



**JAIN VE PETHE OPERATÖRLERİNİN İNTEGRAL FORMU İLE
YAKLAŞIM**

Duygu YOLCU

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

OCAK 2022

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Duygu YOLCU

10/01/2022

JAIN VE PETHE OPERATÖRLERİNİN İNTEGRAL FORMU İLE YAKLAŞIM
(Yüksek Lisans Tezi)

Duygu YOLCU

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2022

ÖZET

Bu tezde Deo ve Pratap tarafından çalışılan Jain ve Pethe operatörlerinin bir genellemesi olan JPDB operatörleri incelenmiştir. Girişte operatörlerin literatür geçmişi verilerek JPDB operatörlerinin ortaya çıkışı anlatılmıştır. İkinci bölümde ihtiyaç duyulan tanım ve kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde JPDB operatörlerinin yakınsama hızı ikinci süreklilik modülü, Lipschitz-tip uzay ve Ditzian-Totik modülü yardımıyla hesaplanmıştır. Ayrıca bu operatörler için Voronovskaja tipi yaklaşım ve ağırlıklı yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölüm ise sonuç kısmından oluşmaktadır.

Bilim Kodu : 20404
Anahtar Kelimeler : Jain ve Pethe operatörleri, Yakınsama oranı, Lipschitz-tip uzay, Voronovskaja tip teorem, Ditzian Totik modülü
Sayfa Adedi : 51
Danışman : Prof. Dr. Hatice Gül İNCE İLARSLAN

APPROXIMATION BY INTEGRAL FORM OF JAIN AND PETHE OPERATORS

(M. Sc. Thesis)

Duygu YOLCU

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2022

ABSTRACT

In this thesis, JPDB operators, a generalization of Jain and Pethe operators studied by Deo and Pratap, are examined. In the introduction, the emergence of JPDB operators is explained by giving the literature history of the operators. In the second part, necessary definitions and concepts are given. In the third chapter, the convergence rate of the JPDB operators is calculated with the help of the second continuity module, Lipschitz-type space and Ditzian-Totik module. In addition, the Voronovskaja type approximation and weighted approximation properties for these operators are examined. The fourth part consists of the conclusion part.

Science Code : 20404

Key Words : Jain and Pethe operators, Rate of convergence, Lipschitz-type space, Voronovskaja type theorem, Ditzian Totik module

Page Number : 51

Supervisor : Prof. Dr. Hatice Gül İNCE İLARSLAN

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince bilgi ve tecrübesiyle bana rehberlik eden, anlayış gösteren, sözleriyle beni cesaretlendiren saygıdeğer hocam Prof. Dr. Hatice Gül İNCE İLARSLAN' a ve dualarını üzerimden eksik etmeyen, her koşulda bana güvenen sevgili aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIMLAR	3
3. JAIN VE PETHE OPERATÖRLERİNİN İNTEGRAL FORMU İLE YAKLAŞIM	9
3.1. JPDB Operatörlerinin Tanımı ve Özellikleri	9
3.2. JPDB Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri	24
3.2.1. Doğrudan yaklaşım sonuçları	24
3.3. JPDB Operatörleri için Voronovskaja Tip Teorem	38
3.4. JPDB Operatörlerinin Ağırlıklı Uzaylarda Yaklaşımı	41
4. SONUÇ	47
KAYNAKLAR	49
ÖZGEÇMİŞ	53

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

(f_n)	$n \in \mathbb{N}$ için bir fonksiyon dizisi
$C_B[0, \infty]$	$[0, \infty]$ üzerinde tanımlı, reel değerli sürekli sınırlı fonksiyonların uzayı
$C_B^2[0, \infty]$	1.ve 2. türevi $C_B[0, \infty]$ uzayının elemanı olan fonksiyonlar sınıfı
$C_2^*[0, \infty]$	$\{f \in C_2[0, \infty] : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{1+x^2} \text{ mevcut}\}$ ile tanımlı fonksiyon uzayı
$\ f\ _{C[a,b]}$	$\ f\ _{C[a,b]} = \max\{ f(x) : a \leq x \leq b\}$ ile tanımlanan norm
$\ f\ _\infty$	$\ f\ _\infty = \sup\{ f(x) : x \in [0, \infty)\}$ ile tanımlanan norm
$K_2(f, \delta)$	f fonksiyonunun Peetre K -fonksiyoneli
$B_\rho(\mathbb{R})$	$ f(x) \leq M_f \rho(x)$, $M_f > 0$ olacak şekildeki fonksiyonların kümesi
$C_\rho(\mathbb{R})$	$B_\rho(\mathbb{R})$ ağırlıklı uzayındaki sürekli fonksiyonların kümesi
$\Omega(f, \delta)$	f fonksiyonunun ağırlıklı süreklilik modülü
$\omega_\emptyset(f; \delta)$	Ditzian Totik modülü

1. GİRİŞ

Fonksiyonlar teorisi ve Fonksiyonel analizin odak noktasında yer alan yaklaşımlar teorisi, geçmişten günümüze birçok matematikçinin araştırma konusu olmuştur. Verilen bir fonksiyonun, kendisinden daha basit ve daha kolay sonuçlar veren fonksiyonlar ya da polinomlar yardımıyla gösterilmesi yaklaşımlar teorisinin temelini oluşturur. Bu teorisinin ortaya çıkışı 19. yüzyıla dayansa da günümüzde yapılan bilimsel çalışmalar sayesinde hala eski etkinliğini sürdürmektedir.

Yaklaşımlar teorisinin temelleri ilk olarak 1885 yılında Alman matematikçi Weierstrass tarafından ortaya atılmıştır. Weierstrass, kapalı ve sınırlı aralıklarda sürekli her f fonksiyonuna yakınsayan bir polinom dizisinin var olduğunu ispatlamıştır [1]. İlerleyen dönemlerde birçok ünlü matematikçi bu teorem üzerinde çalışmalar yapmış ve 1912 yılında Bernstein, Weierstrass teoreminin açık ve basit bir ispatını vermiştir. Bernstein, $[0,1]$ aralığında bir f fonksiyonuna düzgün yakınsayan lineer pozitif operatör dizisi şeklindeki Bernstein polinomlarını tanıtmıştır [2]. Daha sonra 1952 yılında Bohman, lineer pozitif operatörlerin $[0,1]$ kapalı ve sınırlı aralığında sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsaması için yalnızca üç koşulu sağlaması gerektiğini söylemiş ve bunu kanıtlamıştır [3]. Bohman'ın bu teoremini Korovkin 1953 yılında $[a,b]$ aralığına genelleştirmiştir [4]. Bununla beraber Korovkin şartlarını sağlayan birçok lineer pozitif operatör tanımlanmış ve üzerinde çalışılmıştır. Yaklaşım teorisinde yaşanan bu gelişmelerle birlikte sonlu aralıktan sonsuz aralığa genişleyen lineer pozitif operatörler de karşımıza çıkmıştır. 1941 yılında Mirakyan [5] ve 1950 yılında Szász [6], tarafından tanımlanan

$$S_n(f; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Szász-Mirakyan operatörleri Bernstein polinomlarının sonsuz aralığa genellemesidir.

1977 yılında S_n operatörlerinin farklı bir genellemesi,

$$J_n^{[\alpha]}(f; x) = (1 + n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^{-i} \frac{x^{(i, -\alpha)}}{i!} f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (1.1)$$

şeklinde Jain ve Pethe tarafından tanıtılmıştır [7]. Bu operatörlerin yaklaşım özellikleri Stancu [8], Mastroanni [9], Della Vechia ve Kocic [10] ve Finta [11,12] tarafından çalışılmış, Abel ve Ivan [13] ise yakınsama oranını incelemiştir.

Öte yandan Baskakov [14], 1957 de $f \in C_B[0, \infty)$ için

$$V_n(f, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{i} \frac{x^i}{(1+x)^{n+i}} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

ile Baskakov operatörünü tanımlamıştır. Baskakov operatörünün integral formu Sahai ve Prasad [15] tarafından verilmiş ve Durrmeyer tip genellemesi [16]

$$D_v(f, x) = (n-1) \sum_{i=0}^{\infty} v_{n,i}(x) \int_0^{\infty} v_{n,i}(t) f(t) dt$$

biçiminde tanımlanmıştır. Burada

$$v_{n,i}(x) = \binom{n+i-1}{i} \frac{x^i}{(1+x)^{n+i}}$$

dir.

Deo ve Pratap [17] ise Baskakov ile $J_n^{[\alpha]}$ operatörlerinin Durrmeyer genellemesini birleştirerek

$$P_{n,\alpha}(f, x) = (n-1) \sum_{i=0}^{\infty} s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \int_0^{\infty} \binom{n+i-1}{i} \frac{t^i}{(1+t)^{n+i}} f(t) dt$$

ile verilen Jain ve Pethe operatörlerinin integral formunu (JPDB) tanımlamış ve bazı yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir. Burada

$$s_{n,i}^{[\alpha]}(x) = (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}} \left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^{-i} \frac{x^{(i-\alpha)}}{i!}, x \in [0, \infty)$$

dır.

Bu tezde, Deo ve Pratap [17] tarafından çalışılarak bizlere sunulan bir çalışma temel alınacak ve çalışmadaki teorem ve lemmalar daha geniş bir şekilde incelenecektir. Bu amaçla öncelikle JPDB operatörlerinin tanımı verilecek ve bu operatörler için ikinci süreklilik modülü ve Peetre K-fonksiyoneli yardımıyla yakınsama oranı hesaplanacaktır. Daha sonra yakınsama hızı için Lipshcitz-tip uzay kullanılacak ve Voronovskaja tipi asimptotik tahmin formülü verilecektir. Son olarak bu operatörün ağırlıklı yaklaşım sonuçları incelenecektir.

2. TEMEL TANIMLAR

Bu kısımda, operatörlerin yaklaşımı incelenirken ihtiyaç duyulan bazı genel tanım ve teoremlere yer verilecektir.

2.1. Lineer Pozitif Operatörlerin Tanımı ve Özellikleri

2.1.1. Tanım

$\mathcal{H}$ ve G iki lineer uzay olsun. $\mathcal{H}$ uzayındaki f fonksiyonunu G uzayındaki g fonksiyonuna dönüştüren bir $\mathcal{L}$ dönüşümü varsa bu dönüşüme $\mathcal{H}$ ' den G ' ye bir operatör denir. Bu operatör $\mathcal{L}: \mathcal{H} \rightarrow G$, $\mathcal{L}(f) = g$ ile gösterilir [18].

2.1.2. Tanım

$\mathcal{H}$ ve G iki lineer fonksiyon uzayı ve $\mathcal{L}: \mathcal{H} \rightarrow G$ bir operatör olsun. Eğer $\forall f, g \in \mathcal{H}$ ve $\forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ için

$$\mathcal{L}(\beta_1 f + \beta_2 g; x) = \beta_1 \mathcal{L}(f; x) + \beta_2 \mathcal{L}(g; x)$$

koşulu sağlanırsa, $\mathcal{L}$ 'ye lineer operatör denir [18].

2.1.3. Tanım

$L: X \rightarrow Y$ lineer operatör olsun. X uzayından alınan bir f fonksiyonu için

$f \geq 0$ olduğunda $L(f) \geq 0$ oluyorsa

L 'ye lineer pozitif operatör denir [18].

2.1.1. Lemma

H lineer fonksiyon uzayı ve L lineer pozitif operatör olsun. $\forall f, g \in H$ için $f \leq g$ ise

$$L(f; x) \leq L(g; x)$$

dir [18].

İspat

Kabul edelim ki her $f, g \in X$ için $f \leq g$ olsun. Buradan $g - f \geq 0$ olup L operatörünün pozitif olduğu dikkate alınır

$$L(g - f) \geq 0 \quad (2.1)$$

yazılabilir. L operatörünün lineer olduğu bilindiğinden

$$L(g - f) = L(g) - L(f)$$

elde edilir. Bu ifade Eş. 2.1' de yerine yazılırsa

$$L(f) \leq L(g)$$

bulunur.

2.1.2. Lemma

L lineer pozitif operatör olsun. Bu durumda

$$|L(f)| \leq L(|f|)$$

eşitsizliği sağlanır [18].

İspat

Herhangi bir f fonksiyonu için

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

dir. L lineer pozitif operatör ve monoton artan olduğundan

$$L(-|f|) \leq L(f) \leq L(|f|)$$

yazılabilir. Buradan

$$|L(f)| \leq L(|f|)$$

olduğu açıktır.

2.1.4. Tanım

$[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı, reel değerli ve sürekli tüm fonksiyonların uzayı $C[a, b]$ ile gösterilir.

$C[a, b]$ uzayı,

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

normu ile bir normlu uzaydır [19].

2.1.5. Tanım

(f_n) , $C[a, b]$ uzayı içinde bir dizi ve her $x \in [a, b]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{C[a,b]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

şartı sağlanıyor ise (f_n) dizisi $C[a, b]$ üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir ve $(f_n) \Rightarrow f$ şeklinde gösterilir [19].

2.1.1. Teorem (Korovkin Teoremi)

$f \in C[a, b]$ ve $\mathbb{R}$ de sınırlı olan her f fonksiyonu için

$$(i) L_n(1; x) \Rightarrow 1$$

$$(ii) L_n(t; x) \Rightarrow x$$

$$(iii) L_n(t^2; x) \Rightarrow x^2$$

koşulları sağlanıyorsa bu durumda her f için $[a, b]$ üzerinde düzgün olarak $L_n(f; x) \Rightarrow f(x)$ dir [4, 18].

2.1.6. Tanım

$I \subset \mathbb{R}$ ve f, I da tanımlı bir fonksiyon olsun. $\delta > 0$ için

$$\omega(f, \delta) := \sup\{|f(t) - f(x)| : t, x \in [0, \infty), |t - x| \leq \delta\}$$

şeklinde tanımlanan $\omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonuna f nin süreklilik modülü denir.

Burada ω, δ nın bir fonksiyonudur ve $\omega_f(\delta)$ biçiminde de yazılabilir.

Süreklilik modülü aşağıdaki özelliklere sahiptir [20].

$$1) \omega_f(\delta) \geq 0$$

2) ω monoton artandır.

3) I aralığı üzerinde f fonksiyonunun düzgün sürekli olması için $\Leftrightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega_f(\delta) = 0$ olmasıdır.

4) $m \in \mathbb{N}$ için $\omega_f(m\delta) \leq m\omega_f(\delta)$

5) Bir λ pozitif sayısı için $\omega_f(\lambda\delta) \leq (1 + \lambda)\omega_f(\delta)$

6) $|f(t) - f(x)| \leq \omega_f(|t - x|)$

7) $|f(t) - f(x)| \leq \omega_f\left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1\right) \omega_f(\delta)$

2.1.7. Tanım (Hölder eşitsizliği)

$n \in \mathbb{N}$ için $a_n, b_n \geq 0$ olsun. $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olacak biçimdeki p ve q sayıları için

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır.

Burada $p = q = 2$ alındığında Cauchy Schwarz eşitsizliği elde edilir [21].

2.1.8. Tanım (İntegral için Hölder eşitsizliği)

h ve g $[a, b]$ üzerinde tanımlı, reel değerli iki fonksiyon olmak üzere $|h|^p, |g|^q$ aynı aralıkta integrallenebilir olsun.

Bu durumda $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için

$$\int_a^b |h(x)g(x)| \leq \left(\int_a^b |h(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği gerçekleşir [22].

2.1.9. Tanım (Gamma Fonksiyonu)

$\theta > 0$ olmak üzere

$$\Gamma(\theta) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\theta-1} dt$$

ile tanımlanan fonksiyona Gamma fonksiyonu denir ve $\Gamma(\theta + 1) = \theta\Gamma(\theta)$ bağıntısı sağlanır. Bu bağıntı yardımıyla $n \in \mathbb{N}$ için

$$\Gamma(\theta) = \frac{\Gamma(\theta + n)}{\theta(\theta + 1) \dots (\theta + n - 1)}$$

eşitliği elde edilir [23].

2.1.10. Tanım (Pochhammer Sembolü)

$z \in \mathbb{R}$ için

$$(z)_n = z(z + 1) \dots (z + n - 1), n \in \mathbb{N}$$

$$(z)_0 = 1$$

ile tanımlanan eşitliğe Pochhammer sembolü denir.

Bu sembol Gamma fonksiyonu yardımıyla

$$(z)_n = \frac{\Gamma(z + n)}{\Gamma(z)}$$

şeklinde de yazılabilir [24, 25].

2.1.11. Tanım (Beta fonksiyonu)

$m > 0$ ve $k > 0$ için

$$B(m, k) = \int_0^1 t^{m-1} (1 - t)^{k-1} dt$$

integrali ile tanımlanan fonksiyona Beta fonksiyonu denir.

Ayrıca Beta fonksiyonu Gamma fonksiyonu cinsinden

$$B(m, k) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(k)}{\Gamma(m+k)}$$

şeklinde yazılabilir [1, 26].

3. JAİN VE PETHE OPERATÖRLERİNİN İNTEGRAL FORMU İLE YAKLAŞIM

Bu bölümde, Deo ve Pratap tarafından hazırlanan çalışmanın merkezini oluşturan JPDB operatörlerinin tanımı verilecek ve yaklaşım özellikleri incelenecektir. Son olarak Voronovskaja tip teorem ve ağırlıklı yaklaşım sonuçlarına yer verilecektir.

3.1. JPDB Operatörlerinin Tanımı ve Özellikleri

3.1.1. Tanım

$[0, \infty)$ üzerinde tanımlı, sınırlı ve integrallenebilir bir f fonksiyonu için

$$P_{n,\alpha}(f; x) = (n-1) \sum_{i=0}^{\infty} S_{n,i}^{[\alpha]}(x) \int_0^{\infty} \binom{n+i-1}{i} \frac{t^i}{(1+t)^{n+i}} f(t) dt \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanan operatörlere JPDB operatörleri denir [17].

Burada,

$$S_{n,i}^{[\alpha]}(x) = (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}} \left(\alpha + \frac{1}{n} \right)^{-i} \frac{x^{(i,-\alpha)}}{i!}, \quad x \in [0, \infty)$$

$$x^{(i,-\alpha)} = x(x+\alpha) \dots (x+(i-1)\alpha), \quad x^{(0,-i)} = 1$$

ve

$$|f(t)| \leq K e^{At} \quad (t \geq 0)$$

$K, A > 0$ sonlu sabitlerdir. Burada her $n \in \mathbb{N}$ için

$$0 \leq \alpha_n \leq \frac{1}{n}$$

olmak üzere $\alpha = (\alpha_n)$ dir.

Şimdi teoremlerin ispatı için ihtiyaç duyacağımız bazı temel sonuçları verelim.

3.1.1. Lemma

$e_r(t) = t^r$, $r = 0,1,2,3,4$ için $J_n^{[\alpha]}$ operatörleri aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

$$(i) J_n^{[\alpha]}(e_0(t); x) = 1$$

$$(ii) J_n^{[\alpha]}(e_1(t); x) = x$$

$$(iii) J_n^{[\alpha]}(e_2(t); x) = x^2 + \left(\alpha + \frac{1}{n}\right)x$$

$$(iv) J_n^{[\alpha]}(e_3(t); x) = x^3 + 3\left(\alpha + \frac{1}{n}\right)x^2 + \left(2\alpha^2 + \frac{3\alpha}{n} + \frac{1}{n^2}\right)x$$

$$(v) J_n^{[\alpha]}(e_4(t); x) = x^4 + 6\left(\alpha + \frac{1}{n}\right)x^3 + \left(11\alpha^2 + \frac{18\alpha}{n} + \frac{7}{n^2}\right)x^2 \\ + \left(6\alpha^3 + \frac{12\alpha^2}{n} + \frac{7\alpha}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)x$$

İspat

İlk olarak işlemlerimizde kolaylık sağlaması için $x^{(i,-\alpha)} = x(x + \alpha) \dots (x + (i - 1)\alpha)$ ifadesini düzenleyelim. Bu denklemde eşitliğin sağ tarafını $\underbrace{(\alpha \cdot \alpha \dots \alpha)}_{i \text{ tane}}$ ile çarpıp bölersek

Tanım 2.1.10 yardımıyla

$$\frac{\frac{x}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha} + 1\right) \dots \left(\frac{x}{\alpha} + (i - 1)\right) \alpha^i}{i!} = \frac{\alpha^i \left(\frac{x}{\alpha} + i - 1\right)!}{i! \left(\frac{x}{\alpha} - 1\right)!}$$

bulunur. Bu ifadeyi Eş. 1.1' de yerine yazarak $r = 0,1,2,3,4$ için $J_n^{[\alpha]}(e_r(t); x)$ değerlerini bulalım.

$$(i) J_n^{[\alpha]}(1; x) = \sum_{i=0}^{\infty} (1 + n\alpha)^{-\frac{x}{\alpha}} \left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^{-i} \frac{\alpha^i \left(\frac{x}{\alpha} + i - 1\right)!}{i! \left(\frac{x}{\alpha} - 1\right)!} \\ = \sum_{i=0}^{\infty} (1 + n\alpha)^{-\frac{x}{\alpha} - i} (n\alpha)^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha} + i - 1\right)!}{i! \left(\frac{x}{\alpha} - 1\right)!} \\ = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\frac{x}{\alpha} + i - 1}{i} (n\alpha)^i (1 + n\alpha)^{-\frac{x}{\alpha} - i} = 1$$

elde edilir.

$$(ii) J_n^{[\alpha]}(t; x) = \sum_{i=0}^{\infty} (1 + n\alpha)^{-\frac{x}{\alpha}} \left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^{-i} \frac{\alpha^i \left(\frac{x}{\alpha} + i - 1\right)!}{i! \left(\frac{x}{\alpha} - 1\right)!} \frac{i}{n}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i} (n\alpha)^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i-1\right)!}{(i-1)!\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{1}{n} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i-1} (n\alpha)^{i+1} \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i\right)!}{i!\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i-1} (n\alpha)^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i\right)!}{i!\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{n\alpha}{n} \frac{x}{\alpha} \\
&= x
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
(iii) J_n^{[\alpha]}(t^2; x) &= \sum_{i=0}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}} \left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^{-i} \alpha^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i-1\right)!}{i!\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{t^2}{n^2} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i} (n\alpha)^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i-1\right)!}{(i-1)!\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{i}{n^2} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i} (n\alpha)^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i-1\right)!}{(i-1)!\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{i-1}{n^2} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i} (n\alpha)^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i-1\right)!}{(i-1)!\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{1}{n^2} \\
&= \sum_{i=2}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i} (n\alpha)^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i-1\right)!}{(i-2)!\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{1}{n^2} \\
&\quad i \mapsto i+2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i} (n\alpha)^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i-1\right)!}{(i-1)!\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{1}{n^2} \\
&\quad i \mapsto i+1 \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i-2} (n\alpha)^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i+1\right)!}{i!\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{(n\alpha)^2}{n^2} \left\lfloor \frac{x}{\alpha} \left\lfloor \frac{x}{\alpha} + 1 \right\rfloor \right\rfloor \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i-1} (n\alpha)^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i\right)!}{i!\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{n\alpha}{n^2} \left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i-2} (n\alpha)^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i+1\right)!}{i! \left(\frac{x}{\alpha}+1\right)!} \alpha^2 \frac{x}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}+1\right) \\
&+ \sum_{i=0}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i-1} (n\alpha)^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i\right)!}{i! \left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{\alpha x}{n \alpha} \\
&= \alpha x \left(\frac{x}{\alpha}+1\right) + \frac{x}{n} \\
&= x^2 + \left(\frac{x}{\alpha}+1\right) x
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
(iv) J_n^{[\alpha]}(t^3; x) &= \sum_{i=0}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}} \left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^{-i} \alpha^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i-1\right)!}{i! \left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{i^3}{n^3} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i} (n\alpha)^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i-1\right)!}{(i-1)! \left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{i^2}{n^3}
\end{aligned}$$

Bu ifadede $i^2 = i(i-1+1)$ alınırsa

$$\begin{aligned}
J_n^{[\alpha]}(t^3; x) &= \sum_{i=1}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i} (n\alpha)^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i-1\right)!}{(i-1)! \left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{i(i-1)}{n^3} \\
&+ \sum_{i=1}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i} (n\alpha)^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i-1\right)!}{(i-1)! \left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{i}{n^3} \\
&= \sum_{i=2}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i} (n\alpha)^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i-1\right)!}{(i-2)! \left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{i}{n^3} \\
&\quad i \rightarrow i+2 \\
&+ \sum_{i=1}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i} (n\alpha)^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i-1\right)!}{(i-1)! \left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{i}{n^3} \\
&\quad i \rightarrow i+1 \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i-2} (n\alpha)^{i+2} \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i+1\right)!}{i! \left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{i+2}{n^3} \\
&+ \sum_{i=0}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i-1} (n\alpha)^{i+1} \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i\right)!}{i! \left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{i+1}{n^3}
\end{aligned}$$

Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
 J_n^{[\alpha]}(t^3; x) &= \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i-2} (n\alpha)^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i+1\right)!}{(i-1)!\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{(n\alpha)^2}{n^3}}_A \\
 &+ \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i-2} (n\alpha)^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i+1\right)!}{i!\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{2(n\alpha)^2}{n^3}}_B \\
 &+ \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i-1} (n\alpha)^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i\right)!}{(i-1)!\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{n\alpha}{n^3}}_C \\
 &+ \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i-1} (n\alpha)^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i\right)!}{i!\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{n\alpha}{n^3}}_D
 \end{aligned}$$

bulunur.

Burada $i \rightarrow i+1$ alınarak A ifadesi $\left[\frac{\frac{x}{\alpha}(\frac{x}{\alpha}+1)(\frac{x}{\alpha}+2)}{\frac{x}{\alpha}(\frac{x}{\alpha}+1)(\frac{x}{\alpha}+2)} \right]$ ile B ve C ifadesi $\left[\frac{\frac{x}{\alpha}(\frac{x}{\alpha}+1)}{\frac{x}{\alpha}(\frac{x}{\alpha}+1)} \right]$ ile son olarak

D ifadesi de $\left[\frac{\frac{x}{\alpha}}{\frac{x}{\alpha}} \right]$ ile çarpılıp düzenlenirse

$$\begin{aligned}
 J_n^{[\alpha]}(t^3; x) &= \frac{\alpha^2}{n} (n\alpha) \frac{x}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}+1\right) \left(\frac{x}{\alpha}+2\right) + \frac{2\alpha^2}{n} \frac{x}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}+1\right) + \frac{1}{n} \left(x^2 + \left(\alpha + \frac{1}{n}\right)x\right) \\
 &= x^3 + 3x^2\alpha + 2\alpha^2x + \frac{2x^2}{n} + \frac{2\alpha x}{n} + \frac{x^2}{n} + \frac{\alpha x}{n} + \frac{x}{n^2} \\
 &= x^3 + 3\left(\alpha + \frac{1}{n}\right)x^2 + \left(2\alpha^2 + \frac{3\alpha}{n} + \frac{1}{n^2}\right)x
 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
 (v) J_n^{[\alpha]}(t^4; x) &= \sum_{i=0}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}} \left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^{-i} \alpha^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i-1\right)!}{i!\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{i^4}{n^4} \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i} (n\alpha)^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i-1\right)!}{(i-1)!\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{i^3}{n^4}
 \end{aligned}$$

Bu ifadede $i^3 = i \cdot i^2 = i[i(i-1) + i]$

$$= (i-1)[i(i-2) + 2i] + i(i-1) + i$$

yazalım.

$$J_n^{[\alpha]}(t^4, x)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i} (n\alpha)^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i-1\right)!}{(i-1)!\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{((i-1)[i(i-2)+2i]+i(i-1)+i)}{n^4} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i} (n\alpha)^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i-1\right)!}{(i-1)!\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{(i-1)[i(i-2)+2i]}{n^4} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i} (n\alpha)^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i-1\right)!}{(i-1)!\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{i(i-1)}{n^4} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i} (n\alpha)^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i-1\right)!}{(i-1)!\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{i}{n^4} \\
&= \sum_{i=3}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i} (n\alpha)^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i-1\right)!}{(i-3)!\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{i}{n^4} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i} (n\alpha)^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i-1\right)!}{(i-2)!\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{3i}{n^4} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i} (n\alpha)^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i-1\right)!}{(i-1)!\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{i}{n^4} \\
&= \sum_{i=3}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i} (n\alpha)^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i-1\right)!}{(i-3)!\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{i-3+3}{n^4} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i} (n\alpha)^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i-1\right)!}{(i-2)!\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{3(i-2+2)}{n^4} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i} (n\alpha)^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i-1\right)!}{(i-1)!\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{i-1+1}{n^4} \\
&= \sum_{i=4}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i} (n\alpha)^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i-1\right)!}{(i-4)!\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{1}{n^4}
\end{aligned}$$

$$i \rightarrow i+4$$

$$\begin{aligned}
&+ \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i-3} (n\alpha)^{i+3} \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i+2\right)!}{i!\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{3}{n^4}}_E
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=3}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i} (n\alpha)^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i-1\right)!}{(i-3)!\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{3}{n^4}$$

$$i \rightarrow i+3$$

$$+ \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i-2} (n\alpha)^{i+2} \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i+1\right)!}{i!\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{6}{n^4}}_F$$

$$+ \sum_{i=2}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i} (n\alpha)^i \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i-1\right)!}{(i-2)!\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{1}{n^4}$$

$$i \rightarrow i+2$$

$$+ \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} (1+n\alpha)^{\frac{-x}{\alpha}-i-1} (n\alpha)^{i+1} \frac{\left(\frac{x}{\alpha}+i\right)!}{i!\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)!} \frac{1}{n^4}}_G$$

Burada E ifadesi $\left[\frac{\frac{x}{\alpha}(\frac{x}{\alpha}+1)(\frac{x}{\alpha}+2)}{\frac{x}{\alpha}(\frac{x}{\alpha}+1)(\frac{x}{\alpha}+2)} \right]$ ile F ifadesi de $\left[\frac{\frac{x}{\alpha}(\frac{x}{\alpha}+1)}{\frac{x}{\alpha}(\frac{x}{\alpha}+1)} \right]$ ile çarpılıp sınırlar yeniden düzenlenirse son durumda

$$\begin{aligned} J_n^{[\alpha]}(t^4; x) &= \alpha^3 x \left(\frac{x}{\alpha}+1\right) \left(\frac{x}{\alpha}+2\right) \left(\frac{x}{\alpha}+3\right) + \frac{6\alpha^2}{n} x \left(\frac{x}{\alpha}+1\right) \left(\frac{x}{\alpha}+2\right) + \frac{7\alpha}{n} x \left(\frac{x}{\alpha}+1\right) \\ &\quad + \frac{1}{n^2} \left(x^2 + \alpha x + \frac{x}{n}\right) \\ &= x^4 + 6 \left(\alpha + \frac{1}{n}\right) x^3 + \left(11\alpha^2 + \frac{18\alpha}{n} + \frac{7}{n^2}\right) x^2 + \left(6\alpha^3 + \frac{12\alpha^2}{n} + \frac{7\alpha}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) x \end{aligned}$$

elde edilir.

3.1.2. Lemma

$$(i) P_{n,\alpha}(1; x) = 1$$

$$(ii) P_{n,\alpha}(t; x) = \frac{(n-3)!}{(n-2)!} (nx + 1!)$$

$$(iii) P_{n,\alpha}(t^2; x) = \frac{(n-4)!}{(n-2)!} ((nx)^2 + (\alpha n + 4)(nx) + 2!)$$

$$(iv) P_{n,\alpha}(t^3; x) = \frac{(n-5)!}{(n-2)!} ((nx)^3 + (3\alpha n + 2)(nx)^2 + (2\alpha^2 n^2 + 9\alpha n + 19)(nx) + 3!)$$

$$(v) P_{n,\alpha}(t^4; x) = \frac{(n-6)!}{(n-2)!} ((nx)^4 + 2(3\alpha n + 8)(nx)^3 + (11(\alpha n)^2 + 48\alpha n + 72)(nx)^2$$

$$+(6(\alpha n)^3 + 32(\alpha n)^2 + 72\alpha n + 96)(nx) + 4!)$$

şeklindedir.

İspat

Eş. 3.1' den

$$P_{n,\alpha}(f; x) = (n-1) \sum_{i=0}^{\infty} s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \int_0^{\infty} \binom{n+i-1}{i} \frac{t^i}{(1+t)^{n+i}} f(t) dt$$

dir.

(i) $r = 0$ için $f(t) = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} P_{n,\alpha}(1; x) &= (n-1) \sum_{i=0}^{\infty} s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \int_0^{\infty} \binom{n+i-1}{i} \frac{t^i}{(1+t)^{n+i}} dt \\ &= (n-1) \sum_{i=0}^{\infty} s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \int_0^{\infty} \frac{(n+i-1)!}{(n-1)! i!} t^i (1+t)^{-(n+i)} dt \end{aligned}$$

İntegralde $t = \frac{u}{1-u}$ dönüşümü yapılırsa

$$t_1 = 0, \quad u_1 = 0$$

$$t_2 = \infty, \quad u_2 = 1$$

$$dt = (1-u)^{-2} du$$

$$1+t = (1-u)^{-1}$$

bulunur ve integralin lineerlik özelliğinden

$$P_{n,\alpha}(1; x) = (n-1) \sum_{i=0}^{\infty} s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \frac{(n+i-1)!}{(n-1)! i!} \int_0^1 u^i (1-u)^{n-2} du$$

yazılabilir. Tanım 2.1.11' den

$$\begin{aligned} P_{n,\alpha}(1; x) &= (n-1) \sum_{i=0}^{\infty} s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \frac{(n+i-1)!}{(n-1)! i!} \beta(i+1, n-1) \\ &= (n-1) \sum_{i=0}^{\infty} s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \frac{(n+i-1)!}{(n-1)! i!} \frac{\Gamma(i+1) \Gamma(n-1)}{\Gamma(n+i)} \end{aligned}$$

olup gerekli sadeleştirmeler yapılarak Lemma 3.1.1 (i) yardımıyla

$$P_{n,\alpha}(1; x) = \sum_{i=0}^{\infty} s_{n,i}^{[\alpha]}(x) = J_n^{[\alpha]}(1, x) = 1$$

elde edilir.

(ii) $r = 1$ için $f(t) = t$ olmak üzere

$$\begin{aligned} P_{n,\alpha}(t; x) &= (n-1) \sum_{i=0}^{\infty} s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \int_0^{\infty} \binom{n+i-1}{i} \frac{t^i}{(1+t)^{n+i}} t dt \\ &= (n-1) \sum_{i=0}^{\infty} s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \int_0^{\infty} \frac{(n+i-1)!}{(n-1)! i!} t^{i+1} (1+t)^{-(n+i)} dt \\ &= (n-1) \sum_{i=0}^{\infty} s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \frac{(n+i-1)!}{(n-1)! i!} \int_0^{\infty} t^{i+1} (1+t)^{-(n+i)} dt \end{aligned}$$

$t = \frac{u}{1-u}$ dönüşümünden $dt = (1-u)^{-2} du$ ve $1+t = (1-u)^{-1}$ ifadeleri yerine yazılırsa

$$P_{n,\alpha}(t, x) = (n-1) \sum_{i=0}^{\infty} s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \frac{(n+i-1)!}{(n-1)! i!} \int_0^1 u^{i+1} (1-u)^{n-3} du$$

bulunur ve Tanım 2.1.11' den

$$P_{n,\alpha}(t; x) = (n-1) \sum_{i=0}^{\infty} s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \frac{(n+i-1)! \Gamma(i+2) \Gamma(n-2)}{(n-1)! i! \Gamma(n+i)}$$

olur.

Gamma fonksiyonunun özellikleri kullanılarak

$$P_{n,\alpha}(t; x) = \sum_{i=0}^{\infty} s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \frac{i+1}{n-2}$$

eşitliği elde edilir. Sağ tarafı $\frac{n}{n}$ ile çarpalım.

$$P_{n,\alpha}(t, x) = \frac{n}{n-2} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \frac{i}{n} + \sum_{i=0}^{\infty} s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \frac{1}{n} \right\}$$

Lemma 3.1.1 (i) ve (ii)'den

$$\begin{aligned} P_{n,\alpha}(t; x) &= \frac{n}{n-2} \left\{ J_n^{[\alpha]}(t; x) + \frac{1}{n} J_n^{[\alpha]}(1; x) \right\} \\ &= \frac{nx+1}{n-2} = \frac{(n-3)!}{(n-2)!} (nx+1!) \end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) $r = 2$ için $f(t) = t^2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} P_{n,\alpha}(t^2; x) &= (n-1) \sum_{i=0}^{\infty} s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \int_0^{\infty} \binom{n+i-1}{i} \frac{t^i}{(1+t)^{n+i}} t^2 dt \\ &= (n-1) \sum_{i=0}^{\infty} s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \int_0^{\infty} \frac{(n+i-1)!}{(n-1)! i!} t^{i+2} (1+t)^{-(n+i)} dt \end{aligned}$$

olur. İntegralin lineerliğinden ve $t = \frac{u}{1-u}$ dönüşümünden

$$P_{n,\alpha}(t^2; x) = (n-1) \sum_{i=0}^{\infty} s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \frac{(n+i-1)!}{(n-1)! i!} \int_0^1 u^{i+2} (1-u)^{n-4} du$$

bulunur. Tanım 2.1.11' deki Beta ve Gamma fonksiyonunun özelliklerinden

$$\begin{aligned} P_{n,\alpha}(t^2; x) &= (n-1) \sum_{i=0}^{\infty} s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \frac{(n+i-1)! \Gamma(i+3) \Gamma(n-3)}{(n-1)! i! \Gamma(n+i)} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \frac{i^2 + 3i + 2}{(n-2)(n-3)} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadeyi $\frac{n^2}{n^2}$ ile çarpalım.

$$P_{n,\alpha}(t^2; x) = \frac{n^2}{(n-2)(n-3)} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \frac{i^2}{n^2} + \frac{3}{n} \sum_{i=0}^{\infty} s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \frac{i}{n} + \frac{2}{n^2} \sum_{i=0}^{\infty} s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \right\}$$

olup Lemma 3.1.1 (i), (ii), (iii)'den

$$\begin{aligned} P_{n,\alpha}(t^2; x) &= \frac{n^2}{(n-2)(n-3)} \left\{ J_n^{[\alpha]}(t^2; x) + \frac{3}{n} J_n^{[\alpha]}(t; x) + \frac{2}{n^2} J_n^{[\alpha]}(1; x) \right\} \\ &= \frac{(nx)^2 + (n\alpha + 4)(nx) + 2}{(n-2)(n-3)} \\ &= \frac{(n-4)!}{(n-2)!} ((nx)^2 + (\alpha n + 4)(nx) + 2!) \end{aligned}$$

elde edilir.

(iv) $r = 3$ için $f(t) = t^3$ olmak üzere

$$\begin{aligned} P_{n,\alpha}(t^3; x) &= (n-1) \sum_{i=0}^{\infty} s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \int_0^{\infty} \binom{n+i-1}{i} \frac{t^i}{(1+t)^{n+i}} t^3 dt \\ &= (n-1) \sum_{i=0}^{\infty} s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \int_0^{\infty} \frac{(n+i-1)!}{(n-1)! i!} t^{i+3} (1+t)^{-(n+i)} dt. \end{aligned}$$

İntegralin lineerliğinden ve $t = \frac{u}{1-u}$ dönüşümünden

$$\begin{aligned}
P_{n,\alpha}(t^3; x) &= (n-1) \sum_{i=0}^{\infty} s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \frac{(n+i-1)!}{(n-1)! i!} \int_0^1 u^{i+3} (1-u)^{n-5} du \\
&= (n-1) \sum_{i=0}^{\infty} s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \frac{(n+i-1)!}{(n-1)! i!} \frac{\Gamma(i+4)\Gamma(n-4)}{\Gamma(n+i)}
\end{aligned}$$

olup Beta ve Gamma fonksiyonlarının özelliklerinden

$$P_{n,\alpha}(t^3; x) = \sum_{i=0}^{\infty} s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \frac{i^3 + 6i^2 + 11i + 6}{(n-2)(n-3)(n-4)}$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafı $\frac{n^3}{n^3}$ ile çarpılarak sadeleştirilir ve Lemma 3.1.1 (i), (ii), (iii), (iv)'deki sonuçlar kullanılırsa

$$\begin{aligned}
P_{n,\alpha}(t^3; x) &= \frac{n^3}{(n-2)(n-3)(n-4)} \left\{ J_n^{[\alpha]}(t^3; x) + 6J_n^{[\alpha]}(t^2; x) + 11J_n^{[\alpha]}(t; x) + 6J_n^{[\alpha]}(1; x) \right\} \\
&= \frac{1}{(n-2)(n-3)(n-4)} \{ (nx)^3 + (3\alpha n + 2)(nx)^2 + (2\alpha^2 n^2 + 9\alpha n + 19)(nx) + 6 \} \\
&= \frac{(n-5)!}{(n-2)!} ((nx)^3 + (3\alpha n + 2)(nx)^2 + (2\alpha^2 n^2 + 9\alpha n + 19)(nx) + 3!)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(v) $r = 4$ için $f(t) = t^4$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
P_{n,\alpha}(t^4; x) &= (n-1) \sum_{i=0}^{\infty} s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \int_0^{\infty} \binom{n+i-1}{i} \frac{t^i}{(1+t)^{n+i}} t^4 dt \\
&= (n-1) \sum_{i=0}^{\infty} s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \int_0^{\infty} \frac{(n+i-1)!}{(n-1)! i!} t^{i+4} (1+t)^{-(n+i)} dt.
\end{aligned}$$

İntegralin lineerliğinden ve $t = \frac{u}{1-u}$ dönüşümünden

$$P_{n,\alpha}(t^4; x) = (n-1) \sum_{i=0}^{\infty} s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \frac{(n+i-1)!}{(n-1)! i!} \int_0^1 u^{i+4} (1-u)^{n-6} du$$

olur. Tanım 2.1.11' den

$$P_{n,\alpha}(t^4; x) = (n-1) \sum_{i=0}^{\infty} s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \frac{(n+i-1)!}{(n-1)! i!} \frac{\Gamma(i+5)\Gamma(n-5)}{\Gamma(n+i)}$$

olup

$$P_{n,\alpha}(t^4; x) = \sum_{i=0}^{\infty} S_{n,i}^{[\alpha]}(x) \frac{i^4 + 10i^3 + 35i^2 + 50i + 24}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}$$

eşitliğine ulaşılır. Burada sağ taraf $\frac{n^4}{n^4}$ ile çarpılarak Lemma 3.1.1'deki sonuçlar kullanılırsa

$$\begin{aligned} P_{n,\alpha}(t^4; x) &= \frac{n^4}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} \left\{ J_n^{[\alpha]}(t^4; x) + 10J_n^{[\alpha]}(t^3; x) + 35J_n^{[\alpha]}(t^2; x) \right. \\ &\quad \left. + 50J_n^{[\alpha]}(t; x) + 24J_n^{[\alpha]}(1; x) \right\} \\ &= \frac{1}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} \{ (nx)^4 + 2(3\alpha n + 8)(nx)^3 + (11(\alpha n)^2 \\ &\quad + 48\alpha n + 72)(nx)^2 + (6(\alpha n)^3 + 32(\alpha n)^2 + 72\alpha n + 96)(nx) + 24 \} \\ &= \frac{(n-6)!}{(n-2)!} ((nx)^4 + 2(3\alpha n + 8)(nx)^3 + (11(\alpha n)^2 + 48\alpha n + 72)(nx)^2 \\ &\quad + (6(\alpha n)^3 + 32(\alpha n)^2 + 72\alpha n + 96)(nx) + 4!) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

3.1.3. Lemma

$\forall x \in [0, \infty)$ için $\mu = t - x$ olsun. Eş. 3.1' de verilen JPDB operatörleri aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

$$\text{i) } P_{n,\alpha}(\mu; x) = \frac{(n-3)!}{(n-2)!} (1 + 2x)$$

$$\text{ii) } P_{n,\alpha}(\mu^2; x) = \frac{(n-4)!}{(n-2)!} ((n+6)x^2 + (n(\alpha n + 1) - 2(n-1))x + 2)$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } P_{n,\alpha}(\mu^4; x) &= \frac{(n-6)!}{(n-2)!} ((3n^2 + 86n + 120)x^4 + 2(3\alpha n^3 + (60\alpha + 6)n^2 + 146n + 120)x^3 \\ &\quad + (3\alpha^2 n^4 + 4\alpha(10\alpha + 3)n^2 + 12(15\alpha + 1)n^2 + 252n + 240)x^2 \\ &\quad + 2(3\alpha^3 n^4 + 16\alpha^2 n^3 + 36\alpha n^2 + 36n + 60)x + 4!) \end{aligned}$$

İspat

$\mu = t - x$ olsun. $P_{n,\alpha}$ operatörlerinin lineerliğinden yararlanalım.

i) Lemma 3.1.2 (i) ve (ii)' den

$$P_{n,\alpha}(\mu; x) = P_{n,\alpha}(t, x) - x P_{n,\alpha}(1, x) = \frac{nx + 1}{n - 2} - x = \frac{2x + 1}{n - 2} = \frac{(n - 3)!}{(n - 2)!} (1 + 2x)$$

elde edilir.

ii) Lemma 3.1.2 (i), (ii), (iii)' den

$$\begin{aligned} P_{n,\alpha}(\mu^2; x) &= P_{n,\alpha}(t^2, x) - 2xP_{n,\alpha}(t, x) + x^2P_{n,\alpha}(1, x) \\ &= \frac{(n - 4)!}{(n - 2)!} ((nx)^2 + (\alpha n + 4)(nx) + 2!) - 2x \frac{(n - 3)!}{(n - 2)!} (nx + 1!) + x^2 \\ &= \frac{(n - 4)!}{(n - 2)!} ((nx)^2 + (\alpha n + 4)(nx) + 2) - 2x \frac{(n - 3)(n - 4)!}{(n - 2)!} (nx + 1) + x^2 \end{aligned}$$

Yukarıdaki ifadenin son terimi $(n - 2)!$ ile çarpılıp bölünürse

$$\begin{aligned} P_{n,\alpha}(\mu^2; x) &= \frac{(n - 4)!}{(n - 2)!} ((nx)^2 + (\alpha n + 4)(nx) + 2) - 2x \frac{(n - 3)(n - 4)!}{(n - 2)!} (nx + 1) \\ &\quad + \frac{(n - 2)!}{(n - 2)!} x^2 \\ &= \frac{(n - 4)!}{(n - 2)!} ((nx)^2 + (\alpha n + 4)(nx) + 2) - 2x \frac{(n - 3)(n - 4)!}{(n - 2)!} (nx + 1) \\ &\quad + \frac{(n - 2)(n - 3)(n - 4)!}{(n - 2)!} x^2 \\ &= \frac{(n - 4)!}{(n - 2)!} \{ (nx)^2 + (\alpha n + 4)(nx) + 2 - 2x(n - 3)(nx + 1) \\ &\quad + (n - 2)(n - 3)x^2 \} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

Eşitliğin sağ tarafı düzenlenirse

$$P_{n,\alpha}(\mu^2; x) = \frac{(n - 4)!}{(n - 2)!} \{ (n + 6)x^2 + (n(\alpha n + 1) - 2(n - 1))x + 2 \}$$

bulunur.

iii) Lemma 3.1.2 (i), (ii), (iii), (iv) ve (v)' den

$$\begin{aligned} P_{n,\alpha}(\mu^4; x) &= P_{n,\alpha}(t^4, x) - 4xP_{n,\alpha}(t^3, x) + 6x^2P_{n,\alpha}(t^2, x) - 4x^3P_{n,\alpha}(t, x) + x^4P_{n,\alpha}(1, x) \\ &= \frac{(n - 6)!}{(n - 2)!} ((nx)^4 + 2(3\alpha n + 8)(nx)^3 + (11(\alpha n)^2 + 48\alpha n + 72)(nx)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (6(\alpha n)^3 + 32(\alpha n)^2 + 72\alpha n + 96)(nx) + 4!) - 4x \frac{(n-5)!}{(n-2)!} ((nx)^3 + (3\alpha n \\
& + 2)(nx)^2 + (2\alpha^2 n^2 + 9\alpha n + 19)(nx) + 3!) + 6x^2 \frac{(n-4)!}{(n-2)!} ((nx)^2 \\
& + (\alpha n + 4)(nx) + 2!) - 4x^3 \frac{(n-3)!}{(n-2)!} (nx + 1!) + x^4 \\
& = \frac{(n-6)!}{(n-2)!} (n^4 x^4 + (6\alpha n^2 + 16n)x^3 + (11\alpha^2 n^4 + 48\alpha n^3 + 72n^2)x^2 \\
& + (6\alpha^3 n^4 + 32\alpha^2 n^3 + 72\alpha n^2 + 96n)x + 24) - 4x \frac{(n-5)(n-6)!}{(n-2)!} (n^3 x^3 \\
& + (3\alpha n^3 + 2n^2)x^2 + (2\alpha^2 n^3 + 9\alpha n^2 + 19n)x + 6) \\
& + 6x^2 \frac{(n-4)(n-5)(n-6)!}{(n-2)!} (n^2 x^2 + (\alpha n^2 + 4n)x + 2) \\
& - 4x^3 \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)!}{(n-2)!} (nx + 1) + x^4
\end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitlikte x^4 ün katsayısı 1 olduğundan $\frac{(n-2)!}{(n-2)!} x^4$ şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned}
P_{n,\alpha}(\mu^4; x) &= \frac{(n-6)!}{(n-2)!} (n^4 x^4 + (6\alpha n^2 + 16n)x^3 + (11\alpha^2 n^4 + 48\alpha n^3 + 72n^2)x^2 \\
&+ (6\alpha^3 n^4 + 32\alpha^2 n^3 + 72\alpha n^2 + 96n)x + 24) - 4x \frac{(n-5)(n-6)!}{(n-2)!} (n^3 x^3 \\
&+ (3\alpha n^3 + 2n^2)x^2 + (2\alpha^2 n^3 + 9\alpha n^2 + 19n)x + 6) \\
&+ 6x^2 \frac{(n-4)(n-5)(n-6)!}{(n-2)!} (n^2 x^2 + (\alpha n^2 + 4n)x + 2) \\
&- 4x^3 \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)!}{(n-2)!} (nx + 1) + \frac{(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-2)!} x^4
\end{aligned}$$

Eşitliğin sağ tarafı $\frac{(n-6)!}{(n-2)!}$ ortak parantezine alınarak düzenlenirse

$$\begin{aligned}
P_{n,\alpha}(\mu^4; x) &= \frac{(n-6)!}{(n-2)!} \{ n^4 x^4 + (6\alpha n^2 + 16n)x^3 + (11\alpha^2 n^4 + 48\alpha n^3 + 72n^2)x^2 \\
&+ (6\alpha^3 n^4 + 32\alpha^2 n^3 + 72\alpha n^2 + 96n)x + 24) + (-4n^4 + 20n^3)x^4 \\
&+ (-12\alpha n^4 - 8n^3 + 60\alpha n^3 + 40n^2)x^3 + (-8\alpha^2 n^4 - 36\alpha n^3 - 76n^2 \\
&+ 40\alpha^2 n^3 + 180\alpha n^2 + 380n)x^2 + (-24n + 120)x + (6n^4 - 54n^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +120n^2)x^4 + (6\alpha n^4 - 54\alpha n^3 + 120\alpha n^2 + 24n^3 - 216n^2 + 480n)x^3 \\
& + (12n^2 - 108n + 240)x^2 - (4n^4 - 48n^3 + 188n^2 - 240n)x^4 - (4n^3 \\
& - 48n^2 + 188n - 240)x^3 + (n^4 - 14n^3 + 71n^2 - 154n + 120)x^4 \\
& = \frac{(n-6)!}{(n-2)!} ((3n^2 + 86n + 120)x^4 + 2(3\alpha n^3 + (60\alpha + 6)n^2 + 146n \\
& + 120)x^3 + (3\alpha^2 n^4 + 4\alpha(10\alpha + 3)n^2 + 12(15\alpha + 1)n^2 + 252n + 240)x^2 \\
& + 2(3\alpha^3 n^4 + 16\alpha^2 n^3 + 36\alpha n^2 + 36n + 60)x + 4!)
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.1.4. Lemma

$\lim_{n \rightarrow \infty} n\alpha = \ell$ ve $\ell \in \mathbb{R}$ olsun. $\mu = t - x$ olmak üzere Lemma 3.1.3' teki merkezi momentler için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} nP_{n,\alpha}(\mu; x) = 1 + 2x$

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} nP_{n,\alpha}(\mu^2; x) = x(x + \ell - 1)$

iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 P_{n,\alpha}(\mu^4; x) = 3x^2(x^2 + (\ell + 2)x + (\ell + 2)^2) .$

İspat

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} nP_{n,\alpha}(\mu; x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{(n-3)!}{(n-2)!} (1 + 2x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1 + 2x)}{n-2} = 1 + 2x .$

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} nP_{n,\alpha}(\mu^2; x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{(n-4)!}{(n-2)!} ((n+6)x^2 + (n(\alpha n + 1) - 2(n-1))x + 2)$

$$\begin{aligned}
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n((n+6)x^2 + (n(\alpha n + 1) - 2(n-1))x + 2)}{(n-2)(n-3)} \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+6)x^2}{(n-2)(n-3)} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(n^2 + n)x}{(n-2)(n-3)} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2(n-1)x}{(n-2)(n-3)} \\
& \quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(n-2)(n-3)}
\end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} n\alpha = \ell$ ve $\ell \in \mathbb{R}$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} 3n\alpha = \ell$ dersek

$\lim_{n \rightarrow \infty} nP_{n,\alpha}(\mu^2; x) = x(x + \ell - 1)$

elde edilir.

$$\text{iii) } \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 P_{n,\alpha}(\mu^4; x)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left\{ \frac{(n-6)!}{(n-2)!} ((3n^2 + 86n + 120)x^4 \right. \\ &\quad + 2(3\alpha n^3 + (60\alpha + 6)n^2 + 146n + 120)x^3 \\ &\quad + (3\alpha^2 n^4 + 4\alpha(10\alpha + 3)n^2 + 12(15\alpha + 1)n^2 + 252n + 240)x^2 \\ &\quad \left. + 2(3\alpha^3 n^4 + 16\alpha^2 n^3 + 36\alpha n^2 + 36n + 60)x + 4!) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left\{ \frac{1}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} ((3n^2 + 86n + 120)x^4 \right. \\ &\quad + 2(3\alpha n^3 + (60\alpha + 6)n^2 + 146n + 120)x^3 \\ &\quad + (3\alpha^2 n^4 + 4\alpha(10\alpha + 3)n^2 + 12(15\alpha + 1)n^2 + 252n + 240)x^2 \\ &\quad \left. + 2(3\alpha^3 n^4 + 16\alpha^2 n^3 + 36\alpha n^2 + 36n + 60)x + 4!) \right\} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 P_{n,\alpha}(\mu^4; x)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n^4 - 14n^3 + 71n^2 - 154n + 120} ((3n^4 + 86n^3 + 120n^2)x^4 \right. \\ &\quad + (6\alpha n^5 + (120\alpha + 12)n^4 + 292n^3 + 240n^2)x^3 \\ &\quad + (3\alpha^2 n^6 + 4\alpha(10\alpha + 3)n^4 + 12(15\alpha + 1)n^4 + 252n^3 + 240n^2)x^2 \\ &\quad \left. + (6\alpha^3 n^6 + 32\alpha^2 n^5 + 72\alpha n^4 + 72n^3 + 120n^2)x + 24n^2) \right\} \\ &= 3x^2(x^2 + (\ell + 2)x + (\ell + 2)^2) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

3.2. JPDB Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri

Bu kısımda, Deo ve Pratap tarafından Eş. 3.1 ile verilen $P_{n,\alpha}$ operatörlerinin yaklaşım özellikleri incelenecektir.

3.2.1. Doğrudan yaklaşım sonuçları

Korovkin teoremini kullanarak $P_{n,\alpha}$ operatörünün düzgün yakınsaklığını aşağıda verelim.

3.2.1. Teorem

$f \in C[0, \infty) \cap E$ olsun. Bu durumda $(0, \infty)$ aralığının her kompakt alt kümesi üzerinde düzgün olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,\alpha}(f; x) = f(x)$$

gerçeklenir. Burada

$$E := \left\{ f : x \in [0, \infty), \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{1+x^2} \text{ mevcut} \right\}, \quad C[0, \infty) = \{f : f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ sürekli}\}$$

ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ olmak üzere $\alpha = (\alpha_n)$ dir [27].

İspat

$f \in C[0, \infty) \cap E$ için $[0, s]$ kompakt alt kümeleri üzerinde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_{n,\alpha}(e_v) - e_v\|_{[0,s]} = 0, \quad v = 0, 1, 2$$

olduğunu göstermeliyiz.

$v = 0$ için Lemma 3.1.2 (i)' den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_{n,\alpha}(e_0) - e_0\|_{[0,s]} = 0$$

olduğu açıktır.

$v = 1$ için Lemma 3.1.2 (ii)' den

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_{n,\alpha}(e_1) - e_1\|_{[0,s]} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq s} \left| \frac{(n-3)!}{(n-2)!} (nx+1!) - x \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq s} \left| \frac{nx+1}{n-2} - x \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n-2} \max_{0 \leq x \leq s} |1+2x| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2s}{n-2} = 0 \end{aligned}$$

bulunur.

$v = 2$ için Lemma 3.1.2 (iii)' den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_{n,\alpha}(e_2) - e_2\|_{[0,s]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq s} \left| \frac{(n-4)!}{(n-2)!} ((nx)^2 + (nx+4)(nx) + 2!) - x^2 \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq s} \left| \frac{1}{(n-2)(n-3)} ((nx)^2 + (\alpha n + 4)(nx) + 2) - x^2 \right| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n-2)(n-3)} \max_{0 \leq x \leq s} |(\alpha n^2 + 4n)x + (5n-6)x^2 + 2| \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\alpha n^2 + 4n)s + (5n-6)s^2 + 2}{(n-2)(n-3)}
\end{aligned}$$

olup $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ olduğu dikkate alınır

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_{n,\alpha}(e_2) - e_2\|_{[0,s]} = 0$$

bulunur.

O halde $v = 0, 1, 2$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_{n,\alpha}(e_v) - e_v\|_{[0,s]} = 0$$

sağlanır.

Dolayısıyla Korovkin teoremi gereğince $\forall f \in C[0, \infty) \cap E$ için $[0, s]$ kompakt alt kümeleri üzerinde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_{n,\alpha}(f) - f\|_{[0,s]} = 0 \text{ olup } P_{n,\alpha}(f) \rightrightarrows f$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

3.2.1. Tanım

$[0, \infty)$ aralığında tanımlı, reel değerli, sürekli ve sınırlı fonksiyonların sınıfı olan $C_B[0, \infty)$ uzayı

$$\|f\| = \sup_{x \in [0, \infty)} |f(x)|$$

normu ile bir normlu uzaydır.

$f \in C_B[0, \infty)$ için Peetre K-fonksiyoneli,

$$K_2(f; \delta) = \inf_{g \in C_B^2[0, \infty)} \{ \|f - g\|_{C_B[0, \infty)} + \delta \|g''\|_{C_B[0, \infty)} \}, \delta > 0 \quad (3.2)$$

burada

$$C_B^2[0, \infty) = \{g \in C_B[0, \infty): g', g'' \in C_B[0, \infty)\}$$

dir [28].

Her $f \in C_B[0, \infty)$ için

$$K_2(f; \delta) \leq C \omega_2(f; \sqrt{\delta}) \quad (3.3)$$

olacak şekilde pozitif bir C sabiti vardır. Burada $\omega_2(f; \sqrt{\delta})$ ikinci süreklilik modülüdür [29].

f fonksiyonunun ikinci süreklilik modülü $\delta > 0$ için

$$\omega_2(f; \delta) := \sup_{0 \leq h \leq \delta} \sup_{x \in [0, \infty)} |f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)| \quad (3.4)$$

eşitliği ile tanımlıdır.

$f \in C_B[0, \infty)$ için birinci süreklilik modülü ise

$$\omega(f; \delta) := \sup_{0 \leq h \leq \delta} \sup_{x \in [0, \infty)} |f(x+h) - f(x)| \quad (3.5)$$

dır.

Şimdi, ikinci süreklilik modülü yardımıyla $P_{n,\alpha}$ operatörlerinin yaklaşım hızını verelim.

3.2.2. Teorem

$f \in C_B[0, \infty)$ ve her $x \in [0, \infty)$ için

$$|P_{n,\alpha}(f; x) - f(x)| \leq M \omega_2\left(f, \frac{\beta_n(x)}{2}\right) + \omega(f; \gamma_n)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada M pozitif sabit ve

$$\beta_n(x) = \sqrt{P_{n,\alpha}(\mu^2; x) + \frac{1}{2} \left(\frac{2x+1}{n-2}\right)^2} \quad (3.6)$$

$$\gamma_n(x) = P_{n,\alpha}(\mu; x) \quad (3.7)$$

olup $\mu = t - x$ dir. Diğer yandan $n \rightarrow \infty$ için hem $\beta_n(x)$ hem de $\gamma_n(x)$ sifira gider.

İspat

$x \in [0, \infty)$ için $\hat{P}_{n,\alpha}$ yardımcı operatörünü aşağıdaki şekilde inşaa edelim.

$$\hat{P}_{n,\alpha}(f; x) = P_{n,\alpha}(f; x) - f\left(\frac{nx+1}{n-2}\right) + f(x) \quad (3.8)$$

Lemma 3.1.2 (i)'den

$$\hat{P}_{n,\alpha}(1; x) = P_{n,\alpha}(1; x) - 1 + 1 = 1 \quad (3.9)$$

ve Lemma 3.1.2 (ii)' den

$$\begin{aligned}
 \hat{P}_{n,\alpha}(t; x) &= P_{n,\alpha}(t; x) - \frac{nx + 1}{n - 2} + x \\
 &= \frac{nx + 1}{n - 2} - \frac{1 + nx}{n - 2} + x \\
 &= x
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

olur. $\hat{P}_{n,\alpha}(1; x) = 1$ ve $\hat{P}_{n,\alpha}(t; x) = x$ olduğundan sabit ve lineer fonksiyonların $\hat{P}_{n,\alpha}$ yardımcı operatörü tarafından korunduğu söylenebilir.

$$\mu = t - x \text{ için } \hat{P}_{n,\alpha}(\mu; x) = \hat{P}_{n,\alpha}(t; x) - x\hat{P}_{n,\alpha}(1; x) = x - x = 0.$$

$g \in C_B^2[0, \infty)$ ve $x, t \in [0, \infty)$ olsun. Taylor formülünden

$$g(t) = g(x) + \mu g'(x) + \int_x^t (t - u) g''(u) du$$

yazılabilir. Taylor açılımının her iki tarafına $\hat{P}_{n,\alpha}$ operatörü uygulanırsa;

$$\hat{P}_{n,\alpha}(g(t); x) = \hat{P}_{n,\alpha}(g(x); x) + \hat{P}_{n,\alpha}(\mu g'(x); x) + \hat{P}_{n,\alpha}\left(\int_x^t (t - u) g''(u) du ; x\right)$$

elde edilir. $\hat{P}_{n,\alpha}$ operatörünün lineerlik özelliğinden

$$\hat{P}_{n,\alpha}(g(t); x) = g(x)\hat{P}_{n,\alpha}(1; x) + g'(x)\hat{P}_{n,\alpha}(\mu; x) + \hat{P}_{n,\alpha}\left(\int_x^t (t - u) g''(u) du ; x\right)$$

ve Eş. 3.9 ve Eş. 3.10' daki değerler yerine yazılarak düzenleme yapılırsa

$$\hat{P}_{n,\alpha}(g(t); x) - g(x) = \hat{P}_{n,\alpha}\left(\int_x^t (t - u) g''(u) du ; x\right)$$

elde edilir.

$$t = \frac{nx + 1}{n - 2}$$

için Eş. 3.8' deki $\hat{P}_{n,\alpha}$ yardımcı operatörün tanımından

$$\begin{aligned}
 \hat{P}_{n,\alpha}(g(t); x) - g(x) &= P_{n,\alpha}\left(\int_x^t (t - u) g''(u) du ; x\right) - \int_x^{\frac{nx+1}{n-2}} \left(\frac{nx+1}{n-2} - u\right) g''(u) du \\
 &\quad + \underbrace{\int_x^x \left(\frac{nx+1}{n-2} - u\right) g''(u) du}_0
 \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} & \hat{P}_{n,\alpha}(g(t); x) - g(x) \\ &= P_{n,\alpha} \left(\int_x^t (t-u) g''(u) du ; x \right) - \int_x^{\frac{nx+1}{n-2}} \left(\frac{nx+1}{n-2} - u \right) g''(u) du \end{aligned} \quad (3.11)$$

bulunur.

Diğer yandan, $|g''(u)| \leq \|g''\|$ olduğundan

$$\begin{aligned} \left| \int_x^t (t-u) g''(u) du \right| &\leq \int_x^t |(t-u) g''(u)| du \\ &\leq \int_x^t |t-u| |g''(u)| du \leq \|g''\| \frac{(t-x)^2}{2} \end{aligned}$$

olur. $\mu = t - x$ seçilirse

$$\left| \int_x^t (t-u) g''(u) du \right| \leq \mu^2 \|g''\| \quad (3.12)$$

eşitsizliği yazılabilir.

Eş. 3.11' deki ifadenin her iki taraftan mutlak değeri alınarak üçgen eşitsizliği ve operatörlerin monotonluk özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} |\hat{P}_{n,\alpha}(g(t); x) - g(x)| &= \left| P_{n,\alpha} \left(\int_x^t (t-u) g''(u) du ; x \right) - \int_x^{\frac{nx+1}{n-2}} \left(\frac{nx+1}{n-2} - u \right) g''(u) du \right| \\ &\leq \left| P_{n,\alpha} \left(\int_x^t (t-u) g''(u) du ; x \right) \right| + \left| \int_x^{\frac{nx+1}{n-2}} \left(\frac{nx+1}{n-2} - u \right) g''(u) du \right| \\ &\leq P_{n,\alpha} \left(\left| \int_x^t (t-u) g''(u) du \right| ; x \right) + \left| \int_x^{\frac{nx+1}{n-2}} \left(\frac{nx+1}{n-2} - u \right) g''(u) du \right| \end{aligned}$$

elde edilir.

Eş. 3.12' den ve $P_{n,\alpha}$ operatörünün lineerliğinden

$$|\hat{P}_{n,\alpha}(g(t); x) - g(x)| \leq \|g''\| P_{n,\alpha}(\mu^2; x) + \|g''\| \underbrace{\int_x^{\frac{nx+1}{n-2}} \left| \frac{nx+1}{n-2} - u \right| du}_{\mathcal{A}} \quad (3.13)$$

$\mathcal{A}$ integralinde $\frac{nx+1}{n-2} = t$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\mathcal{A} = \int_x^t (t-u) du = \frac{(t-x)^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1+2x}{n-2} \right)^2.$$

Bu ifadeyi Eş. 3.13' de yerine yazıp düzenlersek Eş. 3.6' dan ve

$\|g\|_{C_B^2[0,\infty)} = \|g\|_\infty + \|g'\|_\infty + \|g''\|_\infty$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} |\hat{P}_{n,\alpha}(g(t); x) - g(x)| &\leq \|g''\| \left[P_{n,\alpha}(\mu^2; x) + \frac{1}{2} \left(\frac{2x+1}{n-2} \right)^2 \right] \\ |\hat{P}_{n,\alpha}(g(t); x) - g(x)| &\leq \beta_n^2(x) \|g\|_{C_B^2[0,\infty)} \end{aligned} \quad (3.14)$$

bulunur.

Şimdi $\hat{P}_{n,\alpha}$ operatörünün tanımından ve Lemma 3.1.2' yi kullanarak aşağıdaki eşitsizliği elde edebiliriz:

$$\begin{aligned} |\hat{P}_{n,\alpha}(f; x)| &= \left| P_{n,\alpha}(f; x) - f\left(\frac{nx+1}{n-2}\right) + f(x) \right| \\ &\leq |P_{n,\alpha}(f; x)| + \left| f\left(\frac{nx+1}{n-2}\right) - f(x) \right| \\ &\leq 3\|f\|_\infty \end{aligned} \quad (3.15)$$

$f \in C_B[0, \infty)$ ve $g \in C_B^2[0, \infty)$ için Eş. 3.8, Eş. 3.14 ve Eş. 3.15 dikkate alınır

$$P_{n,\alpha}(f; x) = \hat{P}_{n,\alpha}(f, x) + f\left(\frac{nx+1}{n-2}\right) - f(x).$$

$$\begin{aligned} &|P_{n,\alpha}(f; x) - f(x)| \\ &= \left| \hat{P}_{n,\alpha}(f; x) + f\left(\frac{nx+1}{n-2}\right) - f(x) - f(x) \right| \\ &= \left| \hat{P}_{n,\alpha}(f; x) - \hat{P}_{n,\alpha}(g; x) + \hat{P}_{n,\alpha}(g; x) - g(x) + g(x) + f\left(\frac{nx+1}{n-2}\right) - f(x) - f(x) \right| \\ &\leq |\hat{P}_{n,\alpha}(f - g; x)| + |\hat{P}_{n,\alpha}(g; x) - g(x)| + |g(x) - f(x)| + \left| f\left(\frac{nx+1}{n-2}\right) - f(x) \right| \\ &\leq 4\|f - g\| + \beta_n^2(x) \|g\|_{C_B^2[0,\infty)} + \left| f\left(\frac{nx+1}{n-2}\right) - f(x) \right| \end{aligned}$$

olur.

Diğer yandan, süreklilik modülünün tanımından

$$|P_{n,\alpha}(f; x) - f(x)| \leq 4\|f - g\| + \beta_n^2(x)\|g\|_{C_B^2[0,\infty)} + \omega(f; \gamma_n)$$

elde ederiz, burada $\gamma_n(x) = \frac{nx+1}{n-2}$ dir.

Eşitsizliğin her iki tarafının $g \in C_B^2[0, \infty)$ için infimumu alınıp Peetre K-fonksiyonelinin tanımı dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} |P_{n,\alpha}(f; x) - f(x)| &\leq 4 \inf_{g \in C_B^2[0,\infty)} \left\{ \|f - g\| + \frac{\beta_n^2(x)}{4} \|g\|_{C_B^2[0,\infty)} \right\} + \omega(f; \gamma_n) \\ &= 4K_2 \left(f; \frac{\beta_n^2(x)}{4} \right) + \omega(f; \gamma_n) \\ &\leq M\omega_2 \left(f; \frac{1}{2}\beta_n(x) \right) + \omega(f; \gamma_n) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi $P_{n,\alpha}$ operatörlerinin Lipschitz-tip uzay yardımıyla yakınsama hızını verelim.

3.2.2. Tanım

Lipschitz-tip uzay

$$Lip_M^*(r) = \left\{ f \in C[0, \infty): |f(t) - f(x)| \leq M_f \frac{|t - x|^r}{(t + x)^{\frac{r}{2}}}; t, x > 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada M_f , f fonksiyonuna bağlı bir sabit ve $0 < r \leq 1$ dir [6].

3.2.3. Teorem

$f \in Lip_M^*(r)$ ve $r \in (0, 1]$ olsun. $\forall x > 0$ için

$$|P_{n,\alpha}(f; x) - f(x)| \leq M_f \left(\frac{\delta_n(x)}{\sqrt{x}} \right)^r$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\delta_n(x) = P_{n,\alpha}(\mu^2; x)$ dir.

İspat

$f \in Lip_M^*(r)$ olsun. Lemma 3.1.2 (i), $P_{n,\alpha}$ 'nın lineerlik ve monotonluk özelliklerinden

$$\begin{aligned}
|P_{n,\alpha}(f; x) - f(x)| &= |P_{n,\alpha}(f(t); x) - f(x) \cdot P_{n,\alpha}(1; x)| \\
&= |P_{n,\alpha}(f(t) - f(x); x)| \\
&\leq P_{n,\alpha}(|f(t) - f(x)|; x)
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
|P_{n,\alpha}(f; x) - f(x)| &\leq P_{n,\alpha}\left(M_f \frac{|t-x|^r}{(t+x)^{\frac{r}{2}}}; x\right) \\
&= M_f(n-1) \sum_{i=0}^{\infty} s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \int_0^{\infty} \binom{n+i-1}{i} \frac{t^i}{(1+t)^{n+i}} \frac{|t-x|^r}{(t+x)^{\frac{r}{2}}} dt
\end{aligned}$$

Sağ taraftaki integral düzenlenirse

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} \binom{n+i-1}{i} \frac{t^i}{(1+t)^{n+i}} \frac{|t-x|^r}{(t+x)^{\frac{r}{2}}} dt \\
&= \int_0^{\infty} \left(\binom{n+i-1}{i} \frac{t^i}{(1+t)^{n+i}} \right)^{\frac{2-r}{2}} \left(\binom{n+i-1}{i} \frac{t^i}{(1+t)^{n+i}} \right)^{\frac{r}{2}} \frac{|t-x|^r}{(t+x)^{\frac{r}{2}}} dt
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Burada $p = \frac{2}{2-r}$ ve $q = \frac{2}{r}$ alınarak hölder eşitsizliği uygulanırsa Tanım 2.1.8' den

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \binom{n+i-1}{i} \frac{t^i}{(1+t)^{n+i}} \frac{|t-x|^r}{(t+x)^{\frac{r}{2}}} dt &\leq \left(\int_0^{\infty} \left(\binom{n+i-1}{i} \frac{t^i}{(1+t)^{n+i}} \right)^{\frac{2-r}{2} \frac{2}{2-r}} dt \right)^{\frac{2-r}{2}} \\
&\quad \times \left(\int_0^{\infty} \left(\binom{n+i-1}{i} \frac{t^i}{(1+t)^{n+i}} \right)^{\frac{r}{2} \frac{2}{r}} \frac{|t-x|^{r \frac{2}{r}}}{(t+x)^{\frac{r^2}{2r}}} dt \right)^{\frac{r}{2}} \\
&= \left(\int_0^{\infty} \binom{n+i-1}{i} \frac{t^i}{(1+t)^{n+i}} dt \right)^{\frac{2-r}{2}} \\
&\quad \times \left(\int_0^{\infty} \binom{n+i-1}{i} \frac{t^i}{(1+t)^{n+i}} \frac{(t-x)^2}{t+x} dt \right)^{\frac{r}{2}}
\end{aligned}$$

olur. Bu değeri yerine yazarsak

$$|P_{n,\alpha}(f; x) - f(x)| \leq M_f(n-1) \sum_{i=0}^{\infty} s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \left(\int_0^{\infty} \binom{n+i-1}{i} \frac{t^i}{(1+t)^{n+i}} dt \right)^{\frac{2-r}{2}}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\int_0^\infty \binom{n+i-1}{i} \frac{t^i}{(1+t)^{n+i}} \frac{(t-x)^2}{t+x} dt \right)^{\frac{r}{2}} \\
& = M_f \sum_{i=0}^\infty \left((n-1) s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \right)^{\frac{2-r}{2}} \left(\int_0^\infty \binom{n+i-1}{i} \frac{t^i}{(1+t)^{n+i}} dt \right)^{\frac{2-r}{2}} \\
& \quad \times \left((n-1) s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \right)^{\frac{r}{2}} \left(\int_0^\infty \binom{n+i-1}{i} \frac{t^i}{(1+t)^{n+i}} \frac{(t-x)^2}{t+x} dt \right)^{\frac{r}{2}} \\
& = M_f \sum_{i=0}^\infty \left\{ (n-1) s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \int_0^\infty \binom{n+i-1}{i} \frac{t^i}{(1+t)^{n+i}} dt \right\}^{\frac{2-r}{2}} \\
& \quad \times \left\{ (n-1) s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \int_0^\infty \binom{n+i-1}{i} \frac{t^i}{(1+t)^{n+i}} \frac{(t-x)^2}{t+x} dt \right\}^{\frac{r}{2}}
\end{aligned}$$

Şimdi toplam için hölder eşitsizliğini uygularsak $P_{n,\alpha}$ operatörünün tanımından

$$\begin{aligned}
& |P_{n,\alpha}(f; x) - f(x)| \\
& \leq M_f \left\{ \sum_{i=0}^\infty \left\{ (n-1) s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \int_0^\infty \binom{n+i-1}{i} \frac{t^i}{(1+t)^{n+i}} dt \right\}^{\frac{2-r}{2} \frac{2}{2-r}} \right\}^{\frac{2-r}{2}} \\
& \quad \times \left\{ \sum_{i=0}^\infty \left\{ (n-1) s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \int_0^\infty \binom{n+i-1}{i} \frac{t^i}{(1+t)^{n+i}} \frac{(t-x)^2}{t+x} dt \right\}^{\frac{r}{2} \frac{2}{2-r}} \right\}^{\frac{r}{2}} \\
& = M_f \left\{ \sum_{i=0}^\infty (n-1) s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \int_0^\infty \binom{n+i-1}{i} \frac{t^i}{(1+t)^{n+i}} dt \right\}^{\frac{2-r}{2}} \\
& \quad \times \left\{ \sum_{i=0}^\infty (n-1) s_{n,i}^{[\alpha]}(x) \int_0^\infty \binom{n+i-1}{i} \frac{t^i}{(1+t)^{n+i}} \frac{(t-x)^2}{t+x} dt \right\}^{\frac{r}{2}} \\
& = M_f (P_{n,\alpha}(1; x))^{\frac{2-r}{2}} \left(P_{n,\alpha} \left(\frac{(t-x)^2}{t+x}; x \right) \right)^{\frac{r}{2}}
\end{aligned}$$

bulunur.

$\frac{\mu^2}{t+x} < \frac{\mu^2}{x}$ olup Lemma 3.1.2 ve Lemma 3.1.3 den

$$\begin{aligned} |P_{n,\alpha}(f; x) - f(x)| &\leq M_f \left(P_{n,\alpha} \left(\frac{\mu^2}{x}; x \right) \right)^{\frac{r}{2}} \\ &\leq M_f \left(\frac{1}{x} P_{n,\alpha}(\mu^2; x) \right)^{\frac{r}{2}} \\ &= \frac{M_f}{x^{\frac{r}{2}}} \left(P_{n,\alpha}(\mu^2; x) \right)^{\frac{r}{2}} \end{aligned}$$

olur. Burada $\delta_n(x) = P_{n,\alpha}(\mu^2; x)$ seçilirse

$$|P_{n,\alpha}(f; x) - f(x)| \leq M_f \left(\frac{\delta_n(x)}{\sqrt{x}} \right)^r.$$

3.2.4. Teorem

f , $[0, \infty)$ aralığı üzerinde tanımlı ve $f \in C_B[0, \infty)$ olsun. Bu durumda

$$|P_{n,\alpha}(f; x) - f(x)| \leq \frac{13}{2} \omega_2(f; \delta_n(x)) + \omega(f; \delta_n(x))$$

eşitsizliği gerçekleşir. Burada $\delta_n(x)$ Teorem 3.2.3 de verildiği gibidir.

İspat

f fonksiyonunun ikinci dereceden Steklov fonksiyonu

$$f_h(x) = \frac{4}{h^2} \int_0^{\frac{h}{2}} \int_0^{\frac{h}{2}} (2f(x+u+v) - f(x+2u+2v)) du dv$$

dir.

Bu durumda

$$\|f - f_h\|_{\infty} \leq \frac{3}{4} \omega_2(f; h) \tag{3.16}$$

$$\|f'\|_{\infty} \leq \frac{5}{h} \omega(f; h) \tag{3.17}$$

$$\|f''\|_{\infty} \leq \frac{9}{h^2} \omega_2(f; h). \tag{3.18}$$

eşitsizlikleri sağlanır [30].

$f \in C_B^2[0, \infty)$ ve $t \leq \eta \leq x$ olmak üzere Steklov fonksiyonunun Taylor açılımı

$$f_h(t) = f_h(x) + (t-x)f_h'(x) + \frac{(t-x)^2}{2}f_h''(\eta)$$

şeklinde yazılabilir. Bu açılıma $P_{n,\alpha}$ operatörünü uygularsak

$$P_{n,\alpha}(f_h; x) = f_h(x)P_{n,\alpha}(1; x) + P_{n,\alpha}\left((t-x)f_h'(x); x\right) + P_{n,\alpha}\left(\frac{(t-x)^2}{2}f_h''(\eta); x\right)$$

$$P_{n,\alpha}(f_h; x) - f_h(x) = P_{n,\alpha}\left((t-x)f_h'(x); x\right) + P_{n,\alpha}\left(\frac{(t-x)^2}{2}f_h''(\eta); x\right)$$

olup

$$\begin{aligned} |P_{n,\alpha}(f_h; x) - f_h(x)| &= \left| P_{n,\alpha}\left((t-x)f_h'(x); x\right) + P_{n,\alpha}\left(\frac{(t-x)^2}{2}f_h''(\eta); x\right) \right| \\ &\leq \left| P_{n,\alpha}\left((t-x)f_h'(x); x\right) \right| + \left| P_{n,\alpha}\left(\frac{(t-x)^2}{2}f_h''(\eta); x\right) \right| \\ &= |f_h'(x)P_{n,\alpha}((t-x); x)| + \left| \frac{1}{2}f_h''(\eta)P_{n,\alpha}((t-x)^2; x) \right| \\ &= |f_h'(x)|P_{n,\alpha}((t-x); x) + \frac{1}{2}|f_h''(\eta)|P_{n,\alpha}((t-x)^2; x) \\ &\leq |f_h'(x)|P_{n,\alpha}(|t-x|; x) + \frac{1}{2}|f_h''(\eta)|P_{n,\alpha}((t-x)^2; x) \end{aligned} \quad (3.19)$$

bulunur. Burada $P_{n,\alpha}(|t-x|; x)$ ifadesine Cauchy Schwarz eşitsizliği uygulanırsa Tanım 2.1.10' dan

$$P_{n,\alpha}(|t-x|; x) \leq \sqrt{P_{n,\alpha}((t-x)^2; x)}\sqrt{P_{n,\alpha}(1; x)} = \sqrt{P_{n,\alpha}((t-x)^2; x)} \quad (3.20)$$

olur. Eş. 3.20, Eş.3.19 da yazılarak $\mu = t-x$ seçilirse

$$\begin{aligned} |P_{n,\alpha}(f_h; x) - f_h(x)| &\leq \|f_h'\|_{\infty}\sqrt{P_{n,\alpha}((t-x)^2; x)} + \frac{1}{2}\|f_h''\|_{\infty}P_{n,\alpha}((t-x)^2; x) \\ &= \|f_h'\|_{\infty}\sqrt{P_{n,\alpha}(\mu^2; x)} + \frac{1}{2}\|f_h''\|_{\infty}P_{n,\alpha}(\mu^2; x) \end{aligned} \quad (3.21)$$

ifadesi elde edilir. Diğer yandan,

$f \in C_B^2[0, \infty)$ için

$$\begin{aligned} |P_{n,\alpha}(f; x) - f(x)| &= |P_{n,\alpha}(f; x) - P_{n,\alpha}(f_h; x) + P_{n,\alpha}(f_h; x) - f_h(x) + f_h(x) - f(x)| \\ &\leq |P_{n,\alpha}(f; x) - P_{n,\alpha}(f_h; x)| + |P_{n,\alpha}(f_h; x) - f_h(x)| + |f_h(x) - f(x)| \\ &\leq P_{n,\alpha}(|f - f_h|; x) + |P_{n,\alpha}(f_h; x) - f_h(x)| + |f_h(x) - f(x)| \end{aligned}$$

bulunur.

$P_{n,\alpha}'$ nın lineerliğinden ve $|f_h(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in [0, \infty)} |f_h(x) - f(x)|$ eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |P_{n,\alpha}(f; x) - f(x)| &\leq \|f - f_h\|_{\infty}P_{n,\alpha}(1; x) + |P_{n,\alpha}(f_h; x) - f_h(x)| + \|f - f_h\|_{\infty} \\ &= 2\|f - f_h\|_{\infty} + |P_{n,\alpha}(f_h; x) - f_h(x)| \end{aligned}$$

yazılabilir. Eş.3.21' den

$$|P_{n,\alpha}(f; x) - f(x)| \leq 2\|f - f_h\|_\infty + \|f_h'\|_\infty \sqrt{P_{n,\alpha}(\mu^2; x)} + \frac{1}{2} \|f_h''\|_\infty P_{n,\alpha}(\mu^2; x)$$

dir. Burada Teorem 3.2.2 dikkate alınarak $h = \delta_n(x)$ seçilirse

$$|P_{n,\alpha}(f; x) - f(x)| \leq \frac{13}{2} \omega_2(f; \delta_n(x)) + \omega(f; \delta_n(x))$$

istenilen sonuç elde edilir.

Şimdi de Ditzian-Totik modülü yardımıyla $P_{n,\alpha}$ operatörünün yaklaşım hızını inceleyelim.

Bunun için öncelikle aşağıdaki tanımları hatırlatalım.

3.2.3. Tanım

$f \in C_B[0, \infty)$ olmak üzere Ditzian-Totik Modülü

$$\omega_\emptyset(f; \delta) = \sup_{0 \leq k \leq \delta} \left\{ \left| f\left(x + \frac{k\emptyset(x)}{2}\right) - f\left(x - \frac{k\emptyset(x)}{2}\right) \right| ; x \mp \frac{k\emptyset(x)}{2} \in [0, \infty) \right\}$$

ve Peetre K-fonksiyoneli

$$K_\emptyset(f; \delta) = \inf_{g \in \omega_\emptyset[0, \infty)} \{ \|f - g\|_\infty + \delta \|\emptyset g'\|_\infty \}, \quad \delta > 0$$

şeklinde tanımlanır. Burada,

$$\omega_\emptyset[0, \infty) := \{g: g \in AC_{loc}[0, \infty), \quad \|\emptyset g'\|_\infty < \infty\}$$

olup $g \in AC_{loc}[0, \infty)$ ile g' nin $[0, \infty)$ aralığında lokal olarak mutlak sürekli bir fonksiyon olduğu gösterilmektedir. Ayrıca,

$K_\emptyset(f; \delta)$ ve $\omega_\emptyset(f; \delta)$ ' nin eşdeğer olduğu bilinmektedir [29].

3.2.5. Teorem

$f \in C_B[0, \infty)$ olsun. $x \in [0, \infty)$ ve $\emptyset(x) = \sqrt{x}$ için

$$|P_{n,\alpha}(f; x) - f(x)| \leq M \omega_\emptyset\left(f, \frac{\delta_n(x)}{\sqrt{x}}\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

Herhangi bir $g \in AC_{loc}[0, \infty)$ için Taylor açılımı

$$g(t) = g(x) + \int_x^t g'(u) du$$

biçiminde yazılabilir.

$$g(t) - g(x) = \int_x^t g'(u) du$$

$$|g(t) - g(x)| = \left| \int_x^t g'(u) du \right|$$

İntegral içerisindeki ifade $\frac{\phi(u)}{\phi(u)}$ ile çarpılarak düzenlenirse $|\phi(u)g'(u)| \leq \|\phi g'\|_\infty$ özelliğinden

$$\begin{aligned} |g(t) - g(x)| &= \left| \int_x^t \frac{\phi(u)g'(u)}{\phi(u)} du \right| \\ &\leq \|\phi g'\|_\infty \left| \int_x^t \frac{1}{\phi(u)} du \right| \end{aligned}$$

bulunur. $\phi(u) = \sqrt{u}$ olup

$$\begin{aligned} |g(t) - g(x)| &\leq \|\phi g'\|_\infty \left| \int_x^t \frac{1}{\sqrt{u}} du \right| \\ &= 2\|\phi g'\|_\infty |\sqrt{t} - \sqrt{x}| \\ &\leq 2\|\phi g'\|_\infty \frac{|t - x|}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

olur. $\phi(x) = \sqrt{x}$ olduğundan

$$|g(t) - g(x)| \leq 2\|\phi g'\|_\infty \frac{|t - x|}{\phi(x)} \quad (3.22)$$

eşitsizliği bulunur.

Diğer taraftan,

$|P_{n,\alpha}(f; x) - f(x)|$ ifadesine terim ekleyip çıkartılarak üçgen eşitsizliğinden

$$|P_{n,\alpha}(f; x) - f(x)| = |P_{n,\alpha}(f; x) - P_{n,\alpha}(g; x) + P_{n,\alpha}(g; x) - g(x) + g(x) - f(x)|$$

$$\leq |P_{n,\alpha}(f; x) - P_{n,\alpha}(g; x)| + |P_{n,\alpha}(g; x) - g(x)| + |g(x) - f(x)|$$

yazılabilir. $P_{n,\alpha}$ 'nın lineerliği ve Lemma 3.1.2 (i) den

$$|P_{n,\alpha}(f; x) - f(x)| \leq |P_{n,\alpha}(f - g; x)| + |P_{n,\alpha}(g(t) - g(x); x)| + |g(x) - f(x)|.$$

Operatörün monotonluğu ve $|f(x) - g(x)| \leq \|f - g\|_\infty$ özelliğinden

$$\begin{aligned} |P_{n,\alpha}(f; x) - f(x)| &\leq \|f - g\|_\infty + P_{n,\alpha}(|g(t) - g(x)|; x) + \|f - g\|_\infty \\ &= 2\|f - g\|_\infty + P_{n,\alpha}(|g(t) - g(x)|; x) \end{aligned} \quad (3.23)$$

bulunur. Eş. 3.22, Eş. 3.23' te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} |P_{n,\alpha}(f; x) - f(x)| &\leq 2\|f - g\|_\infty + P_{n,\alpha}\left(2\|\phi g'\|_\infty \frac{|t - x|}{\phi(x)}; x\right) \\ &= 2\|f - g\|_\infty + \frac{2\|\phi g'\|_\infty}{\phi(x)} P_{n,\alpha}(|t - x|; x) \end{aligned} \quad (3.24)$$

olur. Eş. 3.24' te Cauchy Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$|P_{n,\alpha}(f; x) - f(x)| \leq 2\|f - g\|_\infty + \frac{2\|\phi g'\|_\infty}{\phi(x)} \sqrt{P_{n,\alpha}((t - x)^2; x)}$$

elde edilir. $\mu = t - x$ ve $\delta_n(x) = \left(P_{n,\alpha}(\mu^2; x)\right)^{\frac{1}{2}}$ seçilirse

$$|P_{n,\alpha}(f; x) - f(x)| \leq 2\|f - g\|_\infty + \frac{2\|\phi g'\|_\infty}{\phi(x)} \delta_n(x)$$

bulunur.

Son olarak $g \in \omega_\phi[0, \infty)$ için infimum alınırsa eşitsizliğin sol tarafı g fonksiyonundan bağımsız olduğundan

$$\begin{aligned} |P_{n,\alpha}(f; x) - f(x)| &\leq 2 \inf_{g \in \omega_\phi[0, \infty)} \left\{ \|f - g\|_\infty + \|\phi g'\|_\infty \frac{\delta_n(x)}{\phi(x)} \right\} \\ &\leq 2K_\phi \left(f; \frac{\delta_n(x)}{\sqrt{x}} \right) \end{aligned}$$

olur ki burada Peetre K-fonksiyoneli ve Ditzian-Totik modülü arasındaki eşitlik kullanılarak hipotezden istenilen sonuç elde edilir.

3.3. JPDB Operatörleri için Voronovskaja Tip Teorem

Bu kısımda, Deo ve Pratap tarafından Eş. 3.1 ile verilen $P_{n,\alpha}$ operatörleri için Voronovskaja tip teorem verilecektir.

Her $x \in [0, \infty)$ için

$$|f(x)| \leq M_f(1 + x^2), M_f > 0$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının sınıfı $B_2[0, \infty)$ ile gösterilir. Burada M_f , f fonksiyonuna bağlı bir sabittir.

$C_2[0, \infty)$ ise, $B_2[0, \infty)$ ' de bulunan sürekli fonksiyonların kümesidir. $B_2[0, \infty)$ ve $C_2[0, \infty)$ uzaylarındaki norm,

$$\|f\|_2 = \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|f(x)|}{1 + x^2}$$

ile tanımlıdır.

3.3.1. Teorem

$f \in C_2[0, \infty)$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ olacak şekilde $\alpha = (\alpha_n)$ dizisi verilsin . $[0, \infty)$ aralığının belirli bir x noktasında f' , f'' mevcut ve $\lim_{n \rightarrow \infty} n\alpha_n = \ell \in \mathbb{R}$ ise bu durumda $a > 0$ olmak üzere $[0, a]$ üzerinde düzgün olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[P_{n,\alpha}(f; x) - f(x)] = (1 + 2x)f'(x) + (x^2 + (\ell + 2)x)f''(x)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$x \geq 0$, Taylor açılımından $\mu = t - x$ için

$$f(t) = f(x) + \mu f'(x) + \frac{\mu^2}{2!} f''(x) + \varepsilon(t, x) \mu^2 \quad (3.25)$$

yazılır ki burada $\varepsilon(t, x)$, sınırlı bir fonksiyon ve $\lim_{t \rightarrow x} \varepsilon(t, x) = 0$ dır.

Eş. 3.25'in her iki yanına $P_{n,\alpha}$ operatörü uygulandığında

$$P_{n,\alpha}(f; x) - f(x) = f'(x)P_{n,\alpha}(\mu; x) + \frac{f''(x)}{2!} P_{n,\alpha}(\mu^2; x) + P_{n,\alpha}(\varepsilon(t, x) \mu^2; x) \quad (3.26)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} n[P_{n,\alpha}(f; x) - f(x)] \\ = f'(x)nP_{n,\alpha}(\mu; x) + \frac{f''(x)}{2!} nP_{n,\alpha}(\mu^2; x) + nP_{n,\alpha}(\varepsilon(t, x) \mu^2; x) \end{aligned} \quad (3.27)$$

eşitliği bulunur. Eş. 3.27 de Cauchy Schwarz eşitsizliğini uyguladığımızda,

$$nP_{n,\alpha}(\varepsilon(t, x) \mu^2; x) \leq \sqrt{P_{n,\alpha}(\varepsilon^2(t, x); x)} \sqrt{n^2 P_{n,\alpha}(\mu^4; x)}$$

olur.

Şu halde $\varepsilon^2(t, x) \in C[0, \infty)$ için $\lim_{t \rightarrow x} \varepsilon(t, x) = 0$ olduğundan Teorem 3.2.1' den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,\alpha}(\varepsilon^2(t, x); x) = \varepsilon^2(x, x) = 0$$

ve Lemma 3.1.4' ten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nP_{n,\alpha}(\varepsilon(t, x) \mu^2; x) = 0 \quad (3.28)$$

bulunur.

O halde Eş. 3.27' de $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa Eş. 3.28 ve Lemma 3.1.4' ten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[P_{n,\alpha}(f; x) - f(x)] = (1 + 2x)f'(x) + (x^2 + (\ell + 2)x)f''(x)$$

sonucuna ulaşılır. Bu da ispatı tamamlar.

3.3.2. Teorem

$f \in C_2[0, \infty)$ ve $\omega_b, b > 0$ iken $[0, b]$ üzerinde süreklilik modülü olsun. Bu durumda

$$\|P_{n,\alpha}(f) - f\|_{C[0,b]} \leq 4M(1 + b^2)\eta_n(b) + 2\omega_{b+1}\left(f; \sqrt{\eta_n(b)}\right)$$

dir. Burada

$$\eta_n(b) = \max_{x \in [0,b]} P_{n,\alpha}((t - x)^2; x) . \quad (3.29)$$

İspat

$\delta > 0$ olmak üzere $x \in [0, b]$ ve $t \geq 0$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq 4M(1 + x^2)(t - x)^2 + \left(1 + \frac{|t - x|}{\delta}\right) \omega_{b+1}(f; \delta)$$

eşitsizliğini kullanalım [31]. Bu eşitsizliğe $P_{n,\alpha}$ operatörü uygulandığında

$$\begin{aligned} & |P_{n,\alpha}(f; x) - f(x)| \\ & \leq 4M(1 + b^2)P_{n,\alpha}((t - x)^2; x) + P_{n,\alpha}\left(1 + \frac{|t - x|}{\delta}; x\right) \omega_{b+1}(f; \delta) \\ & = 4M(1 + b^2)P_{n,\alpha}((t - x)^2; x) + \left(1 + \frac{1}{\delta} P_{n,\alpha}(|t - x|; x)\right) \omega_{b+1}(f; \delta) \end{aligned} \quad (3.30)$$

bulunur.

Cauchy Schwarz eşitsizliğinden,

$$P_{n,\alpha}(|t - x|; x) \leq \sqrt{P_{n,\alpha}((t - x)^2; x)} \quad (3.31)$$

olur. Böylece $\mu = t - x$ alınırsa Eş. 3.30 ve Eş. 3.31' den

$$\begin{aligned} & |P_{n,\alpha}(f; x) - f(x)| \\ & \leq 4M(1 + b^2)P_{n,\alpha}(\mu^2; x) + \left(1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{P_{n,\alpha}(\mu^2; x)}\right) \omega_{b+1}(f; \delta) \end{aligned} \quad (3.32)$$

olduğu görülür. Bunun yanı sıra Eş. 3.32' de $\delta = \sqrt{\eta_n(b)}$ seçilir ve $C[0, b]$ üzerinden maksimum alınırsa Eş. 3.31' den

$$\|P_{n,\alpha}(f) - f\|_{C[0,b]} \leq 4M(1 + b^2)\eta_n(b) + 2\omega_{b+1}\left(f; \sqrt{\eta_n(b)}\right)$$

elde edilir.

3.4. JPDB Operatörlerinin Ağırlıklı Uzaylarda Yaklaşımı

Bu bölümde, Eş. 3.1 ile verilen operatörlerin ağırlıklı yaklaşım sonuçları incelenecektir.

$[0, \infty)$ üzerinde tanımlı fonksiyonların yakınsama oranı klasik düzgün yakınsaklık ile hesaplanamaz. Bu sebeple, sınırsız aralıklarda yakınsama oranını incelemek için ağırlıklı süreklilik modülünü verelim.

3.4.1. Tanım

$C_2^*[0, \infty) = \left\{f \in C_2[0, \infty): \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{1+x^2} \text{ mevcut} \right\}$ olsun. Her $f \in C_2^*[0, \infty)$ için ağırlıklı süreklilik modülü

$$\Omega(f; \delta) = \sup_{x \geq 0} \sup_{0 < |h| \leq \delta} \frac{|f(x + h) - f(x)|}{1 + (x + h)^2} \quad (3.33)$$

şeklinde tanımlanır.

3.4.1. Lemma

1) $\Omega(f; \delta)$ monoton artandır.

$$2) \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \Omega(f; \delta) = 0$$

$$3) m \in [0, \infty) \text{ için } \Omega(f; m\delta) \leq (1 + m)\Omega(f; \delta)$$

[32].

3.4.1. Teorem

$f \in C_2^*[0, \infty)$ ve $a > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|P_{n,\alpha}(f(t); x) - f(x)|}{(1 + x^2)^{1+a}} = 0$$

dır.

İspat

$x_0 \in [0, \infty)$ keyfi bir sabit olsun.

$$\sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|P_{n,\alpha}(f(t); x) - f(x)|}{(1 + x^2)^{1+a}} \leq \underbrace{\sup_{x \leq x_0} \frac{|P_{n,\alpha}(f(t); x) - f(x)|}{(1 + x^2)^{1+a}}}_{\psi} + \sup_{x > x_0} \frac{|P_{n,\alpha}(f(t); x) - f(x)|}{(1 + x^2)^{1+a}}$$

Burada ψ için

$$\psi \leq \sup_{x \leq x_0} |P_{n,\alpha}(f(t); x) - f(x)| = \|P_{n,\alpha}(f) - f\|_{C[0, x_0]}$$

eşitsizliği bulunur. ψ yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|P_{n,\alpha}(f(t); x) - f(x)|}{(1 + x^2)^{1+a}} \\ & \leq \|P_{n,\alpha}(f) - f\|_{C[0, x_0]} + \sup_{x > x_0} \frac{|P_{n,\alpha}(f(t); x) - f(x)|}{(1 + x^2)^{1+a}} \end{aligned}$$

olur.

Son terim düzenlenerek $|f(t)| \leq \|f\|_2(1 + t^2)$ eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \sup_{x > x_0} \frac{|P_{n,\alpha}(f(t); x) - f(x)|}{(1 + x^2)^{1+a}} & \leq \sup_{x > x_0} \frac{|P_{n,\alpha}(f(t); x)|}{(1 + x^2)^{1+a}} + \sup_{x > x_0} \frac{|f(x)|}{(1 + x^2)^{1+a}} \\ & \leq \|f\|_2 \sup_{x > x_0} \frac{|P_{n,\alpha}(1 + t^2; x)|}{(1 + x^2)^{1+a}} + \sup_{x > x_0} \frac{|f(x)|}{(1 + x^2)^{1+a}} \end{aligned}$$

bulunur.

O halde

$$\sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|P_{n,\alpha}(f(t); x) - f(x)|}{(1+x^2)^{1+a}} \leq \|P_{n,\alpha}(f) - f\|_{C[0, x_0]} + \|f\|_2 \sup_{x > x_0} \frac{|P_{n,\alpha}(1+t^2; x)|}{(1+x^2)^{1+a}} + \sup_{x > x_0} \frac{|f(x)|}{(1+x^2)^{1+a}}$$

elde edilir. Ayrıca $|f(t)| \leq \|f\|_2(1+t^2)$ olup bu ifade her iki taraftan $\frac{1}{(1+x^2)^{1+a}}$ ile çarpılarak $x > x_0$ üzerinden supremum alınırsa

$$\sup_{x > x_0} \frac{|f(t)|}{(1+x^2)^{1+a}} \leq \frac{\|f\|_2(1+t^2)}{(1+x_0^2)^{1+a}}$$

bulunur.

$\varepsilon > 0$ olsun. Yeterince büyük x_0 lar için

$$\frac{\|f\|_2}{(1+x_0^2)^a} < \frac{\varepsilon}{6} \quad (3.34)$$

dır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x > x_0} \frac{P_{n,\alpha}(1+t^2; x)}{1+x^2} = 1$$

$$\sup_{x > x_0} \frac{P_{n,\alpha}(1+t^2; x)}{1+x^2} \leq \frac{(1+x_0^2)^a \varepsilon}{\|f\|_2} \frac{1}{3} + 1$$

Burada yeterince büyük n ler için,

$$\|f\|_2 \sup_{x > x_0} \frac{P_{n,\alpha}(1+t^2; x)}{(1+x^2)^{a+1}} \leq \frac{\|f\|_2}{(1+x_0^2)^a} \sup_{x > x_0} \frac{P_{n,\alpha}(1+t^2; x)}{1+x^2} \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\|f\|_2}{(1+x_0^2)^a}$$

Teorem 3.3.2' den

$$\|P_{n,\alpha}(f) - f\|_{C[0, x_0]} < \frac{\varepsilon}{3} \quad (3.35)$$

bulunur.

Eş. 3.34 ve Eş. 3.35' teki bağıntılar yardımıyla

$$\sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|P_{n,\alpha}(f(t); x) - f(x)|}{(1+x^2)^{1+a}} < \varepsilon$$

elde edilir ki bu da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|P_{n,\alpha}(f(t); x) - f(x)|}{(1+x^2)^{1+a}} = 0$$

olduğunu gösterir.

3.4.2. Teorem

$f \in C_2^*[0, \infty)$ olsun. Yeterince büyük n ler için

$$\sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|P_{n,\alpha}(f(t); x) - f(x)|}{(1+x^2)^{5/2}} \leq \eta(\tilde{I})\Omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

dir. Burada $\eta(\tilde{I})$, pozitif bir sabittir.

İspat

$x \in (0, \infty)$ ve $\delta > 0$ için ağırlıklı süreklilik modülünün tanımında $\delta = |t - x|$ seçelim.

$$\Omega(f; |t - x|) = \sup_{\substack{x \geq 0 \\ 0 < |h| \leq \delta}} \frac{|f(t) - f(x)|}{(1+x^2)(1+(t-x)^2)} \geq \frac{|f(t) - f(x)|}{(1+x^2)(1+(t-x)^2)}$$

Buradan

$$\frac{|f(t) - f(x)|}{(1+x^2)(1+(t-x)^2)} \leq \Omega(f; |t - x|)$$

olup

$$\begin{aligned} |f(t) - f(x)| &\leq (1+x^2)(1+(t-x)^2)\Omega(f; |t - x|) \\ &\leq (1+x^2)(1+(t-x)^2)\Omega\left(f; \frac{\delta|t - x|}{\delta}\right) \end{aligned}$$

bulunur.

Lemma 3.4.1' deki 3. özellik kullanılarak düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned} |f(t) - f(x)| &\leq (1+x^2)(1+(t-x)^2) \left(1 + \frac{|t - x|}{\delta}\right) \Omega(f; \delta) \\ &\leq 2(1+x^2)\Omega(f; \delta) \left((1+(t-x)^2) + (1+(t-x)^2) \frac{|t - x|}{\delta}\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

Son eşitsizliğin her iki yanına $P_{n,\alpha}$ operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& |P_{n,\alpha}(f(t); x) - f(x)| \\
& \leq 2(1+x^2)\Omega(f; \delta) \left[P_{n,\alpha}(1+(t-x)^2; x) + P_{n,\alpha}\left((1+(t-x)^2)\frac{|t-x|}{\delta}; x\right) \right] \quad (3.36)
\end{aligned}$$

Yeterince büyük n ler için Lemma 3.1.4' ten

$$nP_{n,\alpha}((t-x)^2; x) \leq \eta(I)(1+x^2) \quad (3.37)$$

ve

$$n^2P_{n,\alpha}((t-x)^4; x) \leq \eta(I)(1+x^2)^2 \quad (3.38)$$

dir. Burada $\eta(I)$ pozitif sabittir.

Eş. 3.36' daki son terim düzenlenirse

$$\begin{aligned}
P_{n,\alpha}\left((1+(t-x)^2)\frac{|t-x|}{\delta}; x\right) &= \frac{1}{\delta}P_{n,\alpha}(|t-x| + |t-x|(t-x)^2; x) \\
&= \frac{1}{\delta}[P_{n,\alpha}(|t-x|; x) + P_{n,\alpha}(|t-x|(t-x)^2; x)]
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitliğin sağ tarafındaki her bir ifadeye Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygulayalım:

$$\begin{aligned}
& P_{n,\alpha}\left((1+(t-x)^2)\frac{|t-x|}{\delta}; x\right) \\
& \leq \frac{1}{\delta} \left\{ \sqrt{P_{n,\alpha}((t-x)^2; x)} + \sqrt{P_{n,\alpha}((t-x)^2; x)} \sqrt{P_{n,\alpha}((t-x)^4; x)} \right\} \quad (3.39)
\end{aligned}$$

Eş. 3.39, Eş. 3.36' da yerine yazılır ve $\mu = t - x$ alınır

$$\begin{aligned}
|P_{n,\alpha}(f(t); x) - f(x)| &\leq 2(1+x^2)\Omega(f; \delta) \left[1 + P_{n,\alpha}(\mu^2; x) + \frac{1}{\delta} \sqrt{P_{n,\alpha}(\mu^2; x)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\delta} \sqrt{P_{n,\alpha}(\mu^2; x)} \sqrt{P_{n,\alpha}(\mu^4; x)} \right] \quad (3.40)
\end{aligned}$$

bulunur.

Eş. 3.40 her iki taraftan $(1+x^2)^{5/2}$ ye bölünür ve Eş. 3.37 ile Eş. 3.38 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{|P_{n,\alpha}(f(t); x) - f(x)|}{(1+x^2)^{5/2}} &\leq \frac{2(1+x^2)\Omega(f; \delta)}{(1+x^2)^{5/2}} \left[1 + \sqrt{\eta(I)(1+x^2)} + \frac{1}{\delta} \sqrt{\eta(I)(1+x^2)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\delta} \sqrt{\eta(I)(1+x^2)\eta(I)(1+x^2)^2} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

Son olarak $\delta = \frac{1}{\sqrt{n}}$ seçilir ve supremum alınırsa

$$\sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|P_{n,\alpha}(f(t); x) - f(x)|}{(1 + x^2)^{5/2}} \leq \eta(\tilde{I})\Omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

olur ve istenilen sonuca ulaşılır.

4. SONUÇ

Bu tezde Deo ve Pratap tarafından Jain-Pethe operatörlerinin integral formu ele alındı. JPDB operatörlerinin Peetre K -fonksiyoneli, Lipschitz-tip uzay ve Ditzian-Totik modülü yardımıyla yakınsama oranlarını veren teoremler ayrı ayrı detaylı bir şekilde incelendi. Son olarak bu operatörler için asimptotik tahmin formülü veren Voronovskaja tipi yaklaşım ve ağırlıklı yaklaşım sonuçlarına yer verildi.

Bu tez, bu alanda çalışma yapacak araştırmacılar için yardımcı bir kaynak oluşturacaktır.

KAYNAKLAR

1. Weierstrass, K. (1885). *Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen*. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu, Berlin, 633-639 and 789-805.
2. Bernstein, S. (1912). Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. *Mathematical Communications*, 2(13), 1-2.
3. Bohman, H. (1951). On approximation of continuous and analytic functions. *Arkiv för Mathematics*, 2(3), 43-56.
4. Korovkin, P. P. (1953). Convergence of linear positive operators in the space of continuous functions (in Russian). *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 90, 961-964.
5. Mirakjan, G. M. (1941). Approximation of continuous functions with the aid of polynomials. *Doklady Akademii Nauk*, vol.31, 201-205.
6. Szász, O. (1950). Generalizations of S. Bernstein's polynomial to the infinite interval. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 45, 239-245.
7. Jain, G. C., Pethe, S. (1977). On the generalizations of Bernstein and Szász-Mirakyan operators. *Nanta Mathematica*, 10, 185-193.
8. Stancu, D. D. (1980). A study of the remainder in an approximation formula using a Favard-Szász type operators. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica*, XXV, 70-76.
9. Mastroianni, G. (1980/1981). Una generalizzazione dell'operatore di Mirakyan. *Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli*, Serie IV, XLVIII, 237-252.
10. Della Vecchia, B., Kocic, L. M. (1988). On the degeneracy property of some linear positive operators. *Calcolo*, 25(4), 363-377.
11. Finta, Z. (2001). Pointwise approximation by generalized Szász-Mirakjan operators. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica*, 46(4), 61-67.
12. Finta, Z. (2002). On approximation properties of Stancu's operators. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica*, XLVI I(4), 47-55.
13. Abel, U., Ivan, M. (2007). On a generalization of an approximation operator defined by A Lupas. *General Mathematics*, 15(1), 21-34.
14. Baskakov, V. A. (1957). A sequence of linear positive operators in the space of continuous functions. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 113, 249-251.
15. Sahai, A., Prasad, G. (1985). On Simultaneous approximation by modified Lupas operators. *Journal Approximation Theory*, 45, 122-128.

16. Durrmeyer, J. L. (1967). *Une formule d'inversion de la transformée de Laplace: Applications à la théorie des moments*. Thèse de 3e cycle, Faculté des Sciences de l'Université de Paris, Paris.
17. Deo, N., Pratap, R. (2020). *Approximation by Integral form of Jain and Pethe Operators*. Proceedings of the National Academy of Sciences, Section A: Physical Sciences. India. Web: <https://doi.org/10.1007/s40010-020-00691-z>
18. Hacısalihoğlu, H. H. ve Hacıyev, A. (1995). *Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı* (1. Baskı). Ankara: Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, 1-20.
19. Bayraktar, M. (2006). *Fonksiyonel Analiz*. (1. Baskı). Ankara: Gazi Kitapevi, 85-86.
20. Anastassiou, G., and Gonska, H. (1995). On some shift-invariant integral operators, univariate case. *Annales Polonici Mathematica*, 50(53), 225-243.
21. Mitrinović, D. S. (1970). *Analytic Inequalities*. Berlin: Springer-Verlag, 400.
22. Mitrinović, D. S., Pečarić, J. E., and Fink, A. M. (1993). *Classical and New Inequalities in Analysis*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 99-106.
23. Altın, A. (2011). *Uygulamalı Matematik*. (1. Baskı). Ankara: Gazi Kitabevi, 131-141.
24. Carlson, B. C. (1977). *Special Functions of Applied Mathematics*, New York: Academic Press, 31-35.
25. Srivastava, H. M., Chaudhry, M. A., and Agarwal, R. P. (2012). The incomplete Pochhammer symbols and their applications the hypergeometric and related functions. *Integral Transforms Special Functions*, 23, 659-683.
26. Srivastava, H. M., and Manocha, H. L. (1984). *A Treatise on Generating Functions*, New York: Halsted Press [John Wiley & Sons, Inc], 569.
27. Altomare, F., and Campiti, M. (1994). Korovkin-type approximation theory and its application, *De Gruyter Studies in Mathematics*, vol.17, 377-537.
28. DeVore, R. A., Lorentz, G. G. (1993). *Constructive approximation*. (first edition). Berlin: Springer-Verlag, 462.
29. Ditzian, Z., Totik, V. (1987). *Moduli of smoothness (Springer series in computational mathematics, 9)*, New York: Springer-Verlag, 10-25.
30. Zhuk, V. V. (1989). Functions of the Lip_1 class and S_n Bernstein's polynomials (in Russian). *Vestnik Leningrad University Mathematics Mekh Astronom*, 1, 25-30.
31. İbikli, E., Gadjieva, E. A. (1995). The order of approximation of some unbounded functions by the sequences of positive linear operators. *Turkish Journal of Mathematics*, 19(3), 331-337.

32. Yüksel, I., Ispir, N. (2006). Weighted approximation by a certain family of summation integral-type operators. *Computers & Mathematics whit Applications*, 52, 1463-1470.



GAZİ GELECEKTİR...