



**HER ALTGRUBU ALTNORMAL YA DA NİLPOTENT-BY-CHERNİKOV
OLAN LOKAL SONLU GRUPLAR**

Aykut KAYHAN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

KASIM 2016

Aykut KAYHAN tarafından hazırlanan “HER ALTGRUBU ALTNORMAL YA DA NİLPOTENT-BY-CHERNİKOV OLAN LOKAL SONLU GRUPLAR” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Aynur ARIKAN

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum



Başkan: Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum



Üye: Doç. Dr. Naim TUĞLU

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum



Tez Savunma Tarihi: ..15../11../2016

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Hadi GÖKÇEN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Aykut KAYHAN

15/11/2016

HER ALTGRUBU ALTNORMAL YA DA NİLPOTENT-BY-CHERNİKOV OLAN
LOKAL SONLU GRUPLAR

(Yüksek Lisans Tezi)

Aykut KAYHAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Kasım 2016

ÖZET

Bu tezde Howard SMITH'in "Locally finite groups with all subgroups subnormal or nilpotent-by-Chernikov" adlı makalesi çalışılmıştır. G her altgrubu altnormal ya da nilpotent-by-Chernikov olan lokal sonlu bir grup olsun. Eğer G sonlu üslü ise o zaman G nin nilpotent-by-sonlu olduğu gösterilmiştir. Ayrıca G nilpotent-by-Chernikov değilse o zaman G nin $G(F,K) = A \rtimes K$ ya izomorf bir kesimi olduğu öyle ki A ve K sırasıyla lokal sonlu bir F cisminin toplamsal ve çarpımsal altgrupları olduğu ya da $G(F,K)$ nin elemanter abelyen p -grup olduğu gösterilmiştir. Özel olarak K , A üzerine çarpımsal etki ederek F yi üretir.

Bilim Kodu : 20401

Anahtar Kelimeler : Lokal sonlu gruplar, altnormal altgruplar, nilpotent-by-Chernikov gruplar

Sayfa Adedi : 69

Danışman : Doç. Dr. Aynur ARIKAN

LOCALLY FINITE GROUPS WITH ALL SUBGROUPS SUBNORMAL OR
NILPOTENT-BY-CHERNIKOV

(M. Sc. Thesis)

Aykut KAYHAN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

November 2016

ABSTRACT

In this thesis, the paper written by Howard SMITH named “Locally finite groups with all subgroups subnormal or nilpotent-by-Chernikov” is studied. Let G is locally finite group satisfying all subgroups subnormal or nilpotent-by-Chernikov. It is shown that if G is finite exponent; then G is nilpotent-by-finite. Moreover, it is shown that if G is not nilpotent-by-Chernikov, then G has a section isomorphic to a group $G(F,K) = A \rtimes K$ such that A and K is respectively additive and multicaptive subgroup of locally finite F field or that $G(F,K)$ is elementary abelian p -group. In particular, K generates F by acting on A by multicaption.

Science Code : 20401

Key Words : Locally finite group, subnormal subgroup, nilpotent-by-Chernikov group

Page Number : 69

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Aynur ARIKAN

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında ve tamamlanmasında değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, faydalı tavsiyelerde bulunan sayın hocam Doç, Dr. Aynur ARIKAN'a, desteğini esirgemeyen aileme ve arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. BAZI HAZIRLIK TANIM VE SONUÇLARI.....	3
3. BAZI YARDIMCI TEOREM VE ÖNERMELER.....	31
4. TEOREM 1.1 İN İSPATI	43
5. BAZI ÖRNEKLER VE TEOREM 1.2 NİN İSPATI	55
KAYNAKLAR	67
ÖZGEÇMİŞ	69

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

$$H \leq G$$

H, G nin altgrubu

$$H \triangleleft G$$

H, G nin normal altgrubu

$$G/H$$

G nin H ile bölüm grubu

$$H \cong G$$

H ile G izomorf

$$|G:H|$$

H nin G deki indeksi

$$\langle g \rangle$$

g tarafından üretilen devirli grup

$$\langle H, K \rangle$$

H ile K tarafından üretilen grup

$$x^y = yxy^{-1}$$

x in y tarafından eşleniği

$$G \times H$$

G ile H in direkt çarpımı

$$G \rtimes H$$

G ile H nin yarı direkt çarpımı

$$[x, y] = x^{-1}xy$$

x ile y nin komütatörü

$$[X_1, X_2]$$

$\langle [x_1, x_2]: x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 \rangle$

$$G' = [G, G]$$

G nin komütatör altgrubu

$$C_G(H)$$

H in G deki merkezleyeni

$$C_{p^\infty}$$

quasidevirli grup (prüfer grup)

$$\text{Aut}(G)$$

G nin tüm otomorfizmalarının kümesi

$$\text{End}(G)$$

G nin tüm endomorfizmalarının kümesi

$$Z(G)$$

G nin merkezleyeni

$$H \triangleleft\triangleleft G$$

H, G nin altnormal altgrubu

$$G^n$$

Bütün g^n ler tarafından üretilen altgrup

Kısaltmalar

Açıklamalar

$$\mathfrak{NC}$$

Nilpotent-by-Chernikov grup

$$\mathfrak{X}$$

Her altgrubu altnormal ya da $\mathfrak{NC}$ olan grup

$$(\mathbf{L}\mathfrak{N})\mathfrak{F}$$

(Lokal nilpotent)-by-sonlu grup

1. GİRİŞ

Sonsuz gruplar ve bu grupların belirlenmesinde nilpotent-by-Chernikov gruplar oldukça önemli bir yer tutar. Bu grupların yapısı bazı kısıtlamalar altında araştırılmıştır.

A. O. ASAR [22], F. NAPOLİTANİ ve E. PEGORARO [18] her öz altgrubu nilpotent-by-Chernikov olan lokal dereceli grupların kendisinin de nilpotent-by-Chernikov olduğunu kanıtlamıştır. Ayrıca C. CASOLO her altgrubu altnormal olan lokal sonlu grupların aynı zamanda nilpotent-by-Chernikov olduğunu göstermiştir. [19] ve [20] ve [21] de bulunan örneklerle burada lokal sonluluk hipotezinin kaldırılmayacağı gösterilmiştir. H.SMİTH her altgrubu altnormal ya da nilpotent olan lokal sonlu bir grubun sonlu indeksli bir altgruba sahip olduğunu göstermiştir öyle ki bu altgrubun her altgrubu altnormaldir [10]. Daha sonra C. CASOLO bu grubun nilpotent-by-Chernikov grup olduğunu göstermiştir [2].

Bütün bu çalışmalardan sonra her altgrubu altnormal ya da nilpotent-by-Chernikov olan grupların yine nilpotent-by-Chernikov olup olmadığı problemi ortaya çıkmıştır. H.SMİTH her altgrubu altnormal ya da nilpotent-by-Chernikov olan bir grubun lokal çözülebilir-by-sonlu olması halinde kendisinin çözülebilir-by-sonlu olduğunu ve bu grubun nilpotent-by-Chernikov olmaması halinde aslında çözülebilir olduğunu göstermiştir [6]. Dolayısıyla problem çözülebilir gruplara dair bir probleme dönüşmektedir. $\mathfrak{X}$, her altgrubu altnormal ya da nilpotent-by-Chernikov ($\mathfrak{NC}$) olan grupların sınıfı olmak üzere bu çalışmadaki ilk sonuç aşağıdaki gibidir.

Teorem 1.1

G lokal sonlu bir grup ve $G \in \mathfrak{X}$ olsun. Eğer G sonlu üslü ise o zaman G nilpotent-by-sonludur.

Bu, $\mathfrak{X}$ sınıfından olan fakat $\mathfrak{NC}$ olmayan lokal sonlu grupları ortaya çıkarır. Bu çalışmada başka tanımlar ve karşıt örneklerle $\mathfrak{X}$ sınıfından olan fakat $\mathfrak{NC}$ olmayan lokal sonlu gruplar için gerek ve yeter koşulları verilmiştir. Bu durum lokal sonlu p -grupların $\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{NC}$ sınıfından olup olmadığını anlamak için yeterli sonucu vermez. Aslında p -gruplar için de

bazı ilerlemeler elde edilmiştir, özellikle $\mathfrak{X}$ sınıfından olan her Baer p -grup aynı zamanda $\mathfrak{NC}$ gruptur; Fakat bu tez çalışmasında bu gruplarla ilgilenilmeyecektir. Aşağıdaki sonuçta bu tezin 5. bölümünde tanımlanan bazı grupların yapılarının detayına dair referans verilmiştir. p mertebeden elemanlara sahip olan herhangi bir X grubu için $\pi(X)$, p asal sayılarının kümesi olarak gösterilsin. Bilindiği üzere bir cismin lokal sonlu cisim olabilmesi için gerek ve yeter koşulun pozitif karakteristiğe sahip ve asal altcismi üzerinde cebirsel olmasıdır.

Teorem 1.2

G bir lokal sonlu grup ve $G \in \mathfrak{X}$ ve her p asalı için G nin her p -kesimi $\mathfrak{NC}$ grup sınıfından olsun. O zaman aşağıdakiler denktir.

- a) $G \notin \mathfrak{NC}$.
- b) Bir lokal sonlu F cisimi için G nin $G(F,K)=A \rtimes K$ grubuna izomorf bir kesimi vardır ve aşağıdakiler sağlanır.
 - i) A , F cisminin toplamsal alt grubudur.
 - ii) K , F nin F^* çarpımsal grubunun alt grubu ve K , A üzerine çarpımsal olarak etki eder ve bir halka olarak F yi üretir.
 - iii) F nin her F_1 öz altcismi için $\pi(K)$ sonsuz fakat $\pi(K \cap F_1^*)$ sonludur.

Tezin 5. bölümünde yer alan Teorem 5.4 aslında Teorem 1.2 nin (b) kısmındaki gibi tanımlanan $A \rtimes K$ gruplarının varlığını göstermiştir.

2. BAZI HAZIRLIK TANIM VE SONUÇLARI

2.1. Tanım

G bir grup ve X , G nin bir altkümesi olsun. O zaman G nin X i içeren bütün altgruplarının kesişimine X tarafından üretilen altgrup denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir. X e $\langle X \rangle$ in bir üreteç kümesi denir. Eğer $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ise o zaman $\langle X \rangle = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ ile gösterilir ve buna $x_1, x_2, \dots, x_n$ tarafından üretilen altgrup denir. Eğer $n=1$ ise $\langle x_1 \rangle$ grubuna x_1 tarafından üretilen devirli grup denir. G bir grup ve H ve K , G nin altgrupları olsun. O zaman $H \cup K$ nin ürettiği grup $\langle H, K \rangle$ ile gösterilir.

2.2. Tanım

G bir grup ve H , G nin bir altgrubu olsun. H ın G içindeki sol (veya sağ) kosetlerinin kümesinin kardinalitesine H ın G içindeki indeksi denir ve $|G:H|$ ile gösterilir.

2.3. Tanım

G bir grup ve N , G nin bir altgrubu olsun. Eğer her $g \in G$ için $gNg^{-1} \leq N$ ise N ye G nin bir normal altgrubu denir ve $N \triangleleft G$ ile gösterilir.

2.4. Tanım

G bir grup ve

$$G = H_0 > H_1 > \dots > H_s = 1, \quad (2.1)$$

G nin altgruplarının bir zinciri olsun. Eğer her $H_i \triangleleft G$ ve her $i=1, 2, \dots, s$ için H_i, H_{i-1} de öz olarak içerilen G nin maksimal normal altgrubu ise (2.1) zincirine G nin esas zinciri denir ve her H_i/H_{i+1} ye G nin esas faktörü denir.

2.5. Tanım

G bir grup olsun. G nin altgruplarının faktör grubuna G nin *kesimi* denir.

2.6. Tanım

G bir grup ve p bir asal sayı olsun. Eğer her $g \in G$ için $|g|=p^k$ olacak şekilde $k \geq 0$ tamsayısı var ise G ye bir *p-grubu* denir. Eğer $H \leq G$ için H bir p -altgrup ise o zaman H alt grubuna G nin bir p -alt grubu denir. G nin maksimal p -alt grubuna ise G nin *Sylow p-alt grubu* denir.

2.7. Tanım

$G = \langle c_i : c_i^p = 1, c_{i+1}^p = c_i, i = 1, 2, \dots \rangle$ şeklinde tanımlanan G grubuna *prüfer grup*, *quasidevirli grup* ya da *lokal devirli p-grup* denir ve C_{p^∞} ile gösterilir.

2.8. Tanım

G bir grup ve $G \neq \{e\}$ olsun. Eğer G nin $\{e\}$ ve kendisinden başka normal alt grubu yoksa G ye bir *basit grup* denir.

2.9. Tanım

G bir grup olsun. $S = \{1=G_0, G_1, \dots, G_n=G\}$ G nin altgruplarının bir dizisi olmak üzere $G_i \triangleleft G_{i+1}$ olsun. Eğer

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$$

ise S ye G nin bir sonlu serisi denir. G_{i+1}/G_i bölüm gruplarına serinin faktörleri denir. Her bir G_i grubuna ise serinin terimi denir. Eğer bütün G_i ler farklı ise o zaman negatif olmayan n tamsayısına serinin uzunluğu denir.

$T = \{H_\alpha : \alpha \leq \beta\}$ kümesi bir β ordinaline eşit veya küçük ordinalerle indekslenen G nin altgruplarının bir kümesi olsun. Eğer T kümesi;

- i) $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ise $H_{\alpha_1} \leq H_{\alpha_2}$
- ii) $H_0 = 1$ ve $H_\beta = G$
- iii) $H_\alpha \triangleleft H_{\alpha+1}$
- iv) eğer λ limit ordinal ise $H_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} H_\alpha$ dır.

şartlarını sağlıyorsa T ye bir artan seri denir ve

$$1 = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots H_\beta = G$$

şeklinde gösterilir. Eğer T kümesi

- i) $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ise $H_{\alpha_1} \geq H_{\alpha_2}$
- ii) $H_0 = G$ ve $H_\beta = 1$
- iii) $H_{\alpha+1} \triangleleft H_\alpha$
- iv) Eğer λ limit ordinal ise $H_\lambda = \bigcap_{\alpha < \lambda} H_\alpha$ dır.

şartlarını sağlıyorsa T ye bir azalan seri denir ve

$$1 = H_\beta \dots \triangleleft H_1 \triangleleft H_0 = G$$

şeklinde gösterilir.

2.10. Tanım

G bir grup olsun. G nin sonlu serisi

$$1 = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_n = G$$

G nin bir artan zinciri olsun. Eğer $0 \leq i < 1$ için H_i, H_{i+1} içinde normal ise yani,

$$H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_n = G$$

ise bu zincire G nin bir *altnormal serisi* denir. Her $0 \leq i < n$ için $H_i \triangleleft G$ ise seriye *normal seri* denir. $H = H_0, H_1, \dots, H_n = G$, G nin altgrupları olmak üzere

$$H = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_n = G$$

ise H ya G nin bir *altnormal altgrubu* denir ve $H \triangleleft \triangleleft G$ veya $H \text{sn} G$ ile gösterilir

2.11. Tanım

G bir grup olsun. G nin bir sonlu serisi

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$$

olmak üzere eğer her $0 \leq i < n$ için G_{i+1}/G_i faktör grupları abelyen ise G ye bir *çözülebilir grup* denir. Tanımdan dolayı her abelyen grup çözülebilirdir. G nin bu şekildeki serilerinin en küçük uzunluğuna G nin çözülebilirlik uzunluğu (derived uzunluğu) denir ve $d(G)$ ile gösterilir.

2.12. Teorem

G bir grup olsun. Eğer G çözülebilir ise G nin her altgrubu ve her bölüm grubu da çözülebilirdir [2].

İspat

G çözülebilir olduğundan G nin öyle bir altnormal serisi

$$1 = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_n = G$$

vardır ki her $0 \leq i < n$ için H_{i+1}/H_i bölüm grubu abelyendir. K , G nin bir altgrubu olsun. Her $0 \leq i < n$ için $K_i = K \cap H_i$ olsun. O zaman $K_i \triangleleft K_{i+1}$ olduğundan

$$1 = K_0 \triangleleft K_1 \triangleleft \dots \triangleleft K_n = K$$

K nın bir altnormal serisidir. Her $1 \leq i \leq n$ için ikinci izomorfizma teoreminden

$$K_{i+1}/K_i = (K \cap H_{i+1})/(K \cap H_i) = (K \cap H_{i+1})/((K \cap H_i) \cap H_{i+1})$$

$$= (K \cap H_{i+1})/(H_i \cap (K \cap H_{i+1}))$$

$$= H_i(K \cap H_{i+1})/H_i$$

dir. Ayrıca en sağdaki bölüm grubu H_{i+1}/H_i in altgrubu olduğundan abelyendir. Dolayısıyla K_{i+1}/K_i abelyendir ve böylece çözülebilirdir.

Şimdi N , G nin normal altgrubu olsun. Her $1 \leq i \leq n$ için $H_i \triangleleft H_{i+1}$ olduğundan $NH_i \triangleleft NH_{i+1}$ dir. Bu durumda $NH_i/N \triangleleft NH_{i+1}/N$ olduğundan G/N nin

$$N/N \triangleleft NH_1/N \triangleleft \dots \triangleleft NH_n/N = G/N$$

altnormal serisi elde edilir. Her $1 \leq i \leq n$ için üçüncü izomorfizma teoreminden

$$(NH_{i+1}/N)/(NH_i/N) \cong NH_{i+1}/NH_i$$

dir ve ikinci izomorfizma teoreminden

$$NH_{i+1}/NH_i = (NH_i)H_{i+1}/NH_i \cong H_{i+1}/(NH_i \cap H_{i+1})$$

dir ve Ayrıca

$$NH_i \cap H_{i+1} = H_i(N \cap H_{i+1})$$

oldüğundan

$$H_{i+1}/(NH_i \cap H_{i+1}) = H_{i+1}/H_i(N \cap H_{i+1}) \cong (H_{i+1}/H_i)/(H_i(N \cap H_{i+1})/H_i)$$

elde edilir. En sağıdaki bölüm grubu H_{i+1}/H_i in bölüm grubu olduğundan abelyendir. Dolayısıyla NH_{i+1}/NH_i abelyendir ve böylece G/N çözülebilirdir.

2.13. Teorem

G bir grup ve $N \triangleleft G$ olsun. Eğer N ve G/N çözülebilirse G çözülebilirdir [2].

İspat

G/N nin, bölüntüleri abelyen olan bir altnormal serisi

$$N/N = K_0 \triangleleft K_1 \triangleleft \dots \triangleleft K_r = G/N$$

olsun. $\mu : G \rightarrow G/N$ kanonik epimorfizma olmak üzere her $0 \leq i \leq r$ için

$$\mu^{-1}(K_i) = H_i$$

olsun. Her H_i, H_{i+1} in altgrubudur. Şimdi $\mu(H_i) = \{hN : h \in H_i\} = H_i/N$ olduğundan $H_i/N = K_i$ ve benzer biçimde $H_{i+1}/N = K_{i+1}$ dir. Buradan $H_i/N \triangleleft H_{i+1}/N$ olduğundan $H_i \triangleleft H_{i+1}$ elde edilir. Böylece G nin

$$1 \triangleleft N = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_r = G \quad (2.1)$$

altnormal serisi elde edilir. Üçüncü izomorfizma teoreminden

$$H_{i+1}/H_i \cong (H_{i+1}/N)/(H_i/N) = K_{i+1}/K_i$$

olduğundan H_{i+1}/H_i abelyendir. Öte yandan N çözülebilir olduğundan N nin, bölüntüleri abelyen olan bir altnormal serisi

$$1 \triangleleft N_0 \triangleleft N_1 \triangleleft \dots \triangleleft N_s = N \quad (2.2)$$

vardır. (2.1) ve (2.2) birleştirilirse

$$1 \triangleleft N_0 \triangleleft N_1 \triangleleft \dots \triangleleft N_s = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_r = G$$

altnormal serisi elde edilir. Bu serinin her bölüntüsü ya N_{i+1}/N_i ya da H_{i+1}/H_i olduğundan abelyendir. Dolayısıyla G çözülebilirdir.

2.14. Tanım

x ve y bir G grubunun iki elemanı olsun. $x^{-1}y^{-1}xy$ şeklindeki elemana x ve y nin *komütatörü* denir ve $[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}x^y = (y^{-1})^x y$ ile gösterilir. Ayrıca

$$[x,y] = 1 \Leftrightarrow x \text{ ve } y \text{ komütatif}$$

2.15. Teorem

x, y ve z herhangi bir grubun elemanları olsun. O zaman

- i) $[x,y]^{-1} = [y,x]$
- ii) $[xy,z] = [x,z]^y [y,z] = [x,z][x,z,y][y,z]$
- iii) $[x,yz] = [x,z][x,y]^z = [x,z][x,y][x,y,z]$
- iv) $[x,y^{-1},z]^y [y,z^{-1},x][z,x^{-1},y] = 1$ (Hall-Witt eşitliği) [11].

2.16. Tanım

G bir grup olsun. G de tanımlı komütatörlerin tümü tarafından üretilen altgruba G nin *komütatör altgrubu* ya da *derived grubu* denir ve $G' = [G,G]$ ile gösterilir. $G^{(0)} = G$ ve $G^{(1)} = G'$ olsun. Her $i > 0$ tamsayısı için $G^{(n+1)} = (G^{(n)})'$ şeklinde tanımlansın. O zaman

$$G = G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \dots$$

serisine G nin komütatör serisi denir (1 e ulaşmasına gerek yoktur.). $G^{(n)}/G^{(n+1)}$ bölüm grupları abelyen ve G/G' , G nin en geniş abelyen bölüm grubudur.

Eğer G çözülebilir bir grup ise bir n doğal sayısı için $G^{(n)}=1$ dir. Bu şekildeki n doğal sayılarının en küçüğüne G nin *komütatör uzunluğu* denir. Eğer G abelyen ise komütatör uzunluğu 1 dir.

2.17. Tanım

G bir grup olsun. G nin artan bir

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots G_\beta = G$$

serisi için eğer $G_\lambda \triangleleft G$ ($\lambda \leq \beta$) ve her $\alpha < \beta$ için

$$G_{\alpha+1}/G_\alpha \leq Z(G/G_\alpha)$$

oluyorsa bu seriye *artan merkez seri* denir. Bir artan merkez seriye sahip olan gruba *hipermerkez grup* denir. Eğer n bir doğal sayı olmak üzere G nin $G_j \triangleleft G$ ($j \leq n$) ve her $0 \leq i < n$ için $G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i)$ şartını sağlayan

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$$

serisi varsa G ye *nilpotent grup* denir. G nin bu şekildeki serilerinin en küçük uzunluğuna G nin nilpotentlik sınıfı denir.

Nilpotent gruplar, artan ve azalan merkez serileri ile karakterize edilebilirler.

$Z_0(G) = 1$, $Z_1(G) = Z(G)$ olarak tanımlansın. $\alpha > 1$ bir ordinal sayı olmak üzere her $\beta < \alpha$ için $Z_\beta(G)$ tanımlanmış olsun. Eğer α limit ordinal ise o zaman

$$Z_\alpha(G) = \bigcup_{\beta < \alpha} Z_\beta(G)$$

Eğer α limit ordinal değilse

$$Z_\alpha(G)/Z_{\alpha-1}(G) \leq Z(G/Z_{\alpha-1}(G))$$

şeklinde tanımlansın. G nin kardinalitesi aşılamayacağından $Z_\lambda(G) = Z_{\lambda+1}(G) = \dots$ olacak şekilde bir en küçük λ ordinali vardır. Bu terminal gruba G nin *hipermerkezi* denir ve $Z_\infty(G)$ ile gösterilir. Böylece

$$Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \dots$$

serisine G nin *genelleştirilmiş yukarı merkez serisi* denir. Eğer $Z_\infty(G) = G$ ise G bir *hipermerkez gruptur*. Eğer bir n doğal sayısı için $Z_n(G) = G$ ise G bir *nilpotent gruptur*. Bu şekildeki n doğal sayılarının en küçüğüne G nin nilpotentlik sınıfı denir.

$\gamma_1(G) = G$ olsun. Eğer n limit ordinal ise o zaman

$$\gamma_n(G) = \bigcap_{m < n} \gamma_m(G)$$

ve n limit ordinal değilse

$$\gamma_{n+1}(G) = [\gamma_n(G), G]$$

şeklinde tanımlansın.

$$\dots \leq \gamma_2(G) \leq \gamma_1(G) = G$$

serisine G nin *genelleştirilmiş aşağı merkez serisi* denir. Eğer bir i doğal sayısı için $\gamma_{i+1}(G) = 1$ ise G nilpotentir. Bu şekildeki doğal sayıların en küçüğü $i+1$ ise G nin nilpotentlik sınıfı i dir.

2.18. Teorem

n doğal sayı olmak üzere G , mertebesi p^n olan bir grup olsun. O zaman G nilpotenttir [2].

2.19. Teorem (Fitting'in Teoremi)

G bir grup ve M ve N , G nin normal altgrupları olsun. Eğer M ve N nilpotentlik sınıfları sırasıyla c ve d olan nilpotent altgruplar ise o zaman $L=MN$ nilpotentlik sınıfı en fazla $c+d$ olan nilpotent gruptur [2].

2.20. Teorem (Birinci Sylow Teoremi)

G bir grup ve m doğal sayı olmak üzere $|G|=p^m s$ olsun ve burada p asal sayı ve $(p,s)=1$ dir. O zaman G nin her $i=1,2,\dots,m$ için mertebesi p^i olan altgrupları vardır ve her p^i mertebeli grup bir p^{i+1} mertebeli grubun normal alt grubudur [13].

2.21. Teorem

G bir sonlu grup olsun. Aşağıdaki özellikler birbirine denktir.

- i) G nilpotenttir.
- ii) G nin her alt grubu altnormaldir.
- iii) G , normalleyen şartını sağlar.
- iv) G nin her maksimal alt grubu normaldir.
- v) G , sylow p -altgruplarının direkt çarpımına izomorftur [2].

2.22. Tanım

G bir grup ve X , G nin boş olmayan bir altkütmesi olsun. X i içeren tüm normal altgruplarının arakesitine X in G deki *normal kapanışı* denir ve X^G ile gösterilir. X^G , X i içeren G nin en küçük normal alt grubudur ve $X^G = \langle gXg^{-1} : g \in G \rangle$ şeklinde olduğu gösterilebilir.

H , G nin bir alt grubu olsun ve $\text{Core}_G H = \bigcap_{x \in G} H^x$ şeklinde tanımlansın. Bu alt gruba H ın *koru (core)* denir. H ın koru, H tarafından içerilen G nin en büyük normal alt grubudur [7].

2.23. Tanım

G bir grup olsun. G den G ye bir homomorfizmaya G nin bir *endomorfizması* denir. G den G ye bir izomorfizmaya ise G nin *otomorfizması* denir. G nin tüm endomorfizmalarının kümesi $End(G)$ ve G nin tüm otomorfizmalarının kümesi $Aut(G)$ ile gösterilir. $Aut(G)$ bileşke işlemine göre bir gruptur.

2.24. Tanım

Her $\alpha \in End(G)$ ve $H \leq G$ için $H^\alpha \leq H$ ise o zaman H ya G nin *fully-invariant* altgrubu denir. Her $\alpha \in Aut(G)$ için $H^\alpha \leq H$ ise H ya G nin *karakteristik altgrubu* denir ve $H \text{ char } G$ ile gösterilir. H, G de karakteristik ve $\alpha \in Aut(G)$ ise $H^\alpha \leq H$ ve $(H^\alpha)^{-1} \leq H$ olduğundan H^α, H ya eşittir.

2.25. Teorem

- i) Fully-invariant altgruplar karakteristik ve karakteristik altgruplar normaldir.
- ii) Fully-invariant ve karakteristik geçişme özelliğine sahiptir (bu normallik için doğru değildir).
- iii) H, K da karakteristik ve $K \triangleleft G$ ise o zaman $H \triangleleft G$ dir [2].

2.26. Tanım

G ve H iki grup olsun. Eğer φ, G den $Aut(H)$ ya bir homomorfizma ise o zaman φ yardımıyla G, H üzerine etki eder denir ve G ye de H üzerinde bir operatör grup denir. φ homomorfizmasına da G nin bir *etkisi* denir. G nin φ etkisi izomorfizma olmak zorunda değildir. Özel olarak G nin her g elemanı için $\varphi(g) = 1$ ise φ ye G nin *aşık* etkisi denir. Aşık etki yardımıyla her grup H üzerine etki edebilir.

Her $g \in G$ için $\varphi(g), H$ nin bir otomorfizmasıdır. H nin bir h elemanının $\varphi(g)(h)$ görüntüsü basitçe h^g ile gösterilir. G nin H üzerine etli etmesi için için gerek ve yeter şart her $g \in G$ için tanımlı $\varphi(g): h \rightarrow h^g$ fonksiyonunun her $u, v \in H$ ve $x, y \in G$ için

$$(uv)^x = u^x v^x$$

$$u^{xy} = (u^x)^y$$

$$u^1 = u \quad (G \text{ nin birim elemanı } 1 \text{ dir})$$

şartlarını sağlamasıdır. Aşıkarak $\varphi(x)$ nin H in bir endomorfizması olması için gerek ve yeter şart H üzerinde bir etki olmasıdır [7].

2.27. Tanım

Bir G grubu boş olmayan bir Ω kümesine etki ettiğinde Ω nin bir α elemanı G nin elemanları tarafından farklı noktalara hareket etirilir. α nın bu görüntülerinin kümesine G altında α nın yörüngesi denir ve $\alpha^G = \{ \alpha^x : x \in G \}$ ile gösterilir. α yı sabit bırakan G nin elemanları kümesine de α nın G içindeki dengeleyeni denir ve $G_\alpha = \{ x \in G : \alpha^x = \alpha \}$ ile gösterilir. G kendi üzerine $(x, g) \rightarrow x^g = g^{-1}xg$ şeklinde etki etsin. O zaman $\{g^{-1}xg : g \in G\}$ kümesine x in G içindeki eşlenik sınıfı denir. $H \leq G$, G üzerine eşlenik şeklinde etki etsin. O zaman $H_x = \{h \in H : h^{-1}xh = x\}$ kümesine x in H içindeki merkezleyeni denir ve $C_H(x)$ ile gösterilir. $H=G$ olması durumunda $C_G(x)$ e x in merkezleyeni denir. G nin H altgrubu G nin tüm altgruplarından oluşan S kümesine eşlenikleme etkisi etsin. $K \in S$ nin H içindeki $\{h \in H : h^{-1}Kh = K\}$ kümesine K nın H içindeki normalleyeni denir ve $N_H(K)$ ile gösterilir. $H=G$ olması durumunda $N_G(K)$ ye K nın normalleyeni denir.

2.28. Tanım

G ve H iki grup olsun ve G, H üzerine etki etsin. $U \leq H$ olmak üzere her $g \in G$ için $U^g = U$ oluyorsa o zaman U ya G -invariant denir. Eğer U, H nin G -invariant olan normal altgrubu ise o zaman $G, H/U$ faktör grubu üzerine etki eder ve bu etki her $x \in H$ için

$$(xU)^g = x^g U$$

şeklinde tanımlanır [7].

2.29. Teorem

G bir grup ve $H \leq G$ olmak üzere $|G:H|=n$ olsun. O zaman H ın koru H_G olmak üzere $|G : H_G|$ $n!$ i böler [2].

2.30. Teorem

G bir grup olsun. G nin sonlu indeksli her altgrubunun sonlu sayıdaki kesişimi de G de sonlu indekslidir [2].

2.31 Teorem

G normal altgrupları üzerinde minimal şartını sağlayan bir grup olsun. O zaman G nin sonlu indeksli bir tek minimal altgrubu vardır ve bu altgrup G de karakteristiktir.

İspat

Normal altgrupları üzerinde minimal şartı sağladığından sonlu indeksten minimal normal altgrubu vardır. Bu altgrup F olsun ve H da G nin sonlu indeksli bir altgrubu olsun. O zaman Teorem 2.29 den dolayı G nin H_G koru G de sonlu indekslidir. Böylece $|G : H_G|$ ve $|G : F|$ sonlu olduğundan Teorem 2.30 dan dolayı $|G:H_G \cap F|$ de sonludur. F , G nin sonlu indeksli minimal normal altgrubu, $H_G \cap F \leq F$ olduğundan ve ayrıca $H_G \cap F$, G de sonlu indeksli olduğundan $H_G \cap F = F$ dir. Böylece $F \leq H_G \leq H$ dır. Bundan dolayı F , G de sonlu indeksli olan her altgrup tarafından içerilir. Ayrıca F , G nin sonlu indeksli olan bir tek minimal normal altgrubu olduğundan F , G nin karakteristik altgrubudur.

2.32. Tanım

G bir grup ve bir $x \in G$ için x in G içindeki eşlenik sınıfı $Cl_G(x) = \{g^{-1}xg : g \in G\}$ olsun. Eğer her $x \in G$ için $Cl_G(x)$ sonluysa ve buna karşılık $|G:Cl_G(x)|$ sonlu oluyorsa G grubuna *FC-grup* denir [24].

2.33. Tanım

G ve H iki grup olsun ve H , G üzerine etki etsin. $[G, {}_0H] = G$, $[G, {}_1H] = \langle g^{-1}g^h : g \in G, h \in H \rangle$ ve her $i \geq 1$ için $[G, {}_{i+1}H] = [[G, {}_iH], H]$ olsun. Eğer $[G, {}_cH] = 1$ ve $[G, {}_{c-1}H] \neq 1$ ise o zaman H nin G üzerine etkisine c sınıfından *nilpotent etki* denir.

Özel olarak eğer $G=H$ ve etki G üzerinde eşlenikleme etkisi ise o zaman c sınıfından nilpotent etki G nin c sınıfından nilpotent olmasıyla aynı anlama gelir [17].

2.34. Lemma

G sonlu p -grup ve H sonlu p' -grup olmak üzere H in G ye etkisi nilpotent ise o zaman H , G üzerine aşıkâr etki eder. Yani $[G, H] = 1$ dir [17].

2.35. Tanım

G grubu H üzerine etki etsin. L , G ve H in direkt çarpımı olsun. Yani L nin elemanları $g \in G$ ve $h \in H$ için (g, h) şeklinde tek türlü ifade edilsin. O zaman L nin iki elemanının çarpımı

$$(g, h)(g', h') = (gg', h^g h')$$

şeklinde gösterilir. Bu çarpım göre L bir gruptur ve L ye G nin H üzerine etkisine göre *yarı direkt çarpımı* denir.

2.36. Tanım

H ve F iki grup olsun. Eğer $HK = G$ ve $H \cap K = 1$ olacak şekilde $K \leq G$ varsa o zaman G ye H nin F ile bir *split genişlemesi* denir. Bu durumda genişlemeye split de denir. K alt grubuna da H in *komplementi* denir. Split genişleme H ve K nin yarı direkt çarpımını ifade eder. Ayrıca ikinci izomorfizma teoreminden

$$K \cong HK/H = G/H = F$$

olur ve dolayısıyla K komplementi F ye izomorftur.

2.37. Teorem (Schur-Zassenhaus)

G sonlu ve N , G nin normal altgrubu olsun öyle ki $|N| = n$ ve $|G/N| = m$ aralarında asal olsun. O zaman $G = N \rtimes (G/N)$ şeklinde yazılır. Başka bir deyişle N , sonlu G grubunun Hall altgrubu olsun. O zaman N , G de bir komplemente sahiptir ve ilaveten N veya G/N çözülebilir ise N nin G deki komplementleri eşleniktir (Hall[7]).

2.38. Teorem

G lokal sonlu bir grup ve N , G nin normal Sylow π -altgrubu olsun. Eğer $G/N C_G(N)$ sayılabilir ise $G = N \rtimes H$ olacak şekilde $H \leq G$ vardır [23].

2.39. Tanım

$\mathfrak{X}$, elemanları gruplar olan sınıf olsun. Eğer

- i) $\mathfrak{X}$, mertebesi 1 olan grup içerir.
- ii) $G_1 \cong G \in \mathfrak{X}$ ise $G_1 \in \mathfrak{X}$ dir.

özellikleri sağlanıyorsa $\mathfrak{X}$ sınıfına grup-teorik sınıf (veya grup sınıfı) denir. Örneğin bütün sonlu gruplar ve bütün abelyen gruplar grup teorik sınıfı oluştururlar. Daha genel olarak $\mathcal{P}$ bir grup özelliği olmak üzere eğer mertebesi 1 olan grup $\mathcal{P}$ özelliğine sahip ve $\mathcal{P}$ özelliğine sahip her G grubu için $G_1 \cong G$ iken G_1 grubu $\mathcal{P}$ özelliğine sahipse $\mathcal{P}$ ye grup-teorik özellik denir. Her grup-teorik sınıfına bir grup-teorik özellik ve her grup-teorik özelliğe bir grup-teorik sınıf karşılık geldiğinden birbirlerinin yerine kullanılabilir. $\mathfrak{X}$ grup sınıfına ait olan bir gruba $\mathfrak{X}$ -grup denir. Eğer bir grubun altgubu $\mathfrak{X}$ -grup ise o altgruba $\mathfrak{X}$ -altgrup denir.

2.40. Tanım

$\mathfrak{X}$, bir grupların sınıfı olsun. Eğer G nin her sonlu altkümesi G nin $\mathfrak{X}$ sınıfına ait bir altgrubu tarafından içeriliyorsa G ye lokal $\mathfrak{X}$ -grup denir. Bütün lokal $\mathfrak{X}$ -grupların sınıfı $L\mathfrak{X}$ şeklinde ifade edilir. Eğer bir $\mathfrak{X}$ sınıfı altgruplara göre kapalıysa o zaman G nin lokal- $\mathfrak{X}$ olması için gerek ve yeter şart G nin sonlu üreteçli her altgrubunun $\mathfrak{X}$ sınıfına ait olmasıdır. Böylece lokal sonlu bir grup sonlu üreteçli her altgrubu sonlu olan gruptur ve lokal nilpotent grup sonlu üreteçli her altgrubu nilpotent olan gruplardır.

2.41. Tanım

$\mathfrak{X}$, bir grupların sınıfı ve G bir grup olsun. Eğer her $1 \neq g \in G$ için $g \notin N_g$ ve $G/N_g \in \mathfrak{X}$ olacak şekilde G nin N_g normal altgrubu varsa G ye residually $\mathfrak{X}$ -grup denir. Dolayısıyla her $1 \neq x \in G$ için $x \notin H$ olacak şekilde $H \triangleleft G$ var ve G/H sonlu ise G ye *residually sonlu* denir.

2.42. Tanım

G bir grup olsun. Eğer G nin aşıkâr olmayan her sonlu üreteçli altgrubunun sonlu indeksli bir öz altgrubu varsa G ye lokal dereceli grup denir. Yani G lokal dereceli bir grup olması için gerek ve yeter şart G nin her $X \neq 1$ sonlu üreteçli bir altgrubu için X in öyle bir K öz altgrubu vardır ki $|X:K|$ sonludur. Bu tanım Tarski grubu olarak bilinen grupları saf dışı bırakmak için yapılmıştır. Çünkü p asal sayı olmak üzere aşıkâr olmayan her öz altgrubunun mertebesi p ye eşit olan gruplara Tarski grupları denmektedir.

2.43. Tanım

Bir grubun her elemanının mertebesi sonlu ise o gruba torsiyon (periyodik) grup denir. Eğer bir grubun elemanlarının mertebesi sonlu ve sınırlıysa o zaman bu gruba sonlu üslü denir. Bir grubun üssü bütün elemanlarının mertebelerinin en küçük ortak katıdır.

2.44. Tanım

$\mathfrak{X}$ bir grup sınıfı ve G bir grup olsun. Eğer $H \leq G$ için $H \in \mathfrak{X}$ ve $|G:H|$ sonlu ise o zaman G ye *hemen hemen- $\mathfrak{X}$ grup* denir.

2.45. Tanım

G bir grup ve G nin her devirli altgrubu altnormal ise G ye *Baer grup* denir.

2.46. Teorem

Bir grubun her devirli altgrubu altnormal ise o zaman her sonlu üreteçli altgrubu altnormal ve nilpotenttir.

Açıktır ki her Baer grup aynı zamanda lokal nilpotenttir [2].

2.47. Tanım

π , p asallarının bir kümesi olsun. π kümesine ait olmayan asalların kümesine de π' kümesi denir. Eğer π sadece p asalından oluşuyorsa o zaman $\pi=\{p\}$ ve $\pi'=\{p\}'$ kümeleri için sırasıyla p ve p' notasyonlarını kullanılır. Bir n doğal sayısının tüm asal bölenleri π kümesine ait ise o zaman n doğal sayısına π -sayısı denir. Herhangi bir n doğal sayısı π -sayısı ve π' -sayısının çarpımı şeklinde tek türlü yazılabilir.

G bir grup ve g , G nin sonlu mertebeli elemanı olsun. Eğer g nin mertebesi π -sayısı ise g ye π -*elemanı* denir. Eğer G nin her elemanı π -eleman ise o zaman G ye π -*grup* denir. Eğer G sonlu bir grup ise G nin mertebesini bölen tüm asalların kümesi $\pi(G)$ ile gösterilir. Yani

$$\pi(G)=\{p: |G| \equiv 0 \pmod{p}\}$$

dir.

2.48. Tanım

G , abelyen torsiyon grup ve p bir asal sayı olsun. G_p , G nin mertebesi p nin kuvvetleri olan elemanlarının kümesi olsun. O zaman G_p altgrubuna G nin p -asal komponenti denir.

2.49. Tanım

G bir abelyen grup ve p bir asal sayı olsun. Eğer G nin her x elemanı için $x^p=1$ ise o zaman G ye elemanter abelyen p -grup denir.

Herhangi abelyen G grubu için $\Omega_1(G)$, $x^p=1$ şartını sağlayan G nin x elemanlarından oluşsun. O zaman $\Omega_1(G)$, G nin elemanter abelyen ve karakteristik altgrubudur.

2.50. Tanım

G bir grup olsun. G nin altgruplarının boş olmayan her kümesi bir minimal elemanı varsa G ye *altgrupları üzerinde minimal şartı sağlar veya min şartını sağlar* denir. Yani $S=\{H_i: i \in I\}$ G nin altgruplarının boş olmayan bir kümesi ise o zaman S nin öyle K elemanı vardır ki eğer $L \in S$ ve $L \leq K$ ise $L = K$ dır.

Bütün sonlu gruplar minimal şartı sağlar. Aynı zamanda her p asalı için quasidevirli p -gruplar minimal şartı sağlar çünkü böyle grupların öz altgrupları sonludur. Minimal şartı sağlayan bir grubun altgruplarının azalan zinciri sonlu adımda sonlanır ve tersi de doğrudur [23].

2.51. Teorem

Çözülebilir bir grubun minimal şartı sağlaması için gerek ve yeter şart sonlu sayıda quasidevirli grubun direkt çarpımının sonlu genişlemesi olmasıdır. Böyle gruplara *Chernikov grup* denir [2].

2.52. Tanım

$\mathfrak{X}$ ve $\mathfrak{Y}$ iki grup sınıfı olsun. $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ genişlemesi ya da sınıf çarpımı şu şekilde tanımlanır. Bir G grubunun $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter koşul bir $N \triangleleft G$ için $N \in \mathfrak{X}$ ve $G/A \in \mathfrak{Y}$ olmasıdır. $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ sınıfına ait olan gruplara $\mathfrak{X}$ -by- $\mathfrak{Y}$ grup denir.

2.53. Tanım

G bir grup olsun. G nin bütün normal nilpotent altgrupları tarafından üretilen altgruba G nin *Fitting altgrubu* denir ve $\text{Fitt}(G)$ ile gösterilir. Teorem 2.19 dan dolayı G nin Fitting altgubu $\text{Fitt}(G)$, G nin bütün normal nilpotent altgruplarını içerir. Böylece $\text{Fitt}(G)$, G nin tek maksimal normal nilpotent alt grubudur ve dolayısıyla G nin karakteristik alt grubudur. Eğer $G = \text{Fitt}(G)$ ise G ye *Fitting grup* denir. Yani G , Fitting grup ise G , normal nilpotent altgruplarının bir çarpımıdır. Ayrıca bir G grubunun Fitting grup olabilmesi için gerek ve yeter koşul her $x \in G$ için $\langle x \rangle^G = \langle \{x^g : g \in G\} \rangle$ normal kapanışının nilpotent olmasıdır [11]. Fitting gruplar, Baer grupların alt sınıfıdır, altgruplarına ve homomorfik görüntüye göre kapalıdır.

2.54. Tanım

Çözülebilir bir G grubunun komütatör uzunluğu en fazla 2 ise G ye *metabelyen* grup denir.

2.55. Teorem

R birimli bir halka ve I , R nin bir ideali olsun. Eğer I bir tersinir eleman içerirse $I=R$ dir. Eğer R cisim ise R nin R ve $\{0_R\}$ den başka ideali yoktur [12].

2.56. Teorem

R birimli bir halka ve $0_R \neq 1_R$ olsun. O zaman R nin en az bir maksimal ideali vardır [12].

İspat

X , R nin bütün öz ideallerinin kümesi olsun. $\{0_R\} \in X$ olduğundan $X \neq \emptyset$ dir. X küme içermesi “ $\subseteq$ ” ye göre bir kısmi sıralı kümedir. $C = \{A_i: i \in I\}$, X içinde bir zincir olsun. Böylece her $i, j \in I$ için $A_i \subseteq A_j$ ya da $A_j \subseteq A_i$ dir. A , A_i lerin bileşimi olsun. A , R nin bir idealidir. $a, b \in A$ ve $r \in R$ olsun. $a \in A_i$ ve $b \in A_j$ olacak şekilde $i, j \in I$ vardır. Genelliği bozmadan $A_i \subseteq A_j$ varsayabiliriz. O zaman $a, b \in A_j$ ve A_j ideal olduğundan $a+b, ar, ra \in A_j \subseteq A$ dir. Dolayısıyla A , R nin bir idealidir. Ayrıca her $i \in I$ için $1_R \notin A_i$ olduğundan $1_R \notin A$ ve böylece $A \in X$ tir. Dolayısıyla Zorn Lemmadan X in bir maksimal elamanı M vardır. Eğer J , R nin bir ideali olmak üzere $M \subset J$ ise o zaman $J \notin X$ olacağından $1_R \in J$ ve buradan Teorem 2.55 dan $J=R$ olur. Dolayısıyla M bir maksimal idealdir.

2.57. Sonuç

Değişmeli ve birimli bir R halkasının cisim olması için gerek ve yeter şart R nin $\{0_R\}$ den başka öz idealinin olmamasıdır [12].

2.58. Tanım

R bir halka olsun. Her $a \in R$ için $na = 0$ olacak şekilde en az bir tane n pozitif tamsayısı varsa n tamsayısına R nin karakteristiği denir ve $\text{kar}(R) = n$ ile gösterilir. Eğer böyle bir n pozitif tamsayısı yoksa $\text{kar}(R) = 0$ şeklinde ifade edilir.

2.59. Teorem

F bir cisim ve P , F nin tüm altcisimlerinin arakesiti olsun. O zaman P nin öz altcismi yoktur. p asal sayı olmak üzere eğer $\text{kar}(F)=p$ ise o zaman $P \cong \mathbb{Z}_p$ dir. Eğer $\text{kar}(F) = 0$ ise o zaman $P \cong \mathbb{Q}$ dur. P cismine F nin asal altcismi denir [12].

2.60. Tanım

G bir grup ve R de birimli bir halka olsun. $r_x \in R$ ve sonlu sayı dışında $r_x \neq 0$ olmak üzere

$\sum_{x \in G} r_x x$ biçimsel toplamların kümesi $R(G)$ olsun. $R(G)$ üzerinde toplama ve çarpma

$$\left(\sum_{x \in G} r_x x \right) + \left(\sum_{x \in G} r'_x x \right) = \sum_{x \in G} (r_x + r'_x) x$$

$$\left(\sum_{x \in G} r_x x \right) \left(\sum_{x \in G} r'_x x \right) = \sum_{x \in G} \left(\sum_{yz=x} r_y r_z \right) x$$

şeklinde tanımlansın. $R(G)$ yukarıdaki işlemlere göre birim elemanı $1_R 1_G$ olan birimli bir halkadır ve birimi kısaca 1 ile gösterilir. $R(G)$ ye G nin R üzerinde bir *grup halkası* denir.

Eğer R abelyen halka ve G de bir abelyen grup ise $R(G)$ de bir abelyen grup halkasıdır. F bir cisim ise $F(G)$ grup halkası,

$$f \left(\sum_x f_x x \right) = \sum_x (ff_x) x$$

çarpımı ile F -modüldür. O zaman $F(G)$, F üzerinde bir *vektör uzayı* olur. $f \in F$ ve $r, s \in F(G)$ olmak üzere

$$f(rs) = (fr)s = r(fs)$$

olduğunda $F(G)$ bir F -cebiri. Buna G nin F üzerindeki *grup cebiri* denir. Ayrıca $F(G)$ bir $F(G)$ -modüldür. Buna *regüler $F(G)$ modül* denir.

2.61. Tanım

R bir halka ve A toplamsal abelyen grup ve

$$: R \times A \rightarrow A$$

$$(r, a) \rightarrow ra$$

bir fonksiyon olsun eğer her $r, s \in R$ ve her $a, b \in A$ için

$$i) r(a+b) = ra+rb$$

$$ii) (r+s)a = ra+sa$$

$$iii) r(sa) = (rs)a$$

koşulları sağlanıyorsa A ya bir R -modül denir. Eğer R nin 1_R birimi ve

$$iv) 1_R a = a \text{ (her } a \in A \text{ için)}$$

ise A ya birimli R -modül denir. Eğer R bölme halkası ise o zaman birimli R -modülüne vektör uzayı denir.

2.62. Tanım

E bir cisim ve F , E nin bir alt cismi ise o zaman E ye F nin *cisim genişlemesi* denir. O zaman E nin F -uzayı olarak boyutuna E nin F üzerindeki *derecesi* denir ve $[E:F]$ ile gösterilir. $[E:F]$ nin sonlu ya da sonsuz olmasına göre E ye F nin bir *sonlu cisim genişlemesi* ya da bir *sonsuz cisim genişlemesi* denir.

F , K nin bir genişlemesi olsun o zaman kolayca görülür ki $1_K = 1_F$ dir. Ayrıca F , K üzerinde bir vektör uzayıdır. F nin K üzerindeki boyutu $[F:K]$ şeklinde gösterilir ve $[F:K]$ nin sonlu olması halinde genişlemeye sonlu boyutlu cisim genişlemesi, $[F:K]$ nin sonsuz olması halinde genişlemeye sonsuz boyutlu cisim genişlemesi denir. Ayrıca $S \subseteq E$ olsun. O zaman E içinde $F \cup S$ tarafından üretilen althalkaya F ye S nin *katılmasıyla elde edilen althalka* denir ve $F[S]$ ile gösterilir. $F \cup S$ tarafından üretilen altcisme F ye S nin *katılmasıyla elde edilen altcisme* denir ve $F(S)$ ile gösterilir. Eğer $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, n elemanlı bir sonlu küme ise o zaman sadelik amacıyla $F[\{s_1, s_2, \dots, s_n\}] = F[s_1, s_2, \dots, s_n]$ ve $F(\{s_1, s_2, \dots, s_n\}) = F(s_1, s_2, \dots, s_n)$ ile gösterilir. Eğer $n=1$ ve $s_1=s$ ise o zaman $F[s]$ ve $F(s)$ ye sırasıyla F ye s nin katılmasıyla elde edilen althalka ve altcisme denir. Ayrıca $F(s)$ ye F nin bir *basit cisim genişlemesi* denir. $\mathbb{C}$ içinde $\mathbb{R}$ yi ve i yi içeren her althalka $\mathbb{C}$ yi içerdiğinden, $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i] = \mathbb{R}(i)$ olduğu açıktır. Aynı biçimde F üzerindeki rasyonel fonksiyonlar cismi $F(x)$, F ye x in katılmasıyla elde edilen cisimdir.

2.63. Tanım

F bir cisim ve E, F nin bir cisim genişlemesi ve $u \in E$ olsun. Eğer $F[x]$ in sıfırdan farklı bir $f(x)$ polinomu için $f(u)=0_F$ ise u ya F üzerinde bir *cebirsal eleman* denir. Eğer her $0_F \neq f(x) \in F[x]$ için $f(u) \neq 0_F$ ise u ya F üzerinde bir *transandant* eleman denir. Ayrıca $\mathbb{Q}$ üzerinde cebirsal eleman olan bir kompleks sayıya *cebirsal sayı* ve transandant eleman olan bir kompleks sayıya da *transandant sayı* denir. Örneğin $\sqrt{2}, \sqrt{3}, i$ sayıları cebirsal sayı ve e, π sayıları transandant sayılardır. Gerçekten $\sqrt{2}, \sqrt{3}, i$ sayıları sırasıyla, katsayıları tamsayılar olan x^2+2, x^2+3, x^2+1 polinomlarının kökleridir. e, π irrasyonel olup e nin transandantlığı Hermite tarafından 1873te ve π ninki Lindemann tarafından 1882de gösterilmiştir.

Eğer F nin her elemanı K üzerinde cebirsal ise o zaman F ye K nin *cebirsal genişlemesi* denir. Eğer F nin en az bir elemanı K üzerinde transandant ise o zaman F ye K nin *transandant genişlemesi* denir.

2.64. Teorem

F, K nin bir cisim genişlemesi ve $u \in F, K$ üzerinde cebirsal olsun. O zaman

- i) $|K(u):K|=n$
- ii) $\{1_K, u, u^2, \dots, u^{n-1}\}, K$ üzerindeki $K(u)$ vektör uzayının bazıdır.
- iii) $K(u)$ nun her elemanı $a_0+a_1u+a_2u^2+\dots+a_{n-1}u^{n-1}$ ($a_i \in K$) şeklinde tektürlü olarak yazılır.

Koşulları sağlanır [12].

2.65. Teorem

F, K nin sonlu cisim genişlemesi olsun. O zaman F sonlu üreteçli ve K üzerinde cebirseldir [12].

İspat

$[F:K]=n$ ve $u \in F$ olsun. O zaman $n+1$ elemanlı $\{1_K, u, u^2, \dots, u^n\}$ kümesi lineer bağımlı olmalıdır. Böylece sıfırdan farklı bir $a_i \in K$ vardır öyle ki $a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_{n-1} u^n = 0$ dır. Bu da u nun K da cebirsel olması demektir. u , F nin herhangi bir elemanını temsil ettiğinden F , K üzerinde cebirsel olur.

Eğer $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ F nin K üzerindeki bazı ise o zaman kolayca $F=K(u_1, u_2, \dots, u_n)$ şeklinde yazılabilir.

2.66. Teorem

F , K nın bir cisim genişlemesi ve E , F nin K üzerinde cebirsel olan elemanlarının kümesi olsun. O zaman E , F nin altcismidir ve K üzerinde cebirseldir [12].

İspat

Eğer $u, v \in E$ ise o zaman $K(u, v)$ ve [12] deki Teorem 1.12 den dolayı K üzerinde bir cebirsel genişlemedir. Böylece $u-v$, uv^{-1} ($v \neq 0$), $K(u, v)$ içinde olduğundan $u-v$, uv^{-1} , E nin elemanlarıdır. Bu da E nin cisim olması demektir.

2.67. Teorem

F bir cisim olsun. O zaman $F^*=F \setminus \{0_F\}$ çarpımsal grubunun her sonlu altgrubu devirlidir [12].

İspat

G , F^* in sonlu altgrubu ve $|G|=n$ olsun. $n=1$ ise $G=\{1_F\}$ devirlidir. O zaman $n > 1$ olsun. G nin mertebesi maksimal olan bir elemanı a ve $|a|=m$ olsun. $m=n$ ise o zaman $G=\langle a \rangle$ olur. O zaman mümkünse $m < n$ olsun. Her $\langle a \rangle$ nın her c elemanı için $c^m = 1_F$ olduğundan $\langle a \rangle$ nın elemanları $x^m - 1_F$ polinomunun m farklı kökünü oluşturur. Bu polinomun F içinde en çok m kökü olacağından tüm kökler $\langle a \rangle$ nın elemanlarıdır. Şimdi $b \in G/\langle a \rangle$ ve $|b|=s$ olsun.

$b^m \neq 1_F$ olduğundan $s \nmid m$ ve $s < m$ dir. $d = (m, s)$ olsun. O zaman $d < m$ ve $d < s$ dir. Ayrıca $|a^d| = m/d$ ve $|b^d| = s/d$ dir. Üstelik $(\frac{m}{d}, \frac{s}{d}) = 1$ olduğundan

$$|(ab)^d| = |a^d b^d| = (\frac{m}{d})(\frac{s}{d})$$

dir. Buradan

$$|ab| = d(\frac{m}{d})(\frac{s}{d}) = m(\frac{s}{d}) > m$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $G = \langle a \rangle$ ve böylece G devirlidir.

2.68. Tanım

G bir grup olsun. G nin bütün minimal normal altgruplarının çarpımına G nin “socle” denir ve $\text{soc}(G)$ ile gösterilir. G nin minimal normal altgubu yoksa $\text{soc}(G) = 1$ olarak alınır.

$\text{soc}(G)$ nin G üzerinde minimal şartı sağlaması için gerek ve yeter koşul G nin sonlu sayıda minimal normal alt grubunun direkt çarpımı şeklinde yazılması gerekir [3].

Eğer M , G nin minimal normal alt grubu ise o zaman M basittir. Dolayısıyla ya $Z(M) = 1$ olup M mükemmel gruptur ya da $Z(M) = M$ olup M abelyendir. Eğer M abelyen ise o zaman M ya elemanter abelyen p -grup ya da $\mathbb{Q}$ nun izomorfik kopyalarının direkt çarpımıdır [3].

2.69. Teorem

G sonlu bir grup olsun. G nin nilpotent olması için gerek ve yeter koşul aralarında asal elemanlarının birbirini merkezlemesidir [27].

2.70. Teorem

Eğer c, d tamsayı ve $1 \leq d < c$ olmak üzere $(c, d) = 1$ ise o zaman $a_n = c^n - d^n$ aşağıdaki iki koşul haricinde ilkel asal çarpana sahiptir.

- i) $c=2$, $d=1$ ve $n=6$; ya da
- ii) $c+d=2^k$ ve $n=2$ [15].

2.71. Tanım

Bir M_n dizisi verilsin. $m < n$ doğal sayılar olmak üzere bir p asal sayısı için $p|M_n$ ve $p \nmid M_m$ ise p ye M_n nin ilkel asal çarpanı denir [15].

2.72. Tanım

F bir cisim ve E , F nin bir cebirsel genişlemesi olsun. Eğer E içinde bir kökü olan her $p(x) \in F[x]$ indirgenemez polinomu E üzerinde parçalanırsa E ye F nin bir *normal genişlemesi* denir[12].

2.73. Teorem

$[E:K]$ cebirsel cisim genişlemesi olsun. O zaman $[F:E]$ cisim genişlemesi vardır öyle ki

- i) F , K da normaldir
- ii) F nin E yi içeren öz altcismi yoktur ki K da normal olsun.
- iii) $[F:K] < \infty$ olması için gerek ve yeter koşul $[E:K] < \infty$ olmasıdır.

Burada tanımlanan F ye E nin K üzerindeki normal kapanışı denir [12].

2.74. Sonuç

Q bir π' -grup ve G bir π -grup olmak üzere Q , G üzerine etki etsin. O zaman $G = C_G(Q)[G, Q]$ dir [7].

2.75. Tanım

$\mathcal{P}$, grupların bir sınıfı ve G bir grup olsun. Eğer G nin her sayılabilir altgrubu $\mathcal{P}$ grup sınıfından iken G de $\mathcal{P}$ grup sınıfından ise o zaman G ye *sayılabilir tanımlanabilir* denir.

2.76. Teorem

$1 \leq c \in \mathbb{N}$ olsun. Nilpotent gruplar, en fazla c nilpotentlik sınıfına sahip nilpotent gruplar, çözülebilir gruplar ve komütatör uzunluğu en fazla c sınıfından olan çözülebilir olan grupların sınıfları *sayılabilir tanımlanabilir*dir [11].

2.77. Tanım

G bir grup olsun, burada G nin lokal sonlu olmasına gerek yoktur. Eğer G nin altgruplarının bir Σ kümesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa Σ kümesine G için bir *lokal sistem* denir.

- i) $G = \bigcup \{H : H \in \Sigma\}$,
- ii) Her $E, F \in \Sigma$ için $\langle E, F \rangle \leq H$ olacak şekilde bir $H \in \Sigma$ vardır.

Özel olarak G bir lokal sonlu grup ise o zaman G nin tüm sonlu altgruplarının kümesi G için bir lokal sistem oluşturur. [23]

2.78. Lemma

G bir grup olsun. G nin sayılabilir lokal sonlu bir grup olabilmesi için gerek ve yeter koşul G nin küme içermesine göre tam sıralı olan sonlu altgruplarından oluşan bir Σ lokal sistemine sahip olmasıdır. [23]

3. BAZI YARDIMCI TEOREM VE ÖNERMELER

3.1. Teorem

G çözülebilir bir grup ve F , G nin Fitting altgrubu olsun.

- i) N , G nin aşıkâr olmayan normal altgrubu ise o zaman N , G nin aşıkâr olmayan normal abelyen altgrubunu içerir ve $N \cap F \neq 1$ dir.
- ii) $C_G(F) = Z(F)$ dir [2].

İspat

- i) j , $N \cap G^{(j)} \neq 1$ şartını sağlayan en büyük tamsayı olsun. O zaman

$$(N \cap G^{(j)})' \leq N \cap G^{(j+1)} = 1$$

olur. Dolayısıyla $N \cap G^{(j)}$ abelyen ve G de normal olur.

- ii) Kabul edelim ki $C = C_G(F)$, F tarafından içerilmesin. (i) den $A/F \triangleleft G/F$ vardır öyle ki $F < A \leq CF$ ve A/F abelyendir; Fakat

$$A \cap (CF) = (A \cap C)F \text{ ve } \gamma_3(A \cap C) \leq [A', C] \leq [F, C] = 1$$

dir. Böylece

$$A \cap C \leq F \text{ ve } A = F$$

olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $C = Z(F)$ dir.

3.2. Lemma

G bir grup ve H , G nin bir altgrubu olsun. O zaman

- i) Her n doğal sayısı için $H^{G,n} = H[G_n H]$
- ii) $d \geq 1$ için H in d -altnormal olması için gerek ve yeter koşul $[G_d H] \leq H$ olmasıdır [11].

3.3. Teorem

Öyle f, ρ fonksiyonları vardır ki $f, \rho: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ öyle ki her $n \geq 1$ için her $f(n)$ -üreteçli altgrubu en fazla n -altnormal olan grup en fazla $\rho(n)$ nilpotentlik sınıfından nilpotenttir. Bu teoreme Rosablade'nin Teoremi de denir [11].

3.4. Lemma

G , her altgrubu altnormal olan periyodik bir grup olsun. O zaman öyle bir $1 \leq m$ doğal sayısı vardır ki G nin sonlu sayıdaki asal komponentleri dışında tümü en fazla m nilpotentlik sınıfından nilpotenttir. Özel olarak G nin nilpotent olması için gerek ve yeter koşul bütün asal komponentlerinin nilpotent olmasıdır [11].

İspat

G lokal nilpotent olduğundan asal komponentlerinin direkt çarpımına izomorftur. Hipotezden G nilpotent olduğundan G nin bütün asal komponentleri de nilpotent olur. Karşıt olarak G nin tüm asal komponentleri nilpotent olsun. Eğer komponentlerin nilpotentlik sınıfları sınırlı değilse o zaman Teorem 3.3 den her n pozitif tamsayısı için G nin bir P_n asal komponenti vardır ve P_n de n -altnormal olan H_n altgrubu vardır (ve $n \neq k$ ise $P_n \neq P_k$). Fakat o zaman $H = \langle H_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ altgrubu G de altnormal olamaz. Bu ise bir çelişkidir. Böylece G nin asal komponentlerinin nilpotentlik sınıfı sınırlıdır ve G nilpotenttir.

3.5. Lemma

N ve H bir G grubunun nilpotent altgrupları ve nilpotentlik sınıfları sırasıyla c ve d olsun. Eğer N , G nin normal altgrubu ve H , G nin n -altnormal altgrubu ise o zaman NH , en fazla $nc+d$ nilpotentlik sınıfına sahiptir [11].

3.6. Lemma

G bir Baer grup ve N , G nin normal nilpotent altgrubu olsun. Eğer G/N sonlu üreteçli ise o zaman G nilpotenttir. Özel olarak, G sonlu indeksli bir nilpotent altgrubu varsa o zaman G nilpotenttir [11].

İspat

G bir Baer grup, N , G nin normal nilpotent altgrubu ve G/N sonlu üreteçli olsun. $\{x_1N, x_2N, \dots, x_nN\}$, G/N nin üreteç kümesi olsun. O zaman G bir Baer grup olduğundan Teorem 2.46 dan $H = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$, G nin nilpotent ve altnormal altgrubu olur. Dolayısıyla Lemma 3.5 den $G = NH$ nilpotent olur. Şimdi kabul edelim ki H G nin sonlu indeksli nilpotent altgrubu olsun. O zaman H , G içinde sonlu sayıda eşleniğe sahiptir ve dolayısıyla Teorem 2.29 dan H_G , H nin koru olmak üzere G/H_G sonludur. O zaman G nin öyle bir sonlu F altgrubu vardır ki G Baer grup olduğundan Teorem 2.46 dan F nilpotenttir ve $G = FH_G$ şeklinde yazılır. Ayrıca H nilpotent olduğundan H_G de nilpotenttir. Dolayısıyla G nilpotenttir.

Şimdi bu çalışma için önemli olan MÖHRES'in "her altgrubu altnormal olan grup çözülebilirdir" şeklinde ifade edilen teoremin ispatı verilecektir. Bunun için gerekli olan bazı lemma ve teoremler ise ispatsız verilecektir.

3.7. Lemma

Her altgrubu altnormal olan torsiyonsuz grup çözülebilirdir [11].

3.8. Teorem

G her altgrubu altnormal olan bir grup ve Θ , G nin altgruplarının bir ailesi olsun öyle ki $G \in \Theta$ olsun. O zaman bir $H \in \Theta$ altgrubu, H nin bir sonlu üreteçli F altgrubu vardır öyle ki her $F \leq K \leq H$ ve $K \in \Theta$ için d bir pozitif tamsayı olmak üzere K , H da d -altnormaldir [11].

3.9. Lemma

G her altgrubu altnormal olan bir grup olsun. O zaman $G^{(n)} = G^{(n+1)}$ olacak şekilde bir $1 \leq n \in \mathbb{N}$ vardır [11].

3.10. Lemma

G , her altgrubu altnormal olan bir p -grup olsun. Eğer G nin her öz altgrubu çözülebilir ise o zaman G çözülebilirdir [11].

Şimdi MÖHRES'in daha önce belirttiğimiz teoreminin ispatını verelim.

3.11. Teorem

Her altgrubu altnormal olan grup çözülebilirdir [11].

İspat

G her altgrubu altnormal olan bir grup olsun. O zaman Lemma 3.4 ve Lemma 3.7 den G yi bir p -grup olarak alabiliriz öyle ki p bir asal sayı olsun. Kabul edelim ki G çözülebilir olmasın. O zaman Teorem 3.8 den G nin çözülebilir olmayan bir altgrubu H ve H nın bir sonlu üreteçli F altgrubu ve d pozitif tamsayı vardır ki F yi içeren çözülebilir olmayan K altgrubu H içinde d -altnormaldir.

$$H = H_0 \geq H_1 \geq \dots \geq H_d = F$$

serisi F nin H içindeki normal kapanış serisi ve $B=H_1$ en küçük çözülebilir olmayan terimi olsun. O zaman F^B çözülebilir ve böylece $K=B/F^B$ çözülebilir değildir. Ayrıca K nın bütün non-çözülebilir altgrupları en fazla d -altnormaldir. Dolayısıyla Teorem 3.4 den K nın bütün non-çözülebilir altgrupları K nın komütatör serisinin bir D limitini içerir. O zaman D nin bütün öz altgrupları çözülebilir olur. Böylece Lemma 3.10. dan D çözülebilirdir. Lemma 3.9 dan G çözülebilir olur. Bu ise bir çelişkidir.

3.12. Teorem

G bir lokal nilpotent grup ve T , G nin torsiyon altgrubu olsun. O zaman T , G nin bir T fully-invariant altgrubudur öyle ki G/T torsiyonsuzdur. Ayrıca T , p -grupların direkt çarpımıdır [28].

İspat

Önce T nin G nin altgrubu olduğunu gösterelim. T nin boştan farklı olduğu açıktır. x ve y T nin elemanları olsun. O zaman x ve y sonlu mertebededir. $\langle x, y \rangle = K$ olsun. O zaman G lokal nilpotent olduğundan K nilpotenttir. T_1 , K nin sonlu mertebeli elemanlarının kümesi olsun. [2] deki Teorem 5.2.7 den T_1 , K nin altgrubudur. $x, y \in T_1$ ve $T_1 \leq K$ olduğundan $xy^{-1} \in T_1$ dir. Böylece xy^{-1} sonlu ve dolayısıyla $xy^{-1} \in T$ dir. T nin fully invariant ve G/T nin torsiyonsuz olduğu aşıkardır.

Şimdi T nin p -altgruplarının direkt çarpımı olduğunu gösterelim. π , T nin elemanlarının mertebesinin tüm asal bölenlerinin kümesi olsun. $p \in \pi$ olmak üzere T_p , T nin tüm p -elemanlarının ürettiği altgrup olsun. T_p nin bir p -grup olduğunu gösterelim.

$1 \neq x \in T_p$ olsun. Her x_i , p -eleman olmak üzere $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ şeklinde yazılabilir.

$$H = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$$

olsun. O zaman G lokal nilpotent olduğundan H nilpotenttir. H , p -elemanlar tarafından üretilen bir nilpotent grup olduğundan H bir p -gruptur. Böylece x bir p -elemanı ve dolayısıyla T_p bir p -gruptur. Ayrıca T_p , T nin normal altgrubudur.

Şimdi $1 \neq x \in T$ ve $|x| = m$ olsun. O zaman $p_i \in \pi$ birbirinden farklı asal sayılar olmak üzere

$$m = p_1^{e_1} \dots p_n^{e_n}$$

şeklinde yazılabilir. $m_i = m/(p_i^{e_i})$ olmak üzere $(m_1, \dots, m_n) = 1$ dir. Böylece $m_1 k_1 + \dots + m_n k_n = 1$ olacak şekilde k_i tamsayıları vardır.

$$x = x^1 = x^{m_1 k_1 + \dots + m_n k_n} = (x^{m_1})^{k_1} (x^{m_2})^{k_2} \dots (x^{m_n})^{k_n} \in T_{p_1} T_{p_2} \dots T_{p_n}$$

olduğundan $T = \prod_{p \in \pi} T_p$ dir ve $T_p \cap \prod_{q \neq p} T_q = \langle 1 \rangle$ olduğu aşıkardır. Dolayısıyla T , p -grupların direkt çarpımıdır.

3.13. Teorem

H ve K , bir grubun normal lokal nilpotent altgrupları olsun. O zaman $J = HK$ çarpımı da lokal nilpotenttir. Bu teoreme Hirsch-Plotkin teoremi de denir [2].

3.14. Teorem

G bir grup olsun. G nin tüm normal lokal nilpotent altgruplarını içeren tek normal lokal nilpotent normal altgrubu vardır ve bu gruba Hirsch-Plotkin radikali denir [2].

İspat

Lokal nilpotent altgrupların zincirinin bileşiminin lokal nilpotent olduğunu görmek zor değildir. Böylece Zorn lemmadan her normal lokal nilpotent altgrup maksimal lokal nilpotent altgrup tarafından içerilir. Eğer H ve K , G nin iki maksimal normal lokal nilpotent altgrupları ise o zaman Teorem 3.13 den HK lokal nilpotent ve dolayısıyla $H = K$ olur.

3.15. Lemma

G bir lokal sonlu grup olsun. Eğer G nin nilpotent olmayan her altgrubu altnormal ise o zaman G nilpotent-by-Chernikov dur [11].

3.16. Lemma

Her sonsuz lokal sonlu grubun sonsuz bir abelyen altgrubu vardır [2].

3.17. Teorem

G bir aşık olmayan sonlu üslü çözülebilir p -grup ve ℓ , G nin faktörleri elemanter abelyen olan normal serisinin minimum uzunluğu olsun. O zaman G nin her g elemanı için

$$[G, {}_r\langle g \rangle] = 1 \text{ ve } r = 1 + p + p^2 + \dots + p^{\ell-1}$$

dir. Özel olarak G bir Baer gruptur [4].

3.18. Lemma

G , lokal nilpotent ve aynı zamanda lokal sonlu bir grup ve kabul edelim ki her altgrubu altnormal ya da nilpotent-by-Chernikov (sırasıyla altnormal ya da çözülebilir) olan bir grup olsun. O zaman G ya nilpotent-by-Chernikov (veya çözülebilir) ya da G nin bir G_p asal komponenti vardır öyle ki G_p , nilpotent-by-Chernikov olmayan (veya çözülebilir olmayan) bir grup ve bir nilpotent-by-Chernikov K altgrubu için $G = G_p \times K$ şeklinde yazılabilir [6].

İspat

Öncelikle her nilpotent grup ve Chernikov grup çözülebilir olduğundan Teorem 2.13 den her nilpotent-by-Chernikov grubun da çözülebilirdir. Şimdi kabul edelim ki G nin her altgrubu altnormal ya da $\mathfrak{N}\mathfrak{C}$ olsun ve bir G_p $\mathfrak{N}\mathfrak{C}$ olmasın. O zaman G/G_p nin her altgrubu altnormal ve böylece Lemma 3.15 ten G/G_p $\mathfrak{N}\mathfrak{C}$ grup olur. Dolayısıyla G nin öyle bir $\mathfrak{N}\mathfrak{C}$ olan K altgrubu vardır ki $G = G_p \times K$ şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan kabul edelim ki G nin her asal komponenti $\mathfrak{N}\mathfrak{C}$ olsun; Ancak G , $\mathfrak{N}\mathfrak{C}$ grup sınıfından olmasın. O zaman ya hepsi nilpotent olan sonsuz sayıda G_{p_i} asal komponentleri vardır ya da nilpotent olmayan sonsuz sayıda G_{p_i} asal komponentleri vardır. Her iki durumda da $G = H_1 \times H_2$ olarak ifade edilebilir öyle ki her bir H_j sonsuz sayıda G_{p_i} içerir. Chernikov grup sonlu sayıda asal içerdiğinden H_1 Chernikov olamaz. Ancak $H_1 \cong G/H_2$ olduğundan her altgrubu altnormal ve

böylece Lemma 3.15 den dolayı $\mathfrak{NC}$ olur ki bu her altgrubun altnormal ya da $\mathfrak{NC}$ olduğu durumda çelişki doğurur.

Eğer G nin her altgrubu altnormal ya da çözülebilir ise o zaman aynı argümandan sonuç çıkar. Eğer G_p , çözülebilir değilse o zaman $\mathfrak{NC}$ da değildir. Hipotezden $G_p \triangleleft\triangleleft G$ dir ve bu durumda G/G_p nin her altgrubu altnormaldır ve dolayısıyla Lemma 3.15 den dolayı $G/G_p \in \mathfrak{NC}$ dir. Eğer her p asalı için G_p çözülebilir ancak G çözülebilir değilse o zaman $G=H_1 \times H_2$ şeklinde yazılabilir öyle ki bu kez her H_j sınırlı olmayan komütatör uzunluğa sahip asal komponentler içerir. Dolayısıyla asal komponentlerin komütatörleri 1 e ulaşmadığı için çözülebilir değildir ve böylece $\mathfrak{NC}$ olamaz. Bu durumda $H_1 \cong G/H_2$ nin her altgrubu altnormal olur öyle ki Teorem 3.11 den H_1 çözülebilirdir ki Teorem 2.13 den G çözülebilir olur ve bu çelişkidir.

3.19. Önerme

G , her altgrubu altnormal ya da nilpotent-by-Chernikov olan lokal nilpotent grup olsun. O zaman G çözülebilirdir [6].

3.20. Önerme

G , her altgrubu altnormal ya da nilpotent-by-Chernikov olan lokal sonlu bir grup olsun. O zaman G çözülebilir-by-sonludur. Ayrıca G ya çözülebilir ya da nilpotent-by-Chernikov gruptur [6].

3.21. Teorem

G , her altgrubu altnormal olan sonlu üslü çözülebilir bir grup olsun. O zaman G nilpotenttir [11].

İspat

G , her altgrubu altnormal olan sonlu üslü çözülebilir bir grup olsun. G aynı zamanda periodik olduğundan Lemma 3.4 den hareketle G yi sonlu sayıda p -komponentlerinin direkt çarpımı şeklinde yazılabilir ve buradan G yi bir p -grup olarak kabul edebiliriz. G

çözülebilir p -grup ve sonlu üslü olduğundan [11] deki Sonuç 76'nın hemen altındaki açıklamadan G nin bir sonlu normal serisi vardır öyle ki faktörleri elemanter abelyendir. d bir tamsayı olmak üzere G nin çözülebilirlik uzunluğu d olsun. d üzerine tümevarım yapalım. Eğer $d=1$ ise $G \triangleright G' = 1$ olduğundan G abelyen ve dolayısıyla nilpotenttir. O halde $d \geq 2$ ve iddia $d-1$ için doğru ve $N=G'G^p$ olsun. G/N , G nin en geniş elemanter abelyen bölüm grubu ve N nin çözülebilirlik uzunluğu $d-1$ olduğundan tümevarım hipotezinden N nilpotenttir. $K= N'N^p$ olsun. O zaman da N/K , N nin en geniş bölüm grubudur dolayısıyla elemanter abelyen p -gruptur. Bu durumda $G/K \cong G/N$ ve G bir p -grup olduğundan G/K bir p -grup ve N/K elemanter abelyen grup ve G/N de elemanter abelyendir. Dolayısıyla [11] deki Önerme 189'dan G/K nilpotenttir. Dolayısıyla [11] deki Lemma 190'dan G nilpotenttir.

3.22. Lemma

G bir grup ve A , G nin normal abelyen altgrubu ve $H \leq G$ için $H/C_H(A)$ abelyen olsun. O zaman her $a \in A$ ve her $x, y \in H$ için

$$[a, x, y] = [a, y, x]$$

dir [11].

İspat

$H/C_H(A)$ abelyan olduğundan her $a \in A$ ve her $x, y \in H$ için $[a, xy] = [a, yx]$ dir. Teorem 2.15 den

$$[a, y][a, x]^y = [a, x][a, y]^x \text{ ve}$$

$$[a, x]^{-1}[a, y]^{-1}[a, y][a, x]^y = [a, x]^{-1}[a, y]^{-1}[a, x][a, y]^x$$

dir ve A , G nin normal abelyen altgrubu olduğundan $a^{-1}x^{-1}ax \in A$ dır. Böylece

$$[a, x]^{-1}[a, x]^y = [a, y]^{-1}[a, y]^x$$

dir.

3.23. Lemma

A , bir G grubunun normal abelyen altgrubu olsun öyle ki $G/C_G(A)$ abelyen olsun. O zaman her $X, Y \leq G$ için

$$[A, X, Y] = [A, Y, X]$$

olur [11].

3.24. Lemma

A, B, C bir G grubunun altgrupları ve N , G nin normal altgrubu olsun $[A, B, C]$ ve $[B, C, A]$, N tarafından içerilsin. O zaman $[C, A, B]$ de N tarafından içerilir.

Bu lemmaya üç altgrup lemma denir [11].

3.25. Teorem

G bir abelyen grup ve T , G nin torsiyon altgrubu olsun. O zaman T , G nin asal komponentlerinin direkt toplamıdır [2].

3.26. Lemma

G , her nilpotent olmayan altgrubu altnormal olan lokal sonlu bir grup olsun ve A , G nin normal abelyen altgrubu olsun öyle ki p bir asal sayı olmak üzere G/A elemanter abelyen p -grup olsun. O zaman G hemen hemen-lokal nilpotentttir [10].

İspat

Kabul edelim ki G hemen hemen-lokal nilpotent olmasın ve N , G nin lokal nilpotent radikali olsun. O zaman G periyodik grup olduğundan M , N nin (dolayısıyla G nin) p -radikali ve B de N nin (dolayısıyla G nin) p' -radikalidir. B , G nin p' -radikali ve G/A

abelyen p -grup olduğundan B , A tarafından içerilir. Eğer $M \leq K$ ve K/M lokal nilpotent olacak biçimde G de sonlu indeksli bir K altgrubu varsa o zaman G nin bir L p -altgrubu için

$$(K/M) = (L/M) \times (BM/M)$$

dir ve L ve BM lokal nilpotent olduğundan K da lokal nilpotenttir. G/K sonlu olduğundan G hemen hemen-lokal nilpotent olur ki bu bir çelişkidir. Böylece G/K sonsuz olduğundan G nin M ile faktörünü alabiliriz ve buradan G nin p -radikalini aşıkak kabul edebiliriz. Özel olarak A bir p' -grup ve G nin lokal nilpotent radikalidir.

G/A sonsuzdur ve böylece Teorem 2.20 den G nin her sonlu p altgrubu daha geniş bir altgrubu tarafından içerilir. Böylece G nin sonsuz bir p -altgrubu olarak H yı seçebiliriz ve HA , G nin normal altgrubu olduğundan A , HA nın lokal nilpotent radikalidir. Böylece $G=HA$ olarak kabul edebiliriz. Ayrıca H bir p -grup ve A bir p' -grup $H \cap A = 1$ ve hipotezden G/A abelyen p -grup ve

$$G/A \cong HA/A \cong H/(H \cap A) \cong H$$

oldüğundan H , G nin abelyen p -altgrubudur. Şimdi G abelyen olmadığı için $\langle h \rangle$ -invariant olan sonlu bir $U \leq A$ vardır öyle ki $U \langle h \rangle$ abelyen olmayacak şekilde $h \in H$ seçilebilir ve dolayısıyla $U \langle h \rangle$ nilpotent değildir. Hipotezden pozitif r tamsayısı için

$$[G, {}_r \langle h \rangle] \leq A \cap U \langle H \rangle = U(A \cap \langle H \rangle) = U$$

olur. Fakat o zaman $\langle h \rangle$, $A/[A, {}_r \langle h \rangle]$ nilpotent etki eder ve H bir p -grup ve A bir p' -grup olduğundan Lemma 2.34 den aşıkak etki eder. Dolayısıyla $[A, \langle h \rangle] \leq U$ olur. Buradan $\langle h \rangle^G = \langle h \rangle^{HA} = \langle h \rangle^A$ sonludur. Üstelik $\langle h \rangle^G$ nilpotent değildir ve $\langle h \rangle^G$, $\langle h \rangle$ ve $[U, \langle h \rangle]$ altgrubunu içerdiği için $\langle h \rangle$, $[U, \langle h \rangle]$ üzerine nilpotent etki etmez. Dolayısıyla $G/\langle h \rangle^G$ nin her altgrubu altnormal ve böylece $G/\langle h \rangle^G$ lokal nilpotenttir. Dolayısıyla $\langle h \rangle^G$ nin mekezleyeni lokal nilpotent ve G de sonlu indekslidir. Böylece G hemen hemen-nilpotent gruptur. Dolayısıyla bu bir çelişkidir.

3.27. Lemma

G , her nilpotent olmayan altgrubu altnormal olan lokal sonlu bir grup olsun ve X , G nin lokal nilpotent altgrubu olsun öyle ki G/X abelyen p -grup olsun. O zaman G hemen hemen-lokal nilpotenttir [10].

İspat

Varsayalım ki G hemen hemen-lokal nilpotent olmasın. Lemma 3.26 nın ispatından G nin aşıkâr p -radikali olduğunu varsayabilir ve o zaman $G=XH$ şeklinde yazabiliriz öyle ki H , G nin p -altgubu. [10] daki sonuç 2.1 den G çözülebilirdir ve X in komütatör uzunluğuna tümevarım yaparak X in bir G -invariant abelyen A altgrubu vardır öyle ki G/A ve HA hemen hemen lokal nilpotenttir. Dolayısıyla H ın sonlu indeksten bir K altgrubu vardır öyle ki XK/A ve KA lokal nilpotenttir. X bir p' -grup olduğundan $[X,K] \leq A$ ve $[A,K]=1$ dir. Dolayısıyla K nın X üzerine etkisi nilpotenttir. Dolayısıyla XK lokal nilpotent ve G de sonlu indekslidir ki bu çelişki demektir.

4. TEOREM 1.1' İN İSPATI

Burada öncelikle bir G grubunun her altgrubu altnormal ya da $\mathfrak{N}\mathfrak{C}$ grup ise o zaman G ye $\mathfrak{X}$ sınıfından grup denileceğini belirtelim. Ayrıca şunu ifade etmek gerekirse bir $\mathfrak{N}\mathfrak{C}$ grubunun Chernikov genişlemesi yine bir $\mathfrak{N}\mathfrak{C}$ grubunun içindedir. Bu sonuç [18] deki Lemma 1 in ispatından sağlanmaktadır ve bu çalışmada birkaç yerde kullanılmakta olduğu için bu bölümde öncelikle bu lemma ve ispatı verilecektir.

[18] deki Lemma 1

G lokal dereceli minimal non-“nilpotent-by-Chernikov” grup olsun. O zaman G nin Chernikov grup olan öz görüntüsü yoktur. Özel olarak G bir *mükemmel* gruptur.

İspat

Kabul edelim ki G nin Chernikov olan öz görüntüsü var olsun. O zaman G nin öyle bir öz normal N altgrubu vardır ki G/N Chernikovdur. Hipotezden G nin her öz altgrubu nilpotent-by-Chernikov olduğundan N nin öyle bir normal nilpotent altgrubu R vardır ki N/R Chernikov gruptur. $\bar{R} = R^G$, R nin G içindeki normal kapanışı olsun. [25] deki Lemma 4.7 den dolayı $\bar{R}$ nilpotenttir. O zaman G/N , Chernikov grup olduğundan

$$G / \bar{R} / N / \bar{R} \cong G / N$$

Chernikov gruptur. Böylece G , nilpotent-by-Chernikov olur ki bu hipotezle çelişir. Böylece G nin Chernikov olan öz görüntüsü yoktur.

Aşık olmayan her abelyen grup homomorfik görüntü olarak, bir p asal sayısı için mertebesi p olan bir devirli gruba ya da quasidevirli C_{p^∞} grubuna sahiptir. Böylece eğer $G' < G$ ise G/G' aşık olmayan abelyen grup olduğundan G/G' nin homomorfik görüntüsünün mertebesi p olan devirli grup ya da C_{p^∞} olduğundan G nin Chernikov olan bir homomorfik görüntüsü olur ki bu hipotezle çelişir. Böylece $G'=G$ dir.

Şimdi Teorem 1.1 için gerekli lemmaları verelim. Önceden verildiği üzere Teorem 1.1 de G , $\mathfrak{X}$ sınıfından lokal sonlu ve sonlu üslü bir grup ise G nin nilpotent bir grubun sonlu genişlemesi olduğu ifade edilmişti. Aşağıdaki lemma ise Teorem 1.1 in lokal nilpotent olması durumuyla ilgilidir.

4.1. Lemma

G lokal nilpotent ve sonlu üslü bir grup ve G , her altgrubu altnormal ya da nilpotent-by-Chernikov olan grup olsun. O zaman G nilpotenttir.

İspat

G , sonlu exponentli olduğundan aynı zamanda periyodik bir gruptur. Ayrıca hipotezden G lokal nilpotent olduğundan Teorem 3.12 den G , p -gruplarının direkt çarpımı olarak yazılabilir. Kabul edelim ki G nilpotent olmasın. O zaman bir p asal sayısı için G nin bir p -komponenti nilpotent değildir. Böylece G yi p -grup olarak alabiliriz. Hipotezden G bir $\mathfrak{X}$ sınıfından grup olduğundan G nin altnormal olmayan her altgrubu $\mathfrak{N}\mathfrak{C}$ gruptur. O zaman H , G nin $\mathfrak{N}\mathfrak{C}$ altgrubu ise o zaman H nin öyle bir N normal nilpotent altgrubu vardır ki H/N Chernikovdur. G sonlu üslü olduğundan H/N sonlu üslü Chernikov grup olduğundan H/N sonludur. O halde G nin altnormal olmayan her altgrubu nilpotent-by-sonlu ($\mathfrak{N}\mathfrak{F}$) dır. Ayrıca Önerme 3.19 dan dolayı G , çözülebilir bir gruptur. Böylece G bir sonlu üslü çözülebilir grup olduğundan Önerme 3.17 den dolayı G bir Baer gruptur. Böylece G nin altnormal olmayan her altgrubu nilpotenttir. [10] daki Teorem 3 den dolayı G nin her altgrubu altnormal ve G sonlu üslü olduğundan Teorem 3.21 den G nilpotenttir.

Bundan sonra bütün çabalar her altgrubu altnormal ya da nilpotent-by-chernikov olan lokal sonlu grupların hangi durumlarda (lokal nilpotent)-by-Chernikov ($L\mathfrak{N}\mathfrak{C}$) olduğu üzerinde yoğunlaşacaktır. Sonraki 3 sonuç (sonlu üslü olmanın ötesinde olunan durumlarda) $\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{N}\mathfrak{C}$ sınıfından olan bir lokal sonlu grubun ($L\mathfrak{N}\mathfrak{C}$) olmayan kesime sahip olduğu ve bu kesimin ya elemanter abelyen ya da rank1 (sonlu üreteçli her altgrubu devirli) tipinden bir (abelyen grup by bir abelyen) grubun split genişlemesi olduğunu göstermektedir.

4.2. Lemma

G , her altgrubu altnormal ya da nilpotent-by-Chernikov olan lokal sonlu bir grup ve $G \notin (L\mathfrak{N})\mathfrak{C}$ olsun. O zaman G nin bir $G_0 \notin (L\mathfrak{N})\mathfrak{C}$ altgrubu vardır öyle ki G_0/X ya elemanter abelyen ya da bütün asal komponentleri asal mertebeden ya da rank1 tipinden olacak şekilde G_0 ın lokal nilpotent X altgrubu vardır.

İspat

$G \notin (L\mathfrak{N})\mathfrak{C}$ olduğundan aynı zamanda $G \notin \mathfrak{N}\mathfrak{C}$ dir ve $G \in \mathfrak{X}$ olduğundan Önerme 3.20 den dolayı G çözülebilirdir. X , G nin lokal nilpotent radikali olsun. Altnormal abelyen altgruplarının üzerinde minimal şartı sağlayan periyodik çözülebilir gruplar Chernikovdur ([6]:176); Ancak hipotezden G/X Chernikov değildir. G lokal sonlu olduğundan G/X de lokal sonlu ve dolayısıyla Lemma 3.16 dan A/X sonsuz abelyen altnormal altgrubuna sahiptir ve A/X Chernikov değildir.

O zaman A/X abelyen ve torsiyon olduğundan Teorem 3.25 den kendi p -komponentlerinin direkt toplamıdır ve Chernikov olmadığından sonsuz sayıda asal içerir ve dolayısıyla A/X , asal üslü ya da asal komponentleri asal mertebeden olan sonsuz bir G_0/X altgrubuna sahiptir. Üstelik G_0 , G de altnormal ve X , G_0 ın lokal nilpotent radikalidir. Böylece G_0 istenilen türden bir altgruptur.

4.3. Lemma

G , lokal sonlu bir grup ve $G \in \mathfrak{X}$ olsun. N , G nin lokal nilpotent radikali olmak üzere G/N elemanter abelyen p -grup olsun. O zaman G nin $(L\mathfrak{N})\mathfrak{C}$ olmayan bir $G_0=A \rtimes H$ kesimi vardır öyle ki H elemanter abelyen p -grup ve A , G_0 ın lokal nilpotent radikali ve A , abelyen p' -gruptur.

İspat

Kabul edelim ki G nin yukarıda tanımlanan tipten her kesimi $(L\mathfrak{N})\mathfrak{C}$ grup olsun. Bu durumda G nin de $(L\mathfrak{N})\mathfrak{C}$ grup olduğu çelişkisi elde edilecektir. T , G nin bir altgrubu ve S de T nin lokal nilpotent radikali olsun. O zaman hipotezden T/S Chernikovdur. Fakat

hipotezden N , G nin lokal nilpotent radikali olmak üzere G/N elemanter abelyen p -grup olduğundan $TN/N \cong T/T \cap N = T/S$ de elemanter abelyen p -grup olduğundan T/S sonlu üslüdür. Dolayısıyla T/S sonludur. O halde G nin hipotezdeki gibi her kesimi $(L\mathfrak{N})\mathfrak{S}$ dır. N , G nin lokal nilpotent radikali olduğundan M , p -grup, B de p' -altgrup ve M ve B G -invariant altgruplar olmak üzere $N = M \times B$ şeklinde yazılabilir. Ayrıca G/M nin aşıkart olmayan normal p -altgrubu yoktur. Kabul edelim ki G/M nin aşıkart olmayan normal p -altgrubu H/M olsun. G lokal sonlu olduğundan H/M p -grup olduğundan H/M nin her sonlu üreteçli altgrubu sonlu p -grup ve dolayısıyla nilpotenttir. O zaman H/M , G/M nin lokal nilpotent normal alt grubudur. Fakat N/M , G/M nin lokal nilpotent radikali olduğundan $H/M \leq N/M$ ve $N = M \times B$ ve N/M bir p' -grup olduğundan H/M , G/M nin p' -alt grubudur. Bu ise bir çelişkidir. Böylece G/M nin aşıkart olmayan normal p -altgrubu yoktur. Böylece genelliği bozmadan N yi bir p' -grup olarak Kabul edebiliriz. G/N sonsuz elemanter abelyen p -grubu olduğundan G nin her sonlu p -altgrubu G nin daha büyük bir p -altgrubu içindedir ve böylece G nin sonsuz abelyen p -altgrubu vardır ve N , G nin dolayısıyla NH ın bir lokal nilpotent radikali ve $N \cap H = 1$ olduğundan $G = N \rtimes H$ olarak alabiliriz. Önerme 3.19 dan N çözülebilirdir ve G/N abelyen olduğundan G çözülebilirdir. Böylece Teorem 3.1 den dolayı N , G -invariant abelyen A alt grubunu içerir. $AH \leq NH$ olduğundan AH ve $G/A \in (L\mathfrak{N})\mathfrak{S}$ dir. Dolayısıyla H da sonlu indeksli bir K alt grubu vardır öyle ki AK ve NK/A lokal nilpotenttir.

Şimdi H bir p -grup ve $K \leq H$ olduğundan K da bir p -gruptur. O halde N bir p' -grup ve K bir p -grup ve AK lokal nilpotent olduğundan Teorem 2.69 dan dolayı $[A, K] = 1$ dir ve ayrıca NK/A lokal nilpotent olduğundan

$$[(NA/A), (KA/A)] = 1$$

$$\Rightarrow [NA, KA]A/A = 1$$

$$\Rightarrow [N, KA] \leq A$$

ve Teorem 2.15 den

$$[N, KA] = [N, A][N, K]^A \leq A$$

olur. A , G nin normal abelyen alt grubu olduğundan $[N, A]$, A nın içindedir ve dolayısıyla $[N, K] \leq A$ olur. Böylece $[N, K, K] \leq [A, K] = 1$ olduğundan Tanım 2.33 den dolayı K , N ye

nilpotent etki eder. Dolayısıyla Lemma 2.34 den dolayı K , N üzerine aşıkâr etki eder ve tekrar Teorem 2.69 den NK nilpotenttir. Şimdi $G/A \in (L\mathfrak{N})\mathfrak{F}$ ve NK/A lokal nilpotent olduğundan $|G:NK|$ sonlu olur. Dolayısıyla $G \in (L\mathfrak{N})\mathfrak{C}$ dur çelişkisi elde edilir.

4.4. Lemma

G , lokal sonlu bir grup ve $G \in \mathfrak{X}$ ve N , G nin normal lokal nilpotent altgrubu olsun öyle ki G/N , asal komponentleri asal mertebeden olan sonsuz abelyen grup olsun. Eğer $G \notin (L\mathfrak{N})\mathfrak{C}$ ise o zaman G nin $G_0 = A_0 \rtimes H$ olacak şekilde $(L\mathfrak{N})\mathfrak{C}$ olmayan kesimi vardır öyle ki A_0 abelyen ve normal ve H , asal komponentleri asal mertebeden olan sonsuz abelyen altgrup ve $\pi(H) \cap \pi(A_0) = \emptyset$ dir.

İspat

Varsayalım ki G nin yukarıda tanımlanan türden her kesimi $(L\mathfrak{N})\mathfrak{C}$ sınıfından olsun. Böylece Lemma 4.3 ün ispatından görüldüğü gibi bu kesimleri $(L\mathfrak{N})\mathfrak{F}$ dir. O zaman $G \in (L\mathfrak{N})\mathfrak{F}$ çelişkisi elde edilmeye çalışılacaktır.

Şimdi Kabul edelim ki π , N nin aşıkâr olmayan p -komponentleri sonlu olan p asallarının kümesi olsun. O zaman G de bir sonlu indeksli altgrubuna geçerek G/N nin π' -grup olduğunu kabul edebiliriz. G lokal sonlu olduğundan G/N de lokal sonlu ve Tanım 2.77 daki açıklamadan dolayı G/N sayılabilir olduğundan Teorem 2.38 den $G = N \rtimes H$ olacak şekilde bir H π' -grubu mevcuttur öyle ki H abelyen ve tüm asal komponentleri asal mertebededir. Önerme 3.19 dan dolayı N çözülebilir olduğundan N nin komütatör serisi vardır ve dolayısıyla N nin komütatör uzunluğuna tümevarım yaparak HN' grubunu *hemen hemen lokal nilpotent* olduğunu gösterelim. Yani H da sonlu indeksli bir H_1 altgrubu için H_1N' grubunun lokal nilpotent olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki N nin çözülebilirlik uzunluğu d olsun. Eğer $d=1$ ise $N'=1$ dir. Dolayısıyla $HN'=H$ ın sonlu indeksli bir altgrubunun olduğunu göstermek yeterlidir. G , lokal sonlu bir grup ve $G \in \mathfrak{X}$ olduğundan H da lokal sonlu bir grup ve $H \in \mathfrak{X}$ olur ve Önerme 3.20 den dolayı H hemen hemen-lokal nilpotenttir. İddia $d=i$ için doğru olsun. Yani $[H_1, N^{(i)}]=1$ olsun. O zaman $d=i+1$ için doğru olduğunu gösterelim. Yani $[H_1, N^{(i+1)}]=1$ olduğunu göeterelim. Şimdi $HN^{(i+1)}/N^{(i)}$ yukarıda tanımlanan türden kesim olduğundan $H_1N^{(i+1)}/N^{(i)}$ lokal nilpotenttir ve dolayısıyla [8] deki

Teorem 1.5 den faydalanarak $[H_1 N^{(i)}/N^{(i)}, N^{(i+1)}/N^{(i)}]=1$ dir. Bu durumda $[H_1, N^{(i+1)}] \leq N^{(i)}$ olur ve $[N^{(i+1)}, H_1, H_1]=1$ dir. Dolayısıyla $H_1, N^{(i+1)}$ üzerinde nilpotent etkiye sahiptir ve böylece $[H_1, N^{(i+1)}]=1$ dir. Dolayısıyla $H_1 N'$ lokal nilpotent ve böylece HN' hemen hemen lokal nilpotenttir. H_1, N' yi merkezlediğinden dolayı $H_1 N/N'$ grubu elde edilir.

$$(H_1 N)/N' / N/N' \cong (H_1 N)/N \cong H_1 / (H_1 \cap N) \cong H_1$$

şeklinde yazılabilir. H sonsuz ve $|H : H_1| < \infty$ olduğundan H_1 sonlu olamaz ve dolayısıyla HN/N' (lokal nilpotent)-by-sonlu değildir. Ancak N/N' abelyen ve normal ve H asal komponentleri asal mertebeden olan bir grup olduğundan HN/N' , G nin yukarıda tanımlanan türden bir kesimidir ve varsayımdan dolayı (lokal nilpotent)-by-sonlu olması gerekir. Dolayısıyla çelişki elde edilir ve böylece $\pi = \pi(N) = \infty$ varsayabiliriz.

$G \notin (L\mathfrak{N})\mathfrak{F}$ ve N, G nin lokal nilpotent radikali olduğundan $\pi(N) = \infty$ olduğundan asalların sonsuz bir σ kümesi ve G nin elemanlarının $S = \{g_i : i \geq 1\}$ kümesi vardır öyle ki S , modulo N ye göre G yi üretir ve p asal sayı olmak üzere her $i \in \mathbb{N}$ için g_i elemanlarının mertebesi p_i asallarının kuvvetidir öyle ki $p_i \in \sigma$ dır. Ayrıca $i \neq j$ için $p_i \neq p_j$ dir. S nin her bir h_i elemanı için $G = N \langle h_1 h_2, \dots \rangle$ şeklinde yazılacağından ve G (lokal nilpotent)-by-sonlu olmadığından öyle bir $h_1 \in S$ için $N \langle h_1 \rangle \notin L\mathfrak{N}$ dir. r_1 asal ve k doğal sayı olmak üzere $|h_1| = r_1^k$ olsun ve q_1 asal ve m doğal sayı olmak üzere $|F_1| = q_1^m$ olacak şekilde N nin F_1 altgrubunu alalım. O zaman $\langle F_1, h_1 \rangle \notin L\mathfrak{N}$ olur. O zaman bir $x_1 \in F_1$ vardır öyle ki $[x_1, h_1] \neq 1$ dir. $\pi_1 = \{r_1, q_1\}$ ve N_1, N nin π_1 -radikali olsun. O zaman $N = N_1 \times M_1$ şeklinde yazılabilir. Lemma 4.3 ün ispatından G/M_1 (lokal nilpotent)-by-sonlu dur. Dolayısıyla $N/M_1, S$ nin sonlu sayıdaki elemanları hariç tüm elemanları tarafından merkezlenir. Yani H da sonlu indeksli bir H_0 altgrubu için için $N_1 H_0$ lokal nilpotenttir. $NH \notin (L\mathfrak{N})\mathfrak{F}$ olduğundan $NH_0 = N_1 H_0 \times M_1 H_0$ lokal nilpotent değildir. Dolayısıyla S den bir h_2 elemanı seçebiliriz öyle ki mertebesi $r_2 \in \sigma \setminus \pi_1$ asalının kuvvetidir ve $\langle M_1, h_2 \rangle \notin L\mathfrak{N}$ dir. yukarıda da yaptığımız gibi M_1 de q_2 asalının kuvveti mertebesinden bir x_2 elemanını seçebiliriz öyle ki $[x_2, h_2] \neq 1$ dir ve $q_2 \notin \pi_1 \cup \{r_2\}$ dir. $\pi_2 = (\langle x_1, x_2, h_1, h_2 \rangle)$ bir küme ve $N = N_1 \times N_2 \times M_2$ şeklinde yazılsın öyle ki $N_1 \times N_2, N$ nin π_2 -radikali olsun. O zaman tekrar G/M_2 (lokal nilpotent)-by-sonlu grubunu elde ederiz. Dolayısıyla S nin bir h_3 elemanını seçeriz öyle ki mertebesi $r_3 \in \sigma \setminus \pi_2$ asalının kuvveti mertebesindendir ve $\langle M_2, h_3 \rangle \notin L\mathfrak{N}$ dir. O zaman M_2 de q_3 asalının kuvveti mertebesinden bir x_3 elemanını seçebiliriz öyle ki $[x_3, h_3] \neq 1$ dir ve $q_3 \notin \pi_2 \cup \{r_3\}$ dir.

$\pi_3 = \langle x_1, x_2, x_3, h_1, h_2, h_3 \rangle$ bir küme ve $N = N_1 \times N_2 \times N_3 \times M_3$ şeklinde yazılsın öyle ki $N_1 \times N_2 \times N_3$, N nin π_3 -radikali olsun.

Bu şekilde devam edelim ve $H = \langle h_i: i \geq I \rangle$, $B = \langle x_i: i \geq I \rangle^H$ olsun. Ayrıca $\lambda = \{r_i: i \geq I\}$ ve $\mu = \{q_i: i \geq I\}$ olsun. O zaman B bir μ -grup ve $\lambda \cap \mu = \emptyset$ dir. $G_1 = BH$ olsun. Eğer $G_1 \in (L\mathfrak{N})\mathfrak{C}$ ise o zaman bir n doğal sayısı için $|H:H_0| = n$ olacak şekilde $H_0 \leq H$ vardır ve BH_0 lokal nilpotenttir. Bu durumda n ile aralarında asal her $h \in H$ için $B\langle h \rangle$ lokal nilpotent değildir ve dolayısıyla sonlu tanesi hariç tüm $[x_i, h_i]$ elemanları aşık olur ki bu inşaa ile ters düşer. Böylece G_1 , (lokal nilpotent)-by-sonlu değildir. Benzer şekilde M , $N \cap G_1$ in λ -radikali olsun. O zaman G_1/M de (lokal nilpotent)-by-sonlu değildir. Böylece genelliği bozmadan G nin her λ -alt grubunun rank1-grup olduğunu yani asal komponentlerinin asal mertebeden olduğunu varsayabiliriz. Lokal sonlu G_1 grubu sayılabilir olduğundan Teorem 2.37 den G_1 in H_1 , λ -alt grubu vardır öyle ki $N \cap G_1$ i tamamlar. Eğer $G_2 = B \rtimes H_1 \in (L\mathfrak{N})\mathfrak{C}$ ise o zaman H_1 de sonlu indeksli bir C alt grubu vardır öyle ki B yi merkezler ve o zaman $D = C^{G_1}$ grubu B grubunu merkezler. Bu durumda $\pi(G_1/D)$, λ nin sonlu sayıda elemanını içerir, tekrardan inşaa ile ters düşen bir durum ortaya çıkar. Dolayısıyla $G_2 \notin (L\mathfrak{N})\mathfrak{C}$ dur.

Kabul edelim ki B nin komütatör uzunluğu d olsun. G nin kesimleri üzerine yapılan hipotezden dolayı her $i=0, \dots, d-1$ için $H_1 B^{(i)} / B^{(i+1)} \in (L\mathfrak{N})\mathfrak{F}$ dır. Dolayısıyla H_1 içinde sonlu indeksli bir H_2 alt grubu vardır ve $B^{(i)} / B^{(i+1)}$ yi merkezler. Bu durmda [8] deki Teorem 1.5 den faydalanarak;

$$\left[\frac{(H_2 B^{(i+1)})}{B^{(i+1)}}, \frac{(B^{(i)} B^{(i+1)})}{B^{(i+1)}} \right] = 1 \text{ ve}$$

$$([H_2 B^{(i+1)}, B^{(i)}] B^{(i+1)}) / B^{(i+1)} = 1$$

$$\Rightarrow [H_2 B^{(i+1)}, B^{(i)}] \leq B^{(i+1)}$$

olur. Şimdi $i=0$ için

$$[H_2 B', B] \leq B'$$

ve Teorem 2.15 den

$$[H_2, B] \leq B'$$

ve dolayısıyla

$$[B, H_2] \leq B'$$

dir ve $i=1$ için

$$[H_2 B'', B'] \leq B''$$

ve Teorem 2.15 den

$$[H_2, B'] \leq B''$$

$$\Rightarrow [B', H_2] \leq B''$$

olur ve buradan görülür ki $[B, H_2, H_2] \leq B''$ dir. Bu şekilde devam edilirse $[B, {}_d H_2] = B^{(d)} = 1$ olur ki bu H_2 nin B ye nilpotent etki etmesi demektir ve böylece $[B, H_2] = 1$ olur. Dolayısıyla BH_2 lokal nilpotenttir ve dolayısıyla $G_2 \in (L\mathfrak{N})\mathfrak{C}$ olur ki bu sonucu kanıtlayan çelişki demektir.

4.5. Lemma

G , lokal sonlu bir grup ve $G \in \mathfrak{X}$ olsun. Her p asalı için G nin tüm p -kesimleri $\mathfrak{NC}$ grup olsun; Fakat G , $\mathfrak{NC}$ grup olmasın. O zaman lokal sonlu bir F cismi için A , F nin toplamsal alt grubu ve K da F cisminin F^* çarpımsal grubunun alt grubu ve bir halka olarak F yi üreten bir sonsuz alt grup olmak üzere G nin $A \rtimes K$ grubuna izomorf bir kesimi vardır.

İspat

Hipotezden G nin tüm p -kesimleri nilpotent-by-Chernikov olduğundan R , G nin lokal nilpotent radikali olmak üzere Lemma 3.18 den R de nilpotent-by-Chernikov dur. Dolayısıyla $G/R \notin \mathfrak{C}$ olur ki bu $G \notin (L\mathfrak{N})\mathfrak{C}$ demektir. Dolayısıyla Lemmalar 4.2, 4.3, 4.4 den $G = A \rtimes K$ şeklinde yazabiliriz öyle ki A normal abelyen alt grup ve K sonsuz elemanter abelyen alt grup ve burada K ya p -üslü ya da asal komponentleri asal mertebeden bir gruptur. Bu sonraki durum ile $\pi(K) \cap \pi(A_0) = \emptyset$ olur. $A = A_p \times A_{p'}$ olarak düşünelim öyle ki

A_p ve $A_{p'}$ sırasıyla A nın p ve p' komponentler olsun. Hipotezden $A_p K \in \mathfrak{N}\mathfrak{C}$ olduğu açıktır. Eğer $A_{p'} K \in \mathfrak{N}\mathfrak{C}$ ise o zaman $A_{p'}$, K nın sonlu indeksli bir altgrubu tarafından merkezlenir. Bu durumda $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{C}$ çelişkisini elde ederiz. Dolayısıyla $A_p K \notin \mathfrak{N}\mathfrak{C}$ dur. Bu durumda A altgrubunu p' -grup olarak düşünebiliriz.

$[A, K, K] = X$ olsun. A , G nin normal abelyen altgrubu olduğundan $X \triangleleft A$ dir. $K \cong KX/X$ olduğundan

$$\begin{aligned} [(A/X), (KX/X)] &= ([A, KX]X)/X \quad \text{ve Teorem 2.15 den} \\ &= ([A, X][A, K]^X X)/X \\ &= [A, K]/X \end{aligned}$$

olur. Çıkan sonucun tekrar KX/X ile komütatörünü alırsak $X/X=1$ grubunu elde ederiz ki bu K nın A/X e nilpotent etki etmesi demektir. Dolayısıyla Lemma 2.34 den dolayı $[A/[A, K, K], K]=1$ dir. Dolayısıyla $[A, K] \leq [A, K, K]$ olur ve zaten $[A, K, K] \leq [A, K]$ olduğundan $[A, K, K]=[A, K]$ olarak yazabiliriz ve eğer $K[A, K] \in \mathfrak{N}\mathfrak{C}$ ise o zaman $[A, K]$, K da sonlu indeksli altgruplar tarafından merkezlenir ve aynı sonuç tekrar eder. Dolayısıyla eğer gerekirse $[A, K]$ yerine A koyabiliriz ve böylece $A=[A, K]$ seçebiliriz. Genelliği bozmadan $C_K(A)=1$ olarak da varsayabiliriz.

K , A üzerinde etkiye sahip olduğundan [8] deki Teorem 1.11 den dolayı A nın K -invariant altgrupları vardır. Dolayısıyla D , A nın K -invariant altgrubu olsun. $A = [A, K] = [A, KD]$ olduğundan Lemma 3.2 den dolayı KD , G de altnormal değildir. $G \in \mathfrak{X}$ olduğundan KD nilpotent-by-sonludur. O halde D , K nın sonlu indeksli altgrubu tarafından merkezlenir. Özel olarak, eğer $[A, k] < A$ ise yine [8] deki Teorem 1.11 den dolayı $[A, k]$, K -invariant olur ve o zaman K da sonlu indeksli bir H altgrubu için $[A, k, H]=1$ olur. Şimdi K abelyen olduğundan $[k, H, A]=1$ olduğundan Lemma 3.24 den dolayı $[A, H, k] = 1$ olur. $C_K(A)=1$ olduğundan $[A, H] < A$ olur. Böylece tekrar $[A, H]K$ nilpotent-by-sonlu olur ve $[A, H]$, K da sonlu indeksli bir L altgrubu tarafından merkezlenir sonucunu verir. $H \cap L \leq H$ ve $H \cap L \leq L$ olduğundan $[A, H \cap L, H \cap L] < [A, H, L] = 1$ olur ve buradan $H \cap L$, A ya nilpotent etki eder. Lemma 2.34 den dolayı $[A, H \cap L] = 1$ dir. H ve L , K da sonlu indeksli olduğundan Teorem 2.30 dan dolayı $|K:H \cap L| < \infty$ olur. O zaman $A(H \cap L)$ nilpotent olduğundan

$G=A \rtimes K \in \mathfrak{NC}$ olur. Böylece çelişki elde edilir. Dolayısıyla aşık ar olmayan her $k \in K$ için $[A,k]=A$ olur.

D ve E , A nın K -invariant altgrupları olsun. Eğer $A=D \times E$ ise o zaman K nın sonlu indeksli bir altgrubu hem D yi hem de E yi merkezler ve dolayısıyla A yı merkezler. Böylece $G=A \rtimes K$ tekrar $\mathfrak{NC}$ grup olur ki yine çelişki elde ederiz. Dolayısıyla bir q asalı için A bir q -gruptur. Ayrıca $A=[A,K]$ olduğundan Sonuç 2.74 den dolayı $C_A(K)=1$ dir.

Şimdi A nın K -modüle göre basit olduğunu gösterelim. $B \leq A$ ve B , K -invariant olsun. O zaman $BK \in \mathfrak{NC}$ dur. Dolayısıyla K da sonlu indeksli bir H altgrubu için BH nilpotent olur ve dolayısıyla $[B,H]=1$ olur. Her aşık ar olmayan $k \in K$ için $C_A(k)=1$ ve $[B,H]=1$ olduğundan $B=1$ dir. Dolayısıyla A basittir ve özel olarak $A^q=1$ dir.

Şimdi $\mathbb{Z}_q K$ grup halkasını R ile gösterelim Teorem 2.56 dan dolayı R nin en az bir maksimal ideali vardır. R -modül olarak A , R/M bölüm modülüne izomorfdur ve burada M , R nin maksimal ideali ve K nın F üzerine etkisi sağdan çarpımdır. Tanım 2.60 dan dolayı R abelyen ve M , maksimal ideal olduğundan Teorem 2.57 den dolayı R/M cisimdir. Bu cismi F ile gösterelim. $\mathbb{Z}_q K$ grup halkası olduğundan tanım gereği aynı zamanda K bazlı vektör uzayıdır. Dolayısıyla K , R yi üretir ve dolayısıyla da F yi üretir. F nin karakteristiği q olduğundan Teorem 2.59 dan dolayı F nin asal alt cismi $\mathbb{Z}_q$ ya izomorftur. Her $k \in K$ için K lokal sonlu olduğundan $|\mathbb{Z}_q(k): \mathbb{Z}_q| < \infty$ olur ve $[\mathbb{Z}_q(k): \mathbb{Z}_q]$ cisim genişlemesi sonlu olur. Dolayısıyla Teorem 2.65 den dolayı K nın her elemanı F nin asal altcismi üzerinde cebirseldir. Böylece giriş kısmındaki “bir cismin lokal sonlu cisim olabilmesi için gerek ve yeter koşulun pozitif karakteristiğe sahip ve asal altcismi üzerinde cebirsel olmasıdır” teoreminden dolayı F , lokal sonlu bir cisimdir. ■

Teorem 1.1

G lokal sonlu bir grup ve $G \in \mathfrak{X}$ olsun. Eğer G sonlu üslü ise o zaman G nilpotent-by-sonlu dur.

Teorem 1.1'in ispatı

Her p asalı için G nin bütün p -kesimleri lokal nilpotenttir. G , sonlu üslü olduğundan Lemma 2.1 den dolayı G nin her p -kesimi nilpotenttir. Eğer G nilpotent-by-sonlu değil ise o zaman $G \notin \mathfrak{N}\mathfrak{C}$ dir ve dolayısıyla G nin Lemma 2.5 de tanımlanan bir $A \rtimes K$ kesimi vardır öyle ki $A \rtimes K \notin \mathfrak{N}\mathfrak{C}$ dir; fakat K , bir F cisminin çarpımsal grubunun periyodik altgrubu olduğundan rank1 gruptur ve Teorem 2.67 den dolayı K nın her sonlu altgrubu devirlidir ve $\exp(G)$ sonlu olduğundan K da sonlu olur. Böylece çelişki elde ederiz. Dolayısıyla G nilpotent-by-sonlu dur. ■

5. BAZI ÖRNEKLER VE TEOREM 1.2' NİN İSPATI

Lemma 4.5 ten hareketle bu bölümde $A \rtimes K$ split genişlemesi üzerinde çalışılacak ve $\mathfrak{X}\mathfrak{N}\mathfrak{C}$ sınıfına ait olunması durumundaki özellikleri belirlenecektir.

F , lokal sonlu cisim ve karakteristiği p olsun ve A ve F^* sırasıyla F nin toplamsal ve çarpımsal altgrupları olsun. Eğer $K \leq F^*$, F yi halka olarak (ya da denk olarak cisim olarak) üretiyorsa o zaman $A \rtimes K$ ayışmasını $G(F,K)$ ile göstereceğiz. Burada K , A üzerine cismin çarpma işlemine göre etki eder ve etkiyi şöyle tanımlayalım

$$\begin{aligned} &: A \times K \rightarrow A \\ &(a,k) \rightarrow ak^{-1} \end{aligned}$$

Bu etki yardımıyla her $a,b \in A$ ve her $k,\ell \in K$ için $A \rtimes K$ yarı direkt çarpımındaki herhangi iki elemanın çarpımı Tanım 2.35 yardımıyla

$$(k,a)(\ell,b) = (k\ell, a\ell^{-1} + b)$$

şeklinde tanımlanır ve buradan

$$(\ell,b)^{-1} = (\ell^{-1}, -b\ell)$$

dir. Bundan sonra A nın her a elemanını $(a,1)$ ve K nın her k elemanını $(0,k)$ ile göstereceğiz. Şimdi her $a, b \in A$ ve her $g \in G$ için

$$\begin{aligned} a^g &= (a,1)^{(b,k)} \\ &= (b,k)(a,1)(b,k)^{-1} \\ &= (k,b)(1,a)(k,b)^{-1} \\ &= (1,ak) = (ak,1) \end{aligned}$$

dir. O zaman

$$C_G(A) = C_{A \rtimes K}(A) = \{(a, k) \in G : (a, 1)^{(a, k)} = (a, 1), \forall a \in A\} \\ = \{(a, k) \in G : (ak, 1) = (a, 1), \forall a \in A\}$$

ve buradan $k=1$ olur ki bu $C_G(A) = A$ demektir ve $p \notin \pi(K)$ olduğundan $A = Fitt(G)$ dir.

Şimdi yarı direkt çarpımdan faydalanarak G' komütatör altgrubunun A nın içinde olduğunu gösterelim.

$$[G, G] = \langle g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} : g_1, g_2 \in G \rangle \\ = \langle (a_1, k_1)(b_2, k_2)(a_1, k_1)^{-1}(b_2, k_2)^{-1} : a_1, b_2 \in A, k_1, k_2 \in K \rangle \\ = \langle (k_1, a_1)(k_2, b_2)(k_1, a_1)^{-1}(k_2, b_2)^{-1} : a_1, b_2 \in A, k_1, k_2 \in K \rangle \\ = \langle (k_1 k_2, a_1 k_2^{-1} + a_2)(k_1^{-1}, -a_1 k_1)(k_2^{-1}, -a_2 k_2) : a_1, b_2 \in A, k_1, k_2 \in K \rangle \\ = \langle (k_2, a_1 k_2 k_1^{-1} + a_2 k_1 - a_1 k_1)(k_2^{-1}, -a_2 k_2) : a_1, b_2 \in A, k_1, k_2 \in K \rangle \\ = \langle (1, a_1 k_1 + a_2 k_1 k_2 - a_1 k_1 k_2 - a_2 k_2) : a_1, b_2 \in A, k_1, k_2 \in K \rangle \leq A$$

olur ve dolayısıyla $G' \leq A$ dır ve böylece G nin bütün komütatör altgrupları A nın içindedir. Dolayısıyla G , metabelyendir. A , nilpotent ve $A \triangleleft G$ olduğundan aynı zamanda lokal nilpotent ve böylece A yı G nin lokal nilpotent radikali olarak da alabiliriz. Ayrıca $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{C}$ olması için gerek ve yeter koşul $K \in \mathfrak{C}$ olmasıdır. K nın her sonlu altgrubu devirli olduğundan dolayı $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{C}$ olması için gerek ve yeter koşul $\pi(K)$ nın sonlu olmasıdır diyebiliriz.

Şimdi G nin elemanlarının eşlenik ve komütatörlerini tanımlayalım. Her $a, b \in A$ ve her $k, \ell \in K$ için

$$(a, k)^{(b, \ell)} = (-b\ell + a\ell + b\ell k^{-1}, k) \text{ ve } [(a, k)(b, \ell)] = (ak(\ell - 1_F) + b\ell(1_F - k), 1_F)$$

şeklindedir.

5.1. Lemma

Kabul edelim ki F_1 , F nin altcismi öyle ki K nın aşikar olmayan K_1 altgrubu tarafından üretilsin. O zaman F_1^* , F_1 in çarpımsal altgrubu olmak üzere, $G_1=G(F_1, K_1)$ nın $G=G(F, K)$ daki normalleyeni $G(F_1, K \cap F_1^*)$ dır.

İspat

$K_1 \leq K \leq F^*$ ve $K_1 \leq F_1^* \leq F_1$ olduğundan $K_1 \leq K \cap F_1^*$ dır. K_1 , F_1 i ürettiğinden $K \cap F_1^*$ da F_1 cismini üretir. Dolayısıyla $G=G(F_1, K \cap F_1^*)$ tanımlanabilir. Burada A_1 , F_1 in toplamsal altgrubu olmak üzere $G_1=A_1K_1$ ve eğer $a, b \in A_1$, $k \in K_1$ ve $\ell \in K \cap F_1^*$ ise o zaman $-b\ell + a\ell + b\ell k^{-1} \in A$ olduğundan

$$(a, k)^{(b, \ell)} = (-b\ell + a\ell + b\ell k^{-1}, k) \in G_1$$

olur. Dolayısıyla $(b, \ell) \in G(F_1, K \cap F_1^*)$ elemanları G_1 i normaller ve böylece

$$G(F_1, K \cap F_1^*) \leq N = N_G(G_1)$$

dir. Eğer $N \leq G(F_1, K \cap F_1^*)$ olduğunu gösterirsek ispat biter. Şimdi

$$G(F_1, K \cap F_1^*) = A_1(K \cap F_1^*) = A_1K \cap A_1F_1^*$$

şeklinde ifade edersek $(b, \ell) \in A_1K$ olduğundan N , A_1K nın alt grubudur. Dolayısıyla $N \leq A_1F_1^*$ olduğunu göstermek yeter. $a \in A$ ve $k \in K$ için $u=(a, k) \in N$ olsun. O zaman $(1_F, 1_F) \in A_1$ olmak üzere

$$(1_F, 1_F)^u = (1_F, 1_F)^{(a, k)} = (-ak + 1k + ak, 1) = (k, 1_F) \in A_1$$

ve dolayısıyla $k \in A_1$ ve $k \in F_1^*$ dır. F_1^* , grup olduğundan $k^{-1} \in F_1^*$ ve $k^{-1} \in K$ olduğundan $k^{-1} \in K \cap F_1^*$ olur. $K_1 \neq 1$ olduğundan bir aşikar olmayan $x \in K_1$ seçebiliriz.

$$[(a, 1_F), (0_F, x)] = (ax - a, 1_F) \in G_1 \cap A = A_1$$

dir. Dolayısıyla $ax-a=a(x-1_F) \in F_1$ dir. $1_F \neq x$ olduğundan ve etkiden $a \in F_1$ ve böylece $u=(a,k) \in G(F_1, K \cap F_1^*)$ dir. Dolayısıyla $N=N_G(G_1)=G(F_1, K \cap F_1^*)$ dir. ■

5.2. Lemma

Lemma 5.1 deki notasyon ile F_1 , F nin özaltcismi olsun. O zaman G_1 , G de altnormal değildir.

İspat

Kabul edelim ki bir n pozitif tamsayısı için G_1 den G ye bir

$$G_1=H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_n \leq G$$

serisi olsun. $N=N_G(G_1)$ olsun. O zaman lemma 5.1 den

$$N=G(F_1, K \cap F_1^*)=A_1(K \cap F_1^*)$$

dir. $H_1 \cap K \cap F_1^*=K_2$ olsun. $G_1 \triangleleft H_1$ olduğundan

$$H_1=H_1 \cap N=H_1 \cap A_1(K \cap F_1^*)=A_1(H_1 \cap K \cap F_1^*)=A_1 K_2$$

şeklinde yazılabilir. $K_1 \leq G_1 \leq H_1$ olduğundan K_2 , F_1 i üretir. Dolayısıyla $H_1=G(F_1, K_2)$ olarak ifade edebiliriz. Bu durumda Lemma 5.1 den $N_G(H_1)=N$ olur. Bu şekilde devam edilirse her $i \geq 0$ için $N_G(H_i) = N$ olur. $K \cap F_1^*$, F_1 i ürettiğinden ve F_1 , F nin özaltcismi olduğundan $N < G$ dir. Dolayısıyla her $i \geq 0$ için $N_G(H_i) = G$ olamaz ve bu durumda H_i , G de normal olamayacağından G_1 , G de altnormal değildir. ■

Şimdi $G(F, K)$ nın $\mathfrak{XNC}$ olduğu durumların gerek ve yeter şartı verilmeye çalışılacaktır. F ve K ve $G(F, K)$ önceden tanımlanan yapılar olsun.

5.3. Lemma

Aşağıdakiler birbirine denktir.

- a) $G=G(F,K) \in \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{NC}$
- b) $G \notin \mathfrak{NC}$ fakat G nin her altgrubu ya normal ya da abelyen-by-Chernikovdur.
- c) $\pi(K)$ sonsuz fakat $\pi(K \cap F_1^*)$ sonludur öyle ki F_1 , F nin özaltcismi ve F_1^* , F_1 in çarpımsal alt grubudur.

İspat

Öncelikle kabul edelim ki (a) sağlansın, (c) nin sağlandığını gösterelim. O zaman $G=G(F,K)$ ve $G \in \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{NC}$ olsun. F_1 ve F_1^* daha önceden bahsettiğimiz yapılar olmak üzere $K_1=K \cap F_1^*$ olsun. Lemma 5.1 den $K \cap F_1^*$, F_1 i ürettiğinden $G_1=G(F_1, K_1)$ tanımlanabilir. Lemma 5.2 den G_1 , G de altnormal olmadığından $G_1 \in \mathfrak{NC}$ dur. Giriş kısmından $\text{Fitt}(G_1)=A_1$ diyebiliriz. Böylece $G_1/A_1 \cong K_1 \in \mathfrak{C}$ olur ki bu yine giriş kısmından $\pi(K_1)$ in sonlu olması demektir. Dolayısıyla $\pi(K \cap F_1^*)$ sonludur.

Şimdi (b) den (a) nin sağlandığını gösterelim. $G \notin \mathfrak{NC}$ fakat G nin her altgrubu ya normal ya da abelyen-by-Chernikov ve G nin her altgrubu normal olsun. O zaman aynı zamanda her altgrubu altnormal olur. G nin her altgrubu abelyen-by-Chernikov olsun. Her abelyen grup nilpotent olduğundan G nin bu türden altgrupları aynı zamanda nilpotent-by-Chernikov olur. Kabulumüzden $G \notin \mathfrak{NC}$ olduğundan $G \in \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{NC}$ olur.

Şimdi (c) den (b) nin sağlandığını gösterelim Varsayalım ki (c) deki koşullar sağlansın. A , F nin toplamsal altgrubu ve $H \leq G$ olsun. $H \cap A=1$ ise $H \leq K$ olur ve K abelyen olduğundan H da abelyendir. Dolayısıyla $1 \neq a \in H \cap A$ için

$$H^*=AH \cap K$$

olsun. K , A üzerinde etkiye sahip olduğundan H^* ile $H \cap A$ arasında bir yarı direkt çarpım tanımlanabilir. Her $a_1 \in A$ ve $h_1 \in H$ için

$$\begin{aligned}
\langle a \rangle^{AH \cap K} &\leq \langle a \rangle^{AH} = (a_1, h_1) \langle (a, 1) \rangle (a_1, h_1)^{-1} \\
&= (h_1, a_1) (1, a) (h_1^{-1}, -a_1 h_1) \\
&= (h_1, a_1 + a) (h_1^{-1}, -a_1 h_1) \\
&= (1, a_1 h_1 + a h_1 - a_1 h_1) \\
&= (1, a h_1) \leq (H \cap A) H = H
\end{aligned}$$

dir ve dolayısıyla $\langle a \rangle^{H^*} \leq H$ olur. H^* bir F_1^* cismini üretir öyle ki F_1 , F nin altcismidir. Dolayısıyla $\langle a \rangle^{H^*} = \langle a \rangle^{F_1} \leq H$ şeklinde yazılabilir. Eğer $F_1 = F$ ise o zaman giriş kısmından $H \geq \langle a \rangle^{F_1} = \langle a \rangle^F = A$ olur ve dolayısıyla $A \leq H \triangleleft G = G(F, K)$ olur. Eğer $F_1 \subset F$ ise o zaman hipotezden $\pi(H^*) < \infty$ olur. Şimdi $H \leq G$ olduğundan

$$H = H \cap G = H \cap AK \text{ ve } HA = HA \cap AK$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$HA/A = A(H \cap K)/A \cong A(AH \cap K)/A = AH^*/A = H^*/A \cap H^*$$

H^* , Chernikov olduğundan HA/A da Chernikovdur. Sonuç olarak $H/H \cap A \cong HA/A$ olduğundan ve $H^* \in \mathfrak{C}$ ve A , abelyen ve $H \cap A \leq A$ olduğundan $H \cap A$ abelyen olur ki bu H grubunun abelyen-by-Chernikov grup olması demektir. Dolayısıyla (b) gösterilmiş olur.

Teorem 1.2

G , lokal sonlu grup ve $G \in \mathfrak{X}$ ve her p asalı için G nin her p -kesimi $\mathfrak{NC}$ grup sınıfından olsun o zaman aşağıdakiler denktir.

a) $G \notin \mathfrak{NC}$

b) Bir lokal sonlu F cisimi için G , $G(F, K) = A \rtimes K$ grubuna izomorf bir kesime sahiptir ve aşağıdakiler sağlanır.

i) A , F cisminin toplamsal altgrubu

ii) K , F nin F^* çarpımsal grubunun altgrubu ve K , A ya çarpımsal olarak etki eder ve F cismini üretir.

iii) $\pi(K)$ sonsuz fakat $\pi(K \cap F_1^*)$ sonludur öyle ki F_1 , F nin özaltcismidir.

Teorem 1.2 nin ispatı

$G \notin \mathfrak{N}\mathfrak{C}$ olsun. O zaman lemma 4.5 ten (b) sağlanır.

(b) deki koşulların sağlandığını kabul edelim. O zaman Lemma 5.3 (c) den $G \notin \mathfrak{N}\mathfrak{C}$ olur. Böylece (a) sağlanır. ■

$\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{N}\mathfrak{C}$ sınıfından olan lokal sonlu grupların varlığı hakkında şimdiye kadar bir bilgi bulunamamaktadır. Fakat şimdi $\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{N}\mathfrak{C}$ sınıfından olan lokal sonlu grupların varlığına Lemma 5.3 yardımıyla bir örnek verilecektir. Öncelikle eğer K ve F , Lemma 5.3 (c) nin şartlarına sahip ise $\pi(K)$, p asallarının kümesi olsun öyle ki K grubu asal mertebeli elemanlara sahip olmak üzere $\pi(K)$ sonsuz olduğundan K , F yi üretir. $K_1 \leq K$ ve $\pi(K_1) = \infty$ ise o zaman K_1 de F yi üretir. Dolayısıyla Lemma 5.3 (a) dan dolayı $G(F, K_1) \in \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{N}\mathfrak{C}$ dur. Örneğin K_1 , $\text{soc}(K)$ ye ait sonsuz bir altgrup ise K abelyen olduğundan K_1 abelyen ve F cisminin karakteristiği asal olduğundan Tanım 2.68 in hemen altındaki açıklamadan dolayı K_1 elemanter abelyen p -gruptur ve Lemma 3.3 (b) den dolayı $G(F, K_1)$ in altgrupları ya normal ya da abelyen-by-sonludur ve $G(F, K_1)$ Lemma 4.4 de elde edilen gruptur.

$\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{N}\mathfrak{C}$ sınıfına ait grupları inşa ederken Zsigmondy'nin teoremi anahtar rol oynayacaktır. Zsigmondy'nin teoreminden hareketle p bir asal sayı ve n pozitif bir tamsayı olmak üzere $p=2$ iken $n=1$ ya da $n=6$ durumları hariç öyle bir q asal sayısı vardır ki p nin çarpımsal derecesi modulo q ya göre n ye denktir. Yani $|p|=n(\text{mod } q)$ ve buradan $p^n=1(\text{mod } q)$ dur. Böyle q asalına p^n için Zsigmondy asalı diyeceğiz. Zsigmondy Teoremi, özel durumlarıyla birlikte, çalışmaya şu şekilde uyarlanacaktır. F , sonlu bir cisim olsun öyle ki $|F| \neq 2$ ya da $|F| \neq 2^6$ olsun. O zaman F bir x elemanı tarafından üretilir öyle ki x elemanının mertebesi asaldır. Şimdi $0 \neq x \in F$ ve $|F|=p^n$ ve $|x|=q$ olsun. O zaman $q|(p^n-1)$ ve $m < n$ için $q \nmid (p^m-1)$ yani x , F nin tek bir özaltcisinin içindedir. Böyle asal mertebeli üreteç F nin Zsigmondy üreteçi denecektir. Şu açıktır ki F nin Zsigmondy üreteçlerinin mertebesi yine F nin Zsigmondy asalı olduğu açıktır. Gerçekten de x , F nin bir üretici ve $|x|=q$ ve q, p^n nin Zsigmondy asalıdır. Ayrıca F_1 , F den farklı ve farklı mertebeye sahip ve F ile karakteristikleri aynı olan bir sonlu cisim ise o zaman Zsigmondy üreteçleri de farklı mertebededir.

5.4. Teorem

F sonsuz lokal sonlu cisim olsun. O zaman F nin çarpımsal grubunun öyle bir K altgrubu vardır ki K, F yi cisim olarak üretir ve $G(F,K) \in \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{NC}$ dur.

İspat

K abelyen olduğundan ve F cismini ürettiğinden Lemma 2.76 den dolayı F sayılabilir. Aynı zamanda F lokal sonlu olduğundan Lemma 2.78 den dolayı F nin sonlu cisimlerinin bir $F_1 \subset F_2 \subset \dots$ zinciri vardır öyle ki $F = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$ şeklinde yazılır ve burada F_1 , 2^6 dan daha büyük bir mertebeye sahip olduğunu kabul edebiliriz. Şimdi her bir F_i cismi için x_i Zsigmondy üreticini seçelim. K, F nin çarpımsal grubunun altgrubu olsun öyle ki her $i \geq 1$ için x_i elemanları tarafından üretilsin. O zaman K, $\langle x_i \rangle$ altgruplarının direkt çarpımıdır öyle ki her x_i asal mertebededir. $F_1 \subset F_2 \subset \dots$ zinciri sonsuz olduğundan ve x_i ler F_i cisimlerinin Zsigmondy üreticileri olduğundan $\pi(K)$ sonsuzdur. Dolayısıyla Lemma 3.3 den dolayı K, F yi üretir. Şimdi π , $\pi(K)$ nın sonsuz altkümesi olsun. O zaman K nın π -komponenti tarafından üretilen cisim sonsuz sayıda F_i altcismine içerir. Dolayısıyla F yi içerir. Böylece $\pi(K)$ nın hiçbir sonsuz altkümesi F nin öz altcismine üretmez. Dolayısıyla ancak $\pi(K)$ nın sonlu altkümeleri F nin öz altcismelerini üretir. $F_i \subset F$ için F_i^* , F_i nin çarpımsal altgrubu olmak üzere $\pi(K \cap F_i^*) < \infty$ olur ve Lemma 5.3 (c) den $G \in \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{NC}$ elde edilir. ■

Bundan sonra $\mathfrak{X}$ sınıfından olan $G(F,K)$ gruplarıyla ilgili iki önerme verilecektir. Öncelikle Teorem 5.4, $\mathfrak{X}$ sınıfından olan $G(F,K)$ gruplarıyla ilgili açıklayıcı bir karakterizasyon vermez. Ancak Teorem 5.4 ün ispatında tanımlanan yapı sayesinde bu karakterizasyon aşağıdaki gibi yapılabilir.

5.5. Önerme

F lokal sonlu bir cisim ve H, F nin çarpımsal grubunun altgrubu olsun. Eğer $G(F,H) \in \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{NC}$ ise o zaman $\text{soc}(H)$ bir K altgrubuna sahiptir öyle ki $G(F,K) \in \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{NC}$ ve K nın yapısı Teorem 5.4 ün ispatındaki gibidir.

İspat

$S = \text{soc}(H)$ olsun. $G(F, H) \in \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{N}\mathfrak{C}$ olduğundan ve Teorem 1.2 nin ispatından sonraki açıklama kısmından $G(F, S) \in \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{N}\mathfrak{C}$ dir. $\pi = \pi(S)$ sonsuz kümesi üzerinde bir kısmi sıralı bağıntıyı şu şekilde tanımlayalım. $p, q \in \pi$ olmak üzere $p < q$ olması için gerek ve yeter koşul S nin bir p -komponenti tarafından üretilen altcismnin, S nin bir q -komponenti tarafından üretilen altcism tarafından içerilmesidir. Bu sıralama ile π kümesinin bir maksimal elemana sahip olmadığı iddia edilecektir.

Şimdi P, F nin asal altcismi olsun. Çelişki elde etmek için q asalını $(\pi, <)$ da maksimal kabul edelim. $x \in S$ ve $|x| = q$ olsun. $[P(x): P] = n$, x in P üzerindeki derecesidir. r, n nin bir asal böleni olsun.

$$W(r) = \{m \in \mathbb{Z}^+ : (n, m) | n/r\}$$

kümesini göz önüne alalım. Bu kümenin elemanlarının, bölenlerinin ve ortak katlarının da yine bu kümeye ait olduğunu gösterelim. Bunun için önce $W(r)$ nin bir m elemanını alalım. O zaman $(n, m) | n/r$ dir. d pozitif tamsayısı için $(n, m) = d$ olsun. O zaman $d | m$ ve $d | n$ ve $(n, d) = d$ olup zaten $d | n/r$ olduğundan $d, W(r)$ kümesinin elemanıdır. Dolayısıyla m nin böyle d bölenleri aynı zamanda n yi de bölüyor ise zaten $W(r)$ kümesi içinde yer alır. O zaman b pozitif tamsayısı için $b | m$ ve $(n, b) = \ell$ ve $b \nmid n$ olsun. $\ell | b$ ve $b | m$ olduğundan $\ell | m$ dir. Aynı zamanda $\ell | n$ olduğundan $\ell | (n, m)$ ve $(n, m) | (n/r)$ olduğundan $\ell | (n/r)$ dir. $\ell = (n, b)$ olduğundan $b \in W(r)$ olur ve böylece m nin tüm bölenleri $W(r)$ kümesinde olur ve böylece $W(r)$ kümesi bölenlerine göre kapalıdır. Benzer şekilde $W(r)$ nin elemanlarının ortak katlarında yine $W(r)$ de olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla P üzerindeki derecesi $W(r)$ de olan F cisminin elemanlarının kümesini F_r ile gösterelim o zaman F_r, F nin altcismidir. $[P(x): P] = n$ ve $(n, n) \nmid (n/r)$ olduğundan $x \notin F_r$ dir ve böylece F_r, F nin özaltcismidir. Dolayısıyla Lemma 5.3(c) den $\pi(S \cap F_r) < \infty$ dur. Dolayısıyla π nin sonsuz ψ altkümesi vardır ve S nin ψ -komponentleri F_r özaltcismilerinin bileşiminden ayrıktır ve burada r, n nin asal bölenleri üzerinde değişir. $s \in \psi$ ve $y \in S$ ve $|y| = s$ olsun. Eğer $m = [P(y): P]$ ise $y \notin F_r$ olduğundan (çünkü ψ, F_r altcismilerinin bileşiminden ayrıktı) $m \notin W(r)$ dir. Dolayısıyla $n | m$ dir ve böylece $P(x) \subseteq P(y)$ olur. $P(x) \subseteq P(y)$ denkliği sonlu sayıda s için

sağlanabileceğinden $P(x) \subset P(y)$ yazabiliriz ki bu $q < s$ demektir ve böylece q nun maksimalliği ile çelişki elde etmiş oluruz.

Şimdi $\xi, (\pi, <)$ nin bir maksimal zinciri olsun. π nin maksimal elemanı olmadığından ξ zinciri sonsuzdur. Her $i \in \mathbb{N}$ için kesin artan q_i dizisinin elemanlarını düzenleyelim. x_i , S de q_i dereceden bir eleman olsun ve $F_i = P(x_i)$ olsun. O zaman $q_i < q_{i+1}$ elde ederiz ve bu $F_i \subset F_{i+1}$ demektir. $K = \langle x_i : i \in \mathbb{N} \rangle$, F nin bir çarpımsal altgrubu tarafından içerilsin. $\pi(K) = \xi$ sonsuz olduğundan K , F yi üretir ve Teorem 5.4 den dolayı $F = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$ dir. Son olarak her i için x_i , F_i için Zsigmondy üreticidir. Böylece K , Teorem 5.4 de verilen yapı elde edilmiş olur.

Son olarak $F^* = F \setminus \{0\}$, F nin çarpımsal altgrubu olmak üzere $G(F, F^*) \in \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{NC}$ olması durumu hakkında bir önerme verilecektir. P , p -asalı mertebesinden bir cisim ve q , p den farklı olma zorunluluğu olmayan bir asal sayı olsun. $\bar{P}$, P nin normal kapanışı ve $\bar{P}(q)$, $\bar{P}$ nin bir altcismi öyle ki P üzerindeki derecesi q nun kuvveti olan elemanlardan oluşsun. Eğer her $i \geq 0$ tamsayısı için P_i , $\bar{P}$ nin P üzerindeki mertebesi q^i olan tek altcismi ise o zaman $\bar{P}(q)$, $\{P_i : i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ zincirinin bileşimi olarak yazılır ve P_i , $\bar{P}(q)$ nun öz altcismelerini gösterir.

5.6. Önerme

F , lokal sonlu cisim ve F^* , F nin çarpımsal cismi olsun. O zaman $G(F, F^*) \in \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{NC}$ olması için gerek ve yeter koşul F nin $\bar{P}(q)$ cisimlerinden birine izomorf olmasıdır.

İspat

Önce yeter şartı gösterelim. $F \cong \bar{P}(q)$ olsun. Teorem 5.4 ün ispatından $\pi(F^*) = \infty$ dur ve her öz altcismi sonludur. Dolayısıyla Lemma 5.3.(c) den $G(F, F^*) \in \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{NC}$ dur.

Şimdi de gerek şartı gösterelim. $G(F, F^*) \in \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{NC}$ olsun. O zaman

$$\pi = \{r : x \in F \text{ ve } r = |P(x):P|\}$$

ve $\varphi \subset \pi$ olmak üzere (Teorem 5.5 in ispatından)

$$F_\psi = \{y \in F : m = |P(y):P| \text{ ve } m, \psi\text{-sayısı}\}$$

F nin altcismi olmak üzere eğer π sonsuz ise o zaman bir $\pi \supset \pi_1 \supset \pi_2 \dots$ kesin azalan zinciri seçilir. O zaman $F = F_\pi \supset F_{\pi_1} \supset F_{\pi_2} \supset \dots$ ve eğer K_i, F_{π_i} nin çarpımsal altgrubu ise $K_1 \supset K_2 \supset \dots$ dir ve böylece $K_1 \notin \mathcal{C}$ olur. Böylece $\pi(K_1)$ sonsuz olduğundan K_1, F_{π_1} cismini üretir ancak F nin her öz altcismi sonlu olduğundan $F_{\pi_1} = F$ olması gerekir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla π sonlu olmak zorundadır.

Her $q \in \pi$ için S_q , n pozitif tamsayılarından oluşsun öyle ki F, P üzerinde derecesi q^n olan altcisme sahip olsun. Eğer S_q sonlu ise π de sonlu olduğu için F nin elemanlarının P üzerindeki derecesinde bir üst sınır vardır. Böylece F sonlu olur. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla S_q sonsuzdur. $F_{\{q\}} \cong \bar{P}(q)$ olur. $\bar{P}(q)$, P üzerindeki derecesi q asalının kuvveti olan elemanlardan oluşan $\bar{P}$ nin altcismi ve S_q sonsuz olduğundan $\bar{P}(q)$ sonsuzdur ve dolayısıyla sonsuz çarpımsal altgrubu tarafından üretilir ve böylece bu grup sonsuz sayıda asal içerir. $F_{\{q\}}$ da aynı özelliğe sahip ve F nin alt cismi olduğundan Lemma 5.3 den dolayı $F_{\{q\}} = F$ dir. ■

KAYNAKLAR

1. Howard, S. and Cutolo G. (2012). Locally finite groups with all subgroups either subnormal or nilpotent-by-Chernikov. *Central European Journal of Mathematics*, 10, 942-949.
2. Derek, R. (1991). *A course in the theory of groups*. New York: Springer-Verlag.
3. Derek, R. (1972). *Finiteness conditions and generalized soluble, Part1*. Berlin: Springer.
4. Derek, R. (1972). *Finiteness conditions and generalized soluble, Part2*. Berlin: Springer.
5. Möhres, W. (1989). Torsionsfreie gruppen, deren untergruppen alle subnormal sind. *Mathematische Annalen*, 84, 254-259.
6. Howard, S. (2011). Groups with all subgroups subnormal or nilpotent-by-Chernikov. *Rendiconti del Seminario Mathematico della Universita di Padova*, 126, 245-253.
7. Suzuki, M. (1982). *Group theory 1*. New York: Springer-Verlag.
8. Suzuki, M. (1982). *Group theory 2*. New York: Springer-Verlag.
9. Howard, S. (2002). Torsiyon-free group with all non-nilpotent subgroup subnormal. *Topics in infinite groups, Quaderni di mathematica*, 8, 297-308.
10. Howard, S. (2002). Groups with all non-nilpotent subgroups subnormal. *Topics in infinite groups, Quaderni di mathematica*, 8, 309-326.
11. Casolo, C. (2008). Groups with all subgroups subnormal. *Note di mathematica*, 2, 1-149.
12. Hungerford, W.T. (1974). *Graduate text in mathematics*. New York: Springer-Verlag.
13. Hall, M. (1959). *The theory of groups*. New York: The Macmillan Company.
14. Hilton, P. and Mislin, G. and Roitberg, J. (1975). *Localization of nilpotent groups and spaces*. Amsterdam: Nort-Holland Publishing Company.
15. Everest, G. and Ward, T. (2005). *An introduction to number theory*. London: Springer-Verlag.
16. Casolo, C. (2003). Nilpotent subgroups of groups with all subgroups subnormal. *London Mathematical Society*, 35, 15-22.
17. Nakaoka, I. N. and Rocco, N. (2001). Nilpotent action on non-nilpotent tensor products of groups. *Matematica Contemporanea*, 21, 221-238.

18. Napolitani, F. and Pegoraro, E. (1997). On groups with nilpotent-by-Chernikov proper subgroups. *Archive der Mathematik*, 2, 89-94.
19. Casolo, C. (2002). On the structure of groups with all subgroups subnormal. *Journal of Group Theory*, 3, 293-300.
20. Smith, H. (1983). Hypercentral groups with all subgroups subnormal. *London Mathematical Society*, 3, 229-234.
21. Smith, H. (2001). On non-nilpotent groups with all subgroups subnormal. *Ricerche di Matematica*, 2, 217-221.
22. Asar, A. O. (2000). Locally nilpotent p-groups whose proper subgroups hypercentral or nilpotent-by-Chernikov. *London Mathematical Society*, 2, 412-422.
23. Dixon, M. R. (1994). *Sylow Theory, Formations and Fitting classes in locally finite groups*. Singapore: Word Scientific Publishing Company of Private Limited.
24. Asar, A. O. (2009). *Cebir*, Ankara: Eflatun.
25. Hartley, B. (1982). Periodic locally soluble groups containing an element of prime order with Chernikov centralizer. *Quarterly Journal of Mathematics Oxford Series* (2), 33, 309-323.
26. Möhres, W. (1990). Auflösbarkeit von gruppen, deren alle untergruppen subnormal sind, *Archive der Mathematik*, 54, 232-235.
27. İnternet: nbloomf. A finite group is nilpotent if and only if all pairs of elements of relatively prime order commute. URL: <http://www.webcitation.org/query?url=https%3A%2F%2Fcrazyproject.wordpress.com%2F2010%2F07%2F02%2Fthe-class-of-nilpotent-groups-is-closed-under-subgroups-and-quotients-but-not-extensions-2%2F&date=2016-12-04>. Son Erişim Tarihi: 04.12.2016.
28. Golod, E. S. (1964). On nil-algebras and residually finite p-groups. *İzvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk Seriya matematikheskaya*, 28, 273-276

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : KAYHAN, Aykut
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 08.04.1991, Adana
 Medeni hali : Bekar
 Telefon : 0(531)894 79 53
 e-mail : aykutkayhann@gmail.com



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yükseklisans	Gazi Üniversitesi/Matematik Bölümü	Devam Ediyor
Lisans	Çukurova Üniversitesi/Matematik Bölümü	2013
Lise	Mehmet Özöncel Anadolu Lisesi	2009

Yabancı Dil

İngilizce

Sempozyum

1. Kayhan, A., (7-9 Eylül 2015). *Her altgrubu altnormal ya da Nilpotent-by-Chernikov olan lokal sonlu gruplar*. 28. Ulusal Matematik Sempozyumu, Akdeniz Üniversitesi, Antalya



GAZİ GELECEKTİR..