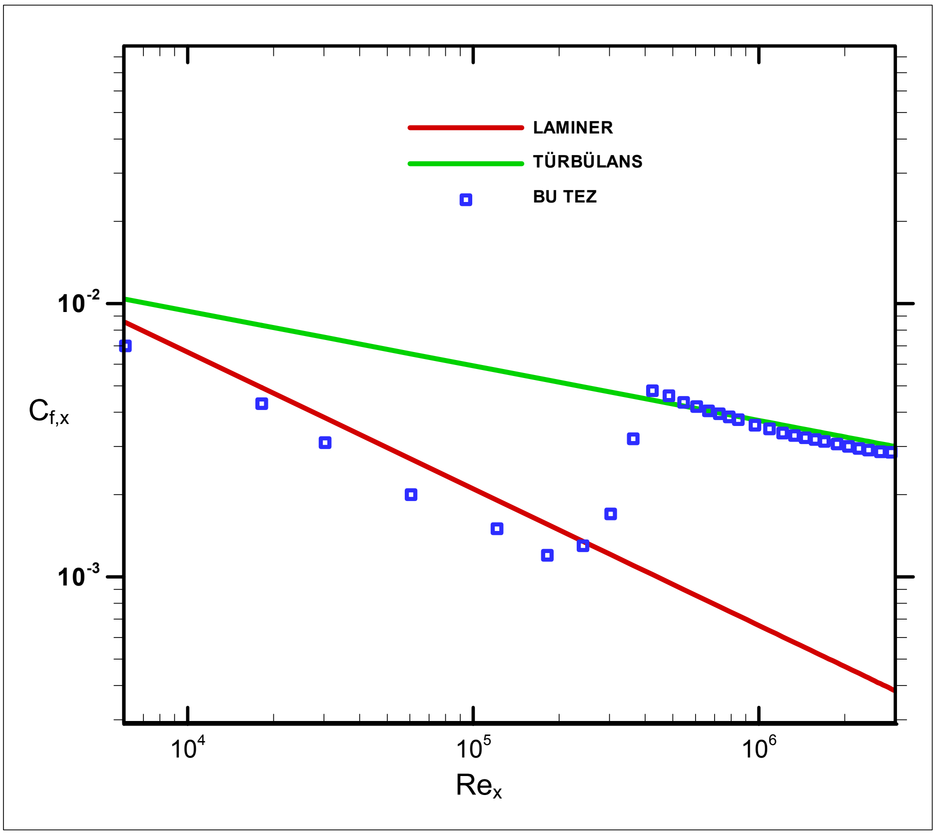
GRİD SAYISI	251x151
L	1.0
H	0.2
Re	$3x10^6$
T	300 K
Ts	500 K

Çözüm için laminer akışta kullanılan plaka kullanılmıştır. Ağ dağılımı olarak 251x151 seçilerek nokta sayısı arttırılmıştır. Ağ dağılımı içinde 37901 nokta ve 37500 kontrol hacmi bulunmaktadır. Çözüm yapılan kontrol hacmi sayısının laminere göre yaklaşık iki kat arttırıldığı görülmektedir. Plaka yüzeyine doğru ağ yapısı daha da sıklaştırılarak çözümün hassasiyeti oldukça arttırılmıştır. Yaklaşık 50-55 civarında nokta sınır tabakasının içinde kalacak şekilde sıklaştırma gerçekleştirilmiştir.

İlk olarak plaka üzerinde oluşan sürtünmenin ifadesi olan sürtünme katsayısının karşılaştırması yapılmıştır. Deneysel sonuçlarla $5x10^5$ ve 10^7 Reynolds sayısı aralığında büyük uyum gösterdiği belirtilen sürtünme katsayısının analitik ifadesi aşağıda verilmiştir [Incropera ve De Witt, 1990].

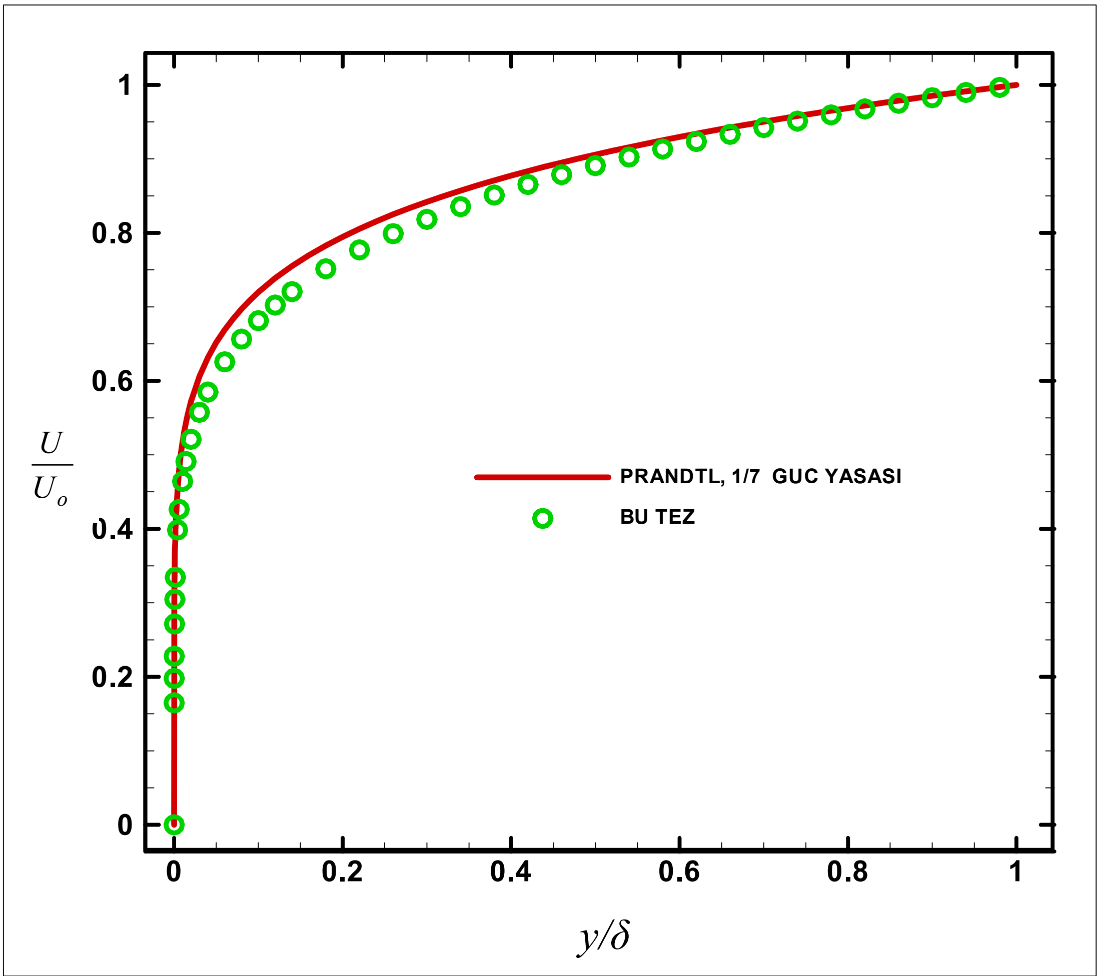
$$C_{f,x} = 0.0592 \mathrm{Re}_x^{-1/5} \tag{6.3}$$

Elde edilen sonuçlar Şekil 6.8'de verilmiştir. Şekilde laminer ve türbülanslı iki bölgenin bulunduğu görülmektedir. Ayrıca laminer akıştan türbülanslı akışa geçişi görmek mümkündür. Kırmızı çizgi Denklem 6.2 ile verilen laminer akış için sürtünme katsayısı, yeşil renkteki çizgi ise Denklem 6.3 ile verilen türbülanslı akış için sürtünme katsayısının analitik çözümleridir. Şekil 6.8'den görüleceği üzere laminer bölgede küçük sapmalar olmasına karşın türbülanslı akış bölgesinde sayısal sonuçların analitik çözümlerle büyük bir uyum gösterdiği görülmektedir. Yaklaşık 3×10^5 Reynolds sayısında laminer akıştan türbülanslı akışa geçiş başlamakta ve 4.5×10^5 Reynolds sayısı civarında türbülanslı bölgeye geçiş tamamlanmaktadır. Sonucun laminer bölgeden türbülanslı bölgeye geçiş için kritik Reynolds sayısı olarak bilinen 5×10^5 değerine çok yakın olduğu gözlenmiştir.



Şekil 6.8. Türbülanslı akışta plaka üzerindeki sürtünme katsayısının analitik çözüm ile karşılaştırması

İkinci olarak, sınır tabaka kalınlığının akış hızı ile değişimi incelenmiştir. Elde edilen sayısal sonuçların Prandtl'ın 1/7 güç yasası olarak bilinen analitik sonuçlarla karşılaştırması Şekil 6.9'da verilmiştir.



Şekil 6.9. Düz plaka üzerinden türbülanslı akışta x=0.9'da dikey hız bileşeninin analitik çözüm ile karşılaştırması

Prandtl'ın 1/7 güç yasası ve sınır tabaka kalınlığını veren denklemler aşağıda verilmiştir. [Schlichting, 1987]

Prandtl'ın 1/7 güç yasası,

$$\frac{U}{U_o} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \tag{6.4}$$

Sınır tabaka kalınlığı,

$$\delta = 0.37 x \mathrm{Re}^{-1/5} \tag{6.5}$$

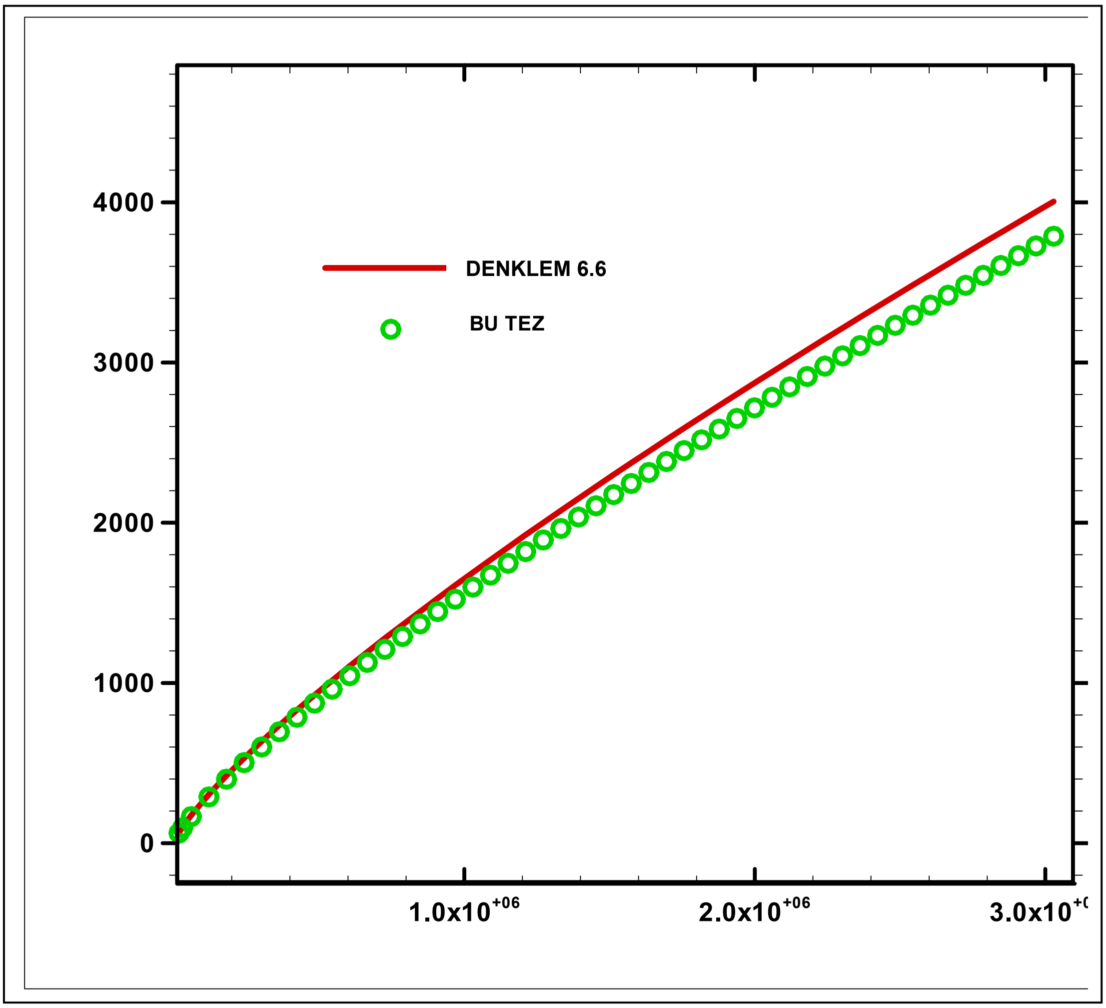
Karşılaştırma sonuçları incelendiğinde, başlangıçta uyumlu başlayan $\dfrac{U}{U_o} \approx \dfrac{y}{\delta}$ değişimi plaka ortasına doğru bir miktar sapma göstermekle birlikte plaka sonuna doğru Prandtl'ın 1/7 güç yasasından elde edilen analitik çözümlerle tekrar uyumlu hale gelmektedir. Elde edilen sonuçlar kabul edilebilir olarak değerlendirilebilir.

Son olarak, plaka boyunca Nusselt sayısının (Nu_x) Reynolds sayısıyla değişimi incelenmiştir. Çizelge 6.3'te verilen akış şartlarından da görüleceği üzere akışkanın giriş sıcaklığı 300 K olarak verilirken, plakanın yüzey sıcaklığının 500 K sıcaklıkta sabit kaldığı kabul edilmiştir. Bu şartlar altında plakanın yüzeyi ile akışkan arasında sıcaklık değişiminin olduğu görülmektedir. Bu nedenle yüzey üzerinde boyutsuz sıcaklık gradyanı ifadesi olan Nusselt sayısı sıcaklık değişimi için önemli bir değerlendirme kriteridir. Türbülanslı akış şartlarında Nusselt sayısı aşağıdaki gibi ifade edilmiştir. [Incropera ve De Witt, 1990]

$$Nu_x = 0.0296 \mathrm{Re}_x^{4/5} \mathrm{Pr}^{1/3} \tag{6.6}$$

Programdan elde edilen sayısal sonuçlarla Denklem 6.6'dan elde edilen analitik sonuçların karşılaştırması Şekil 6.10'da verilmiştir. Değerlendirilecek olursa, sayısal çözümleme sonucunda elde edilen Nusselt sayısının plakanın başlangıcında analitik sonuçlarla uyumlu olmasına karşın plaka sonuna doğru bir miktar sapma gösterdiği, fakat kabul edilebilir sınırlarda olduğu söylenebilir.

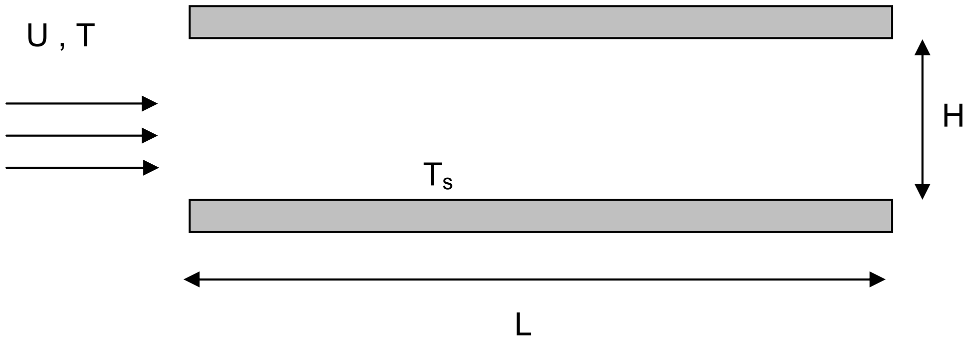
Yukarıda elde edilen sonuçlar genel olarak değerlendirildiğinde, geliştirilen programdan elde edilen sayısal sonuçların analitik sonuçlar ile olan karşılaştırmalarından da görüleceği üzere, program başarılı bir performans sergilemiştir. Sonuç olarak, k-ε türbülans modeli kullanılarak programdan elde edilen sonuçların türbülanslı akış için doğrulandığı söylenebilir.



Şekil 6.10. Düz plaka üzerinden türbülanslı akışta Nusselt sayısının (Nu_x) Reynolds sayısı (Re_x) ile karşılaştırması

6.3 Paralel İki Plaka Arasındaki Akış

Düz plaka üzerinden laminer ve türbülanslı akış örnekleri ile geliştirilen program doğrulandıktan sonra, üçüncü örnek olarak Şekil 6.11'de görülen paralel iki plaka arasındaki tipik bir akış türbülanslı akış şartlarında incelenmiştir. Burada, L plakaların uzunluğunu ve H plakalar arası mesafeyi göstermektedir.



Şekil 6.11 Paralel iki plaka arasındaki tipik bir akış gösterimi

Paralel plakalar arasındaki türbülanslı akış şartları Çizelge6.4'te verilmiştir. Akış karakteristik uzunluk olarak plakalar arası mesafenin esas alındığı 38000 Reynolds sayısında gerçekleşmektedir. Akışkan sıcaklığı 300 K olup palakalar 500 K sıcaklıkta sabit tutulmaktadır. Bu şartlarda akışkan ile plakalar arasındaki sıcaklık farkı nedeniyle plakalardan akışkana doğru bir ısı geçişi söz konusudur.

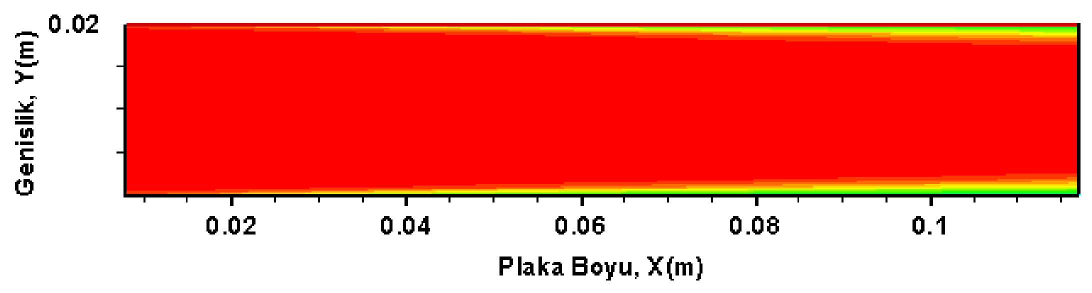
Çizelge 6.4 Paralel iki plaka arası akış şartları

GRİD SAYISI	111 x 151
L	0.8
H	0.02
Re	38000
T	300 K
Ts	500 K

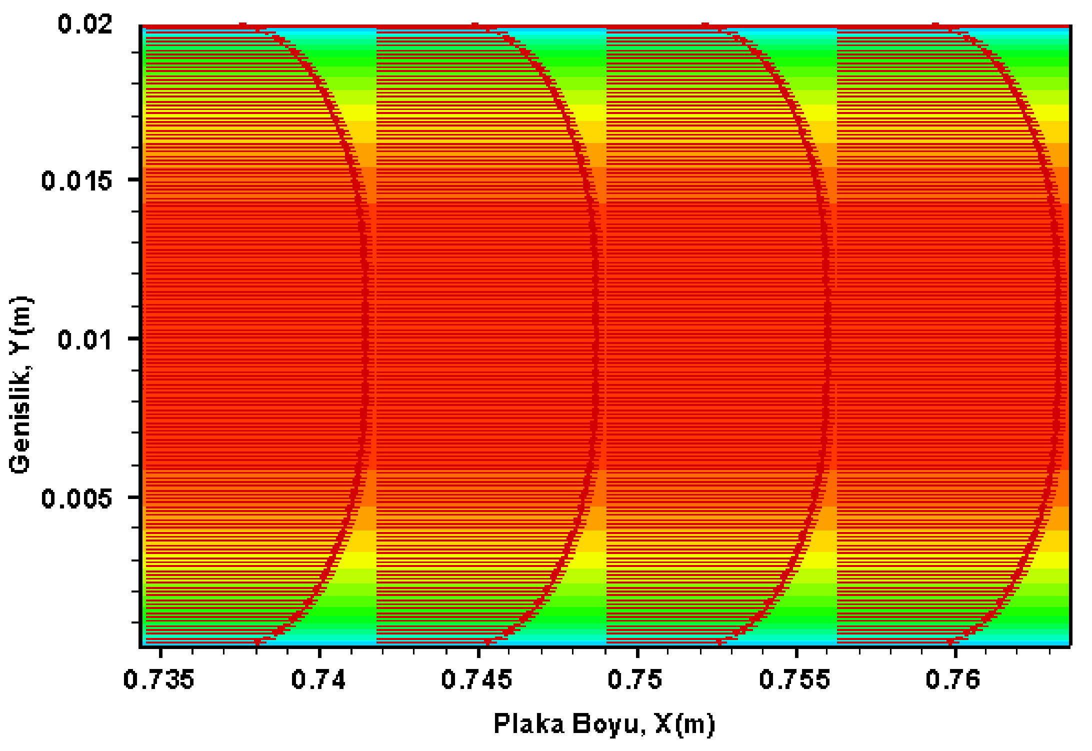
Bu akış örneğinde laminer ve türbülanslı akıştan farklı olarak sıklaştırma yapmadan eşit aralıklı 111x151 ağ dağılımı kullanılmıştır. Sıklaştırma yapılmadığı için plakalar arasında daha fazla sayıda nokta kullanılmıştır. Ağ dağılımı içinde 16761 nokta ve 16500 kontrol hacmi bulunmaktadır.

Paralel plakalar arasındaki akışın girişe yakın bölümünde hız sınır tabakası gelişiminin renkli gösterimi Şekil 6.12'de verilmiştir. Giriş kısmından itibaren sınır tabakası kalınlığının beklendiği üzere büyüdüğü görülmektedir.

Paralel plakalar arasında oluşan hız profilinin vektörel ve renkli olarak gösterimi Şekil 6.13'te verilmiştir.



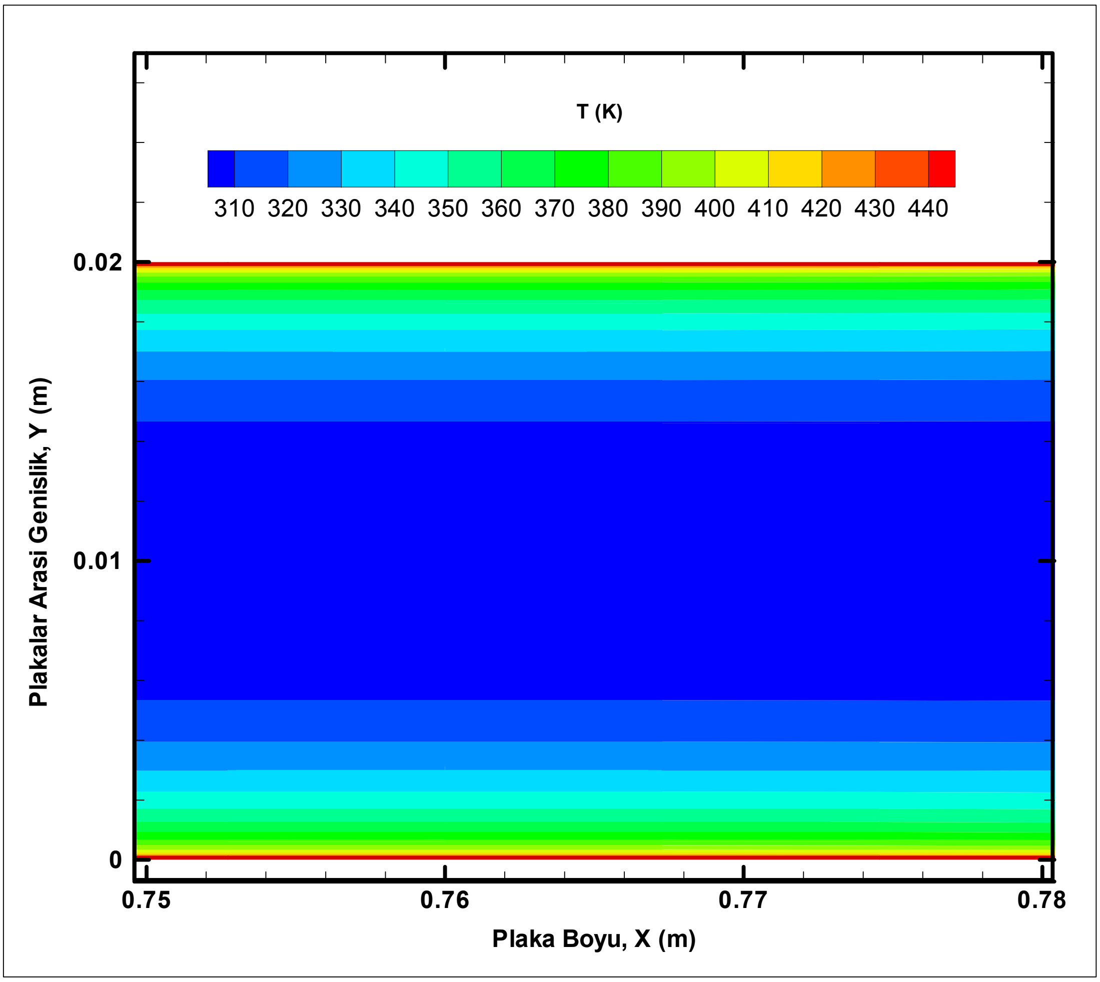
Şekil 6.12. Paralel plakalar arasından türbülanslı akışta kanal girişinden itibaren oluşan hız sınır tabakası gelişiminin renkli gösterimi



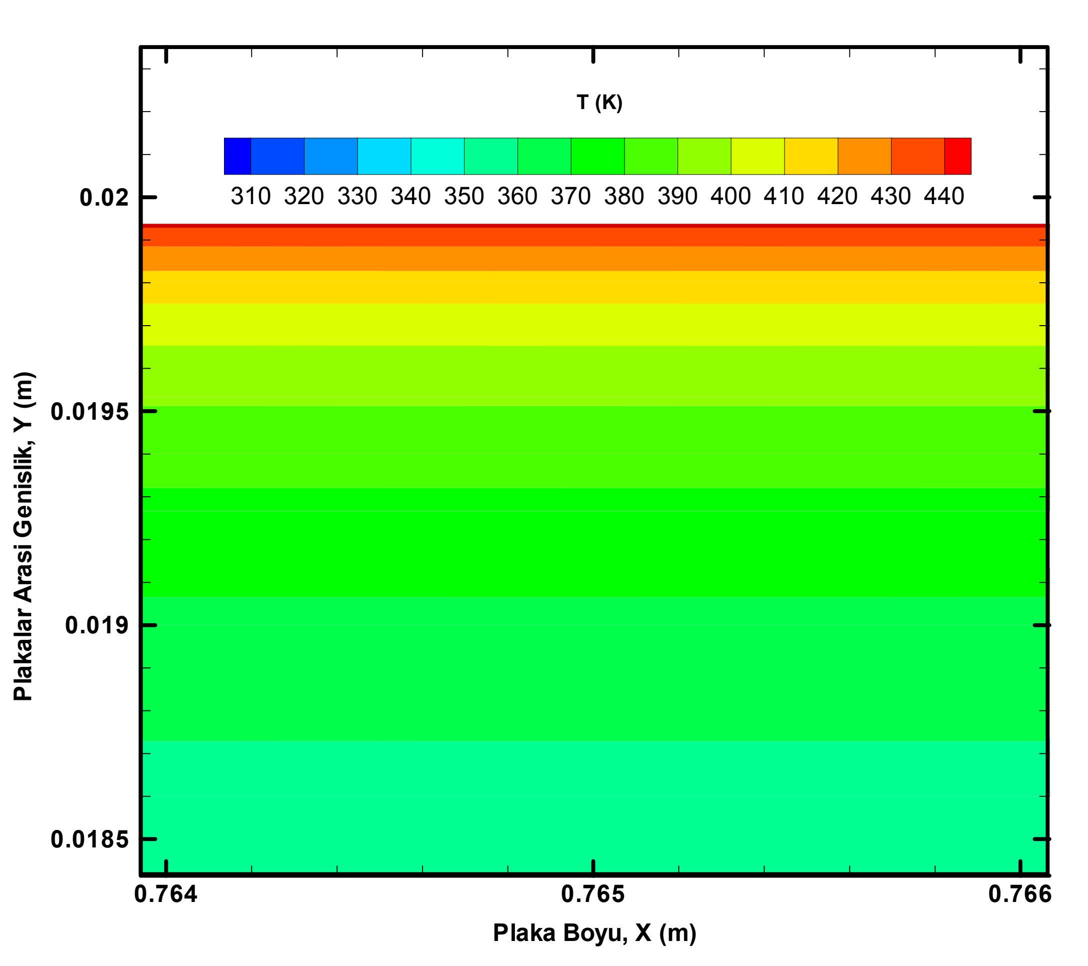
Şekil 6.13. Paralel plakalar arasından türbülanslı akışta oluşan hız profilinin vektörel ve renkli gösterimi

Şekil 6.13'te görüldüğü üzere hız değerlerinde plakaların yakınında hızlı bir düşüş gözlenmektedir. Bu beklenen bir durumdur. Çünkü plaka yakınlarında sürtünme kuvvetlerinin etkisiyle hız gradyanının ($\partial u / \partial y$) değeri hızla artmaktadır. Hız gradyanının artması bu bölgelerde sürtünme kuvvetlerinde ($\tau = \mu(\partial u / \partial y)$) artmaya neden olmaktadır.

Paralel plakalar ile akışkan arasındaki sıcaklık farkı nedeniyle oluşan plakalar arasındaki sıcaklık dağılımı Şekil 6.14'te verilmiştir. Yakın görünümde sıcaklık dağılımı ise Şekil 6.15'te görülmektedir.



Şekil 6.14. Paralel plaka arasından türbülanslı akışta oluşan sıcaklık dağılımının renkli gösterimi



Şekil 6.15. Paralel plaka arasından türbülanslı akışta oluşan sıcaklık dağılımının üst duvara yakın renkli gösterimi

Türbülanslı akış için Nusselt sayısının yüzey sıcaklığı (T_s) değerinin akışkan sıcaklığından (T) büyük olduğu durumlar için analitik çözümünü veren ifade aşağıda verilmiştir. [Incropera ve De Witt, 1990]

$$Nu_L = 0.023 \mathrm{Re}_L^{4/5} \mathrm{Pr}^{0.4} \tag{6.7}$$

Bu denklem kullanılarak plakalar arasındaki Nusselt sayısı Çizelge 6.4'te verilen akış şartlarında aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$Nu_L = 0.023x38000^{4/5} 0.707^{0.4} = 92.325$$

111x151 ağ yapısı ile yapılan sayısal çözümleme sonucunda duvara en yakın kontrol hacmi merkezinde hesaplanan sıcaklık değeri yaklaşık 438.5 K'dir. Plakaya en yakın kontrol hacminin merkezinin plakaya uzaklığı ise (0.02/150)/2=6.66x10^{-5} 'tır. Duvar yakınındaki konveksiyon-difüzyon ısıl dengesinden, plakaya en yakın kontrol hacmi merkezinde Nusselt sayısı aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$h(T_s - T_o) = k\frac{dT}{dy} \tag{6.8}$$

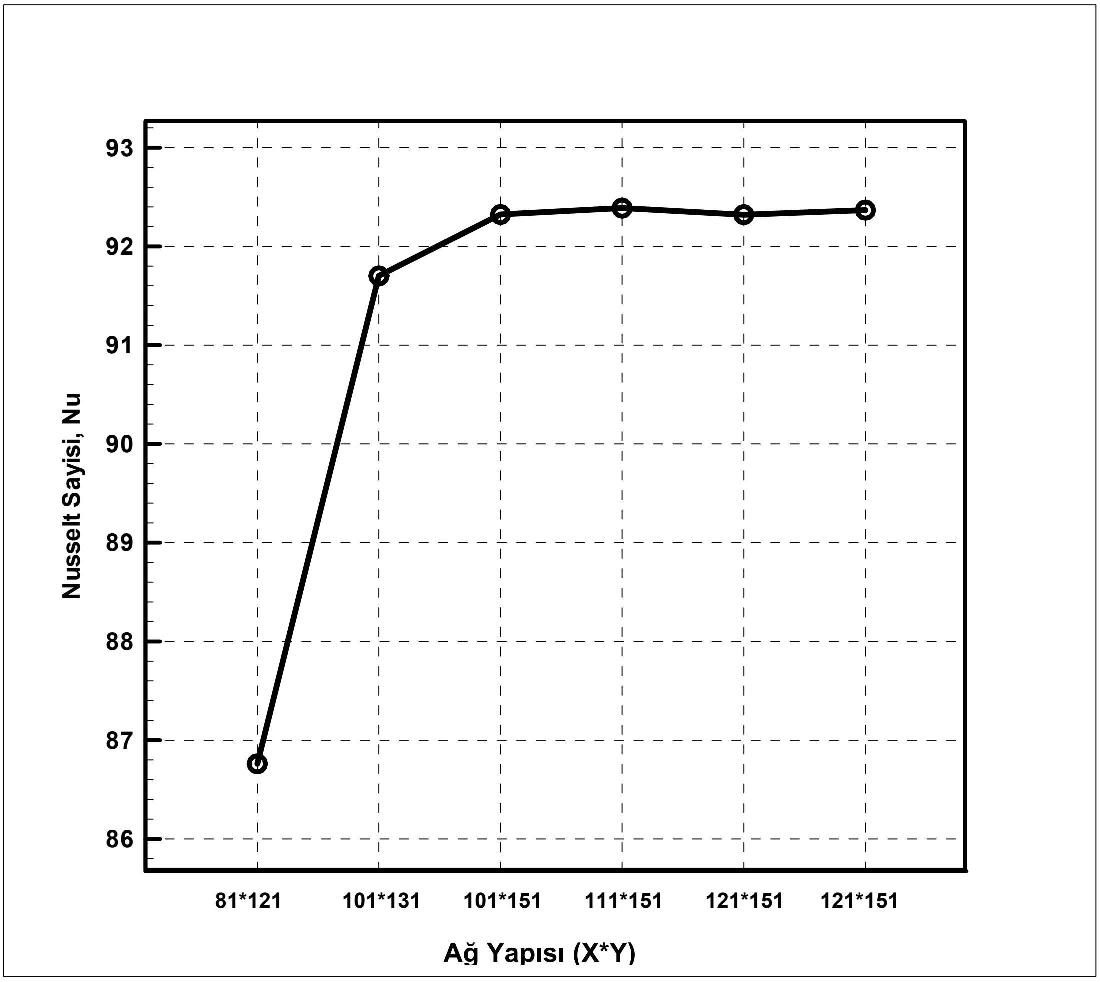
Bu denklemden enthalpi (h) değeri çekilerek, aşağıda verilen ifadeden Nusselt sayısı hesaplanır.

$$Nu = \frac{h.H}{k} \tag{6.9}$$

Hesaplama sonucunda plakaya en yakın noktadaki kontrol hacmi merkezinde hesaplanan Nusselt sayısı değeri 92.25'tir. Görüldüğü üzere, sayısal olarak hesaplanan Nusselt sayısının değeri Denklem 6.7'den analitik olarak hesaplanan 92.325 değeri ile birbirine yaklaşık eşittir.

Sayısal çözümleme altı farklı ağ yapısında gerçekleştirilmiştir. Altı farklı ağ yapısında elde edilen sonuçlar neticesinde, plakaya en yakın kontrol hacmi merkezinde hesaplanan Nusselt sayısı değerleri karşılaştırmalı olarak Şekil 6.16'da verilmiştir. Görüldüğü üzere ağ yapısının değişmesi sonuca önemli ölçüde etki etmiştir. Sayısal çalışmada 111x151 ağ yapısı seçilmiştir.

Sonuç olarak, geliştirilen program ile elde edilen sonuçların paralel plakalar arasındaki akış için de doğrulandığı söylenebilir.



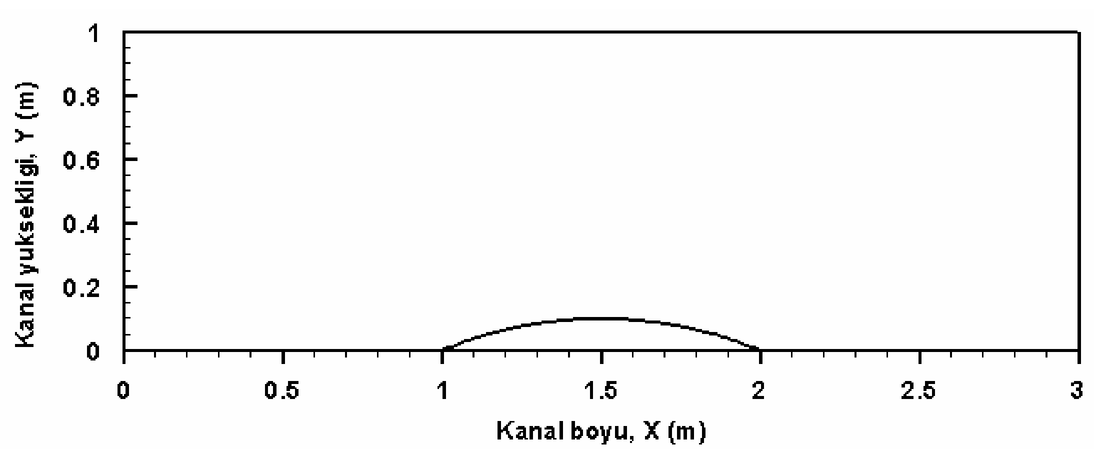
Şekil 6.16. Paralel plaka arasından türbülanslı akışta ağ sayısına bağlı X=0.95'te Nusselt sayısının ağ yapısına bağlı değişimi

6.4 Tabanında Tümsek (Bump) Bulunan Bir Kanal İçindeki Akış

Buraya kadar düz ve paralel plakalar akış örnekleri çözümlenerek geliştirilen program doğrulanmıştır. Çözümlenen bu örneklerin tümü kartezyen koordinatlarda çözümlenmiş ve orthogonal ağ yapısı kullanılmıştır. Dördüncü örnek olarak çözümlenecek olan tabanında tümsek bulunan kanal içindeki akış için orthogonal olmayan bir ağ yapısı kullanılacaktır. Ağ yapısına paralel olarak kartezyen yerine eğrisel koordinatlarda çözüm üretilecektir. Bunun için tüm akış denklemleri eğrisel koordinatlar sistemine transform edilmiştir. Ayrıca bu örnekte sürtünmesiz ve içten akışta ses altı, transonik ve ses üstü hızlarda çözümleme yapılacaktır. Farklı hızlarda bump üzerinden sürtünmesiz akış problemi, literatürde geliştirilen programların doğruluğunun test edilmesinde kullanılan en yaygın örneklerden birisidir. Bu bölümde, geliştirilen program eğrisel yüzey üzerinden akışta ses altı, transonic ve ses üstü hızlarda doğrulanmaya çalışılacaktır. Eğrisel koordinatlardaki çözümlemeye ilk olarak ses altı hızda akış ile başlanacak, daha sonra transonik ve ses üstü akışa geçilecektir.

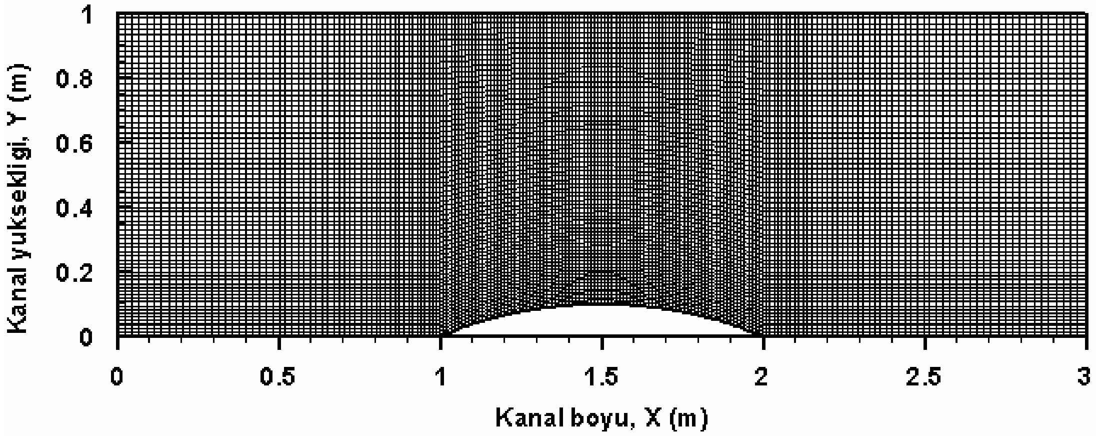
6.4.1 Ses altı (subsonik) hızda akış

Tabanında tümsek bulunan kanal geometrisi Şekil 6.17'de verilmiştir. Görüleceği üzere seçilen kanal 3 birim uzunluğunda ve 1 birim yüksekliğindedir. Kanal tabanında, kanal boyunun %10'u kalınlığında dairesel bir tümsek bulunmaktadır. Böyle bir kanal içindeki akışı ilk olarak Ni [1982] Euler denklemlerini kullanarak çözümlemiştir. Bu nedenle literatürde genel olarak Ni tümseği olarak bilinir.



Şekil 6.17. Tabanında %10 kalınlıkta tümsek bulunan kanal geometrisi

Ağ dağılımı olarak 201x71 nokta kullanılmıştır. Ağ dağılımı içinde 14271 nokta ve 14000 kontrol hacmi bulunmaktadır. Oluşturulan grid dağılımı için ayrıca bir yazılım geliştirilmiştir. Oluşturulan mesh'te tümsek yakınlarında ağ dağılımı sıklaştırılmıştır. Kanal içinde oluşturulan ağ yapısı Şekil 6.18'de gösterilmiştir.

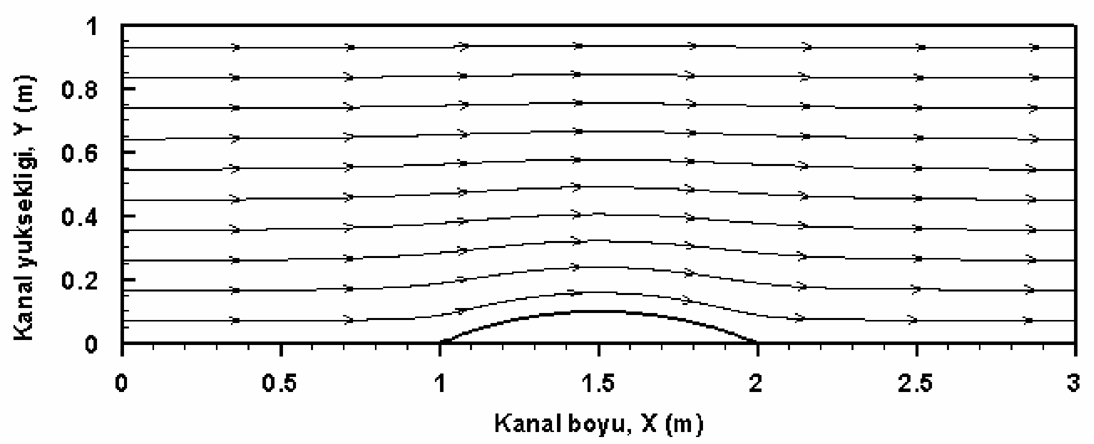


Şekil 6.18. Mach=0.5 akış hızı için kanal içindeki ağ yapısı

Akışta isentropik şartlar kabul edilmiştir. Kanal girişinde Mach sayısı 0.5 olarak alınmıştır. Sınır şartları olarak kanal girişindeki toplam sıcaklık ve basınç değerleri verilmiştir. Giriş hızının uniform ve yatay olduğu kabul edilerek girişteki dikey hız bileşeni sıfır olarak alınmıştır. Çıkıştaki statik basıncın girişteki toplam basınca oranı 0.5 Mach sayısını verecek şekilde seçilmiştir. Kanal çıkışında sadece statik basınç değeri verilmiş olup diğer değişkenler extrapolasyon ile elde edilmiştir. Kanalın üst ve alt yüzeylerinde teğetsel (slip) sınır şartı kullanılmış ve herhangi bir kütle çıkışının olmadığı kabul edilmiştir. Akım alanı içerisindeki toplam enthalpi sabit kabul edilmiştir.

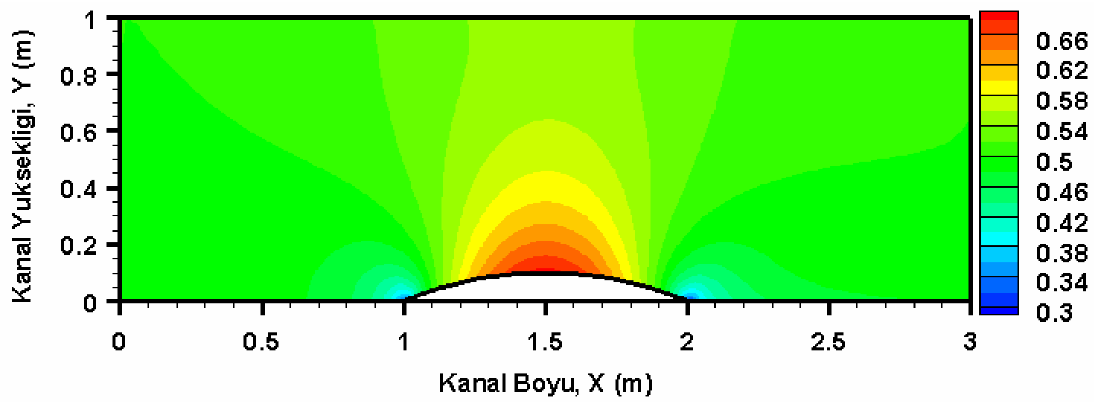
Kanal içindeki 0.5 Mach sayısındaki akışın çözümlenmesinden elde edilen akım çizgileri Şekil 6.19'da verilmiştir. Beklendiği gibi akım çizgileri sınırları ve birbirlerini kesmeden akım doğrultusunda düzgün, birbirine paralel olarak tümsek üzerinden geçerek girişten çıkışa doğru gitmektedirler.

Bu tip akış çözümlemeleri genellikle Mach sayısı ve basınç dağılımları elde edilerek literatürdeki deneysel ve analitik olarak elde edilen sonuçlarla kıyaslanarak doğrulanmaktadır.



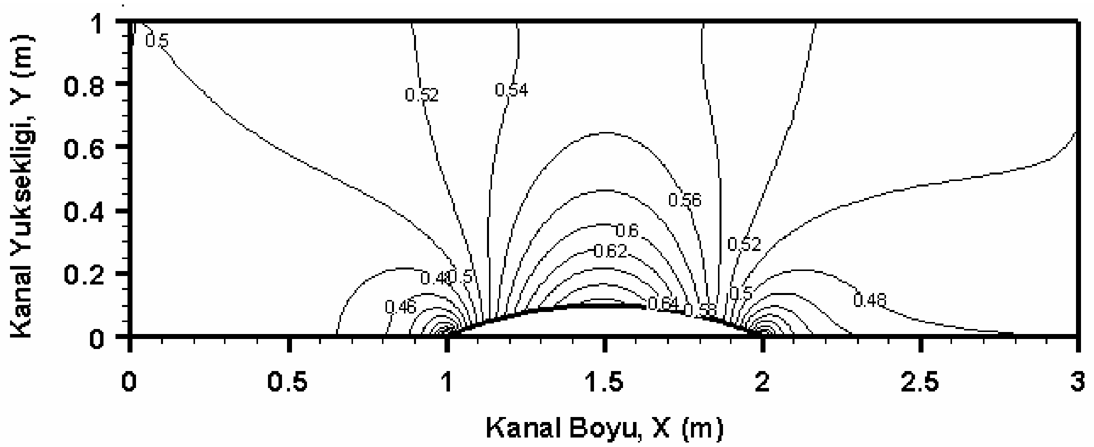
Şekil 6.19. Mach=0.5 akış hızı için kanal içinde oluşan akım çizgileri

Sayısal çözümleme sonucunda kanal içinde oluşan Mach sayısı dağılımı renkli profilde Şekil 6.20'de, çizgisel dağılım ise Şekil 6.21'de verilmiştir. 0.5 Mach sayısında herhangi bir şok dalgası beklenmediği için Mach sayısı dağılımı beklendiği üzere tümsek etrafında simetrik olarak elde edilmiştir. Mach sayısının tümseğin tabanla olan birleşme noktalarında yaklaşık 0.4'e düştüğü, tümsek üzerinde ise yaklaşık 0.68 değerine kadar artış gösterdiği görülmektedir.

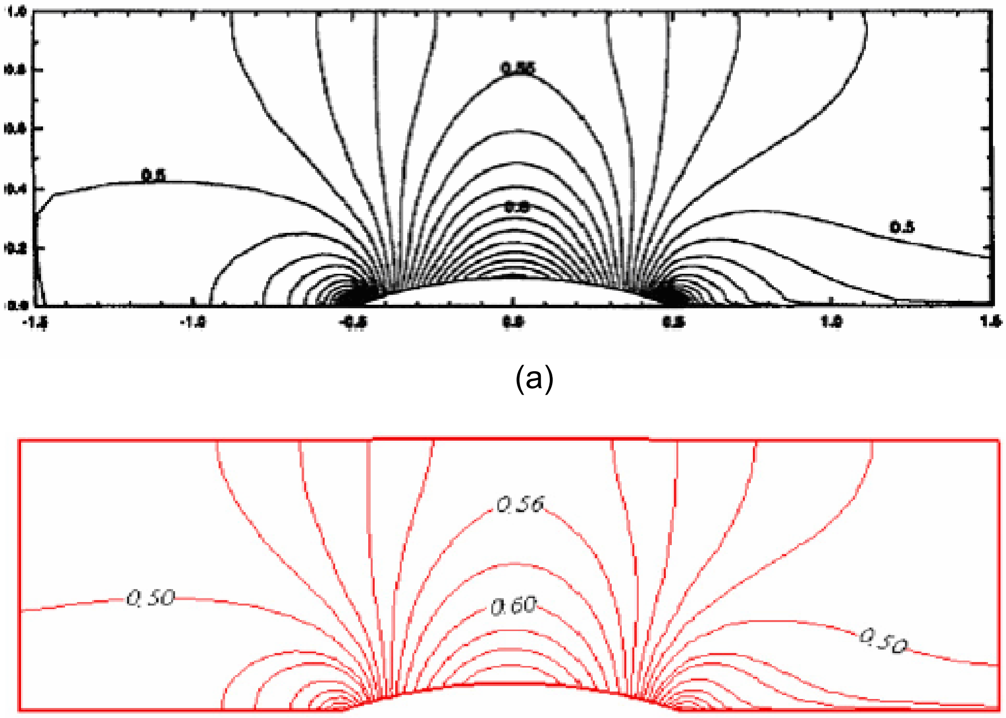


Şekil 6.20. Mach=0.5 akış hızı için kanal içinde oluşan Mach sayısı dağılımı (renkli)

Literatürde yapılan benzer çalışmalara örnek olarak Date [1999] ile Zhou ve ark. [2007] verilebilir. Bu çalışmalar Şekil Şekil 6.22'de verilmiştir. Yapılan değerlendirme sonucunda, tez çalışmasında geliştirilen programdan elde edilen sonuçların literatürdeki sonuçlarla uyumlu oldukları söylenebilir.



Şekil 6.21. Mach=0.5 akış hızı için kanal içinde oluşan Mach sayısı dağılımı (çizgili)



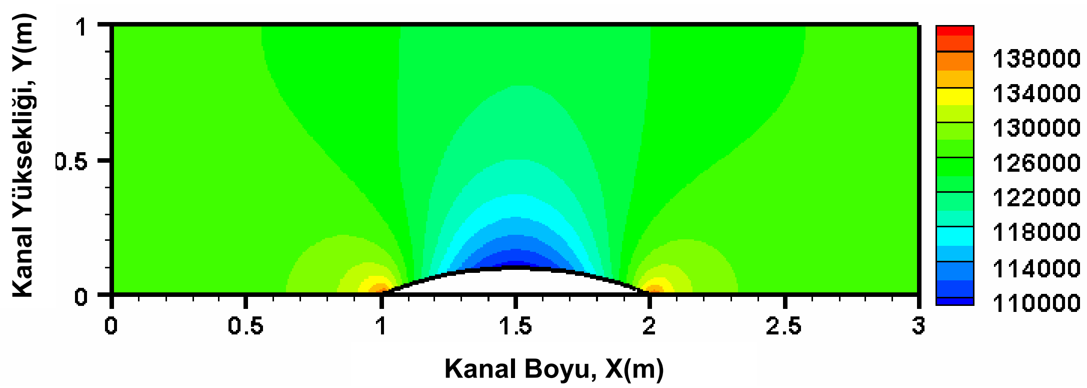
(a)

(b)

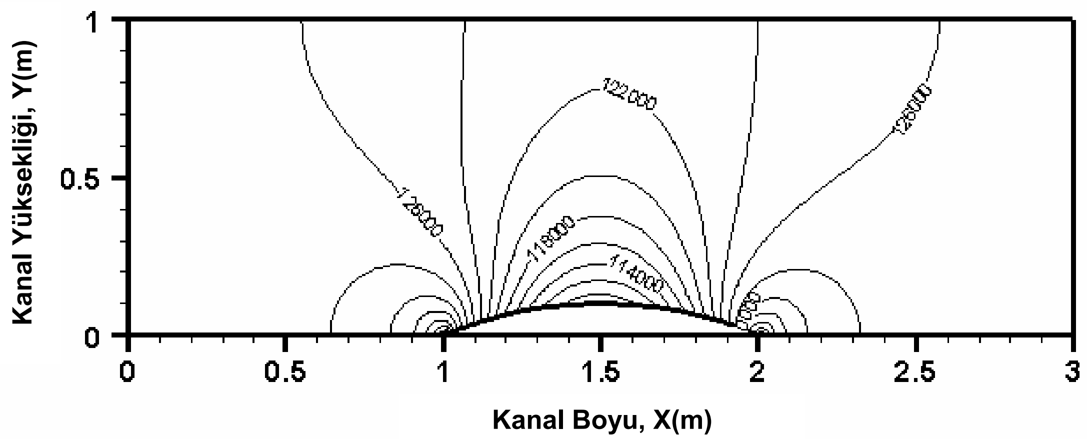
Şekil 6.22. Mach=0.5 akış hızı için Mach sayısı dağılımını veren literatürdeki çalışmalar (çizgili), a) [Date, 1999], b) [Zhou ve ark., 2007]

Kanal içinde oluşan basınç dağılımı renkli olarak Şekil 6.23'de ve çizgisel gösterimde Şekil 6.24'te verilmiştir. Basınç dağılımı incelendiğinde Mach sayısının yükseldiği veya düştüğü bölgelerde basıncın aksi bir davranış gösterdiği görülmektedir.

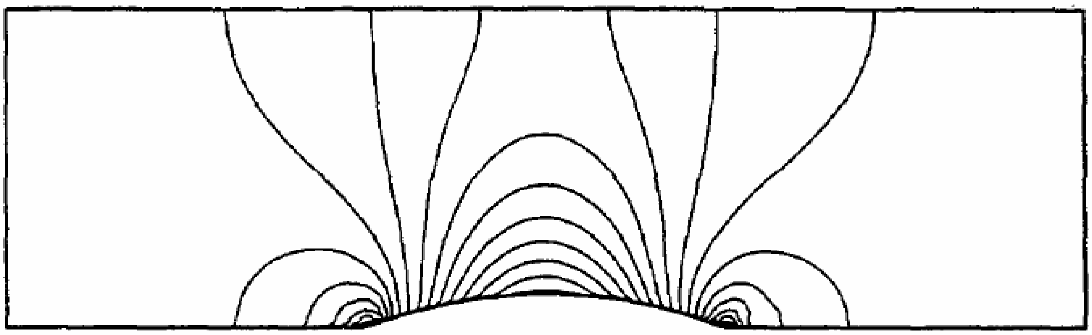
Literatürde daha önce Moukalled ve Darwish [2001] benzer bir çalışmayı yapmışlardır. Elde ettikleri sonuçlar Şekil 6.25'de görülmektedir. Çözümleme sonucunda elde edilen sayısal sonuçlar genel olarak literatürdeki sonuçlarla karşılaştırıldığında çok yakın değerlerde oldukları ve doğrulandığı görülmektedir.



Şekil 6.23. Mach=0.5 akış hızı için kanal içinde oluşan basınç dağılımı (renkli)



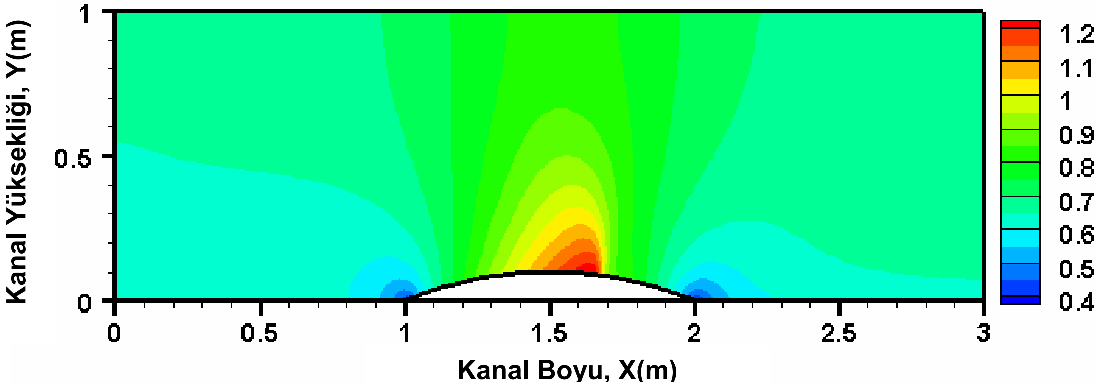
Şekil 6.24. Mach=0.5 akış hızı için kanal içinde oluşan basınç dağılımı (çizgili)



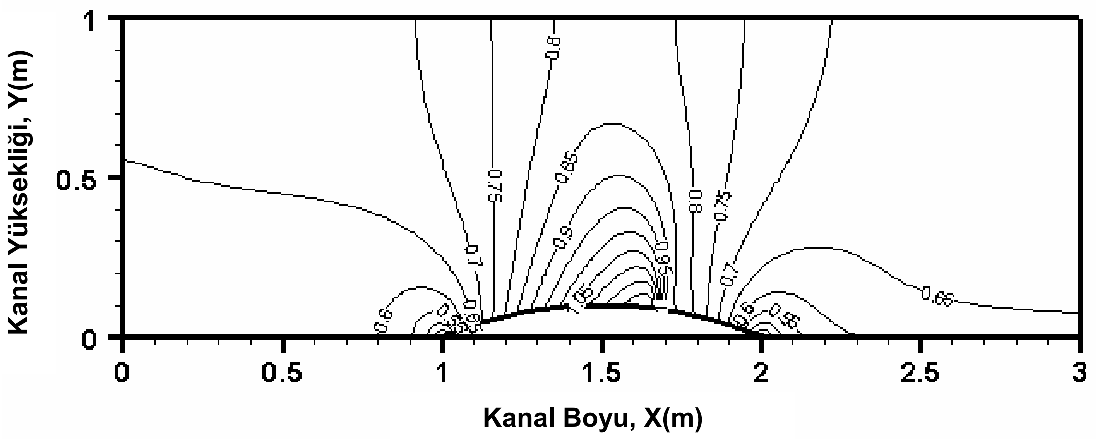
Şekil 6.25. Mach=0.5 akış hızı için kanal içinde oluşan basınç dağılımını veren literartürdeki çalışma [Moukalled ve Darwish, 2001]

6.4.2 Transonik hızda akış

Tabanında tümsek bulunan kanal içindeki transonic akışa örnek olarak 0.675 Mach sayısındaki akış incelenmiştir. Ses altı akışta kullanılan sınır şartları ile grid dağılımı burada da değiştirilmeden kullanılmıştır. Girişte kullanılan çıkış statik basıncın toplam basınca oranı 0.675 Mach sayısını verecek şekilde değiştirilmiştir. Elde edilen Mach sayısı dağılımı renkli olarak Şekil 6.26'da verilmiştir. Elde edilen sonuçlar çizgisel gösterimde ise Şekil 6.27'de verilmiştir.



Şekil 6.26. Mach=0.675 akış hızı için kanal içinde oluşan Mach sayısı dağılımı (renkli)

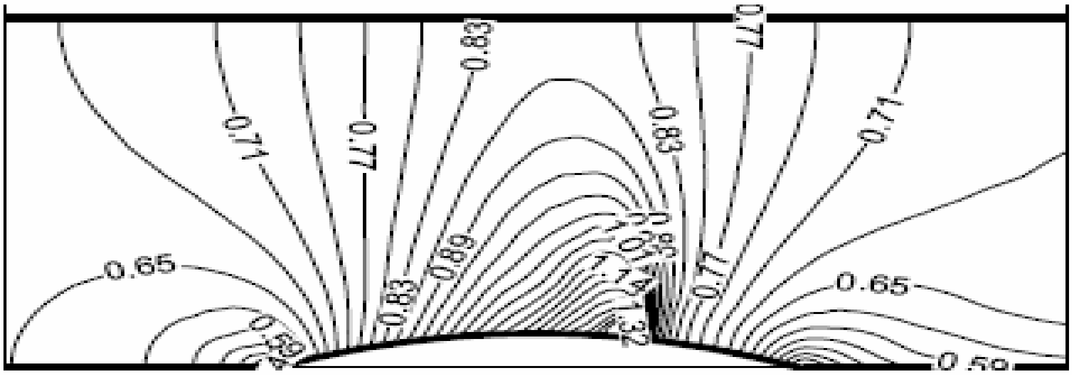


Şekil 6.27. Mach=0.675 akış hızı için kanal içinde oluşan Mach sayısı dağılımı (çizgili)

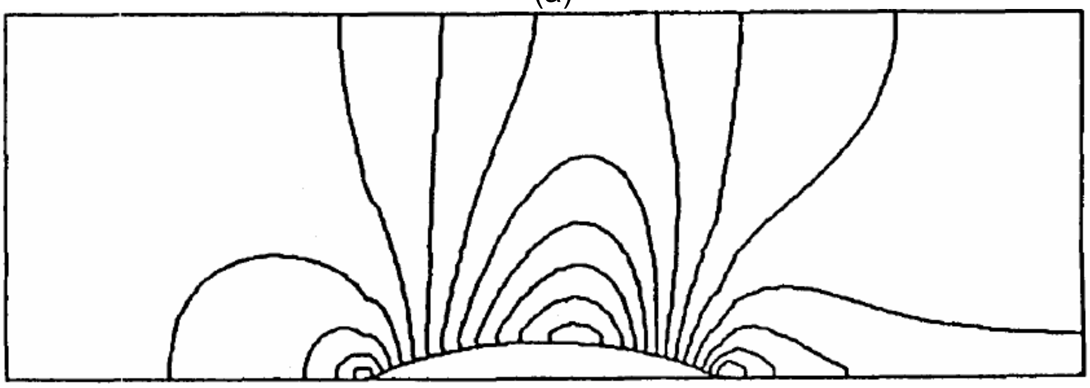
Elde edilen sayısal sonuçlardan, tümseğin ardında tümsek boyunun yaklaşık %70'i mesafesinde şok dalgasının oluştuğu görülmektedir. Şok dalgasının oluştuğu bölgede Mach sayısının değeri yaklaşık 1.25 değerine kadar artmaktadır. Şok ardında ise akış tekrar ses altı hızlara düşmektedir. Tümseğin tabanla birleşme noktası etrafında ise her iki tatafta da Mach sayısı 0.35'e kadar düşmektedir.

Literatürde benzer kanal içinden transonik akışı Djavareshkian [2005] ile Rıncon ve Elder [1997] çözümlemişlerdir. Çalışma sonuçları Şekil 6.28'de verilmiştir. Programdan elde edilen sonuçların literatürdeki sonuçlarla karşılaştırıldığında, benzer ve uyumlu oldukları söylenebilir.

Daha sonra kanalın taban ve tavanı üzerindeki Mach sayısındaki değişim incelenmiştir. Sayısal çözümlemeden elde edilen sonuçlar literatürde benzer çalışmayı yapan Karki ve Patankar [1989] ile Moukalled ve ark. [2001]'nın çalışma sonuçları ve deneysel sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Kanal tabanı üzerinde Mach sayısındaki değişim Şekil 6.29'da, tavan üzerindeki Mach sayısı değişimi ise 6.30'da verilmiştir. Yapılan incelemede, taban üzerinde tümseğe yaklaşıldığında Mach sayısının yaklaşık 0.35 değerine kadar hızla düştüğü, tümseğin yaklaşık %70'ine ulaşıldığında ise tekrar hızlı bir yükseliş gösterdiği görülmüştür.



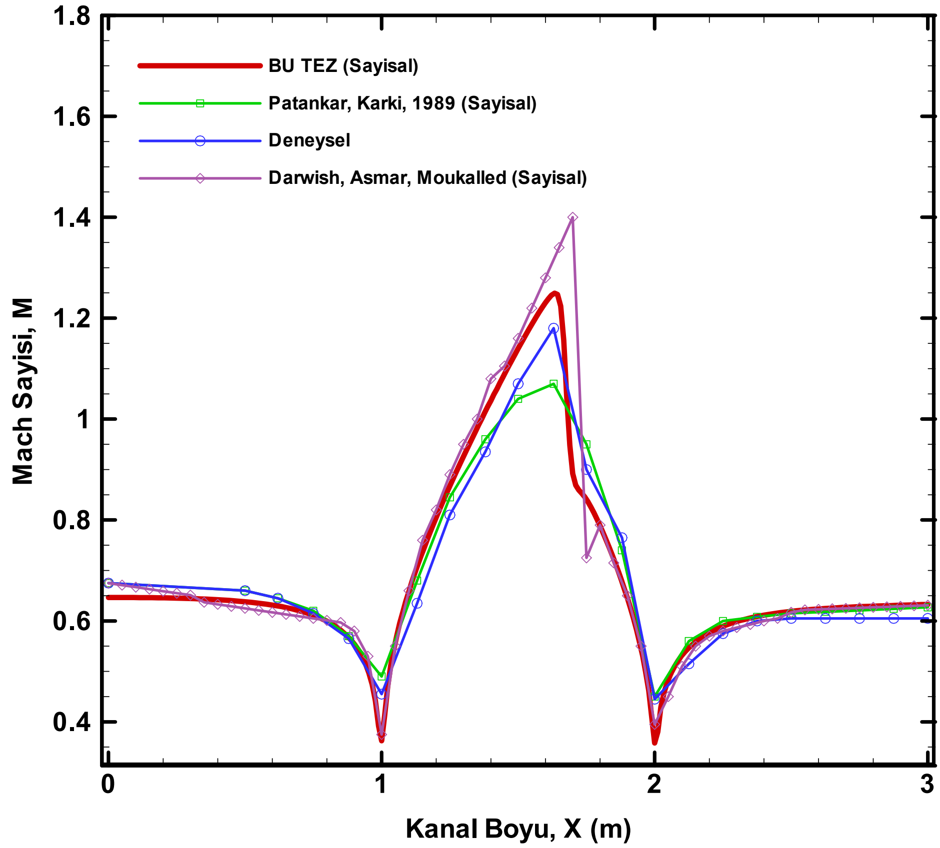
(a)



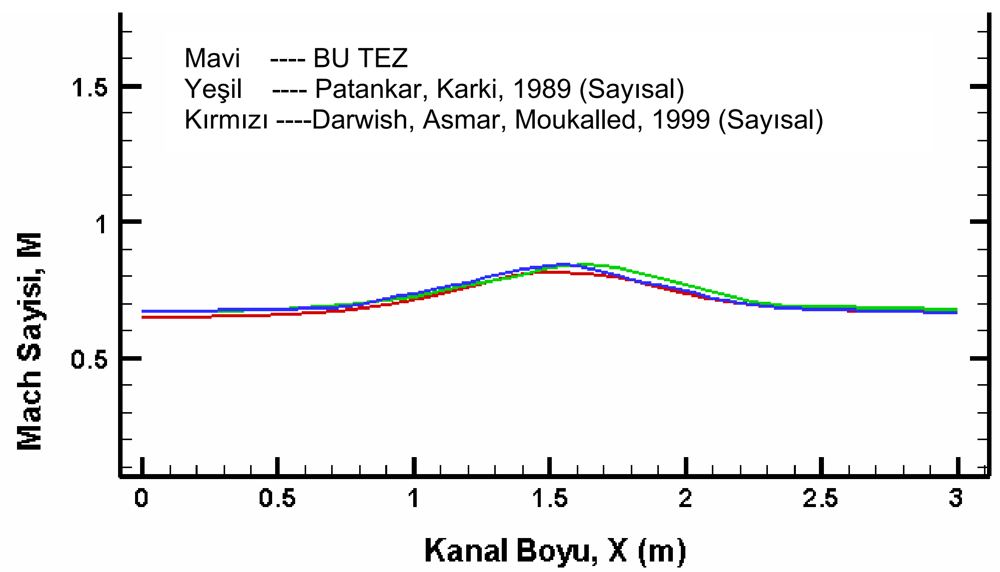
(b)

Şekil 6.28. Mach=0.675 akış hızı için Mach sayısı dağılımını veren literatürdeki çalışmalar (çizgili),
a) [Djavareshkian, 2005], b) [Rincon ve Elder, 1997]

Bu tepe noktada deneysel çalışma sonucunda yaklaşık 1.2 Mach sayısı değerine kadar yükseliş gözlenmiştir. Şekil 6.29 irdelendiğinde deneysel çalışmada ulaşılan bu tepe noktaya en yakın sonuç bu tezde geliştirilen program ile elde edilmiştir. Diğer bölümlerde elde edilen sonuçlar tüm çalışmalarda birbirine yakın ve benzerdir. Mach sayısının tepe noktaya ulaştıktan sonra tümseğin bitim noktasına doğru tekrar yaklaşık 0.35 değerine kadar hızlı bir düşüş göstererek kanal çıkışına doğru tekrar giriş değerine ulaştığı tespit edilmiştir. Kanalın tavanında ise daha yumuşak bir yükseliş ile yaklaşık 0.8 Mach sayısına ulaşıldıktan sonra tekrar düşerek giriş değerine yaklaşılmaktadır. Tabandan farklı olarak tavanda, simetrik bir değişim olduğu görülmektedir. Ayrıca literatürdeki ve bu çalışmadan elde edilen sonuçların birbirine çok yakın oldukları görülmüştür.

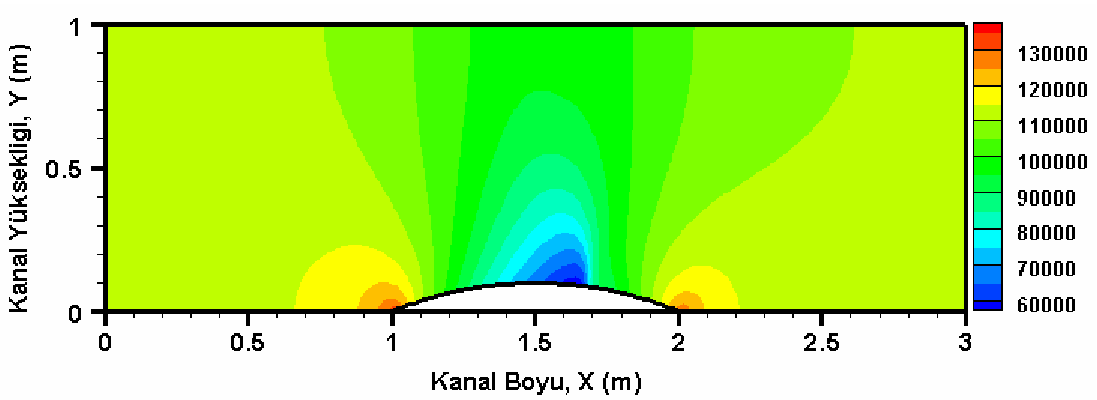


Şekil 6.29. Mach=0.675 akış hızı için kanal tabanı boyunca Mach sayısı dağılımının literatürdeki çalışmalarla karşılaştırması

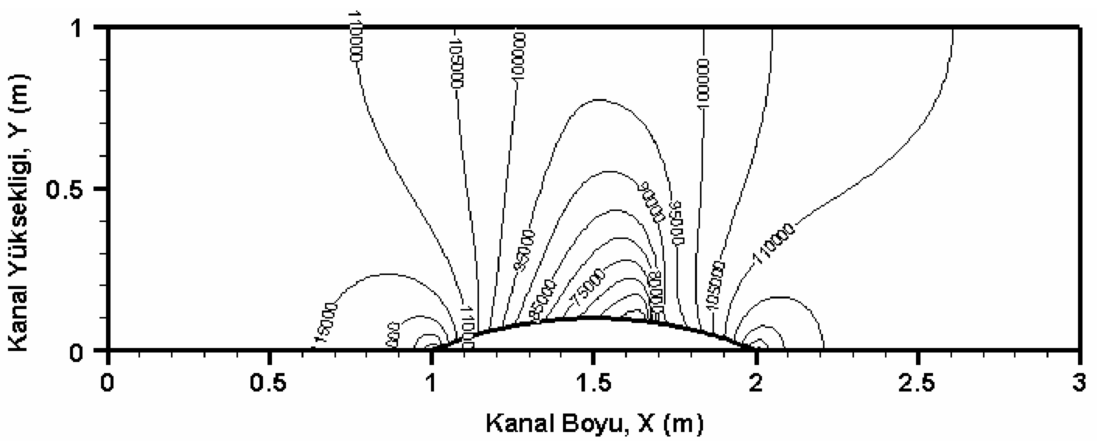


Şekil 6.30. Mach=0.675 akış hızı için kanal tavanı boyunca Mach sayısı dağılımının literatürdeki çalışmalarla karşılaştırması

Son olarak kanal içindeki basınç dağılımı sonuçları incelenerek literatürdekilerle karşılaştırılmıştır. Şekil 6.31'de, geliştirilen program ile elde edilen 0.675 Mach sayısında kanal içindeki basınç dağılımı renkli gösterimde verilmiştir. Aynı sonuçlar Şekil 6.32'de çizgisel gösterimde verilmiştir. Daha önce Mach sayısı dağılımında da görüldüğü gibi tümsek üzerinde kanal boyunun yaklaşık 1.7 m'sinde şok dalgasının oluştuğu görülmektedir. Tümsek üzerinde basıncın düştüğü, tümseğin taban ile olan birleşme noktaları çevresinde ise basınç değerlerinin arttığı görülmüştür.

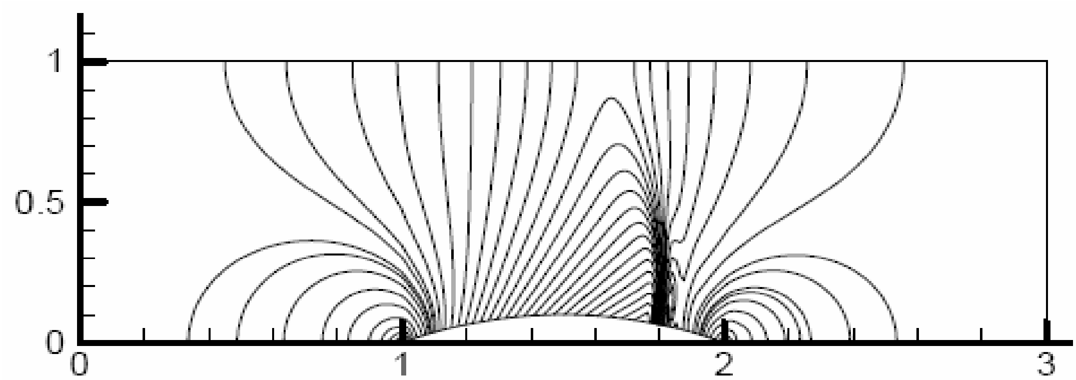


Şekil 6.31. Mach=0.675 akış hızı için kanal içinde oluşan basınç dağılımı (renkli)

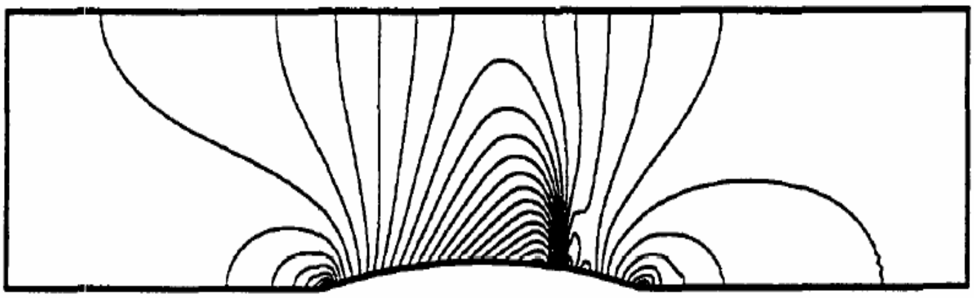


Şekil 6.32. Mach=0.675 akış hızı için kanal içinde oluşan basınç dağılımı (çizgili)

Literatürde benzer çalışmayı Moukalled ve Darwish [2001] ile Rincon ve Elder [1997] yapmışlardır. Çalışmalarından elde edilen sonuçlar Şekil 6.33'de verilmiştir. Sonuçların bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlarla uyumlu oldukları görülmüştür.



(a)

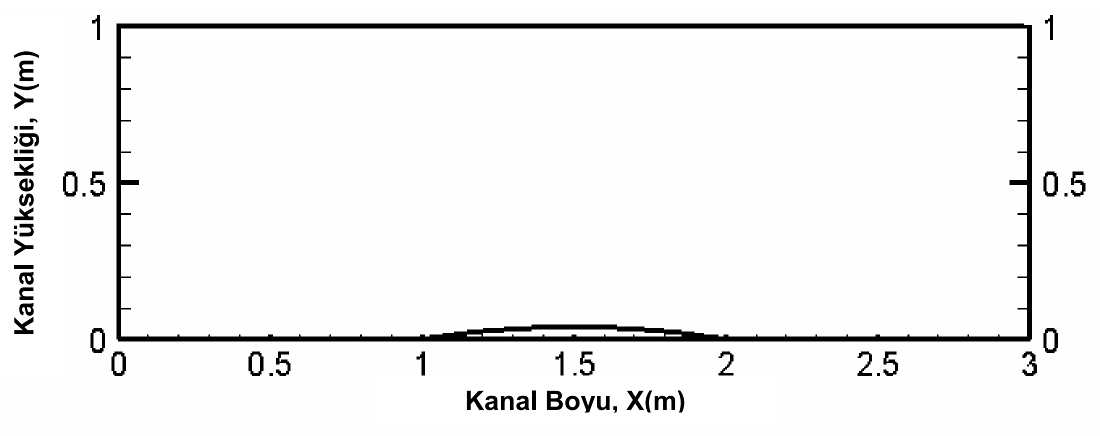


(b)

Şekil 6.33. Mach=0.675 akış hızı için Mach sayısı dağılımını veren literatürdeki çalışmalar (çizgili) a) [Moukalled ve Darwish, 2001], b) [Rincon ve Elder, 1997]

6.4.3 Ses üstü (süpersonik) hızda akış

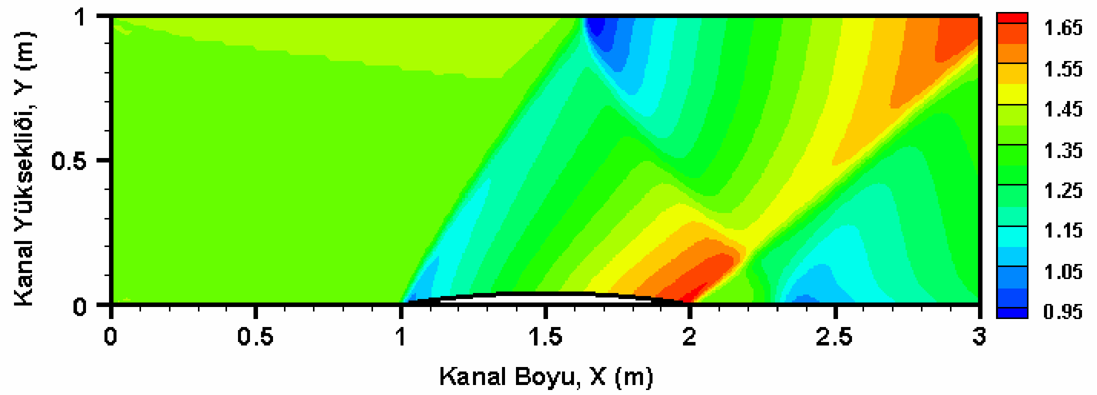
Kanal içerisindeki süpersonik akış için kanalın tabanındaki tümseğin yüksekliği Şekil 6.34'de görüldüğü gibi %4'e düşürülmüştür. Yeni yapıya uygun olarak grid dağılımı yeniden oluşturulmuştur. Girişteki Mach sayısı 1.4 olarak alınmıştır. Kanal girişinde tüm değişkenler verilmiştir. Çıkışta ise değişkenlerin tümü extrapolasyon yoluyla elde edilmiştir. Duvarlarda ise teğetsel sınır şartları kullanılmıştır.



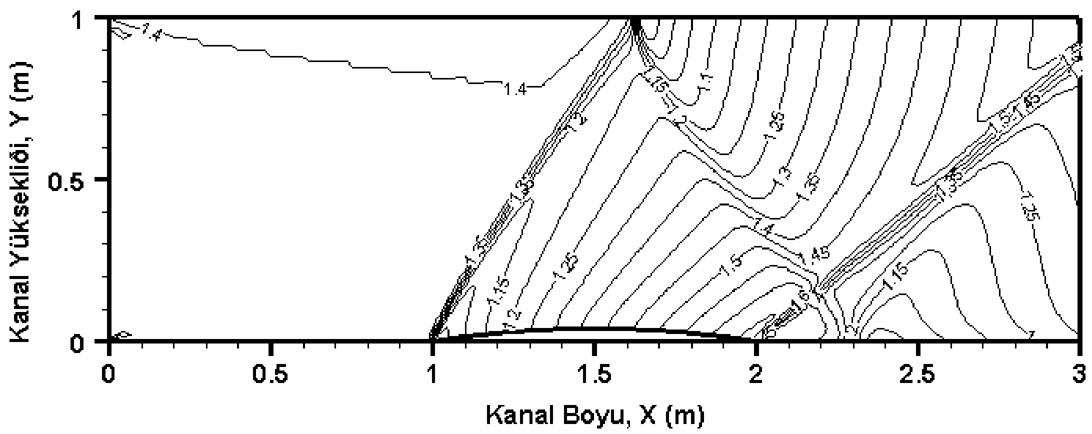
Şekil 6.34 Ses üstü akış için kanal geometrisi

Elde edilen Mach sayısı dağılımı şekil 6.35'de renkli gösterimde, Şekil 6.36'da ise çizgisel gösterimde verilmiştir. Şekillerden de görüldüğü üzere tümseğin her iki tarafındaki tabanla birleşme noktasında da şok dalgası oluşmaktadır. Taban üzerinde tümseğin çıkış noktası olan 1 m konumunda oluşan şok dalgası yaklaşık 1.6 m'de tavana çarparak geri yansımaktadır. Yansıyan dalga tabanda yaklaşık 2.3 m'de tekrar yukarı yönde yansımaktadır. Bu arada tümseğin iniş yönünde bitim noktası olan 2 m'de oluşan şok dalgası ile yansıyan şok dalgası çıkışta birleşmektedirler.

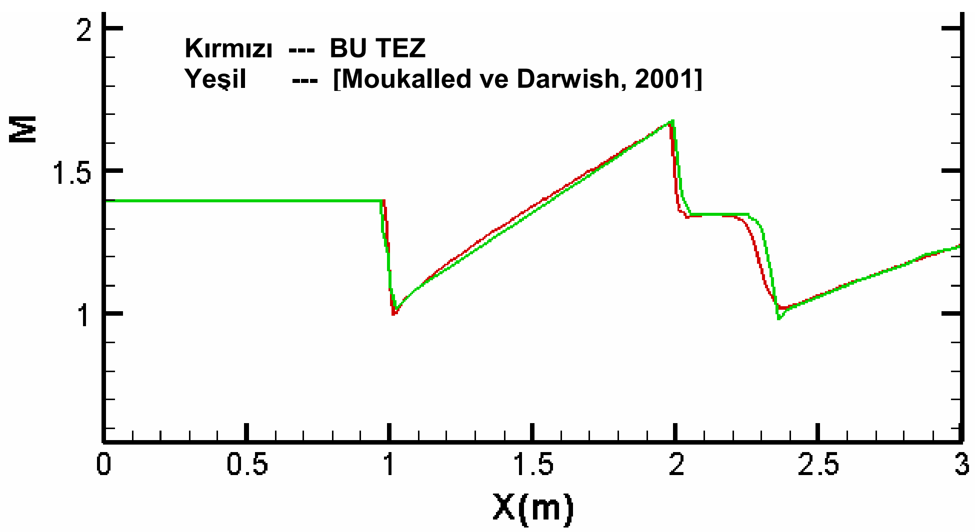
Mach sayısı Şekil 6.37'de görüldüğü gibi taban üzerinde tümseğe kadar olan kısımda sabit kalarak tümseğe gelindiğinde aniden 1 değerine düşmekte, tümsek boyunca tekrar yükselerek yaklaşık 1.7 değerine kadar çıkmaktadır. Tümseğin bitiminde ikinci şok dalgası nedeniyle tekrar 1 değerine düşerek çıkışa doğru olan ikinci bir artışla kanal yaklaşık 1.24 Mach sayısıyla terk edilmektedir. Kanalın üst duvarında ise Şekil 6.38'de de görüleceği üzere tümsekten gelen şok dalgası duvara tümseğin orta kısmı hizasında çarpmakta ve duvarda, bu noktaya kadar sabit gelen Mach sayısı aniden yaklaşık 0.9 Mach sayısına kadar düşmektedir. Sonra tekrar artışa geçerek 1.65 Mach sayısıyla kanalı terk etmektedir.



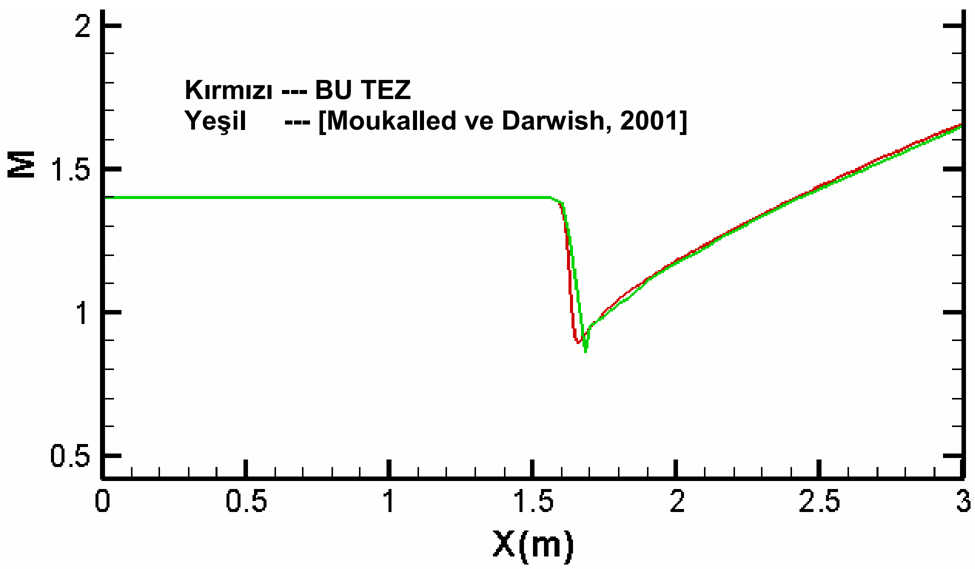
Şekil 6.35. Mach=1.4 akış hızı için kanal içinde oluşan Mach sayısı dağılımı (renkli)



Şekil 6.36. Mach=1.4 akış hızı için kanal içinde oluşan Mach sayısı dağılımı (çizgili)

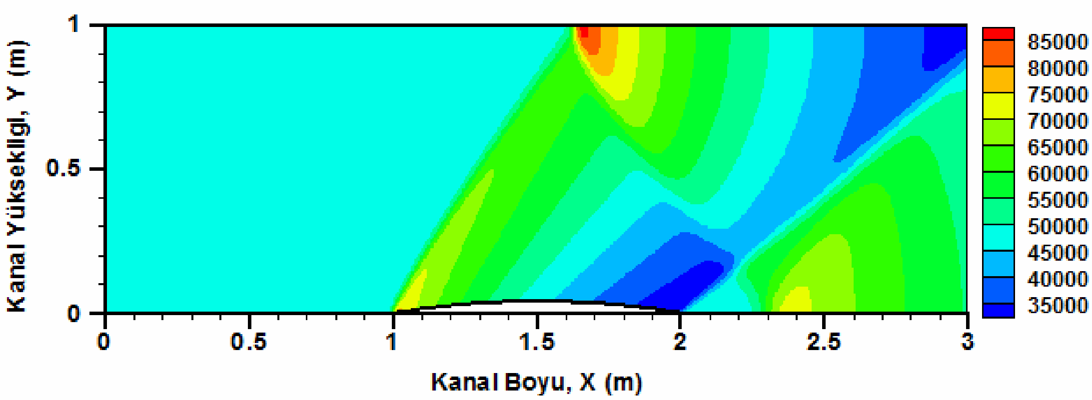


Şekil 6.37. Mach=1.4 akış hızı için kanal tabanı boyunca Mach sayısı dağılımının literatürdeki çalışmalarla karşılaştırması

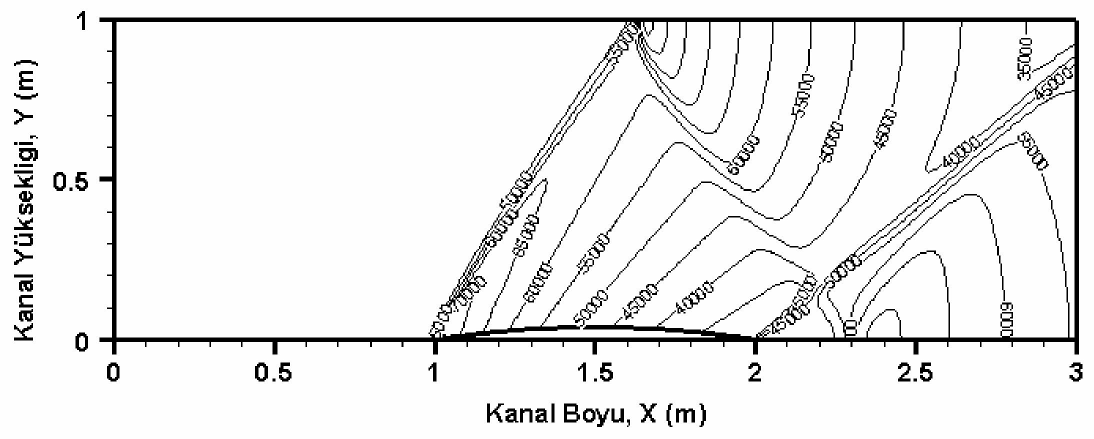


Şekil 6.38. Mach=1.4 akış hızı için kanal tavanı boyunca Mach sayısı dağılımının literatürdeki çalışma ile karşılaştırması

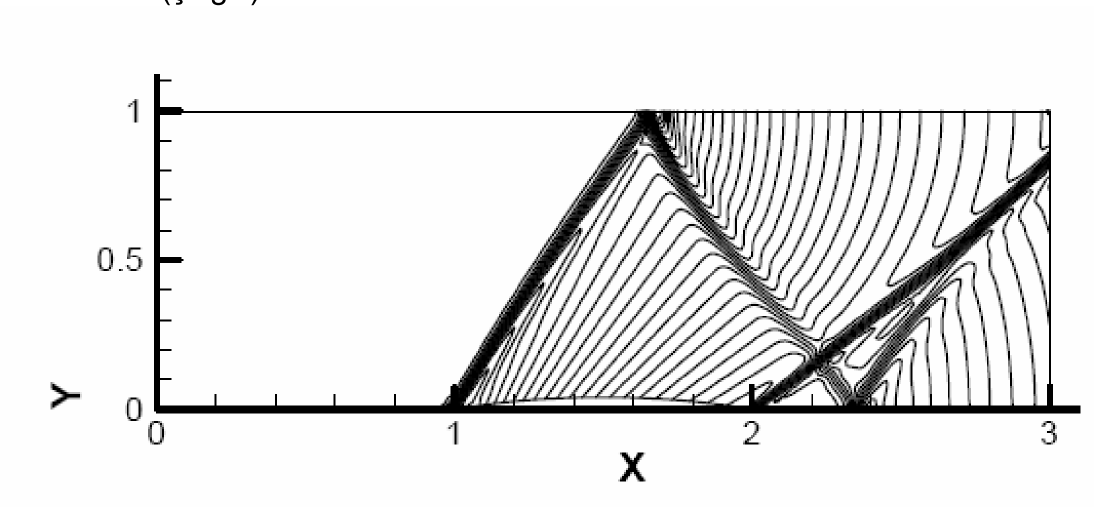
Şekil 6.39'da kanal içindeki basınç dağılımı renkli olarak, Şekil 6.40'da ise çizgisel gösterimde verilmiştir. Basınç değerlerinin Mach sayısıyla ters bir davranış gösterdiği görülmektedir. Mach sayısının arttığı bölgelerde basınç değeri azalmakta, Mach sayısının azaldığı bölgelerde ise basınç artmaktadır. Literatürde benzer bir çalışmayı Moukalled ve Darwish [2001] yapmışlardır. Elde ettikleri sonuçlar Şekil 6.41'de verilmiştir. Bu tezde elde edilen sonuçlar ile literatürdekiler büyük bir uyumluluk göstermektedir.



Şekil 6.39. Mach=1.4 akış hızı için kanal içinde oluşan basınç dağılımı (renkli)



Şekil 6.40. Mach=1.4 akış hızı için kanal içinde oluşan basınç dağılımı (çizgili)



Şekil 6.41. Mach=1.4 akış hızı için kanal içinde oluşan basınç dağılımını veren literatürdeki çalışma [Moukalled ve Darwish, 2001]

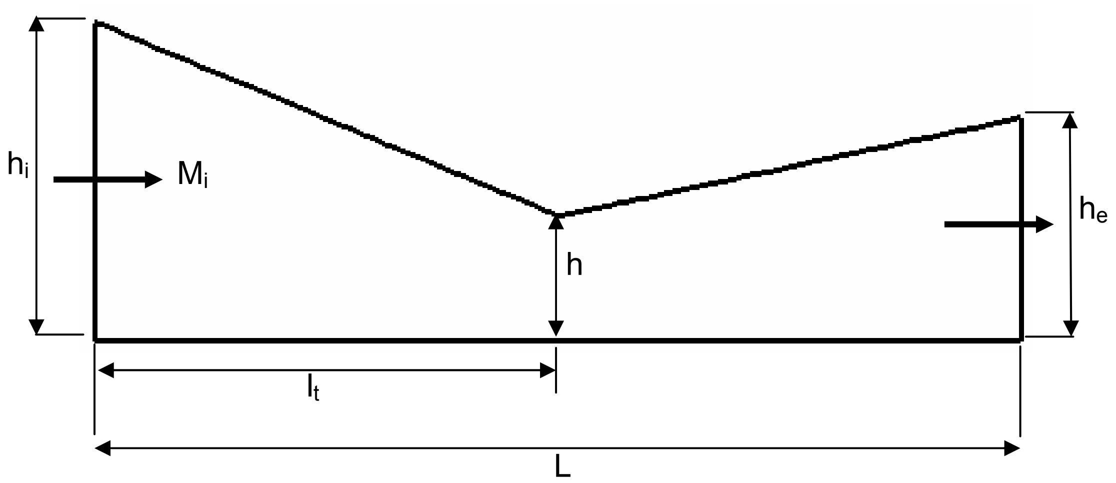
Tabanında tümsek bulunan kanal içindeki akışın farklı hızlardaki çözüm sonuçları genel olarak değerlendirildiğinde, bu tezde geliştirilen programdan elde edilen sonuçlar ile literatür çalışmaları arasında bir takım küçük farklılıkların bulunduğu görülmektedir. Sonuçlardaki farklılıkların literatürdeki çalışmaların kendileri arasında da bulunduğu gözlenmektedir. Çözüm esnasında kullanılan yöntemlerin farklı olmaları veya farklı ağ yapılarını kullanıyor olmaları nedeni ile sonuçların sayısal çalışmalarda birebir örtüşmesi de beklenmemelidir.

6.5 Süpersonik Nozul İçindeki Akış

Tümsek üzerinden ses altı, transonik ve ses üstü sürtünmesiz akışların eğrisel koordinatlarda çözülmesinin ardından, bu kısımda ses üstü hızda nozul içinden sürtünmeli akış örneği çözülecektir. Bu örnek geliştirilen program veya yöntemlerin test edilmesinde en çok kullanılanlardan biridir. Deneysel sonuçlarının da bulunması nedeniyle isabetli bir örnek olduğu değerlendirilebilir.

Süpersonik akışın gerçekleştiği nozul geometrisi Şekil 6.42'de görülmektedir. Süpersonik nozul için akış şartları ve kanal ölçüleri Çizelge 6.4'te verilmiştir. Nozul girişinde Mach sayısı 0.232 olarak verilmektedir. Çıkıştaki statik basıncın toplam basınca oranı ise 0.1135 olarak verilmiştir.

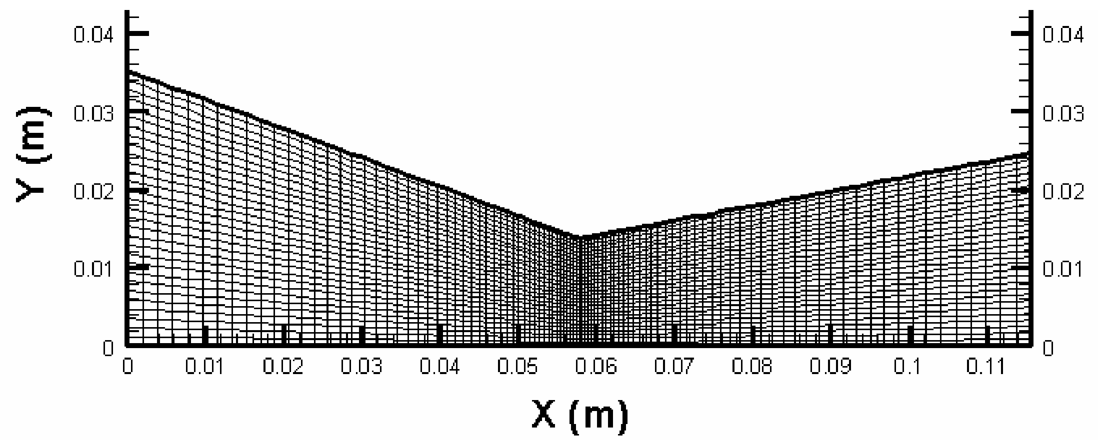
Ağ dağılımı olarak 101x31 nokta kullanılmıştır. Ağ dağılımı içinde 3131 nokta ve 3000 kontrol hacmi bulunmaktadır. Ağ dağılımı, geliştirilen yazılım oluşturulmuştur. Çözümde 101x31 grid dağılımı kullanılmıştır. Mesh oluşturulurken orta kısma (throat) doğru ağ yapısı sıklaştırılmış, dikey doğrultuda eşit aralıklı ağ yapısı kullanılmıştır. Nozul içinde oluşturulan ağ yapısı Şekil 6.43'de görülmektedir.



Şekil 6.42. Süpersonik nozul geometrisi

Çizelge 6.5. Süpersonik nozul için akış şartları ve kanal ölçüleri

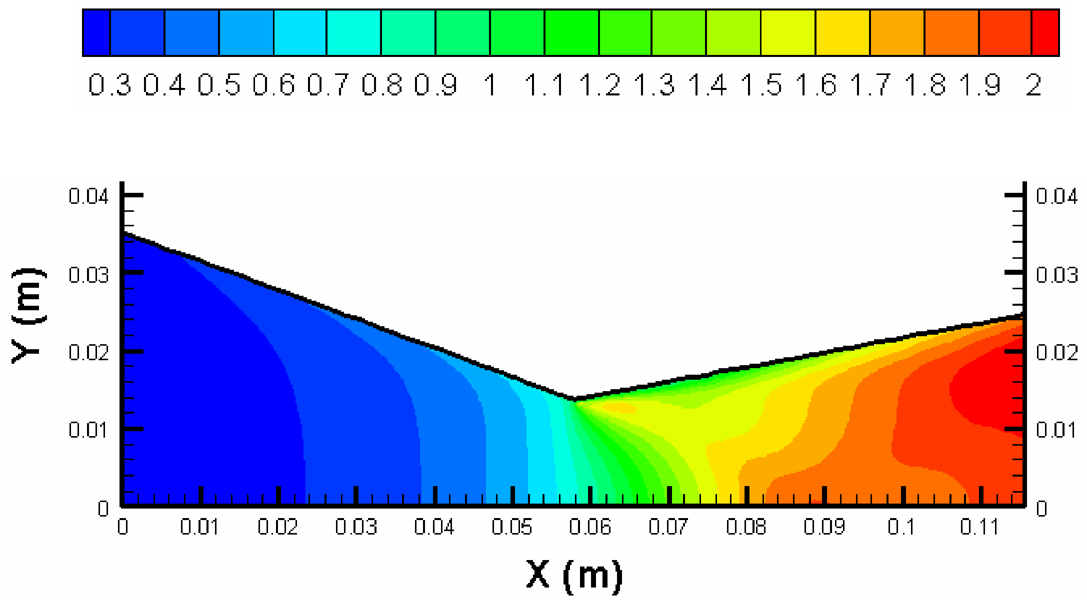
M_i	0.232
P_e/P_0	0.1135
L	11.56 cm
l_t	5.78 cm
h_i	3.52 cm
h_t	1.37 cm
h_e	2.46 cm



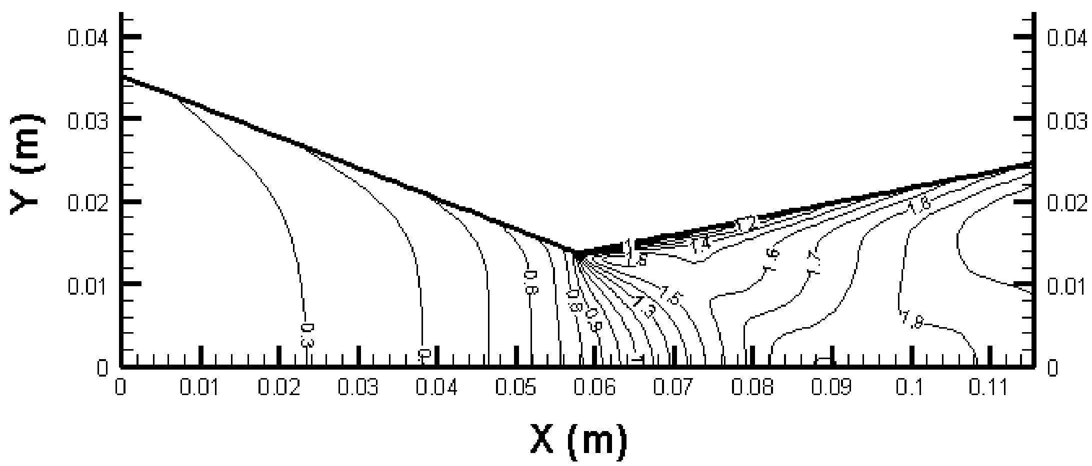
Şekil 6.43. Süpersonik nozul içindeki ağ yapısı

Şekil 6.44'te nozul içindeki Mach sayısı dağılımı renkli olarak verilmiştir. Aynı dağılım çizgisel gösterimde Şekil 6.45'de görülmektedir. Dağılım genel olarak incelendiğinde Mach sayısının girişten çıkışa doğru kademeli olarak arttığı görülmektedir. Nozul çıkışında Mach değerinin 2 gibi yüksek oranda bir hıza ulaştığı görülmektedir. Girişte 0.232 gibi düşük bir Mach sayısından 2 değerine ulaşılması, giriş ve çıkış arasında oluşturulan yüksek orandaki basınç farkından kaynaklanmaktadır.

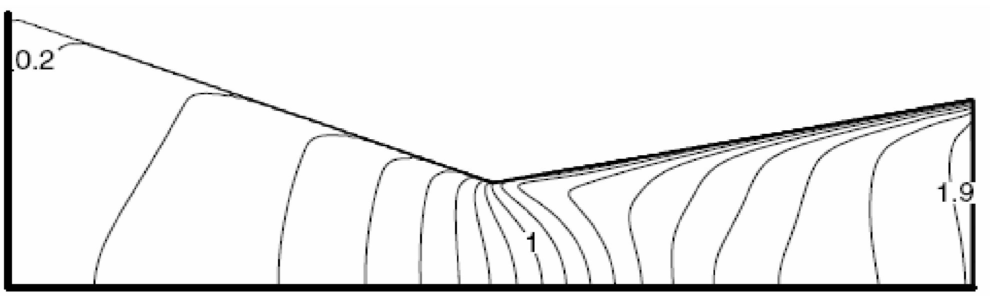
Literatürde benzer çalışmayı Jing ve ark. [2007], Djavareshkian ve Rezazadeh [2007], Rincon ve Elder [1997] ile Karki ve Patankar [1989] yapmışlardır. Çalışma sonuçlarından elde ettikleri nozul içindeki Mach sayısı dağılımları Şekil 6.46'da verilmiştir. Mach sayısı dağılımları incelendiğinde hepsinde birbirine göre farklılıklar bulunmakla beraber benzer yanlarıda vardır. Şekilsel olarak Mach sayılarındaki kademeli artış tümünde görülmektedir. Tümünün ortak yanı çıkıştaki Mach sayısının yaklaşık 2 değerine ulaşmalarıdır. Sonuçlara bakıldığında Rincon ve Elder [1997]'in elde ettikleri sonuçların bu tezde elde edilenlere daha çok benzediği görülmektedir.



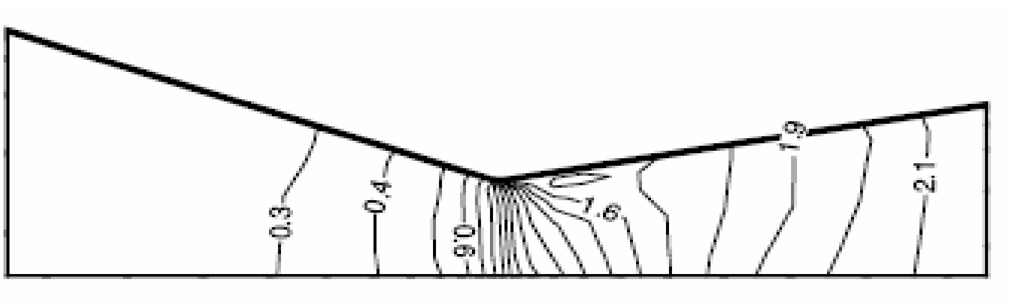
Şekil 6.44. Süpersonik nozul içinde oluşan Mach sayısı dağılımı (renkli)



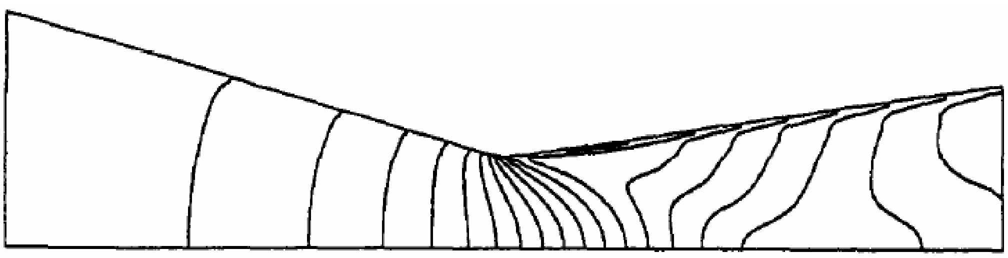
Şekil 6.45. Süpersonik nozul içinde oluşan Mach sayısı dağılımı (çizgili)



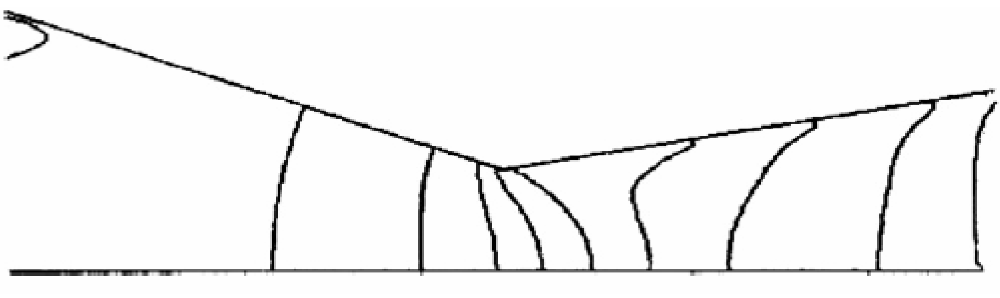
(a)



(b)



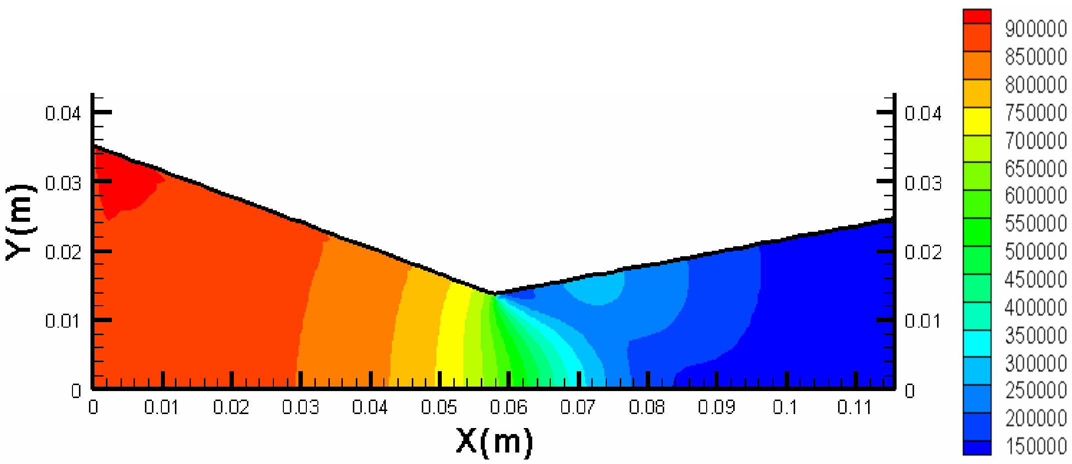
(c)



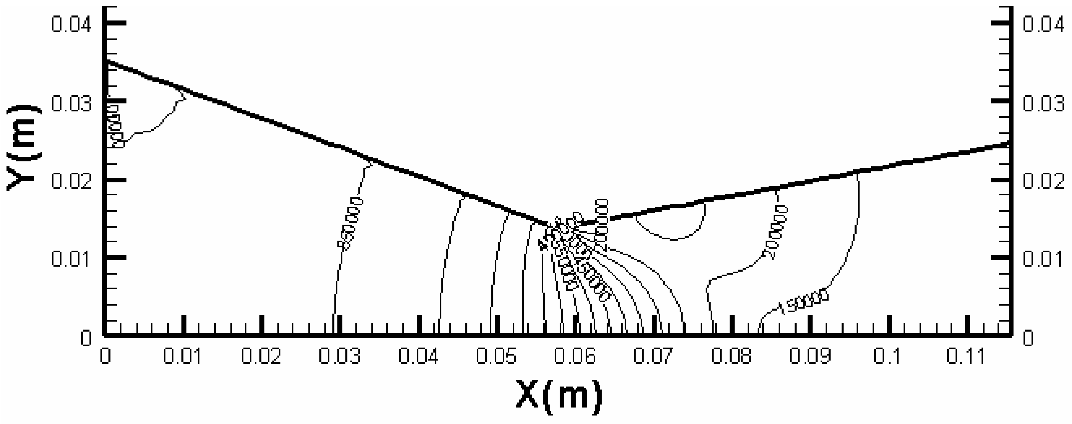
(d)

Şekil 6.46. Süpersonik nozul içinde oluşan Mach sayısı dağılımının literatürdeki çalışmalarla karşılaştırması
a) [Jing ve ark., 2007]
b) [Djavareshkian ve Reza-zadeh, 2007]
c) [Rincon ve Elder, 1997]
d) [Karki ve Patankar, 1989]

Nozul içindeki genel basınç dağılımı Şekil 6.47'de renkli olarak görülmektedir. Aynı dağılım çizgisel gösterimde Şekil 6.48'de sunulmuştur. Her iki şekilden de görüleceği üzere basınç değeri nozul girişinden itibaren çıkışa doğru azalmaktadır. Kademe aralıklarına bakıldığında basınçtaki azalmanın giriş ve çıkışa yakın bölümlerde daha yavaş seyrettiği, boğaz ve çevresinde daha hızlı bir basınç değişimi gözlenmektedir. Kademe aralıklarının boğaz bölümünde kısalması basınçtaki hızlı değişimi teyit etmektedir. Aynı sonuç çizgisel gösterimde basınç değişimini veren Şekil 6.48'den de görülmektedir.



Şekil 6.47. Süpersonik nozul içinde oluşan basınç dağılımı (renkli)



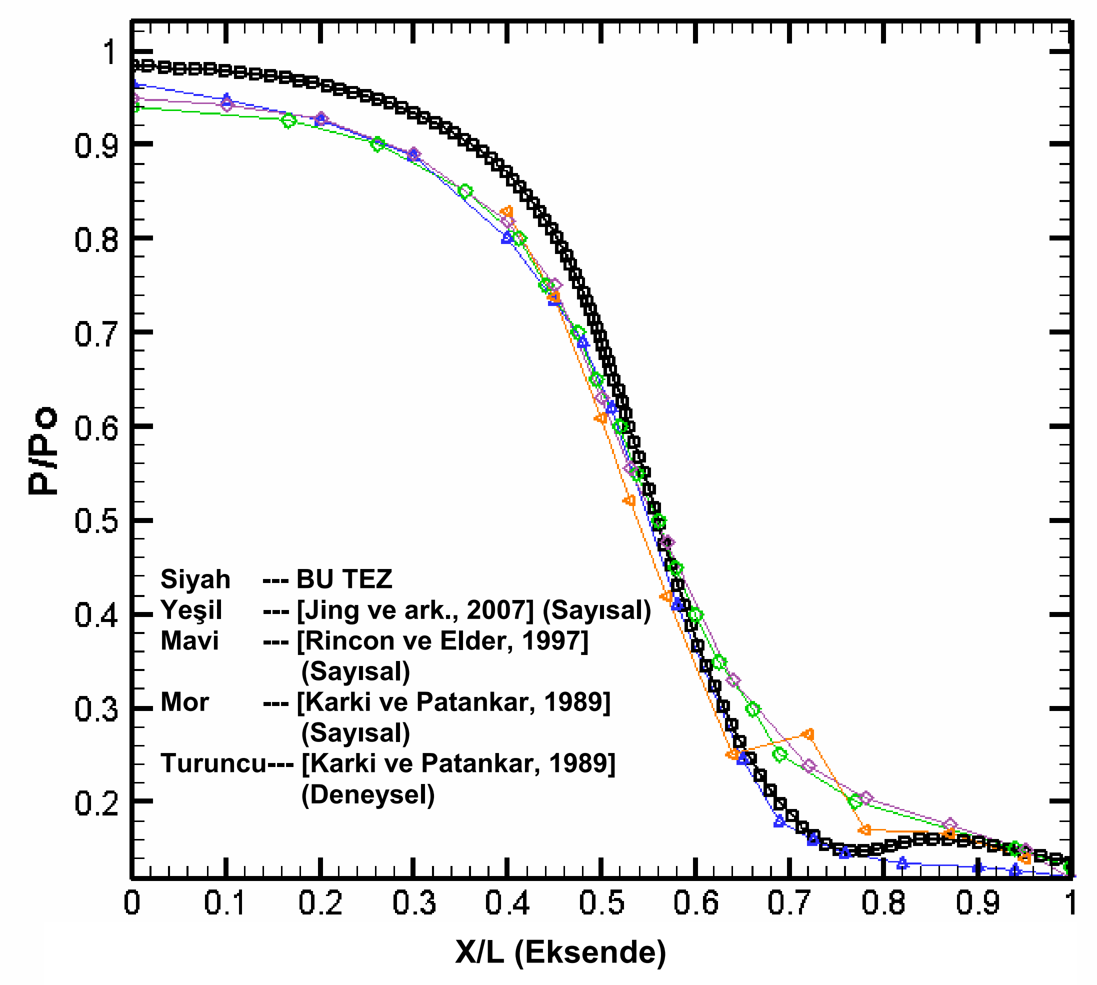
Şekil 6.48. Süpersonik nozul içinde oluşan basınç dağılımı (çizgili)

Şekil 6.49’da nozul ekseni üzerindeki basınç dağılımı görülmektedir. Basınç, nozul girişinden ortada bulunan boğaz kısmına kadar yavaş olmak üzere, boğaz kısmında hızlı bir şekilde azalmakta ve tekrar yavaşlayan bir azalış davranışı göstermektedir.

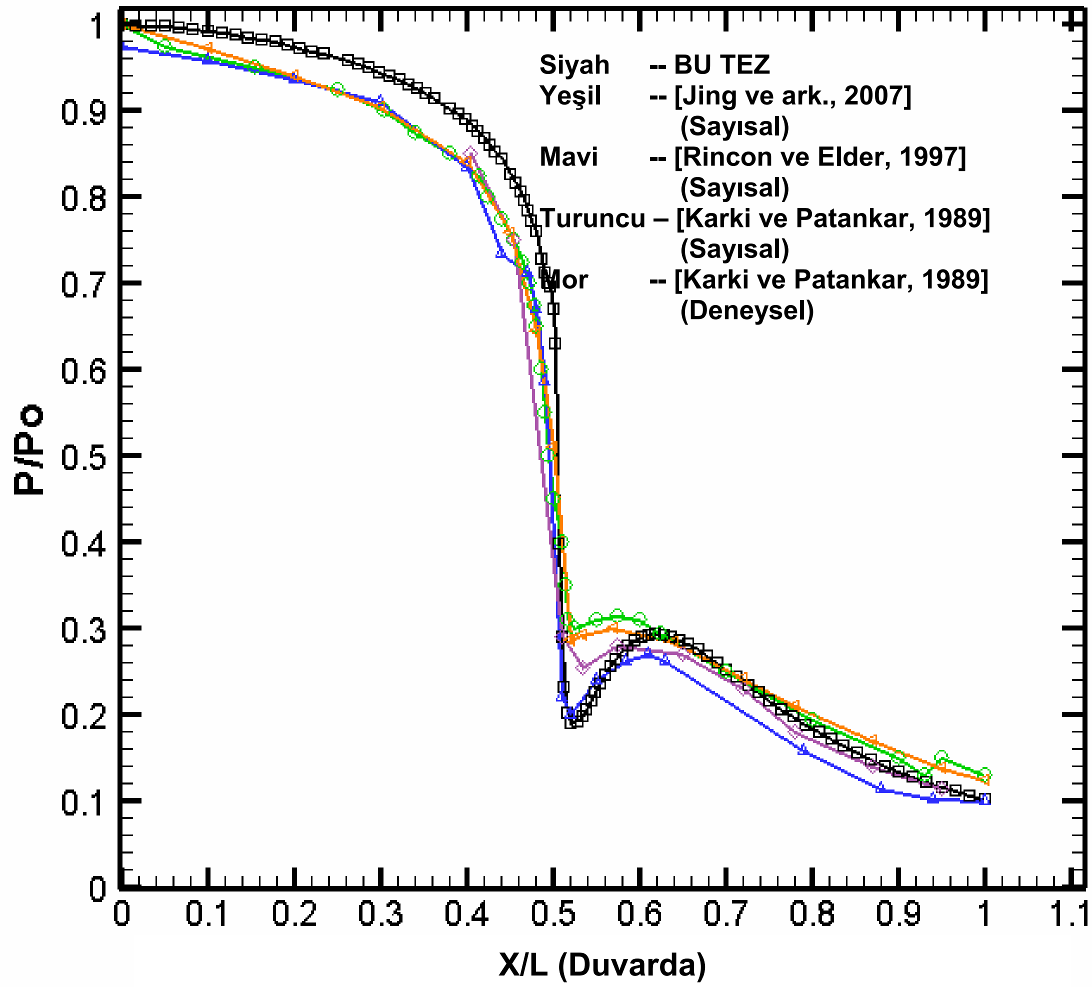
Geliştirilen programdan elde edilen sonuçlar literatürdekilerle kıyaslandığında, nozul girişinden ortadaki boğaz kısmına kadarki kısımda, büyük bir fark olmamakla birlikte basınç değerlerinin literatürdekilere kıyasla biraz yüksek seyrettiği görülmektedir. Tezde basınç değerinin çözümü için SIMPLE metod kullanılmaktadır. Bu metod ile basınç her iterasyonda bir kez düzeltilir. Elde edilen basınç değeri iterasyon sayısının artışıyla yakınsar. Karki ve Patankar [1989] çalışmalarında SIMPLER metoduna kullanmışlar ve elde ettikleri sonuçlardan da görüldüğü üzere deneysel sonuca daha yakın bir sonuç elde etmişler. Bunun nedeni basınç değerinin doğrudan hesaplandığı SIMPLER metodunu kullanması olabilir.

Şekil 6.50’de ise duvar üzerindeki basıncın girişte yataya yakın bir başlangıçtan sonra boğaz kısmında aniden büyük bir düşüş yaşadığı görülmektedir. Boğazın geçilmesinin ardından basınç değerinde hızlı bir yükseliş ve sonrasında tekrar çıkışa kadar azalış görülmüştür. boğaz kısmına kadar benzer, orta boğaz kısmında ani bir azalış göstermektedir. Boğaz kısmı geçildikten sonra küçük bir yükseliş sonrası tekrar çıkışa doğru azalmaktadır.

Programdan elde edilen sonuçlar ile literatürdeki sonuçlar duvar kısmı için karşılaştırıldığında nozul girişinden boğaz kısmına kadar olan bölümde basınç değerinin eksende olduğu gibi yine biraz yüksek seyrettiği görülmektedir.



Şekil 6.49. Süpersonik nozul üst duvarı boyunca oluşan basınç dağılımının literatürdeki çalışmalarla karşılaştırması



Şekil 6.50. Süpersonik nozul ekseni boyunca oluşan basınç dağılımının literatürdeki çalışmalarla karşılaştırması

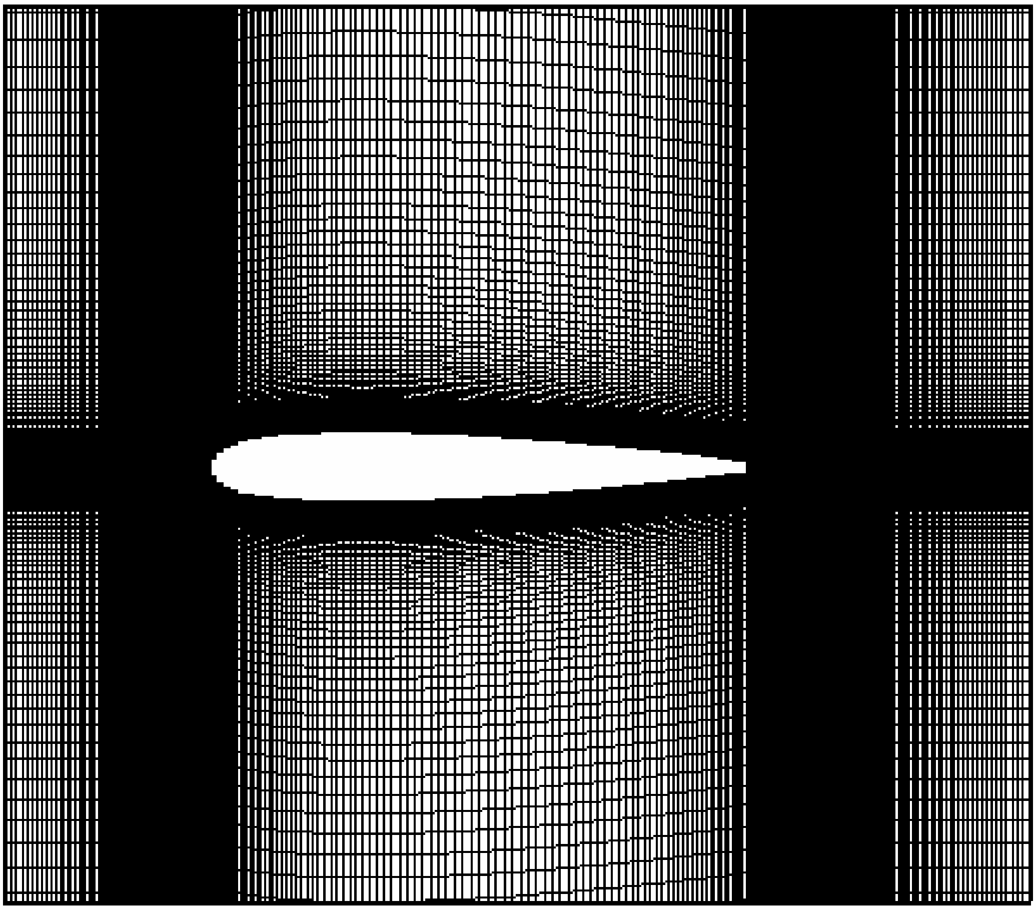
6.6 NACA 0012 Kanat Üzerindeki Akış

Buraya kadar çok farklı sürtünmeli ve sürtünmesiz akış örnekleri çözülerek, geliştirilen program doğrulanmaya çalışılmıştır. Son örnek olarak literatürde çokça kullanılan NACA 0012 tipi simetrik kanat profili üzerindeki sürtünmeli ve sürtünmesiz akış incelenmiştir. Sürtünmeli akış 5000 Reynolds sayısında, 0.3 Mach sayısında ve 0^o hücum açısında seçilmiştir. Sürtünmesiz akış ise 0.1 Mach sayısında ve yine 0^o hücum açısında seçilmiştir. Kanadın simetrik olması nedeniyle program içinde yalnız üst yüzey boyunca olan akış çözümlenmiştir.

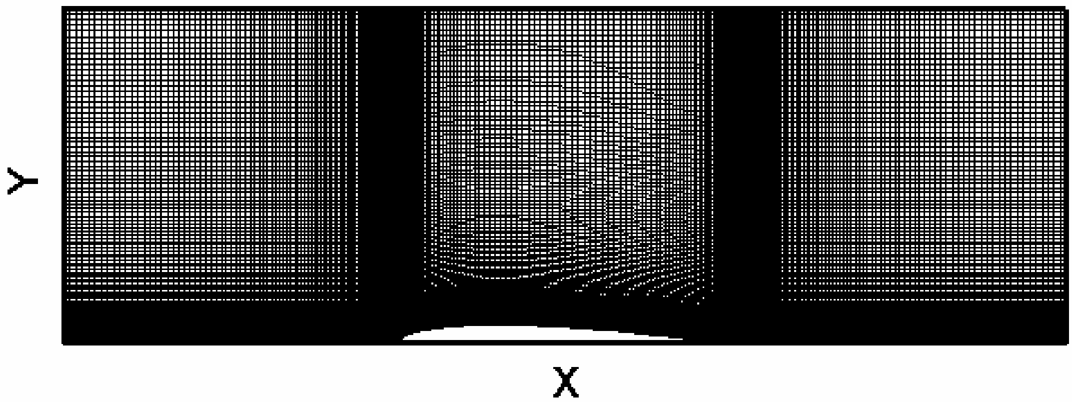
Kanat üzerinden akışın çözümü için H-tipi ve C-tipi olmak üzere iki farklı tipte ağ dağılımı oluşturabilen bir program geliştirilmiştir. Buradaki örnekte şekil 6.50'de görülen H-tipi ağ yapısı seçilmiştir. Kanat simetrik olduğu için Şekil 6.51'de gösterilen yarım ağ yapısı kullanılacaktır. Ağ dağılımı oluşturulurken dikey doğrultuda kanadın üst ve alt kısımlarında yüzeye doğru, yatay olarak ise gradyanların yüksek olduğu kanadın burun ve kuyruk kısımlarına doğru grid sıklaştırılmıştır. Şekil 6.53'de kanadın burun kısmındaki ağ dağılımı yakın görünümde verilmektedir.

Kanat simetrik olduğundan sadece üst kısımda çözümleme yapılmıştır. Şekil 6.54'de sürtünmeli akış için kanadın tamamı üzerindeki hız vektörleri, Şekil 6.55'de ise burun kısmına yakın bölgedeki hız vektörleri daha yakın görünümde verilmektedir. Şekil 6.56'da kanat boyunca basınç katsayısındaki değişim görülmektedir. Basınç katsayısındaki dağılım incelendiğinde, burun kısmında ani bir basınç kaybının oluştuğu görülmektedir. Buna bağlı olarak akış hızında artış gözlenmiştir. Daha sonra kuyruk tarafına doğru basıncın tekrar düşük gradyanla artışa geçtiği görülmektedir.

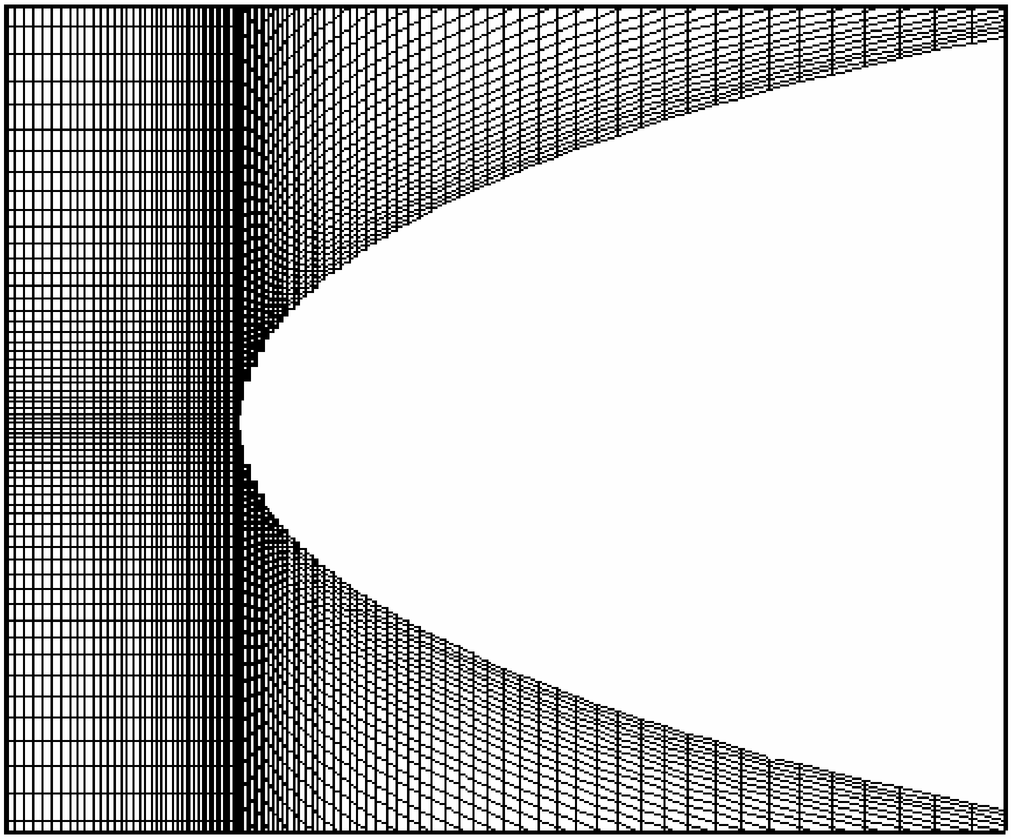
Sürtünmesiz akış basınç katsayısındaki değişim Şekil 6.57'de görüldüğü gibi literatürdekiyle benzerlik göstermektedir.



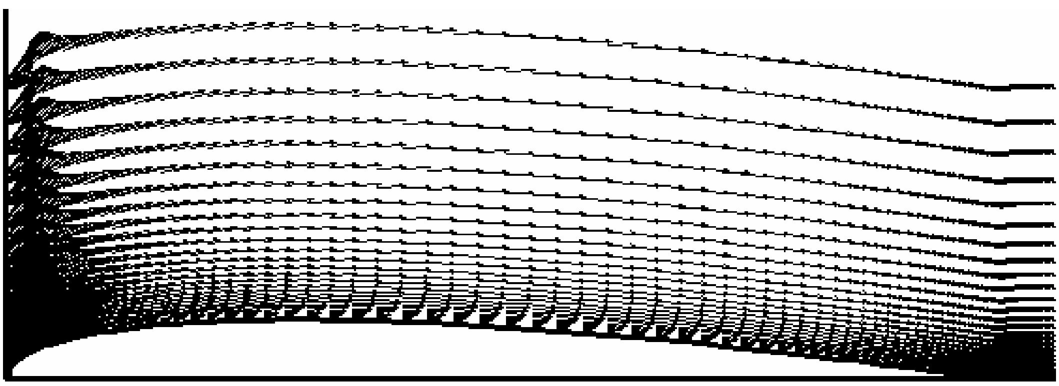
Şekil 6.51. NACA 0012 kanat üzerinde oluşturulan H-tipi grid dağılımı



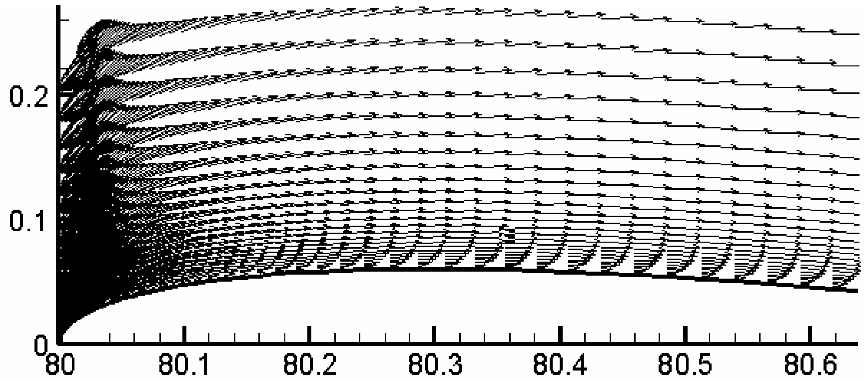
Şekil 6.52. NACA 0012 kanat üzerinde oluşturulan H-tipi grid dağılımı
(üst yüzeyde)



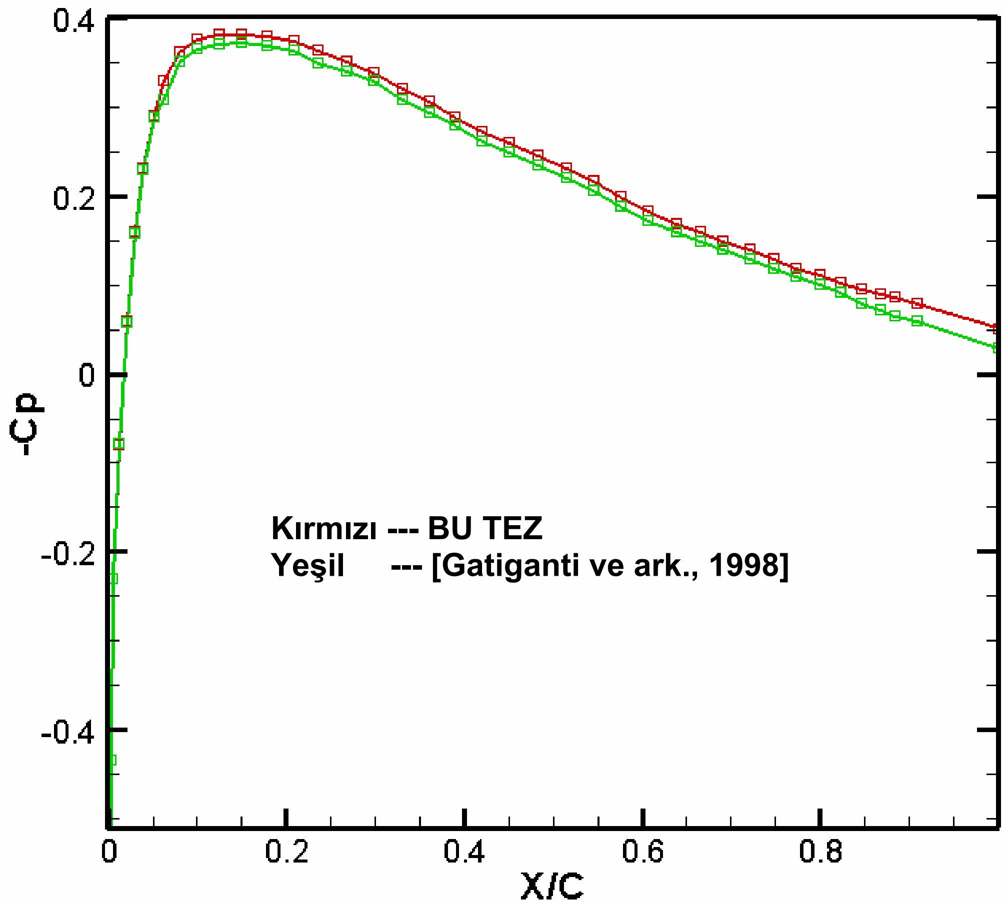
Şekil 6.53. NACA 0012 kanat üzerinde oluşturulan H-tipi grid dağılımı (yakın görünümde)



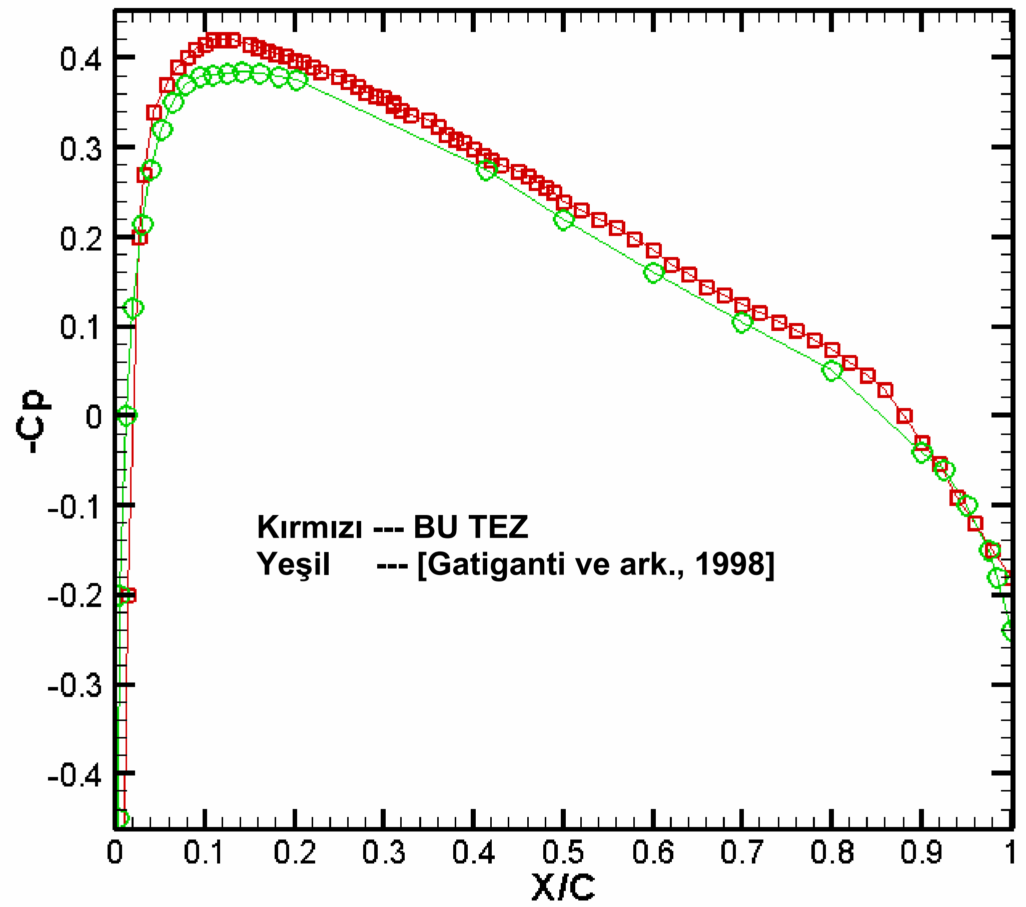
Şekil 6.54. NACA 0012 kanat üzerinde sürtünmeli akışta Kanat yüzeyinde oluşan hız profili



Şekil 6.55. NACA 0012 kanat üzerinde sürtünmeli akışta
Kanat yüzeyinde oluşan hız profili (yakın görünümde)



Şekil 6.56. NACA 0012 kanat üzerinde sürtünmeli akışta basınç katsayısının
yüzey boyunca değişimi



Şekil 6.57. NACA 0012 kanat üzerinde sürtünmesiz akışta basınç katsayısının yüzey boyunca değişimi

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Akış problemlerinin sayısal yöntemlerle çözümleme çalışmaları günümüzde artan bir hızla devam etmektedir. Deneysel çalışmaların pahalı ve zor olması tüm gayretleri sayısal çözümlemelere itmiştir. Özellikle bilgisayar hızlarının artması ve ucuzlamaları bu alandaki çalışmaları daha da hızlandırmıştır. Akış problemlerinin çok çeşitli oluşu bu alanda birçok yöntemin geliştirilmesine yol açmıştır.

Akış problemleri doğrusal ve eğrisel yüzeyler üzerinden akışlar olarak ikiye ayrılabilirler. Bu tezde eğrisel yüzeyler üzerinden akışlar incelenmiştir. Türbülanslı akış çözümlerinde standart k-ε modeli kullanılmıştır. Akış problemlerinin çözümü için süreklilik, momentum, enerji ve türbülans denklemlerinin eğrisel koordinatlar sistemine transformasyonu yapılarak eşit aralıklı hesap alanına dönüştürülmüşlerdir.

Geliştirilen programın test edilmesi için ilk önce düz plaka üzerinden akış çözülerek doğrusal yönde program denenmiştir. Akışlar laminer ve türbülanslı olmak üzere iki farklı hızda çözülmüştür. Her iki örnekte de literatürdeki çalışmalarla karşılaştırılarak, geliştirilen bilgisayar programının doğruluğu test edilmiştir.

Daha sonra doğrusal akışlara örnek olarak paralel iki plaka arasından akış ile paralel plakalar arasına yerleştirilmiş bloklar üzerinden akışlar çözülmüştür.
Devamında eğrisel yüzeyler üzerinden akış örneklerine geçilmiştir. İlk örnek olarak geçmişte birçok programın doğrulanması için kullanılan, tabanında tümsek (bump) bulunan bir kanal içindeki sürtünmesiz akış incelenmiştir. Aynı kanal içinde ses altı (subsonik), transonik ve ses üstü (süpersonik) akışlar üzerinde çalışılmıştır. Elde edilen tüm sonuçlar literatürdekilerle kıyaslanmıştır. Sonuçların çok yakın olduğu görülmüştür.

Sürtünmeli akışa örnek olarak ise süpersonik nozul içindeki akış incelenmiştir. Söz konusu örnek yine geçmişte birçok bilim adamı tarafından programlarının doğrulanmasında kullanılmıştır. Bu örneğin deneysel sonuçları da bulunmaktadır. Elde edilen sonuçların literatürdeki sonuçlarla uyumlu olduğu belirlenmiştir.

Son olarak tezin konusu olan kanat üzerinden akış incelenmiştir. Kanat olarak NACA 0012 tipi simetrik kanat seçilmiştir. Bu kanat üzerinden 0.1 Mach sayısında sürtünmesiz ve 0.3 Mach sayısında sürtünmeli yatay akış üzerinde çalışılmıştır. Elde edilen sonuçların literatürdeki çalışmalarla kıyaslandığında uyumlu olduğu görülmüştür. Kanat üzerinden akışın çözümlenebilmesi için H-tipi ve C-tipi olmak üzere iki farklı tipte grid yazılımı geliştirilmiştir.

Literatürdeki çalışmaların büyük bölümünde momentum denklemlerinde kartezyen hız bileşenleri değişken olarak kullanılmıştır. Çözümler kaydırılmamış ağ sistemlerinde elde edilmiştir. Bu tez çalışmasında, momentum denklemlerinde değişken olarak kartezyen hız bileşenleri kullanılarak çözümler yapılmasının yanı sıra, hareket denklemlerinde modifikasyonlar yapılarak, eğrisel yöne teğet hız bileşenleri değişken olara alınarak çözümlerde yapılmıştır. Ayrıca kaydırılmış ağ sisteminde basınç ana değişken olarak alınarak sıkıştırılabilir ve sıkıştırılamaz akışların aynı anda çözülebildiği bir kod geliştirilmiştir.

Sonuç olarak, yeni geliştirilen program üzerinde test edilen doğrusal ve eğrisel yüzeylerdeki tüm örneklerde geçmiştekilerle benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Sonraki adım olarak geliştirilen program üç boyutlu hale getirilebilir. Kanat üzerinden açılı akış ve farklı türbülans modelleri üzerinde çalışılabilir.

KAYNAKLAR

Ahmed, N., Yilbas, B.S. And Budair, M.O., “Computational study into the flow field developed around a cascade of NACA 0012 airfoils”, ***Computer Methods Applied Mechanical Engineering***, 167: 17-32 (1998).

Anderson J.D., “Fundamentals of aerodynamics“, ***McGraw Hill Book Company***, New York, (1986).

Atkins, H.L., Hassan, H.A., “Transonic flow calculations using the Euler equations”, ***AIAA Journal***, 21 (6): 842-847 (1983).

Barakos, G., Dirikakis, D., “An Implicit Unfactored Method for Unsteady Turbulent Compressible Flows With Moving Boundaries”, ***Computers and Fluids***, 28: 899-922 (1999).

Beam, R.M., Warming, R.F., “An implicit factored scheme for the compressible Navier-Stokes equations”, ***AIAA Journal***, 16 (4): 393-402 (1978).

Chima, R.V., Johnson, G.M., “Efficient solution of the Euler and Navier-Stokes equqtions with a vectorized multiple-grid algorithm”, ***AIAA Journal***, 23 (1): 23-32 (1985).

Davis, R.L., Ni, R.H., Bowley, W.W., “Prediction of compressible, laminar viscous flows using a time-marching control volume and multiple grid technique”, ***AIAA Journal***, 22 (11): 1573-1581 (1984).

Djavareshkian, M.H., “A high resolution pressure-based method for compressible fluid flow”, ***Tech Science Press FDMP***, 1 (4): 329-342 (2005).

Djavareshkian, M.H., Reza-zadeh, S., ” Application of normalized flux in pressure-based algorithm”, ***Computers & Fluids***, 36: 1224–1234 (2007).

Frymier, Jr., P.D., Hassan, H.A., Salas, M.D., “Navier-Stokes calculations using cartesian grids: ı. laminar flows”, ***AIAA Journal***, 26 (10): 1181-1188 (1988).

Gatiganti, R.M., Badcock, K.J., Cantariti, F., Dubuc, L., Woodgate, M., Richards, B.E., ”Evaluation of an unfactored method for the solution of the incompressible flow equations using artificial compressibility”, ***Applied Ocean Research***, 20: 179-187 (1998).

Goncalves, E., Houdeville, R., “Reassessment of the wall functions Approach for RANS computations”, ***Aerosp.Sci.Technol.***, 5: 1-14 (2001).

Hoffmann, K.A., “Computational fluid dynamics for engineers”, ***A Publication of Engineering Education System***, The University of Texas, Austin (1990).

Incropera, F.P., De Witt D.P.,”Fundamentals of heat and mass transfer”, ***Wiley*** (1990).

Jameson, A., Mavriplis, D., “Finite volume solution of the two-dimensional Euler equations on a regular triangular mesh”, ***AIAA 23rd Aerospace Sciences Meeting,*** Nevada, 85 (435): 611-618 (1985).

Jing, H., Ru, L., Yaling, H., Zhiguo, Q., ” Solutions for variable density low Mach number flows with a compressible pressure-based algorithm”, ***Applied Thermal Engineering***, 27: 2104–2112 (2007).

Karki K.C., “A calculation procedure for viscous flows at all speeds in complex geometries”, Doktora Tezi, ***University of Minnesota, Minneapolis,*** (1986).

Karki, K.C., Patankar, S.V., “Pressure based calculation procedure for viscous flows at all speeds in arbitrary configurations”, ***AIAA Journal***, 27 (9): 1167-1174 (1989).

Lai, J.C.S., Yang, C.Y., “Numerical simulation of turbulence suppression: comparisons of the performance of four k-e turbulence models”, ***Int. J. Heat and Fluid Flow***, 18: 575-584 (1997).

Launder, B.E., Spalding, D.B., “The numerical computation of turbulent flows”, ***Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering***, 3: 269-289 (1974).

Lawrence, S.L., Tannehill J.C., Chaussee D.S., “Application of the implicit maccormack scheme to the parabolized Navier-Stokes equations“, ***AIAA Journal***, 22: 1755-1763 (1984).

Lawrence, S.L., Tannehill J.C., Chaussee D.S., “Upwind algorithm for the parabolized Navier-Stokes equations“, ***AIAA Journal***, 27 (9): 1175-1183 (1989).

Liu, F., Jameson, A., ”Multigrid Navier-Stokes calculations for three-dimensional cascades”, ***AIAA 30th Aerospace Sciences Meeting,*** Reno, 92 (190): (1992).

MacCormack, R.W., “A numerical method for solving the equations of compressible viscous flow “, ***AIAA Journal***, 20: 1275-1281 (1982).

Matesanz, A., Velazquez, A., Jimenez, A., Rodriguez, M., “Numerically robust 3-d finite element reynolds averaged navier-stokes solver for the study of turbulent supersonic external flows", ***Computer Methods Applied Mechanical Engineering***, 159: 383-394 (1998).

Mittal, S., "Finite element computation of unsteady viscous compressible flows", ***Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.***, 157: 151-175 (1998).

Moukalled, F., Darwish, M., "A high-resolution pressure-based algorithm for fluid flow at all speeds", ***Journal of Computational Physics***, 168 (1) 2001.

Murthy, P.S., Holla, V.S., Kamath, H., "Unsteady Navier-Stokes solutions for a NACA 0012 airfoil", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 186: 85-99 (2000).

Ni, R.H., "A multiple grid scheme for solving the Euler equations", ***AIAA Journal***, 20 (11): 1565-1571 (1982).

Patankar, S.V., "Numerical heat transfer and fluid flow", ***Hemisphere Publishing Corporation***, (1980).

Pulliam, T.H., Steger, J.L., "Implicit finite difference simulations of three-dimensional compressible flow", ***AIAA Journal***, 18: 159-167 (1980).

Rhie, C.M., Chow, W.L., "Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation", ***AIAA Journal***, 21 (11): 1525-1532 (1983).

Rincon, J., Elder, R., "A high-resolution pressure-based method for compressible flows", ***Computers & Fluids***, 26 (3): 217-231 (1997).

Schlichting H.," Boundary layer theory 7th edition", ***McGraw Hill Book Company***, New York, (1987).

Shan, H., Jiang, L. And Liu, C., "Direct numerical simulation of flow separation around a NACA 0012 airfoil", ***Computers and Fluids***, 34: 1096-1114 (2005).

Sun, Y., Wang, Z.J., Liu, Y., "Spectral (finite) volume method for conservation laws on structured grids", ***Journal Of Computational Physics,*** 215: 41-58 (2006).

Swanson R.C., Radespiel R., "Cell-centered and cell-vertex multigrid schemes for the Navier-Stokes equations", ***AIAA Journal***, 29: 697-703 (1991).

Xu, H., Zhang, C., "Numerical calculations of laminar flows using contravariant velocity fluxes", ***Computers & Fluids***, 29: 149-177 (2000).

Venkatakrishnan, V., “Newton solution of ınviscid and viscous problems”, ***AIAA Journal***, 27 (7): 885-891 (1989).

Versteeg, H.K. and Malalasekera, W., “An Introduction to Computational Fluid Dynamics, The Finite Volume Method”, ***Longman***, (1995).

Yang, S.Y., “A Locally ımplicit scheme for turbulent flows on dynamic meshes”, ***Numerical Heat Transfer***, 46 (Part B): 581-586 (2004).

Zhou, J., Zhang, Y., Chen, J.K., ”Numerical simulation of compressible gas flow and heat transfer in a microchannel surrounded by solid media”, ***Int.J.of Heat and Fluid Flow***, 28: 1484–1491 (2007).

EKLER

EK-1 x – yönündeki momentum denkleminin ayrıklaştırılması

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u v)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial y}\right)+S$$

$$S=-\frac{\partial P}{\partial x}+S_x^t$$

$$S_x^t=\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\vec{\nabla}.\vec{V}+\rho k\right)$$

$$\vec{\nabla}.\vec{V}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\mu_t=C_\mu \rho\frac{k}{\varepsilon}$$

$$\mu_{eff}=\mu+\mu_t$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u v)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial y}\right)+S$$

$$S=-\frac{\partial P}{\partial x}+S_x^t$$

EK-1 (Devam) x – yönündeki momentum denkleminin ayrıklaştırılması

$$S_x^t = \frac{\partial}{\partial x}\left((\mu + \mu_t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left((\mu + \mu_t)\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu + \mu_t)\vec{\nabla}.\vec{V} + \rho k\right)$$

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k}{\varepsilon}$$

$$\mu_{eff} = \mu + \mu_t$$

EK-1 (Devam) x – yönündeki momentum denkleminin ayrıklaştırılması

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u v)}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\vec{\nabla}.\vec{V}+\rho k\right)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u v)}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial x}+(\mu+\mu_t)\frac{\partial v}{\partial y}+\rho k\right)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u v)}{\partial y}=$$

$$-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$-\left(\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}(\rho k)\right)$$

Yukarıdaki denkleminin sol ve sağ tarafı koordinat transformasyonu sonrasında tekrar yazılırsa,

SOL:

$$\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial\tau}+\xi_t\frac{\partial(\rho u)}{\partial\xi}+\eta_t\frac{\partial(\rho u)}{\partial\eta}\right)+\left(\xi_x\frac{\partial(\rho uu)}{\partial\xi}+\eta_x\frac{\partial(\rho uu)}{\partial\eta}\right)+\left(\xi_y\frac{\partial(\rho uv)}{\partial\xi}+\eta_y\frac{\partial(\rho uv)}{\partial\eta}\right)$$

SAG:

(1)
$$=-\xi_x\frac{\partial P}{\partial\xi}-\eta_x\frac{\partial P}{\partial\eta}$$

(2)
$$+\xi_x\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right\}+\xi_x\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right\}+\eta_x\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right\}+\eta_x\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right\}$$

(3)
$$+\xi_y\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right\}+\xi_y\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right\}+\eta_y\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right\}+\eta_y\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right\}$$

(4)
$$+\xi_x\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right\}+\xi_x\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right\}+\eta_x\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right\}+\eta_x\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right\}$$

(5)
$$+\xi_y\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right\}+\xi_y\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right\}+\eta_y\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right\}+\eta_y\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right\}$$

(6)
$$-\frac{2}{3}\xi_x\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right\}-\frac{2}{3}\xi_x\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right\}-\frac{2}{3}\eta_x\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right\}-\frac{2}{3}\eta_x\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right\}$$

(7)
$$-\frac{2}{3}\xi_x\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right\}-\frac{2}{3}\xi_x\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right\}-\frac{2}{3}\eta_x\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right\}-\frac{2}{3}\eta_x\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right\}$$

(8)
$$-\frac{2}{3}\xi_x\frac{\partial(\rho k)}{\partial\xi}-\frac{2}{3}\eta_x\frac{\partial(\rho k)}{\partial\eta}$$

Eşitliğin her iki tarafı integre edildikten sonra tekrar düzenlenirse,

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial\tau}+\xi_t\frac{\partial(\rho u)}{\partial\xi}+\eta_t\frac{\partial(\rho u)}{\partial\eta}+\xi_x\frac{\partial(\rho uu)}{\partial\xi}+\eta_x\frac{\partial(\rho uu)}{\partial\eta}+\xi_y\frac{\partial(\rho uv)}{\partial\xi}+\eta_y\frac{\partial(\rho uv)}{\partial\eta}\right)d\tau\, d\xi\, d\eta$$

$$=\int_0^t\int_w^e\int_s^n\left(\begin{array}{l}
-\xi_x\dfrac{\partial P}{\partial\xi}-\eta_x\dfrac{\partial P}{\partial\eta}\\
+\xi_x\left\{\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\dfrac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right\}+\xi_x\left\{\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right\}+\eta_x\left\{\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\dfrac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right\}+\eta_x\left\{\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right\}\\
+\xi_y\left\{\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\dfrac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right\}+\xi_y\left\{\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right\}+\eta_y\left\{\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\dfrac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right\}+\eta_y\left\{\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right\}\\
+\xi_x\left\{\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\dfrac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right\}+\xi_x\left\{\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right\}+\eta_x\left\{\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\dfrac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right\}+\eta_x\left\{\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right\}\\
+\xi_y\left\{\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\dfrac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right\}+\xi_y\left\{\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\dfrac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right\}+\eta_y\left\{\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\dfrac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right\}+\eta_y\left\{\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\dfrac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right\}\\
-\dfrac{2}{3}\xi_x\left\{\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\dfrac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right\}-\dfrac{2}{3}\xi_x\left\{\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right\}-\dfrac{2}{3}\eta_x\left\{\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\dfrac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right\}-\dfrac{2}{3}\eta_x\left\{\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right\}\\
-\dfrac{2}{3}\xi_x\left\{\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\dfrac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right\}-\dfrac{2}{3}\xi_x\left\{\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\dfrac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right\}-\dfrac{2}{3}\eta_x\left\{\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\dfrac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right\}-\dfrac{2}{3}\eta_x\left\{\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\dfrac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right\}\\
-\dfrac{2}{3}\xi_x\dfrac{\partial(\rho k)}{\partial\xi}-\dfrac{2}{3}\eta_x\dfrac{\partial(\rho k)}{\partial\eta}
\end{array}\right)d\tau\, d\xi\, d\eta$$

Eşitliğin sol tarafı,

$$\int_0^t \int_w^e \int_s^n \left(\begin{array}{l} \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial \tau} + \xi_t \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial \xi} + \eta_t \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial \eta} \\ \\ + \xi_x \dfrac{\partial(\rho u u)}{\partial \xi} + \eta_x \dfrac{\partial(\rho u u)}{\partial \eta} \\ \\ + \xi_y \dfrac{\partial(\rho u v)}{\partial \xi} + \eta_y \dfrac{\partial(\rho u v)}{\partial \eta} \end{array} \right) d\tau\, d\xi\, d\eta$$

$$= (\rho_P u_P - \rho_P{}^0 u_P{}^0) \Delta\eta_{sn} . \Delta\xi_{we} + \xi_{t_P} (\rho_e u_e - \rho_w u_w) \Delta\eta_{sn} \Delta\tau + \eta_{t_P} (\rho_n u_n - \rho_s u_s) \Delta\xi_{we} \Delta\tau$$

$$+ \xi_{x_P} (\rho_e u_e u_e - \rho_w u_w u_w) \Delta\eta_{sn} \Delta\tau + \eta_{x_P} (\rho_n u_n u_n - \rho_s u_s u_s) \Delta\xi_{we} \Delta\tau$$

$$+ \xi_{y_P} (\rho_e u_e v_e - \rho_w u_w v_w) \Delta\eta_{sn} \Delta\tau + \eta_{y_P} (\rho_n u_n v_n - \rho_s u_s v_s) \Delta\xi_{we} \Delta\tau$$

Eşitliğin sağ tarafı 1 ve 2'nci sıra,

$$-\int_0^t\int_w^e\int_s^n\left(\xi_x \frac{\partial P}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial P}{\partial \eta}\right) d\tau\, d\xi\, d\eta = -\left(\xi_{x_p}(P_e - P_w)\,\Delta\eta_{sn} + \eta_{x_p}(P_n - P_s)\,\Delta\xi_{we}\right)$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \xi_x\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial u}{\partial \xi}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \xi_{x_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_x \frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right)_e - \left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right)_w\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$= \xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \xi_{x_e}\left(\frac{u_E-u_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - (\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}\left(\frac{u_P-u_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \xi_x\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial u}{\partial \eta}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \xi_{x_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_x \frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right)_e - \left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right)_w\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$= \xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \eta_{x_e}\left(\frac{u_{ne}-u_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right) - (\mu+\mu_t)_w\eta_{x_w}\left(\frac{u_{nw}-u_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \eta_x\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial u}{\partial \xi}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \eta_{x_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_x \frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right)_n - \left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right)_s\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$= \eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \xi_{x_n}\left(\frac{u_{ne}-u_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - (\mu+\mu_t)_s\xi_{x_s}\left(\frac{u_{se}-u_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \eta_x\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial u}{\partial \eta}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \eta_{x_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_x \frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right)_n - \left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right)_s\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$= \eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \eta_{x_n}\left(\frac{u_N-u_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - (\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}\left(\frac{u_P-u_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

Eşitliğin sağ tarafı 3'ncü sıra,

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \xi_y \left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \xi_{y_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right)_e - \left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right)_w\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$= \xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}\left(\frac{u_E-u_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - (\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}\left(\frac{u_P-u_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \xi_y \left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \xi_{y_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right)_e - \left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right)_w\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$= \xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{y_e}\left(\frac{u_{ne}-u_{se}}{\Delta\eta_{ne,se}}\right) - (\mu+\mu_t)_w\eta_{y_w}\left(\frac{u_{nw}-u_{sw}}{\Delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \eta_y \left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \eta_{y_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right)_n - \left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right)_s\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$= \eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{y_n}\left(\frac{u_{ne}-u_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - (\mu+\mu_t)_s\xi_{y_s}\left(\frac{u_{se}-u_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \eta_y \left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \eta_{y_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right)_n - \left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right)_s\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$= \eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}\left(\frac{u_N-u_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - (\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}\left(\frac{u_P-u_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

Eşitliğin sağ tarafı 4’ncü sıra,

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \xi_x \left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \xi_{x_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right)_e - \left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right)_w\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$= \xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}\left(\frac{u_E-u_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - (\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}\left(\frac{u_P-u_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \xi_x \left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \xi_{x_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right)_e - \left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right)_w\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$= \xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{x_e}\left(\frac{u_{ne}-u_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right) - (\mu+\mu_t)_w\eta_{x_w}\left(\frac{u_{nw}-u_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \eta_x \left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \eta_{x_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right)_n - \left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right)_s\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$= \eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{x_n}\left(\frac{u_{ne}-u_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - (\mu+\mu_t)_s\xi_{x_s}\left(\frac{u_{se}-u_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \eta_x \left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \eta_{x_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right)_n - \left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right)_s\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$= \eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}\left(\frac{u_N-u_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - (\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}\left(\frac{u_P-u_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

Eşitliğin sağ tarafı 5'nci sıra,

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \xi_y \left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \xi_{y_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right)_e - \left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right)_w\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$= \xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}\left(\frac{v_E-v_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - (\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}\left(\frac{v_P-v_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \xi_y \left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \xi_{y_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right)_e - \left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right)_w\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$= \xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{x_e}\left(\frac{v_{ne}-v_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right) - (\mu+\mu_t)_w\eta_{x_w}\left(\frac{v_{nw}-v_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \eta_y \left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \eta_{y_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right)_n - \left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right)_s\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$= \eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{x_n}\left(\frac{v_{ne}-v_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - (\mu+\mu_t)_s\xi_{x_s}\left(\frac{v_{se}-v_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \eta_y \left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \eta_{y_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right)_n - \left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right)_s\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$= \eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}\left(\frac{v_N-v_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - (\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}\left(\frac{v_P-v_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

Eşitliğin sağ tarafı 6'ncı sıra,

$$\frac{2}{3}\int_0^t\int_w^e\int_s^n \xi_x \left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = -\frac{2}{3}\xi_{x_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right)_e - \left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right)_w\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$= -\frac{2}{3}\xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}\left(\frac{u_E-u_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - (\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}\left(\frac{u_P-u_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$\frac{2}{3}\int_0^t\int_w^e\int_s^n \xi_x \left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = -\frac{2}{3}\xi_{x_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right)_e - \left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right)_w\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$= -\frac{2}{3}\xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{x_e}\left(\frac{u_{ne}-u_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right) - (\mu+\mu_t)_w\eta_{x_w}\left(\frac{u_{nw}-u_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$\frac{2}{3}\int_0^t\int_w^e\int_s^n \eta_x \left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = -\frac{2}{3}\eta_{x_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right)_n - \left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right)_s\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$= -\frac{2}{3}\eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{x_n}\left(\frac{u_{ne}-u_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - (\mu+\mu_t)_s\xi_{x_s}\left(\frac{u_{se}-u_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$\frac{2}{3}\int_0^t\int_w^e\int_s^n \eta_x \left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = -\frac{2}{3}\eta_{x_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right)_n - \left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right)_s\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$= -\frac{2}{3}\eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}\left(\frac{u_N-u_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - (\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}\left(\frac{u_P-u_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

Eşitliğin sağ tarafı 7 ve 8’nci sıra,

$$\frac{2}{3}\int_0^t\int_w^e\int_s^n \xi_x \left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right\}d\tau\, d\xi\, d\eta = -\frac{2}{3}\xi_{x_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right)_e - \left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right)_w\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$= -\frac{2}{3}\xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}\left(\frac{v_E - v_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - (\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}\left(\frac{v_P - v_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$\frac{2}{3}\int_0^t\int_w^e\int_s^n \xi_x \left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right\}d\tau\, d\xi\, d\eta = -\frac{2}{3}\xi_{x_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right)_e - \left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right)_w\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$= -\frac{2}{3}\xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{y_e}\left(\frac{v_{ne} - v_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right) - (\mu+\mu_t)_w\eta_{y_w}\left(\frac{v_{nw} - v_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$\frac{2}{3}\int_0^t\int_w^e\int_s^n \eta_x \left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right\}d\tau\, d\xi\, d\eta = -\frac{2}{3}\eta_{x_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right)_n - \left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right)_s\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$= -\frac{2}{3}\eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{y_n}\left(\frac{v_{ne} - v_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - (\mu+\mu_t)_s\xi_{y_s}\left(\frac{v_{se} - v_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$\frac{2}{3}\int_0^t\int_w^e\int_s^n \eta_x \left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right\}d\tau\, d\xi\, d\eta = -\frac{2}{3}\eta_{x_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right)_n - \left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right)_s\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$= -\frac{2}{3}\eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}\left(\frac{v_N - v_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - (\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}\left(\frac{v_P - v_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$\frac{2}{3}\int_0^t\int_w^e\int_s^n \xi_x \frac{\partial(\rho k)}{\partial\xi}d\tau\, d\xi\, d\eta = -\frac{2}{3}\xi_{x_p}(\rho_e k_e - \rho_w k_w)\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$\frac{2}{3}\int_0^t\int_w^e\int_s^n \eta_x \frac{\partial(\rho k)}{\partial\eta}d\tau\, d\xi\, d\eta = -\frac{2}{3}\eta_{x_p}(\rho_n k_n - \rho_s k_s)\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

Yukarıdaki denklemler ana denkleme koyulup, zamana bölünür ve düzenlenirse,

$$\frac{(\rho_P u_P-\rho_P^{0} u_P^{0})\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau}+\rho_e\Delta\eta_{sn}(\xi_{t_P}+\xi_{x_P}u_e+\xi_{y_P}v_e).u_e-\rho_w\Delta\eta_{sn}(\xi_{t_P}+\xi_{x_P}u_w+\xi_{y_P}v_w).u_w+\rho_n\Delta\xi_{we}(\eta_{t_P}+\eta_{x_P}u_n+\eta_{y_P}v_n).u_n-\rho_s\Delta\xi_{we}(\eta_{t_P}+\eta_{x_P}u_s+\eta_{y_P}v_s).u_s=-\xi_{x_P}(P_e-P_w)\Delta\eta_{sn}-\eta_{x_P}(P_n-P_s)\Delta\xi_{we}\cdot$$

$$+\xi_{x_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}\left(\frac{u_E-u_P}{\Delta\xi_{PE}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}\left(\frac{u_P-u_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}+\xi_{x_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{x_e}\left(\frac{u_{ne}-u_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\eta_{x_w}\left(\frac{u_{nw}-u_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}+\eta_{x_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{x_n}\left(\frac{u_{ne}-u_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\xi_{x_s}\left(\frac{u_{se}-u_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}$$

$$+\eta_{x_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}\left(\frac{u_N-u_P}{\Delta\eta_{PN}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}\left(\frac{u_P-u_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}+\xi_{y_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}\left(\frac{u_E-u_P}{\Delta\xi_{PE}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}\left(\frac{u_P-u_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}+\xi_{y_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{y_e}\left(\frac{u_{ne}-u_{se}}{\Delta\eta_{ne,se}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\eta_{y_w}\left(\frac{u_{nw}-u_{sw}}{\Delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}$$

$$+\eta_{y_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{y_n}\left(\frac{u_{ne}-u_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\xi_{y_s}\left(\frac{u_{se}-u_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}+\eta_{y_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}\left(\frac{u_N-u_P}{\Delta\eta_{PN}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}\left(\frac{u_P-u_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}+\xi_{x_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}\left(\frac{u_E-u_P}{\Delta\xi_{PE}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}\left(\frac{u_P-u_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}$$

$$+\xi_{x_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{x_e}\left(\frac{u_{ne}-u_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\eta_{x_w}\left(\frac{u_{nw}-u_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}+\eta_{x_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{x_n}\left(\frac{u_{ne}-u_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\xi_{x_s}\left(\frac{u_{se}-u_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}+\eta_{x_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}\left(\frac{u_N-u_P}{\Delta\eta_{PN}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}\left(\frac{u_P-u_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}$$

$$+\xi_{y_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}\left(\frac{v_E-v_P}{\Delta\xi_{PE}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}\left(\frac{v_P-v_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}+\xi_{y_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{x_e}\left(\frac{v_{ne}-v_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\eta_{x_w}\left(\frac{v_{nw}-v_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}$$

$$+\eta_{y_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{x_n}\left(\frac{v_{ne}-v_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\xi_{x_s}\left(\frac{v_{se}-v_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}+\eta_{y_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}\left(\frac{v_N-v_P}{\Delta\eta_{PN}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}\left(\frac{v_P-v_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}$$

$$-\frac{2}{3}\xi_{x_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}\left(\frac{u_E-u_P}{\Delta\xi_{PE}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}\left(\frac{u_P-u_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}-\frac{2}{3}\xi_{x_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{x_e}\left(\frac{u_{ne}-u_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\eta_{x_w}\left(\frac{u_{nw}-u_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}$$

$$-\frac{2}{3}\eta_{x_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{x_n}\left(\frac{u_{ne}-u_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\xi_{x_s}\left(\frac{u_{se}-u_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}-\frac{2}{3}\eta_{x_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}\left(\frac{u_N-u_P}{\Delta\eta_{PN}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}\left(\frac{u_P-u_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}$$

$$-\frac{2}{3}\xi_{x_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}\left(\frac{v_E-v_P}{\Delta\xi_{PE}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}\left(\frac{v_P-v_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}-\frac{2}{3}\xi_{x_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{y_e}\left(\frac{v_{ne}-v_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\eta_{y_w}\left(\frac{v_{nw}-v_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}$$

$$-\frac{2}{3}\eta_{x_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{y_n}\left(\frac{v_{ne}-v_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\xi_{y_s}\left(\frac{v_{se}-v_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}-\frac{2}{3}\eta_{x_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}\left(\frac{v_N-v_P}{\Delta\eta_{PN}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}\left(\frac{v_P-v_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}-\frac{2}{3}\xi_{x_P}(\rho_e k_e-\rho_w k_w)\Delta\eta_{sn}-\frac{2}{3}\eta_{x_P}(\rho_n k_n-\rho_s k_s)\Delta\xi_{we}$$

EK-1 (Devam) x – yönündeki momentum denkleminin ayrıklaştırılması

$$
\begin{aligned}
&\frac{(\rho_P u_P-\rho_P^{0} u_P^{0})\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau}+\rho_e\,\Delta\eta_{sn}(\xi_{t_P}+\xi_{x_P}u_e+\xi_{y_P}v_e).u_e-\rho_w\Delta\eta_{sn}(\xi_{t_P}+\xi_{x_P}u_w+\xi_{y_P}v_w).u_w+\rho_n\Delta\xi_{we}(\eta_{t_P}+\eta_{x_P}u_n+\eta_{y_P}v_n).u_n-\rho_s\Delta\xi_{we}(\eta_{t_P}+\eta_{x_P}u_s+\eta_{y_P}v_s).u_s=-\xi_{x_P}(P_e-P_w)\Delta\eta_{sn}-\eta_{x_P}(P_n-P_s)\Delta\xi_{we}.\\
&+\xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}\left(\frac{u_E-u_P}{\Delta\xi_{PE}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}\left(\frac{u_P-u_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}+\xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{x_e}\left(\frac{u_{ne}-u_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\eta_{x_w}\left(\frac{u_{nw}-u_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}+\eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{x_n}\left(\frac{u_{ne}-u_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\xi_{x_s}\left(\frac{u_{se}-u_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}\\
&+\eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}\left(\frac{u_N-u_P}{\Delta\eta_{PN}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}\left(\frac{u_P-u_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}+\xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}\left(\frac{u_E-u_P}{\Delta\xi_{PE}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}\left(\frac{u_P-u_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}+\xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{y_e}\left(\frac{u_{ne}-u_{se}}{\Delta\eta_{ne,se}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\eta_{y_w}\left(\frac{u_{nw}-u_{sw}}{\Delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}\\
&+\eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{y_n}\left(\frac{u_{ne}-u_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\xi_{y_s}\left(\frac{u_{se}-u_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}+\eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}\left(\frac{u_N-u_P}{\Delta\eta_{PN}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}\left(\frac{u_P-u_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}+S_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_1=\;&\xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}\left(\frac{u_E-u_P}{\Delta\xi_{PE}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}\left(\frac{u_P-u_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}+\xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{x_e}\left(\frac{u_{ne}-u_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\eta_{x_w}\left(\frac{u_{nw}-u_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}+\eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{x_n}\left(\frac{u_{ne}-u_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\xi_{x_s}\left(\frac{u_{se}-u_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}\\
&+\eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}\left(\frac{u_N-u_P}{\Delta\eta_{PN}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}\left(\frac{u_P-u_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}+\xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}\left(\frac{v_E-v_P}{\Delta\xi_{PE}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}\left(\frac{v_P-v_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}+\xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{x_e}\left(\frac{v_{ne}-v_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\eta_{x_w}\left(\frac{v_{nw}-v_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}\\
&+\eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{x_n}\left(\frac{v_{ne}-v_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\xi_{x_s}\left(\frac{v_{se}-v_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}+\eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}\left(\frac{v_N-v_P}{\Delta\eta_{PN}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}\left(\frac{v_P-v_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}\\
&-\frac{2}{3}\xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}\left(\frac{u_E-u_P}{\Delta\xi_{PE}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}\left(\frac{u_P-u_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}-\frac{2}{3}\xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{x_e}\left(\frac{u_{ne}-u_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\eta_{x_w}\left(\frac{u_{nw}-u_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}\\
&-\frac{2}{3}\eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{x_n}\left(\frac{u_{ne}-u_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\xi_{x_s}\left(\frac{u_{se}-u_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}-\frac{2}{3}\eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}\left(\frac{u_N-u_P}{\Delta\eta_{PN}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}\left(\frac{u_P-u_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}\\
&-\frac{2}{3}\xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}\left(\frac{v_E-v_P}{\Delta\xi_{PE}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}\left(\frac{v_P-v_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}-\frac{2}{3}\xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{y_e}\left(\frac{v_{ne}-v_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\eta_{y_w}\left(\frac{v_{nw}-v_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}\\
&-\frac{2}{3}\eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{y_n}\left(\frac{v_{ne}-v_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\xi_{y_s}\left(\frac{v_{se}-v_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}-\frac{2}{3}\eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}\left(\frac{v_N-v_P}{\Delta\eta_{PN}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}\left(\frac{v_P-v_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}-\frac{2}{3}\xi_{x_P}(\rho_e k_e-\rho_w k_w)\Delta\Delta_{sn}-\frac{2}{3}\eta_{x_P}(\rho_n k_n-\rho_s k_s)\Delta\Delta_{we}
\end{aligned}
$$

EK-1 (Devam) x – yönündeki momentum denkleminin ayrıklaştırılması

$$\frac{(\rho_P u_P - \rho_P^{0} u_P^{0})\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau} + \rho_e \Delta\eta_{sn}(\xi_{t_P} + \xi_{x_P} u_e + \xi_{y_P} v_e).u_e - \rho_w \Delta\eta_{sn}(\xi_{t_P} + \xi_{x_P} u_w + \xi_{y_P} v_w).u_w + \rho_n \Delta\xi_{we}(\eta_{t_P} + \eta_{x_P} u_n + \eta_{y_P} v_n).u_n - \rho_s \Delta\xi_{we}(\eta_{t_P} + \eta_{x_P} u_s + \eta_{y_P} v_s).u_s = -\xi_{x_P}(P_e - P_w)\Delta\eta_{sn} - \eta_{x_P}(P_n - P_s)\Delta\xi_{we}$$

$$+ \xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \xi_{x_e}\left(\frac{u_E - u_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \xi_{x_w}\left(\frac{u_P - u_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} + \eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \eta_{x_n}\left(\frac{u_N - u_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \eta_{x_s}\left(\frac{u_P - u_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}$$

$$+ \xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \xi_{y_e}\left(\frac{u_E - u_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \xi_{y_w}\left(\frac{u_P - u_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} + \eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \eta_{y_n}\left(\frac{u_N - u_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \eta_{y_s}\left(\frac{u_P - u_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we} + S_2$$

$$S_2 = \xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \eta_{x_e}\left(\frac{u_{ne} - u_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \eta_{x_w}\left(\frac{u_{nw} - u_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} + \eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \xi_{x_n}\left(\frac{u_{ne} - u_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \xi_{x_s}\left(\frac{u_{se} - u_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we} + \xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \eta_{y_e}\left(\frac{u_{ne} - u_{se}}{\Delta\eta_{ne,se}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \eta_{y_w}\left(\frac{u_{nw} - u_{sw}}{\Delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}$$

$$+ \eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \xi_{y_n}\left(\frac{u_{ne} - u_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \xi_{y_s}\left(\frac{u_{se} - u_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we} + \xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \xi_{x_e}\left(\frac{u_E - u_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \xi_{x_w}\left(\frac{u_P - u_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} + \xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \eta_{x_e}\left(\frac{u_{ne} - u_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \eta_{x_w}\left(\frac{u_{nw} - u_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}$$

$$+ \eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \xi_{x_n}\left(\frac{u_{ne} - u_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \xi_{x_s}\left(\frac{u_{se} - u_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we} + \eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \eta_{x_n}\left(\frac{u_N - u_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \eta_{x_s}\left(\frac{u_P - u_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we} + \xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \xi_{x_e}\left(\frac{v_E - v_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \xi_{x_w}\left(\frac{v_P - v_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}$$

$$+ \xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \eta_{x_e}\left(\frac{v_{ne} - v_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \eta_{x_w}\left(\frac{v_{nw} - v_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} + \eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \xi_{x_n}\left(\frac{v_{ne} - v_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \xi_{x_s}\left(\frac{v_{se} - v_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we} + \eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \eta_{x_n}\left(\frac{v_N - v_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \eta_{x_s}\left(\frac{v_P - v_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}$$

$$-\frac{2}{3}\xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \xi_{x_e}\left(\frac{u_E - u_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \xi_{x_w}\left(\frac{u_P - u_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} - \frac{2}{3}\xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \eta_{x_e}\left(\frac{u_{ne} - u_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \eta_{x_w}\left(\frac{u_{nw} - u_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}$$

$$-\frac{2}{3}\eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \xi_{x_n}\left(\frac{u_{ne} - u_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \xi_{x_s}\left(\frac{u_{se} - u_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we} - \frac{2}{3}\eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \eta_{x_n}\left(\frac{u_N - u_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \eta_{x_s}\left(\frac{u_P - u_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}$$

$$-\frac{2}{3}\xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \xi_{y_e}\left(\frac{v_E - v_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \xi_{y_w}\left(\frac{v_P - v_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} - \frac{2}{3}\xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \eta_{y_e}\left(\frac{v_{ne} - v_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \eta_{y_w}\left(\frac{v_{nw} - v_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}$$

$$-\frac{2}{3}\eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \xi_{y_n}\left(\frac{v_{ne} - v_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \xi_{y_s}\left(\frac{v_{se} - v_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we} - \frac{2}{3}\eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \eta_{y_n}\left(\frac{v_N - v_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \eta_{y_s}\left(\frac{v_P - v_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}$$

$$-\frac{2}{3}\xi_{x_P}(\rho_e k_e - \rho_w k_w)\Delta\eta_{sn} - \frac{2}{3}\eta_{x_P}(\rho_n k_n - \rho_s k_s)\Delta\xi_{we}$$

EK-1 (Devam) x – yönündeki momentum denkleminin ayrıklaştırılması

$$
\begin{aligned}
&\frac{(\rho_P u_P-\rho_P{}^0 u_P{}^0)\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau}+\rho_e\,\Delta\eta_{sn}(\xi_{t_P}+\xi_{x_P}u_e+\xi_{y_P}v_e).u_e-\rho_w\Delta\eta_{sn}(\xi_{t_P}+\xi_{x_P}u_w+\xi_{y_P}v_w).u_w\\
&+\rho_n\Delta\xi_{we}(\eta_{t_P}+\eta_{x_P}u_n+\eta_{y_P}v_n).u_n-\rho_s\Delta\xi_{we}(\eta_{t_P}+\eta_{x_P}u_s+\eta_{y_P}v_s).u_s=-\xi_{x_P}(P_e-P_w)\Delta\eta_{sn}-\eta_{x_P}(P_n-P_s)\Delta\xi_{we}\\
&+\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}}{\Delta\xi_{PE}}u_E-\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}}{\Delta\xi_{PE}}u_P-\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}}{\Delta\xi_{WP}}u_P+\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}}{\Delta\xi_{WP}}u_W\\
&+\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}}{\Delta\eta_{PN}}u_N-\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}}{\Delta\eta_{PN}}u_P-\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}}{\Delta\eta_{SP}}u_P+\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}}{\Delta\eta_{SP}}u_S\\
&+\frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}}{\Delta\xi_{PE}}u_E-\frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}}{\Delta\xi_{PE}}u_P-\frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}}{\Delta\xi_{WP}}u_P+\frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}}{\Delta\xi_{WP}}u_W\\
&+\frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}}{\Delta\eta_{PN}}u_N-\frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}}{\Delta\eta_{PN}}u_P-\frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}}{\Delta\eta_{SP}}u_P+\frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}}{\Delta\eta_{SP}}u_S\\
&+S_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{(\rho_P u_P-\rho_P{}^0 u_P{}^0)\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau}+F_e.u_e-F_w.u_w+F_n.u_n-F_s.u_s\\
&=-\xi_{x_P}(P_e-P_w)\Delta\eta_{sn}-\eta_{x_P}(P_n-P_s)\Delta\xi_{we}\\
&-\left(\begin{aligned}&\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}}{\Delta\xi_{PE}}+\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}}{\Delta\xi_{WP}}+\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}}{\Delta\eta_{PN}}+\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}}{\Delta\eta_{SP}}\\
&+\frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}}{\Delta\xi_{PE}}+\frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}}{\Delta\xi_{WP}}+\frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}}{\Delta\eta_{PN}}+\frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}}{\Delta\eta_{SP}}\end{aligned}\right).u_P\\
&+\left(\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}}{\Delta\xi_{PE}}+\frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}}{\Delta\xi_{PE}}\right).u_E+\left(\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}}{\Delta\xi_{WP}}+\frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}}{\Delta\xi_{WP}}\right).u_W\\
&+\left(\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}}{\Delta\eta_{PN}}+\frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}}{\Delta\eta_{PN}}\right).u_N+\left(\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}}{\Delta\eta_{SP}}+\frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}}{\Delta\eta_{SP}}\right).u_S\\
&+S_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\rho_P \Delta\eta_{sn}\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau}.u_P-\frac{\rho_P{}^0 u_P{}^0\Delta\eta_{sn}\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau}+u_P.\|F_e,0\|-u_E.\|-F_e,0\|-u_W.\|F_w,0\|+u_P.\|-F_w,0\|+u_P.\|F_n,0\|-u_N.\|-F_n,0\|-u_S.\|F_s,0\|+u_P.\|-F_s,0\| \\
&=-\xi_{x_p}(P_e-P_w)\Delta\eta_{sn}-\eta_{x_p}(P_n-P_s)\Delta\xi_{we} \\
&-\left(\begin{aligned}&\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}}{\Delta\xi_{PE}}+\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}}{\Delta\xi_{WP}}+\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}}{\Delta\eta_{PN}}+\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}}{\Delta\eta_{SP}}\\&+\frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}}{\Delta\xi_{PE}}+\frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}}{\Delta\xi_{WP}}+\frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}}{\Delta\eta_{PN}}+\frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}}{\Delta\eta_{PN}}\end{aligned}\right).u_P \\
&+\left(\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}}{\Delta\xi_{PE}}+\frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}}{\Delta\xi_{PE}}\right).u_E+\left(\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}}{\Delta\xi_{WP}}+\frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}}{\Delta\xi_{WP}}\right).u_W \\
&+\left(\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}}{\Delta\eta_{PN}}+\frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}}{\Delta\eta_{PN}}\right).u_N+\left(\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}}{\Delta\eta_{SP}}+\frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}}{\Delta\eta_{SP}}\right).u_S \\
&+S_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\begin{aligned}&\frac{\rho_P\Delta\eta_{sn}\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau}+\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}}{\Delta\xi_{PE}}+\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}}{\Delta\xi_{WP}}+\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}}{\Delta\eta_{PN}}+\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}}{\Delta\eta_{SP}}\\&+\frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}}{\Delta\xi_{PE}}+\frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}}{\Delta\xi_{WP}}+\frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}}{\Delta\eta_{PN}}+\frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}}{\Delta\eta_{PN}}\\&+u_P.\|F_e,0\|+u_P.\|-F_w,0\|+u_P.\|F_n,0\|u_P.\|-F_s,0\|\end{aligned}\right).u_P \\
&=\left(\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}}{\Delta\xi_{PE}}+\frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}}{\Delta\xi_{PE}}+\|-F_e,0\|\right).u_E+\left(\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}}{\Delta\xi_{WP}}+\frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}}{\Delta\xi_{WP}}+\|F_w,0\|\right).u_W \\
&+\left(\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}}{\Delta\eta_{PN}}+\frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}}{\Delta\eta_{PN}}+\|-F_n,0\|\right).u_N+\left(\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}}{\Delta\eta_{SP}}+\frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}}{\Delta\eta_{SP}}+\|F_s,0\|\right).u_S \\
&+b
\end{aligned}
$$

Grid noktalarındaki hızlara göre düzenleme yapıldığında,

$$a_P\, u_P = a_E\, u_E + a_W\, u_W + a_N\, u_N + a_S\, u_S + b$$

$$a_P = \left(\begin{array}{l} \dfrac{\rho_P \Delta\eta_{sn} \Delta\xi_{we}}{\Delta\tau} + \dfrac{\xi_{x_p} \Delta\eta_{sn} (\mu+\mu_t)_e \xi_{x_e}}{\Delta\xi_{PE}} + \dfrac{\xi_{x_p} \Delta\eta_{sn} (\mu+\mu_t)_w \xi_{x_w}}{\Delta\xi_{WP}} + \dfrac{\eta_{x_p} \Delta\xi_{we} (\mu+\mu_t)_n \eta_{x_n}}{\Delta\eta_{PN}} + \dfrac{\eta_{x_p} \Delta\xi_{we} (\mu+\mu_t)_s \eta_{x_s}}{\Delta\eta_{SP}} \\ + \dfrac{\xi_{y_p} \Delta\eta_{sn} (\mu+\mu_t)_e \xi_{y_e}}{\Delta\xi_{PE}} + \dfrac{\xi_{y_p} \Delta\eta_{sn} (\mu+\mu_t)_w \xi_{y_w}}{\Delta\xi_{WP}} + \dfrac{\eta_{y_p} \Delta\xi_{we} (\mu+\mu_t)_n \eta_{y_n}}{\Delta\eta_{PN}} + \dfrac{\eta_{y_p} \Delta\xi_{we} (\mu+\mu_t)_s \eta_{y_s}}{\Delta\eta_{PN}} \\ + u_P.\|F_e,0\| + u_P.\|-F_w,0\| + u_P.\|F_n,0\| u_P.\|-F_s,0\| \end{array} \right).$$

$$a_E = \left(\frac{\xi_{x_p} \Delta\eta_{sn} (\mu+\mu_t)_e \xi_{x_e}}{\Delta\xi_{PE}} + \frac{\xi_{y_p} \Delta\eta_{sn} (\mu+\mu_t)_e \xi_{y_e}}{\Delta\xi_{PE}} + \|-F_e,0\| \right)$$

$$a_W = \left(\frac{\xi_{x_p} \Delta\eta_{sn} (\mu+\mu_t)_w \xi_{x_w}}{\Delta\xi_{WP}} + \frac{\xi_{y_p} \Delta\eta_{sn} (\mu+\mu_t)_w \xi_{y_w}}{\Delta\xi_{WP}} + \|F_w,0\| \right)$$

$$a_N = \left(\frac{\eta_{x_p} \Delta\xi_{we} (\mu+\mu_t)_n \eta_{x_n}}{\Delta\eta_{PN}} + \frac{\eta_{y_p} \Delta\xi_{we} (\mu+\mu_t)_n \eta_{y_n}}{\Delta\eta_{PN}} + \|-F_n,0\| \right)$$

$$a_S = \left(\frac{\eta_{x_p} \Delta\xi_{we} (\mu+\mu_t)_s \eta_{x_s}}{\Delta\eta_{SP}} + \frac{\eta_{y_p} \Delta\xi_{we} (\mu+\mu_t)_s \eta_{y_s}}{\Delta\eta_{SP}} + \|F_s,0\| \right)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u v)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v v)}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_t)\vec{\nabla}.\vec{V}+\rho k\right)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u v)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v v)}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial x}+(\mu+\mu_t)\frac{\partial v}{\partial y}+\rho k\right)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u v)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v v)}{\partial y}=$$

$$-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$-\left(\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho k\right)\right)$$

Yukarıdaki denkleminin sol ve sağ tarafı koordinat transformasyonu sonrasında tekrar yazılırsa,

$$(SOL)\qquad \left(\frac{\partial(\rho v)}{\partial\tau}+\xi_t\frac{\partial(\rho v)}{\partial\xi}+\eta_t\frac{\partial(\rho v)}{\partial\eta}\right)+\left(\xi_x\frac{\partial(\rho uv)}{\partial\xi}+\eta_x\frac{\partial(\rho uv)}{\partial\eta}\right)+\left(\xi_y\frac{\partial(\rho vv)}{\partial\xi}+\eta_y\frac{\partial(\rho vv)}{\partial\eta}\right)$$

$$(1)\qquad =-\xi_y\frac{\partial P}{\partial\xi}-\eta_y\frac{\partial P}{\partial\eta}$$

$$(2)\qquad +\xi_x\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right\}+\xi_x\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right\}+\eta_x\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right\}+\eta_x\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right\}$$

$$(3)\qquad +\xi_y\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right\}+\xi_y\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right\}+\eta_y\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right\}+\eta_y\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right\}$$

$$(4)\qquad +\xi_x\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right\}+\xi_x\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right\}+\eta_x\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right\}+\eta_x\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right\}$$

$$(5)\qquad +\xi_y\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right\}+\xi_y\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right\}+\eta_y\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right\}+\eta_y\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right\}$$

$$(6)\qquad -\frac{2}{3}\xi_y\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right\}-\frac{2}{3}\xi_y\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right\}-\frac{2}{3}\eta_y\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right\}-\frac{2}{3}\eta_y\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right\}$$

$$(7)\qquad -\frac{2}{3}\xi_y\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right\}-\frac{2}{3}\xi_y\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right\}-\frac{2}{3}\eta_y\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right\}-\frac{2}{3}\eta_y\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right\}$$

$$(8)\qquad -\frac{2}{3}\xi_y\frac{\partial(\rho k)}{\partial\xi}-\frac{2}{3}\eta_y\frac{\partial(\rho k)}{\partial\eta}$$

Eşitliğin her iki tarafı ıntegre edildikten sonra düzenlenip tekrar yazılırsa,

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n\left(\frac{\partial(\rho v)}{\partial\tau}+\xi_t\frac{\partial(\rho v)}{\partial\xi}+\eta_t\frac{\partial(\rho v)}{\partial\eta}+\xi_x\frac{\partial(\rho uv)}{\partial\xi}+\eta_x\frac{\partial(\rho uv)}{\partial\eta}+\xi_y\frac{\partial(\rho vv)}{\partial\xi}+\eta_y\frac{\partial(\rho vv)}{\partial\eta}\right)d\tau\,d\xi\,d\eta$$

$$=\int_0^t\int_w^e\int_s^n\left(\begin{array}{l}
-\xi_y\frac{\partial P}{\partial\xi}-\eta_y\frac{\partial P}{\partial\eta}\\
+\xi_x\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right\}+\xi_x\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right\}+\eta_x\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right\}+\eta_x\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right\}\\
+\xi_y\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right\}+\xi_y\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right\}+\eta_y\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right\}+\eta_y\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right\}\\
+\xi_x\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right\}+\xi_x\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right\}+\eta_x\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right\}+\eta_x\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right\}\\
+\xi_y\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right\}+\xi_y\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right\}+\eta_y\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right\}+\eta_y\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right\}\\
-\frac{2}{3}\xi_y\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right\}-\frac{2}{3}\xi_y\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right\}-\frac{2}{3}\eta_y\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right\}-\frac{2}{3}\eta_y\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right\}\\
-\frac{2}{3}\xi_y\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right\}-\frac{2}{3}\xi_y\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right\}-\frac{2}{3}\eta_y\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right\}-\frac{2}{3}\eta_y\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right\}\\
-\frac{2}{3}\xi_y\frac{\partial(\rho k)}{\partial\xi}-\frac{2}{3}\eta_y\frac{\partial(\rho k)}{\partial\eta}
\end{array}\right)d\tau\,d\xi\,d\eta$$

Eşitliğin sol tarafı,

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \begin{pmatrix} \dfrac{\partial(\rho v)}{\partial \tau} + \xi_t \dfrac{\partial(\rho v)}{\partial \xi} + \eta_t \dfrac{\partial(\rho v)}{\partial \eta} \\ + \xi_x \dfrac{\partial(\rho u v)}{\partial \xi} + \eta_x \dfrac{\partial(\rho u v)}{\partial \eta} \\ + \xi_y \dfrac{\partial(\rho v v)}{\partial \xi} + \eta_y \dfrac{\partial(\rho v v)}{\partial \eta} \end{pmatrix} d\tau\, d\xi\, d\eta$$

$$= (\rho_P v_P - \rho_P{}^0 v_P{}^0)\Delta\eta_{sn} .\Delta\xi_{we} + \xi_{t_P}(\rho_e v_e - \rho_w v_w)\Delta\Delta_{sn}\Delta\tau + \eta_{t_P}(\rho_n v_n - \rho_s v_s)\Delta\xi_{we}\Delta\tau$$

$$+ \xi_{x_P}(\rho_e u_e v_e - \rho_w u_w v_w)\Delta\eta_{sn}\Delta\tau + \eta_{x_P}(\rho_n u_n v_n - \rho_s u_s v_s)\Delta\xi_{we}\Delta\tau$$

$$+ \xi_{y_P}(\rho_e v_e v_e - \rho_w v_w v_w)\Delta\eta_{sn}\Delta\tau + \eta_{y_P}(\rho_n v_n v_n - \rho_s v_s v_s)\Delta\xi_{we}\Delta\tau$$

Eşitliğin sağ tarafı 1 ve 2'nci sıra,

$$-\int_0^t\int_w^e\int_s^n\left(\xi_y\frac{\partial P}{\partial\xi}+\eta_y\frac{\partial P}{\partial\eta}\right)d\tau\,d\xi\,d\eta=-\left(\xi_{y_p}(P_e-P_w)\Delta\eta_{sn}+\eta_{y_p}(P_n-P_s)\Delta\xi_{we}\right)$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n\xi_x\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right\}d\tau\,d\xi\,d\eta=\xi_{x_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right)_e-\left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right)_w\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$=\xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}\left(\frac{v_E-v_P}{\Delta\xi_{PE}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}\left(\frac{v_P-v_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n\xi_x\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right\}d\tau\,d\xi\,d\eta=\xi_{x_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right)_e-\left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right)_w\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$=\xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{x_e}\left(\frac{v_{ne}-v_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\eta_{x_w}\left(\frac{v_{nw}-v_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n\eta_x\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right\}d\tau\,d\xi\,d\eta=\eta_{x_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right)_n-\left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_x\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right)_s\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$=\eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{x_n}\left(\frac{v_{ne}-v_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\xi_{x_s}\left(\frac{v_{se}-v_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n\eta_x\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right\}d\tau\,d\xi\,d\eta=\eta_{x_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right)_n-\left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_x\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right)_s\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$=\eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}\left(\frac{v_N-v_P}{\Delta\eta_{PN}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}\left(\frac{v_P-v_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

Eşitliğin sağ tarafı 3'ncü sıra,

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \xi_y \left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y \frac{\partial v}{\partial \xi}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \xi_{y_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_y \frac{\partial v}{\partial \xi}\right]\right)_e - \left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_y \frac{\partial v}{\partial \xi}\right]\right)_w\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$= \xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \xi_{y_e}\left(\frac{v_E - v_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \xi_{y_w}\left(\frac{v_P - v_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \xi_y \left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \xi_{y_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta}\right]\right)_e - \left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta}\right]\right)_w\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$= \xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \eta_{y_e}\left(\frac{v_{ne} - v_{se}}{\Delta\eta_{ne,se}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \eta_{y_w}\left(\frac{v_{nw} - v_{sw}}{\Delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \eta_y \left\{\frac{\partial}{\partial \eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y \frac{\partial v}{\partial \xi}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \eta_{y_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_y \frac{\partial v}{\partial \xi}\right]\right)_n - \left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_y \frac{\partial v}{\partial \xi}\right]\right)_s\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$= \eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \xi_{y_n}\left(\frac{v_{ne} - v_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \xi_{y_s}\left(\frac{v_{se} - v_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \eta_y \left\{\frac{\partial}{\partial \eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \eta_{y_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta}\right]\right)_n - \left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta}\right]\right)_s\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$= \eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \eta_{y_n}\left(\frac{v_N - v_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \eta_{y_s}\left(\frac{v_P - v_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

Eşitliğin sağ tarafı 4’ncü sıra,

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \xi_x\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right\}d\tau\, d\xi\, d\eta = \xi_{x_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right)_e - \left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right)_w\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$= \xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}\left(\frac{u_E-u_P}{\Delta\xi_{PE}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}\left(\frac{u_P-u_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \xi_x\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right\}d\tau\, d\xi\, d\eta = \xi_{x_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right)_e - \left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right)_w\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$= \xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{y_e}\left(\frac{u_{ne}-u_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\eta_{y_w}\left(\frac{u_{nw}-u_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \eta_x\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right\}d\tau\, d\xi\, d\eta = \eta_{x_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right)_n - \left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right)_s\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$= \eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{y_n}\left(\frac{u_{ne}-u_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\xi_{y_s}\left(\frac{u_{se}-u_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \eta_x\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right\}d\tau\, d\xi\, d\eta = \eta_{x_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right)_n - \left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\right)_s\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$= \eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}\left(\frac{u_N-u_P}{\Delta\eta_{PN}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}\left(\frac{u_P-u_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

Eşitliğin sağ tarafı 5'nci sıra,

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \xi_y \left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial v}{\partial \xi}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \xi_{y_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right)_e - \left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right)_w\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$= \xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}\left(\frac{v_E-v_P}{\Delta\xi_{PE}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}\left(\frac{v_P-v_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \xi_y \left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial v}{\partial \eta}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \xi_{y_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right)_e - \left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right)_w\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$= \xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{y_e}\left(\frac{v_{ne}-v_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\eta_{y_w}\left(\frac{v_{nw}-v_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \eta_y \left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial v}{\partial \xi}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \eta_{y_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right)_n - \left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right)_s\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$= \eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{y_n}\left(\frac{v_{ne}-v_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\xi_{y_s}\left(\frac{v_{se}-v_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \eta_y \left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial v}{\partial \eta}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \eta_{y_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right)_n - \left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right)_s\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$= \eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}\left(\frac{v_N-v_P}{\Delta\eta_{PN}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}\left(\frac{v_P-v_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

Eşitliğin sağ tarafı 6’ncı sıra,

$$\frac{2}{3}\int_0^t\int_w^e\int_s^n \xi_y \left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = -\frac{2}{3}\xi_{y_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi}\right]\right)_e - \left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi}\right]\right)_w\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$= -\frac{2}{3}\xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \xi_{x_e}\left(\frac{u_E-u_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \xi_{x_w}\left(\frac{u_P-u_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$\frac{2}{3}\int_0^t\int_w^e\int_s^n \xi_y \left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = -\frac{2}{3}\xi_{y_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta}\right]\right)_e - \left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta}\right]\right)_w\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$= -\frac{2}{3}\xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \eta_{x_e}\left(\frac{u_{ne}-u_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \eta_{x_w}\left(\frac{u_{nw}-u_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$\frac{2}{3}\int_0^t\int_w^e\int_s^n \eta_y \left\{\frac{\partial}{\partial \eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = -\frac{2}{3}\eta_{y_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi}\right]\right)_n - \left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi}\right]\right)_s\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$= -\frac{2}{3}\eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \xi_{x_n}\left(\frac{u_{ne}-u_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \xi_{x_s}\left(\frac{u_{se}-u_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$\frac{2}{3}\int_0^t\int_w^e\int_s^n \eta_y \left\{\frac{\partial}{\partial \eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = -\frac{2}{3}\eta_{y_p}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta}\right]\right)_n - \left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta}\right]\right)_s\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$= -\frac{2}{3}\eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \eta_{x_n}\left(\frac{u_N-u_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \eta_{x_s}\left(\frac{u_P-u_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

Eşitliğin sağ tarafı 7 ve 8'nci sıra,

$$\frac{2}{3}\int_0^t\int_w^e\int_s^n \xi_y \left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right\}d\tau\, d\xi\, d\eta = -\frac{2}{3}\xi_{y_P}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right)_e - \left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right)_w\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$= -\frac{2}{3}\xi_{y_P}.\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}\left(\frac{v_E - v_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - (\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}\left(\frac{v_P - v_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$\frac{2}{3}\int_0^t\int_w^e\int_s^n \xi_y \left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right\}d\tau\, d\xi\, d\eta = -\frac{2}{3}\xi_{y_P}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right)_e - \left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right)_w\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$= -\frac{2}{3}\xi_{y_P}.\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{y_e}\left(\frac{v_{ne} - v_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right) - (\mu+\mu_t)_w\eta_{y_w}\left(\frac{v_{nw} - v_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$\frac{2}{3}\int_0^t\int_w^e\int_s^n \eta_y \left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right\}d\tau\, d\xi\, d\eta = -\frac{2}{3}\eta_{y_P}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right)_n - \left(\left[(\mu+\mu_t)\xi_y\frac{\partial v}{\partial\xi}\right]\right)_s\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$= -\frac{2}{3}\eta_{y_P}.\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{y_n}\left(\frac{v_{ne} - v_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - (\mu+\mu_t)_s\xi_{y_s}\left(\frac{v_{se} - v_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$\frac{2}{3}\int_0^t\int_w^e\int_s^n \eta_y \left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right\}d\tau\, d\xi\, d\eta = -\frac{2}{3}\eta_{y_P}.\left[\left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right)_n - \left(\left[(\mu+\mu_t)\eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\right)_s\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$= -\frac{2}{3}\eta_{y_P}.\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}\left(\frac{v_N - v_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - (\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}\left(\frac{v_P - v_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$\frac{2}{3}\int_0^t\int_w^e\int_s^n \xi_y\frac{\partial(\rho k)}{\partial\xi}d\tau\, d\xi\, d\eta = -\frac{2}{3}\xi_{y_P}(\rho_e k_e - \rho_w k_w)\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$\frac{2}{3}\int_0^t\int_w^e\int_s^n \eta_y\frac{\partial(\rho k)}{\partial\eta}d\tau\, d\xi\, d\eta = -\frac{2}{3}\eta_{y_P}(\rho_n k_n - \rho_s k_s)\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

Yukarıdaki denklemler ana denkleme koyulup, zamana bölünür ve düzenlenirse,

$$
\begin{aligned}
&\frac{(\rho_P v_P - \rho_P{}^0 v_P{}^0)\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau} + \rho_e \Delta\eta_{sn}(\xi_{t_p} + \xi_{x_p} u_e + \xi_{y_p} v_e).v_e - \rho_w \Delta\eta_{sn}(\xi_{t_p} + \xi_{x_p} u_w + \xi_{y_p} v_w).v_w \\
&+ \rho_n \Delta\xi_{we}(\eta_{t_p} + \eta_{x_p} u_n + \eta_{y_p} v_n).v_n - \rho_s \Delta\xi_{we}(\eta_{t_p} + \eta_{x_p} u_s + \eta_{y_p} v_s).v_s \\
&= -\xi_{y_p}(P_e - P_w)\Delta\eta_{sn} - \eta_{y_p}(P_n - P_s)\Delta\xi_{we} \\
&+ \xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \xi_{x_e}\left(\frac{v_E - v_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \xi_{x_w}\left(\frac{v_P - v_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} + \xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \eta_{x_e}\left(\frac{v_{ne} - v_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \eta_{x_w}\left(\frac{v_{nw} - v_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} \\
&+ \eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \xi_{x_n}\left(\frac{v_{ne} - v_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \xi_{x_s}\left(\frac{v_{se} - v_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we} + \eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \eta_{x_n}\left(\frac{v_N - v_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \eta_{x_s}\left(\frac{v_P - v_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we} \\
&+ \xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \xi_{y_e}\left(\frac{v_E - v_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \xi_{y_w}\left(\frac{v_P - v_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} + \xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \eta_{y_e}\left(\frac{v_{ne} - v_{se}}{\Delta\eta_{ne,se}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \eta_{y_w}\left(\frac{v_{nw} - v_{sw}}{\Delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} \\
&+ \eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \xi_{y_n}\left(\frac{v_{ne} - v_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \xi_{y_s}\left(\frac{v_{se} - v_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we} + \eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \eta_{y_n}\left(\frac{v_N - v_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \eta_{y_s}\left(\frac{v_P - v_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\Delta_{we} \\
&+ \xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \xi_{y_e}\left(\frac{u_E - u_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \xi_{y_w}\left(\frac{u_P - u_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} + \xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \eta_{y_e}\left(\frac{u_{ne} - u_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \eta_{y_w}\left(\frac{u_{nw} - u_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} \\
&+ \eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \xi_{y_n}\left(\frac{u_{ne} - u_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \xi_{y_s}\left(\frac{u_{se} - u_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we} + \eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \eta_{y_n}\left(\frac{u_N - u_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \eta_{y_s}\left(\frac{u_P - u_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we} \\
&+ \xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \xi_{y_e}\left(\frac{v_E - v_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \xi_{y_w}\left(\frac{v_P - v_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} + \xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \eta_{y_e}\left(\frac{v_{ne} - v_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \eta_{y_w}\left(\frac{v_{nw} - v_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} \\
&+ \eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \xi_{y_n}\left(\frac{v_{ne} - v_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \xi_{y_s}\left(\frac{v_{se} - v_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we} + \eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \eta_{y_n}\left(\frac{v_N - v_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \eta_{y_s}\left(\frac{v_P - v_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}
\end{aligned}
$$

$$-\frac{2}{3}\xi_{y_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}\left(\frac{u_E-u_P}{\Delta\xi_{PE}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}\left(\frac{u_P-u_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}-\frac{2}{3}\xi_{y_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{x_e}\left(\frac{u_{ne}-u_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\eta_{x_w}\left(\frac{u_{nw}-u_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}$$

$$-\frac{2}{3}\eta_{y_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{x_n}\left(\frac{u_{ne}-u_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\xi_{x_s}\left(\frac{u_{se}-u_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}-\frac{2}{3}\eta_{y_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}\left(\frac{u_N-u_P}{\Delta\eta_{PN}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}\left(\frac{u_P-u_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}$$

$$-\frac{2}{3}\xi_{y_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}\left(\frac{v_E-v_P}{\Delta\xi_{PE}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}\left(\frac{v_P-v_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}-\frac{2}{3}\xi_{y_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{y_e}\left(\frac{v_{ne}-v_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\eta_{y_w}\left(\frac{v_{nw}-v_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}$$

$$-\frac{2}{3}\eta_{y_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{y_n}\left(\frac{v_{ne}-v_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\xi_{y_s}\left(\frac{v_{se}-v_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}-\frac{2}{3}\eta_{y_p}\cdot\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}\left(\frac{v_N-v_P}{\Delta\eta_{PN}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}\left(\frac{v_P-v_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}$$

$$-\frac{2}{3}\xi_{y_P}(\rho_e k_e-\rho_w k_w)\Delta\eta_{sn}-\frac{2}{3}\eta_{y_P}(\rho_n k_n-\rho_s k_s)\Delta\xi_{we}$$

$$\frac{(\rho_P v_P - \rho_P^{0} v_P^{0})\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau} + \rho_e \Delta\eta_{sn}(\xi_{t_P} + \xi_{x_P}u_e + \xi_{y_P}v_e).u_e - \rho_w \Delta\eta_{sn}(\xi_{t_P} + \xi_{x_P}u_w + \xi_{y_P}v_w).u_w + \rho_n \Delta\xi_{we}(\eta_{t_P} + \eta_{x_P}u_n + \eta_{y_P}v_n).u_n - \rho_s \Delta\xi_{we}(\eta_{t_P} + \eta_{x_P}u_s + \eta_{y_P}v_s).u_s = -\xi_{x_P}(P_e - P_w)\Delta\eta_{sn} - \eta_{x_P}(P_n - P_s)\Delta\xi_{we}.$$

$$+ \xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \xi_{x_e}\left(\frac{v_E - v_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \xi_{x_w}\left(\frac{v_P - v_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} + \xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \eta_{x_e}\left(\frac{v_{ne} - v_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \eta_{x_w}\left(\frac{v_{nw} - v_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\Delta_{sn} + \eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \xi_{x_n}\left(\frac{v_{ne} - v_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \xi_{x_s}\left(\frac{v_{se} - v_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}$$

$$+ \eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \eta_{x_n}\left(\frac{v_N - v_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \eta_{x_s}\left(\frac{v_P - v_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we} + \xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \xi_{y_e}\left(\frac{v_E - v_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \xi_{y_w}\left(\frac{v_P - v_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} + \xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \eta_{y_e}\left(\frac{v_{ne} - v_{se}}{\Delta\eta_{ne,se}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \eta_{y_w}\left(\frac{v_{nw} - v_{sw}}{\Delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}$$

$$+ \eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \xi_{y_n}\left(\frac{v_{ne} - v_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \xi_{y_s}\left(\frac{v_{se} - v_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we} + \eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \eta_{y_n}\left(\frac{v_N - v_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \eta_{y_s}\left(\frac{v_P - v_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we} + S_1$$

$$S_1 = \xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \xi_{y_e}\left(\frac{u_E - u_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \xi_{y_w}\left(\frac{u_P - u_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} + \xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \eta_{y_e}\left(\frac{u_{ne} - u_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \eta_{y_w}\left(\frac{u_{nw} - u_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\Delta_{sn} + \eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \xi_{y_n}\left(\frac{u_{ne} - u_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \xi_{y_s}\left(\frac{u_{se} - u_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}$$

$$+ \eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \eta_{y_n}\left(\frac{u_N - u_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \eta_{y_s}\left(\frac{u_P - u_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we} + \xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \xi_{y_e}\left(\frac{v_E - v_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \xi_{y_w}\left(\frac{v_P - v_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} + \xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \eta_{y_e}\left(\frac{v_{ne} - v_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \eta_{y_w}\left(\frac{v_{nw} - v_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}$$

$$+ \eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \xi_{y_n}\left(\frac{v_{ne} - v_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \xi_{y_s}\left(\frac{v_{se} - v_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we} + \eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \eta_{y_n}\left(\frac{v_N - v_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \eta_{y_s}\left(\frac{v_P - v_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}$$

$$- \frac{2}{3}\xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \xi_{x_e}\left(\frac{u_E - u_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \xi_{x_w}\left(\frac{u_P - u_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} - \frac{2}{3}\xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \eta_{x_e}\left(\frac{u_{ne} - u_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \eta_{x_w}\left(\frac{u_{nw} - u_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}$$

$$- \frac{2}{3}\eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \xi_{x_n}\left(\frac{u_{ne} - u_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \xi_{x_s}\left(\frac{u_{se} - u_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we} - \frac{2}{3}\eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \eta_{x_n}\left(\frac{u_N - u_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \eta_{x_s}\left(\frac{u_P - u_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}$$

$$- \frac{2}{3}\xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \xi_{y_e}\left(\frac{v_E - v_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \xi_{y_w}\left(\frac{v_P - v_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} - \frac{2}{3}\xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e \eta_{y_e}\left(\frac{v_{ne} - v_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right) - (\mu+\mu_t)_w \eta_{y_w}\left(\frac{v_{nw} - v_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}$$

$$- \frac{2}{3}\eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \xi_{y_n}\left(\frac{v_{ne} - v_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \xi_{y_s}\left(\frac{v_{se} - v_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we} - \frac{2}{3}\eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n \eta_{y_n}\left(\frac{v_N - v_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - (\mu+\mu_t)_s \eta_{y_s}\left(\frac{v_P - v_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}$$

$$- \frac{2}{3}\xi_{y_P}(\rho_e k_e - \rho_w k_w)\Delta\Delta_{sn} - \frac{2}{3}\eta_{y_P}(\rho_n k_n - \rho_s k_s)\Delta\Delta_{we}$$

EK-2 (Devam) y – yönündeki momentum denkleminin ayrıklaştırılması

$$\frac{(\rho_P v_P - \rho_P^{0} v_P^{0})\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau} + \rho_e \Delta\eta_{sn}(\xi_{t_P} + \xi_{x_P}u_e + \xi_{y_P}v_e).u_e - \rho_w\Delta\eta_{sn}(\xi_{t_P} + \xi_{x_P}u_w + \xi_{y_P}v_w).u_w + \rho_n\Delta\xi_{we}(\eta_{t_P} + \eta_{x_P}u_n + \eta_{y_P}v_n).u_n - \rho_s\Delta\xi_{we}(\eta_{t_P} + \eta_{x_P}u_s + \eta_{y_P}v_s).u_s = -\xi_{x_P}(P_e - P_w)\Delta\eta_{sn} - \eta_{x_P}(P_n - P_s)\Delta\xi_{we}$$

$$+\xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}\left(\frac{v_E - v_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - (\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}\left(\frac{v_P - v_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} + \eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}\left(\frac{v_N - v_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - (\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}\left(\frac{v_P - v_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}$$

$$+\xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}\left(\frac{v_E - v_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - (\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}\left(\frac{v_P - v_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} + \eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}\left(\frac{v_N - v_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - (\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}\left(\frac{v_P - v_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we} + S_2$$

$$S_2 = \xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{x_e}\left(\frac{v_{ne} - v_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right) - (\mu+\mu_t)_w\eta_{x_w}\left(\frac{v_{nw} - v_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} + \eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{x_n}\left(\frac{v_{ne} - v_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - (\mu+\mu_t)_s\xi_{x_s}\left(\frac{v_{se} - v_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we} + \xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{y_e}\left(\frac{v_{ne} - v_{se}}{\Delta\eta_{ne,se}}\right) - (\mu+\mu_t)_w\eta_{y_w}\left(\frac{v_{nw} - v_{sw}}{\Delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}$$

$$+\eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{y_n}\left(\frac{v_{ne} - v_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - (\mu+\mu_t)_s\xi_{y_s}\left(\frac{v_{se} - v_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we} + \xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}\left(\frac{u_E - u_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - (\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}\left(\frac{u_P - u_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} + \xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{y_e}\left(\frac{u_{ne} - u_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right) - (\mu+\mu_t)_w\eta_{y_w}\left(\frac{u_{nw} - u_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}$$

$$+\eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{y_n}\left(\frac{u_{ne} - u_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - (\mu+\mu_t)_s\xi_{y_s}\left(\frac{u_{se} - u_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we} + \eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}\left(\frac{u_N - u_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - (\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}\left(\frac{u_P - u_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we} + \xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}\left(\frac{v_E - v_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - (\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}\left(\frac{v_P - v_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}$$

$$+\xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{y_e}\left(\frac{v_{ne} - v_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right) - (\mu+\mu_t)_w\eta_{y_w}\left(\frac{v_{nw} - v_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} + \eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{y_n}\left(\frac{v_{ne} - v_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - (\mu+\mu_t)_s\xi_{y_s}\left(\frac{v_{se} - v_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we} + \eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}\left(\frac{v_N - v_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - (\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}\left(\frac{v_P - v_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}$$

$$-\frac{2}{3}\xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}\left(\frac{u_E - u_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - (\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}\left(\frac{u_P - u_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} - \frac{2}{3}\xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{x_e}\left(\frac{u_{ne} - u_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right) - (\mu+\mu_t)_w\eta_{x_w}\left(\frac{u_{nw} - u_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}$$

$$-\frac{2}{3}\eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{x_n}\left(\frac{u_{ne} - u_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - (\mu+\mu_t)_s\xi_{x_s}\left(\frac{u_{se} - u_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we} - \frac{2}{3}\eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}\left(\frac{u_N - u_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - (\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}\left(\frac{u_P - u_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}$$

$$-\frac{2}{3}\xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}\left(\frac{v_E - v_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - (\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}\left(\frac{v_P - v_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} - \frac{2}{3}\xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{y_e}\left(\frac{v_{ne} - v_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right) - (\mu+\mu_t)_w\eta_{y_w}\left(\frac{v_{nw} - v_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}$$

$$-\frac{2}{3}\eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{y_n}\left(\frac{v_{ne} - v_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - (\mu+\mu_t)_s\xi_{y_s}\left(\frac{v_{se} - v_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we} - \frac{2}{3}\eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}\left(\frac{v_N - v_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - (\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}\left(\frac{v_P - v_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}$$

$$-\frac{2}{3}\xi_{y_P}(\rho_e k_e - \rho_w k_w)\Delta\eta_{sn} - \frac{2}{3}\eta_{y_P}(\rho_n k_n - \rho_s k_s)\Delta\xi_{we}$$

$$\frac{(\rho_P v_P - \rho_P{}^0 v_P{}^0)\Delta\eta_{sn}\,.\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau} + \rho_e\,\Delta\eta_{sn}(\xi_{t_P} + \xi_{x_P} u_e + \xi_{y_P} v_e).v_e - \rho_w \Delta\eta_{sn}(\xi_{t_P} + \xi_{x_P} u_w + \xi_{y_P} v_w).v_w$$

$$+ \rho_n \Delta\xi_{we}(\eta_{t_P} + \eta_{x_P} u_n + \eta_{y_P} v_n).v_n - \rho_s \Delta\xi_{we}(\eta_{t_P} + \eta_{x_P} u_s + \eta_{y_P} v_s).v_s$$

$$= -\xi_{y_p}(P_e - P_w)\Delta\eta_{sn} - \eta_{y_p}(P_n - P_s)\Delta\xi_{we}$$

$$+ \frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e \xi_{x_e}}{\Delta\xi_{PE}} v_E - \frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e \xi_{x_e}}{\Delta\xi_{PE}} v_P - \frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w \xi_{x_w}}{\Delta\xi_{WP}} v_P + \frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w \xi_{x_w}}{\Delta\xi_{WP}} v_W$$

$$+ \frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n \eta_{x_n}}{\Delta\eta_{PN}} v_N - \frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n \eta_{x_n}}{\Delta\eta_{PN}} v_P - \frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s \eta_{x_s}}{\Delta\eta_{SP}} v_P + \frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s \eta_{x_s}}{\Delta\eta_{SP}} v_S$$

$$+ \frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e \xi_{y_e}}{\Delta\xi_{PE}} v_E - \frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e \xi_{y_e}}{\Delta\xi_{PE}} v_P - \frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w \xi_{y_w}}{\Delta\xi_{WP}} v_P + \frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w \xi_{y_w}}{\Delta\xi_{WP}} v_W$$

$$+ \frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n \eta_{y_n}}{\Delta\eta_{PN}} v_N - \frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n \eta_{y_n}}{\Delta\eta_{PN}} v_P - \frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s \eta_{y_s}}{\Delta\eta_{SP}} v_P + \frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s \eta_{y_s}}{\Delta\eta_{SP}} v_S$$

$$+ S_2$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{(\rho_P v_P - \rho_P{}^0 v_P{}^0)\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau} + F_e.v_e - F_w.v_w + F_n.v_n - F_s.v_s \\
&= -\xi_{y_P}(P_e - P_w)\Delta\eta_{sn} - \eta_{y_P}(P_n - P_s)\Delta\xi_{we} \\
&-\left(\begin{aligned}
&\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}}{\Delta\xi_{PE}} + \frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}}{\Delta\xi_{WP}} + \frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}}{\Delta\eta_{PN}} + \frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}}{\Delta\eta_{SP}} \\
&+\frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}}{\Delta\xi_{PE}} + \frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}}{\Delta\xi_{WP}} + \frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}}{\Delta\eta_{PN}} + \frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}}{\Delta\eta_{SP}}
\end{aligned}\right).v_P \\
&+\left(\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}}{\Delta\xi_{PE}} + \frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}}{\Delta\xi_{PE}}\right).v_E + \left(\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}}{\Delta\xi_{WP}} + \frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}}{\Delta\xi_{WP}}\right).v_W \\
&+\left(\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}}{\Delta\eta_{PN}} + \frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}}{\Delta\eta_{PN}}\right).v_N + \left(\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}}{\Delta\eta_{SP}} + \frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}}{\Delta\eta_{SP}}\right).v_S \\
&+ S_2
\end{aligned}
$$

EK-2 (Devam) y – yönündeki momentum denkleminin ayrıklaştırılması

$$
\begin{aligned}
&\frac{\rho_P \Delta\eta_{sn}\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau}.v_P - \frac{\rho_P{}^{0} v_P{}^{0}\Delta\eta_{sn}\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau} + v_P.\|F_e,0\| - v_E.\|-F_e,0\| - v_W.\|F_w,0\| + v_P.\|-F_w,0\| + v_P.\|F_n,0\| - v_N.\|-F_n,0\| - v_S.\|F_s,0\| + v_P.\|-F_s,0\| \\
&= -\xi_{y_p}(P_e - P_w)\Delta\eta_{sn} - \eta_{y_p}(P_n - P_s)\Delta\xi_{we} \\
&- \left(\begin{aligned}&\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}}{\Delta\xi_{PE}} + \frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}}{\Delta\xi_{WP}} + \frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}}{\Delta\eta_{PN}} + \frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}}{\Delta\eta_{SP}} \\ &+ \frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}}{\Delta\xi_{PE}} + \frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}}{\Delta\xi_{WP}} + \frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}}{\Delta\eta_{PN}} + \frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}}{\Delta\eta_{PN}}\end{aligned}\right).v_P \\
&+ \left(\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}}{\Delta\xi_{PE}} + \frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}}{\Delta\xi_{PE}}\right).v_E + \left(\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}}{\Delta\xi_{WP}} + \frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}}{\Delta\xi_{WP}}\right).v_W \\
&+ \left(\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}}{\Delta\eta_{PN}} + \frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}}{\Delta\eta_{PN}}\right).v_N + \left(\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}}{\Delta\eta_{SP}} + \frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}}{\Delta\eta_{SP}}\right).v_S \\
&+ S_2
\end{aligned}
$$

$$
\left(
\begin{aligned}
&\frac{\rho_P \Delta\eta_{sn}\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau}+\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}}{\Delta\xi_{PE}}+\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}}{\Delta\xi_{WP}}+\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}}{\Delta\eta_{PN}}+\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}}{\Delta\eta_{SP}}\\
&+\frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}}{\Delta\xi_{PE}}+\frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}}{\Delta\xi_{WP}}+\frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}}{\Delta\eta_{PN}}+\frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}}{\Delta\eta_{PN}}\\
&+\|F_e,0\|+\|-F_w,0\|+\|F_n,0\|+\|-F_s,0\|
\end{aligned}
\right).v_P
$$

$$
=\left(\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}}{\Delta\xi_{PE}}+\frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}}{\Delta\xi_{PE}}+\|-F_e,0\|\right).v_E+\left(\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}}{\Delta\xi_{WP}}+\frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}}{\Delta\xi_{WP}}+\|F_w,0\|\right).v_W
$$

$$
+\left(\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}}{\Delta\eta_{PN}}+\frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}}{\Delta\eta_{PN}}+\|-F_n,0\|\right).v_N+\left(\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}}{\Delta\eta_{SP}}+\frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}}{\Delta\eta_{SP}}+\|F_s,0\|\right).v_S
$$

$$
+b
$$

Grid noktalarındaki hızlara göre düzenleme yapıldığında,

$$a_P\, v_P = a_E\, v_E + a_W\, v_W + a_N\, v_N + a_S\, v_S + b$$

$$a_P = \left(\begin{array}{l} \dfrac{\rho_P \Delta\eta_{sn}\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau} + \dfrac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}}{\Delta\xi_{PE}} + \dfrac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}}{\Delta\xi_{WP}} + \dfrac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}}{\Delta\eta_{PN}} + \dfrac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}}{\Delta\eta_{SP}} \\ + \dfrac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}}{\Delta\xi_{PE}} + \dfrac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}}{\Delta\xi_{WP}} + \dfrac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}}{\Delta\eta_{PN}} + \dfrac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}}{\Delta\eta_{PN}} \\ + u_P.\|F_e,0\| + u_P.\|-F_w,0\| + u_P.\|F_n,0\| u_P.\|-F_s,0\| \end{array} \right).$$

$$a_E = \left(\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}}{\Delta\xi_{PE}} + \frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}}{\Delta\xi_{PE}} + \|-F_e,0\| \right)$$

$$a_W = \left(\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}}{\Delta\xi_{WP}} + \frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}}{\Delta\xi_{WP}} + \|F_w,0\| \right)$$

$$a_N = \left(\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}}{\Delta\eta_{PN}} + \frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}}{\Delta\eta_{PN}} + \|-F_n,0\| \right)$$

$$a_S = \left(\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}}{\Delta\eta_{SP}} + \frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}}{\Delta\eta_{SP}} + \|F_s,0\| \right)$$

$$
b=\left(\begin{array}{l}
\xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{x_e}\left(\dfrac{v_{ne}-v_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\eta_{x_w}\left(\dfrac{v_{nw}-v_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}+\eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{x_n}\left(\dfrac{v_{ne}-v_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\xi_{x_s}\left(\dfrac{v_{se}-v_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}\\
+\xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{y_e}\left(\dfrac{v_{ne}-v_{se}}{\Delta\eta_{ne,se}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\eta_{y_w}\left(\dfrac{v_{nw}-v_{sw}}{\Delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}+\eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{y_n}\left(\dfrac{v_{ne}-v_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\xi_{y_s}\left(\dfrac{v_{se}-v_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}\\
+\xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}\left(\dfrac{u_E-u_P}{\Delta\xi_{PE}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}\left(\dfrac{u_P-u_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}+\xi_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{y_e}\left(\dfrac{u_{ne}-u_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\eta_{y_w}\left(\dfrac{u_{nw}-u_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}\\
+\eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{y_n}\left(\dfrac{u_{ne}-u_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\xi_{y_s}\left(\dfrac{u_{se}-u_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}+\eta_{x_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}\left(\dfrac{u_N-u_P}{\Delta\eta_{PN}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}\left(\dfrac{u_P-u_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}\\
+\xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}\left(\dfrac{v_E-v_P}{\Delta\xi_{PE}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}\left(\dfrac{v_P-v_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}+\xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{y_e}\left(\dfrac{v_{ne}-v_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\eta_{y_w}\left(\dfrac{v_{nw}-v_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}\\
+\eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{y_n}\left(\dfrac{v_{ne}-v_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\xi_{y_s}\left(\dfrac{v_{se}-v_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}+\eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}\left(\dfrac{v_N-v_P}{\Delta\eta_{PN}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}\left(\dfrac{v_P-v_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}\\
-\dfrac{2}{3}\xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}\left(\dfrac{u_E-u_P}{\Delta\xi_{PE}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}\left(\dfrac{u_P-u_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}-\dfrac{2}{3}\xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{x_e}\left(\dfrac{u_{ne}-u_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\eta_{x_w}\left(\dfrac{u_{nw}-u_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}\\
-\dfrac{2}{3}\eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{x_n}\left(\dfrac{u_{ne}-u_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\xi_{x_s}\left(\dfrac{u_{se}-u_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}-\dfrac{2}{3}\eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}\left(\dfrac{u_N-u_P}{\Delta\eta_{PN}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}\left(\dfrac{u_P-u_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}\\
-\dfrac{2}{3}\xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}\left(\dfrac{v_E-v_P}{\Delta\xi_{PE}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}\left(\dfrac{v_P-v_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}-\dfrac{2}{3}\xi_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_e\eta_{y_e}\left(\dfrac{v_{ne}-v_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right)-(\mu+\mu_t)_w\eta_{y_w}\left(\dfrac{v_{nw}-v_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}\\
-\dfrac{2}{3}\eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\xi_{y_n}\left(\dfrac{v_{ne}-v_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\xi_{y_s}\left(\dfrac{v_{se}-v_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}-\dfrac{2}{3}\eta_{y_p}.\left[(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}\left(\dfrac{v_N-v_P}{\Delta\eta_{PN}}\right)-(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}\left(\dfrac{v_P-v_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}\\
-\dfrac{2}{3}\xi_{y_P}(\rho_e k_e-\rho_w k_w)\Delta\eta_{sn}-\dfrac{2}{3}\eta_{y_P}(\rho_n k_n-\rho_s k_s)\Delta\Delta_{we}+\dfrac{\rho_P{}^0 v_P{}^0\Delta\eta_{sn}\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau}-\xi_{y_P}(P_e-P_w)\Delta\eta_{sn}-\eta_{y_P}(P_n-P_s)\Delta\xi_{we}
\end{array}\right)
$$

EK-3 Türbülans kinetik enerjisi (k) denkleminin ayrıklaştırılması

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u k)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v k)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(\mu+\mu_t)}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{(\mu+\mu_t)}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial y}\right)+\mu_t\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

$$+2\mu_t\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]-\frac{2}{3}\left((\mu+\mu_t)\vec{\nabla}.\vec{V}+\rho k\right)\vec{\nabla}.\vec{V}-\rho\,\varepsilon$$

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u k)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v k)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(\mu+\mu_t)}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{(\mu+\mu_t)}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial y}\right)+\mu_t\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

$$+2\mu_t\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]--\frac{2}{3}\left((\mu+\mu_t)\vec{\nabla}.\vec{V}+\rho k\right)\vec{\nabla}.\vec{V}-\rho\,\varepsilon$$

Yukarıdaki denkleminin sol ve sağ tarafı koordinat transformasyonu sonrasında tekrar yazılırsa,

SOL:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial \tau}+\xi_t\frac{\partial(\rho k)}{\partial \xi}+\eta_t\frac{\partial(\rho k)}{\partial \eta}+\xi_x\frac{\partial(\rho u k)}{\partial \xi}+\eta_x\frac{\partial(\rho u k)}{\partial \eta}+\xi_y\frac{\partial(\rho v k)}{\partial \xi}+\eta_y\frac{\partial(\rho v k)}{\partial \eta}$$

SAG:

(1)

$$=\xi_x\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_x}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial \xi}\right]\right\}+\xi_x\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_x}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial \eta}\right]\right\}+\eta_x\left\{\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_x}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial \xi}\right]\right\}+\eta_x\left\{\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_x}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial \eta}\right]\right\}$$

(2)

$$+\xi_y\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_y}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial \xi}\right]\right\}+\xi_y\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_y}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial \eta}\right]\right\}+\eta_y\left\{\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_y}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial \xi}\right]\right\}+\eta_y\left\{\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_y}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial \eta}\right]\right\}$$

(3)

$$+\mu_t\left[\xi_y\frac{\partial u}{\partial \xi}+\eta_y\frac{\partial u}{\partial \eta}+\xi_x\frac{\partial v}{\partial \xi}+\eta_x\frac{\partial v}{\partial \eta}\right]^2$$

(4)

$$+2\,\mu_t\left[\left(\xi_x\frac{\partial u}{\partial \xi}+\eta_x\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2+\left(\xi_y\frac{\partial v}{\partial \xi}+\eta_y\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2\right]$$

(5)

$$-\frac{2}{3}\left[(\mu+\mu_t)\left(\xi_x\frac{\partial u}{\partial \xi}+\eta_x\frac{\partial u}{\partial \eta}+\xi_y\frac{\partial v}{\partial \xi}+\eta_y\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)+\rho k\right]\left(\xi_x\frac{\partial u}{\partial \xi}+\eta_x\frac{\partial u}{\partial \eta}+\xi_y\frac{\partial v}{\partial \xi}+\eta_y\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)-\rho\,\varepsilon$$

Eşitliğin her iki tarafı ıntegre edildikten sonra düzenlenip tekrar yazılırsa,

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n\left(\frac{\partial(\rho k)}{\partial\tau}+\xi_t\frac{\partial(\rho k)}{\partial\xi}+\eta_t\frac{\partial(\rho k)}{\partial\eta}+\xi_x\frac{\partial(\rho uk)}{\partial\xi}+\eta_x\frac{\partial(\rho uk)}{\partial\eta}+\xi_y\frac{\partial(\rho vk)}{\partial\xi}+\eta_y\frac{\partial(\rho vk)}{\partial\eta}\right)d\tau\,d\xi\,d\eta$$

$$=\int_0^t\int_w^e\int_s^n\left(\begin{array}{l}
\xi_x\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_x}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial\xi}\right]\right\}+\xi_x\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_x}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial\eta}\right]\right\}+\eta_x\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_x}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial\xi}\right]\right\}+\eta_x\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_x}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial\eta}\right]\right\}\\
+\xi_y\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_y}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial\xi}\right]\right\}+\xi_y\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_y}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial\eta}\right]\right\}+\eta_y\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_y}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial\xi}\right]\right\}+\eta_y\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_y}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial\eta}\right]\right\}\\
+\mu_t\left[\xi_y\frac{\partial u}{\partial\xi}+\eta_y\frac{\partial u}{\partial\eta}+\xi_x\frac{\partial v}{\partial\xi}+\eta_x\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]^2\\
+2\,\mu_t\left[\left(\xi_x\frac{\partial u}{\partial\xi}+\eta_x\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)^2+\left(\xi_y\frac{\partial v}{\partial\xi}+\eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)^2\right]\\
-\frac{2}{3}\left[(\mu+\mu_t)\left(\xi_x\frac{\partial u}{\partial\xi}+\eta_x\frac{\partial u}{\partial\eta}+\xi_y\frac{\partial v}{\partial\xi}+\eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)+\rho k\right]\left(\xi_x\frac{\partial u}{\partial\xi}+\eta_x\frac{\partial u}{\partial\eta}+\xi_y\frac{\partial v}{\partial\xi}+\eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)-\rho\,\varepsilon
\end{array}\right)d\tau\,d\xi\,d\eta$$

Eşitliğin sol tarafı,

$$\int_0^t \int_w^e \int_s^n \left(\frac{\partial(\rho k)}{\partial \tau} + \xi_t \frac{\partial(\rho k)}{\partial \xi} + \eta_t \frac{\partial(\rho k)}{\partial \eta} + \xi_x \frac{\partial(\rho u k)}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial(\rho u k)}{\partial \eta} + \xi_y \frac{\partial(\rho v k)}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial(\rho v k)}{\partial \eta} \right) d\tau \, d\xi \, d\eta$$

$$= (\rho_P k_P - \rho_P{}^0 k_P{}^0) \Delta\eta_{sn} . \Delta\xi_{we} + \xi_{t_P} (\rho_e k_e - \rho_w k_w) \Delta\Delta_{sn} \Delta\tau + \eta_{t_P} (\rho_n k_n - \rho_s k_s) \Delta\xi_{we} \Delta\tau$$

$$+ \xi_{x_P} (\rho_e u_e k_e - \rho_w u_w k_w) \Delta\eta_{sn} \Delta\tau + \eta_{x_P} (\rho_n u_n k_n - \rho_s u_s k_s) \Delta\xi_{we} \Delta\tau$$

$$+ \xi_{y_P} (\rho_e v_e k_e - \rho_w v_w k_w) \Delta\eta_{sn} \Delta\tau + \eta_{y_P} (\rho_n v_n k_n - \rho_s v_s k_s) \Delta\xi_{we} \Delta\tau$$

Eşitliğin sağ tarafı 1’nci sıra,

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \xi_x \left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_x}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial\xi}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \xi_{x_p}.\left[\left(\left[(\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_x}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial\xi}\right]\right)_e - \left(\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_x}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial\xi}\right]\right)_w\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$= \xi_{x_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}}{\sigma_k}\left(\frac{k_E-k_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}}{\sigma_k}\left(\frac{k_P-k_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \xi_x \left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_x}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial\eta}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \xi_{x_p}.\left[\left(\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_x}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial\eta}\right]\right)_e - \left(\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_x}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial\eta}\right]\right)_w\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$= \xi_{x_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_e\eta_{x_e}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{ne}-k_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_w\eta_{x_w}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{nw}-k_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \eta_x \left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_x}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial\xi}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \eta_{x_p}.\left[\left(\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_x}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial\xi}\right]\right)_n - \left(\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_x}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial\xi}\right]\right)_s\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$= \eta_{x_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n\xi_{x_n}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{ne}-k_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_s\xi_{x_s}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{se}-k_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \eta_x \left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_x}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial\eta}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \eta_{x_p}.\left[\left(\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_x}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial\eta}\right]\right)_n - \left(\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_x}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial\eta}\right]\right)_s\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$= \eta_{x_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}}{\sigma_k}\left(\frac{k_N-k_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}}{\sigma_k}\left(\frac{k_P-k_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

Eşitliğin sağ tarafı 2'nci sıra,

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \xi_y \left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_y}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial \xi}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \xi_{y_p}.\left[\left(\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_y}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial \xi}\right]\right)_e - \left(\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_y}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial \xi}\right]\right)_w\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$= \xi_{y_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}}{\sigma_k}\left(\frac{k_E-k_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}}{\sigma_k}\left(\frac{k_P-k_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \xi_y \left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_y}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial \eta}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \xi_{y_p}.\left[\left(\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_y}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial \eta}\right]\right)_e - \left(\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_y}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial \eta}\right]\right)_w\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$= \xi_{y_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_e\eta_{y_e}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{ne}-k_{se}}{\Delta\eta_{ne,se}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_w\eta_{y_w}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{nw}-k_{sw}}{\Delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \eta_y \left\{\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_y}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial \xi}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \eta_{y_p}.\left[\left(\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_y}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial \xi}\right]\right)_n - \left(\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_y}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial \xi}\right]\right)_s\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$= \eta_{y_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n\xi_{y_n}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{ne}-k_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_s\xi_{y_s}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{se}-k_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \eta_y \left\{\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_y}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial \eta}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \eta_{y_p}.\left[\left(\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_y}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial \eta}\right]\right)_n - \left(\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_y}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial \eta}\right]\right)_s\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$= \eta_{y_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}}{\sigma_k}\left(\frac{k_N-k_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}}{\sigma_k}\left(\frac{k_P-k_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

Eşitliğin sağ tarafı 3'ncü sıra,

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \left\{ \mu_t \left[\xi_y \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial u}{\partial \eta} + \xi_x \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial v}{\partial \eta}\right]^2 \right\} d\tau\, d\xi\, d\eta =$$

$$\mu_{t_P}\left[\xi_{y_P}\frac{u_e-u_w}{\delta\xi}+\eta_{y_P}\frac{u_n-u_s}{\delta\eta}+\xi_{x_P}\frac{v_e-v_w}{\delta\xi}+\eta_{x_P}\frac{v_n-v_s}{\delta\eta}\right]^2 .\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

Eşitliğin sağ tarafı 4'ncü sıra,

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \left\{ 2\,\mu_t \left[\left(\xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\xi_y \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2 \right] \right\} d\tau\, d\xi\, d\eta =$$

$$2\mu_{t_P}\left[\left(\xi_{x_P}\frac{u_e-u_w}{\delta\xi}+\eta_{x_P}\frac{u_n-u_s}{\delta\eta}\right)^2\left(\xi_{y_P}\frac{v_e-v_w}{\delta\xi}+\eta_{y_P}\frac{v_n-v_s}{\delta\eta}\right)^2\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\Delta_{we}.\Delta\tau$$

Eşitliğin sağ tarafı 5'nci sıra,

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \left\{ -\frac{2}{3}\left[(\mu+\mu_t)\left(\xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta} + \xi_y \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta}\right) + \rho k \right]\left(\xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta} + \xi_y \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta}\right) - \rho\,\varepsilon \right\} d\tau\, d\xi\, d\eta$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{2}{3}\left[(\mu+\mu_t)_P\left(\xi_{x_P}\dfrac{u_e-u_w}{\delta\xi}+\eta_{x_P}\dfrac{u_n-u_s}{\delta\eta}+\xi_{y_P}\dfrac{v_e-v_w}{\delta\xi}+\eta_{y_P}\dfrac{v_n-v_s}{\delta\eta}\right)+\rho_P\,k_P\right] \\ \qquad .\left(\xi_{x_P}\dfrac{u_e-u_w}{\delta\xi}+\eta_{x_P}\dfrac{u_n-u_s}{\delta\eta}+\xi_{y_P}\dfrac{v_e-v_w}{\delta\xi}+\eta_{y_P}\dfrac{v_n-v_s}{\delta\eta}\right)+\rho_P\;\varepsilon_P \end{array} \right\} \Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

Yukarıdaki denklemler ana denkleme koyulup, zamana bölünür ve düzenlenirse,

$$
\begin{aligned}
&\frac{(\rho_P k_P - \rho_P{}^0 k_P{}^0)\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau} + \xi_{t_P}(\rho_e k_e - \rho_w k_w)\Delta\eta_{sn} + \eta_{t_P}(\rho_n k_n - \rho_s k_s)\Delta\xi_{we} + \xi_{x_P}(\rho_e u_e k_e - \rho_w u_w k_w)\Delta\Delta_{sn} + \eta_{x_P}(\rho_n u_n k_n - \rho_s u_s k_s)\Delta\xi_{we} \\
&+ \xi_{y_P}(\rho_e v_e k_e - \rho_w v_w k_w)\Delta\eta_{sn} + \eta_{y_P}(\rho_n v_n k_n - \rho_s v_s k_s)\Delta\xi_{we}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \xi_{x_P}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_e \xi_{x_e}}{\sigma_k}\left(\frac{k_E - k_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_w \xi_{x_w}}{\sigma_k}\left(\frac{k_P - k_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} + \xi_{x_P}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_e \eta_{x_e}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{ne} - k_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_w \eta_{x_w}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{nw} - k_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} \\
&+ \eta_{x_P}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n \xi_{x_n}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{ne} - k_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_s \xi_{x_s}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{se} - k_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we} + \eta_{x_P}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n \eta_{x_n}}{\sigma_k}\left(\frac{k_N - k_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_s \eta_{x_s}}{\sigma_k}\left(\frac{k_P - k_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we} \\
&+ \xi_{y_P}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_e \xi_{y_e}}{\sigma_k}\left(\frac{k_E - k_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_w \xi_{y_w}}{\sigma_k}\left(\frac{k_P - k_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} + \xi_{y_P}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_e \eta_{y_e}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{ne} - k_{se}}{\Delta\eta_{ne,se}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_w \eta_{y_w}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{nw} - k_{sw}}{\Delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} \\
&+ \eta_{y_P}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n \xi_{y_n}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{ne} - k_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_s \xi_{y_s}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{se} - k_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we} + \eta_{y_P}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n \eta_{y_n}}{\sigma_k}\left(\frac{k_N - k_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_s \eta_{y_s}}{\sigma_k}\left(\frac{k_P - k_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we} \\
&+ \mu_{t_P}\left[\xi_{y_P}\frac{u_e - u_w}{\delta\xi} + \eta_{y_P}\frac{u_n - u_s}{\delta\eta} + \xi_{x_P}\frac{v_e - v_w}{\delta\xi} + \eta_{x_P}\frac{v_n - v_s}{\delta\eta}\right]^2.\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we} \\
&+ 2\mu_{t_P}\left[\left(\xi_{x_P}\frac{u_e - u_w}{\delta\xi} + \eta_{x_P}\frac{u_n - u_s}{\delta\eta}\right)^2\left(\xi_{y_P}\frac{v_e - v_w}{\delta\xi} + \eta_{y_P}\frac{v_n - v_s}{\delta\eta}\right)^2\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we} \\
&+ \left\{\begin{aligned}&-\frac{2}{3}\left[(\mu+\mu_t)_P\left(\xi_{x_P}\frac{u_e - u_w}{\delta\xi} + \eta_{x_P}\frac{u_n - u_s}{\delta\eta} + \xi_{y_P}\frac{v_e - v_w}{\delta\xi} + \eta_{y_P}\frac{v_n - v_s}{\delta\eta}\right) + \rho_P k_P\right] \\
&\qquad .\left(\xi_{x_P}\frac{u_e - u_w}{\delta\xi} + \eta_{x_P}\frac{u_n - u_s}{\delta\eta} + \xi_{y_P}\frac{v_e - v_w}{\delta\xi} + \eta_{y_P}\frac{v_n - v_s}{\delta\eta}\right) + \rho_P\ \varepsilon_P\end{aligned}\right\}\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}
\end{aligned}
$$

$$\frac{(\rho_P k_P - \rho_P{}^0 k_P{}^0)\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau} + \rho_e\, \Delta\eta_{sn}(\xi_{t_P} + \xi_{x_P} u_e + \xi_{y_P} v_e).k_e - \rho_w \Delta\eta_{sn}(\xi_{t_P} + \xi_{x_P} u_w + \xi_{y_P} v_w).k_w$$

$$+ \rho_n \Delta\xi_{we}(\eta_{t_P} + \eta_{x_P} u_n + \eta_{y_P}\, v_n).k_n - \rho_s \Delta\xi_{we}(\eta_{t_P} + \eta_{x_P} u_s + \eta_{y_P} v_s).k_s$$

$$= \xi_{x_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_e \xi_{x_e}}{\sigma_k}\left(\frac{k_E - k_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_w \xi_{x_w}}{\sigma_k}\left(\frac{k_P - k_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} + \xi_{x_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_e \eta_{x_e}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{ne} - k_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_w \eta_{x_w}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{nw} - k_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}$$

$$+ \eta_{x_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n \xi_{x_n}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{ne} - k_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_s \xi_{x_s}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{se} - k_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we} + \eta_{x_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n \eta_{x_n}}{\sigma_k}\left(\frac{k_N - k_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_s \eta_{x_s}}{\sigma_k}\left(\frac{k_P - k_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}$$

$$+ \xi_{y_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_e \xi_{y_e}}{\sigma_k}\left(\frac{k_E - k_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_w \xi_{y_w}}{\sigma_k}\left(\frac{k_P - k_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} + \xi_{y_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_e \eta_{y_e}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{ne} - k_{se}}{\Delta\eta_{ne,se}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_w \eta_{y_w}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{nw} - k_{sw}}{\Delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}$$

$$+ \eta_{y_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n \xi_{y_n}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{ne} - k_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_s \xi_{y_s}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{se} - k_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we} + \eta_{y_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n \eta_{y_n}}{\sigma_k}\left(\frac{k_N - k_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_s \eta_{y_s}}{\sigma_k}\left(\frac{k_P - k_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we} + S_1$$

$$S_1 = \mu_{t_P}\left[\xi_{y_P}\,\frac{u_e - u_w}{\delta\xi} + \eta_{y_P}\,\frac{u_n - u_s}{\delta\eta} + \xi_{x_P}\,\frac{v_e - v_w}{\delta\xi} + \eta_{x_P}\,\frac{v_n - v_s}{\delta\eta}\right]^2 .\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}$$

$$+ 2\mu_{t_P}\left[\left(\xi_{x_P}\,\frac{u_e - u_w}{\delta\xi} + \eta_{x_P}\,\frac{u_n - u_s}{\delta\eta}\right)^2 \left(\xi_{y_P}\,\frac{v_e - v_w}{\delta\xi} + \eta_{y_P}\,\frac{v_n - v_s}{\delta\eta}\right)^2\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{2}{3}\left[(\mu+\mu_t)_P\left(\xi_{x_P}\,\dfrac{u_e - u_w}{\delta\xi} + \eta_{x_P}\,\dfrac{u_n - u_s}{\delta\eta} + \xi_{y_P}\,\dfrac{v_e - v_w}{\delta\xi} + \eta_{y_P}\,\dfrac{v_n - v_s}{\delta\eta}\right) + \rho_P\, k_P\right] \\ \qquad .\left(\xi_{x_P}\,\dfrac{u_e - u_w}{\delta\xi} + \eta_{x_P}\,\dfrac{u_n - u_s}{\delta\eta} + \xi_{y_P}\,\dfrac{v_e - v_w}{\delta\xi} + \eta_{y_P}\,\dfrac{v_n - v_s}{\delta\eta}\right) + \rho_P\;\varepsilon_P \end{array} \right\} \Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}$$

$$\frac{(\rho_P k_P-\rho_P{}^0 k_P{}^0)\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau}+\rho_e\Delta\eta_{sn}(\xi_{t_P}+\xi_{x_P}u_e+\xi_{y_P}v_e).k_e-\rho_w\Delta\eta_{sn}(\xi_{t_P}+\xi_{x_P}u_w+\xi_{y_P}v_w).k_w$$

$$+\rho_n\Delta\xi_{we}(\eta_{t_P}+\eta_{x_P}u_n+\eta_{y_P}v_n).k_n-\rho_s\Delta\xi_{we}(\eta_{t_P}+\eta_{x_P}u_s+\eta_{y_P}v_s).k_s$$

$$=+\xi_{x_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}}{\sigma_k}\left(\frac{k_E-k_P}{\Delta\xi_{PE}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}}{\sigma_k}\left(\frac{k_P-k_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}+\eta_{x_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}}{\sigma_k}\left(\frac{k_N-k_P}{\Delta\eta_{PN}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}}{\sigma_k}\left(\frac{k_P-k_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}$$

$$+\xi_{y_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}}{\sigma_k}\left(\frac{k_E-k_P}{\Delta\xi_{PE}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}}{\sigma_k}\left(\frac{k_P-k_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}+\eta_{y_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}}{\sigma_k}\left(\frac{k_N-k_P}{\Delta\eta_{PN}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}}{\sigma_k}\left(\frac{k_P-k_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}+S_2$$

$$S_2=\xi_{x_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_e\eta_{x_e}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{ne}-k_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_w\eta_{x_w}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{nw}-k_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}+\eta_{x_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n\xi_{x_n}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{ne}-k_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_s\xi_{x_s}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{se}-k_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}$$

$$+\xi_{y_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_e\eta_{y_e}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{ne}-k_{se}}{\Delta\eta_{ne,se}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_w\eta_{y_w}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{nw}-k_{sw}}{\Delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}+\eta_{y_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n\xi_{y_n}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{ne}-k_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_s\xi_{y_s}}{\sigma_k}\left(\frac{k_{se}-k_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\Delta_{we}$$

$$\mu_{t_P}\left[\xi_{y_P}\frac{u_e-u_w}{\delta\xi}+\eta_{y_P}\frac{u_n-u_s}{\delta\eta}+\xi_{x_P}\frac{v_e-v_w}{\delta\xi}+\eta_{x_P}\frac{v_n-v_s}{\delta\eta}\right]^2.\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}$$

$$+2\mu_{t_P}\left[\left(\xi_{x_P}\frac{u_e-u_w}{\delta\xi}+\eta_{x_P}\frac{u_n-u_s}{\delta\eta}\right)^2\left(\xi_{y_P}\frac{v_e-v_w}{\delta\xi}+\eta_{y_P}\frac{v_n-v_s}{\delta\eta}\right)^2\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}$$

$$+\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{2}{3}\left[(\mu+\mu_t)_P\left(\xi_{x_P}\dfrac{u_e-u_w}{\delta\xi}+\eta_{x_P}\dfrac{u_n-u_s}{\delta\eta}+\xi_{y_P}\dfrac{v_e-v_w}{\delta\xi}+\eta_{y_P}\dfrac{v_n-v_s}{\delta\eta}\right)+\rho_P k_P\right]\\ \qquad .\left(\xi_{x_P}\dfrac{u_e-u_w}{\delta\xi}+\eta_{x_P}\dfrac{u_n-u_s}{\delta\eta}+\xi_{y_P}\dfrac{v_e-v_w}{\delta\xi}+\eta_{y_P}\dfrac{v_n-v_s}{\delta\eta}\right)+\rho_P\ \varepsilon_P\end{array}\right\}\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}$$

$$
\frac{(\rho_P k_P - \rho_P{}^0 k_P{}^0)\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau} + \rho_e \Delta\eta_{sn}(\xi_{t_P} + \xi_{x_P} u_e + \xi_{y_P} v_e).k_e - \rho_w \Delta\eta_{sn}(\xi_{t_P} + \xi_{x_P} u_w + \xi_{y_P} v_w).k_w
$$

$$
+ \rho_n \Delta\xi_{we}(\eta_{t_P} + \eta_{x_P} u_n + \eta_{y_P} v_n).k_n - \rho_s \Delta\xi_{we}(\eta_{t_P} + \eta_{x_P} u_s + \eta_{y_P} v_s).k_s
$$

$$
= \frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e \xi_{x_e}}{\sigma_k.\Delta\xi_{PE}} k_E - \frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e \xi_{x_e}}{\sigma_k.\Delta\xi_{PE}} k_P - \frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w \xi_{x_w}}{\sigma_k.\Delta\xi_{WP}} k_P + \frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w \xi_{x_w}}{\sigma_k.\Delta\xi_{WP}} k_W
$$

$$
+ \frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n \eta_{x_n}}{\sigma_k.\Delta\eta_{PN}} k_N - \frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n \eta_{x_n}}{\sigma_k.\Delta\eta_{PN}} k_P - \frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s \eta_{x_s}}{\sigma_k.\Delta\eta_{SP}} k_P + \frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s \eta_{x_s}}{\sigma_k.\Delta\eta_{SP}} k_S
$$

$$
+ \frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e \xi_{y_e}}{\sigma_k.\Delta\xi_{PE}} k_E - \frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e \xi_{y_e}}{\sigma_k.\Delta\xi_{PE}} k_P - \frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w \xi_{y_w}}{\sigma_k.\Delta\xi_{WP}} k_P + \frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w \xi_{y_w}}{\sigma_k.\Delta\xi_{WP}} k_W
$$

$$
+ \frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n \eta_{y_n}}{\sigma_k.\Delta\eta_{PN}} k_N - \frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n \eta_{y_n}}{\sigma_k.\Delta\eta_{PN}} k_P - \frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s \eta_{y_s}}{\sigma_k.\Delta\eta_{SP}} k_P + \frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s \eta_{y_s}}{\sigma_k.\Delta\eta_{SP}} k_S
$$

$$
+ S_2
$$

$$\frac{(\rho_P k_P-\rho_P{}^0 k_P{}^0)\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau}+F_e.k_e-F_w.k_w+F_n.k_n-F_s.k_s$$

$$=-\left(\begin{array}{l}\dfrac{\xi x_p\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi x_e}{\sigma_k.\Delta\xi_{PE}}+\dfrac{\xi x_p\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi x_w}{\sigma_k.\Delta\xi_{WP}}+\dfrac{\eta x_p\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta x_n}{\sigma_k.\Delta\eta_{PN}}+\dfrac{\eta x_p\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta x_s}{\sigma_k.\Delta\eta_{SP}}\\+\dfrac{\xi y_p\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi y_e}{\sigma_k.\Delta\xi_{PE}}+\dfrac{\xi y_p\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi y_w}{\sigma_k.\Delta\xi_{WP}}+\dfrac{\eta y_p\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta y_n}{\sigma_k.\Delta\eta_{PN}}+\dfrac{\eta y_p\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta y_s}{\sigma_k.\Delta\eta_{SP}}\end{array}\right).k_P$$

$$+\left(\frac{\xi x_p\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi x_e}{\sigma_k.\Delta\xi_{PE}}+\frac{\xi y_p\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi y_e}{\sigma_k.\Delta\xi_{PE}}\right).k_E+\left(\frac{\xi x_p\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi x_w}{\sigma_k.\Delta\xi_{WP}}+\frac{\xi y_p\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi y_w}{\sigma_k.\Delta\xi_{WP}}\right).k_W$$

$$+\left(\frac{\eta x_p\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta x_n}{\sigma_k.\Delta\eta_{PN}}+\frac{\eta y_p\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta y_n}{\sigma_k.\Delta\eta_{PN}}\right).k_N+\left(\frac{\eta x_p\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta x_s}{\sigma_k.\Delta\eta_{SP}}+\frac{\eta y_p\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta y_s}{\sigma_k.\Delta\eta_{SP}}\right).k_S$$

$$+S_2$$

$$\frac{\rho_P\Delta\eta_{sn}\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau}.k_P-\frac{\rho_P{}^0 k_P{}^0\Delta\eta_{sn}\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau}+k_P.\|F_e,0\|-k_E.\|-F_e,0\|-k_W.\|F_w,0\|+k_P.\|-F_w,0\|+k_P.\|F_n,0\|-k_N.\|-F_n,0\|-k_S.\|F_s,0\|+k_P.\|-F_s,0\|$$

$$=-\left(\begin{array}{l}\dfrac{\xi x_p\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi x_e}{\sigma_k.\Delta\xi_{PE}}+\dfrac{\xi x_p\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi x_w}{\sigma_k.\Delta\xi_{WP}}+\dfrac{\eta x_p\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta x_n}{\sigma_k.\Delta\eta_{PN}}+\dfrac{\eta x_p\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta x_s}{\sigma_k.\Delta\eta_{SP}}\\+\dfrac{\xi y_p\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi y_e}{\sigma_k.\Delta\xi_{PE}}+\dfrac{\xi y_p\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi y_w}{\sigma_k.\Delta\xi_{WP}}+\dfrac{\eta y_p\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta y_n}{\sigma_k.\Delta\eta_{PN}}+\dfrac{\eta y_p\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta y_s}{\sigma_k.\Delta\eta_{SP}}\end{array}\right).k_P$$

$$+\left(\frac{\xi x_p\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi x_e}{\sigma_k.\Delta\xi_{PE}}+\frac{\xi y_p\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi y_e}{\sigma_k.\Delta\xi_{PE}}\right).k_E+\left(\frac{\xi x_p\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi x_w}{\sigma_k.\Delta\xi_{WP}}+\frac{\xi y_p\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi y_w}{\sigma_k.\Delta\xi_{WP}}\right).k_W$$

$$+\left(\frac{\eta x_p\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta x_n}{\sigma_k.\Delta\eta_{PN}}+\frac{\eta y_p\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta y_n}{\sigma_k.\Delta\eta_{PN}}\right).k_N+\left(\frac{\eta x_p\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta x_s}{\sigma_k.\Delta\eta_{SP}}+\frac{\eta y_p\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta y_s}{\sigma_k.\Delta\eta_{SP}}\right).k_S$$

$$+S_2$$

EK-3 (Devam) Türbülans kinetik enerjisi (k) denkleminin ayrıklaştırılması

$$
\begin{aligned}
&\left(
\begin{aligned}
&\frac{\rho_P \Delta\eta_{sn}\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau}
+\frac{\xi x_p \Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e \xi x_e}{\sigma_k.\Delta\xi_{PE}}
+\frac{\xi x_p \Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w \xi x_w}{\sigma_k.\Delta\xi_{WP}}
+\frac{\eta x_p \Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n \eta x_n}{\sigma_k.\Delta\eta_{PN}}
+\frac{\eta x_p \Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s \eta x_s}{\sigma_k.\Delta\eta_{SP}} \\
&+\frac{\xi y_p \Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e \xi y_e}{\sigma_k.\Delta\xi_{PE}}
+\frac{\xi y_p \Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w \xi y_w}{\sigma_k.\Delta\xi_{WP}}
+\frac{\eta y_p \Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n \eta y_n}{\sigma_k.\Delta\eta_{PN}}
+\frac{\eta y_p \Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s \eta y_s}{\sigma_k.\Delta\eta_{PN}} \\
&+\|F_e,0\|+\|-F_w,0\|+\|F_n,0\|+\|-F_s,0\|
\end{aligned}
\right).k_P \\
&=\left(\frac{\xi x_p \Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e \xi x_e}{\sigma_k.\Delta\xi_{PE}}
+\frac{\xi y_p \Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e \xi y_e}{\sigma_k.\Delta\xi_{PE}}
+\|-F_e,0\|\right).k_E
+\left(\frac{\xi x_p \Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w \xi x_w}{\sigma_k.\Delta\xi_{WP}}
+\frac{\xi y_p \Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w \xi y_w}{\sigma_k.\Delta\xi_{WP}}
+\|F_w,0\|\right).k_W \\
&+\left(\frac{\eta x_p \Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n \eta x_n}{\sigma_k.\Delta\eta_{PN}}
+\frac{\eta y_p \Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n \eta y_n}{\sigma_k.\Delta\eta_{PN}}
+\|-F_n,0\|\right).k_N
+\left(\frac{\eta x_p \Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s \eta x_s}{\sigma_k.\Delta\eta_{SP}}
+\frac{\eta y_p \Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s \eta y_s}{\sigma_k.\Delta\eta_{SP}}
+\|F_s,0\|\right).k_S \\
&+b
\end{aligned}
$$

Grid noktalarındaki hızlara göre düzenleme yapıldığında,

$$a_P\, k_P = a_E\, k_E + a_W\, k_W + a_N\, k_N + a_S\, k_S + b$$

$$a_P = \left(\begin{array}{l} \dfrac{\rho_P \Delta\eta_{sn} \Delta\xi_{we}}{\Delta\tau} + \dfrac{\xi_{x_p} \Delta\eta_{sn} (\mu+\mu_t)_e \xi_{x_e}}{\sigma_k . \Delta\xi_{PE}} + \dfrac{\xi_{x_p} \Delta\eta_{sn} (\mu+\mu_t)_w \xi_{x_w}}{\sigma_k . \Delta\xi_{WP}} + \dfrac{\eta_{x_p} \Delta\xi_{we} (\mu+\mu_t)_n \eta_{x_n}}{\sigma_k . \Delta\eta_{PN}} + \dfrac{\eta_{x_p} \Delta\xi_{we} (\mu+\mu_t)_s \eta_{x_s}}{\sigma_k . \Delta\eta_{SP}} \\ + \dfrac{\xi_{y_p} \Delta\eta_{sn} (\mu+\mu_t)_e \xi_{y_e}}{\sigma_k . \Delta\xi_{PE}} + \dfrac{\xi_{y_p} \Delta\eta_{sn} (\mu+\mu_t)_w \xi_{y_w}}{\sigma_k . \Delta\xi_{WP}} + \dfrac{\eta_{y_p} \Delta\xi_{we} (\mu+\mu_t)_n \eta_{y_n}}{\sigma_k . \Delta\eta_{PN}} + \dfrac{\eta_{y_p} \Delta\xi_{we} (\mu+\mu_t)_s \eta_{y_s}}{\sigma_k . \Delta\eta_{PN}} \\ + \|F_e,0\| + \|-F_w,0\| + \|F_n,0\| + \|-F_s,0\| \end{array} \right)$$

$$a_E = \left(\frac{\xi_{x_p} \Delta\eta_{sn} (\mu+\mu_t)_e \xi_{x_e}}{\sigma_k . \Delta\xi_{PE}} + \frac{\xi_{y_p} \Delta\eta_{sn} (\mu+\mu_t)_e \xi_{y_e}}{\sigma_k . \Delta\xi_{PE}} + \|-F_e,0\| \right)$$

$$a_W = \left(\frac{\xi_{x_p} \Delta\eta_{sn} (\mu+\mu_t)_w \xi_{x_w}}{\sigma_k . \Delta\xi_{WP}} + \frac{\xi_{y_p} \Delta\eta_{sn} (\mu+\mu_t)_w \xi_{y_w}}{\sigma_k . \Delta\xi_{WP}} + \|F_w,0\| \right)$$

$$a_N = \left(\frac{\eta_{x_p} \Delta\xi_{we} (\mu+\mu_t)_n \eta_{x_n}}{\sigma_k . \Delta\eta_{PN}} + \frac{\eta_{y_p} \Delta\xi_{we} (\mu+\mu_t)_n \eta_{y_n}}{\sigma_k . \Delta\eta_{PN}} + \|-F_n,0\| \right)$$

$$a_S = \left(\frac{\eta_{x_p} \Delta\xi_{we} (\mu+\mu_t)_s \eta_{x_s}}{\sigma_k . \Delta\eta_{SP}} + \frac{\eta_{y_p} \Delta\xi_{we} (\mu+\mu_t)_s \eta_{y_s}}{\sigma_k . \Delta\eta_{SP}} + \|F_s,0\| \right)$$

$$
b=\left(\begin{array}{l}
\xi_{x_p}.\left[\dfrac{(\mu+\mu_t)_e\eta_{x_e}}{\sigma_k}\left(\dfrac{k_{ne}-k_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right)-\dfrac{(\mu+\mu_t)_w\eta_{x_w}}{\sigma_k}\left(\dfrac{k_{nw}-k_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}+\eta_{x_p}.\left[\dfrac{(\mu+\mu_t)_n\xi_{x_n}}{\sigma_k}\left(\dfrac{k_{ne}-k_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-\dfrac{(\mu+\mu_t)_s\xi_{x_s}}{\sigma_k}\left(\dfrac{k_{se}-k_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}\\
+\xi_{y_p}.\left[\dfrac{(\mu+\mu_t)_e\eta_{y_e}}{\sigma_k}\left(\dfrac{k_{ne}-k_{se}}{\Delta\eta_{ne,se}}\right)-\dfrac{(\mu+\mu_t)_w\eta_{y_w}}{\sigma_k}\left(\dfrac{k_{nw}-k_{sw}}{\Delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}+\eta_{y_p}.\left[\dfrac{(\mu+\mu_t)_n\xi_{y_n}}{\sigma_k}\left(\dfrac{k_{ne}-k_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-\dfrac{(\mu+\mu_t)_s\xi_{y_s}}{\sigma_k}\left(\dfrac{k_{se}-k_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}\\
\mu_{t_P}\left[\xi_{y_P}\dfrac{u_e-u_w}{\delta\xi}+\eta_{y_P}\dfrac{u_n-u_s}{\delta\eta}+\xi_{x_P}\dfrac{v_e-v_w}{\delta\xi}+\eta_{x_P}\dfrac{v_n-v_s}{\delta\eta}\right]^2.\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}\\
+2\mu_{t_P}\left[\left(\xi_{x_P}\dfrac{u_e-u_w}{\delta\xi}+\eta_{x_P}\dfrac{u_n-u_s}{\delta\eta}\right)^2\left(\xi_{y_P}\dfrac{v_e-v_w}{\delta\xi}+\eta_{y_P}\dfrac{v_n-v_s}{\delta\eta}\right)^2\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}\\
+\left\{\begin{array}{l}
-\dfrac{2}{3}\left[(\mu+\mu_t)_P\left(\xi_{x_P}\dfrac{u_e-u_w}{\delta\xi}+\eta_{x_P}\dfrac{u_n-u_s}{\delta\eta}+\xi_{y_P}\dfrac{v_e-v_w}{\delta\xi}+\eta_{y_P}\dfrac{v_n-v_s}{\delta\eta}\right)+\rho_P\,k_P\right]\\
\qquad .\left(\xi_{x_P}\dfrac{u_e-u_w}{\delta\xi}+\eta_{x_P}\dfrac{u_n-u_s}{\delta\eta}+\xi_{y_P}\dfrac{v_e-v_w}{\delta\xi}+\eta_{y_P}\dfrac{v_n-v_s}{\delta\eta}\right)+\rho_P\;\varepsilon_P
\end{array}\right\}\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}\\
\dfrac{\rho_P{}^0k_P{}^0\Delta\eta_{sn}\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau}
\end{array}\right)
$$

EK-4 Türbülans kinetik enerjisi yutulma miktarı (ε) için taşınım denkleminin ayrıklaştırılması ayrıklaştırılması

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u\varepsilon)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v\varepsilon)}{\partial y}=$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(\mu+\mu_t)}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{(\mu+\mu_t)}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\right)+\frac{\varepsilon}{k}\left\{C_{1\varepsilon}\left[\mu_t\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+2\,\mu_t\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\right]-C_{2\varepsilon}\,\rho\,\varepsilon\right\}$$

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u\varepsilon)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v\varepsilon)}{\partial y}=$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(\mu+\mu_t)}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{(\mu+\mu_t)}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\right)+\frac{\varepsilon}{k}C_{1\varepsilon}\mu_t\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+2\mu_t\,\frac{\varepsilon}{k}C_{1\varepsilon}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]-\frac{\varepsilon}{k}C_{2\varepsilon}\rho\,\varepsilon$$

Yukarıdaki denkleminin sol ve sağ tarafı koordinat transformasyonu sonrasında tekrar yazılırsa,

SOL:
$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial\tau}+\xi_t\frac{\partial(\rho\,\varepsilon)}{\partial\xi}+\eta_t\frac{\partial(\rho\,\varepsilon)}{\partial\eta}+\xi_x\frac{\partial(\rho u\,\varepsilon)}{\partial\xi}+\eta_x\frac{\partial(\rho u\,\varepsilon)}{\partial\eta}+\xi_y\frac{\partial(\rho v\,\varepsilon)}{\partial\xi}+\eta_y\frac{\partial(\rho v\,\varepsilon)}{\partial\eta}$$

SAG:

(1)
$$=\xi_x\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_x}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\,\varepsilon}{\partial\xi}\right]\right\}+\xi_x\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_x}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\,\varepsilon}{\partial\eta}\right]\right\}+\eta_x\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_x}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\,\varepsilon}{\partial\xi}\right]\right\}+\eta_x\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_x}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\,\varepsilon}{\partial\eta}\right]\right\}$$

(2)
$$+\xi_y\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_y}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\,\varepsilon}{\partial\xi}\right]\right\}+\xi_y\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_y}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\,\varepsilon}{\partial\eta}\right]\right\}+\eta_y\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_y}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\,\varepsilon}{\partial\xi}\right]\right\}+\eta_y\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_y}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\,\varepsilon}{\partial\eta}\right]\right\}$$

(3)
$$+\frac{\varepsilon}{k}C_{1\varepsilon}\mu_t\left[\xi_y\frac{\partial u}{\partial\xi}+\eta_y\frac{\partial u}{\partial\eta}+\xi_x\frac{\partial\,v}{\partial\xi}+\eta_x\frac{\partial\,v}{\partial\eta}\right]^2$$

(4)
$$+2\,\mu_t\,\frac{\varepsilon}{k}C_{1\varepsilon}\left[\left(\xi_x\frac{\partial\,u}{\partial\xi}+\eta_x\frac{\partial\,u}{\partial\eta}\right)^2+\left(\xi_y\frac{\partial v}{\partial\xi}+\eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)^2\right]$$

(5)
$$-\frac{\varepsilon}{k}C_{2\varepsilon}\rho\,\varepsilon$$

Eşitliğin her iki tarafı integre edildikten sonra düzenlenip tekrar yazılırsa,

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n\left(\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial\tau}+\xi_t\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial\xi}+\eta_t\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial\eta}+\xi_x\frac{\partial(\rho u\varepsilon)}{\partial\xi}+\eta_x\frac{\partial(\rho u\varepsilon)}{\partial\eta}+\xi_y\frac{\partial(\rho v\varepsilon)}{\partial\xi}+\eta_y\frac{\partial(\rho v\varepsilon)}{\partial\eta}\right)d\tau\, d\xi\, d\eta$$

$$=\int_0^t\int_w^e\int_s^n\left(\begin{aligned}&\xi_x\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_x}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi}\right]\right\}+\xi_x\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_x}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta}\right]\right\}+\eta_x\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_x}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi}\right]\right\}+\eta_x\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_x}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta}\right]\right\}\\&+\xi_y\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_y}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi}\right]\right\}+\xi_y\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_y}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta}\right]\right\}+\eta_y\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_y}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi}\right]\right\}+\eta_y\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_y}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta}\right]\right\}\\&+\frac{\varepsilon}{k}C_{1\varepsilon}\mu_t\left[\xi_y\frac{\partial u}{\partial\xi}+\eta_y\frac{\partial u}{\partial\eta}+\xi_x\frac{\partial v}{\partial\xi}+\eta_x\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]^2\\&+2\,\mu_t\frac{\varepsilon}{k}C_{1\varepsilon}\left[\left(\xi_x\frac{\partial u}{\partial\xi}+\eta_x\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)^2+\left(\xi_y\frac{\partial v}{\partial\xi}+\eta_y\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)^2\right]\\&-\frac{\varepsilon}{k}C_{2\varepsilon}\rho\,\varepsilon\end{aligned}\right)d\tau\, d\xi\, d\eta$$

Eşitliğin sol tarafı,

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n\left(\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial\tau}+\xi_t\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial\xi}+\eta_t\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial\eta}+\xi_x\frac{\partial(\rho u\varepsilon)}{\partial\xi}+\eta_x\frac{\partial(\rho u\varepsilon)}{\partial\eta}+\xi_y\frac{\partial(\rho v\varepsilon)}{\partial\xi}+\eta_y\frac{\partial(\rho v\varepsilon)}{\partial\eta}\right)d\tau\, d\xi\, d\eta$$

$$=(\rho_P\varepsilon_P-\rho_P{}^0\varepsilon_P{}^0)\Delta\eta_{sn}\,.\Delta\xi_{we}+\xi_{t_P}(\rho_e\varepsilon_e-\rho_w\varepsilon_w)\Delta\eta_{sn}\Delta\tau+\eta_{t_P}(\rho_n\varepsilon_n-\rho_s\varepsilon_s)\Delta\xi_{we}\Delta\tau$$

$$+\xi_{x_P}(\rho_e u_e\varepsilon_e-\rho_w u_w\varepsilon_w)\Delta\eta_{sn}\Delta\tau+\eta_{x_P}(\rho_n u_n\varepsilon_n-\rho_s u_s\varepsilon_s)\Delta\xi_{we}\Delta\tau$$

$$+\xi_{y_P}(\rho_e v_e\varepsilon_e-\rho_w v_w\varepsilon_w)\Delta\eta_{sn}\Delta\tau+\eta_{y_P}(\rho_n v_n\varepsilon_n-\rho_s v_s\varepsilon_s)\Delta\xi_{we}\Delta\tau$$

Eşitliğin sağ tarafı 1'nci sıra,

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \xi_x\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_x}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi}\right]\right\}d\tau\,d\xi\,d\eta=\xi_{x_p}.\left[\left(\left[(\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_x}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi}\right]\right)_e-\left(\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_x}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi}\right]\right)_w\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$=\xi_{x_p}.\left[\frac{\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_E-\varepsilon_P}{\Delta\xi_{PE}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_P-\varepsilon_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \xi_x\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_x}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta}\right]\right\}d\tau\,d\xi\,d\eta=\xi_{x_p}.\left[\left(\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_x}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta}\right]\right)_e-\left(\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_x}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta}\right]\right)_w\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$=\xi_{x_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_e\eta_{x_e}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{ne}-\varepsilon_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_w\eta_{x_w}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{nw}-\varepsilon_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \eta_x\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_x}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi}\right]\right\}d\tau\,d\xi\,d\eta=\eta_{x_p}.\left[\left(\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_x}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi}\right]\right)_n-\left(\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_x}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi}\right]\right)_s\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$=\eta_{x_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n\xi_{x_n}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{ne}-\varepsilon_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_s\xi_{x_s}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{se}-\varepsilon_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \eta_x\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_x}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta}\right]\right\}d\tau\,d\xi\,d\eta=\eta_{x_p}.\left[\left(\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_x}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta}\right]\right)_n-\left(\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_x}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta}\right]\right)_s\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$=\eta_{x_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_N-\varepsilon_P}{\Delta\eta_{PN}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_P-\varepsilon_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

Eşitliğin sağ tarafı 2'nci sıra,

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \xi_y \left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_y}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \xi_{y_p}.\left[\left(\left[(\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_y}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi}\right]\right)_e - \left(\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_y}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi}\right]\right)_w\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$= \xi_{y_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_E-\varepsilon_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_P-\varepsilon_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \xi_y \left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_y}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial\eta}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \xi_{y_p}.\left[\left(\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_y}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial\eta}\right]\right)_e - \left(\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_y}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial\eta}\right]\right)_w\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$= \xi_{y_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_e\eta_{y_e}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{ne}-\varepsilon_{se}}{\Delta\eta_{ne,se}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_w\eta_{y_w}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{nw}-\varepsilon_{sw}}{\Delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \eta_y \left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_y}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \eta_{y_p}.\left[\left(\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_y}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi}\right]\right)_n - \left(\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\xi_y}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi}\right]\right)_s\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$= \eta_{y_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n\xi_{y_n}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{ne}-\varepsilon_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_s\xi_{y_s}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{se}-\varepsilon_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \eta_y \left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_y}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta}\right]\right\} d\tau\, d\xi\, d\eta = \eta_{y_p}.\left[\left(\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_y}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta}\right]\right)_n - \left(\left[\frac{(\mu+\mu_t)\,\eta_y}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta}\right]\right)_s\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

$$= \eta_{y_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_N-\varepsilon_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_P-\varepsilon_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

Eşitliğin sağ tarafı 3'ncü sıra,

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \left\{ \frac{\varepsilon}{k} C_{1\varepsilon}\mu_t \left[\xi_y \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial u}{\partial \eta} + \xi_x \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial v}{\partial \eta} \right]^2 \right\} d\tau\, d\xi\, d\eta =$$

$$\mu_{t_P} \frac{\varepsilon_P}{k_P} C_{1\varepsilon} \left[\xi_{y_P} \frac{u_e - u_w}{\delta\xi} + \eta_{y_P} \frac{u_n - u_s}{\delta\eta} + \xi_{x_P} \frac{v_e - v_w}{\delta\xi} + \eta_{x_P} \frac{v_n - v_s}{\delta\eta} \right]^2 .\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

Eşitliğin sağ tarafı 4'ncü sıra,

$$\int_0^t\int_w^e\int_s^n \left\{ 2\,\mu_t \frac{\varepsilon}{k} C_{1\varepsilon} \left[\left(\xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\xi_y \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2 \right] \right\} d\tau\, d\xi\, d\eta =$$

$$2\mu_{t_P} \frac{\varepsilon_P}{k_P} C_{1\varepsilon} \left[\left(\xi_{x_P} \frac{u_e - u_w}{\delta\xi} + \eta_{x_P} \frac{u_n - u_s}{\delta\eta} \right)^2 \left(\xi_{y_P} \frac{v_e - v_w}{\delta\xi} + \eta_{y_P} \frac{v_n - v_s}{\delta\eta} \right)^2 \right] .\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

Eşitliğin sağ tarafı 5'nci sıra,

$$+\int_0^t\int_w^e\int_s^n \left\{ -\frac{\varepsilon}{k} C_{2\varepsilon}\rho\,\varepsilon \right\} d\tau\, d\xi\, d\eta$$

$$= \left\{ -\rho_P \frac{\varepsilon_P}{k_P} C_{2\varepsilon}\varepsilon_P \right\} \Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}.\Delta\tau$$

Yukarıdaki denklemler ana denkleme koyulup, zamana bölünür ve düzenlenirse,

$$\frac{(\rho_P\varepsilon_P-\rho_P{}^0\varepsilon_P{}^0)\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau}+\xi_{t_P}(\rho_e\varepsilon_e-\rho_w\varepsilon_w)\Delta\eta_{sn}+\eta_{t_P}(\rho_n\varepsilon_n-\rho_s\varepsilon_s)\Delta\xi_{we}+\xi_{x_P}(\rho_e u_e\varepsilon_e-\rho_w u_w\varepsilon_w)\Delta\eta_{sn}+\eta_{x_P}(\rho_n u_n\varepsilon_n-\rho_s u_s\varepsilon_s)\Delta\xi_{we}$$
$$+\xi_{y_P}(\rho_e v_e\varepsilon_e-\rho_w v_w\varepsilon_w)\Delta\Delta_{sn}+\eta_{y_P}(\rho_n v_n\varepsilon_n-\rho_s v_s\varepsilon_s)\Delta\xi_{we}$$

$$=\xi_{x_p}.\left[\frac{\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_E-\varepsilon_P}{\Delta\xi_{PE}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_P-\varepsilon_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}+\xi_{x_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_e\eta_{x_e}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{ne}-\varepsilon_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_w\eta_{x_w}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{nw}-\varepsilon_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}$$
$$+\eta_{x_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n\xi_{x_n}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{ne}-\varepsilon_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_s\xi_{x_s}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{se}-\varepsilon_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}+\eta_{x_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_N-\varepsilon_P}{\Delta\eta_{PN}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_P-\varepsilon_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}$$
$$+\xi_{y_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_E-\varepsilon_P}{\Delta\xi_{PE}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_P-\varepsilon_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}+\xi_{y_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_e\eta_{y_e}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{ne}-\varepsilon_{se}}{\Delta\eta_{ne,se}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_w\eta_{y_w}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{nw}-\varepsilon_{sw}}{\Delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}$$
$$+\eta_{y_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n\xi_{y_n}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{ne}-\varepsilon_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_s\xi_{y_s}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{se}-\varepsilon_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}+\eta_{y_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_N-\varepsilon_P}{\Delta\eta_{PN}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_P-\varepsilon_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}$$
$$+\mu_{t_P}\frac{\varepsilon_P}{k_P}C_{1\varepsilon}\left[\xi_{y_P}\frac{u_e-u_w}{\delta\xi}+\eta_{y_P}\frac{u_n-u_s}{\delta\eta}+\xi_{x_P}\frac{v_e-v_w}{\delta\xi}+\eta_{x_P}\frac{v_n-v_s}{\delta\eta}\right]^2.\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}$$
$$+2\mu_{t_P}\frac{\varepsilon_P}{k_P}C_{1\varepsilon}\left[\left(\xi_{x_P}\frac{u_e-u_w}{\delta\xi}+\eta_{x_P}\frac{u_n-u_s}{\delta\eta}\right)^2\left(\xi_{y_P}\frac{v_e-v_w}{\delta\xi}+\eta_{y_P}\frac{v_n-v_s}{\delta\eta}\right)^2\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}$$
$$-\left\{\frac{\varepsilon_P}{k_P}C_{2\varepsilon}\rho_P\,\varepsilon_P\right\}\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}$$

$$\frac{(\rho_P \varepsilon_P - \rho_P{}^0 \varepsilon_P{}^0)\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau} + \rho_e \Delta\eta_{sn}(\xi_{t_P} + \xi_{x_P} u_e + \xi_{y_P} v_e).\varepsilon_e - \rho_w \Delta\eta_{sn}(\xi_{t_P} + \xi_{x_P} u_w + \xi_{y_P} v_w).\varepsilon_w$$

$$+ \rho_n \Delta\xi_{we}(\eta_{t_P} + \eta_{x_P} u_n + \eta_{y_P} v_n).\varepsilon_n - \rho_s \Delta\xi_{we}(\eta_{t_P} + \eta_{x_P} u_s + \eta_{y_P} v_s).\varepsilon_s$$

$$= \xi_{x_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_e \xi_{x_e}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_E - \varepsilon_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_w \xi_{x_w}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_P - \varepsilon_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} + \xi_{x_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_e \eta_{x_e}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{ne} - \varepsilon_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_w \eta_{x_w}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{nw} - \varepsilon_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}$$

$$+ \eta_{x_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n \xi_{x_n}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{ne} - \varepsilon_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_s \xi_{x_s}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{se} - \varepsilon_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we} + \eta_{x_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n \eta_{x_n}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_N - \varepsilon_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_s \eta_{x_s}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_P - \varepsilon_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}$$

$$+ \xi_{y_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_e \xi_{y_e}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_E - \varepsilon_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_w \xi_{y_w}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_P - \varepsilon_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} + \xi_{y_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_e \eta_{y_e}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{ne} - \varepsilon_{se}}{\Delta\eta_{ne,se}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_w \eta_{y_w}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{nw} - \varepsilon_{sw}}{\Delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}$$

$$+ \eta_{y_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n \xi_{y_n}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{ne} - \varepsilon_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_s \xi_{y_s}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{se} - \varepsilon_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we} + \eta_{y_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n \eta_{y_n}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_N - \varepsilon_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - \frac{(\mu+\mu_t)_s \eta_{y_s}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_P - \varepsilon_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we} + S_1$$

$$S_1 = \mu_{t_P} \frac{\varepsilon_P}{k_P} C_{1\varepsilon}\left[\xi_{y_P}\frac{u_e - u_w}{\delta\xi} + \eta_{y_P}\frac{u_n - u_s}{\delta\eta} + \xi_{x_P}\frac{v_e - v_w}{\delta\xi} + \eta_{x_P}\frac{v_n - v_s}{\delta\eta}\right]^2 .\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}$$

$$+ 2\mu_{t_P} \frac{\varepsilon_P}{k_P} C_{1\varepsilon}\left[\left(\xi_{x_P}\frac{u_e - u_w}{\delta\xi} + \eta_{x_P}\frac{u_n - u_s}{\delta\eta}\right)^2 \left(\xi_{y_P}\frac{v_e - v_w}{\delta\xi} + \eta_{y_P}\frac{v_n - v_s}{\delta\eta}\right)^2\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}$$

$$- \left\{\frac{\varepsilon_P}{k_P} C_{2\varepsilon} \rho_P \, \varepsilon_P\right\} \Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}$$

$$\frac{(\rho_P\varepsilon_P-\rho_P{}^0\varepsilon_P{}^0)\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau}+\rho_e\Delta\eta_{sn}(\xi_{t_P}+\xi_{x_P}u_e+\xi_{y_P}v_e).\varepsilon_e-\rho_w\Delta\eta_{sn}(\xi_{t_P}+\xi_{x_P}u_w+\xi_{y_P}v_w).\varepsilon_w$$

$$+\rho_n\Delta\xi_{we}(\eta_{t_P}+\eta_{x_P}u_n+\eta_{y_P}v_n).\varepsilon_n-\rho_s\Delta\xi_{we}(\eta_{t_P}+\eta_{x_P}u_s+\eta_{y_P}v_s).\varepsilon_s$$

$$=+\xi_{x_p}.\left[\frac{\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_E-\varepsilon_P}{\Delta\xi_{PE}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_P-\varepsilon_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}+\eta_{x_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_N-\varepsilon_P}{\Delta\eta_{PN}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_P-\varepsilon_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}$$

$$+\xi_{y_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_E-\varepsilon_P}{\Delta\xi_{PE}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_P-\varepsilon_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}+\eta_{y_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_N-\varepsilon_P}{\Delta\eta_{PN}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_P-\varepsilon_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}+S_2$$

$$S_2=\xi_{x_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_e\eta_{x_e}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{ne}-\varepsilon_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_w\eta_{x_w}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{nw}-\varepsilon_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}+\eta_{x_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n\xi_{x_n}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{ne}-\varepsilon_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_s\xi_{x_s}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{se}-\varepsilon_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}$$

$$+\xi_{y_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_e\eta_{y_e}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{ne}-\varepsilon_{se}}{\Delta\eta_{ne,se}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_w\eta_{y_w}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{nw}-\varepsilon_{sw}}{\Delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}+\eta_{y_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n\xi_{y_n}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{ne}-\varepsilon_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_s\xi_{y_s}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{se}-\varepsilon_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}$$

$$\mu_{t_P}\frac{\varepsilon_P}{k_P}C_{1\varepsilon}\left[\xi_{y_P}\frac{u_e-u_w}{\delta\xi}+\eta_{y_P}\frac{u_n-u_s}{\delta\eta}+\xi_{x_P}\frac{v_e-v_w}{\delta\xi}+\eta_{x_P}\frac{v_n-v_s}{\delta\eta}\right]^2.\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}$$

$$+2\mu_{t_P}\frac{\varepsilon_P}{k_P}C_{1\varepsilon}\left[\left(\xi_{x_P}\frac{u_e-u_w}{\delta\xi}+\eta_{x_P}\frac{u_n-u_s}{\delta\eta}\right)^2\left(\xi_{y_P}\frac{v_e-v_w}{\delta\xi}+\eta_{y_P}\frac{v_n-v_s}{\delta\eta}\right)^2\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}$$

$$-\left\{\frac{\varepsilon_P}{k_P}C_{2\varepsilon}\rho_P\,\varepsilon_P\right\}\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{(\rho_P\varepsilon_P-\rho_P{}^0\varepsilon_P{}^0)\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau}+\rho_e\Delta\eta_{sn}(\xi_{t_P}+\xi_{x_P}u_e+\xi_{y_P}v_e).\varepsilon_e-\rho_w\Delta\eta_{sn}(\xi_{t_P}+\xi_{x_P}u_w+\xi_{y_P}v_w).\varepsilon_w\\
&+\rho_n\Delta\xi_{we}(\eta_{t_P}+\eta_{x_P}u_n+\eta_{y_P}v_n).\varepsilon_n-\rho_s\Delta\xi_{we}(\eta_{t_P}+\eta_{x_P}u_s+\eta_{y_P}v_s).\varepsilon_s\\
&=\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{PE}}\varepsilon_E-\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{PE}}\varepsilon_P-\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{WP}}\varepsilon_P+\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{WP}}\varepsilon_W\\
&+\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{PN}}\varepsilon_N-\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{PN}}\varepsilon_P-\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{SP}}\varepsilon_P+\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{SP}}\varepsilon_S\\
&+\frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{PE}}\varepsilon_E-\frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{PE}}\varepsilon_P-\frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{WP}}\varepsilon_P+\frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{WP}}\varepsilon_W\\
&+\frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{PN}}\varepsilon_N-\frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{PN}}\varepsilon_P-\frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{SP}}\varepsilon_P+\frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{SP}}\varepsilon_S\\
&+S_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{(\rho_P\varepsilon_P-\rho_P{}^0\varepsilon_P{}^0)\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau}+F_e.\varepsilon_e-F_w.\varepsilon_w+F_n.\varepsilon_n-F_s.\varepsilon_s\\
&=-\left(\begin{aligned}&\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{PE}}+\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{WP}}+\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{PN}}+\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{SP}}\\
&+\frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{PE}}+\frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{WP}}+\frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{PN}}+\frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{SP}}\end{aligned}\right).\varepsilon_P\\
&+\left(\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{PE}}+\frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{PE}}\right).\varepsilon_E+\left(\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{WP}}+\frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{WP}}\right).\varepsilon_W\\
&+\left(\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{PN}}+\frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{PN}}\right).\varepsilon_N+\left(\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{SP}}+\frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{SP}}\right).\varepsilon_S\\
&+S_2
\end{aligned}
$$

$$\frac{\rho_P \Delta\eta_{sn}\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau}.\varepsilon_P - \frac{\rho_P{}^0 \varepsilon_P{}^0 \Delta\eta_{sn}\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau} + \varepsilon_P.\|F_e,0\| - \varepsilon_E.\|-F_e,0\| - \varepsilon_W.\|F_w,0\| + \varepsilon_P.\|-F_w,0\| + \varepsilon_P.\|F_n,0\| - \varepsilon_N.\|-F_n,0\| - \varepsilon_S.\|F_s,0\| + \varepsilon_P.\|-F_s,0\|$$

$$= -\left(\begin{array}{l} \dfrac{\xi x_p \Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e \xi x_e}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{PE}} + \dfrac{\xi x_p \Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w \xi x_w}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{WP}} + \dfrac{\eta x_p \Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n \eta x_n}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{PN}} + \dfrac{\eta x_p \Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s \eta x_s}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{SP}} \\ + \dfrac{\xi y_p \Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e \xi y_e}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{PE}} + \dfrac{\xi y_p \Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w \xi y_w}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{WP}} + \dfrac{\eta y_p \Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n \eta y_n}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{PN}} + \dfrac{\eta y_p \Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s \eta y_s}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{SP}} \end{array}\right).\varepsilon_P$$

$$+ \left(\frac{\xi x_p \Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e \xi x_e}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{PE}} + \frac{\xi y_p \Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e \xi y_e}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{PE}}\right).\varepsilon_E + \left(\frac{\xi x_p \Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w \xi x_w}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{WP}} + \frac{\xi y_p \Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w \xi y_w}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{WP}}\right).\varepsilon_W$$

$$+ \left(\frac{\eta x_p \Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n \eta x_n}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{PN}} + \frac{\eta y_p \Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n \eta y_n}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{PN}}\right).\varepsilon_N + \left(\frac{\eta x_p \Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s \eta x_s}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{SP}} + \frac{\eta y_p \Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s \eta y_s}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{SP}}\right).\varepsilon_S$$

$$+ S_2$$

$$\left(\begin{array}{l} \dfrac{\rho_P \Delta\eta_{sn}\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau} + \dfrac{\xi x_p \Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e \xi x_e}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{PE}} + \dfrac{\xi x_p \Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w \xi x_w}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{WP}} + \dfrac{\eta x_p \Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n \eta x_n}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{PN}} + \dfrac{\eta x_p \Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s \eta x_s}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{SP}} \\ + \dfrac{\xi y_p \Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e \xi y_e}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{PE}} + \dfrac{\xi y_p \Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w \xi y_w}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{WP}} + \dfrac{\eta y_p \Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n \eta y_n}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{PN}} + \dfrac{\eta y_p \Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s \eta y_s}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{PN}} \\ + \|F_e,0\| + \|-F_w,0\| + \|F_n,0\| + \|-F_s,0\| \end{array}\right).\varepsilon_P$$

$$= \left(\frac{\xi x_p \Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e \xi x_e}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{PE}} + \frac{\xi y_p \Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e \xi y_e}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{PE}} + \|-F_e,0\|\right).\varepsilon_E + \left(\frac{\xi x_p \Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w \xi x_w}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{WP}} + \frac{\xi y_p \Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w \xi y_w}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{WP}} + \|F_w,0\|\right).\varepsilon_W$$

$$+ \left(\frac{\eta x_p \Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n \eta x_n}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{PN}} + \frac{\eta y_p \Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n \eta y_n}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{PN}} + \|-F_n,0\|\right).\varepsilon_N + \left(\frac{\eta x_p \Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s \eta x_s}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{SP}} + \frac{\eta y_p \Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s \eta y_s}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{SP}} + \|F_s,0\|\right).\varepsilon_S$$

$$+ b$$

Grid noktalarındaki hızlara göre düzenleme yapıldığında,

$$a_P\,\varepsilon_P = a_E\,\varepsilon_E + a_W\,\varepsilon_W + a_N\,\varepsilon_N + a_S\,\varepsilon_S + b$$

$$a_P = \left(\begin{array}{l} \dfrac{\rho_P \Delta\eta_{sn}\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau} + \dfrac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{PE}} + \dfrac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{WP}} + \dfrac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{PN}} + \dfrac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{SP}} \\ + \dfrac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{PE}} + \dfrac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{WP}} + \dfrac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{PN}} + \dfrac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{PN}} \\ + \|F_e,0\| + \|-F_w,0\| + \|F_n,0\| + \|-F_s,0\| \end{array}\right)$$

$$a_E = \left(\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{x_e}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{PE}} + \frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_e\xi_{y_e}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{PE}} + \|-F_e,0\|\right)$$

$$a_W = \left(\frac{\xi_{x_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{x_w}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{WP}} + \frac{\xi_{y_p}\Delta\eta_{sn}(\mu+\mu_t)_w\xi_{y_w}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\xi_{WP}} + \|F_w,0\|\right)$$

$$a_N = \left(\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{x_n}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{PN}} + \frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_n\eta_{y_n}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{PN}} + \|-F_n,0\|\right)$$

$$a_S = \left(\frac{\eta_{x_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{x_s}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{SP}} + \frac{\eta_{y_p}\Delta\xi_{we}(\mu+\mu_t)_s\eta_{y_s}}{\sigma_\varepsilon.\Delta\eta_{SP}} + \|F_s,0\|\right)$$

EK-4 (Devam) Türbülans kinetik enerjisi yutulma miktarı (ε) için taşınım denkleminin ayrıklaştırılması ayrıklaştırılması

$$
b=\left(\begin{aligned}
&\xi_{x_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_e\eta_{x_e}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{ne}-\varepsilon_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_w\eta_{x_w}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{nw}-\varepsilon_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}+\eta_{x_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n\xi_{x_n}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{k_{ne}-k_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_s\xi_{x_s}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{se}-\varepsilon_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}\\
&+\xi_{y_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_e\eta_{y_e}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{ne}-\varepsilon_{se}}{\Delta\eta_{ne,se}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_w\eta_{y_w}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{nw}-\varepsilon_{sw}}{\Delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}+\eta_{y_p}.\left[\frac{(\mu+\mu_t)_n\xi_{y_n}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{k_{ne}-k_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right)-\frac{(\mu+\mu_t)_s\xi_{y_s}}{\sigma_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_{se}-\varepsilon_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we}\\
&\mu_{t_P}\frac{\varepsilon_P}{k_P}C_{1\varepsilon}\left[\xi_{y_P}\frac{u_e-u_w}{\delta\xi}+\eta_{y_P}\frac{u_n-u_s}{\delta\eta}+\xi_{x_P}\frac{v_e-v_w}{\delta\xi}+\eta_{x_P}\frac{v_n-v_s}{\delta\eta}\right]^2.\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}\\
&+2\mu_{t_P}\frac{\varepsilon_P}{k_P}C_{1\varepsilon}\left[\left(\xi_{x_P}\frac{u_e-u_w}{\delta\xi}+\eta_{x_P}\frac{u_n-u_s}{\delta\eta}\right)^2\left(\xi_{y_P}\frac{v_e-v_w}{\delta\xi}+\eta_{y_P}\frac{v_n-v_s}{\delta\eta}\right)^2\right].\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}\\
&-\left\{\frac{\varepsilon_P}{k_P}C_{2\varepsilon}\rho_P\ \varepsilon_P\right\}\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}\\
&+\frac{\rho_P{}^0\varepsilon_P{}^0\Delta\eta_{sn}\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau}
\end{aligned}\right)
$$

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u h)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v h)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}}\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}}\frac{\partial h}{\partial y}\right)+\frac{\partial P}{\partial t}$$

Yukarıdaki denkleminin sol ve sağ tarafı koordinat transformasyonu sonrasında tekrar yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial(\rho h)}{\partial \tau}+\xi_t\frac{\partial(\rho h)}{\partial \xi}+\eta_t\frac{\partial(\rho h)}{\partial \eta}\right)+\left(\xi_x\frac{\partial(\rho u h)}{\partial \xi}+\eta_x\frac{\partial(\rho u h)}{\partial \eta}\right)+\left(\xi_y\frac{\partial(\rho v h)}{\partial \xi}+\eta_y\frac{\partial(\rho v h)}{\partial \eta}\right)\\
&\quad=\xi_x\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}}\xi_x\frac{\partial h}{\partial \xi}\right]\right\}+\xi_x\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}}\eta_x\frac{\partial h}{\partial \eta}\right]\right\}+\eta_x\left\{\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}}\xi_x\frac{\partial h}{\partial \xi}\right]\right\}+\eta_x\left\{\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}}\eta_x\frac{\partial h}{\partial \eta}\right]\right\}\\
&\quad+\xi_y\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}}\xi_y\frac{\partial h}{\partial \xi}\right]\right\}+\xi_y\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}}\eta_y\frac{\partial h}{\partial \eta}\right]\right\}+\eta_y\left\{\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}}\xi_y\frac{\partial h}{\partial \xi}\right]\right\}+\eta_y\left\{\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}}\eta_y\frac{\partial h}{\partial \eta}\right]\right\}\\
&\quad+\left(\frac{\partial P}{\partial \tau}+\xi_t\frac{\partial P}{\partial \xi}+\eta_t\frac{\partial P}{\partial \eta}\right)
\end{aligned}$$

Eşitliğin her iki tarafı integre edilip düzenlenirse,

$$
\frac{(\rho_P h_P - \rho_P{}^0 h_P{}^0)\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau} + \rho_e \Delta\eta_{sn}(\xi_{t_P} + \xi_{x_P} u_e + \xi_{y_P} v_e).h_e - \rho_w \Delta\eta_{sn}(\xi_{t_P} + \xi_{x_P} u_w + \xi_{y_P} v_w).h_w
$$

$$
+ \rho_n \Delta\xi_{we}(\eta_{t_P} + \eta_{x_P} u_n + \eta_{y_P} v_n).h_n - \rho_s \Delta\xi_{we}(\eta_{t_P} + \eta_{x_P} u_s + \eta_{y_P} v_s).h_s
$$

$$
= \xi_{x_p}.\left[(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_e \xi_{x_e}\left(\frac{h_E - h_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - (\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_w \xi_{x_w}\left(\frac{h_P - h_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} + \xi_{x_p}.\left[(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_e \eta_{x_e}\left(\frac{h_{ne} - h_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right) - (\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_w \eta_{x_w}\left(\frac{h_{nw} - h_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}
$$

$$
+ \eta_{x_p}.\left[(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_n \xi_{x_n}\left(\frac{h_{ne} - h_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - (\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_s \xi_{x_s}\left(\frac{h_{se} - h_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we} + \eta_{x_p}.\left[(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_n \eta_{x_n}\left(\frac{h_N - h_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - (\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_s \eta_{x_s}\left(\frac{h_P - h_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we}
$$

$$
+ \xi_{y_p}.\left[(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_e \xi_{y_e}\left(\frac{h_E - h_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - (\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_w \xi_{y_w}\left(\frac{h_P - h_W}{\Delta\xi_{WP}}\right)\right].\Delta\eta_{sn} + \xi_{y_p}.\left[(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_e \eta_{y_e}\left(\frac{h_{ne} - h_{se}}{\Delta\eta_{ne,se}}\right) - (\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_w \eta_{y_w}\left(\frac{h_{nw} - h_{sw}}{\Delta\eta_{nw,sw}}\right)\right].\Delta\eta_{sn}
$$

$$
+ \eta_{y_p}.\left[(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_n \xi_{y_n}\left(\frac{h_{ne} - h_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - (\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_s \xi_{y_s}\left(\frac{h_{se} - h_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right)\right].\Delta\xi_{we} + \eta_{y_p}.\left[(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_n \eta_{y_n}\left(\frac{h_N - h_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - (\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_s \eta_{y_s}\left(\frac{h_P - h_S}{\Delta\eta_{SP}}\right)\right].\Delta\xi_{we} + b
$$

$$
b = \frac{(P_P - P_P{}^0)\Delta\eta_{sn}.\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau} + \xi_{t_P}(P_e - P_w)\Delta\eta_{sn} + \eta_{t_P}(P_n - P_s)\Delta\xi_{we}
$$

Upwind metodu kullanıldığında,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\rho_P . h_P \Delta\eta_{sn}\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau} + h_P.\|F_e,0\| - h_E.\|-F_e,0\| - h_W.\|F_w,0\| + h_P.\|-F_w,0\| + h_P.\|F_n,0\| - h_N.\|-F_n,0\| - h_S.\|F_s,0\| + h_P.\|-F_s,0\| \\
&= \xi_{x_p} . \left[(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_e \xi_{x_e} \left(\frac{h_E - h_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - (\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_w \xi_{x_w} \left(\frac{h_P - h_W}{\Delta\xi_{WP}}\right) \right] .\Delta\eta_{sn} + \xi_{x_p} . \left[(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_e \eta_{x_e} \left(\frac{h_{ne} - h_{se}}{\delta\eta_{ne,se}}\right) - (\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_w \eta_{x_w} \left(\frac{h_{nw} - h_{sw}}{\delta\eta_{nw,sw}}\right) \right] .\Delta\eta_{sn} \\
&+ \eta_{x_p} . \left[(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_n \xi_{x_n} \left(\frac{h_{ne} - h_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - (\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_s \xi_{x_s} \left(\frac{h_{se} - h_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right) \right] .\Delta\xi_{we} + \eta_{x_p} . \left[(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_n \eta_{x_n} \left(\frac{h_N - h_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - (\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_s \eta_{x_s} \left(\frac{h_P - h_S}{\Delta\eta_{SP}}\right) \right] .\Delta\xi_{we} \\
&+ \xi_{y_p} . \left[(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_e \xi_{y_e} \left(\frac{h_E - h_P}{\Delta\xi_{PE}}\right) - (\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_w \xi_{y_w} \left(\frac{h_P - h_W}{\Delta\xi_{WP}}\right) \right] .\Delta\eta_{sn} + \xi_{y_p} . \left[(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_e \eta_{y_e} \left(\frac{h_{ne} - h_{se}}{\Delta\eta_{ne,se}}\right) - (\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_w \eta_{y_w} \left(\frac{h_{nw} - h_{sw}}{\Delta\eta_{nw,sw}}\right) \right] .\Delta\eta_{sn} \\
&+ \eta_{y_p} . \left[(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_n \xi_{y_n} \left(\frac{h_{ne} - h_{nw}}{\Delta\xi_{ne,nw}}\right) - (\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_s \xi_{y_s} \left(\frac{h_{se} - h_{sw}}{\Delta\xi_{se,sw}}\right) \right] .\Delta\xi_{we} + \eta_{y_p} . \left[(\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_n \eta_{y_n} \left(\frac{h_N - h_P}{\Delta\eta_{PN}}\right) - (\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_s \eta_{y_s} \left(\frac{h_P - h_S}{\Delta\eta_{SP}}\right) \right] .\Delta\xi_{we} + b
\end{aligned}
$$

$$
b = \frac{(P_P - P_P{}^0)\Delta\eta_{sn} . \Delta\xi_{we}}{\Delta\tau} + \xi_{t_P}(P_e - P_w)\Delta\Delta_{sn} + \eta_{t_P}(P_n - P_s)\Delta\xi_{we} + \frac{\rho_P{}^0 h_P{}^0 \Delta\eta_{sn}\Delta\xi_{we}}{\Delta\tau}
$$

Grid noktalarındaki enthalpiye göre düzenleme yapıldığında,

$$a_P h_P = a_E h_E + a_W h_W + a_N h_N + a_S h_S + b$$

$$a_P = \left(\begin{array}{l} \dfrac{\rho_P \Delta\eta_{sn} \Delta\xi_{we}}{\Delta\tau} + \dfrac{\xi_{x_p} \Delta\eta_{sn} (\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_e \xi_{x_e}}{\Delta\xi_{PE}} + \dfrac{\xi_{x_p} \Delta\eta_{sn} (\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_w \xi_{x_w}}{\Delta\xi_{WP}} + \dfrac{\eta_{x_p} \Delta\xi_{we} (\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_n \eta_{x_n}}{\Delta\eta_{PN}} + \dfrac{\eta_{x_p} \Delta\xi_{we} (\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_s \eta_{x_s}}{\Delta\eta_{SP}} \\ + \dfrac{\xi_{y_p} \Delta\eta_{sn} (\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_e \xi_{y_e}}{\Delta\xi_{PE}} + \dfrac{\xi_{y_p} \Delta\eta_{sn} (\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_w \xi_{y_w}}{\Delta\xi_{WP}} + \dfrac{\eta_{y_p} \Delta\xi_{we} (\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_n \eta_{y_n}}{\Delta\eta_{PN}} + \dfrac{\eta_{y_p} \Delta\xi_{we} (\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_s \eta_{y_s}}{\Delta\eta_{PN}} + \|F_e,0\| + \|-F_w,0\| + \|F_n,0\| + \|-F_s,0\| \end{array} \right).$$

$$a_E = \frac{\xi_{x_p} \Delta\eta_{sn} (\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_e \xi_{x_e}}{\Delta\xi_{PE}} + \frac{\xi_{y_p} \Delta\eta_{sn} (\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_e \xi_{y_e}}{\Delta\xi_{PE}} + \|-F_e,0\|$$

$$a_W = \frac{\xi_{x_p} \Delta\eta_{sn} (\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_w \xi_{x_w}}{\Delta\xi_{WP}} + \frac{\xi_{y_p} \Delta\eta_{sn} (\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_w \xi_{y_w}}{\Delta\xi_{WP}} + \|F_w,0\|$$

$$a_N = \frac{\eta_{x_p} \Delta\xi_{we} (\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_n \eta_{x_n}}{\Delta\eta_{PN}} + \frac{\eta_{y_p} \Delta\xi_{we} (\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_n \eta_{y_n}}{\Delta\eta_{PN}} + \|-F_n,0\|$$

$$a_S = \frac{\eta_{x_p} \Delta\xi_{we} (\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_s \eta_{x_s}}{\Delta\eta_{SP}} + \frac{\eta_{y_p} \Delta\xi_{we} (\frac{\mu_t}{\sigma_{n,t}})_s \eta_{y_s}}{\Delta\eta_{SP}} + \|F_s,0\|$$

$$b = \frac{(P_P - P_P{}^0)\Delta\Delta_{sn} . \Delta\xi_{we}}{\Delta\tau} + \xi_{t_p}(P_e - P_w)\Delta\eta_{sn} + \eta_{t_p}(P_n - P_s)\Delta\xi_{we} + \frac{\rho_P{}^0 h_P{}^0 \Delta\eta_{sn} \Delta\xi_{we}}{\Delta\tau}$$

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: IŞIK, Halil
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 17.04.1971 Almanya
Medeni hali	: Evli
Telefon	: 0 (532) 6279130
e-mail	: halil.isik@yahoo.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Orta Doğu Teknik Üniversitesi / Mak.Müh.	1999
Lisans	Orta Doğu Teknik Üniversitesi / Mak.Müh.	1994

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2009-	1'inci Ana Bakım Merkezi K.lığı	Üretim Grup Amiri
2006-2009	1'inci Ana Bakım Merkezi K.lığı	Tırtıllı Arç.Böl. Amiri
2005-2006	1'inci Ana Bakım Merkezi K.lığı	ARGE ve Tek.Böl. Amiri
1997-2005	Kara Harp Okulu Komutanlığı	Makina Öğretim Üyesi
1994-1997	MSB Ankara İnş.Eml.Bşk.lığı	Kontrol Mühendisi

Yabancı Dil

İngilizce, Almanca

Hobiler

Masa Tenisi, Yüzme, Basketbol